Tratado de Análisis Matemático

TOMO CUARTO

CALCULO INTEGRAL

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1905

GALDEANO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

4

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.—T. VIII

Tratado de Análisis Matemático

TOMO CUARTO

CALCULO INTEGRAL

POR EL

Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1905

LIBRO PRIMERO

INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS

CAPÍTULO I

Diversos métodos de integración

§ 1.° Métodos generales de integración

1. Definiciones. Ya se sabe que si $\varphi(x)$ es una función cuya diferencial es $f(x)dx$, la integral general, es decir, la función que comprende todas aquéllas cuya diferencial es la dada, se expresa por $\varphi(x) + C$, siendo C una constante arbitraria.

También se expuso la noción de integral definida *(Principios generales de la teoría de las Funciones*, pág. 37), que se expresa por la fórmula

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \varphi(X) - \varphi(x_0),$$

expresando $f(x)$ la derivada de $\varphi(x)$. Sin detenernos en estos conceptos, vamos á insistir brevemente en los métodos generales de integración cuyos principios se expusieron en el tomo segundo de esta obra.

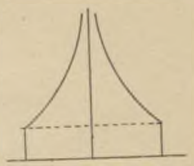
Respecto á las integrales definidas, citaremos el caso siguiente, para el que la regla general no es válida. Tenemos según ésta que

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)_1 - \left(-\frac{1}{x}\right)_{-1} = -2.$$

Sin embargo, el elemento $\frac{dx}{x^2}$ es siempre positivo, y la curva cuya ecuación es $y = \frac{1}{x^2}$ está representada en la figura adjunta.

Considerando las dos integrales

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2},$$



en las que ε expresa un número positivo muy pequeño, la aplicación de la fórmula general no ofrece dificultad, y se tiene

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1, \quad \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

y estas dos integrales aumentan sin límite cuando ε tiende hacia cero. El área es infinita.

Tambien tenemos la fórmula siguiente, que se verifica por diferenciación

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x};$$

y aplicando la regla general, se tendrá el resultado absurdo

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, l(-1) = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1}.$$

Esto obedece á que la regla general no es aplicable á los casos propuestos; y el modo de tratarlos se estudió en el tomo II.

2. Integración por sustitución. Dada una diferencial $f(x)dx$, si hacemos $x = \varphi(z)$, siendo z una nueva variable, tendremos

$$dx = \varphi'(z)dz, \quad f(x)dx = f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz,$$

Y si se puede integrar esta diferencial se obtendrá la integral de la diferencial propuesta $f(x)dx$.

Ejemplo. Haciendo $1 + \log x = z$, se tiene

$$\int \frac{dx}{x} \sqrt{1 + \log x} = \int dz \sqrt{z} = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (1 + \log x)^{\frac{3}{2}}.$$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES. Ya se vió, (t. II), que puede procederse como sigue. Tendremos, por ejemplo, que

$$\int xdx \text{ arc sen } x = \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x - \int \frac{x^2 dx}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{ arc sen } x + \frac{1}{4} \text{ arc cos } x - \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2}.$$

4. SUMAS REDUCIBLES Á INTEGRALES. La fórmula

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \varphi(a) dx + \varphi(a + dx) dx + \ldots + \varphi(a + ndx) dx$$

permite representar por integrales definidas ciertas sumas.

Ejemplo 1.º Calcular el límite de la suma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n},$$

cuando n aumenta indefinidamente. Hagamos $n = \frac{a}{dx}$, y la suma se reducirá á

$$\frac{dx}{a} + \frac{dx}{a + dx} + \frac{dx}{a + 2dx} + \ldots\ldots + \frac{dx}{2a},$$

cuyo límite es

$$\int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \log 2a - \log a = \log 2.$$

2.º Sea la suma

$$\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{2n^2}.$$

Haciendo $n = \frac{1}{dx}$, será

$$\lim \left[\frac{dx}{1+dx^2} + \frac{dx}{1+(2dx)^2} + \ldots + \frac{dx}{1+(ndx)^2}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0 = \frac{\pi}{4}.$$

5. Ejemplos. Ya conocemos el método de integración por partes. Ahora vamos á aplicarlo á algunas integraciones.

1.º Sea $$\int \frac{x^2\,dx}{(x \text{ sen } x + \cos x)^2}.$$

Apliquemos el método á la integral

$$\int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x\,dx}{(x \text{ sen } x + \cos x)^2}.$$

Haremos $u = \frac{x}{\cos x}$, $v = -\frac{1}{x \text{ sen } x + \cos x}$

y tendremos

$$\int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x\,dx}{(x \text{ sen } x + \cos x)^2} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{x \text{ sen } x + \cos x}$$

$$+ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{\cos x} \frac{1}{x \text{ sen } x + \cos x} + \text{tg } x$$

$$= \frac{\text{sen } x - x \cos x}{x \text{ sen } x + \cos x}.$$

Análogamente

$$\int \frac{x^2\,dx}{(\text{sen } x - x \cos x)^2} = -\frac{x \text{ sen } x + \cos x}{\text{sen } x - x \cos x}.$$

2.° Sea $I_m = \text{sen}^m x\, dx$. Escribiremos

$$I_m = \int \text{sen}^{m-1} x \,.\, \text{sen}\, x dx.$$

É integrando por partes,

$$I_m = -\,\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \text{sen}^{m-2} x \cos^2 x dx. \quad (1)$$

Por ser $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, tendremos

$$\int \text{sen}^{m-2} x (1 - \text{sen}^2 x) dx = \int \text{sen}^{m-2} x dx$$

$$- \int \text{sen}^m x dx = I_{m-2} - I_m.$$

La fórmula (1) se reduce á

$$m I_m = -\,\text{sen}^{m-1} x \cos x + (m-1) I_{m-2},$$

que es una fórmula de reducción, siendo

$$I_1 = \int \text{sen}\, x dx = -\cos x, \qquad I_0 = \int dx = x.$$

3.° Sea $\qquad I_m = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}.$

Se tendrá

$$I_m = \frac{1}{a^2} I_{m-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^m}$$

Para $m - 2$, $a = 1$, $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{x}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{2} \text{arc tg}\, x.$

§ 2.° Aplicaciones

1 . $y = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ solución $y = \text{arc tg}\, e^x$.

2 . $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ solución $y = \sqrt{x^2 + a^2}$.

3 . $y = \int \frac{\text{arc tg}^2 x}{1 + x^2}\, dx$ » $y = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}^3 x$.

4 . $y = \int \frac{1}{1 + bx}\, dx$ » $y = \frac{1}{b}\, l(a + bx)$.

5 . $y = \int \sqrt{a + bx}\; dx$ » $y = \frac{2}{3b} \sqrt{(a + bx)^3}$.

6 . $y = \int e^{mx} dx$ » $y = \frac{e^{mx}}{m}$.

7 . $y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$ » $y = \frac{1}{a}\,\text{arc sen}\,\frac{bx}{a}$.

8 . $\int \text{sen}^2 x dx$ » $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x \cos x$.

9 . $\int x^3 lx dx$ » $y = \frac{x^4}{4}\left(lx - \frac{1}{4}\right)$.

10 . $\int x^2 \cos x dx$ » $y = (x^2 - 2)\,\text{sen}\, x + 2x \cos x$.

11 . $\int e^x\, \text{sen}\, x dx$ » $y = \frac{e^x}{2}(\text{sen}\, x - \cos x)$.

12 . $\int \frac{x^3}{(a + bx^2)^3}\, dx$ » $y = -\frac{a + 2bx^2}{4b^2 (a + bx^2)^2}$.

13 . $\int \frac{x\, e^x\, dx}{(1 + x)^2}$ » $y = \frac{-xe^x}{1 + x} + e^x$.

CAPÍTULO II

Integración de las fracciones racionales

§ 1.° Teoría

6. Integración de las fracciones. Ya se vió (Calc. dif. p. 200-207) que ocurren cuatro casos en la descomposición de las expresiones fraccionarias racionales en fracciones simples. Ahora solo falta obtener la integral en cada uno de dichos casos.

1.° y 2.° Para los casos de ser reales y desiguales ó reales é iguales las raíces del denominador de la fracción que se descompone en fracciones simples, la integración de cada sumando se obtiene por las fórmulas

$$\int \frac{A dx}{(x-a)} = A \int \frac{dx}{x-a} = A \log (x-a)$$

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = A \int dx (x-a)^{-m} = \frac{A (x-a)^{1-m}}{1-m}$$

o

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}.$$

3.° Sea la integral

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx,$$

en la cual suponemos que las raíces de $x^2+px+q=0$ son imaginarias.

Tendremos que

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2Ax + Ap + 2B - Ap}{x^2 + px + q}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{A(2x+p)}{x^2 + px + q}\, dx + \int \frac{B - \frac{1}{2}Ap}{x^2 + px + q}\, dx;$$

La primera integral es de la forma

$$\frac{A}{2}\int \frac{u'}{u}\, dx \quad ó \quad \frac{A}{2}\int \frac{d}{dx}(\log u)\, dx = \frac{A}{2}\log u.$$

Respecto á la segunda integral, vemos que

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(-\frac{p^2}{4} + q\right)};$$

y haciendo

$$\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = t \quad \text{será} \quad \frac{dx}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} = dt;$$

luego

$$\int \frac{dx}{x^3 + px + q} = \int \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\, \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Haciendo las sustituciones y cálculos, se obtiene finalmente

$$\int \frac{(Ax + B)\, dx}{x^2 + px + q} = \frac{A}{2}\log(x^2 + px + q)$$

$$+ \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}}\, \text{arc tg}\, \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}.$$

4.° caso. Tenemos, expresando por $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ las raíces del trinomio, que

$$\int \frac{(\mathrm{A}x + \mathrm{B}dx)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{\mathrm{A}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \int \frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Si se hace

$$(x-\alpha)^2+\beta^2 = t \quad \text{de donde} \quad 2(x-\alpha)\,dx = dt,$$

se tiene, salvo una constante, cuando $n > 1$,

$$\int \frac{\mathrm{A}(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{\mathrm{A}dt}{2t^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\frac{\mathrm{A}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}},$$

Para obtener la segunda integral, haremos $x-\alpha = \beta z$. de donde $dx = \beta dz$; y resultará

$$\int \frac{(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B})\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \frac{\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}}{\beta^{2n-1}}\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}.$$

Para obtener la última integral, observaremos que se tiene idénticamente

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n}. \qquad (1)$$

Pero $$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{2}\int z\,\frac{2z\,dz}{(1+z^2)^n},$$

y $$\frac{2z\,dz}{(1+z^2)^n} = d\left[-\frac{1}{(n-1)(1+z^2)^{n-1}}\right];$$

luego, integrando por partes, se tiene

$$\int \frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^n} = -\frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{2n-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Sustituyendo en (1) y reduciendo, se obtiene

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{(2n-2)(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Se ha reducido pues en una unidad el exponente del denominador. Haciendo las reducciones se llegará á la fórmula

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \times$$

$$\left[1 + \frac{2n-3}{2n-4}(z^2+1) + \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)(2n-6)}(z^2+1)^2 + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3}{(2n-4)(2n-6)\dots 4 \cdot 2}(z^2+1)^{n-2} \right]$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)\dots\dots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\dots\dots 4 \cdot 2} \operatorname{arc\,tg} z + C.$$

También puede obtenerse por un método indirecto la integral de que se trata, pues se tiene que

$$\int \frac{dx}{\beta + x^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{1}{\beta + x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right);$$

y obteniendo n veces la derivada de cada miembro con relación á β, resulta

$$\frac{(-1)^n\, 1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(\beta + x^2)^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right);$$

luego

$$\int \frac{dx}{(\beta + x^2)^n} = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \frac{d^{n-1}}{d\beta^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right).$$

Ejemplo 1.º Sea la integral

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^p x},$$

indicando p un número entero. Se obtiene fácilmente

$$\frac{1}{x(a+bx)^p} = \frac{1}{a^p x} - \frac{b}{a^{p+1}}\left[\frac{a^p}{(a+bx)^p} + \ldots + \frac{a}{a+bx}\right];$$

por consiguiente

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^p} = -\frac{1}{a^p} \log \frac{a+bx}{x}$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{1}{(p-k)a^k(a+bx)^{p-k}}.$$

Ejemplo 2.º Sea la integral de $\dfrac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}}$, expresando m y n dos enteros cualesquiera, y siendo $2n > m$. Las raíces de $x^{2n} + 1 = 0$ son de la forma

$$\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm i \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Tendremos, por consiguiente,

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{x - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n} - i \operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

$$+ \frac{B_k}{x - \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}},$$

Los coeficientes se calculan por las fórmulas

$$A_k = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} + i \operatorname{sen}(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} + i \operatorname{sen}\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right],$$

$$B_i = \frac{\cos(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n} - i \operatorname{sen}(m-1)\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2n\left[\cos\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n} - i \operatorname{sen}\frac{(2n-1)(2k-1)\pi}{2n}\right]}$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n} - i \operatorname{sen}\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\right];$$

y reuniendo las dos fracciones escritas bajo el signo Σ, el segundo miembro será

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\left[x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}{\left[x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]^2}$$

$$\frac{-\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}\operatorname{sen}\frac{m\pi(2k-1)}{2n}}{+\operatorname{sen}^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}$$

y por consiguiente

$$\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{k=n}\cos\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\times$$

$$l\left[1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+x^2\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n\pi}\operatorname{sen}\frac{m\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

Análogamente se obtendrá $\int\frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^{2n}}$.

7. Diferenciales binomias. En el caso de ser m, p, n números enteros, la diferencial $x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p$ entra en el caso de las diferenciales racionales. Expondremos el método de reducción, que es también aplicable cuando p sea fraccionario, en cuyo caso se tendrá que estudiar la integral entre las de las funciones irracionales. Integrando por partes, se tiene

$$\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}}{nb(p+1)}(a+bx^n)^{p+1}$$

$$-\frac{m-n}{nb(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\,dx. \qquad (1)$$

Sustituyendo en el segundo miembro $(a+bx^n)^{p+1}$ por $(a+bx^n)^p\,a+(a+bx^n)^p\,bx^n$; y haciendo pasar al primer miembro la integral semejante á la que se halla en éste, obtendremos

$$\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^p=\frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+np)b}$$

$$-\frac{m-n}{m+np}\frac{a}{b}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\,dx. \qquad (1)$$

Se tiene también evidentemente

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p=a\int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}$$

$$+b\int x^{m+n-1}\,dx(a+bx^n)^{p-1}, \qquad (2)$$

y aplicando á la segunda integral del segundo miembro la fórmula (1) de reducción, resulta

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+np}$$

$$+\frac{anp}{m+np}\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}dx. \qquad (3)$$

Las dos fórmulas (1) y (3) resueltas respecto á la integral del segundo miembro dan, por un cambio de letras,

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{ma}$$

$$-(m+n+np)\frac{b}{ma}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p dx, \qquad (4)$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}$$

$$+\frac{m+n(p+1)}{an(p+1)}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}dx. \qquad (5)$$

Si se aplican las fórmulas de reducción (1) y (3) á la integral de los segundos miembros de (4) y (5), se obtiene

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^m}{m}(a+bx^n)^p$$

$$-\frac{bnp}{m}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx, \qquad (6)$$

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)}$$

$$-\frac{m-n}{bn(p+1)}\int x^{m-n-1}(a+ba^n)^{p+1}. \qquad (7)$$

Las aplicaciones de estas fórmulas son numerosas.

Supongamos $n = 1$, haciendo $a + bx = z$, se tendrá

$$\int \frac{z^p dx}{x^{m+1}} = -\frac{z^{p+1}}{amx^m} + (p - m + 1)\frac{b}{am}\int \frac{z^p\, dx}{x^m}; \tag{8}$$

y esta fórmula permitirá simplificar el cálculo de muchas integrales. Sea por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{x^{m+1}z} = -\frac{1}{amx^m} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^m z}.$$

Por ser $\displaystyle\int \frac{dx}{xz} = -\frac{1}{a}\log\frac{z}{x}$, resulta

$$\int \frac{dx}{x^2 z} = \frac{b}{a^2}\log\frac{z}{x} - \frac{1}{ax},$$

$$\int \frac{dx}{x^3 z} = -\frac{b^2}{a^3}\log\frac{z}{x} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{1}{2ax^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^4 z} = \frac{b^3}{a^4}\log\frac{z}{x} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{1}{3ax^3}, \text{ etc.}$$

Si $m + 1$ se reduce á la unidad, la fórmula (8) es ilusoria.

Para reducir la integral $\displaystyle\int \frac{z^p}{x}dx$, escribiremos

$$\int \frac{z^p\, dx}{x} = \int \frac{z^{p-1}(a + bx)}{x}dx = \frac{z^p}{p} + a\int \frac{z^{p-1}\, dz}{x}, \tag{10}$$

y por la aplicación repetida de esta fórmula, el exponente p se reduce á la unidad.

Si se cambia p en $-p$, se deduce, resolviendo con relación á la integral que figura en el segundo miembro,

$$\int \frac{dx}{xz^{p+1}} = \frac{1}{apz^p} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{xz^p}.$$

La ecuación (8) da, suponiendo $n = 1$ y cambiando p en $-p$ m en $-m$, la fórmula de reducción más general

$$\int \frac{dx}{x^{m+1} z^p} = \frac{-1}{(m+p)x^m z^p} + \frac{a^p}{m+p} \int \frac{dx}{x^{m+1} z^{p+1}} .$$

de la que se deduce

$$\int \frac{dx}{x^{m+1} z^{p+1}} = \frac{1}{apx^m z^p} + \frac{m+p}{ap} \int \frac{dx}{x^{m+1} z^p} .$$

Si suponemos $n = 2$, haciendo $a + bx^2 = z$, tendremos

$$\int \frac{dx}{z^{p+1}} = \frac{x}{2apz^p} + \frac{2p-1}{2ap} \int \frac{dx}{z^p} .$$

De esta fórmula se deduce

$$\int \frac{dx}{z^2} = \frac{x}{2az} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{z} ,$$

$$\int \frac{dx}{z^3} = \frac{x}{4az^2} + \frac{3x}{8a^2 z} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{z} .$$

$$\int \frac{dx}{z^4} = \frac{x}{6az^3} + \frac{5x}{24a^2 z^2} + \frac{5x}{16a^3 z} + \frac{5}{16a^3} \int \frac{dx}{z} .$$

Se tiene también

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{z^{p+1}} = -\frac{x^n}{2bpz^p} + \frac{n}{2bp} \int \frac{x^{n-1} dx}{z^p} ,$$

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{z} = \frac{1}{b} \int \frac{x^{n-1}(a+bx^2)\,dx}{a+bx^2}$$

$$-\frac{a}{b} \int \frac{x^{n-1} dx}{z} = \frac{x^n}{bn} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{n-1} dx}{z} ,$$

de las que se deduce

$$\int \frac{x^2 dx}{z} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^4 dx}{z} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^6 dx}{z} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2 x}{b^3} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{dx}{z},$$

$$\int \frac{x^2 dx}{z^2} = -\frac{x}{2bz} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{z} \text{ etc.}$$

Además

$$\int \frac{dx}{z} = \int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ arc tg } x\sqrt{\frac{b}{a}},$$

y cuando x^2 es negativo,

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ sec } \mathrm{T}h \,.\, x\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

§ 3.° Aplicaciones

1. $\int \frac{xdx}{1 + x^4}$ solución $\frac{1}{2}$ arc tg x^2

2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ » $\frac{1}{2a}\, l \frac{x - a}{x + a}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ » $\frac{1}{2ai}\, l \frac{x - ai}{x + ai}$

4. $\int \frac{2x - 13}{(x - 5)^2}\, dx$ » $2l(x - 5) + \frac{3}{x - 5}$

5. $\int \frac{x+6}{x^2-3}\,dx$ solución $\frac{1}{2}\,l(x^2-3)+\sqrt{3}\,l\,\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$

6. $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ » $\frac{1}{2}\,l\,\frac{x^2+1}{x^2+3}$

7. $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3}\,dx$ » $-\frac{3}{2(x+2)^2}+\frac{4}{x+2}+l(x+2)$

8. $\int \frac{x^3+2x^2-1}{x^2(x-1)}\,dx$ » $x-\frac{1}{x}-lx-2l(x-1)$

9. $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x-2)^2x} = -\frac{2x-1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2(x-2)}$

$$+2l(x-1)-\frac{1}{4}\,lx-\frac{7}{4}\,l(x-2)$$

10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-1)} = \frac{1}{8}\,l\,\frac{x-1}{x+1}-\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\ tg}\,x$

11. $\int \frac{x^5dx}{(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\,l(x^3+1)+\frac{1}{3(x^3+1)}$

12. $\int \frac{xdx}{a^4+x^4}$ $\frac{1}{2a^2}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x^2}{a^2}$

13. $\int \frac{x^3}{a^4+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\,l(a^4+x^4)$

14. $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\left[l\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+2\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{x}{a}\right]$

15. $\int \frac{xdx}{a^4-x^4}$ $\frac{1}{4a^2}\,l\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right)$

16. $\int \frac{x^3dx}{a^4-x^4}$ $-\frac{1}{4}\,l(a^4-x^4).$

CAPÍTULO III

Integración de las expresiones irracionales

§ I.° Deducción de las reglas para las funciones del trinomio irracional de segundo grado

8. Caso de monomios irracionales. Una función que sólo contiene monomios irracionales es siempre integrable. Así, por ejemplo,

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

puede escribirse bajo la forma

$$\int \frac{\left(1 + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right) dx}{1 + x^{\frac{1}{3}}};$$

y si se hace $x = t^6$ de donde $dx = 6t^5 dt$, se tendrá la función racional

$$\frac{(1 + t^3 - t^4)6t^5 dt}{1 + t^2},$$

ó $\quad 6dt\left(- t^7 + t^6 + t^5 - t^4 + t^2 - t + \frac{1}{1 + t^2}\right)$

cuya integral es

$$-\frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + t^6 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \text{ arc tg } t + C.$$

Se reduce al caso anterior toda función que solo contiene radicales bajo los cuales se halla un mismo binomio de primer grado. Así, haciendo $ax + b = t^6$ en

$$\frac{\left[x^2 + \sqrt[3]{(ax + b)^2}\right] dx}{x + \sqrt{ax + b}},$$

resulta

$$x = \frac{t^6 - b}{a}, \quad dx = \frac{6t^5\, dt}{a}, \quad \sqrt[3]{(ax + b)^2} = t^4$$

y, por consiguiente, solo hay que integrar la fracción

$$\frac{6}{a^2} \frac{t^5[(t^6 - b)^2 + a^2 t^4]\, dt}{t^6 - b + at^3}.$$

9. Integración de $F(x, R)\,dx$. El monomio x^m se integra inmediatamente, cualquiera que sea m, pero la integración de $\sqrt[m]{F(x)}$ en la que $F(x)$ indica un polinomio cualquiera, ofrece grandes dificultades, pues ya la integración del radical $\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ engendra una transcendente nueva, la *función elíptica*, que no es reducible á ningún otro de los tipos de funciones estudiados anteriormente. El objeto actual será la integración de diferenciales de la forma $F(x, R)\,dx$, expresando F una función racional de x y de

$$R = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

1.º Hagamos

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + z$$

y tendremos

$$bx + c = 2xz\sqrt{a} + z^2, \quad x = \frac{z^2 - c}{b - 2z\sqrt{a}};$$

x y dx son racionales en z, lo mismo que el radical que es igual á $x\sqrt{a}+z$, por consiguiente la integral

$$\int F\left(\sqrt{ax^2+bx+c},\ x\right)dx \quad \text{tomará la forma} \quad \int \Phi(z)dz,$$

siendo Φ una función racional.

Ejemplo. Sea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad \text{Haciendo} \quad \sqrt{x^2+a^2}=x+z \quad \text{resulta}$$

$$a^2=2zx+z^2 \qquad x=\frac{a^2-z^2}{2z}, \qquad dx=-\frac{z^2+a^2}{2z^2}\,dz,$$

y sustituyendo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=-\int \frac{dz}{z}=-\log z=-\log\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)$$

$$=\log \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}-x}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-2\log a;$$

y por ser el resultado salvo una constante, será

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right).$$

2.° Cuando el coeficiente de x^2 es negativo, la transformación precedente introduce imaginarias. Haremos en este caso

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+zx;$$

y elevando al cuadrado será

$$ax^2+bx=2zx\sqrt{c}+z^2x^2, \qquad x=\frac{z\sqrt{c}-b}{a-z^2},$$

con lo que se reduce el problema á integrar una función racional en z.

3.° Cuando a y c son negativos, no se pueden aplicar los métodos anteriores, sin introducir imaginarias. Haremos entonces

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)},$$

y nos hallamos en el caso de integrar una expresión de la forma

$$\int dx\, \mathrm{F}\left[x, \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\right],$$

siendo F una función racional de x y de $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$. Haremos pues,

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}, \quad z^2 = \frac{\beta-x}{x-\alpha},$$

obteniéndose x, dx y $\sqrt{\dfrac{\beta-x}{x-\alpha}}$ en función racional de z.

Ejemplo. Sea integrar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}}.$$

Se hará $\quad \dfrac{x+a}{x-a} = z^2, \quad$ de donde

$$x = a\,\frac{z^2+1}{z^2-1}, \quad dx = -a\,\frac{4z}{(z^2-1)^2}\,dz;$$

y se tendrá

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{2\,dz}{1-z^2} = \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) dz = \log\frac{1+z}{1-z}.$$

Sustituyendo z por su valor, será

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

no escribiendo la constante $-2 \log(-a)$ en el segundo miembro, lo que es inútil.

Para obtener la integral de $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ es preferible observar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx : a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \text{arc sen}\,\frac{x}{a}.$$

10. Integración rápida. Expresando por R el radical de segundo grado de que tratamos, podremos escribir cualquier función racional de x y del radical bajo la forma

$$f = \frac{\varphi(x, \mathrm{R})}{\psi(x, \mathrm{R})},$$

expresando φ y ψ dos funciones enteras de x y de R. Pero toda función de x y de R se reduce á la forma $\mathrm{A} + \mathrm{BR}$, siendo A y B funciones enteras de x. Podremos por tanto escribir

$$y = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{BR}}{\mathrm{C} + \mathrm{DR}},$$

expresando A, B, C, D funciones enteras de x. Multiplicando en los dos términos por $\mathrm{C} - \mathrm{DR}$, resultará

$$f = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{QR}}{\mathrm{S}}, \quad \mathrm{S} = \mathrm{C}^2 - \mathrm{D}^2\mathrm{R}^2,$$

siendo P, Q, S funciones enteras de x; luego

$$f = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{QR}^2}{\mathrm{RS}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\,\frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Descomponiendo la función racional $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ en fracciones simples, la función f se reducirá á una suma de términos de la forma

$$\frac{x^m}{R}, \quad \frac{1}{(x-\alpha)^m R}, \quad \frac{\mu x + \nu}{(x^2+px+q)^n R},$$

siendo m, α, μ, ν, p, q constantes.

Convendría ahora reducir el radical R á una de las formas $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, para ello reduciremos la cantidad subrradical á una suma ó diferencia de cuadrados

$$ax^2 + bx + c = (mx+n)^2 + k^2$$
$$\text{ó} \quad = (mx+n)^2 - k^2 \quad \text{ó} \quad = -(mx+n)^2 + k^2.$$

Hagamos $mx + n = z$, y por consiguiente $dx = \dfrac{dz}{m}$;

y las integrales que se han de calcular serán de la forma

$$\int \varphi\left(z, \sqrt{z^2 \pm k^2}\right) dz, \quad \int \varphi\left(z, \sqrt{k^2 - z^2}\right) dz.$$

11. Integración de $\dfrac{x^m dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$ Hagamos $A_m = \displaystyle\int \frac{x^m dx}{\sqrt{k^2 - x^2}}$;

y observando que

$$d \,.\, x^m \sqrt{k^2 - x^2} = \left(m x^{m-1} \sqrt{k^2 - x^2} - \frac{x^{m+1}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \right) dx$$

$$d \,.\, x^m \sqrt{k^2 - x^2} = [mk^2 x^{m-1} - (m+1) x^{m+1}] \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}},$$

é integrando,

$$x^m \sqrt{k^2 - x^2} = mk^2 A_{m-1} - (m+1) A_{m+1};$$

y $$A_{m+1} = \frac{mk^2}{m+1} A_{m-1} - \frac{x^m}{m+1} \sqrt{k^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Pero $$A_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = \text{arc sen} \frac{x}{k},$$

$$A_1 = \frac{xdx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = -\sqrt{k^2 - x^2}.$$

De la fórmula (1) se deducen pues, las siguientes:

$$A_2 = \frac{k^2}{2} A_0 - \frac{x}{2}\sqrt{k^2 - x^2}, \quad A_3 = \frac{2k^2}{3} A_1 - \frac{x^2}{3}\sqrt{k^2 - x^2}$$

y así sucesivamente.

12. Integración de $\dfrac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Tenemos idénticamente

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)(b + 2a\alpha) + a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

ó para abreviar,

$$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + b'(x-\alpha) + c';$$

luego, el radical propuesto se reduce á

$$\int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^m \sqrt{a(x-\alpha)^2 + b'(x-\alpha) + c'}};$$

haciendo $$x - \alpha = \frac{1}{z}, \quad d(x-\alpha) = -\frac{dz}{z^2},$$

será

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{a + b'z + c'z^2}},$$

integral que se puede obtener poniendo $a + b'z + c'z^2$ bajo la forma de una suma de cuadrados.

§ 2.° INTEGRALES HIPERELÍPTICAS Y ELÍPTICAS

13. TIPOS DE INTEGRALES. Las integrales más importantes que han dado origen á una teoría completa son las de la forma

$$\int F(x, y)dx, \tag{1}$$

siendo F una función racional de x é y y ésta una función algebráica cualquiera de x, es decir, una función ligada á x por la relación

$$f(x, y) = 0,$$

siendo f un polinomio. La más sencilla de estas integrales, en el caso de ser y función racional de x, son aquéllas en que se tiene $y^2 = R(x)$, expresando $R(x)$ un polinomio, que supondremos no tiene más que raíces simples. Estas integrales se llaman *hiperelípticas*.

Supongamos que $R_{2p}(x)$ sea de grado par $2p$, siendo α una de sus raíces, y hagamos

$$x = \alpha + \frac{1}{z}.$$

La integral se hallará reducida á otra de la misma forma, pero en la que el radical contendrá un polinomio de grado $2p - 1$, pues

$$R_{2p}(x) = \frac{R_{2p-1}(z)}{z^{2p}}.$$

Si $R_{2p-1}(x)$ es un polinomio de grado $2p - 1$, haciendo $x = \frac{1}{z}$, tendremos

$$R_{2p-1}(x) = \frac{R_{2p-1}(z)}{z^{2p-1}} = \frac{zR_{2p-1}(z)}{z^{2p}},$$

y la nueva integral contiene bajo el radical un polinomio de grado $2p$.

La fracción racional $F(x, y)$ puede ponerse bajo la forma

$$F(x, y) = \frac{M + Ny}{M_1 + N_1 y},$$

siendo M y N polinomios en x. Para esto eliminaremos todas las potencias de y distintas de la primera, sustituyendo y^{2n} por R^n é y^{2n+1} por yR^n. Multiplicando los dos términos de F por $M_1 - N_1 y$, tendremos

$$F(x, y) = P + Qy,$$

siendo P y Q fracciones racionales en x, ó bien sustituyendo y por $\frac{R(x)}{y}$, tendremos

$$F = A + \frac{B}{\sqrt{R(x)}},$$

siendo A y B fracciones racionales cualesquiera en x. Para formar la integral (1) tenemos primero $\int A\,dx$, que es la integral de una fracción racional ya conocida. Nos queda la integral

$$\frac{B}{\sqrt{R(x)}}\,dx.$$

La fracción racional B puede descomponerse en un polinomio y en una serie de fracciones simples cuyo denominador es una potencia de un binomio $x - a$. Tendremos pues, finalmente, los tipos siguientes:

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{é} \quad \int \frac{\varphi(x)dx}{(x-a)^\alpha \sqrt{R(x)}},$$

siendo $f(x)$ y $\varphi(x)$ polinomios y α un entero positivo.

Consideremos desde luego las integrales del primer tipo

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Supongamos por ejemplo, que $R(x)$ sea de grado impar $2p+1$.

Sea m el grado de $f(x)$. Vamos á demostrar que *este grado puede bajarse al grado* $2p-1$. Supongamos m superior á este número y hagamos

$$m = 2p + \lambda \qquad (\lambda \geqq 0).$$

De la expresión $\dfrac{f(x)}{\sqrt{R(x)}}$ se puede restar la derivada de $Cx^{\lambda}\sqrt{R(x)}$, eligiéndose C de tal modo qne el numerador de la diferencia sea del grado $m-1$. En efecto, se tiene

$$C\frac{d}{dx}\left[x^{\lambda}\sqrt{R(x)}\right] = C\,\frac{\lambda x^{\lambda-1}R(x) + \frac{1}{2}x^{\lambda}R'(x)}{\sqrt{R(x)}};$$

el grado del numerador es $2p+\lambda$, y podemos elegir C de modo que sea nulo el coeficiente dc x^m en la diferencia

$$f(x) - C\left[\lambda x^{\lambda-1}R(x) + \frac{1}{2}x^{\lambda}R'(x)\right].$$

Por una serie de sustracciones sucesivas, reduciremos la integral á una parte integrada y á una integral

$$\int \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

siendo ahora $f_1(x)$ un polinomio á lo más del grado $2p-1$, porque la reducción podrá hacerse últimamente cuando se tenga $\lambda = 0$.

Obtendremos pues 2p *integrales de la forma*

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2p-1).$$

En general estas integrales son trascendentes nuevas y distintas unas de otras, que no son susceptibles de expresarse con auxilio de las funciones de que se trata en los elementos. Vamos á demostrar únicamente que pueden dividirse en dos especies. Las integrales de la *primera especie* son aquéllas que permanecen finitas cuando x aumenta indefinidamente, las otras se llaman de *segunda especie*. Aplicaremos el método empleado (t. II pág. 36) La función $\dfrac{x^m}{\sqrt{R(x)}}$ es comparable, cuando x es muy grande con $\dfrac{1}{x^{p+\frac{1}{2}-\mu}}$. Si pues

$$p+\frac{1}{2}+\mu > 1, \quad \text{ó sea} \quad \mu < p - \frac{1}{2}$$

la integral será de primera especie.

Se tendrá pues p integrales de primera especie, es decir, que permanecen finitas para $x = \infty$ y $\mu = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Las demás serán de segunda especie.

Observaremos además que todas estas integrales permanecen finitas cuando x tiende hacia una raíz de $R(x) = 0$.

Para distinguir las integrales de primera de las de segunda especie, escribamos

$$\sqrt{R} = x^{\frac{m}{2}} \sqrt{A_0}\left(1 + \frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \ldots\ldots\right)^{\frac{1}{2}},$$

ó aplicando la fórmula del binomio generalizada,

$$\frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{2}}\sqrt{A_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \ldots\ldots\right)$$

de la que resulta

$$\int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{1}{\sqrt{A_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{A_1}{A_0}\frac{1}{x} + \ldots\ldots\right) x^{k-\frac{m}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A_0}}\, x^{k-\frac{m}{2}+1} + \ldots\ldots$$

siendo el término escrito el más elevado de la serie. La integral será pues de segunda especie, si $k > \frac{m}{2} - 1$ y de primera si $k < \frac{m}{2}$, no excluyendo la última desigualdad la igualdad, si m es par.

14. INTEGRALES DEL SEGUNDO TIPO. Sea

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}}.$$

Distinguiremos dos casos, según que a sea ó no sea raíz del polinomio $R(x)$. Supongamos $\alpha > 1$; y restemos de la integral una expresión de la forma

$$\frac{C\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}},$$

de manera que la diferencia sea una integral de la forma inicial en la que α quede sustituída por $\alpha - 1$. Se tiene, expresando C una constante,

$$C\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}}\right) = C\,\frac{-(\alpha-1)R(x) + \frac{1}{2}(x-a)R'(x)}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}}.$$

En la diferencia

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\sqrt{R(x)}} - C\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\alpha-1}}\right),$$

el numerador será divisible por $x - a$, si se tiene

$$\varphi(a) + C(\alpha - 1)R(a) = 0,$$

igualdad que determina á C, porque $R(a)$ no es nulo y α es mayor que 1. La sustracción indicada nos conduce pues, á una integral de la forma

$$\int \frac{\varphi_1(x)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1}\sqrt{R(x)}},$$

siendo φ_1 un polinomio. Podremos continuar esta reducción hasta que lleguemos á una integral de la forma considerada en la que sea $\alpha = 1$. Por otra parte, dividiendo $\varphi(x)$ por $x - a$, la última integral se reducirá á las integrales del número anterior y á la única integral

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}}.$$

Cuando $R(a) = 0$, debemos modificar el razonamiento. Consideremos la integral propuesta al principio de este párrafo, haciendo que a sea raiz de $R(x)$, y formemos la diferencia

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha \sqrt{R(x)}} - C \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^\alpha}\right). \qquad (1)$$

El segundo término puede escribirse

$$C \frac{\frac{1}{2} R'(x) - \alpha R_1(x)}{(x-a)^\alpha \sqrt{R(x)}} \quad \text{haciendo} \quad R_1(x) = \frac{R(x)}{x-a}.$$

Pero a es raiz simple de $R(x)$; luego $R_1(a) = R'(a) \neq 0$, y por consiguiente se puede determinar C de modo que la diferencia (1) sea de la forma

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\sqrt{R(x)}}.$$

Basta para ello que

$$\varphi(a) - C\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) R'(a) = 0.$$

El coeficiente C es diferente de cero para $\alpha = 1$. Se puede pues efectuar sucesivamente la reducción hasta hacer desaparecer toda potencia de $x - a$ del denominador, y finalmente no quedarán más que integrales del primer tipo.

En resumen, el segundo tipo se reduce al primero y á integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}},$$

no siendo la constante a raíz de $R(x) = 0$.

La hipótesis de ser $R(x)$ de grado impar no tiene influencia en la reducción hecha que es independiente de ella. No sucede lo mismo respecto á las integrales de la forma

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Si el polinomio $R(x)$ es de grado $2p$, todas estas integrales se reducirán á integrales

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

en las qne m deberá tomar los valores $0, 1, 2, \ldots\ldots 2p-2$. Hay pues en este caso $2p-1$ integrales del primer tipo.

15. Integrales de tercera especie. Para llegar á las integrales de tercera especie, consideremos las integrales de la forma

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}$$

y principiemos por reducir las integrales de la forma

$$\int \frac{P\,dx}{Q^\mu\sqrt{R}},$$

siendo P de grado inferior á Q. Distinguiremos dos casos, según que sea Q primo con R ó que tengan un factor común.

Primer caso. Q primo con R. Puesto que el polinomio Q no tiene más que raíces simples, es primo con su derivado Q', y por consiguiente con $Q'R$. Pero podemos hallar dos polinomios A y B tales, que se tenga idénticamente

$$1 = AQ + B(Q'R), \tag{1}$$

de donde

$$\int \frac{P}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx = \int \frac{P(AQ + BQ'R)}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx$$

$$= \int \frac{PA}{Q^{\mu-1}\sqrt{R}}\,dx + \int PB\sqrt{R}\,\frac{Q'}{Q^{\mu}}\,dx. \tag{2}$$

Integrando por partes la última cantidad, tenemos

$$\int PB\sqrt{R}\,\frac{Q'}{Q^{\mu}}\,dx = -\frac{1}{\mu-1}\,\frac{1}{Q^{\mu-1}}\,PB\sqrt{R}$$

$$+\frac{1}{\mu-1}\int \frac{d(PB\sqrt{R})}{Q^{\mu-1}};$$

por consiguiente, efectuando la última diferencial y sustituyendo en la ecuación (2) la última integral por su valor, se obtiene

$$\int \frac{P}{Q^{\mu}\sqrt{R}}\,dx = -\frac{1}{\mu-1}\,\frac{PB\sqrt{R}}{Q^{\mu-1}}$$

$$\int \frac{PA + \frac{1}{\mu-1}\left[(PB)'R + \frac{1}{2}\,PBR'\right]}{Q^{\mu-1}\sqrt{R}}\,dx. \tag{3}$$

La integral del segundo miembro de (3) es de la misma forma que la del primero, pero el exponente de Q ha disminuído en una unidad. La fórmula (3) es por lo tanto una fórmula de reducción, que podrá emplearse para todos los valores de μ superiores á la unidad. La integral propuesta es pues igual á una expresión racional en x y $\sqrt{R}$ aumentada en una integral de la forma $\int \frac{P}{Q\sqrt{R}}\,dx$, que se reducirá al tipo

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

descomponiendo $\frac{P}{Q}$ en fracciones simples.

2.º caso. R tiene un máximo común divisor con Q. Sea

$$R = DR_1, \qquad Q = DQ_1.$$

Puesto que D es primo con Q_1, por no tener Q raíces múltiples, se podrá descomponer la fracción $\frac{P}{Q^\mu}$ en dos fracciones simples

$$\frac{P}{Q^\mu} = \frac{P_1}{D^\mu} + \frac{P_2}{Q_1^{\,\mu}}.$$

Se tendrá pues

$$\int \frac{P}{Q^\mu \sqrt{R}}\,dx = \int \frac{P_1}{D^\mu \sqrt{R}}\,dx + \int \frac{P_2}{Q_1^{\,\mu}\sqrt{R}}\,dx.$$

La segunda integral del segundo miembro entra en el primer caso, porque Q_1, primo con D y con R_1, es primo con R. En la primera, D divide exactamente á R, y puede escribirse esta integral, haciendo salir D del radical,

$$\int \frac{P_1}{D^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{R_1}}\,dx.$$

Repitiendo textualmente el procedimiento seguido en el primer caso, salvo el que Q está sustituído aquí por D y μ por

$\mu + \frac{1}{2}$, obtendremos una fórmula análoga á la (3). Solamente aquí, por ser el exponente fraccionario, se podrá hacer $\mu = 1$; y la única trascendente que subsistirá será de la forma.

$$\int \frac{P dx}{D^{\frac{1}{2}} \sqrt{R_1}} = \int \frac{P dx}{\sqrt{R}},$$

integral ya estudiada, que ha conducido á la nueva trascendente

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$

llamada *integral de tercera especie.*

En el caso de ser R de tercer grado, existen las integrales

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}}, \quad I_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}},$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3 - ax - b}}$$

de primera, segunda y tercera especie, respectivamente.

16. R ES DE CUARTO GRADO. Vamos á ver que en el caso de ser R de cuarto grado, puede suponerse que es un binomio bicuadrado.

Consideremos el radical

$$\sqrt{4x^3 - ax - b}$$

y hagamos $x = \alpha + t^2$, siendo α una raíz del trinomio. Evidentemente resulta la forma bicuadrada si hacemos $x = \alpha + t^2$, representando α una raíz del trinomio.

Recíprocamente, si R es bicuadrado, haciendo $x^2 = z$ se obtendrá una de las tres fórmulas últimas.

Supongamos ahora R de cuarto grado. Lo podemos escribir bajo la forma

$$R = (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c').$$

Supongamos que las raíces estén en orden ascendente ó descendente, y hagamos la sustitución

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{y + 1}, \quad \text{de donde} \quad \sqrt{R} = \frac{1}{(y+1)^2}\sqrt{Y},$$

siendo

$$Y = [a(\alpha y + \beta)^2 + b(\alpha y + \beta)(y + 1) + c(y + 1)^2]$$
$$[a'(\alpha y + \beta)^2 + b'(\alpha y + \beta)(y + 1) + c'(y + 1)^2].$$

Expresemos que desaparece el término en y en cada paréntesis, y resultará

$$2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0, \quad 2a'\alpha\beta + b'(\alpha + \beta') + 2c' = 0 \quad (1)$$

de las que se obtendrán los valores de $\alpha\beta$ y $\alpha + \beta$.

La ecuación de segundo grado que da los valores de α y β tendrá sus raíces reales, porque la condición de realidad

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') > 0,$$

expresa precisamente que las raíces de uno de los factores no se hallan comprendidas ninguna entre las raíces del otro.

Hemos conseguido pues, por sustituciones reales, transformar una función racional en x y $\sqrt{R}$, siendo R un polinomio cualquiera de cuarto grado, en otra función en y y $\sqrt{Y}$, para la que Y es el producto de dos factores de la forma $my^2 + n$, es decir, para la que Y es un trinomio bicuadrado

$$Y = \lambda y^4 + \mu y^2 + \nu. \quad (2)$$

El razonamiento anterior supone que se puede obtener $\alpha\beta$ y α y β de (1), es decir, que no se tiene

$$\frac{b}{2a} = \frac{b'}{2a'}.$$

Pero si se verificase esta igualdad, haciendo

$$x + \frac{b}{2a} = y,$$

en R, se obtendría

$$R = \left(ay^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right)\left(a'y^2 + \frac{4a'c' - b'^2}{4a'}\right)$$

que es la forma (2).

Se ve pues, según la clasificación hecha, que existirán las integrales de 1.ª y 2.ª especie,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}, \quad I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}.$$

La integral $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu}}$ no es elíptica,

como se ve haciendo $x^2 = z$.

Legendre, reducía siempre la cantidad sub-radical á la forma canónica

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2).$$

siendo k^2 inferior á la unidad.

Este geómetra consideraba como tipo de segunda y de tercera especie respectivamente

$$I'_2 = \int \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx, \quad I'_3 = \int \frac{dx}{(1 + mx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$$

17. Forma canónica. Vamos á ver que puede reducirse el trinomio $\lambda y^4 + \mu y^2 + \nu$ á la forma canónica $(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, excepto cuando λ, μ, ν sean negativos

Supongamos el binomio bicuadrado bajo la forma

$$R = (ax^2 + b)(a'x^2 + b').$$

Se puede suponer $a > 0$, porque se puede cambiar el signo de los dos factores de R. Hagamos

$$ax^2 + b = t^2 \quad \text{de donde} \quad ax\,dx = t\,dt$$

y

$$dx = \frac{t\,dt}{a\sqrt{\frac{t^2 - b}{a}}}.$$

La integral elíptica de primera especie se reduce á

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - b)\,(a' t^2 - ba' + ab')}}.$$

El factor $ax^2 + b$ se halla sustituído por el factor $t^2 - b$ en el que el segundo término ha cambiado de signo. Podremos pues suponer que el primer factor tiene sus raíces reales. Representémosle por $x^2 - \alpha^2$, y tendremos los cuatro tipos diferentes

$$R = (x^2 - \alpha^2)(\beta^2 x^2 + \gamma^2), \qquad R = (x^2 - \alpha^2)(\beta^2 x^2 - \gamma^2),$$
$$R = (x^2 - \alpha^2)(-\beta^2 x^2 + \gamma^2), \quad R = (x^2 - \alpha^2)(-\beta^2 x^2 - \gamma^2).$$

La sustitución $x = \frac{1}{y}$, seguida de un cambio de signo de los dos factores de R, conducirá de los dos últimos tipos á los dos primeros. Por último, una sustitución análoga á la ya empleada,

$$\beta x^2 + \gamma^2 = t^2,$$

conducirá de la primera forma á la segunda. A esta limitaremos nuestro razonamiento. Después de suprimir un factor positivo constante, escribiremos

$$R = (1 - a^2 x^2)\,(1 - b^2 x^2),$$

igualdad en la que a y b no son iguales, sin lo que sería R un cuadrado perfecto y $\sqrt{R}$ racional.

Sea $a^2 < b^2$ y hagamos $a^2 = k^2 b^2$. Tendremos

$$R = (1 - k^2 b^2 x^2)(1 - b^2 x^2).$$

Otra sustitución $x = \dfrac{x_1}{b}$ dará

$$R = (1 - x_1^2)(1 - x^2 x_1^2),$$

que es la forma canónica.

En cuanto á la integral de tercera especie

$$\int \frac{dx}{(x - a)\sqrt{R}},$$

basta multiplicar los dos términos de la fracción por $x + a$ para notar que es la suma de una fracción integrable y de una integral de la forma adoptada por Legendre como tipo de las integrales de tercera especie.

Hagamos $x = \operatorname{sen} \varphi$; los tres tipos se reducen á

$$I_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \quad I_2 = \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

$$I_3 = \int \frac{d\varphi}{(1 + m \operatorname{sen}^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Observación. Si $k = 0$, las integrales elípticas se reducen á las funciones circulares

$$I_1 = \varphi = \operatorname{arc\,sen} x, \quad I_2 = \operatorname{arc\,sen} x,$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1 + m} \operatorname{tg} \varphi\right).$$

Si $k^2 = 1$, se obtienen las funciones logarítmicas

$$I_1 = -\log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad I_2 = \operatorname{sen} \varphi,$$

$$I_3 = \frac{1}{1 - a^2} \log \frac{x - a}{1 - x} + \frac{1}{(1 - a)^2} \log (1 + x).$$

Ejemplo. Sea reducir el caso de la integral de tercera especie al de la primera. Hagamos

$$x - \alpha = \frac{1}{y} \quad \text{y} \quad dx = -\frac{dy}{y^2};$$

y será

$$I_3 = -\int \frac{dy}{\sqrt{a + by + cy^2}}.$$

Nos basta pues considerar siempre I_1, considerando el trinomio escrito bajo la forma

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a};$$

y tomando $x + \frac{b}{2a}$ por variable, resultarán las tres formas distintas

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}, \quad \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}}.$$

18. Integrales elípticas. Ya hemos visto que cuando la expresión que se halla bajo el signo radical es un polinomio de tercer grado, las integrales más sencillas son de los tipos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{R(x)}}$$

que se llaman ***integrales elípticas***. $R(x)$ expresa un polinomio de tercer grado en x. Cuando $R(x)$ es un polinomio de cuarto grado, puede reducirse al caso del de tercero.

Puede reducirse el polinomio de cuarto grado á un trinomio que sólo contenga términos de grado par como hemos visto (17). Empleemos según hace el Sr. Picard, la transformación

$$y = \frac{1}{p - x},$$

siendo p una constante, lo que se reduce á hacer la sustitución $x = p - \frac{1}{y}$. Se tiene entonces

$$R(x) = \frac{R_1(y)}{y^4}.$$

Vamos á determinar p de manera que la suma de dos raíces del polinomio transformado sea igual á la suma de las otras dos. Expresando por a, b, c, d las de $R(x)$, las de $R_1(y)$ serán

$$\frac{1}{p-a}, \quad \frac{1}{p-b}, \quad \frac{1}{p-c}, \quad \frac{1}{p-d}$$

y podremos escribir, por ejemplo,

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p-d} = 0,$$

ecuación de segundo grado en p. Si se toma por p una de sus raíces, en la sustitución el polinomio $R_1(y)$ será de la forma

$$R_1(y) = A'(y^2 + \lambda y + \mu)(y^2 + \lambda y + \mu'),$$

siendo λ el mismo en los dos factores; y si hacemos $y + \frac{\lambda}{2} = z$, tendremos el polinomio bicuadrado

$$A'(z^2 + \alpha)(z^2 + \beta).$$

Podemos, pues, suponer que el polinomio $R(x)$ es bicuadrado. Sea

$$R(x) = a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2.$$

Las integrales de la primera categoría son en este caso

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}},$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^2 + a_2}}.$$

La segunda de estas integrales se reduce á las funciones elementales. Basta para ello hacer $x^2 = y$, como se ha hecho (17), reduciéndola á la integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_0 y^2 + a_1 y + a_2}}.$$

19. Integrales abelianas. Sea $f(x, y) = 0$ (1) la ecuación de una curva que no puede descomponerse en otras, es decir, $f(x, y)$ un polinomio entero en x é y irreducible á un producto de factores racionales de menor grado. La integral

$$\int \mathrm{F}(x, y)\,dx \qquad (2)$$

en la que F expresa una función racional é y una función implícita de x definida por la ecuación (1) es una *integral abeliana*, que se dice *referida á la curva dada* (1).

El elemento fundamental de la curva desde el punto de vista de la integración es el *género.*

Sean, por ejemplo, las curvas unicursales ó de género cero, cuyas coordenadas pueden expresarse en funciones racionales de un mismo parámetro; y sean éstas

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (3)$$

cuyos valores sustituídos en la integral (2) hacen racional en t la diferencial que puede integrarse. Consideremos una estrofoide

$$y^2(x + a) = x^2(a - x) \qquad (4)$$

Para integrar

$$\int \frac{x + y}{x - y}\,dx,$$

hagamos $y = tx$, y tendremos

$$x = a\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = at\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = -\,4a\,\frac{tdt}{(1 + t)^2}$$

$$\int \frac{x + y}{x - y}\,dx = -\,4a \int \frac{1 + t}{1 - t}\,\frac{tdt}{(1 + t^2)^2}.$$

Se tiene idénticamente

$$\frac{(1+t)t}{(1-t)(1+t^2)^2} = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{t+1}{2(1+t^2)}.$$

Sustituyendo $\frac{y}{x}$ en vez de t, se obtiene

$$\int \frac{x+y}{x-y}\,dx = -4a\left[\log\sqrt{\frac{x-y}{x}}\sqrt[4]{\frac{x^2+y^2}{x^2}} - \frac{xy}{2(x^2+y^2)}\right],$$

siendo y una función de x definida por la ecuación (4). Pero el caso más interesante de las curvas de género cero es de las cónicas. Puesto que son unicursales, resulta de lo dicho que se podrá integrar cualquier diferencial algebráica que sólo contenga la irracional $\sqrt{ax^2+bx+c}$, lo que por otra parte ya sabemos, puesto que bastará hacer

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

y expresar las dos coordenadas de un punto de esta cónica en función racional de un mismo parámetro, lo que será siempre posible. Sea

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}.$$

Haciendo $\qquad y^2 = (x-1)(x-2)$

veremos que esta cónica corta al eje de las x en el punto cuya abscisa es 1; y haremos pasar por este punto una secante

$$y = (x-1)t.$$

Las coordenadas del segundo punto de intersección de esta secante con la cónica son

$$x = \frac{t^2-2}{t^2-1}, \quad y = -\frac{t}{t^2-1},$$

transformándose la integral en

$$\int \frac{2dt}{t - t^2}.$$

Su valor en términos finitos es, por consiguiente,

$$\log \frac{t + 1}{t - 1} = \log \frac{\sqrt{(x - 1)(x - 2)} + x - 1}{\sqrt{(x - 1)(x - 2)} + 1 - x}.$$

Las integrales estudiadas hasta ahora han conducido á las funciones elementales (racionales, circulares, logaritmos y exponenciales). Actualmente nos vemos en el caso de introducir nuevas funciones.

El caso más sencillo que se presenta después de las curvas de género cero es el de las de género *uno*. Se sabe que puede hacerse corresponder la cúbica

$$Y^2 = 4X^3 - aX - b$$

á toda curva de género *uno*, de manera que á todo punto de la primera curva corresponda un sólo punto de la segunda é inversamente, expresándose racionalmente las coordenadas de cada uno de los dos puntos en función de las del otro. Es decir, que se puede sustituir la integración de toda diferencial algebráica referida á una curva de género *uno* por la integración siguiente

$$\int R\left(x, \sqrt{4x^3 - ax - b}\right) dx,$$

en la que R expresa una función racional.

20. REDUCCIÓN DE LAS INTEGRALES ABELIANAS (*). Sea

$$I = \int F(x, y)\, dx \qquad (2)$$

(*) Picard *Traité d' Analyse*, t. I, y Rouché *Analyse infinitesimal*, t. II.

la integral referida á la curva simple

$$f(x, y) = 0 \qquad (2)$$

que supondremos de grado m sin ninguna asíntota paralela á los ejes, para lo que basta elegir convenientemente los ejes; y supongamos además que los puntos en el infinito sean simples, lo que es posible conseguir siempre haciendo una perspectiva de la curva. Todo lo cual equivale á decir que el conjunto de los términos de grado superior es de la forma

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)(\alpha_2 x + \beta_2 y) \ldots\ldots (\alpha_m x + \beta_m y),$$

en cuya expresión ninguna de las α ni β es nula, y todas las razones $\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ son distintas.

Esto sentado, sea una fracción racional definida por la igualdad

$$\psi(x, y) = f'_y \cdot F(x, y),$$

pudiéndose suponer que el denominador contiene tan sólo la variable x, puesto que si A y B son dos polinomios en y primos entre sí, podemos obtener otros dos polinomios en y, U y V tales, que se tenga idénticamente

$$AV + BV \equiv K,$$

siendo K independiente de y, lo que se verifica de igual modo cuando los coeficientes de A, B, U, V contienen la variable x. Si pues X es una función de x, y si se supone que $\psi(x, y)$ es una fracción $\frac{A}{B}$, podrán obtenerse dos polinomios U y V enteros en x é y tales, que

$$BV + Uf \equiv X$$

ó, por ser $f(x, y) = 0$, tales que $BV \equiv X$; y se tendrá que

$$\psi(x, y) = \frac{A}{B} = \frac{AU}{BU} = \frac{AU}{X},$$

é
$$\mathrm{I} = \int \frac{\mathrm{AU}}{\mathrm{X}f'_y}\, dx.$$

Por último, si se descompone $\frac{1}{\mathrm{X}}$ en elementos simples, se verá que toda integral abeliana puede considerarse como procedente de los tipos de integrales

$$\mathrm{I}_1 = \int \frac{\mathrm{P}(x, y)}{f'_y}\, dx, \quad \mathrm{I}_2 = \frac{\mathrm{P}(x, y)}{(x - a)^{\alpha} f'_y}\, dx$$

en las que el numerador es un polinomio.

Para reducir las integrales de la forma I_1, supongamos que p sea el grado de P, P_1 el conjunto de términos homogéneos de grado p en P y $\varphi(x, y)$ el conjunto de los términos homogéneos de grado m en $f(x, y)$; y vamos á demostrar que: *se puede reducir el grado del polinomio* P *á ser á lo más igual á* $2m - 4$.

Para ello determinemos un polinomio homogéneo $\lambda(x, y)$ tal, que la diferencia $\mathrm{I}_1 - \lambda$ pueda ponerse bajo la forma de una integral de igual forma que I_1, pero cuyo numerador sea de grado $p - 1$. Observaremos, con este objeto, que puede escribirse

$$\lambda(x, y) = \int \frac{d\lambda}{dx}\, dx;$$

pero
$$\frac{d\lambda}{dx} = \lambda'_x + y'_x \lambda'_y = \lambda'_x - \frac{f'_x}{f'_y}\lambda'_y,$$

en virtud de la ecuación $f(x, y) = 0$. Se tiene pues

$$\lambda(x, y) = \int \frac{\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x}{f'_y}\, dx$$

é
$$\mathrm{I}_1 - \lambda(x, y) = \int \frac{\mathrm{P} - (\lambda_x f'_y - \lambda'_y f'_x)}{f'_y}\, dx. \qquad (3)$$

El conjunto de los términos de mayor grado en el numerador, será

$$P_1(x, y) - (\lambda'_x \varphi'_y - \lambda'_y \varphi'_x) \tag{4}$$

á condición de que el grado λ sea $p - m + 2$. Dispondremos pues de λ para hacer desaparecer estos términos. Y del teorema de Euler respecto á las funciones homogéneas, resulta que

$$x\lambda'_x + y\lambda'_y = (p - m + 2)\lambda,$$

reduciéndose la expresión (4) á

$$\frac{xP_1 - (p - m + 2)\lambda\varphi'_y + (y\varphi'_y + x\varphi'_x)\lambda'_y}{x}$$

ó
$$\frac{xP_1 + (p - m + 2)\lambda\varphi'_y + m\varphi\lambda'_y}{x}. \tag{5}$$

Si esta expresión es divisible por φ, llamando Q al cociente, y restando del numerador de la integral en (3) el producto QXf, que es nulo por hipótesis, se habrá conseguido hacer desaparecer en (3) los términos de grado p. Todo se reduce pues, á indicar que la expresión (5) es divisible por φ ó, por no contener φ á x como factor, que

$$xP_1 - (p - m + 2)\lambda\varphi'_y,$$

se anula idénticamente cuando se sustituye x por las m raíces $-\frac{\beta_i}{\alpha_i}y$ de φ. Basta para ello que λ contenga m coeficientes por lo menos, ó que su grado $p - m + 2$ sea superior ó igual á $m - 1$, lo que da

$$p - m + 2 \geqslant m - 1 \quad \text{ó} \quad p \geqslant 2m - 3.$$

Asi se podrá disminuir el grado en las integrales I_1, mientras sea superior á $2m - 4$, lo que demuestra el teorema.

El caso de contener el denominador una potencia de $x - a$

se puede dividir en dos, según que los m puntos de intersección de la curva $f(x, y) = 0$ con la recta $x = a$ sean distintos ó no.

Supongamos demostrado el lema siguiente:

Toda curva $\Phi(x, y) = 0$ *que pasa por los puntos comunes á las dos curvas* $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ *puede ponerse bajo la forma siguiente, en la que* A *y* B *expresan polinomios en* x *é* y.

$$\Phi \equiv Af(x, y) + Bg(x, y) = 0, \text{ (*)}$$

cuando los puntos comunes son simples en cada una de las curvas. En otros términos: se tiene en este caso, en los puntos de intersección de Φ y f,

$$\frac{\Phi}{g(x, y)} \equiv B, \tag{6}$$

siendo B un polinomio en x é y.

Esto sentado, supongamos desde luego que la recta $x = a$ no sea tangente á la curva en ningún punto. Análogamente á como hemos procedido, vamos á obtener un polinomio $\lambda(x, y)$ tal, que

$$\int \frac{P(x, y)}{(x-a)^\alpha f'_y}\, dx - \frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha-1}}$$

sea una nueva integral cuyo denominador contenga sólo $x - a$ elevado á la potencia $\alpha - 1$. Puesto que se tiene

$$\frac{\lambda}{(x-a)^{\alpha-1}} = \int \frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda}{(x-a)^{\alpha-1}}\right] dx$$

$$= \int \frac{(x-a)\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right) - (\alpha-1)\lambda}{(x-a)^\alpha}\, dx$$

$$= \int \frac{(x-a)(\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x) - (\alpha-1)\lambda f'_y}{(x-a)^\alpha f'_y}\, dx,$$

(*) Nöther *Math. Annalen*, t. VI, p. 352.

la diferencia precedente se escribirá

$$\int \frac{P - (x-a)(\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x) + (\alpha - 1)\lambda f'_y}{(x-a)^\alpha f'_y}\, dx.$$

Para que el numerador sea divisible por $x - a$ (teniendo en cuenta la condición $f(x, y) = 0$), basta que

$$P + (\alpha - 1)\lambda f'_y$$

lo sea. Pero según el lema, si la curva

$$P + (\alpha - 1)\lambda f'_y = 0 \qquad (7)$$

pasa por los puntos de intersección de la curva $f(x, y) = 0$ con la recta $x = a$, se puede poner

$$\frac{P + (\alpha - 1)\lambda f_y}{x - a}$$

bajo la forma de un polinomio en x é y (6). Basta pues expresar que la curva (7) pasa por dichos puntos ó que el primer miembro de (7), en el que se hace $x = a$, es divisible por $f(a, y)$. Estas condiciones se expresarán fácilmente, si se ha elegido para λ un polinomio de grado $m - 1$ en y tan sólo, porque $f'_y\,(a, y)$ es diferente de cero.

Se podrá aplicar este procedimiento de reducción mientras que α no tenga el valor 1.

Consideremos por fin el caso en que la recta $x = a$ es tangente á la curva $f(x, y) = 0$ en el punto (a, y_1), siendo diferentes los demás puntos (a, y_2), (a, y_3) . . . . . , (a, y_{m-1}). Se tendrá entonces $f'_{y_1}(a, y_1) = 0$; y el razonamiento anterior no es aplicable.

Restaremos entonces de la integral que se ha de reducir la cantidad

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^\alpha} = \int \frac{(x-a)(\lambda'_x f'_y - \lambda'_y f'_x) - \alpha\lambda f'_y}{(x-a)^{\alpha+1} f'_y}\, dx$$

y ensayaremos la determinación de λ de manera que

$$(x-a)P(x,y)+\alpha\lambda f'_y-(x-a)(\lambda'_x f'_y-\lambda'_y f'_x) \qquad (8)$$

sea divisible por $(x-a)^2$.

Es preciso pues, que desde luego $\dfrac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}$ pueda ponerse bajo la forma de un polinomio, teniendo en cuenta la condición $f(x,y)=0$; y por ser $f'_{y1}(a,y_1)=0$, podemos tomar

$$\lambda=(y-y_1)(y-y_2)\ldots\ldots(y-y_{m-1})\mu(y) \qquad (9)$$

siendo $\mu(y)$ un polinomio en y. La curva $\lambda f'_y=0$ pasará por los puntos comunes á la curva $f=0$ y á la recta $x=a$, contándose por dos el punto (a,y_1); y en virtud del lema (6), $\dfrac{\lambda f'_y}{x-a}$ será un polinomio en x é y.

Es necesario enseguida que

$$\frac{P(x,y)+\dfrac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}+f'_x\lambda'_y}{x-a}$$

pueda ponerse á su vez bajo la forma de un polinomio, ó que la curva

$$P+\frac{\alpha\lambda f'_y}{x-a}+f'_x\lambda'_y=0 \qquad (10)$$

pase por los puntos comunes á $f=0$ y á la recta $x=a$, siendo tangente á esta recta en el punto (a,y_1). Expresemos desde luego que la curva pasa por los puntos (a,y_1), $(a,y_2)\ldots$, (a,y_{m-1}). Para esto, será preciso sustituir en la ecuación (10) λ por su valor (9), lo que da

$$\left.\begin{aligned}P(x,y)&+\frac{\alpha f'_y}{x-a}(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{m-1})\mu(y)\\&+(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{m-1})\mu'(y)f'_x\\&+\mu(y)f'_x\frac{d}{dy}(y-y_1)\ldots(y-y_{m-1})=0.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Si hacemos $x=a$, $y=y_1$, el último factor se reduce á $(y_1-y_2)\,(y-y_3)\ldots\ldots(y_1-y_{m-1})$. En cuanto al segundo término, contiene una expresión indeterminada en apariencia

$$\frac{(y-y_1)f'_y}{x-a} \tag{12}$$

cuyo verdadero valor vamos á obtener. La ecuación de la curva referida á la integral puede escribirse, aplicando la fórmula de Taylor, y teniendo en cuenta que por hipótesis $f(a,y_1)=0$ y $f'_y(a,y_1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0=(x-a)f'_x(a,y_1)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''_{x^2}(a,y_1) \\ +(x-a)\,(y-y_1)f''_{xy}(a,y_1)+\frac{1}{2}(y-y_1)^2f''_{y^2}(a,y_1)+\ldots \end{array}\right\} \tag{13}$$

También resulta

$$f'_y(x,y)=(x-a)f'_{xy}(a,y_1)+(y-y_1)f''_{xy}(a,y_1)+\ldots\ldots$$

y teniendo en cuenta la ecuación (13),

$$\frac{(y-y_1)f'_y(x,y)}{x-a}=-2f'_x(a,y_1)-(x-a)f''_x(a,y_1)$$
$$-(y-y_1)f''_{xy}(a,y_1)+\ldots\ldots$$

El verdadero valor de (12) es pues $-2f'_x(a,y_1)$; y la condición hallada se escribe

$$F(a,y_1)+(1-2\alpha)\,(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_{m-1})f'_x(a,y_1)\mu(y_1)=0.$$

Como por hipótesis, el punto (a,y_1) es simple, $f'_x(a,y_1)$ no es nula; y la anterior ecuación da á conocer $\mu(y_1)$. Igualmente, haciendo en la ecuación (11) $x=a$ é $y=y_2$, se obtendrá

$$P(a,y_2)+(1-\alpha)\,(y_2-y_1)\ldots(y_2-y_{m-1})f'_x(a,y_2)\mu(y_2)=0.$$

Esta ecuación determinará $\mu(y_2)$, á condición de que $f'_x(a,y_2)$

no sea nula, es decir, á condición de que la tangente en el punto (a, y_2) no sea paralela al eje ox, lo que siempre es posible, eligiendo los ejes convenientemente. Tenemos pues determinadas las funciones $\mu(y_1), \mu(y_2), \ldots \mu(y_{m-1})$; y falta expresar todavía que la curva (11) es tangente á la recta $x=a$ en el punto (a, y_1), lo que determinará $\mu'(y_1)$. Con este propósito, expresemos que la derivada respecto á y del primer miembro de (11) se anula cuando se hace $x=a$, $y=y_1$. Se ve que el coeficiente de $\mu'(y_1)$, que nos es interesante el conocer, es

$$2(1-\alpha)(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots\ldots(y_1-y_{m-1})f'_x(a, y_1).$$

Este coeficiente no es nulo mientras que α es distinto de la unidad. Podremos pues determinar $\mu'(y_1)$. Esto nos conduce á un problema de interpolación, á saber: *Determinar un polinomio* $\mu(y)$, *conociendo los valores que adquiere para* $y=y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, así como el valor de su derivada para $y=y_1$.

Sea, por ejemplo, $\nu(y)$ el polinomio de grado $m-2$ dado por la fórmula de interpolación de Lagrange

$$f(x)=\frac{f(a)}{\varphi'(a)}\frac{\varphi(x)}{x-a}+\frac{f(b)}{\varphi'(b)}\frac{\varphi(x)}{x-b}+\ldots\ldots$$

que adquiere los valores $y=y_1, y_2, \ldots\ldots$ Se podrá tomar

$$\mu(y)=\nu(y)+C(y-y_1)(y-y_2)\ldots\ldots(y-y_{m-1}),$$

hallándose determinada la constante C por la condición

$$\mu'(y_1)=\nu'(y_1)+C(y_1-y_2)\ldots\ldots(y_1-y_{m-1}).$$

La demostración hecha en el caso de que la recta $x=a$ es tangente á la curva f en un punto simple no sería válida si se tuviese $f'_x(a, y_1)=0$, es decir, si el punto (a, y_1) fuese doble. Sería preciso en este caso restar de la integral abeliana una fracción racional de la forma

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

siendo $\lambda(x, y)$ el polinomio por determinar. (*)

(*) Rouché, *Analyse infinitesimal*, t. II, págs. 63, 71.

En el caso de pasar la recta $x = a$ por un punto doble con tangentes distintas, M. Picard demuestra el siguiente lema. *Si la recta* x=a *pasa por un punto doble con tangentes distintas* (a, y_1) *de la curva* f(x, y) = o, *con las condiciones antes enunciadas, y hallándose* x *é* y *ligadas por la relación* f(x, y) = o, *el cociente*

$$\frac{\Phi(x, y)}{(x - a)^2}$$

podrá ponerse bajo la forma de un polinomio en x *é* y, *si en cada uno de los puntos de intersección de la recta* x = a *con la curva este cociente tiene un valor finito y si además los dos valores correspondientes á las dos ramas de curva, que pasan por dicho punto doble* (a, y_1) *son iguales.*

Demostrado este lema (*), el Sr. Picard considera la integral,

$$\int \frac{Q(x, y)dx}{(x - a)^{\alpha} f'_y}$$

suponiendo que la recta $x = a$ pasa, como se manifestó, por un punto doble de la curva, cuya reducción efectúa restando de la misma una expresión de la forma $\dfrac{\lambda(x. y)}{(x - a)^{\alpha + 1}}$, quedando reducido el exponente α á $\alpha - 1$, pudiendo seguirse en la obra citada los cálculos que conducen á este resultado.

Esta reducción efectuada suponiendo siempre que la curva tenga solamente puntos dobles con tangentes distintas, conduce á una integral de la forma

$$\int \frac{R(x, y)dx}{(x - a) f'_y}$$

en la que R expresa un polinomio; y pudiéndose suponer que $R(x, y)$ contenga á y elevada al exponente $m - 1$, á lo más, si se emplea la ecuación $f(x, y) = 0$ para hacer que desaparezcan las potencias de y superiores á $m - 1$, ordenando entonces

(*) E. Picard *Traité de Analyse*, t. I, págs. 60-62.

$R(x, y)$ así reducido con relación á las potencias de $x - a$, se ve que esta integral se reduce á una integral del primer tipo y á la siguiente

$$\int \frac{R(y)\,dx}{(x-a)f'_y}$$

en la que $R(y)$ es un polinomio en y sólo y del grado $m - 1$ á lo más.

21. Otro método de reducción á la forma canónica. Desde luego toda integral de la forma $\int f(x, R)\,dx$, se puede reducir á la forma $\int \frac{F(x)}{R}\,dx$, siendo F una función racional.

En efecto, $f(x, R)$ no puede tener más que la forma $\frac{\varphi + R\psi}{\Phi + R\Psi}$, siendo φ, ψ, Φ, Ψ funciones racionales de x. Si multiplicamos los dos términos de esta fracción por $\Phi - R\Psi$, se reducirá á la forma

$$\frac{\varphi\Phi - R^2\psi\Psi}{\Phi^2 - R^2\Psi^2} - \frac{(\varphi\Psi - \psi\Phi)R^2}{\Phi^2 - R^2\Psi^2}\,\frac{1}{R}$$

que equivale á $\quad f(x) - \frac{F(x)}{R}$,

expresando f y F dos funciones racionales de x.

Supongamos que R sea el polinomio de cuarto grado

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4. \ (*)$$

Siendo racionales las potencias pares de $\sqrt{R}$, y hallándose contenido como factor $\sqrt{R}$ en las potencias impares, toda función racional de x y $\sqrt{R}$ puede ponerse bajo la forma

$$\frac{P + Q\sqrt{R}}{P' + Q'\sqrt{R}}$$

(*) Bertrand. *Calcul integral*, p. 51.

y multiplicando los dos términos por $P' - Q'\sqrt{R}$, el denominador se reducirá á la forma $M + N\sqrt{R}$. La integral $\int M dx$ se podrá calcular fácilmente; y sólo nos falta estudiar la integral

$$\int N\sqrt{R}\,dx = \int \frac{NR dx}{\sqrt{R}},$$

siendo NR una función racional de x.

Vamos á ver cómo una sustitución racional puede transformar la diferencial precedente en otra que no contenga bajo el radical más que potencias pares de la variable. El polinomio R se puede descomponer siempre en dos factores reales de segundo grado. Sea

$$R = [(x - m)^2 + N]\,[(x - \mu)^2 + \nu].$$

Hagamos

$$\frac{x - m}{x - \mu} = \frac{r - sy}{\rho - \sigma y}. \qquad (1)$$

y tendremos

$$x\,[r - \rho + (\sigma - s)y] = m\,[r - \rho + (\sigma - s)y] + \mu(r - sy) - m\,(r - sy)$$

$$x - m = \frac{(\mu - m)\,(r - sy)}{(r - \rho) + (\sigma - s)y}; \qquad (2)$$

y de
$$x - \mu = \frac{(x - m)\,(\rho - \sigma y)}{r - sy}$$

resulta

$$x[r - \rho + (\sigma - s)y] = \mu(r - \rho + (\sigma - s)y] + (\mu - m)\,(\rho - \sigma y)$$

ó
$$x - \mu = \frac{(\mu - m)\,(\rho - \sigma y)}{(r - \rho) + (\sigma - s)y} \qquad (2')$$

Para que en cada factor de R se anule el término de primer grado en y, es necesario y suficiente que

$$\left.\begin{aligned} rs(m-\mu)^2+(\rho-r)(\sigma-s)\mathrm{N}=0 \\ \rho\sigma(m-\mu)^2+(\rho-r)(\sigma-s)\nu=0 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \frac{r}{\rho}\cdot\frac{s}{\sigma}=\frac{\mathrm{N}}{\nu}. \quad (3)$$

Dividiendo respectivamente por $\rho\sigma$ y rs cada una de las ecuaciones (3), y haciendo sustituciones, resulta de la primera

$$(m-\mu)^2\frac{\mathrm{N}}{\nu}+\mathrm{N}+\frac{\mathrm{N}^2}{\nu}-\left(\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}\right)\mathrm{N}=0$$

$$\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}=\frac{\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2}{\nu},$$

y, de la segunda

$$\frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}=\frac{\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2}{\mathrm{N}}.$$

Conociendo la suma y el producto de las dos relaciones $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ se deduce su diferencia; y haciendo

$$[\mathrm{N}+\nu+(m-\mu)^2]^2-4\mathrm{N}\nu=\Delta, \quad (4)$$

se tiene que

$$\left(\frac{r}{\rho}+\frac{s}{\sigma}\right)^2=\frac{\Delta+4\mathrm{N}\nu}{\nu^2}=\frac{\Delta}{\nu^2}+4\,\frac{r}{\rho}\,\frac{s}{\sigma}$$

$$\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\sigma}{s}\right)^2=\frac{\Delta+4\mathrm{N}\nu}{\mathrm{N}^2}=\frac{\Delta}{\nu^2}+4\,\frac{\rho}{r}\,\frac{\sigma}{s}$$

$$\left(\frac{r}{\rho}-\frac{s}{\sigma}\right)^2=\frac{\Delta}{\nu^2},\quad \left(\frac{\rho}{r}-\frac{\sigma}{s}\right)^2=\frac{\Delta}{\mathrm{N}^2}.$$

Para que $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ sean reales, es necesario y suficiente que Δ sea positivo. Pero se tiene idénticamente

$$\begin{aligned}\Delta&=[(m-\mu)^2+\nu-\mathrm{N}]^2+4(m-\mu)^2\mathrm{N}\\&=[(m-\mu)^2+\mathrm{N}-\nu]^2+4(m-\mu)^2\nu, \quad (5)\end{aligned}$$

pues desarrollando la expresión (4) de Δ, y añadiendo ó restando bien $4(m-n)^2 N$, bien $4(m-n)^2 \nu$, se obtienen dichas expresiones (5).

Si N y ν son á la vez positivos ó uno de ellos solamente, una de estas dos expresiones manifiesta que Δ es positiva, y que, por tanto, $\frac{r}{\rho}$ y $\frac{s}{\sigma}$ son reales. Estos casos son aquéllos en los cuales dos raíces, por lo menos de la ecuación $R = 0$, son imaginarias.

Consideremos, por último, el caso en que N y ν son negativas; tendremos idénticamente

$$\Delta = [(m-\mu)^2 + N + \nu + 2\sqrt{N\nu}]\,[(m-\mu)^2 + N + \nu - 2\sqrt{N\nu}],$$

ó

$$\Delta = [(m-\mu)^2 - (\sqrt{-N} + \sqrt{-\nu})^2]\,[(m-\mu)^2 - (\sqrt{-N}\ \sqrt{-\nu})^2],$$

pues los tres últimos términos cambiados de signo dan menos el cuadrado de los binomios escritos en la última fórmula.

Llamando ahora α, β, γ, δ á las raíces de $R = 0$, tendremos, por ser,

$$(x-m)^2 + N = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 - 2mx + m^2 + N = 0,$$

$$\text{y} \quad (x-\mu)^2 + \nu = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 - 2\mu x + \mu^2 + \nu = 0:$$

$$m = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \mu = \frac{\gamma+\delta}{2}, \quad (m-\mu)^2 = \frac{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}{2},$$

$$m^2 + N = \alpha\beta, \quad \mu^2 + \nu = \gamma\delta;$$

luego $$\sqrt{-N} = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{-\nu} = \frac{\gamma-\delta}{2};$$

y sustituyendo en la expresión de Δ, $\Delta =$

$$\frac{[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2]\,[(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\delta-\gamma-\beta)^2]}{16}$$

Tenemos además que

$$(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2$$

$$=\left[\left(1+\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\delta}\right)^2-\left(1-\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\delta}\right)^2\right](\alpha-\delta)^2$$

$$=4(\beta-\gamma)(\alpha-\delta),\ \text{etc.}$$

Por consiguiente

$$\Delta=(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta), \tag{5}$$

siendo α y β las raíces del primer factor de R y γ, δ las del segundo. Como estas cuatro raíces son reales, se las puede agrupar según convenga para formar los dos factores de segundo grado, haciendo de modo que Δ sea positivo.

Si por ejemplo α, β, γ, δ, se hallan colocadas por orden de magnitud creciente ó decreciente, los cuatro factores de (5) serán de igual signo y Δ positivo.

De la primera ecuación (2) se deduce

$$dx=\frac{(m-\mu)(r\sigma-s\rho)dy}{[r-\rho+(\sigma+s)y]^2}$$

y de las ecuaciones (3) resulta

$$\frac{\mathrm{N}}{(m-\mu)^2}=\frac{-rs}{(\rho-r)(\sigma-s)},\quad \frac{\nu}{(m-\mu)^2}=\frac{-\sigma\rho}{(r-\rho)(\sigma-s)},$$

ó $$\frac{\mathrm{N}(\rho-r)^2}{r}=-\frac{(m-\mu)^2[(\rho-r)s-r\sigma+r\sigma]}{\sigma-s}$$

$$\frac{r^2(m-\mu)^2+\mathrm{N}(\sigma-r)^2}{r}=(m-\mu)^2\frac{r\sigma-s\rho}{\sigma-s}$$

y análogamente se obtienen

$$\frac{\rho^2(m-\mu)^2+(\rho-r)^2\nu}{\rho} = (m--\mu)^2\,\frac{r\sigma-s\rho}{\sigma-s},$$

$$\frac{s^2(m-\mu)^2+\sigma-s)^2\mathrm{N}}{s} = (m-\mu)^2\,\frac{s\rho-r\sigma}{\rho-r}.$$

$$\frac{\sigma^2(m-\mu)^2+(\sigma-s)^2\nu}{\sigma} = (m-\mu)^2\,\frac{s\rho-r\sigma}{\rho-r}.$$

Sustituyendo los valores de dx, $x-m$ y $x-\mu$ dados por (2) en

$$\frac{dx}{\sqrt{[(x-m)^2+\mathrm{N}]\,[(x-\mu)^2+\nu]}} \tag{7}$$

y valiéndonos de las cuatro últimas fórmulas, después de haber desarrollado y reducido á un común denominador la cantidad sub-radical, la (7) se reduce á

$$\frac{dy}{(m-\mu)\sqrt{\left(\frac{r}{\sigma-s}-\frac{s}{\rho-r}\,y^2\right)\left(\frac{\rho}{\sigma-s}-\frac{\sigma}{\rho-r}\,y^2\right)}};$$

y según el signo de los coeficientes, el radical se reducirá á una de las formas

$$\sqrt{(1-y^2)\,(1-k^2y^2)},\ \sqrt{(1-y^2)\,(1+k^2y^2)},\ \sqrt{(1+y^2)\,(1+k^2y^2)}.$$

Supongamos que sean reales las cuatro raíces de la ecuación $\mathrm{R}=0$, y sea

$$\mathrm{R}=(x-\alpha)\,(x--\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta); \tag{8}$$

la transformación (1) establece entre x é y una relación de la forma

$$x=\frac{p+qy}{r+sy}.$$

Para que el polinomio R quede sustituído por $(1 - y^2)(1 - k^2y^2)$, es necesario que los numeradores de los cuatro factores sean respectivamente $1 + y$, $1 - y$, $1 + ky$, $1 - ky$. Hagamos pues

$$\left.\begin{aligned} x - \alpha &= A\,\frac{1 + y}{r + sy}, \quad & x - \beta &= B\,\frac{1 - y}{r + sy} \\ x - \gamma &= C\,\frac{1 + ky}{r + sy}, \quad & x - \delta &= D\,\frac{1 - ky}{r + sy} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Tendremos que

$$\frac{x - \beta}{x - \alpha} = \frac{B}{A}\,\frac{1 - y}{1 + y}, \qquad \frac{x - \delta}{x - \gamma} = \frac{D}{C}\,\frac{1 - ky}{1 + ky}. \tag{10}$$

Haciendo en la primera de estas identidades $x = \delta$ y $x = \gamma$ y en la segunda $x = \beta$, $x = \alpha$, resulta, considerando que los valores correspondientes de y son: $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, $+1$ y -1,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta - \beta}{\delta - \alpha} &= \frac{B}{A}\,\frac{k - 1}{k + 1}, \quad & \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} &= \frac{B}{A}\,\frac{k + 1}{k - 1}, \\ \frac{\beta - \delta}{\beta - \gamma} &= \frac{D}{C}\,\frac{1 - k}{1 + k}, \quad & \frac{\alpha - \delta}{\alpha - \gamma} &= \frac{D}{C}\,\frac{1 + k}{1 - k}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

y combinándolas dos á dos,

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{B}{A}\right)^2 &= \frac{(\delta - \beta)(\gamma - \beta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \\ \left(\frac{D}{C}\right)^2 &= \frac{(\beta - \delta)(\alpha - \delta)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma)} \\ \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 &= \frac{(\beta - \delta)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

y podremos elegir el orden de las magnitudes α, β, γ, δ para que los segundos miembros sean positivos y por consiguiente reales las relaciones $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{1-k}{1+k}$. Adoptando para $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{C}$ y k los valores deducidos de las últimas ecuaciones, las (10) dan el mismo valor de x para las cuatro hipótesis $y = \pm 1$, $y = \pm \frac{1}{k}$, de manera que son idénticas.

La tercera de las ecuaciones (12) da

$$\frac{1-k}{1+k} = \pm \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}}.$$

Se podrá, adoptando el signo $+$ ó el $-$, tener á voluntad $k < 1$ ó $k > 1$. Las ecuaciones (10) dan por diferenciación

$$\left.\begin{aligned} (\beta-\alpha)\frac{dx}{(x-\alpha)^2} &= -2\frac{B}{A}\frac{dy}{(1+y)^2}, \\ (\delta-\gamma)\frac{dx}{(x-\gamma)^2} &= -2k\frac{D}{C}\frac{dy}{(1+ky)^2}, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Multiplicando estas ecuaciones miembro á miembro y dividiendo su producto por el de las ecuaciones (10), resulta

$$\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{4k}\,\frac{dx^2}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} = \frac{dy^2}{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

y la diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

se reduce á la forma

$$\frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

Así pues, resulta de lo expuesto, que la diferencial $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ se puede reducir á la forma

$$\frac{dy}{\sqrt{(L - My^2)(L' - M'y^2)}}.$$

Distinguiremos tres casos respecto á los signos.

1.º Si L y M tienen igual signo, así como L′ y M′, haremos

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = K^2.$$

La diferencial se reduce á

$$\frac{1}{\sqrt{ML}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - K^2z^2)}}, \tag{15}$$

siendo K á voluntad mayor ó menor que 1, porque el orden de magnitud de los productos ML′ y LM′ es arbitrario.

2.º Si M y L son de igual signo y M′ y L′ de signo contrario, se puede hacer

$$\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = -K^2;$$

y la diferencial se reduce á

$$\frac{1}{\sqrt{-ML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 + K^2z^2)}}. \tag{16}$$

3.º Si $\frac{L}{M}$ y $\frac{L'}{M'}$ son negativos, se hará

$$-\frac{M}{L}y^2 = z^2, \quad \frac{LM'}{ML'} = K^2,$$

y la diferencial se reducirá á

$$\frac{1}{\sqrt{-ML'}} \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 + K^2z^2)}} \tag{17}$$

Las diferenciales (15), (16) y (17) pueden reducirse á una sola forma, haciendo respectivamente

$$y = \text{sen}\,\varphi, \quad z = \cos\varphi, \quad z = \text{tg}\,\varphi.$$

Se tiene entonces

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + K^2 x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - K^2 \,\text{sen}^2\varphi}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + K^2 x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + K^2}\sqrt{1 - \frac{K^2}{1 + K^2}\,\text{sen}^2\varphi}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + K^2 x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - K^2)\,\text{sen}^2\varphi}}.$$

De manera que la diferencial se reduce á la forma única

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\,\text{sen}^2\varphi}}.$$

22. Polinomio de tercer grado. Debemos considerar especialmente el caso en que R se reduce al tercer grado. Una de las raíces, δ por ejemplo, debe considerarse como infinita. La segunda de las fórmulas (12) manifiesta que también será infinita D. Las otras dos se reducen á

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}, \quad \left(\frac{1 - k}{1 + k}\right)^2 = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}.$$

La ecuación (14) se reduce á

$$\frac{(\beta - \alpha)dx^2}{4k(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{dy^2}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)},$$

y la fórmula de transformación es

$$\frac{x - \beta}{x - \alpha} = \frac{B}{A}\,\frac{1 - y}{1 + y}.$$

De todas maneras la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado se puede reducir á la de otro de tercero. En efecto, se tiene que

$$\begin{gathered}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\\ =(x-\alpha)^2\sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}\,\frac{x-\gamma}{x-\alpha}\,\frac{x-\delta}{x-\alpha}}.\end{gathered}$$

Hagamos $$\frac{x-\beta}{x-\alpha}=z$$

$$x=\frac{\beta-\alpha z}{1-z},\qquad dx=\frac{(\beta-\alpha)dx}{1-z},\qquad x-\alpha=\frac{\beta-\alpha}{1-z},$$

sustituyendo, tendremos

$$\begin{gathered}\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}\\ =\frac{(\beta-\alpha)^2}{(1-z)^2}\sqrt{z\,\frac{[\beta-\gamma+(\gamma-\alpha)z]}{\beta-\alpha}\,\frac{[\beta-\delta+(\delta-\alpha)z]}{\beta-\alpha}}.\end{gathered}$$

Observación. Como se ha indicado (pág. 41), las integrales elípticas se reducen á los tres tipos

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+m)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

que se llaman *integrales de primera*, *de segunda* y *de tercera especie*. Legendre hace $x=\operatorname{sen}\varphi$, y entonces se transforman, limitándolas, en

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},\qquad \int_0^\varphi\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(\operatorname{sen}^2\varphi+m)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Legendre, según ya hemos dicho, sustituiría la segunda por

$$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi,$$

y bajo esta forma representa un arco de elipse cuyas ecuaciones son

$$x = \sqrt{1 - k^2} \cos\varphi, \qquad y = \operatorname{sen}\varphi$$

de donde ha venido la denominación de *integrales elípticas.*

§ 3.° Diferenciales binomias

23. Reducciones preliminares. Se llaman diferenciales binomias las que tienen la forma

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

cuya generalidad no disminuye suponiendo que m y n son enteros, pues si se tuviese $x^{\frac{2}{3}}(a + bx^{\frac{1}{2}})^p dx$, se haría $x = t^6$, de donde $dx = 6t^5 dt$; y se tendría que integrar la expresión $6t^9 (a + bt^3)^p\, dt$.

Se puede suponer también n positivo, porque si se quisiese integrar $x^m(a + bx^{-n})^p\, dx$, bastaría hacer $x = \frac{1}{z}$ para reducir la integral á $-t^{m-2}(a + bt^n)^p\, dt$.

En cuanto á p, se le debe suponer fraccionario, porque de lo contrario la expresión se reduciría á un polinomio entero, como se ha visto (pág. 15).

Se pueden integrar las diferenciales binomias en los dos casos siguientes:

1.º Cuando $\dfrac{m+1}{n}$ es entero. En efecto, si hacemos $a+bx^n=z$, tendremos

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz.$$

La diferencial propuesta se reduce á

$$\frac{1}{nb}\,z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz,$$

que se hace racional en nuestra hipótesis; pues si $p=\dfrac{q}{r}$, haciendo $z=t^r$, tendremos una función racional.

2.º Cuando $\dfrac{m+1}{n}$ no es entero, pero

$$\frac{m+1}{n}+p=\text{entero},$$

tendremos que

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx;$$

y repitiendo el razonamiento, se verá que la expresión es integrable si

$$\frac{m+np+1}{-n}\quad \text{ó}\quad \frac{m+1}{n}+p$$

es entero; debiendo hacer en este caso $ax^{-n}+b=z$.

Ejemplo. Sea $x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$. Se tiene que

$$\frac{4+1}{3}=\frac{5}{3},\quad \frac{4+1}{3}+\frac{1}{3}=2;$$

luego la segunda condición de integrabilidad queda satisfecha.

24. Integración por partes. Se puede reducir sucesivamente la integral de la diferencial binomia, ya reduciendo el exponente de x fuera del paréntesis, ya el exponente del binomio.

1.° Tenemos

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p\,x^{n-1}\,dx = \int u\,dv,$$

haciendo

$$n = x^{m-n+1}, \quad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)};$$

por consiguiente

$$\left.\begin{aligned} \int x^m(a+bx^n)^p\,dx &= x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} \\ &- \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

La nueva integral será más sencilla, si m es positivo y mayor que n, y p negativo; porque $p+1$ tendrá un valor absoluto menor que p. Pero se puede obtener una fórmula en la que el exponente x exterior al paréntesis sea el sólo que disminuya, pues tenemos idénticamente que

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = x^{m-n}(a+bx^n)^p\,(a+bx^n)$$

$$= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p.$$

Por consiguiente,

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx$$

$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx + b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Sustituyendo en la ecuacion (α), se tendrá

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

$$-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}\,b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Transponiendo el último término y reduciendo, será

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx. \qquad \text{(A)}$$

Se ha disminuído en n unidades el exponente de x^m; y continuando el procedimiento, se podrá disminuir en el mayor múltiplo de n contenido en m.

Si se tuviese $m-in=n-1$, expresando in dicho mayor múltiplo, la integral $\int x^{m-in}(a+bx^n)^p\,dx$ se podría obtener inmediatamente, porque se reduciría á

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}+\text{C}.$$

Pero la igualdad $m-in=n-1$ se reduce á $\dfrac{m+1}{n}=i+1$, y la primera condición de integrabilidad queda satisfecha.

Cuando $np+m+1=0$, el segundo miembro de (A) se reduce á $\infty-\infty$, y la fórmula es ilusoria; pero como $\dfrac{m+1}{n}+p=0$, es decir, un número entero, resulta el segundo caso de integrabilidad, y la integral se obtiene inmediatamente.

2.° Tenemos

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = (a + bx^n)^p \, d\, \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Integrando por partes, resulta

$$\left.\begin{aligned}&\int x^m (a + bx^n)^p \\ &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1}\int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1} dx.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Por esta fórmula el exponente del binomio ha disminuído en una unidad, pero el exponente de la x exterior al paréntesis ha aumentado en n unidades. Para reducir este exponente, cambiemos m en $m + n$ y p en $p - 1$ en (A), y resultará

$$\int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1} dx = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{b(np + m + 1)}$$

$$- \frac{(m+1)a}{b(np + m + 1)}\int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx.$$

Llevando este valor á la ecuación (6) y reduciendo, tendremos

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{np + m + 1}$$

$$+ \frac{anp}{np + m + 1}\int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx. \qquad \text{(B)}$$

Por medio de esta fórmula se quitarán sucesivamente todas las unidades que contiene el exponente del binomio.

La fórmula B se hace ilusoria cuando $np + m + 1 = 0$; pero entonces nos encontramos en el segundo caso de integrabilidad.

Ejemplo. Sea la integral

$$\int x^7 (a + bx^3)^{\frac{5}{2}} dx$$

Se reduce sucesivamente por la fórmula (A) á las siguientes:

$$\int x^4(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}\,dx, \qquad \int x(a+bx^3)^{\frac{5}{2}}\,dx;$$

y esta última por la (B) á

$$\int x(a+bx^3)^{\frac{3}{2}}\,dx, \qquad \int x(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

25. Casos de ser m y p negativos. 1.° Vamos á disminuir el exponente de x fuera del paréntesis. Para ello despejemos en (A) el valor de $\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$, y tendremos

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-n+1)a}$$
$$-\frac{b(m+np+1)}{(m-n+1)a}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Cambiemos $m-n$ en $-m$ ó m en $-m+n$, y tendremos

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)a}$$
$$+\frac{b(np+n-m+1)}{(m-1)a}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

Por el empleo repetido de esta fórmula, la integral se reduce á la siguiente:

$$\int x^{-m+(i+1)n}(a+bx^n)^p\,dx,$$

en la que in representa el mayor múltiplo de n contenido en m.

Si se tuviese $-m+(i+1)n = n-1$, la última integral se reduciría á

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} + \text{C}.$$

Pero como se tiene

$$\frac{-m+1}{n} = -i = \text{núm. entero},$$

nos hallamos en el primer caso de integrabilidad.

Si p es negativo, de la fórmula B resulta

$$\int x^m(+bx^n)^{p-1}dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{anp}$$

$$+\frac{np+m+1}{anp}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Si se cambia en este resultado $p-1$ en $-p$ ó p en $-p+1$, se tendrá

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)}$$

$$-\frac{m+n-1\,pn}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1}dx.$$

Si $p>1$, el valor absoluto del exponente del binomio habrá disminuido en una unidad; y continuando la reducción, se acabará por reducir este exponente á hallarse entre 0 y 1.

Ejemplo. Sea $\dfrac{x^m dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Tenemos según (A)

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Haciendo sucesivamente $m=1, 3, 5, \ldots,$ se tendrá

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

. . . .

Y obtendremos sucesivamente

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{1 \cdot 3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4x^2}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

En general, si m es impar, se tiene

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{2 \cdot 4 \ldots\ldots (m-1)}{1 \cdot 3 \ldots\ldots m}\right]\sqrt{1-x^2} + C$$

Si m es un número par, resulta

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1 \ldots m-1}{2 \cdot 4 \ldots m}x\right]\sqrt{1-x^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots m} \text{arc sen } x + C.$$

26. Método de diferenciación. Podemos diferenciar bajo el signo $\int$. Así, por ejemplo, se tiene que

$$\int nx^{n-1}(p+1)(a+bx^n)^p\,dx = (a+bx^n)^{p+1}b^{-1}.$$

Diferenciando i veces con respecto á b, tendremos

$$\int nx^{n(i+1)-1}(p+1)(a+bx^n)^{p-i}p(p-1)\dots(p-i+1)dx$$

$$= \frac{d^i(a+bx^n)^{p+1}b^{-1}}{db^i};$$

y cambiando $p-i$ en q,

$$\int n(q+1)(q+2)\dots\dots(q+i+1)x^{n(i+1)-1}(a+bx^n)^q\,dx$$

$$= \frac{d^i(a+bx^n)^{q+i+1}b^{-1}}{db^i}.$$

Apliquemos el método de integración por partes á la integral

$$A_m = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Con este objeto, diferenciemos la expresión situada debajo del signo $\int$; tendremos

$$d[x^m(a+bx^n)^p] = mx^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx$$

$$+ pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}dx$$

$$= [mx^{m-1}a(a+bx^n)^{p-1} + mbx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}$$

$$+ pbnx^{m+n-1}(a+bx^n)^{p-1}]dx,$$

es decir, cambiando p en $p+1$ é integrando,

$$x^m(a+bx^n)^{p+1} = maA_{m-1} + b(m+np+n)A_{m+n-1},$$

fórmula de reducción que permite aumentar ó disminuir en n el exponente de x exterior al paréntesis. Para efectuar la reducción del exponente p, tenemos

$$dx^m(a + bx^n)^p = mx^{m-1}(a + bx^n)^p\,dx$$

$$+ pbnx^{m+n-1}(a + bx^n)^{p-1}\,dx = [x^{m-1}(a + bx^n)^p\,(np + m)$$

$$- apnx^{m-1}(a + bx^n)^{p-1}]\,dx;$$

de manera que si se hace

$$A_p = \int x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

resultará, integrando y cambiando m en $m + 1$,

$$x^{m+1}(a + bx^n)^p = (np + m + 1)A_p - apnA_{p-1}.$$

Luego: *Toda integral de la diferencial binomia puede reducirse á la forma*

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

en la que m *y* n *son enteros y* p *está comprendido entre* 0 *y* 1, *si no se puede reducir al caso* p = 0. *En fin, se puede suponer* m < n *y* n > 0.

Ejemplo. Sea la integral

$$\int (a^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}\,dx. \quad \text{Haremos} \quad A_p = \int (a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}}\,dx;$$

y diferenciaremos la expresión $x^m(a + x^2)^{-\frac{p}{2}}$. Será pues

$$\frac{d}{dx}\,x^m(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} = mx^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} - px^{m+1}(a^2+x^2)^{-\frac{p+2}{2}}$$

$$= (m-p)x^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p}{2}} + a^2px^{m-1}(a^2+x^2)^{-\frac{p+2}{2}},$$

ó integrando, y haciendo $m = 1$,

$$x(a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}} = (1 - p)\mathrm{A}_p + a^2 p \mathrm{A}_{p+2}$$

ó $$\mathrm{A}_{p+2} = -\mathrm{A}_p \frac{1-p}{a^2 p} + \frac{x}{a^2 p}(a^2 + x^2)^{-\frac{p}{2}}.$$

Así,

$$\mathrm{A}_5 = \frac{4\mathrm{A}_3}{5a^2} + \frac{x}{5a^2}(a^2+x^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad \mathrm{A}_3 = \frac{2\mathrm{A}_1}{3a^2} + \frac{x}{3a^2}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

pero A_1 es igual á $\log(x + \sqrt{a^2 + x^2})$. El valor de A_5 es pues conocido.

También diferenciando p veces con relación á α la fórmula

$$\log(x + \sqrt{\alpha + x^2}) = \int dx (x^2 + \alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

se llegaría al mismo resultado.

27. Empleo de los coeficientes indeterminados. El método de los coeficientes indeterminados conduce en algunos casos rápidamente á la obtención de la integral, que igualaremos á una expresión conveniente, cuyos coeficientes se determinan por identificación. Así tenemos, por ejemplo,

$$\int \frac{10x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5x - 1}{\sqrt{1 + 2x + x^2}} dx$$
$$= (a_4 + a_3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0),$$
$$\sqrt{1 + 2x + x^2} + \mathrm{K}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x + x^2}}.$$

Diferenciando, resulta

$$\frac{10x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5x - 1}{\sqrt{1 + 2x + x^2}}$$
$$= (4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1)\sqrt{1 + 2x + x^2}$$

$$+\frac{(1+x)(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+K}{\sqrt{1+2x+x^2}}$$

$$10x^5+10x^4+4x^3+7x^2-5x-1$$

$$\doteq(4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1)(x^2+2x+1)+(1+x)$$

$$\times(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)+K.$$

Identificando, se tiene:

$$10=5a_4,\quad a_4=2;\quad 10=9a_4+4a_3=18+4a_3,$$

$$a_3=-2;\quad a_2=\frac{10}{3};\quad a_1=-\frac{11}{6},\quad a_0=-\frac{37}{6},\quad K=7.$$

Ejemplo:

$$\int\frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}$$

$$=(2x^4+x^3-3x^2+4x-1)\sqrt{4+2x+3x^2}$$

$$-16\int\frac{dx}{\sqrt{4+2x+3x^2}},$$

siendo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+2x+4x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(1+3x+\sqrt{3}\sqrt{4+2x+3x^2}\right)$$

28. Empleo de una diferencial. No solamente son algebráicas las diferenciales de las expresiones algebráicas, pues también ciertas expresiones que contienen logaritmos y líneas trigonométricas inversas pueden tener diferenciales algebráicas. Esta circunstancia permite obtener ciertas integrales.

Ejemplo 1.º Sea la diferencial $\dfrac{dx(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}$.

Hagamos, según Euler, $\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}=p.$

Tendremos

$$1+p^2=\frac{1+x^4}{(1-x^2)^2},\quad \sqrt{1+p^2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^2},$$

$$dp=\frac{dx\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)^2},\quad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{xd(1+x^2)\sqrt{2}}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}};$$

luego

$$\int\frac{dx\,(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}}{1-x^2}\right).$$

2.º Sea $$\frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

Hagamos

$$\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}=p;\quad \text{será}\quad \sqrt{1-p^2}=\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2}$$

$$dp=\frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)^2},\quad \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{dx(1-x^2)\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$$

$$\int\frac{dx(1-x^2)}{(1+x^2\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ arc sen }p=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ arc sen }\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$$

§ 4.º Aplicaciones

1. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx=-x-4\sqrt{x}-4l\,(\sqrt{x}-1)\,.$

2. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1} + l\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}.$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{3}\sqrt{a-x}\,(x+2a).$

4. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \sqrt{1-x^2} - \text{arc cos}\,x.$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,x.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,l\left\{-1+3x+\sqrt{3}\sqrt{1-2x+3x^2}\right\}.$

7. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}x}{3b} - \frac{2}{3b}\cdot\frac{2}{5b}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}.$

9. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{a-x}} = -\frac{3}{10}\sqrt[3]{(a-x)^2}\,(2x+3a).$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{1}{3a}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}}\right\}.$

11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}.$

12. $\int \frac{1}{x\sqrt{a+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}.$

13. $\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \text{ art tg } \sqrt{\frac{x-a}{a}}\,.$

14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\,.$

15. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = 2 \log\left(1+\sqrt{x}\right).$

16. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \log \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right].$

18. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + a \text{ arc sen } \frac{x}{a}$

19. $\int \sqrt{\frac{xdx}{\sqrt{1+x+x^2}}} = \sqrt{1+x+x^2}$

$$- \frac{1}{2}\, l\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

20. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}$

$$- \frac{1}{8}\, l\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right).$$

21. $\int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)R + \frac{3}{8}\, l(1+2x+2R).$

22. $\int x\sqrt{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)R$

$- \frac{3}{16}\,l\,(1+2x+2R) \qquad (R=\sqrt{1+x+x^2}).$

23. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\frac{2}{3}\frac{2+x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$

24. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}} = -\frac{2}{3}\frac{x-1}{R} + l(1+2x+2R).$

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = l\,\frac{2+x-2R}{x}.$

26. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} = -\frac{1}{x}R - \frac{1}{2}\,l\,\frac{2+x-2R}{x}.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,l\,(a+2bx+2\sqrt{b}\,R) \qquad (b>0).$

28. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -R + r \text{ arc sen } \frac{x-r}{r}.$

29. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{3r+x}{2}R + \frac{3}{2}r^2 \text{ arc sen } \frac{x-r}{r}.$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{R}{rx}.$

31. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{(r+x)R}{3r^2x^2}.$

32. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{3+2x+x^2}} = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{7x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right)R$

$- \frac{7}{2}\,l\,(1+x+R).$

CAPÍTULO IV

Integración de las funciones trigonométricas y exponenciales

§ 1.° Funciones que se reducen á las funciones algebráicas

29. Integracion. Se reducen á las funciones algebráicas, por simple sustitución, de las integrales que contienen bajo el signo $\int$ una función algebráica de una transcendente, multiplicada por la diferencial de esta trascendente. Así sucede á las integrales

$$\int f(e^x)e^x dx, \quad \int f(lx)\frac{dx}{x}, \quad \int f(\text{sen } x)\cos x dx, \quad \text{etc.}$$

Por ejemplo, si se quiere obtener

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x},$$

se hará $lx = z$, y será $\dfrac{dx}{x} = dz$;

luego

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x} = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + \text{C} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + \text{C}.$$

§ 2.° Integración de $z^n\text{P}dz$.

30. Deducción de la regla general. Supongamos que en $z^n\text{P}dx$, sea z una función transcendente de x. Escribiremos, para integrar,

$$\int \text{P}dx = \text{P}_1, \quad \int \text{P}_1 \frac{dz}{dx}dx = \text{P}_2, \quad \int \text{P}_2 \frac{dz}{dx}dx = \text{P}_3, \ldots\ldots$$

y se tendrá

$$\int z^n \mathrm{P}dx = \mathrm{P}_1 z^n - n\int z^{n-1}\mathrm{P}_1 dz,$$

$$\int z^{n-1}\mathrm{P}_1 dz = \mathrm{P}_2 z^{n-1} - (n-1)\int z^{n-2}\mathrm{P}_2 dz,$$

$$\int z^{n-2}\mathrm{P}_2 dz = \mathrm{P}_3 z^{n-2} + (n-2)\int z^{n-3}\mathrm{P}_3 dz, \ldots\ldots;$$

por consiguiente,

$$\int z^n \mathrm{P}dx = \mathrm{P}_1 z^n - n\mathrm{P}_2 z^{n-1} + n(n-1)\mathrm{P}_3 z^{n-2} - \ldots\ldots$$
$$\pm 1 \cdot 2 \ldots\ldots n\mathrm{P}_{n+1}. \qquad (d)$$

Ejemplo 1.° Sea $\mathrm{P} = x^{m-1}$, $z = lx$;

se tiene

$$\mathrm{P}_1 = \int x^{m-1} dx = \frac{x^m}{m}, \quad \mathrm{P}_2 = \int \frac{x^m}{m}\frac{dx}{x} = \frac{x^m}{m^2}, \ldots\ldots$$

$$\int x^{m-1}(lx)^n dx = \frac{x^m}{m}\left[(lx)^n - n\frac{(lx)^{n-1}}{m}\right.$$
$$\left. + n(n-1)\frac{(lx)^{n-2}}{m^2} - \ldots\ldots \pm \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{m^n}\right].$$

Haciendo $m = 1$, tendremos

$$\int (lx)^n dx = x[(lx)^n - n(lx)^{n-1} + \ldots\ldots \pm 1 \cdot 2 \ldots n].$$

2.° Sea $\mathrm{P} = 1$, $z = \text{arc sen } x$,

se tiene que

$$\mathrm{P}_1 = \int dx = x, \quad \mathrm{P}_2 = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\mathrm{P}_3 = -\int \frac{dx\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}} = \int dx = -x, \ldots\ldots$$

La fórmula (1) se reduce á

$$\int dx (\text{arc sen } x)^n = \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc sen } x} \right.$$

$$\left. - n(n-1)\frac{x}{(\text{arc sen } x)^2} - \ldots\ldots \right] (\text{arc sen } x)^n.$$

Si hacemos arc sen $x = z$, se tendrá

$$\sqrt{1-x^2} = \cos z, \quad dx = \cos z dz,$$

y la fórmula anterior se reducirá á

$$\int z^n \cos z dz = \text{sen } z [z^n - n(n-1) z^{n-2}$$

$$+ n(n-1)(n-2)(n-3) z^{n-4} - \ldots\ldots]$$

$$+ \cos z [n z^{n-1} - n(n-1)(n-2) z^{n-3} + \ldots\ldots]$$

En general, tendremos

$$\int f(x) \cos x dx = [f(x) - f''(x) + f^{IV}(x) - \ldots\ldots] \text{ sen } x$$

$$+ [f'(x) - f'''(x) + \ldots\ldots] \cos x.$$

31. Caso de ser n negativo. En este caso se emplean artificios especiales.

Ejemplo 1.º $\int \frac{dx}{(lx)^n}$, siendo n positivo. Haremos $\log x = z$ y será

$$\int \frac{e^z dz}{z^n} = -\frac{e^z}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int e^z \frac{dz}{z^{n-1}}.$$

Por medio de esta fórmula se hará depender $\int \frac{e^z dz}{z^n}$ de $\int \frac{e^z dz}{z}$, que sólo se puede obtener por medio de una serie, y la propuesta de $\int \frac{dx}{lx}$.

Así tenemos que

$$\int \frac{e^z\,dz}{z^2} = -\frac{e^z}{z} + \int \frac{e^z\,dz}{z},$$

$$\int \frac{e^z\,dx}{z^3} = -\frac{1}{2}\,e^z\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{e^z\,dz}{z}$$

. . . .

$$\int \frac{e^z\,dz}{z^m} = -\,e^z \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{1}{p!(m-1)_p\,z^{m-p}} + \frac{1}{(m-1)!}\int \frac{e^z\,dz}{z}.$$

Ejemplo 2.º $\displaystyle\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2}.$

Haremos $\quad 1 + x = z, \quad x = z - 1,$

y será

$$\int \frac{e^{z-1}(z-1)}{z^2}\,dz = \int \frac{e^{z-1}}{z}\,dz - \int \frac{e^{z-1}dz}{z^2}$$

$$= \frac{1}{e}\left(\int e^z\frac{dz}{z} - \int e^z\frac{dz}{z^2}\right).$$

Integrando por partes, tendremos

$$\int \frac{1}{z}\,e^z\,dz = \int \frac{1}{z}\,d(e^z) = \frac{e^z}{z} - \int e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z} + \int e^z\frac{dz}{z^2};$$

por consiguiente

$$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{e}\,\frac{e^z}{z} = \frac{e^{z-1}}{z} = \frac{e^x}{1+x}.$$

32. OTRAS INTEGRALES. La integración por partes conduce á

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

y de estas dos ecuaciones se deduce

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax},$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax}.$$

Se tiene evidentemente

$$\int e^{(a+bi)x}\,dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = e^{(a+bi)x}\,\frac{a - bi}{a^2 + b^2};$$

pero $$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx);$$

é igualando las partes reales y las imaginarias, se obtienen las fórmulas anteriores.

La integración por partes permite reducir las expresiones

$$\int e^{ax} \cos^n bx\,dx \quad \text{é} \quad \int e^{ax} \operatorname{sen}^n bx\,dx;$$

pues tenemos

$$\int e^{ax} \cos^n bx\,dx = \cos^n bx\,\frac{e^{ax}}{a} + \frac{nb}{a}\int e^{ax} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx\,dx.$$

Una nueva integración por partes, da

$$\int e^{ax} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos^{n-1} bx \operatorname{sen} bx$$

$$- \frac{b}{a}\int e^{ax}[\cos^n bx - (n-1)\cos^{n-2} bx \operatorname{sen}^2 bx]\,dx.$$

Sustituiremos $\operatorname{sen}^2 bx$ por $1 - \cos^2 bx$, y sustituyendo en la primera ecuación el resultado obtenido, será

$$\int e^{ax} \cos^n bx\,dx = \frac{a \cos bx + nb \operatorname{sen} bx}{a^2 + n^2 b^2}\, e^{ax} \cos^{n-1} bx$$

$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2 b^2}\, b^2 \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\,dx,$$

y de igual modo se obtendrá la segunda expresión. Tenemos además

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} x dx = \frac{e^{ax}}{1 + a^2} (a \operatorname{sen} x - \cos x),$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} x}{4 + a^2} (a \operatorname{sen} x - 2 \cos x) + \frac{2 e^{ax}}{a(4 + a^2)}, \ldots$$

§ 3.º Integración de las funciones trigonométricas

33. Algunos ejemplos. Para integrar $f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$, cuando f expresa una función racional, haremos $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z$, y resultará que

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1 + z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2};$$

por consiguiente

$$f(\operatorname{sen} x, \cos x) dx = f\left(\frac{2z}{1 + z^2}, \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \frac{2dz}{1 + z^2},$$

función racional con relación á z.

Desde luego se integran fácilmente las funciones siguientes:

1.º $\int \operatorname{sen} x \cos dx = \int \operatorname{sen} x d \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x d(2x);$$

luego $\int \operatorname{sen} x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$

2.° $\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\log \cos x + C$

$$ó \int \operatorname{tg} x dx = \log \frac{1}{\cos x} + C.$$

3.° $\int \cot x dx = \int \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \log \operatorname{sen} x + C.$

4.° $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{dx : \cos^2 x}{\operatorname{sen} x : \cos x} = \log \operatorname{tg} x + C.$

5.° $\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C.$

6.° $\int \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} x\right) + C.$

7.° $\int dx \sqrt{1 - \cos x} = \int 2d\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

$$= -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + C.$$

8. $\frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\frac{a \operatorname{sen} x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$

Si se hace $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos k, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{sen} k,$

será

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x + k)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\,\mathrm{tg}\,\frac{x+k}{2} + \mathrm{C}.$$

9.º $\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x + c}$ Para integrarla,

haciendo $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x = z$, tendremos que integrar la fracción

$$\frac{2dz}{2az + b(1-z^2) + c(1+z^2)},$$

lo que da, según los casos,

$$\frac{2}{\sqrt{c^2+b^2-a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log \frac{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x + a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + \mathrm{C}.$$

10. Sea la integral

$$\int \frac{x^2dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \int \frac{x}{\cos x}\, \frac{x \cos x\, dx}{(x \operatorname{sen} x + \cos x)^2}.$$

Integrando por partes, el segundo miembro se reducirá á

$$-\frac{x}{\cos x}\, \frac{1}{x \operatorname{sen} x + \cos x} + \mathrm{tg}\,x = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x}.$$

11. Sea $\mathrm{I}_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$. Tendremos

$$\mathrm{I}_m = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^m}\,dx = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{I}_{m-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^m}.$$

Escribiendo la última integral bajo la forma $\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^m}\, x,$
resulta

$$x\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\times\frac{1}{2(1-m)}-\int\frac{1}{2(1-m)}\,\frac{1}{(a^2+x^2)^{m-1}}\,dx$$

y finalmente

$$I_m=\frac{1}{2(m-1)a^2(a^2+x^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}\,\frac{1}{a^2}\,I_{m-1}.$$

34. Productos de senos y cosenos. Sea

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx.$$

Tenemos que

$$\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')=\frac{\cos[(a-a')x+b-b']}{2}$$

$$-\frac{\cos[(a+a')x+b+b']}{2};$$

de donde

$$\int\operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(a'x+b')\,dx=\frac{\operatorname{sen}[(a-a')x+b-b']}{2(a-a')}$$

$$-\frac{\operatorname{sen}[(a+a')x+b+b']}{2(a+a')}+C.$$

35. Diferenciales de la forma $\operatorname{sen}^m x\cos^n x\,dx$.

1.° Si hacemos $\operatorname{sen} x=z$, tendremos

$$\cos x=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\quad \text{y}\quad dx=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

y

$$\operatorname{sen}^m x\cos^n x=z^m(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx.$$

Si n es un número entero impar, positivo ó negativo, se podrá integrar, para cualquier valor entero de m.

2.º Sean m y n números positivos. Se podrá reducir la integral á otras más sencillas mediante la integración por partes, y tendremos

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x \cos x dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}^m x d(\operatorname{sen} x) = \int \cos^{n-1} x d \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1};$$

luego:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x dx. \qquad (\alpha)$$

Para que no quede aumentado el exponente de sen x, haremos

$$\operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x = \operatorname{sen}^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x$$

$$= \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x - \operatorname{sen}^m x \cos^n x;$$

luego

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \cos^{n-1} x \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \left(\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx \right);$$

y reduciendo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx. \qquad (A)$$

Reduciendo sucesivamente, llegaremos á una de las integrales

$$\int \operatorname{sen}^m x dx, \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos x dx,$$

según que n sea par ó impar. La última integral es

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^m x d \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + C$$

y la anterior se integra como en el ejemplo siguiente

$$\operatorname{sen}^5 x = \frac{1}{16}(\operatorname{sen} 5x - 5 \operatorname{sen} 3x + 10 \operatorname{sen} x)$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x dx = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{5}{3}\cos 3x - 10 \cos x\right) + C.$$

Podemos escribir como sigue la fórmula recurrente deducida

$$I_{m,n} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}.$$

Si $n = 1$, la integración es inmediata:

$$I_{m,1} = \int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}.$$

Si $n = 0$, tenemos que integrar $J_m = \int \operatorname{sen}^m x dx$, y la fórmula recurrente será

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} - \frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x.$$

Observación 1.ª Sabemos que

$$2^{m-1} \cos^m x = \cos mx + m \cos (m-2)x + \ldots\ldots,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \cos mx - m \cos (m-2)x + \ldots\ldots$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen} mx - m \operatorname{sen} (m-2) x + \ldots\ldots$$

Según que m es par ó impar, y tendremos que integrar

$$\int \text{sen}\, px \cos pxdx, \qquad \int \cos px \cos qxdx;$$

y puesto que

$$2 \,\text{sen}\, px \cos qx = \text{sen}\,(p+q)x + \text{sen}\,(p-q)x,$$

$$2 \cos px \cos qx = \cos (p+q)x + \cos (p-q)x,$$

la integración podrá considerarse efectuada.

Ejemplo 2.° $\qquad \int \text{sen}^3 x \cos^4 xdx$

$$= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{5}\cos 5x - 2\cos 3x + 6\cos x.\right).$$

Observación 2.ª Cuando $m = -n$, la fórmula (A) es ilusoria; pero en este caso la (α) da

$$\int \text{tg}^m x\, dx = \frac{\text{tg}^{m+1}}{m+1} - \int \text{tg}^{m+2} x\, dx.$$

Cambiemos $m+2$ en m ó m en $m-2$ y resolvamos con relación á $\int \text{tg}^m x\, dx$, y tendremos

$$\int \text{tg}^m xdx = \frac{\text{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \text{tg}^{m-2} xdx, \tag{B}$$

fórmula que sirve para reducir el exponente de tg x, y conduce á

$$\int dx = x + C \quad \text{ó á} \quad \int \text{tg}\, xdx = -\log \cos x + C,$$

según que m sea par ó impar.

Se puede reducir el exponente de sen x sustituyendo en (A) x por $\frac{\pi}{2} - x$, m por n y n por m; y tendremos

$$\int \text{sen}^m x \cos^n xdx = -\frac{\text{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n}$$

$$+ \frac{m-1}{m+n}\int \text{sen}^{m-2} x \cos^n xdx. \tag{C}$$

Por medio de esta fórmula llegaremos, si m es impar á la integral $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$, y si es par á $\int dx = x + C$; luego cuando m y n son enteros y positivos, será siempre posible hallar la integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx.$$

3.° Supongamos que sea m entero negativo, siendo n positivo ó negativo. Sustituyendo m por $-m+2$ en C, y resolviendo con respecto á la integral del segundo miembro, tendremos

$$\int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2} x} dx.$$

La integral propuesta se reducirá pues á $\int \cos^n x dx$ ó á $\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen} x} dx$, según que sea m par ó impar.

Se deduce de la fórmula (C) haciendo $n = 0$,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x dx;$$

y por consiguiente, si m es par,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\operatorname{sen}^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\operatorname{sen}^{m-3} x$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\operatorname{sen}^{m-5} x + \ldots + \frac{(m-1)\ldots 3 \cdot 1}{(m-2)\ldots 4 \cdot 2}\operatorname{sen} x\Big]$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3 \cdot 1}{(m-2)(m-4)\ldots 4 \cdot 2}\frac{x}{m} + C;$$

y si m es impar,

$$\int \operatorname{sen}^m x dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\operatorname{sen}^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\operatorname{sen}^{m-3} x + \ldots$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\Big] + C.$$

De igual manera se obtendrá $\int \cos^n x dx$.

36. OTRAS INTEGRALES I.º Sea $\int \frac{dx}{\cos\alpha + \cos x}$.

Se tiene que

$$\cos\alpha + \cos x = 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}$$

$$\frac{dx}{\cos\alpha+\cos x} =$$

$$-\frac{dx}{2\operatorname{sen}\alpha}\,\frac{\operatorname{sen}\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{x+\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)}$$

$$\int\frac{dx}{\cos\alpha+\cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,l\,\frac{\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\cos\frac{x+\alpha}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\,l\,\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\text{ sect. hip. }\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

2.º Sea $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\,(a + b\cos x)}$.

Se tiene idénticamente

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x\,(a+b\cos x)} + \frac{b^2\operatorname{sen} x}{(a^2-b^2)(a+b\cos x)} = \frac{a-b\cos x}{(a^2-b^2)\operatorname{sen} x},$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x\,(a+b\cos x)} = \frac{-b}{a^2-b^2}\int\frac{b\operatorname{sen} x dx}{a+b\cos x}$$

$$+\frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}-\frac{b}{a^2-b^2}\int\frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x}$$

$$=\frac{b}{a^2-b^2}\,l\,(a+b\cos x)+\frac{a}{a^2-b^2}\,l\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{b}{a^2-b^2}\,l\operatorname{sen} x.$$

3.° La integración por partes conduce á la reducción sucesiva de las diferenciales de la forma $x^m \operatorname{sen} x\,dx$, $x^m \cos x dx$, $x^m a^x\,dx$; y se tiene que

$$\int x^m \operatorname{sen} x\,dx = -x^m \cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx$$

$$\int x^m \cos x\,dx = x^m \operatorname{sen} x - m\int x^{m-1}\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int x^m a^x\,dx = \frac{x^m a^x}{la} - \frac{m}{la}\int x^{m-1}a^x\,dx.$$

Ejemplos:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = (3x^2-6)\operatorname{sen} x - (x^3-6x)\cos x,$$

$$\int x^4 \operatorname{sen} x\,dx = (4x^3-24x)\operatorname{sen} x - (x^4-12x^2+24)\cos x.$$

4.° Para rebajar el exponente n en la integral $\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n x}\,dx$, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\,\frac{nx\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^{n+1} x}=\frac{n^2 x\operatorname{sen}^2 x-n(n+1)x}{\operatorname{sen}^{n+2} x}.$$

Integrando y trasponiendo,

$$\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n+2} x}=-\frac{nx\cos x+\operatorname{sen} x}{n(n+1)\operatorname{sen}^{n+1} x}+\frac{n}{n+1}\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n x}.$$

Por la aplicación repetida de esta fórmula, se reducirá la integral $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n+2} x}$, según que sea n par ó impar, á $\frac{x\,dx}{\operatorname{sen} x}$, que no es expresable explícitamente, ó á

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \cot x + \int \cot x\,dx = -x \cot x + l \operatorname{sen} x.$$

Hallaríamos igualmente que

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^{n+2} x} = \frac{nx \operatorname{sen} x - \cos x}{n(n+1)\cos^{n+1} x} + \frac{n}{n+1}\int \frac{x\,dx}{\cos^n x};$$

pudiéndose reducir la integral, cuando n es par, á

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + l \cos x.$$

Ejemplos:

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} = -x \cot x + l \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{\operatorname{sen} x + 2x \cos x}{6 \operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3}(x \cot x - l \operatorname{sen} x)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + l \cos x$$

$$\int \frac{x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{2x \operatorname{sen} x - \cos x}{6 \cos^3 x} + \frac{2}{3}(x \operatorname{tg} x + l \cos x).$$

5.º Se pueden reducir por descomposición, las diferenciales de la forma

$$\frac{\cos nx\,dx}{\cos^p x}, \quad \frac{\cos nx}{\operatorname{sen}^p x}.$$

En efecto, tenemos idénticamente

$$\frac{\cos nx}{\cos^p x} = \frac{2\cos(n-1)x}{\cos^{p-1} x} - \frac{\cos(n-2)x}{\cos^p x},$$

$$\frac{\cos nx}{\operatorname{sen}^p x} = -\frac{2\operatorname{sen}(n-1)x}{\operatorname{sen}^{p-1} x} + \frac{\cos(n-2)x}{\operatorname{sen}^p x};$$

por consiguiente

$$\int \frac{\cos nx\, dx}{\cos^p x} = 2\int \frac{\cos (n-1)\, x\, dx}{\cos^{p-1} x} - \int \frac{\cos (n-2)\, x\, dx}{\cos^p x},$$

$$\int \frac{\cos nx\, dx}{\operatorname{sen}^p x} = 2\int \frac{\operatorname{sen} (n-1)\, x\, dx}{\operatorname{sen}^{p-1} x} + \int \frac{\cos (n-2)\, x\, dx}{\operatorname{sen}^p x}.$$

6.° Tenemos que

$$\frac{dx}{a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x} = \frac{dx : \cos^2 x}{a \operatorname{tg}^2 x + b},$$

y haciendo $\operatorname{tg} x = z$, resulta $\dfrac{dz}{az^2 + b}$ que se integra fácilmente.

La diferencial $\dfrac{dx}{a + b\cos x}$ se integra de dos maneras diferentes según que $\dfrac{b}{a}$ es $>$ ó $<$ 1. Si $\dfrac{a}{b} < 1$, haremos $\dfrac{a}{b} = \cos \alpha$, y tendremos

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\cos \alpha + \cos x},$$

que ya conocemos. Si $\dfrac{a}{b} > 1$, haremos $\dfrac{b}{a} = \cos \alpha$, y se tendrá

$$\frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{a}\,\frac{dx}{1 + \cos \alpha \cos x}.$$

Pero

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha \cos x} = \frac{1 + \cos \alpha \cos x}{(1 + \cos \alpha \cos x)^2}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha \cos x}{1 + 2\cos \alpha \cos x + \cos^2 \alpha \cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \cos \alpha \cos x}{(\cos \alpha + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 x} \quad \frac{\dfrac{1 + \cos \alpha \cos x}{(\cos \alpha + \cos x)^2}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 x}{(\cos \alpha + \cos x)^2}};$$

y por ser

$$d \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x}{\cos \alpha + \cos x} = \operatorname{sen} \alpha \frac{1 + \cos \alpha \cos x}{(\cos \alpha + \cos x)^2} dx,$$

será

$$\int \frac{dx}{1 + \cos \alpha \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x}{\cos \alpha + \cos x}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

7.º La diferencial $\dfrac{dx}{(a + b \cos x)^n}$ puede integrarse por reducciones sucesivas. Hagamos

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{\mathrm{A} \operatorname{sen} x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \int \frac{\mathrm{B} + \mathrm{C} \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}} dx,$$

siendo A, B, C tres constantes que determinaremos de modo que se hagan idénticos los dos miembros de la ecuación. Diferenciando é identificando, tendremos

$$1 = \mathrm{A} \cos x (a + b \cos x) + (n - 1) \mathrm{A}\, b \operatorname{sen}^2 x$$
$$+ (\mathrm{B} + \mathrm{C} \cos x)(a + b \cos x);$$

sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, y observando que la ecuación debe verificarse para cualquier valor de $\cos x$, resulta

$$(n - 1) \mathrm{A}b + \mathrm{B}a = 1, \quad \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}a = 0,$$
$$\mathrm{A} - (n - 1) \mathrm{A} + \mathrm{C} = 0;$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{n - 1} \frac{b}{b^2 - a^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{a}{a^2 - b^2}, \quad \mathrm{C} = \frac{n - 2}{n - 1} \frac{b}{b^2 - a^2};$$

y la fórmula de reducción es

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = - \frac{1}{n - 1} \frac{b}{a^2 - b^2} \frac{\operatorname{sen} x}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$
$$+ \frac{1}{n - 1} \frac{1}{a^2 - b^2} \int \frac{(n - 1) a - (n - 2) b \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}} dx.$$

Pero se tiene que

$$\frac{(n-1)a-(n-2)b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}=\frac{-(n-2)}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$$+\frac{(2n-3)a}{(a+b\cos x)^{n-1}};$$

y la fórmula se reduce á

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=-\frac{b\operatorname{sen}x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$$+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}\,\ldots$$

Ejemplo: Tenemos inmediatamente que

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{b\operatorname{sen}x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)}$$

$$-\frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{a+b\cos x}.$$

8.° La integral $\int\frac{dx\cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}$ se reduce á una diferencial racional, pues haciendo

$$\frac{\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x}{\sqrt[n]{\cos nx}}=u,$$

tendremos

$$\frac{\cos nx+\sqrt{-1}\operatorname{sen}nx}{\cos nx}=1+\sqrt{-1}\operatorname{tg}nx=u^n,$$

$\operatorname{tg}nx=\sqrt{-1}\,(1-u^n)$, $n\,dx\,(1+\operatorname{tg}^2 nx)=-nu^{n-1}\sqrt{-1}\,du$,

$$dx=\frac{-\sqrt{-1}\,u^{n-1}\,du}{2u^n-u^{2n}},\quad dx=\frac{-\sqrt{-1}\,du}{u(2-u^n)};$$

y la expresión considerada udx queda reducida á la forma racional

$$\frac{-\sqrt{-1}\,du}{2-u^n}.$$

Después de integrada, se sustituirá por u su valor, y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ será

$$\int\frac{dx\cos x}{\sqrt[n]{\cos nx}}.$$

9.º Tenemos que

$$\frac{\cos px+\sqrt{-1}\operatorname{sen} px}{\cos nx}$$

$$=2\,\frac{\cos(p+n)x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(p+n)x}{1+\cos 2nx+\sqrt{-1}\operatorname{sen} 2nx};$$

haciendo $\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x=z$, se llegará á

$$\frac{\cos px+\sqrt{-1}\operatorname{sen} px}{\cos nx}\,dx=\frac{2\,dz\,z^{p+n}}{z\sqrt{-1}\,(1+z^{2n})}$$

10.º Sea

$\int f(x,\ e^{ax},\ e^{bx},\ \ldots..,\ \operatorname{sen}\alpha x,\ \cos\alpha x\ \ldots..)$, siendo f entera.

Sustituyamos los senos y cosenos por sus valores en exponenciales

$$\operatorname{sen}\alpha x=\frac{e^{\alpha ix}-e^{-\alpha ix}}{2i},\quad \cos\alpha x=\frac{e^{\alpha ix}+e^{-\alpha ix}}{2},\ \ldots..$$

entonces f será función entera de x, $e^{\alpha x}$, ... y será una suma de términos de la forma $A\,x^m\,e^{nx}$, y la cuestión se reducirá á calcular la integral $\int x^m e^{nx}\,dx$ que representaremos por I_m. Integrando por partes, tendremos

$$I_m=x^m\frac{e^{nx}}{n}-\frac{m}{n}\int x^{m-1}e^{nx}\,dx=x^m\frac{e^{nx}}{n}-\frac{m}{n}I_{m-1}.$$

Repitiendo la operación, llegaremos á la integral

$$I_0 = \int e^{nx}\,dx = \frac{e^{nx}}{n},$$

en la que sustituiremos las exponenciales imaginarias por sus valores en senos y cosenos.

11.° Sea calcular $\int f(x)\,e^{nx}\,dx$, siendo f racional.

Esta fracción se descompondrá en una parte entera E y en fracciones simples de la forma $\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx$. Quedan las integrales de la forma

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}.$$

Si $m > 1$, la integración por partes dará

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m}\,dx = e^{nx}\,\frac{1}{(-m+1)\,(x-a)^{m-1}}$$
$$-\frac{n}{-m+1}\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^{m-1}}\,dx.$$

Este cálculo conduce á calcular la integral $\int \frac{e^{nx}}{x-a}\,dx$.

Hagamos $x = a + \frac{t}{n}$, de donde $dx = \frac{dt}{n}$. Tendremos

$$\int \frac{e^{an+t}}{t}\,dt = e^{an}\int \frac{e^t}{t}\,dt,$$

que haciendo $e^t = y$, se transforma en $\int \frac{dx}{\log y}$. Esta transcendente, en la que se determina la constante de la integración, de modo que se anule para $y = 0$, se llama *logaritmo integral* de y.

12.° Las integrales

$$\int f(x, \log x)\,dx \quad \text{é} \quad \int f(x, \operatorname{arc\,sen} x)\,dx,$$

en las que f expresa una función entera, se reducen á las que ya se han tratado, tomando $\log x$ y arc sen x por nueva variable.

§ 4.º Aplicaciones

1. $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\, dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}.$

2. $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{z - 1}{z(z+1)}\, dz = 2\log(e^x + 1) - x.$

3. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \text{arc tg}\, e^x.$

4. $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + e^x)^3}.$

5. $\int (e^x + e^{-x})^2\, dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x.$

6. $\int \frac{e^x}{e^x + a}\, dx = \log(e^x + a).$

7. $\int \frac{e^x}{(e^x + a)^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x + a)^{n-1}}.$

8. $\int x^4 e^{2x}\, dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right).$

9. $\int x^3 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6).$

10. $\int (\log x)^2\, dx = x[(\log x)^2 - 2\log x + 2].$

11. $\int \frac{\log x}{x^4}\, dx = \frac{1}{3x^3}\left(\log x + \frac{1}{3}\right).$

12. $\int \frac{1}{x} \log x dx = \int y dy = \frac{1}{2} (\log x)^2. \qquad (lx = y).$

13. $\int x \log (1 + x^2) dx = \frac{1 + x^2}{2} \log (1 + x^2) - \frac{x^2}{2}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} = \log \left(\sqrt{1 + e^x} - 1\right) - \log \left(\sqrt{1 + e^x} + 1\right).$

15. $\int \frac{a^x dx}{a^x + a^{-x}} = \frac{1}{2 \log a} \log (a^{2x} + 1).$

16. $\int \frac{(\log x)^2 + 1}{x} dx = \frac{1}{3} (\log x)^3 + \log x.$

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x.$

18. $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x.$

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} x.$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x\right] = -\frac{1}{3} \cos^3 x.$

21. $\int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx = -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x - x\right].$

22. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x.$

23. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 x.$

24. $\int \frac{dx}{a \pm b \cos x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l \frac{\pm b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} . \operatorname{sen} x}{a \pm b \cos x}; \quad (a < b).$$

25. $$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b \operatorname{sen}\alpha} \log \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + x)}; \quad (a = b\cos\alpha).$$

26. $$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg} x\right); \quad (b \text{ y } a > 0).$$

27. $$\int \frac{\cos^m x}{\cos nx}\, dx$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{h=n-1} (-1)^h \left[\cos\frac{(2h+1)\pi}{2n}\right]^m l\, \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n} + \frac{x}{2}\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{(2h+1)\pi}{4n} - \frac{x}{2}\right]}.$$

28. $$\int \frac{\cos^{2m} x\, dx}{\operatorname{sen} 2nx} = \frac{1}{2n}\left[l \operatorname{sen} x \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{h=n-1} (-1)^h \cos^{2m}\frac{h\pi}{2n}\, l\left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2\frac{h\pi}{2n}\right)\right] \quad (m \leqq n).$$

29. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x}\, dx = 2\operatorname{sen} x - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

30. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx = 2x - \operatorname{tg} x.$$

31. $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^3 x}\, dx = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

32. $$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{2}{\operatorname{sen} x}.$$

33. $$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^n x}\, dx = -\frac{2}{(n-2)\operatorname{sen}^{n-2} x}.$$

34. $$\int \frac{\cos 3x}{\cos x}\, dx = 2\operatorname{sen} x \cos x - x.$$

35. $\int \frac{(lx)^n}{x}\, dx = \frac{1}{n+1} (lx)^{n+1}$.

36. $\int (a + bx)\, lx\, dx = \frac{(a + bx)^2}{2b}\, lx$

$$- \frac{a^2}{2b}\, lx - ax - \frac{1}{4}\, b x^2.$$

37. $\int \frac{lx}{(a + bx)^2}\, dx = - \frac{lx}{b(a + bx)} + \frac{1}{ab}\, l \frac{x}{a + bx}$.

38. $\int \text{arc sen } x\, dx = x \,.\, \text{arc sen } x + \sqrt{1 - x^2}$.

39. $\int \text{arc tg } x\, dx = x \text{ arc tg } x - l\sqrt{1 + x^2}$.

40. $\int \text{arc sec } x\, dx = x \text{ arc cosec } x + l(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

41. $\int x^n \text{ arc sen } x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ arc sen } x$

$$- \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

42. $\int \frac{\text{arc sen } x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}\, [\text{ arc sen } x\,]^2$.

43. $\int \text{arc sen } x \frac{dx}{\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} = \frac{x \text{ arc sen } x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2}\, l(1 - x^2)$.

44. $\int \text{arc tg } x \,.\, \frac{x^4\, dx}{1 + x^2} = - \frac{1}{6}\, x^2 + \frac{2}{3}\, l(1 + x^2)$.

$$+ \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \text{arc tg } x + \frac{1}{2}\, (\text{arc tg } x)^2.$$

CAPÍTULO V

Cálculo directo de las integrales definidas

§ 1.º Paso de la integral indefinida á la integral definida

37. Fundamento del método. Sabemos que si f es la derivada de φ, se tiene

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) + C \tag{1}$$

y por consiguiente, que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{2}$$

La función φ debe suponerse continua, porque sin esta condición, el incremento total no sería igual á la suma de los incrementos parciales.

Esta condición es muy importante, porque indica la elección que debe hacerse en ciertos casos entre varios valores que tiene simultáneamente la función, los cuales dan una apariencia indeterminada á una integral bien definida. Así por ejemplo, en virtud de la fórmula (2)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg}(-1). \tag{3}$$

La función arc tg x está mal determinada. A una misma tangente corresponde un número infinito de arcos diferentes. Los dos términos del segundo miembro de (3) son indeterminados separadamente, pero no lo es su diferencia, por representar el incremento de un arco que varía de una manera continua desde el valor para el que la tangente es -1 hasta el valor para el que es $+1$. La expresión del primero de los arcos es $k\pi - \frac{\pi}{4}$, siendo k un número arbitrario; pero elegido una vez este número, no se le debe cambiar cuando el arco varía hasta el valor $k\pi + \frac{\pi}{4}$, cuya tangente es $+1$. Por consiguiente, sin ambigüedad, tenemos

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Sea la integral

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x}.$$

Tenemos evidentemente que

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos x};$$

y aplicando la regla general,

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2}) - \operatorname{arc\,tg} 1.$$

Para saber el sentido que ha de darse á las expresiones mal determinadas $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2})$ y $\operatorname{arc\,tg} 1$, consideremos la función $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos x}$ de que provienen; y tomemos arbitrariamente para $x = 0$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos 0} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Al variar x desde o hasta $\frac{\pi}{2}$, la función aumenta desde $\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{2}$, y en este caso no hay dificultad; pero al pasar por el valor $\frac{\pi}{2}$, la función que representaba un arco cuya tangente era muy grande y positiva, representa un arco cuya tangente es muy grande y negativa. Es por tanto preciso, para la continuidad, tomar este arco positivo y un poco mayor que $\frac{\pi}{2}$, de manera que al continuar creciendo x, se debe tomar, para $x = \frac{3\pi}{4}$,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4};$$

y se tiene finalmente

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Sea
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left(b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right).$$

Esta fórmula es exacta aun cuando al tener a y b signos contrarios, x pasa por cero, pues podemos considerar las integrales

$$\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}\right], \quad \int_{\varepsilon'}^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\left[b^{\frac{2}{3}} - \varepsilon'^{\frac{2}{3}}\right],$$

en las que ε y ε' son positivos; y los límites de las dos integrales son $-\frac{3}{2}a^{\frac{2}{3}}$ y $\frac{3}{2}b^{\frac{2}{3}}$, cuya suma tiende hacia $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

§ 2.° Teoremas de las medias

38. Teoremas. Si M y m son el mayor y el menor de los valores que $f(x)$ adquiere entre a y b, suponiendo $x_{i+1} > x_i$, se tendrá

$$M(x_{i+1} - x_i) > f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) > m(x_{i+1} - x_i),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} M(x_{i+1} - x_i) > \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$> \Sigma m(x_{i+1} - x_i),$$

es decir, suponiendo $b > a$,

$$M(b - a) > \int_a^b f(x)\,dx > m(b - a).$$

Si pues $f(x)$ es continua, el producto $(b - a) f(x)$ pasa por todos los valores comprendidos entre $m(b - a)$ y $M(b - a)$, y particularmente, existirá un valor ξ comprendido entre a y b tal, que se tenga

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(\xi).$$

En esta igualdad consiste el *primer teorema de la media*.

Se vió además (t. II. pág. 114) que conservando las anteriores notaciones, se tiene siendo $\varphi(x)$ una función que permanece positiva para todos los valores de x comprendidos entre a y b

$$M\varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) > \varphi(\xi_i) f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$
$$> m\varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i);$$

y efectuando la suma de todas las desigualdades análogas para $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$; y pasando al límite, se obtiene

$$M\int_a^b \varphi(x)\,dx > \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx > m\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

ó, razonando como anteriormente,

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

hallándose ξ comprendida entre a y b.

Esta desigualdad se conoce con el nombre de *segundo teorema de la media.*

Aplicaciones: 1.ª Sea

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \qquad (1 > k^2 < 1).$$

Tendremos que

$$M \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} > K > m \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}.$$

Pero

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = \left(-2\sqrt{1 - x} \right)_0^1 = 2;$$

y hallándose x comprendido entre 0 y 1, $1 + x$ estará comprendido entre 1 y 2, y $1 - k^2x^2$ entre 1 y $1 - k^2$; luego

$$2 > (1 + x)(1 - k^2x^2) > 1 - k^2.$$

Podremos pues hacer $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$; y será

$$\frac{2}{\sqrt{1 - k^2}} > K > \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

2.ª Sea la integral

$$\int_0^1 \log \operatorname{sen} x\, dx.$$

Siendo $\log \operatorname{sen} x$ constantemente negativo, la integral tendrá todos sus elementos negativos; su valor tendrá pues cero por límite superior. Para obtener un límite inferior, haremos

$$\int_0^1 \log\left(x\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)dx = \int_0^1 \log x\, dx + \int_0^1 \log\frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

Integrando por partes resulta

$$\int_0^1 \log x\, dx = \Big[x \log x\Big]_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x} = -\,1.$$

Además, siendo $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ creciente desde 1 hasta 0, el menor valor de $\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ corresponderá á este límite, y se tendrá

$$\int_0^1 \log\frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \geqslant \int_0^1 \log \operatorname{sen}(1)\, dx \geqslant \log \operatorname{sen}(1);$$

luego $$\int_0^1 \log \operatorname{sen} x\, dx \geqslant -\,1 + \log \operatorname{sen}(1).$$

3.ª Sea

$$F(\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (k < 1).$$

Tendremos

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \varphi + \ldots$$

Integrando desde 0 hasta Φ, y haciendo $I_{2n} = \int_0^\Phi \operatorname{sen}^{2n} \varphi\, d\varphi$, resulta

$$F(\Phi) = \Phi + \frac{1}{2} I_2 k^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} I_{2n} k^{2n} + \ldots$$

En el caso de ser $\Phi = \frac{\pi}{2}$, se tiene

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}$$

de donde

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\ldots \right\}$$

Si k está próximo á la unidad, hagamos $k^2 = 1 - k'^2$, y será

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = (\cos^2 \varphi + k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}\left[1 - \frac{1}{2} k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} k'^{2n} \operatorname{tg}^{2n} \varphi + \ldots\ldots \right];$$

integrando desde o hasta Φ resultará

$$F(\Phi) = J_0 - \frac{1}{2} J_2 k'^2 + \ldots$$

$$+ (-2)^n \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} J_{2n} k'^{2n} + \ldots,$$

expresando por J_{2n} la integral

$$\int_0^{\Phi} \operatorname{tg}^{2n} \varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^{\Phi} \operatorname{sen}^{2n} \varphi \cos^{-2n-1} \varphi d\varphi.$$

Y, haciendo $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, será

$$J_0 = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi} \frac{d\psi}{\operatorname{sen}\psi} = -\left(\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi}$$

$$= -\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right).$$

Así la integral

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

en la que x y k^2 son menores que 1, es igual á

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{arc sen} x}{\sqrt{1-k^2\xi^2}}.$$

Se puede escribir también, sustituyendo ξ por 0 y 1,

$$\operatorname{arc sen} x < \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \frac{\operatorname{arc sen} x}{\sqrt{1-k^2}}.$$

§ 1.° Paso de la integral indefinida á la definida

Ejemplo 1.°

$$\frac{dx}{1+\alpha^2 \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x + (\alpha^2+1)\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+(\alpha^2+1)\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\alpha^2+1}\, \operatorname{tg} x;$$

luego

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\alpha^2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

Ejemplo 2.º Sea $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$.

Haciendo $$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

se obtiene

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \text{ arc tg } y \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$$

é $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Ejemplo 3.º Sean $\int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx$,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx, \quad \int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$$

en las que m y n son enteros. Si se supone $m = n$, se tiene

$$\int_0^\pi \cos^2 mx \, dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2mx}{2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 mx \, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2mx}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 4.º $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$. Se obtuvo esta integral suponiendo n par, (pág. 13), extendiéndose la suma á todos los valores enteros positivos menores que $\frac{n}{2}$. Supongamos que $m-1$ sea par, así como n; y sustituyamos á la integral obtenida la expresión equivalente

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1} \, dx}{1+x^n}$$

Podremos considerar á ésta como el límite de

$$\int_{-h}^{+h} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx\ ,$$

cuando h aumenta indefinidamente. Pero sustituyendo á x los valores $-h$ y h, y restando entre sí los dos resultados se obtiene

$$-\frac{1}{n}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n}\, l\, \frac{1-2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2}{1+2h\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}+h^2}\ ;$$

y cuando h se hace infinito, esta expresión se reduce á cero, por tener como factor el logaritmo de la unidad. Los términos de este género no tienen influencia en el resultado. Además se tiene, para un valor infinito de x,

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

y para $x = -\infty$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x-\cos(2k-1)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{(2k-1)\pi}{n}} = -\frac{\pi}{2}$$

La diferencia de estos dos resultados es π, y se tiene por tanto

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{n}\,\Sigma \operatorname{sen}(2k-1)\frac{m\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{sen}\frac{m\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{3m\pi}{n}+\ldots\ldots+\frac{\operatorname{sen}(n-1)m\pi}{n}\right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1-x^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$$

Observación. Si se hace $x^n = z$ la fórmula anterior se reduce á

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{m}{n}-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{n}}$$

Si se hace $\frac{m}{n} = a$, se tiene $\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$.

Si se hace en esta fórmula $na = n - k$, se reduce á

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{1+z^n} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{n-k}{n}\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}}.$$

Ejemplo 5.º Sea $i_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x\,dx.$ (1)

Introduciendo los límites en la integral

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} - \frac{1}{m} \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x,$$

resultará $I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$; (2)

y cambiando sucesivamente

m en $m-2$, $m-4$, ... $m-2p+2$,

$$\mathrm{I}_{m-2} = \frac{m-3}{m-2}\,\mathrm{I}_{m-4}, \;\ldots\ldots\; \mathrm{I}_{m-2p+2} = \frac{m-2p-3}{m-2p-2}\,\mathrm{I}_{m-2p}.$$

Multiplicando y simplificando,

$$\mathrm{I}_m = \frac{(m-1)(m-3)\ldots\ldots(m-2p+1)}{m(m-2)\ldots\ldots(m-2p+2)}\,\mathrm{I}_{m-2p}. \qquad (3)$$

Si m es par, se obtendrá para $p = \frac{m}{2}$ la integral I_0 cuyo valor es $\frac{\pi}{2}$. Si m es impar, se llegará á I_1 es igual á 1; luego

$$\mathrm{I}_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\ldots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\ldots\ldots 4 \cdot 2}\,\frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$

$$\mathrm{I}_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\ldots\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots\ldots 3}. \qquad (5)$$

§ 4.° Fórmula de Wallis

Puesto que $\operatorname{sen}^m x$ disminuye cuando m aumenta, se tiene

$$\mathrm{I}_{2k} > \mathrm{I}_{2k+1} > \mathrm{I}_{k2+2} \qquad 1 > \frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k}} > \frac{\mathrm{I}_{2k+2}}{\mathrm{I}_{2k}}.$$

Pero la última razón tiende hacia 1, en virtud de (2), cuando k crece hacia el infinito; luego

$$\lim_{k=\infty} \frac{\mathrm{I}_{2k+1}}{\mathrm{I}_{2k}} = 1;$$

y sustituyendo los valores obtenidos en el número anterior,

$$\lim_{k=\infty} \frac{2k}{2k+1}\,\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k-2}{2k-1}\,\frac{2k-2}{2k-3}\ldots\ldots\frac{2}{3}\,\frac{2}{1}\,\frac{2}{\pi} = 1,$$

resultando que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\cdots = \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 (2n+1). \qquad (6)$$

Esta expresión de π constituye la *fórmula de Wallis.*

39. Otro procedimiento. Si en la expresión (*)

$$\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

se hace $x = \frac{\pi}{2}$, resulta

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\cdots\cdots;$$

el factor general de este producto puede ponerse bajo la forma

$$1-\frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n};$$

luego

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\cdots$$

§ 5.º Extensión de la noción de la integral definida

40. Teorema I. *Si para* $x = x_0$, $f(x)$ *se hace infinita, conservando el producto* $(x - x_0)^\alpha f(x)$ *un valor finito, y siendo* α *menor que* 1, *la integral* $\int_a^b f(x)dx$, *en la que* $a < x_0 < b$, *tendrá una significación determinada.*

Basta probar que cada una de las integrales

$$\int_a^{x_0} f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^b f(x)dx$$

(*) Véase t. I, p. 219. Estas fórmulas se deben á Euler. *Introductio in Analysim infinitorum*, t. I, § 158.

tiene una significación determinada. Consideremos la primera.

Sea L el límite del producto $(x_0 - x)^\alpha f(x)$; se tendrá, siempre que x esté bastante próximo de x_0 $(x < x_0)$,

$$\mathrm{L} - \varepsilon < (x_0 - x)^\alpha f(x) < \mathrm{L} + \varepsilon,$$

siendo ε tan pequeño como se quiera; y resultará que

$$\frac{\mathrm{L} - \varepsilon)}{x_0 - x)^\alpha} < f(x) < \frac{\mathrm{L} + \varepsilon}{(x_0 - x)^\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$(\mathrm{L} - \varepsilon)\int_a^{x_0} \frac{dx}{(x_0 - x)^\alpha} < \int_a^{x_0} (x)dx < (\mathrm{L} + \varepsilon)\int_a^{x} \frac{dx}{(x_0 - a)^\alpha}.$$

Pero la integral del 1.° y 3.er miembro tienen un valor determinado L_1; luego la integral $\int_a^x f(x)dx$ tiene un límite $\mathrm{L}\,.\,\mathrm{L}_1$ bien determinado.

Igualmente, si este producto no tiende hacia cero; y si α es > 1, la integral $\int_a^{x_0} f(x)dx$ no tiene sentido. La expresión $\int_a^{x_0 - \varepsilon}$ crece sin límite cuando ε tiende hacia cero. Se podrá, para ε bastante pequeño, y suponiendo, $(x_0 - x)^\alpha f(x)$ positivo, por ejemplo, hallar un número n tal, que se tenga

$$(x_0 - x)^\alpha f(x) > n;$$

y por ser $\quad (x_0 - x)^\alpha > 0, \quad f(x) > \dfrac{n}{(x_0 - x)^\alpha},$

ó, integrando,

$$\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx > n\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{(x_0 - x)^\alpha}.$$

El valor del segundo miembro es

$$\frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(x_0 - a)^{\alpha-1}}\right],$$

que crece sin límite cuando ε tiende á cero.

TEOREMA II. *Si para* x *infinito, el producto* x^n f(x) *permanece inferior en valor absoluto á un número dado* L, la integral $\int_a^\infty$ f(x) dx *tendrá un límite, siempre que* n *sea mayor que* 1, pues

$$x^n f(x) < L, \quad \text{de donde} \quad f(x) < \frac{L}{x^n},$$

$$\int_a^x f(x)\,dx < \frac{L}{1-n}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Cuando x tiende al infinito, el segundo miembro tiene un límite finito, y lo mismo sucede al primero.

Si L es el límite de $x^n f(x)$, se tendrá

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{a^{n-1}}.$$

Al contrario, *si* n $\geqslant$ 1, *y si el product* ox^n f(x) *permanece, para* x *suficientemente grande, superior en valor absoluto á un número dado, la integral* $\int_a^\infty$ f(x) dx *no tendrá límite.*

Ejemplos. Las integrales

$$\int_a^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - ax - b}} \quad \text{é} \quad \int_a^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

tienen valores bien determinados, cuando x_1 es una raíz de polinomio subradical y $a < x_1$, pero mayor que la raíz inmediatamente menor que x_1.

Se puede afirmar igualmente que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ tiene un valor finito; pero en virtud del teorema de la media, podremos calcularlo aproximadamente. La integral

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

puede escribirse

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx.$$

Para valores de x positivos y menores que 1, se tendrá

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, x\, dx < \int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$$

La primera expresión puede integrarse completamente, porque se conoce la función primitiva de xe^{-x^2}, que es $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Se tiene pues,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, x dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

y
$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right) < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 1, \tag{1}$$

observando que e^{-x^2} es siempre < 1. Además, para x comprendido entre 1 é ∞

$$0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\, dx < \int_1^\infty e^{-x}\, dx$$

ó
$$0 < \int_1^\infty e^{-x^2}\, dx < \frac{1}{2e}; \tag{2}$$

luego, sumando (1) y (2),

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} < \mathrm{I} < 1 + \frac{1}{2e}.$$

El valor exacto de I es $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, según veremos en el número siguiente.

§ 6.º Caso de no conocerse la integral indefinida

Ejemplo 1.º Sea la integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x \, dx.$$

Para integrarla sin conocer la integral indefinida, dividamos el intervalo comprendido entre o y $\frac{\pi}{2}$ en n partes iguales, y hagamos $h = \frac{\pi}{2n}$, $\xi_i = x_{i+1}$, de modo que se tendrá

$$I = \lim_{n=\infty} \sum_1^n \frac{\pi}{2n} \log \operatorname{sen} i \frac{\pi}{2n} \quad \text{ó} \quad I = \frac{\pi}{2} \lim \frac{1}{n} \log \prod_1^n,$$

haciendo

$$\prod_1^n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} \operatorname{sen} 2 \frac{\pi}{2n} \ldots\ldots \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{2n},$$

se tiene evidentemente

$$\operatorname{sen} (n-k) \frac{\pi}{2n} = \operatorname{sen} (n+k) \frac{\pi}{2n}$$

y
$$\operatorname{sen} (n-k) \frac{\pi}{2n} = \cos (n-k) \frac{\pi}{2n}$$

y resulta, multiplicando $\prod_1^n$ por la misma expresión, en la que se han escrito los factores en orden inverso

$$\left(\prod_1^n\right)^2 = \prod_1^{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{i=n-1} \operatorname{sen} i \frac{\pi}{n}.$$

Este producto se puede calcular formando la ecuación que da $\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$, conociendo $\operatorname{sen} \pi = 0$.

El producto de las raíces de esta ecuación después de suprimirse la raíz nula, será el producto buscado. Se obtiene así,

$$\prod_{i=1}^{i=n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\, n;$$

de donde se deduce

$$\prod_{1}^{n} = \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{n}, \qquad I = \frac{\pi}{2}\lim \frac{1}{n}\log \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$I = \frac{\pi}{2}\lim \frac{\frac{1}{2}\log n - (n-1)\log 2}{n}$$

ó, en fin, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Ejemplo 2.º La integral

$$I = \int_0^{\pi} \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\, dx,$$

fué calculada por Poisson. Se tiene

$$I = \lim_{n=\infty} \sum_{0}^{n-1} \frac{\pi}{n}\left[\log(1 - 2\alpha + \alpha^2)\right.$$

$$\left. + \log\left(1 - 2\alpha\cos\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right) + \ldots\ldots\right] = \lim_{n=\infty}\frac{\pi}{n}\log \Pi_n$$

haciendo $\Pi_n = (1 - 2\alpha + \alpha^2)\left(1 - 2\alpha\cos\frac{\pi}{n} + \alpha^2\right)$

$$\ldots\ldots\left(1 - 2\alpha\cos\frac{k\pi}{n} + \alpha^2\right)\ldots\ldots\left(1 - 2\alpha\cos\frac{n-1}{n}\pi + \alpha^2\right).$$

Y por ser este producto igual á $\dfrac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}$, se tiene

$$I = \lim_{n=\infty}\frac{\pi}{n}\left[\log\frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}\right].$$

Si $|\alpha| < 1$, escribiremos

$$I = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n}\left[\log \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \log(1-\alpha^{2n})\right];$$

y se tiene evidentemente $I = 0$.

Si por el contrario, el módulo de α es mayor que 1, tendremos

$$I = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n}\left[\log \frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \log(\alpha^{2n}-1)\right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \log(\alpha^{2n}-1) = \lim \frac{\pi}{n} \log \alpha^{2n}\left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}\right);$$

y se ve que $I = \pi \log \alpha^2$.

Ejemplo 3.º Sea otra vez la integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Esta integral será el límite de $\int_0^b e^{-x^2}\, dx$, cuando $b = \infty$, si $\int_b^c e^{-x^2}\, dx$ tiende á cero, cuando b y c son finitos. Por la definición de la integral, escribiremos la primera bajo la forma

$$\lim_{h=0} \Sigma h(1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + e^{-9h^2} + \ldots + e^{n^2h^2}),$$

con $nh = b$, y la segunda bajo la forma

$$\lim_{h=0} \sum_{i=0}^{i=m-1} h\left[e^{-b^2} + e^{-(b+h)^2} + \ldots + e^{-(b+\overline{m-1}h)}\right]$$

Pero en la última suma se tiene que

$$e^{-(b+ih)^2} = e^{-b^2}\, e^{-2bih}\, e^{-i^2h^2} < e^{-b^2}\, e^{-i^2h^2},$$

de la que resulta

$$\int_b^c e^{-x^2}\, dx < e^{-b^2} \lim_{h=0} \Sigma h\left[1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots\right]$$

Esta suma es finita, y puede escribirse

$$S = \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-h^2}}} \sqrt{1 - q}\, f(q),$$

haciendo

$$e^{-h^2} = q \quad \text{y} \quad f(q) = 1 + q + q^4 + \ldots + q^{n^2} + \ldots;$$

y representando por $|\sqrt{n}|$ el mayor número entero contenido en $\sqrt{n}$, compararemos las dos series, divergentes para $q \geqslant 1$,

$$\frac{f(q)}{1 - q} = \psi(q) = 1 + |\sqrt{1}|\, q + |\sqrt{2}|\, q^2 + \ldots + |\sqrt{n}|\, q^n + \ldots$$

$$F(q) = (1 - q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} q + \ldots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n - 1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} (2n + 1) q^n + \ldots\ldots$$

pudiéndose escribir en ésta el coeficiente de q^n bajo la forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (1 + \varepsilon) \sqrt{2n + 1} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} (1 + \varepsilon'),$$

en la que ε y ε' tienden hacia cero cuando $n = \infty$. La relación de los coeficientes de q^n en $\psi(q)$ y $F(q)$ es

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}};$$

luego tiene por límite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; luego en virtud del teorema: *Cuando dos series ordenadas según las potencias ascendentes de una misma letra son divergentes, y la relación de los coeficientes de una misma potencia de la letra ordenatriz tiene un límite, la relación de la suma de los* n *primeros términos tiene el mismo límite, cuan-*

do n *crece al infinito.* (*), la relación de las dos series tiene el mismo límite; y se tiene, haciendo tender á q hacia 1,

$$\lim_{q=1} \frac{\psi(q)}{F(q)} = \lim_{q=1} \sqrt{1-q}\, f(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§ 7.° Valor principal

41. Cuando la función $\varphi(x)$ cambia de signo al hacerse infinita, Cauchy llama *valor principal* de la integral $\int_a^b \varphi(x)\, dx$, al límite de la expresión

$$\int_a^{a-\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon}^b \varphi(x)\, dx,$$

cuando la letra ε expresa un valor infinitamente pequeño, ó si c' y c'' expresan puntos del contorno de integración situados á derecha é izquierda de c, á la suma

$$\int_{z_0}^{c'} \varphi(z)\, dz + \int_{c''}^{z_1} \varphi(z)\, dz.$$

Ejemplo 1.° Cuando se hace $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\log \frac{\mu}{\nu}$ se reduce á cero, que es el valor principal de $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$; $\log \frac{\mu}{\nu}$ es el valor general.

Ejemplo 2.° Sea la integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^3}$. (1)

Se tiene $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2}$, $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}$.

La suma de estas dos integrales es nula, y por consiguiente el valor de la integral (1) es cero.

(*) Rouché et Levi *Obra citada* t. II, p. 90.

Aplicaciones. Para apreciar la utilidad de los valores principales en el cálculo, vamos á calcular el de la integral

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^2 dx \qquad (b > 0).$$

Para ello, integremos $\dfrac{1 - e^{2bzi}}{z^2}$ á lo largo de un contorno formado por el eje de las x, desde $-\infty$ hasta $-\varepsilon$, de una semicircunferencia de radio infinito descrita desde el origen como centro en la parte superior del eje de las x y de otra también, con el mismo centro y á la parte superior de dicho eje, con el radio ε. Suponiendo ε infinitamente pequeño, se tendrá

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bi}}{z^2}\, dz + 2\pi i \,.\, bi = 0,$$

es decir,

$$\text{val. pr.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{2bzi}}{z^2}\, dz = 2\pi b.$$

Separando las partes reales y las partes imaginarias, y observando que el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen} bx)^2}{x^2}\, dx$ es igual á su valor principal, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sen}^2 bx}{x^2}\, dx = 2\pi b, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^2 dx = \pi b.$$

Para calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\right)^n$, siendo n un entero cualquiera, se sustituirá sen bx por su valor en exponenciales; y la cuestión se reducirá á calcular los valores principales de integrales de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibix}}{x^n}\, dx$.

42. Cuando uno de los límites es infinito, consideraciones

análogas á las precedentes permiten el decidir si la integral tiene un valor finito (véase t. II pág. 121-25). Solo añadiremos que para integrar, se sustituye á ∞ un valor b que se supone crece indefinidamente, hallándose la integral definida; y enseguida se hace en la expresión de ésta, $b = \infty$.

Ejemplos. 1.º Sea $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$. Tenemos

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e^b}, \quad \text{é} \quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

2.º Sea $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2}$. Se tiene

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+c^2} = \frac{1}{c}\operatorname{arc\,tg}\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

§ 8.º Integrales definidas singulares

La consideración de las integrales definidas singulares proporciona el medio de calcular el valor general de una integral indeterminada, cuando se conoce su valor principal.

Sea $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$; y supongamos que se haga

$$\mathrm{E} = \int_{x_0}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\nu\varepsilon}^{x_2-\mu_3\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots$$

$$+ \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{x} f(x)\,dx.$$

$$\mathrm{F} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{x} f(x)\,dx.$$

$\mathrm{A} = \lim \mathrm{E}$ será el valor general y $\mathrm{B} = \lim \mathrm{F}$ el valor principal. La diferencia $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \lim (\mathrm{E} - \mathrm{F})$ equivale al límite hacia el que converge la suma de las integrales singulares, y será

$$A - B = f_1 \log \frac{\mu_1}{\nu_1} + f_2 \log \frac{\mu_2}{\nu_2} + \ldots..$$

Ejemplos. 1.° $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{xdx}{x^2 + a^2} = \log \frac{\mu}{\nu}$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{xdx}{x^2 + a^2} = 0, \quad \int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2A \log \frac{\mu}{\nu} + 2\pi B,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = 2\pi B.$$

Más generalmente, si $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ es una función racional cuyo denominador no puede anularse por ningún valor real de x, la ecuación

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 - B_1\sqrt{-1}}{x - \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}} + \frac{A_1 + B_1\sqrt{-1}}{x - \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}} + \ldots..$$

implica la siguiente:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = 2\,(A_1 + A_2 + \ldots.. + A_m) \log \frac{\mu}{\nu}$$

$$+ 2\pi (B_1 + B_2 + \ldots.. + B_m)$$

El segundo miembro dejará de contener el factor arbitrario $\log \frac{\mu}{\nu}$, y se tendrá por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_m),$$

siempre que $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_m$ sea cero. Pero esta condición se cumplirá cuando el grado de $F(x)$ exceda, por lo menos, en dos unidades al grado de $f(x)$. En efecto, se tiene

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2A_1(x-\alpha_1) + 2B_1\beta_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \ldots + \frac{2A_m(x-\alpha_m) + 2B_m\beta_m}{(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2}$$

$$= \frac{[2A_1(x-\alpha_1) + 2B_1\beta_1]\,[(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2]}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2 + \beta_m^2]} + \ldots$$

Siendo $2m$ el grado del denominador, el numerador será del grado $2m - 1$, si el coeficiente de x^{2m-1}, es decir, $2(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)$ no es nulo. Es por tanto necesario que esta suma sea nula, para que el grado del denominador exceda por lo menos en dos unidades al grado del denominador.

Ejemplo. Sea la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1}$, en la que n y $m < n$ son dos números enteros. En este ejemplo $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$.

Todas las raíces de la ecuación

$$F(x) = x^{2n} + 1 = 0,$$

en las que el coeficiente de $\sqrt{-1}$ es positivo, son de la forma

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k+1}{2n}\pi;$$

y dando á $2k+1$ todos los valores impares comprendidos entre o y $2n$, obtendremos las diferentes raíces. El valor general de $A - B\sqrt{-1}$ es

$$\frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{2m}}{2n(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n} \frac{\cos(2k+1)\frac{m}{n}\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2k+1)\frac{m}{n}\pi}{\cos(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi};$$

y haciendo

$$\frac{2m+1}{n} = a, \qquad \text{de donde} \qquad \frac{2m-2n+1}{2n} = a - 1;$$

y recordando que para dividir dos expresiones imaginarias, se restan los argumentos, tendremos

$$A - B\sqrt{-1} = \frac{1}{2n}[\cos(a-1)(2k+1)\pi$$

$$+ \sqrt{-1}\operatorname{sen}(a-1)(2k+1)\pi]$$

$$= -\frac{1}{2n}[\cos a(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\operatorname{sen} a(2k+1)\pi],$$

de donde

$$A = -\frac{1}{2n}\cos a(2k+1)\pi, \qquad B = \frac{1}{2n}\operatorname{sen} a(2k+1),$$

$$B_1 = \frac{\operatorname{sen} a\pi}{2n}, \quad B_2 = \frac{\operatorname{sen} 3a\pi}{2n}, \quad \ldots.., \quad B_m = \frac{\operatorname{sen}(2n-1)a\pi}{2n};$$

y puesto que, por la hipótesis hecha, el grado del denominador excede en más de dos unidades al del numerador, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots.. + B_m)$$

$$= \frac{2\pi}{2n}[\operatorname{sen} a\pi + \operatorname{sen} 3a\pi + \ldots.. + \operatorname{sen}(2n-1)a\pi].$$

Se puede calcular la suma del segundo miembro, pues las ecuaciones

$$\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{\theta i}, \quad \cos 3\theta + i \operatorname{sen}\theta = e^{3\theta i}, \quad \ldots\ldots$$

dan

$$[\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)] + i[\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta + \ldots]$$

$$= e^{\theta i} + e^{3\theta i} + \ldots\ldots + e^{(2n-1)\theta i}$$

$$= e^{\theta i}[1 + e^{2\theta i} + e^{4\theta i} + \ldots + e^{(2n-2)\theta i}] = \frac{e^{2n\theta i} - 1}{e^{2\theta i} - 1} e^{\theta i}.$$

En el caso presente,

$$\theta = a\pi = \frac{2m+1}{2n}\pi;$$

luego

$$e^{2n\theta i} = e^{(2m+1)\pi i} = \cos(2m+1)\pi + i \operatorname{sen}(2m+1)\pi = -1.$$

Por otra parte,

$$\frac{e^{\theta i}}{e^{2\theta i} - 1} = \frac{e^{\theta i}}{\dfrac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{e^{-\theta i}}} = \frac{1}{e^{\theta i} - e^{-\theta i}} = \frac{1}{2i \operatorname{sen} a\pi};$$

luego

$$\cos a\pi + \cos 3a\pi + \cos(2n-1)a\pi + i[\operatorname{sen} a\pi + \ldots\ldots$$

$$+ \operatorname{sen}(2n-1)a\pi] = -\frac{2}{2i}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} = -\frac{1}{i \operatorname{sen} a\pi},$$

$$\cos a\pi + \cos 3a\pi + \ldots\ldots + \cos(2n-1)a\pi = 0,$$

$$\operatorname{sen} a\pi + \operatorname{sen} 3a\pi + \ldots\ldots + \operatorname{sén}(2n-1)a\pi = \frac{1}{\operatorname{sen} a\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} a\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \dfrac{2m+1}{n}\pi}.$$

Haciendo $z = x^{2n}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{2m-2n+1}{2n}}dz}{1+z} = \int_0^\infty \frac{x^{2m-2n+1}.\, 2n \,.\, x^{2n-1}dx}{1+x^{2n}}$$

$$= 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = n\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2m+1}{2n}\pi} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

De igual manera, reduciendo cada integral indeterminada á su valor principal, se obtendrá

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{n}[\operatorname{sen} 2a\pi + \operatorname{sen} 4a\pi + \ldots + \operatorname{sen}(2n-2)a\pi]$$

$$= \frac{\pi}{n \operatorname{tg} a\pi} = \frac{\pi}{n \operatorname{tg}\frac{2m+1}{2n}\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1-z} = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = n\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1-x^{n2}} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} a\pi}.$$

§ 9.º Aplicaciones.

1. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right]_0^a = \operatorname{arc\,sen} 1 - \operatorname{arc\,sen} 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\displaystyle\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = -\frac{1}{4}.$

3. $\displaystyle\int_0^1 x^n \log x\, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}.$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$

5. $\int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 \, d\varphi = 3\pi.$

6. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}} \, dx = \frac{\pi}{3}.$

7. $\int_0^a \frac{x^{2r} \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2r} a^{2r} \frac{\pi}{2}.$

8. $\int_0^a \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2}.$

9. $\int_0^a \frac{x^4 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{3}{8} a^4 \frac{\pi}{2}.$

10. $\int_0^a x^{2r} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2r - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2r + 2)} a^{2r+2} \frac{\pi}{2}.$

11. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} a^2 \frac{\pi}{2}.$

12. $\int_0^1 x^{n-1} (\log x) \, dx = -\frac{1}{n^2}.$

13. $\int_0^1 x^{n-1} (\log x)^3 \, dx = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n^4}.$

14. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$

15. $\int_a^b (a + bx) \, dx = \frac{2ab + b^3 - 2a^2 - a^2 b}{2}.$

16. $\int_0^a dx \sqrt{x} = \frac{2}{3} \sqrt{a^3}.$

17. $\int_0^a 3x \sqrt{x^2 + 4a^2} \, dx = a^3 (5\sqrt{5} - 8).$

18. $\displaystyle\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

19. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{3a^2\pi}{8}.$

20. $\displaystyle\int dx\sqrt{2bx-x^2} = \frac{b^2\pi}{2}.$

21. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\,dx = \frac{\pi}{32}.$

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 2x\,dx = \frac{\pi}{4}.$

23. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}.$

24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\log 2.$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos x+x^2} = \frac{\varphi}{2\operatorname{sen}\varphi}.$

26. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2} = \frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}.$

27. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$

28. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(\alpha x+\beta)(\alpha' x+\beta')} = \frac{\log\dfrac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta'-\alpha\beta'}.$

29. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{x^n-1}{x\log x} - \frac{n}{\log n}\right] dx = \log n - n.$

30. $$\int_0^\infty e^{-nx}\,dz = \frac{1}{n}\,.$$

31. $$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-uz}}{z}\,dz = \log n.$$

32. $$\int_0^\infty e^{-ax} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2(3a^2 - 1)}{(a^2+1)^3}\,.$$

33. $$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{arc\,tg} a.$$

34. $$\int_0^\infty e^{-ax} x \cos x\,dx = \frac{a^2 - 1}{(a^2+1)^2}\,.$$

35. $$\int_0^\infty e^{-ax} x^2 \cos x\,dx = \frac{2a(a^2 - 3)}{(a^2+1)^3}\,.$$

36. $$\int_0^\pi \frac{\cos x\,dx}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x} = \pm\,\frac{\pi(1+\alpha^2)}{2\alpha(1-\alpha^2)} - \frac{\pi}{2\alpha}\,.$$

37. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(x + \alpha^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2+1}}\,.$$

38. $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

39. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} e^{-mx}\,dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{m}\,.$$

40. $$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x} \cos x\,dx = \frac{1}{2}\log(a^2+1).$$

CAPÍTULO VI

Integrales de las diferenciales totales

43. Propiedad fundamental. Dada una expresión de la forma

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \ldots\ldots + P^n dx^n = \Sigma dx, \tag{1}$$

en la que $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ son funciones de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, no existe, en general, una función de estas variables cuya diferencial sea la propuesta, de manera que deben existir algunas condiciones necesarias para que esto suceda; y en efecto, si existe una función $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ cuya diferencial sea $\Sigma P dx$, es necesario que se tenga idénticamente

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial x} dx = \Sigma P dx,$$

es decir, identificando, que sea

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = P_2, \ldots\ldots, \frac{\partial F}{\partial x^n} = P_n.$$

Pero diferenciando la i^{sima} ecuación con relación á x_j y la j^{esima} ecuación y respecto á x_i, se tendrá

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i};$$

luego

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}. \tag{2}$$

Permutando los índices i y j de todas las maneras posibles, se obtienen $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones análogas, que deben verificarse para que la expresión (1) sea una diferencial exacta.

Recíprocamente, si se verifican las $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones (2) existirá siempre una función F cuya diferencial sea $\Sigma P\,dx$, pues si hacemos

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + F_2(x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n),$$

se tendrá $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = P_1,$ (3)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}; \tag{4}$$

ó, en virtud de (2)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \int_{a}^{x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = P_2 - A_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2},$$

expresando A_2 lo que es P_2 cuando se sustituye en ella x_1 por a_1. Y si hacemos $\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = A_2$, resultará que $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = P_2$, ó, llamando F_3 á una función de $x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n$,

$$F_2 = \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + F_3(x_3, x_4, \ldots\ldots, x_n);$$

luego la función

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\,dx_2 + F_3(x_3, \ldots\ldots, x_n)$$

admite por derivadas, con relación á x_1 y x_2, las cantidades P_1 y P_2. Se tiene pues,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_3}\,dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\,dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$$

es decir,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial P_3}{\partial x_1} dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Expresando A_3 el valor de P_3 para $x_1 = a_1$, esta fórmula da

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A_3 + A_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

expresando A'_3 el valor de P_3 cuando se hace $x_1 = a_1$ y $x_2 = a_2$, de la que resulta:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3 - A'_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3};$$

y se tendrá

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} = P_3, \quad \text{si} \quad A'_3 = \frac{\partial F_3}{\partial x_3}, \quad \text{es decir, si} \quad F_3 = \int_{a_3}^{x_3} A'_3\, dx_3;$$

entonces la función

$$F_1 = \int_{a_1}^{x_1} P_1\, dx_1 + \int_{a_2}^{x_2} A_2\, dx + \int_{a_3}^{x_3} A'_3\, dx + F_4$$

admitirá por derivadas, con relación á x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots$, las cantidades P_1, P_2, $P_3, \ldots\ldots$, resultando que la diferencial de la función

$$\int_{a_1}^{x_1} P_1\, dx + \int_{a_2}^{x_2} A_2\, dx_2 + \int_{a_3}^{x_3} A_3\, dx_3 + \ldots + \int_{a_n}^{x_n} A_n\, dx_n$$

será la expresión (1), si se tiene en general,

$$A_{i+1} = P_{i+1}(a_1, a_2, \ldots, a_i\; x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

Caso particular. Sea la expresión

$$M dx + N dy,$$

que debe ser la diferencial de $u = f(x, y)$.

Tendremos

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

y resultará, identificando, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Recíprocamente, si se verifica esta condición, y buscamos una función u tal, que sea

$$du = Mdx + Ndy;$$

debiendo tener á Mdx por diferencial con relación á x, será igual á la integral de Mdx aumentada en una cantidad $\varphi(y)$, independiente de x, pero función de y; u será pues de la forma

$$u = \int Mdx + \varphi(y) = v + \varphi(y),$$

haciendo $v = \int Mdx$.

Falta ahora determinar á $\varphi(y)$ de modo que sea $\frac{\partial u}{\partial y} = N$; pero se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N - \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Se ve pues que $N - \frac{\partial v}{\partial y}$ no debe contener x. Se tendrá pues

$$\frac{\partial\left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y};$$

y si esta condición queda satisfecha, será

$$\varphi(y) = \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy, \quad u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy.$$

Ejemplo 1.° Sea

$$du = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{dN}{dx}\,.$$

$$\int_{x_0}^{x} Mdx = \int_{x_0}^{x} \frac{ydx}{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0}{y}\,.$$

$$\int_{y_0}^{y} Ndy = -\int_{y_0}^{y} \frac{x_0dy}{x^2+y^2} = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0}{y_0}\,,$$

$$u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x_0}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x_0}\right) + \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0}{y_0}\,;$$

y, puesto que $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x_0}{y} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x_0} = \dfrac{\pi}{2}$,

$$u = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + C.$$

Ejemplo 2.° Sea

$$du = \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y^2)}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy.$$

Tenemos $\dfrac{dM}{dy} = -\dfrac{2yx}{(x-y)^3} = \dfrac{dN}{dx}$

$$u = \int Mdx + \varphi(y) = \log x + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{2xy-y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi}{dy} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\,;$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1 - \frac{1}{y}, \qquad \varphi = y - \log y + C$$

$$u = \frac{xy}{x-y} + \log\frac{x}{y} + C.$$

§ 2.º Aplicaciones

1. $du = \left[\operatorname{tg} y - \dfrac{y}{\cos^2 x}\right] dx + \left[\dfrac{x}{\cos^2 y} - (\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} y)\right] dy$

$u = x \operatorname{tg} y - y \operatorname{tg} x - \cos y + C.$

2. $du = \left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{y(y+\sqrt{x^2+y^2})}{x^3}\right] dx + \left[\dfrac{1}{2y} - \dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right] dy$

$$u = \log x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{2}\,\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2} - \frac{1}{2}\log\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$+ \frac{1}{2}\log y + C.$$

3. $du = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$

$u = xy + xz + yz + C.$

4. $u = (2xy + z^2)\,dx + (2zy + x^2)\,dy + (2zy + y^2)\,dz$

$du = x^2 y + z^2 x + y^2 z + C.$

5. $\dfrac{a}{y}\,dx - \dfrac{ax+bz}{y^2}\,dy + \dfrac{b}{y}\,dz \qquad u = \dfrac{ax+bz}{y} + C.$

6. $\left[x + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right] dx + \left[y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right] dy$

$u = \dfrac{x^2+y^2}{2} + \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{y} + C.$

7. $du = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left[1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\dfrac{dy}{dx},$

$u = \log\left[x + \sqrt{x^2+y^2}\right] + C.$

8. $du = (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy;$

$u = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2y^2 x + \dfrac{y^3}{3} + C.$

CAPÍTULO VII

Integración por diferenciación é integración

§ 1.° Exposición de este método

44. Integración por diferenciación. Se pueden obtener integrales diferenciando con relación á un parámetro la expresión contenida bajo el signo de una integral definida. Por ejemplo:

1.° Diferenciando n veces respecto de a la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}},$$

resulta

$$\int_0^\infty \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n} \frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

2.° Diferenciando $n - 1$ veces respecto de a los dos miembros de

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = 1 \cdot 2 \ldots\ldots (n - 1) a^{-n}.$$

3.° Diferenciando $n - 1$ veces la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a + b\sqrt{-1}},$$

se tendrá

$$\int_0^\infty e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)x}\, x^{n-1}dx = \frac{(n-1)!}{\sqrt{\left(a+b\sqrt{-1}\right)^n}} \,.$$

45. Integraciones obtenidas por la integración bajo $\int$. En vez de diferenciar con respecto á un parámetro puede integrarse, obteniéndose así la integral de muchas funciones.

1.º Sea la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,.$$

Se tiene que

$$\int_c^a da \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \int_c^a \frac{a\,da}{a^2+b^2}\,;$$

pero

$$\int_c^a da \int_c^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \int_0^\infty dx \int_c^a e^{-ax}\cos bx\,da$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx.$$

Además $\displaystyle\int_c^a \frac{a\,da}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\,;$

luego

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\,.$$

Observación. Si se hace $b=0$, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{a}{c}\,.$$

Se obtendría también este resultado, integrando respecto de a entre los límites c y a la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

2.° Por el mismo procedimiento, de la expresión

$$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^3}$$

se deduce

$$\int_c^a da \int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \int_c^a \frac{bda}{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b(a-c)}{b^2 + ac}.$$

3.° Sea la integral

$$\int_0^\infty \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\left(e^{-nx} - e^{-\frac{x}{2}}\right) \frac{dx}{x}\right].$$

Integrando por partes los términos en $\frac{1}{x^2}$, se tendrá

$$\left(-\frac{e^{-nx} - e^{-\frac{x}{2}}}{x}\right)_0^\infty + \int_0^\infty \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(e^{-x} - e^{-nx}\right) \frac{dx}{x}\right].$$

El término integrado se reducirá á

$$\lim \left(\frac{e^{-n\varepsilon} - e^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \lim \left(\frac{1 - n\varepsilon + \ldots\ldots - 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \ldots\ldots}{\varepsilon}\right) = -n + \frac{1}{2}.$$

El valor de la integral, restante será $\left(n - \frac{1}{2}\right) \log n$; luego la integral total será

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2}.$$

4.º Análogamente, tendremos

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x}\right) dx = 1 - \log 2.$$

5.º Puede obtenerse por el procedimiento de la integración bajo el signo de la integral ya obtenida

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\, \alpha\, dt,$$

habiendo hecho $x = \alpha t$, y después multiplicando por $e^{-\alpha^2}$ é integrando con respecto á α desde o hasta ∞, pues tendremos

$$\mathrm{I} \int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \mathrm{I}^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)}\, \alpha\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{\pi}{4}, \qquad \mathrm{I} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Con auxilio de esta integral podemos obtener otras. Así, haciendo $x = y\sqrt{a}$, en la hipótesis de ser a positiva, se tendrá

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-ay^2} \sqrt{a}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

de donde $$\int_0^\infty e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}};$$

y por una serie de derivaciones sucesivas respecto de a,

$$\int_0^\infty y^2 e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\, a^{-\frac{3}{2}}, \quad \ldots\ldots$$

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{2^n}\, a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Falta demostrar que la integral

$$K = \int_p^\infty y^{2n} e^{-(a+\theta h)y^2}\, dy,$$

en la que θ es una función desconocida de y, comprendida entre o y I, tiende hacia cero, cuando h tiende hacia o y p hacia ∞.

Pero α es una cantidad positiva menor que a; y cuando h se haga suficientemente pequeña, $a + \theta h$ será $> \alpha$, y la integral será inferior á la siguiente:

$$K_1 = \int_p^\infty y^{2n} e^{-\alpha y^2}\, dy;$$

y como para valores suficientemente grandes de y, se tiene

$$y^{2n} e^{\alpha y^2} < \frac{1}{y^2}, \quad \text{será } K_1 < \int_p^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{p},$$

que tiende hacia cero para p suficientemente grande.

6.° Sea la integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Tendremos

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty - \frac{2a}{x^2} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}$$

y haciendo $x = \frac{a}{t}$,

$$\frac{dI}{da} = \int_\infty^0 2e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} dt = -2I, \quad \frac{dI}{J} = -2da;$$

luego $\log I = -2a + \log C, \quad I = Ce^{-2a}.$

Para determinar la constante C, hagamos $a = 0$, y será

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

luego $$C = \frac{1}{2}\pi \quad \text{é} \quad I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a}.$$

7.º Sea la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Se tiene (5º) que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha;$$

luego $$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ix}\, dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha,$$

é invirtiendo las integraciones,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2 - i}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{4}}\, d\alpha \left(\frac{1}{\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}} - \frac{1}{\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}} \right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \log\left(\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - \log\left(\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\Big]_0^\infty.$$

Pero $$e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{2},$$

$$\left[\log\left(\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}\right) - \log\left(\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right]_0^\infty$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \right\}_0^\infty$$

$$+ i \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)_0^\infty.$$

La parte real de esta expresión puede ponerse bajo la forma

$$\left\{ \frac{1}{2} \log \left[\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] : \left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}_0^\infty$$

y se anula en los límites, por reducirse la cantidad bajo el signo logaritmo á la unidad. Además cuando α varía desde o hasta ∞, los dos arcos tangentes varían respectivamente desde $\frac{\pi}{4}$ hasta π y desde $\frac{\pi}{4}$ hasta cero. La parte imaginaria será pues igual á πi; y se tendrá

$$I = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (1 + i).$$

Por otra parte $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$; luego

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

8.° Sea $I = \int_0^\infty e^{-ay^2} \cos 2\, by\, dy.$

Tendremos

$$I = \int_0^\infty e^{-ay^2} \left[1 - \frac{(2by)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(2by)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots\ldots \right] dy.$$

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[a^{-\frac{1}{2}} - \frac{(2b)^2}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} - \ldots\ldots \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{b^2}{a} + \ldots\ldots \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Observación 1.ª Si se hace en el ejemplo 2.° $a = \infty$, $c = 0$ se tendrá

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

siempre que $b > 0$. Si se tuviese $b < 0$, el segundo miembro sería $-\frac{\pi}{2}$. Esta integral ofrece pues una discontinuidad notable. Siendo constante cuando b varía conservando el mismo signo, pasa bruscamente de $-\frac{\pi}{2}$ á $\frac{\pi}{2}$ cuando, al anularse b, pasa de negativa á positiva.

Observación 2.ª Podemos concluir que es finita la integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

y obtendremos de otro modo su valor. En efecto, podemos escribir dicha integral de la manera siguiente

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx + \dots\dots$$

ó bien, sustituyendo x por $x + \pi$, $x + \pi$ por $x + 2\pi$, ...

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\,dx + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x+2\pi}\,dx - \dots\dots$$

El límite del término general es cero, porque se puede escribir así

$$\frac{1}{\xi + n\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2}{\xi + n\pi},$$

permaneciendo ξ comprendido entre 0 y π. Esta cantidad para $n = \infty$ es nula. Por consiguiente, la serie y la integral tienen un valor finito.

Esto sentado, para $a > 0$ se tiene

$$\int e^{-ax} \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{a \operatorname{sen} x + \cos x}{a^2+1} e^{-ax};$$

luego $$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{a^2+1};$$

é integrando desde $a = \varepsilon > 0$ hasta $a = \infty$, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \varepsilon. \qquad (1)$$

La integración puede efectuarse, puesto que la derivada segunda bajo el signo $\int$ es finita.

Restando $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, tendremos

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \varepsilon - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Para hallar el límite del primer miembro, lo escribiremos así

$$\int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \ldots\ldots,$$

ó también
$$\int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x}) \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$- \int_0^\pi (1 - e^{-\varepsilon x - \varepsilon\pi}) \frac{\operatorname{sen} x}{x + \pi} dx + \ldots..$$

Todos los términos de esta serie son decrecientes, alternativamente positivos y negativos; luego es convergente, y en suma está comprendida entre su primer término y la suma de los dos primeros. Este valor es pues cero para $\varepsilon = 0$.

La fórmula (1) se reduce, para $\varepsilon = 0$, á

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = 0; \quad \text{luego} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Cuando se hace $x = \alpha z$, tenemos, suponiendo $\alpha > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

46. Integrales de Fresnel. Si sustituimos x por $x\sqrt{a}$ en la fórmula $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ obtendremos

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}},$$

de donde

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx.$$

Multipliquemos los dos miembros por cos $a da$, é integremos desde o hasta ∞; tendremos

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\cos a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos a\,da\,dx,$$

é igualmente

$$\int_0^\infty \frac{da}{\sqrt{a}}\operatorname{sen} a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2}\operatorname{sen} a\,da\,dx.$$

Multipliquemos la segunda por $\sqrt{-1}$ y sumemos; resultará

$$\int_0^\infty \frac{e^{ai}\,da}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ax^2+ai}\,da\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{x^2\,dx}{x^4+1} + i\,\frac{dx}{x^4+1}\right).$$

Haciendo $x = \frac{1}{z}$, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \int_0^\infty \frac{z^2\,dz}{z^4+1};$$

luego
$$\int_0^\infty \frac{e^{ai}\,da}{\sqrt{a}} = (1+i)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}.$$

Pero $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ es igual á $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Se tiene pues, igualando á cero las partes reales y los coeficientes de $\sqrt{-1}$,

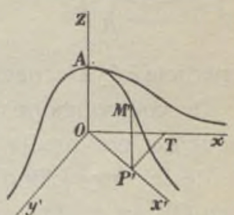
$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,da}{\sqrt{a}} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\,da}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

si se hace $a = x^2$, resulta

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

47. EMPLEO DE CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS. La integral $A = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ fué obtenida por Poisson mediante un procedimiento muy notable. Cambiando x en y se tendrá todavía

$$A = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy,$$



y por consiguiente,

$$A^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Sean tres ejes rectangulares Ox, Oy, Oz é

$$y = 0, \quad z = e^{-x^2},$$

las ecuaciones de una curva situada en el plano zOx

Si esta curva gira alrededor del eje Oz, engendrará una superficie cuya ecuación será

$$z = e^{-x^2-y^2}$$

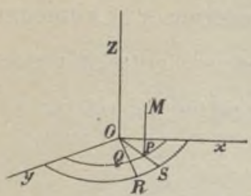
y la integral doble

$$\int_0^\infty \int_0 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

representará la cuarta parte del volumen comprendido entre la superficie y el plano xOy. Se puede valuar este volumen dividiéndolo en una infinidad de secciones cilíndricas, cuyo eje común sea Oz. La sección terminada en las superficies cuyos radios son r y $r + dr$ es igual á su base $2\pi r dr$ multiplicada por su altura z ó e^{-r^2}; luego

$$A^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-r^2} x \,.\, 2\pi r.dr = \frac{1}{4}\pi; \quad \text{de donde} \quad A = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (1)$$

Análogamente se determinarán otras integrales.



Supongamos que se trata de valuar

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty f(x, y)\, dx.$$

Esta integral representa la parte situada en el ángulo de las coordenadas positivas del volumen comprendido entre la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$ y el plano xOy.

Descompongamos este volumen en elementos infinitamente pequeños por medio de los planos zOS y zOR, trazados por el eje de las z y cilindros PQ, RS cuyo eje común es Oz. Si se hace OP $= r$, PO$x = \theta$, el volumen prisma infinitamente pequeño MPQRS, cuya base es el rectángulo PQRS $= r d\theta dr$ y la altura

$z = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$, será $r d\theta dr\, f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$.

La integral propuesta se podrá sustituir por la siguiente:

$$\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r d\theta\, dr,$$

cuyo valor es fácil hallar.

Observación 1.ª La integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ conduce á la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (2)$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$

y cambiando x en $-x$ resulta

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \text{ luego } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

En general, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad = 0,$$

según que $f(x)$ sea función par ó impar, es decir, según que

$$f(x) = f(-x) \quad \text{ó} \quad f(-x) = -f(x).$$

Observación 2.ª Si en la integral (2) se sustituye x por $x\sqrt{a}$, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Diferenciando n veces seguidas con relación á a, se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\ldots\,(2n-1)}{2^n}\,a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)};$$

y si se hace $a = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{2n}\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\,\ldots\ldots\,(2n-1)}{2^n}.$$

§ 2.º Aplicaciones

1. Diferenciando $\int_0^{\infty} e^{-ax}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{a^2+1}$ se obtiene

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2a}{(a^2+1)^2}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^2 \operatorname{sen} x\,dx = \frac{2\,(3a^2-1)}{(a^2+1)^3}.$$

Integrando entre o y a, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{arc\,tg} a.$$

Haciendo $a=\infty$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Diferenciando $\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\,dx = \frac{a}{a^2+1}$, resulta

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,x\cos x\,dx = \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}$$

$$\int e^{-ax}x^2\cos x\,dx - \frac{2a(a^2-3)}{(a^2+1)^3}.$$

Por integración entre o y a resulta

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\log(a^2+1).$$

3. Integrando $\int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$, con relación á n, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{\log x}\,dx = \log n$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^n-1}{x(\log x)^2} - \frac{n}{\log n}\right]dx = n\log n - n.$$

4. De $\int_0^\infty e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, por diferenciación respecto a, resulta

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ldots\ldots(2n-1)}{2^{n+1}a^{\frac{2n+1}{2}}}\sqrt{\pi}.$$

5. Se obtiene directamente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $d\alpha$ é integremos entre 0 y α; obtendremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arc\,tg} (a \operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2} \log (1 + a).$$

Si se hace $\quad a = 1, \quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} \log 2.$

6. Demostrar la fórmula

$$\int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^m dx = \frac{mn}{mn + 1} \int_0^{\sqrt[n]{m}} \left(1 - \frac{x^n}{m}\right)^{m-1} dx.$$

Para obtenerla, hagamos

$$A_p = \int_0^{m^{1:n}} \left(1 - \frac{x^n}{n}\right)^p dx, \qquad \frac{x^n}{m} = u,$$

y tendremos

$$A_p = \frac{m^{\frac{1}{n}}}{n} \int_0^1 (1 - u)^p \, u^{\frac{1}{n} - 1} \, du.$$

Integrando por partes,

$$A_p = p m^{\frac{1}{n}} \int_0^1 (1 - u)^{p-1} \, u^{\frac{1}{n}} \, du. \text{ etc.}$$

CAPÍTULO VIII

Integrales definidas entre límites imaginarios

§ 1.º Integración de las funciones variables imaginables

48. La consideración de las integrales definidas, cuando la variable pasa por una serie de valores imaginarios, se debe á Cauchy, que constituyendo un método fecundo para el estudio de las propiedades de las funciones, señaló un gran progreso en el Análisis matemático; y aunque parezca salir del dominio de la práctica es utilísimo este empleo de las imaginarias para proporcionar el camino más corto en la obtención de resultados dentro del dominio real. La teoría de Cauchy se funda en los teoremas siguientes:

Teorema I. *Sea* $f(z)$ *una función continua, cuando la variable* z *describe una curva* $z_0 z$ *. Si se toman en la curva puntos intermedios* $z_1, z_2, \ldots\ldots z_{n-1}$, *la suma*

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1}) \quad (1)$$

tiende hacia un límite determinado, cuando se aumenta indefinidamente el número de puntos de división, de manera que cada uno de los arcos tienda hacia cero.

En efecto, al describir el punto $z = x + yi$ la curva $z_0 Z$, se pueden considerar á x é y como funciones continuas $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ de una variable real t que crece desde t_0 hasta T. De esta manera la variable imaginaria z es una función de la variable t,

$$z = \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t) = \varphi(t).$$

Supondremos que cada una de las funciones reales $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

admite una derivada. Y para fijar las ideas, podrá tomarse como variable real auxiliar t la longitud del arco de curva contado á partir del punto z_0. Las derivadas $\varphi'_1(t)$ y $\varphi'_2(t)$ designarán entonces los cosenos de los ángulos que la tangente á la curva forma con los ejes Ox y Oy. Llamemos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ los valores de t que corresponden á los diferentes puntos de división señalados en la curva. Por tener derivadas las funciones $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ podremos escribir

$$\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + \varepsilon'_0],$$

$$\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_0) = (t_1 - t_0)[\varphi'_2(t_0) + \varepsilon''_0],$$

tendiendo ε'_0 y ε''_0 hacia cero al mismo tiempo que $t_1 - t_0$.

Se deduce enseguida

$$z_1 - z_2 = \varphi_1(t_1) - \varphi_1 t_0 + i[\varphi_2(t_1 - \varphi_2(t_0)]$$

$$= (t_1 - t_0)[\varphi'_1(t_0) + i\varphi'_2(t_0) + \varepsilon'_0 + i\varepsilon''_0] = (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0 + \varepsilon_0],$$

siendo ε_0 una cantidad imaginaria que tiende hacia cero con $t_1 - t_0$. Se tiene igualmente

$$z_2 - z_1 = (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + \varepsilon_1], \ldots\ldots,$$

$$Z - z_{n-1} = (T - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}],$$

tendiendo hacia cero las cantidades $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$ respectivamente con las diferencias $t_2 - t_1, \ldots\ldots, T - t_{n-1}$.

La suma (1) se reduce, por consiguiente, á

$$[f(z_0)\varphi'(t_0)(t_1 - t_0) + f(z_1)\varphi'(t_1)t_2 - t_1) + \ldots\ldots$$
$$+ f(z_{n-1})\varphi'(t_{n-1})(T - t_{n-1}) + [f(z_0)\varepsilon_0(t_1 - t_0)$$
$$+ f(z_1)\varepsilon_1(t_2 - t_1) + \ldots\ldots + f(z_{n-1})\varepsilon_{n-1}(T - t_{n-1})$$

cuya segunda parte tiende á cero, porque si se llama M al máximo del módulo de $f(z)$ en la curva z_0Z, y ε el mayor módulo de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}$, el módulo del segundo paréntesis es menor que M ε (T $- t_0$).

En cuanto á la primera parte, si se hace

$$f(z)\,\varphi'(t) = \psi(t) + i\,\chi(t),$$

se descompone en dos

$$[\psi(t_0)(t_1 - t_0) + \psi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \psi(t_{n-1})(\mathrm{T} - t_{n-1})]$$
$$+ i\,[\chi(t_0)(t_1 - t_0) + \chi(t_1)(t_2 - t_1) + \ldots + \chi(t_{n-1})(\mathrm{T} - t_{n-1})],$$

la una real y la otra imaginaria, y los límites de las dos sumas contenidas en los paréntesis son

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \psi(t)\,dt, \qquad \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \chi(t)\,dt.$$

La suma (1) tiende pues hacia el límite

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \psi(t)\,dt + i \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \chi(t)\,dt,$$

que se llama la integral definida

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de la curva $z_0\,\mathrm{Z}$. (*)

Corolario i. *Se tiene*

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\psi(t) + i\,\chi(t)]\,dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(z)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Corolario ii. Si se llaman $c_0, c_1, \ldots\ldots, c_{n-1}$ las longitudes de las cuerdas que subtienden los arcos $z_0\,z_1, z_1\,z_2, \ldots\ldots, z_{n-1}\,\mathrm{Z}$ y l á la longitud de la curva $z_0\mathrm{Z}$, el módulo de la suma (1) es menor que

$$\mathrm{M}\,(c_0 + c_1 + \ldots\ldots + c_{n-1}) < \mathrm{M}\,l.$$

Se tiene pues, $\quad \text{mod.} \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} f(z)\,dz < \mathrm{M}\,l.$

(*) Véase t II pág. 202.

TEOREMA II. *Si se cambia de variable haciendo $z = \varphi(z')$, se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z'_0}^{Z'} f(z)\,\varphi'(z')\,dz'.$$

Se supone continua la función $\varphi(z')$ cuando z' describe cierta curva $z'_0 Z'$ y que además admite una derivada $\varphi'(z')$. La variable z describe una curva correspondiente $z_0 Z$, tomándose las integrales según estas dos curvas; y se tiene

$$Z_1 - z_0 = (z'_1 - z'_0)\,[\varphi'(z'_0) + \varepsilon_0], \ldots\ldots$$

$$Z - z_{n-1} = (Z' - z'_{n-1})\,[\varphi'(z'_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}].$$

Por consiguiente,

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots + f(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

$$= [f(z_0)\,\varphi'(z'_0)(z'_1 - z'_0) + \ldots + f(z_{n-1})\,\varphi'(z'_{n-1})(Z' - z'_{n-1})]$$

$$+ [f(z_0)\,\varepsilon_0\,(z'_1 - z'_0) + \ldots + f(z_{n-1})\,\varepsilon_{n-1}\,(Z' - z'_{n-1})].$$

Si llamamos M al máximo del módulo de $f(z)$, y ε al de las cantidades $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}$, y $c_0, \ldots, c_{n-1}$ á las cuerdas que subtienden los arcos $z'_0\, z'_1, \ldots\, z'_{n-1} Z$, y l' á la longitud de la curva $z'_0 Z'$, el módulo de la segunda parte es menor que

$$M\,\varepsilon\,(c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}) < M\,\varepsilon\,l';$$

tendiendo esta segunda parte hacia cero, las dos integrales son iguales.

COROLARIO. *Si cuando la variable* z *describe la curva* $z_0 Z$, *la función* F(z) *es continua y admite á* f(z) *por derivada, se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

hallándose tomada la integral á lo largo de la curva.

Hagamos $u = F(z)$. Cuando la variable z describe la curva $z_0 Z$, la variable u describe una curva correspondiente $u_0 U$, y en virtud del teorema precedente, se tiene

$$\int_{u_0}^{U} du = \int_{z_0}^{Z} F'(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Si se designa por $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ una serie de puntos intermedios en la curva u_0U, la primera integral es la suma

$$(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (U - u_{n-1}).$$

Pero esta suma es igual á $U - u_0$; luego la integral definida es igual á $U - u_0$, es decir, igual á $F(Z) - F(z_0)$.

TEOREMA III. *Si la función* f(z) *puede desarrollarse en una serie*

$$f(z) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

cuyos términos son funciones continuas de z, *cuando esta variable describe la curva* z_0Z, *convergente en todos los puntos de esta curva, y tal que se pueda tomar* n *bastante grande para que, en cada uno de estos puntos el módulo de la suma* $u_n + u_{n+1} + \ldots$ *sea menor que un número dado* α, *se tiene*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{Z} u_1\,dz + \ldots$$

tomándose todas estas integrales á lo largo de la curva z_0Z.

Designando por S_n la suma de los n primeros términos, tendremos

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = S_n + \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)\,dz;$$

y siendo el módulo de $\varphi(z)$ menor que α, el módulo de la última integral es menor que αl. La suma S_n tiende pues hacia un límite igual á la primera integral, cuando n aumenta indefinidamente.

TEOREMA IV. *Cuando una función* f(z) *es holomorfa en una parte del plano de contorno simple, la integral definida*

$$\int_C f(z)\,dz$$

relativa á una curva cerrada situada en este punto del plano, es nula.

No es necesario demostrar este teorema y sus consecuencias inmediatas por haberse demostrado en el tomo II de esta obra; y únicamente terminaremos este párrafo con algunas aplicaciones después de demostrar el siguiente

TEOREMA V. *Si para* $z = \infty$ *ó para* $z = 0$ *el producto* $zf(z)$ *tiende hacia cero, la integral* $\int f(z)\,dz$, *tomada á lo largo de una circunferencia de radio infinito, ó de una circunferencia de radio infinitamente pequeño, cuyo centro está en el origen, es nula.*

En efecto, siendo

$$\text{mod} \int f(z)\,dz < \int |f(z)|\,|dz|,$$

hagamos $$z = R(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi),$$

de donde

$$dz = Ri(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\,d\varphi, \qquad |dz| = R\,d\varphi;$$

pero $\lim zf(z) = 0$; luego $|f(z)| < \dfrac{\varepsilon}{|z|}$,

siendo ε un número arbitrario, ó

$$|f(z)| < \frac{\varepsilon}{R};$$

y será

$$\text{mod} \int f(z)\,dz < \int \frac{\varepsilon}{R} R\,d\varphi < 2\pi\varepsilon,$$

lo que demuestra el teorema, porque ε puede tomarse tan pequeño como se quiera.

Ejemplo. Sea la función e^{-z^2} holomorfa en todo el plano. La integral

$$\int e^{-z^2}\,dz$$

relativa á un contorno cerrado cualquiera es nula, pues si consideramos el rectángulo A_1ABB_1 formado por el eje de las x, una paralela B_1 B á este eje, á la distancia b y dos paralelas AB, A_1 B_1 al eje de las y á la misma distancia a, se tiene $z = x$, según A_1A, variando x desde $-a$ hasta $+a$; según AB, se tiene $z = a + yi$, variando y desde o hasta b; según BB_1, se tiene $z = x + bi$, variando x desde $+a$ hasta $-a$, y según B_1A_1 se tiene $z = -z + yi$, variando y de b á o. Siendo la integral relativa al contorno nula, resulta que

$$\int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx + i\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy$$

$$+\int_{+a}^{-a} e^{-(x+bi)^2}\,dx + i\int_b^o e^{-(-a+yi)^2}\,dy = 0.$$

La segunda integral

$$\int_0^b e^{-(a+yi)^2}\,dy = e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2-2ayi}\,dy$$

tiende hacia cero cuando a aumenta indefinidamente, y lo mismo sucede á la cuarta. Pero el límite de la primera es $\sqrt{\pi}$ (p. 156); luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+bi)^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

ó

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2bxi+b^2}\,dx$$

$$= e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx - i \operatorname{sen} 2bx)\,dx = \sqrt{\pi};$$

por consiguiente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-b^2}.$$

49. Otro método. La integral $\int_0^b e^{-x^2}\,dx$ puede escribirse así

$$\lim_{h=0} \Sigma h(1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots + e^{-n^2h^2}) \qquad (1) \qquad (nh = b)$$

é
$$\int_b^c e^{-x^2}\,dx = \lim_{h=0} \sum_{i=0}^{i=m-1} h\Big[e^{-b^2} + e^{-(b+h)^2} + \ldots\ldots + e^{-[b+(m-1)h]^2}\Big].$$

Pero en ésta se tiene

$$e^{-(b+ih)^2} = e^{-b^2}\, e^{-2bih}\, e^{-i^2h^2} < e^{-b^2}\, e^{-i^2h^2},$$

de lo que resulta

$$\int_b^c e^{-x^2}\,dx < e^{-b^2} \lim_{h=0} \Sigma h\left[1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots\right].$$

Esta suma prolongada al infinito, es finita. La escribiremos así:

$$S = \frac{h}{\sqrt{1-e^{-h^2}}}\sqrt{1-q}\,f(q),$$

haciendo

$$e^{-h^2} = q, \qquad f(q) = 1 + q + q^4 + \ldots\ldots + q^{n^2} + \ldots\ldots$$

Expresemos por $[\sqrt{n}]$ el mayor entero contenido en $\sqrt{n}$, y comparemos las dos series, divergentes para $q \geqq 1$,

$$\frac{f(q)}{1-b} = \psi(q) = 1 + [\sqrt{1}]\,q + [\sqrt{2}]\,q^2 + \ldots + [\sqrt{n}]\,q^n + \ldots$$

$$F(q) = (1-q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}q + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2n}(2n+1)\,q^n + \ldots\ldots$$

En ésta puede escribirse, en virtud de la fórmula de Wallis, el coeficiente de q^n, así:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1+\varepsilon)\sqrt{2n+1} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\,(1+\varepsilon')$$

tendiendo ε y ε' hacia cero para $x = \infty$. El límite, pues, de la relación de los coeficientes de q^n en $\psi(q)$ y en $F(q)$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\left[\sqrt{n}\right]}{\sqrt{n}} \quad \text{es} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

Pero: *Cuando dos series ordenadas según las potencias ascendentes de una misma letra son divergentes y la relación de los coeficientes de una misma potencia de la letra ordenatriz tiene un límite, la relación de la suma de los* n *primeros términos tiene el mismo límite cuando* n *crece al infinito*, porque la relación

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots\ldots + b_n}$$

está comprendida entre el mayor y el menor valor de las relaciones $\frac{a_0}{b_0}$, $\frac{a_1}{b_1}$, ... De manera, que si n es bastante grande; para que la relación de los términos de igual lugar de las series divergentes

$$f(n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots, \quad \varphi(n) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots$$

difiera, para dicho valor de n y para los valores superiores, de su límite l en un número inferior á ε, se podrá escribir

$$l + \varepsilon < \frac{a_n x^n + \ldots\ldots + a_{n+p} x^{n+p}}{b_n x^n + \ldots\ldots + b_{n+p} x^{n+p}} < l + \varepsilon.$$

Si pues, $f_p(x)$ es la suma de los $n + p$ primeros términos de $f(x)$ y $\varphi_p(x)$, la relación intermedia podrá escribirse así

$$\frac{f_p(x) - (a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1})}{\varphi_p(x) - (b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_{n-1} x^{n-1})}$$

ó
$$\frac{f_p(x)}{\varphi_p(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}}{f_p(x)}}{1 - \dfrac{b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_{n-1} x^{n-1}}{\varphi_p(x)}};$$

y $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ se hallará comprendida entre $l - \varepsilon$ y $l + \varepsilon$ para n suficientemente grande.

Por consiguiente, haciendo tender q hacia 1, será

$$\lim_{q=1} \frac{\psi(q)}{f(q)} = \lim_{q=1} \sqrt{1 - q}\, f(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

luego
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \lim_{h=0} \frac{h}{\sqrt{1 - e^{-h^2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Esto sentado, se tiene que

$$\int_b^c e^{-x^2}\,dx < e^{-b^2}\,S.$$

Si pues, se hace crecer b hacia el infinito, el segundo miembro tiende hacia cero, y también el primero; y tendremos

$$I = \lim_{h=0} \Sigma h\,(1 + e^{-h^2} + e^{-4h^2} + \ldots\ldots)$$

El segundo miembro es precisamente S; luego

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§ 2.º Cálculo de residuos de Cauchy

Definiciones. Ya se expusieron en el tomo II algunas nociones de la teoría de los residuos. El *residuo* de una función monódroma y monógena es, según se expuso, la integral

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño descrito desde el punto c, en el que $f(z)$ se hace infinita, como centro y recorrido en sentido directo.

Se demostró también que: *La integral de una función monódroma y monógena, tomada á lo largo de un contorno cerrado simple es igual al residuo integral de esta función relativo á dicho contorno, ó sea, á la suma de los residuos de dicha función relativos á cada uno de los infinitos contenidos en el contorno, multiplicado por* $2\pi\sqrt{-1}$.

Vamos ahora á aplicar la teoría de los residuos á la obtención de algunas integrales.

1.º Sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\sqrt{-1}\,\Sigma\,\mathfrak{R}\,\frac{1}{(z^2+a^2)^m}, \qquad (1)$$

El residuo es relativo á los infinitos situados sobre el eje de las x, no existiendo más que el solo infinito $a\sqrt{-1}$, situado en la parte superior de dicho eje. Dicho residuo será pues,

$$\left[\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{dz^{m-1}}{d^{m-1}}\,\frac{1}{(z+a\sqrt{-1})^m}\right]_{z=a\sqrt{-1}}$$

ó
$$\frac{(-1)}{(2a\sqrt{-1})^{2m-1}}\;\frac{m(m+1)\ldots\ldots(2m-1)}{(m-1)!},$$

la fórmula (1) da por consiguiente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = 2\pi\;\frac{m(m+1)-(2m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2m-1}.$$

2.º Sea la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx.$

Supongamos que se integra la función $\dfrac{e^{bz\sqrt{-1}}}{z}$ á lo largo de un contorno formado por el eje de las x negativas, desde un punto situado á la distancia — R del origen hasta otro situado á la distancia — ε, enseguida por una semicircunferencia de radio ε situada sobre el eje de las x con su centro en el origen, enseguida por el eje de las x positivas desde $+\varepsilon$ hasta $+$ R y, por último, cerrándose el contorno con una semicircunferencia A situada sobre el eje de las x y cuyo radio es R.

La integral á lo largo de este contorno será nula. La integral tomada á lo largo de la circunferencia de radio R será nula para R $=\infty$, si se supone que b sea positivo; pues estonces $z\dfrac{e^{bzi}}{z}$ ó e^{bzi} se reduce á cero, cuando la parte imaginaria de z es positiva, lo que se verifica á lo largo de dicha circunferencia. Se tiene pues, suponiendo R $=\infty$,

$$0=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bxi}}{x}\,dx+\int_{\mathrm{A}}\frac{e^{bzi}}{z}\,dz+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{bxi}}{x}\,dx.$$

La segunda integral á lo largo del semicírculo A para $\varepsilon=0$ es, salvo el signo, el semi-residuo de $\dfrac{e^{bzi}}{z}$ para $z=0$, multiplicado por $2\pi i$ ó $-\pi i$. Se obtiene pues,

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{bxi}}{x}\,dx+\frac{e^{bxi}}{x}\,dx=\pi\sqrt{-1}.$$

Si se sustituye e^{bxi} por $\cos bx+i$ sen bx, se ve que la parte real del primer miembro es nula, y que

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx=\pi.$$

Añadiendo el elemento $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx$, que es infinitamente pequeño, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx=\pi, \text{ y por consiguiente } \int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Si $b=0$, se tiene $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} bx}{x}\,dx=0.$

La integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \cos bx}{x} dx$ se deduce de la anterior, puesto que se descompone en

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{x} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{x} dx.$$

Supongamos que a y b sean positivos. Si $a > b$, esta suma es $\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$ ó $\frac{\pi}{2}$; si $a < b$, dicha suma es igual á cero. Si $a = b$ será igual á $\frac{\pi}{4}$.

3.° Sea la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$.

Si se integra la función $\frac{e^{azi}}{1+z^2}$, en la que a es positivo, á lo largo del eje de las x desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y á lo largo de una semicircunferencia de radio infinito descrita desde el origen como centro, á la parte superior de dicho eje; la suma de las integrales así calculadas será igual al residuo de $\frac{e^{azi}}{1+z^2}$ relativo al punto $z = \sqrt{-1}$ para el que la función se hace infinita, multiplicado por $2\pi i$, es decir, á

$$2\pi\sqrt{-1}\,\frac{e^{-a}}{2\sqrt{-1}} \quad \text{ó} \quad \pi e^{-a}.$$

Pero la integral tomada á lo largo de la semicircunferencia es nula. Se tendrá pues,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axi}\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a};$$

y separando las partes reales y los coeficientes de i,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} = \pi e^{-a}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{1+x^2} dx = 0.$$

La primera fórmula queda sustituída por πe^{a}, cuando a es negativo. Diferenciando esta fórmula, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-a}.$$

4.° Sea la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{az}}{1+e^{z}}\, dz.$

Si se integra la función

$$y = \frac{e^{az}}{1+e^{z}} \qquad (0 < a < 1)$$

á lo largo de un contorno rectangular formado por el eje de las x, una perpendicular á éste en el infinito en la parte superior del mismo é igual á 2π, una paralela también al eje de las x á la distancia $+2\pi$ de él y por otra perpendicular trazada al mismo en el infinito negativo, de longitud 2π; la integral tomada á lo largo del contorno será igual á $2\pi i$ por el residuo de la función y, relativo al punto $z = \pi i$ que la hace infinita; luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^{x}} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(x+2\pi i)}\, dx}{1+e^{x}} = 2\pi i\, \mathfrak{R}\, \frac{1+e^{z}}{e^{az}},$$

observando que á lo largo de los lados verticales del rectángulo la integral y es nula.

Podemos por lo tanto escribir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^{x}} \left(1 - e^{2a\pi i}\right) = 2\pi i\, \frac{e^{a\pi i}}{-1},$$

de la que resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^{x}} = 2\pi i\, \frac{1}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}}$$

ó en fin, $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1+e^{x}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Cambiando a en $1 - a$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{t^{-a}dt}{1+t} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

§ 3.º Aplicaciones

1. $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Si se trazan dos circunferencias infinitamente pequeñas, que rodeen los puntos -1 y $+1$ y se forma el contorno C, tendremos que calcular la integral á lo largo de C.

Partiremos del origen, tomando el radical igual á $+1$.

A lo largo de la circunferencia descrita alrededor del punto 1, la integral es infinitamente pequeña; pero después de haber caminado la variable z alrededor del punto 1, el radical $\sqrt{1-x^2}$ cambia de signo, y la integral tomada desde el punto 1 hasta el punto cero, adquiere todavía el valor

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

A lo largo del resto del contorno C la integral adquiere el valor

$$-\int_0^{-1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}};$$

luego la integral, tomada á lo largo de C, es

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Siendo cero la integral á lo largo de la circunferencia de radio infinito, la expresión precedente será igual á $2\pi\sqrt{-1}$ multiplicada por los residuos relativos á las puntos $a\sqrt{-1}$ y $-a\sqrt{-1}$. Los valores absolutos de estos residuos son

$$\frac{1}{2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{y} \quad \frac{1}{+2a\sqrt{-1}}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Como la integral propuesta no es nula ni negativa, es necesario tomar estos residuos con el signo $+$, y se tiene

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}.$$

Por otra parte, se pueden determinar los signos de los residuos, observando que el argumento de x á lo largo del eje de las x tomado en el origen igual á cero, es igual $\frac{\pi}{2}$ en $a\sqrt{-1}$ y á $\frac{3\pi}{2}$ en $-a\sqrt{-1}$.

2. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} - \frac{1}{2a}.$$ LEGENDRE.

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1-2a\cos x + a^2}\,x\,dx = \frac{\pi}{4a}\log(1+a)$$

si $-1 < a < 1$, $\quad = \frac{\pi}{4a}\log\left(1+\frac{1}{a}\right)$ si $a^2 > 1$.

4. $$\int_0^\infty e^{a-1}\operatorname{sen}\left(\frac{a\pi}{2} - bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,r^{a-1}\,e^{-br}.$$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2\theta}{1-2r\cos 2\theta + r^2}\log\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}\log\frac{1+r}{4}.$$

CAPÍTULO IX

Cálculo de las integrales definidas por series

§ 1.º TEOREMAS FUNDAMENTALES

50. PRIMER TEOREMA DE CAUCHY. *Si las funciones reales* $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ *de* x *son susceptibles de integración entre los límites* x_0 *y* X, *y si además es uniformemente convergente entre dichos límites la serie*

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (1)$$

y representa una función $\varphi(x)$ *susceptible de integración; si, por último, se tiene que* $x_0 < a < b < X$, *se verificará que*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0\, dx + \int_a^b u_1\, dx + \ldots + \int_a^b u_n\, dx + \ldots$$

Hagamos $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$

Por ser la serie uniformemente convergente entre x_0 y X, se podrá suponer en este intervalo n tal, que sea mod. $R < \varepsilon$; y de (1) resultará

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + R_n(x)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0\, dx + \ldots + \int_a^b u_n\, dx + \int_a^b R_n(x)\, dx.$$

Pero, siendo mód $R_n(x) < \varepsilon$, será mód $\int_a^b R_n\, dx$ menor que $\varepsilon(b-a)$, que se podrá representar por $\theta\varepsilon(b-a)$, expresando θ un número comprendido entre -1 y $+1$, de modo que la fórmula anterior, para $n = \infty$, será

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0\, dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n\, dx + \ldots\ldots$$

Observación. Esta regla solo es aplicable cuando a y b son finitos, pues la serie

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots\ldots,$$

es uniformemente convergente entre o é ∞; porque el resto puede hacerse $< \varepsilon$, tomando n de manera que

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\ldots \text{ sea } < \varepsilon;$$

y se tendrá, integrando desde x hasta ∞, el resultado absurdo

$$-\int_x^\infty \varphi(x)dx = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x+n} + \ldots\ldots$$

puesto que el segundo miembro es divergente.

51. Segundo teorema de Cauchy. *Si las funciones* u_0, $u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ *de* x *son sinécticas en el interior de un contorno* C *cerrado simple, siendo además uniformemente convergente en el interior de este contorno la serie*

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (3)$$

1.° $\varphi(x)$ *es continua y monódroma en el interior de* C.

2.° *Se tendrá*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b u_0\,dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots\ldots$$

si el contorno ab *no encuentra al contorno C.*

3.° *Para todo punto* x *interior al contorno* C, *se tendrá*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots,$$

y la función φ *será sinéctica en el contorno* C.

En efecto, por ser la serie (3) uniformemente convergente, se podrá tomar n tal, que se tenga, cualquiera que sea x contenido en C,

$$\text{mod}\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots) < \varepsilon$$

ó, llamando R_n á la cantidad colocada entre paréntesis,

$$\operatorname{mod} R(x) < \varepsilon; \tag{4}$$

y puesto que (3) da

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n + R(x),$$

resultará

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b u_0 ds + \ldots + \int_a^b u_n\, dx + \int_a^b R(x)dx; \tag{5}$$

pero llamando ds al elemento de arco del contorno de integración, será

$$\int_a^b R(x)dx = \int_0^\sigma R(x)\frac{dx}{ds}\, ds;$$

y si se observa que el módulo de $\frac{dx}{ds} = 1$,

$$\text{mód} \int_a^b R(x)\, dx < \int_0^\sigma \varepsilon ds \quad \text{ó} \quad < \sigma\varepsilon.$$

La integral $\int_a^b R dx$ puede pues representarse por $\theta\sigma\varepsilon$, expresando θ una imaginaria de módulo inferior ó á lo más igual á 1; y la fórmula (5) se reduce á

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0 dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n\, dx + \theta\sigma\varepsilon.$$

Si pues, el contorno de integración σ es de longitud finita, $\theta\sigma\varepsilon$ podrá hacerse tan pequeño como se quiera, y se tendrá

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^b u_0 dx + \ldots\ldots + \int_a^b u_n dx + \ldots\ldots$$

Además, si se toma por contorno de integración una circunferencia infinitamente pequeña descrita alrededor del punto x interior á C, será

$$\int \frac{\varphi(x)}{(z-x)^2}\, dz = \int \frac{u_0(z)}{(z-x)^2}\, dz + \ldots + \int \frac{u_n(z)}{(z-x)^2}\, dz + \ldots$$

es decir

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots$$

§ 2.° Digresión acerca de algunas series y productos infinitos

52. Lema. *La inversa de la suma de una serie entera cuyo primer término no es nulo es desarrollable en serie entera.*

Sea $$\varphi(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots$$

una serie entera en la que los valores absolutos de los coeficientes son á lo más iguales á la unidad. Esta serie es convergente para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(-1, +1)$. Además se pueden obtener siempre números $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ tales, que la serie

$$\psi(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots\ldots$$

sea convergente en el interior del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ y satisfaga á la ecuación

$$\varphi(x)\,\psi(x) = 1, \quad \text{ó} \quad (1 + \alpha_1 x + \ldots)(1 + \beta_1 x + \ldots) = 1.$$

En efecto, las ecuaciones

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 = 0, \ \ldots\ldots$$
$$\alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_1 + \ldots\ldots + \alpha_1 \beta_{n-1} + \beta_n = 0, \ \ldots\ldots$$

determinan sucesivamente los coeficientes $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$; y por ser el valor absoluto de α_n á lo más igual á la unidad, resulta que

$$|\beta_1| < 1, \quad |\beta_2| < 2, \quad |\beta_3| < 2^2, \ \ldots\ldots, \quad |\beta_n| < 2^{n-1}.$$

La serie $\psi(x)$ es pues absolutamente convergente en el interior del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$; luego en este intervalo, la función $\varphi(x)$ no se anula, y su inversa puede desarrollarse en serie entera.

Sea ahora $f(x)$ una función desarrollable según la serie entera

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

cuyo radio de convergencia es R, no siendo nulo su primer término a_0. Para un valor positivo x_0 de x inferior á R, se puede determinar un número entero m tal, que á partir de $n = m$, se tenga

$$\left| a^n x_0^n \right| < \left| a_0 \right|;$$

entonces, si r es una constante inferior á x_0 y al menor de los números

$$\left|\frac{a_0}{a_2}\right|, \quad \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}, \quad \sqrt[3]{\left|\frac{a_0}{a_3}\right|}, \quad \ldots\ldots \quad \sqrt[m-1]{\left|\frac{a_0}{a_{m-1}}\right|},$$

haciendo $x = rt$, se tiene que

$$\frac{1}{a_0} f(x) = 1 + r\frac{a_1}{a_0} t + r^2 \frac{a_2}{a_0} t^2 + \ldots\ldots;$$

pero, cualquiera que sea n, el valor absoluto del coeficiente de t^n queda inferior á la unidad; luego, según lo que se ha concluído, $\frac{1}{f(x)}$ es desarrollable en serie entera en el intervalo $\left(-\frac{r}{2}, +\frac{r}{2}\right)$, siendo ciertamente superior á $\frac{r}{2}$ el menor valor absoluto de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$.

53. Números de Bernoulli. Sea

$$y = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{ó} \quad y = \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}.$$

Siendo desarrollable en serie entera de primer término no nulo la función $\dfrac{e^x - 1}{x}$, también lo será su inversa (p. 179); luego también lo será y. Pero y no cambia al cambiarse x en $-x$; luego se puede escribir

$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \ldots\ldots,$$

$$-(-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots\ldots$$

de lo que resulta

$$x\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-1} = 1 + 2^2B_1\frac{x^2}{2!} - 2^4B_2\frac{x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

$$-(-1)^n 2^{2n} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots\ldots \qquad (*)$$

Y por ser

$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n+1)} = 2, \quad (e^x + e^{-x})_0^{(2n)} = 2,$$

$$(e^x - e^{-x})_0^{(2n)} = 0, \qquad (e^x + e^{-x})^{(2n+1)} = 0;$$

si se representa por z la función $x\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, tomando la derivada de orden $2n+1$ de los dos miembros de la ecuación

$$z(e^x - e^{-x}) = x(e^x + e^{-x}),$$

se obtendrá, para $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1}z_0^{(2n)} + \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{3!}z_0^{(2n-2)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(2n+1)\,2n}{2!}z_0'' + z_0 = 2n+1;$$

(*) Euler *Institutiones Calculi differentialis* prs. § 2 114.

pero $$z_0^{(2n)} = -(-1)^n 2^{2n} B^n,$$

$$z^{(2n-2)} = -(-1)^{n-1} 2^{2n-2} B_{n-1}, \ldots\ldots, z''_0 = 2^2 B_1;$$

y sustituyendo, resulta que los coeficientes $B_0, B_1, \ldots\ldots, B_n$ satisfacen á la relación recurrente

$$(1)\quad \frac{2n+1}{1} 2^{2n} B_n - \frac{(2n+1)\, 2n\,(2n-1)}{3\,!} 2^{2n-2} B^{n-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)\, 2n}{2\,!} 2^2 B_1 + (-1)^n 2n = 0,$$

relación que permite calcular sucesivamente $B_1, B_2, \ldots\ldots$, obteniéndose

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$B = \frac{5}{66},\quad B_6 = \frac{691}{2730},\quad B_7 = \frac{7}{6},\quad B_8 = \frac{3617}{510},$$

que son los números de Bernoulli.

COROLARIO. *La suma de las potencias de los números enteros puede expresarse por medio de los números de Bernoulli.*

En efecto, de
$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots\ldots + e^{(n-1)x},$$
se deduce
$$y^{(p)} = 1^p e^x + 2^p e^{2x} + \ldots\ldots + (n-1)^p e^{(n-1)x},$$
y por consiguiente:
$$y_0^{(p)} = 1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p;$$
pero
$$\frac{x}{e^{nx}-1} = n + n^2 \frac{x}{2\,!} + n^3 \frac{x^2}{3\,!} + \ldots\ldots$$

y $$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Se puede por tanto escribir

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_p x^p + \ldots\ldots,$$

hallándose determinado el coeficiente a_p por la relación

$$a_p = \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{1}{2}\frac{n^p}{p!} + \frac{B_1}{2!}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} - \ldots\ldots$$

Por otra parte

$$y_0^{(p)} = 1 . 2 \ldots\ldots p a_p;$$

luego, si S_p expresa la suma de las potencias de orden p de los n primeros números enteros, se tendrá

$$S_p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + p B_1 \frac{n^{p-1}}{2!}$$

$$- p(p-1)(p-2) B_2 \frac{n^{p-2}}{4!} + \ldots .$$

y, en particular,

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

. . . .

Observación. Para $n = \infty$,

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

54. POLINOMIOS DE BERNOULLI. Se llama *polinomio de Ber-*

noulli á todo polinomio $B_p(x)$ que se anula con x y satisface á la relación

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p,$$

siendo p un número entero positivo ó nulo.

Expresemos por m el grado de $B_p(x)$; la diferencia

$$B_p(x+1) - B_p(x)$$

es un polinomio de grado $m-1$; pero por ser dicha diferencia igual á x^p, su grado es p, y $m = p + 1$, pudiéndose escribir

$$B_p(x) = A_0 x^{p+1} + A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x^2 + A_p$$

$$B_p(x+1) = A_0 (x+1)^{p+1} + A_1 (x+1)^p + \ldots\ldots$$

Si desarrollamos y obtenemos la expresión $B_p(x+1) - B_p(x)$, igualamos á 1 el coeficiente de x^p é igualamos á cero los coeficientes de las demás potencias de x, resultará

$$\frac{p+1}{1} A_0 = 1,$$

$$\frac{p}{1} A_1 + \frac{(p+1)p}{2!} A_0 = 0,$$

$$\frac{p-1}{1} A_1 + \frac{p(p-1)}{2!} A_1 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!} A_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_p + A_{p-1} + A_{p-2} + \ldots\ldots + A_1 + A_0 = 0.$$

Estas ecuaciones permiten calcular $A_0, A_1, \ldots\ldots$ y determinar el polinomio $B_p(x)$. Si en

$$B_p(x+1) - B_p(x) = x^p$$

se sustituye x sucesivamente por $0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$, hallaremos

$$B_p(1) - B_p(0) = 0, \quad B_p(2) - B_p(1) = 1^p, \ldots\ldots,$$

$$B_p(n) - B_p(n-1) = (n-1)^p,$$

y por consiguiente

$$B_p(n) = 1^p + 2^p + \ldots\ldots + (n-1)^p.$$

Los coeficientes del polinomio $B_p(x)$ son pues los mismos que los de las potencias de n en el desarrollo de la suma s_p de las potencias del orden p de los $n-1$ primeros números enteros; luego

$$B_p(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}x^p + pB_1\frac{x^{p-1}}{2!}$$

$$-p(p-1)(p-2)B_2\frac{x^{p-3}}{x!} + \ldots\ldots$$

figurando los números de Bernoulli en la expresión de los ***polinomios de Bernoulli*** B_p (x).

55. Series de Euler. Hagamos

$$(1+ax)(1+a^2x)\ldots\ldots(1+a^nx) = F_n(a,x).$$

Se tiene evidentemente, que

$$F_n(a,x)(1+a^{n+1}x) = F_n(a,ax)(1+ax). \qquad (1)$$

Si se hace ahora

$$F_n(a, x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots\ldots + A_nx^n,$$

se tendrá, en virtud de (1),

$$(1 + A_1x + \ldots\ldots + A_nx^n)(1+a^{n+1}x)$$
$$= (1 + a_1 A_1x + \ldots\ldots + A_na^nx^n)(1+ax),$$

é identificando,

$$A_1 + a^{n+1} = A_1a + a, \qquad A_1 = a\frac{1-a^n}{1-a},$$

$$A_2 + A_1a^{n+1} = A_2a^2 + A_1a^2, \quad A_2 = a^{1+2}\frac{1-a^n}{1-a}\frac{1-a^{n-1}}{1-a^2},$$

. . . .

Por consiguiente el desarrollo de $F(a, x)$ es

$$(1 + ax)(1 + a^2x) \ldots\ldots + (1 + a^n x)$$

$$= 1 + \frac{1 - a^n}{1 - a} ax + \frac{1 - a^n}{1 - a} \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a^2} a^{1+2} x^2 + \ldots\ldots$$

Los términos de la serie positiva

$$\rho = \left(\frac{1}{1} - \log \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \log \frac{4}{3}\right) + \ldots\ldots$$

son desarrollables según las series convergentes

$$\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{2^4} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{n^4} - \ldots\ldots$$

Estos desarrollos, excepto el primero, son convergentes.

Además, la serie positiva de término general

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{n^4} + \ldots\ldots$$

es convergente, porque según la fórmula de los incrementos finitos (t. I, pág. 44), se tiene que

$$-\frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n - \theta} - \frac{1}{n}, \quad (0 < \theta < 1)$$

igualdad cuyo segundo miembro es menor que $\dfrac{1}{n(n-1)}$; luego, si se hace

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots\ldots,$$

y aplicando el teorema de la serie de series, se obtiene

$$\rho = \frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} - \dots\dots$$

fórmula descubierta por Euler.

56. Fórmula de Wallis. La fórmula de Wallis obtenida ya por medio de las integrales definidas (119) se deduce de la fórmula de Euler (t. I, p. 219)

$$\operatorname{sen} x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots\dots,$$

haciendo $x = \frac{\pi}{2}$, pues se obtiene que

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\dots\dots$$

El factor general de este producto puede escribirse bajo la forma

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n+1}{2n};$$

luego
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\dots\dots$$

57. Desarrollo de $\log \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Sea P_n el producto de los n primeros factores de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y R_n el producto de los factores siguientes. El límite de R_n es la unidad; por consiguiente, siendo el valor absoluto de x menor que π, se tiene

$$\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\dots\dots$$

Pero, para todo valor de x comprendido en el intervalo

$(-\pi, +\pi)$, los términos de esta serie son desarrollables según las series enteras absolutamente convergentes

$$\log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6}-\dots\dots$$

$$\log\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{2^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^6}{2^6\pi^6}-\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=-\frac{x^2}{n^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{x^5}{n^6\pi^6}-\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Por otra parte, si se considera un valor positivo de x menor que π, la serie positiva de término general

$$\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\frac{1}{3}\frac{x^6}{n^6\pi^6}+\dots\dots$$

es convergente, y su suma es $\log\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$; luego, haciendo

$$S_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\dots\dots,$$

la suma por columnas verticales da

$$\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}=-\frac{S_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}\frac{S_4}{\pi^4}x^4$$
$$-\frac{1}{3}\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\dots\dots \qquad (-\pi<x<\pi).$$

58. Desarrollo de log cos x. Análogamente se ve que los términos de la serie

$$\log\cos x=\log\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)+\log\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\dots\dots$$

son desarrollables en series de la forma

$$-\frac{2^2 x^2}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{1}{2}\frac{2^4 x^4}{(2n-1)^4\pi^4}-\frac{1}{3}\frac{2^6 x^6}{(2n-1)^6\pi^6}-\ldots\ldots;$$

y si se hace

$$T_n=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\ldots\ldots,$$

se obtendrá,

$$\log\cos x=-2^2\frac{T_2}{\pi^2}x^2-\frac{1}{2}2^4\frac{T_4}{\pi^4}x^4$$

$$-\frac{1}{3}2^6\frac{T_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

59. Desarrollo de x cot x y de tang x en series enteras. Derivando las expresiones obtenidas de $\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\log\cos x$, se obtienen las series

$$x\cot x=1-2\frac{S_2}{\pi^2}x^2-2\frac{S_4}{\pi^4}x^4$$

$$-2\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots\quad(-\pi<x<\pi),$$

$$\operatorname{tg} x=2^3\frac{T^2}{\pi^2}+2^5\frac{T_4}{\pi^4}x^3+2^7\frac{T_6}{\pi^6}x^5+\ldots\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

60. Expresión de las sumas S_{2n} y T_{2n} en función de los números de Bernoulli. Sea

$$y=1-2\frac{S_2}{\pi^2}x^2-2\frac{S_4}{\pi^4}x^4-2\frac{S_6}{\pi^6}x^6-\ldots\ldots$$

Considerando los desarrollos en series enteras de $\cos x$ y sen x, se deduce inmediatamente que

$$(\cos x)_0^{(2n)}=(-1)^n,\quad(\operatorname{sen} x)_0^{(2n+1)}=(-1)^n,$$

$$(\cos x)_0^{(2n+1)}=0,\qquad(\operatorname{sen} x)_0^{(2n)}=0;$$

por consiguiente, tomando la derivada de orden $(2n+1)$ de los dos miembros de la relación

$$y \operatorname{sen} x = x \cos x,$$

se obtiene, para $x = 0$,

$$\frac{2n+1}{1} y_0^{(2n)} - \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)}{3\,!} y_0^{(2n-2)} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)\,2n}{2\,!} y_0'' - (-1)_n\, 2n = 0.$$

Pero, en virtud de la relación recurrente (1) de los números de Bernoulli (pág. 181) resulta que

$$y_0^{(2n)} = 2^{2n} B_n, \qquad \text{ó} \qquad S_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2n} B_n;$$

Deduciremos de esta relación, debida á Euler, la expresión de T_{2n} en función de B_n, resultando que

$$\frac{1}{2^{2n}} S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \ldots\ldots$$

y restando las expresiones de S_{2n} y T_{2n},

$$T_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2^{2n}} S_{2n}, \quad T_{2n} = \frac{1}{2} \frac{(2^{2n}-1)\,\pi^{2n}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,2n} B_n.$$

Si en la expresión de S_{2n}, en función de B_n, se da á x los valores, 1, 2, 3, ..., se obtiene

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots..; \qquad \frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots..$$

Puede deducirse también de

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \ldots..$$

la expresión

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\ldots\right)$$

tomando para x el arco de 30^0 cuya tangente es $\frac{1}{\sqrt{3}}$, fórmula que empleó Lagny para calcular π con 127 cifras decimales.

Análogamente se obtienen, por medio de la expresión de T_{2n} en función de B_n las relaciones siguientes:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\ldots \qquad \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\ldots$$

Si se sustituyen las sumas $S_2, S_4, \ldots\ldots, T_2, T_4, \ldots\ldots$ por sus valores en función de $B_1, B_2, \ldots\ldots$, los diversos desarrollos en series obtenidos anteriormente, se reducen á

$$\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -2\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{2!} - 2^3\frac{B^2}{2}\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\log \cos x = -2(2^2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{2!} - 2^3(2^4-1)\frac{B_2}{2}\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 2^2(2-1)\frac{B_1}{1}\frac{x^2}{2!} + 2^4(2^3-1)\frac{B_2}{2}\frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tg} x = 2^2(2^2-1)B_1\frac{x}{2!} + 2^4(2^4-1)B_2\frac{x^3}{4!} + \ldots\ldots$$

$$x \cot x = 1 - 2^2 B_1 \frac{x^2}{2!} - 2^4 B_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

ó, efectuando el cálculo de los coeficientes,

$$\log \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \ldots\ldots$$

$$\log \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \ldots\ldots$$

$$\log \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} - \frac{62x^6}{2835} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots$$

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \ldots\ldots$$

61. Números de Euler. De la identidad

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x = 1$$

resulta $$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2},$$

y sustituyendo $x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ y $x \cot \frac{x}{2}$ por sus desarrollos en series enteras, se obtiene (para $-\pi < x < \pi$).

$$x \operatorname{cosec} x = 1 + (2^2 - 2) B_1 \frac{x^2}{2!} + (2^4 - 2) B_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

En cuanto á la función $\sec x$, es el producto de las funciones $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ y $x \operatorname{cosec} x$, que son desarrollables en series enteras, en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$; por consiguiente es desarrollable en serie entera para los valores de x comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$, y además permanece invariable cuando se cambia x en $-x$, reduciéndose á 1 cuando x se anula; por consiguiente su desarrollo es de la forma $\left(\text{siendo } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\sec x = 1 + E_1 \frac{x^2}{2!} + E_2 \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots + E \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots$$

Para determinar los coeficientes $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n, \ldots\ldots$, basta multiplicar esta serie por la siguiente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ldots,$$

y anular en el producto el coeficiente de x^{2n}, obteniéndose

$$1 - \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} E_1$$

$$+ \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} E_2 - \ldots\ldots + (-1)^n E_n = 0,$$

fórmula por medio de la que se pueden calcular sucesivamente $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n, \ldots\ldots$

Si se da á n los valores $1, 2, 3, \ldots\ldots$, se obtiene

$$1 - E_1 = 0, \quad 1 - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} E_1 + E_2 = 0,$$

$$1 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} E_1 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} E_2 - E_3 = 0, \ \ldots\ldots$$

de donde $\quad E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad \ldots\ldots$

Estos números, enteros, se llaman *números de Euler*.

62. Desarrollo de $\cot x$ y de $\operatorname{tg} x$ en series. Si en la serie entera

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2\frac{S_2}{\pi^2} x + 2\frac{S_4}{\pi^4} x^3 + 2\frac{S_6}{\pi^6} x^5 + \ldots\ldots$$

se desarrollan las sumas $S_2, S_4, \ldots\ldots$ y se agrupan los términos cuyos denominadores forman potencias pares de múltiplos de π, resulta

$$\frac{2x}{\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{\pi^2} + \frac{2x^3}{\pi^4} + \frac{2x^5}{\pi^6} + \ldots\ldots \quad (*)$$

(*) Maurice Godefroy *Théorie élémentaire des séries*, p. 172.

$$\frac{2x}{4\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{2^2\pi^2} + \frac{2x^3}{2^4\pi^4} + \frac{2x^5}{2^6\pi^6} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{2x}{n^2\pi^2} + \frac{2x^3}{n^4\pi^4} + \frac{2x^5}{n^6\pi^6} + \ldots\ldots$$

series absolutamente convergentes para todos los valores de x comprendidos en el intervalo $(-\pi, +\pi)$. Pero en este intervalo es absolutamente convergente la serie cuyo término general es $\dfrac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$; por consiguiente, según el teorema de series de series

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \ldots\ldots$$

$$\text{ó} \quad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \ldots$$

Si se cambia x en $\dfrac{\pi}{2} - x$, resulta

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{3\dfrac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{3\dfrac{\pi}{2} + x} + \ldots\ldots$$

$$\text{ó} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\dfrac{\pi^4}{4} - x^2} + \frac{2x}{9\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{2x}{25\dfrac{\pi^2}{4} - x^2} + \ldots\ldots$$

Si en el desarrollo de $\cot x$ se da á la variable el valor πx, se obtiene

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} + \ldots\ldots$$

que también resulta mediante la derivada logarítmica de

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \, \Pi \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

bajo la forma

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{n^2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{n^3} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{n^4} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{x} - 2x \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2x^3 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \ldots\ldots$$

Además, se tiene que

$$\pi \cot \pi x = \pi \frac{\cos \pi x}{\operatorname{sen} \pi x} = \pi i \frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}} = \frac{1}{x} \frac{2\pi i x}{2} \frac{e^{2i\pi x} + 1}{e^{2i\pi x} - 1}$$

$$= \frac{1}{x}\left[1 + B_1 \frac{(2i\pi x)^2}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{(2i\pi x)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\ldots\right],$$

expresando B_1, B_2, ... los números de Bernoulli; é identificando

$$B_1 \frac{2\pi^2}{1 \cdot 2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots, \quad B_m = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2m} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}.$$

63. Desarrollo de cosec x y de sec x. Se tiene

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi + x}\right) - \left(\frac{1}{2\pi - x} - \frac{1}{2\pi + x}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} + \ldots\ldots$$

$$\sec x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x}\right) - \left(\frac{1}{3\frac{\pi}{2} - x} + \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + x}\right) + \ldots$$

$$\sec x = \frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \frac{3\pi}{9\frac{\pi^2}{4} - x^2} + \frac{5\pi}{25\frac{\pi^2}{4} - x^2} - \ldots\ldots$$

64. SERIE DE BURMANN. Supongamos que la función $\varphi(z)$ es sinéctica en el interior del contorno cerrado C, y que en dicha región tenga solamente una raíz. Si el número x no difiere mucho de esta raíz, es decir, si $\varphi(x)$ no tiene un módulo muy grande, se podrá suponer que, á lo largo del contorno C,

$$\text{mód}\ \varphi(z) > \text{mód}\ \varphi(x). \tag{1}$$

Supongamos pues, que: 1.º Sea $\varphi(x)$ sinéctica en el interior del contorno y que tenga un solo cero. 2.º que hallándose x en el interior de C, se verifique siempre, para los puntos z situados en el contorno, la desigualdad (1). Si pues, $f(z)$ es una función sinéctica en el interior de C, podrá desarrollarse según las potencias ascendentes de $\varphi(z)$.

En efecto, si N es el número de las raíces de $\varphi(z) - \varphi(x) = 0$, de las que una se halla contenida en el contorno C, se tendrá

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi'(z)\, dz}{\varphi(z) - \varphi(x)}.$$

En virtud de (1), se podrá desarrollar el segundo miembro de esta fórmula según las potencias de $\varphi(x)$; y se tendrá

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int \frac{\varphi'(z)\, dz}{\varphi(z)} + \int \frac{\varphi'(z)\, \varphi(x)\, dz}{\varphi^2(z)} + \ldots\ldots \right].$$

Todos los términos del segundo miembro son nulos, como lo hace ver la integración inmediata, excepto el primero que es igual al número de raíces de $\varphi(z) = 0$ contenidas en C, es decir, á uno; luego $N = 1$. Se tendrá pues, integrando siempre á lo largo del contorno C,

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\psi(z)\, \varphi'(z)\, dz}{\varphi(z) - \varphi(x)}. \tag{2}$$

Si en el interior del contorno C, la ecuación $\varphi(z) = 0$ tuviese α raíces, la ecuación $\varphi(z) - \varphi(x) = 0$ también tendría α raíces, siempre bajo la condición (1); y, llamando x, x', x'',..... á estas raíces, la fórmula (2) deberá modificarse. Su primer miembro deberá sustituirse por $f(x) + f(x') + f(x'') + \ldots\ldots$

Esto sentado, puesto que se supone que á lo largo del contorno C, el módulo de $\varphi(x)$ es inferior al de z, la integral que entra en (2) podrá desarrollarse según las potencias ascendentes de la función $\varphi(x)$, y se tendrá

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi(z)} + \varphi(x)\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^2(z)} + \ldots\ldots \right.$$
$$\left. + \varphi^n(x)\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^{n+1}(z)} + \ldots\ldots\right]. \qquad (9)$$

Integrando por partes, resulta

$$\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}dz = -\frac{\psi(z)}{n\varphi^n(z)} + \int \frac{\psi'(z)\,dz}{n\varphi^n(z)}.$$

Si ahora hacemos $\varphi(z) = (z - a)\,\Theta(z)$, y se integra á lo largo del contorno C, resultará

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\psi(z)\varphi'(z)dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^n(a)}\right];$$

luego:

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) = \psi(a) + \varphi(x)\frac{\psi'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\varphi^2(x)}{1.2}\,\frac{d}{da}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^2(a)}\right] + \ldots\\ + \frac{\varphi^n(x)}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\psi'(a)}{\Theta^n(a)}\right] + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

que es la serie de Burmann, la cual puede obtenerse bajo otra forma. Para ello, hagamos

$$\mathrm{PF}(z) = \frac{1}{\varphi'(z)}\,\frac{d\mathrm{F}}{dz};$$

y tendremos:

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}dz = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{\varphi^n(z)}\,\psi(z) + \frac{1}{n}\int \frac{\psi'(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi'(z)\,\varphi^n(z)};$$

y observando que, si se integra á lo largo del contorno C, se anula la cantidad que se halla fuera del signo $\int$,

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{n} \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi^n(z)}\,\mathrm{P}\,\psi(z)\,dz.$$

Integrando nuevamente por partes, será

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{n(n-1)} \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n-1}(z)}\,\mathrm{P}^2\,\psi(z)\,dz,$$

y así sucesivamente. Por último, se tendrá

$$\int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1\,.\,2\ldots n} \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,\mathrm{P}^n\,\psi(z)\,dz;$$

luego $$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\psi(z)\,\varphi'(z)\,dz}{\varphi^{n+1}(z)} = \frac{1}{1\,.\,2\,3\ldots n}\,\mathrm{P}^n\,\psi(a).$$

La fórmula (3) se deduce á

$$\psi(x) = \psi(a) + \frac{\varphi(1)}{1}\,\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} + \frac{\varphi^2(x)}{1\,.\,2}\,\mathrm{P}^2\,\psi(a) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\varphi^n(x)}{1\,.\,2\ldots n}\,\mathrm{P}^n\,\psi(a) + \ldots\ldots$$

Comparando esta fórmula con la (4), resulta la identidad

$$\mathrm{P}\,\psi(a) = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\frac{\varphi'(a)}{\Theta^n(a)}\right].$$

Aplicación. La fórmula de Burmann, aplicada al desarrollo de e^{ax} según las potencias de xe^{bx} da

$$e^{ax} = 1 + axe^{bx} + a(a-2b)\,\frac{x^2}{1\,.\,2}\,e^{2bx}$$

$$+ a(a-3b)\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,e^{3bx} + \ldots\ldots$$

El resto R de la fórmula de Burmann, cuando el último término empleado es $\varphi^a(x)$, está expresado por la fórmula

$$R = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\psi(z)\varphi'(z)}{\varphi(z) - \varphi(x)} \frac{\varphi^{n+1}(x)}{\varphi^{n+1}(z)} dz,$$

de manera que, si M expresa el valor máximo del módulo de

$$\frac{\psi(z)\varphi'(z)}{[\varphi(z) - \varphi(x)]\, \varphi^{a+1}(z)}$$

á lo largo de un contorno C que contiene el punto x y tal, que el módulo de $\varphi(z)$ sea mayor que el módulo de $\varphi(x)$, se tendrá:

$$\text{mod } R < \frac{sM}{2\pi} \text{ mod } \varphi^{n+1}(x).$$

65. TEOREMA DE BURMANN. *Siendo* y, z *dos funciones de* x *que se anulan simultáneamente y tales, que* $\frac{z}{y}$ *puede ser desarrollada bajo la forma* $A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$, *entonces, si* P *es otra función de* x *que puede transformarse en una función, ya de* y, *ya de* z, *resulta que, cuando* $z = 0$,

$$\frac{d^n P}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{dP}{dz} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^n \right].$$

En efecto, sea $z : y = t$; entonces cuando $z = 0$, será

$$\frac{d^n (y^r t^n)}{dz^n} = n(n-1) \ldots\ldots (n - r + 1) \frac{d^{n-r} t^{n-r}}{dz^{n-r}},$$

y
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(y^r \frac{dt^n}{dz} \right) = \frac{d^n}{dz^n} (y^r t^n).$$

Puesto que $t = A + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$, podrá t^{n-r} tomar la forma $B + B_1 z + \ldots\ldots$ é $y^r t^n$ será $z^r t^{n-r}$ ó $Bz^r + B_1 z^{r+1} + \ldots\ldots$, que diferenciada n veces respecto á z, cuando $n > r$, da por término independiente de z el que se obtiene para $B_{n-r} z^n$, ó sea $n(n-1) \ldots\ldots 2 \cdot 1\, B_{n-r}$, cuando $n \geqslant r$

y o, cuando $r < n$. Pero B_{n-r} es el coeficiente de z^{n-r} en el desarrollo de t^{n-r}, ó el valor de la $(n-r)^{\text{sima}}$ derivada, dividida por $1 \cdot 2 \ldots \ldots (n-r)$, cuando $z = 0$. Por consiguiente, cuando $z = 0$,

$$\frac{d^n(y^n t^n)}{dz^n} = \frac{d^n(z^r t^{n-r})}{dz^n} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-r)} \frac{(d^{n-r} t^{n-r})}{dz^{n-r}}$$

$$= n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)\frac{d^{n-r}(t^{n-r})}{dz^{n-r}}.$$

Pero

$$y^r \frac{d \cdot t^n}{dz} = n y^r t^{n-1} \frac{dt}{dz} = n z^r t^{n-r-1} \frac{dt}{dz} = \frac{n}{n-r} z^r \frac{d \cdot t^{n-r}}{dz}$$

$$= \frac{n}{n-r} z^r (B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2 + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{n}{n-r}(B_1 z^r + 2B_2 z^{r+1} + \ldots\ldots)$$

que se anula con todas las derivadas sucesivas hasta la r^{sima} exclusive con z. Si pues n es mayor que r, la derivada $(n-1)^{\text{sima}}$ se reduce á $(n : (n-r) \cdot (n-1) \ldots\ldots 2 \cdot 1 \cdot (n-r)\, B_{n-r}$, ó bien á $n(n-1)\ldots\ldots 2 \cdot 1 \cdot B_{n-r}$; luego, cuando $z = 0$,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y^r \frac{dt^n}{dz}\right) = n(n-1)\ldots(n-r+1)\frac{d^{n-r}t^{n-r}}{dz^{n-r}}, \quad (n > r)$$

que es cero cuando $n \leqq r$.

Por el teorema de Mac Laurin $P = P_0 + P'_0 y + P''_0 \frac{y}{2} + \ldots$, siendo P_0, $P'_0, \ldots$ los valores de P considerados como funciones de y, para $y = 0$, que da $z = 0$. Multiplicando por t^n y derivando n veces, respecto á z, resulta

$$\frac{d^n(Pt^n)}{dz^n} = P_0 \frac{d^n t^n}{dz} + P'_0 \frac{d^n(yt^n)}{dz^n} + \ldots\ldots,$$

que, para $z = 0$ es

$$P_0 \frac{d^n t^n}{dz^n} + n P'_0 \frac{d^{n-1} t^{n-1}}{dz^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} P''_0 \frac{d^{n-2} t^{n-2}}{dz^{n-2}} + \ldots\ldots + nP_0^{n-1} \frac{dt}{dz} + P_0^n,$$

expresión, en la que se anulan los términos siguientes, según el teorema anterior. Multiplicando P por $\frac{dt^n}{dz}$, y derivando $n-1$ veces respecto á z tenemos

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(P \frac{dt^n}{dz}\right) = P_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{dt^n}{dz} + P'_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y \frac{dt^n}{dz}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} P''_0 \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(y^2 \frac{dt^n}{dz}\right) + \ldots\ldots,$$

que, para $z = 0$ se reduce á

$$P_0 \frac{d^n t^n}{dz^n} + nP'_0 \frac{d^{n-1} t^{n-1}}{dz^{n-1}}.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} P''_0 \frac{d^{n-2} t^{n-2}}{dz^{n-2}} + \ldots\ldots + nP_0^{n-1} \frac{dt}{dz};$$

que tiene un término menor que la anterior; y puesto que la derivada n^{sima} de $(y^r t^n)$ no se anula mientras sea $r > n$ y la derivada $(n-1)^{\text{sima}}$ se anula para $r = n$, tendremos para $z = 0$,

$$\frac{d^n}{dz^n}(Pt^n) - \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(P \frac{dt^n}{dz}\right) = P_0^n$$

ó

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{dP}{dz} t^n\right) = \frac{d^n P}{dy^n},$$

que demuestra el teorema.

Ejemplo. Sea $z = x^2 - 1$, $y = x - 1$, que se anulan para $x = 1$, en la relación de 2 á 1; y sea $P = x^{2a}$, tendremos:

$$t = x + 1 = \sqrt{1+z} + 1, \quad P = (1+y)^{2a} = (1+z)^a$$

$$\frac{d^2P}{dy^2} = 2a(2a-1)(1+y)^{2a-2};$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dP}{dz}t^2\right) = \frac{d}{dz}\left[a(1+z)^{a-1}\left(\sqrt{1+z}+1\right)^2\right]$$

$$= a(a-1)(1+z)^{a-2}\left[\sqrt{1+z}+1\right]^2$$

$$+ a(1+z)^{a-1}\frac{\sqrt{1+z}+1}{\sqrt{1+z}},$$

cuando $x = 1$ é $y = 0$, $z = 0$, la primera expresión se reduce á $2a(2a-1)$ y la segunda á $4a(a-1) + 2a$, que son iguales.

Consecuencias. Del teorema demostrado, resultan los siguientes problemas ya conocidos:

1.º Desarrollar $\psi(x)$ en potencias de $\varphi(x)$.

Sea a una de las raíces de $\varphi(x)$, $y = \varphi(x)$, $z = x - a$, por lo que y, z se anulan simultáneamente y en la razón de $\varphi'(a)$ á 1, que es infinita (excluimos los casos de ser a raíz múltiple ó $\varphi'(a)$ infinita).

Y puesto que $z = x - a$, tenemos

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dA}{dz}, \quad \frac{d^2A}{dx^2} = \frac{d}{dz}\frac{dA}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{d^2A}{dz^2}, \ldots\ldots$$

$$\psi(x) = \psi(a) + \left(\frac{d\,\psi\,x}{dy}\right)y + \left(\frac{d^2\,\psi\,x}{dy^2}\right)\frac{y^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{d^3\,\psi\,x}{dy^3}\right)\frac{y^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

Pero

$$\left(\frac{d^n\,\psi\,x}{dy^n}\right) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\left[\frac{d\,\psi\,x}{dz}\left(\frac{x-a}{\varphi z}\right)^2\right]\right\},$$

siendo $x = a$ en las derivadas de φx, $(\varphi x)^2, \ldots\ldots$; luego

$$\psi(x) = \psi(a) + \left(\frac{\psi'(x)(x-a)}{\varphi(x)}\right)\varphi(x)$$

$$+ \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(x)(x-a)^2}{(\varphi x)^2}\right)\frac{(\varphi x)^2}{2} + \ldots\ldots$$

2.° Desarrollar $\psi\,\varphi^{-1}$ en potencias de x, siendo $\varphi^{-1}x$ la función inversa de $\varphi(x)$ ó $\varphi(\varphi^{-1}x) = x$.

Si escribimos $\varphi^{-1}x$ por x en la fórmula anterior, tendremos

$$\psi\varphi^{-1}x = \psi(a) + \left(\frac{\psi' x\,(x-a)}{\varphi x}\right) x + \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi' x\,.\,(x-a)^2}{(\varphi x)^2}\right)\frac{x^2}{2}$$

$$+ \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\psi' x\,(x-a)^3}{(\varphi x)^3}\right)\frac{x^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

$$\varphi^{-1}(x) = a + \left(\frac{x-a}{\varphi x}\right) x + \frac{d}{dx}\left(\frac{x-a}{\varphi x}\right)^2 \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots$$

Si tenemos, por ejemplo, $\varphi(x) = (x-a)\,\varepsilon^{-x}$; hallar $\varphi^{-1}(x)$ será lo mismo que obtener y en la ecuación $x = (y-a)\,\varepsilon^{-y}$; y el teorema da

$$y = a + \varepsilon^{a} x + 2\varepsilon^{2a}\frac{x^2}{2} + 3^2\varepsilon^{3a}\frac{x^3}{2\,.\,3} + 4^3\varepsilon^{4a}\frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots$$

Si x y φx se anulan simultáneamente, tendremos

$$\varphi^{-1}x = \left(\frac{x}{\varphi x}\right) x + \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varphi x}\right)^2 \frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{\varphi x}\right)^3 \frac{x^3}{2\,.\,3} + \ldots\ldots$$

Sea $\qquad \varphi(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots\ldots;$

de manera que la determinación de $\varphi^{-1}x$ equivale á obtener x en función de u, partiendo de $u = ax + bx^2 + \ldots\ldots$ (t. I pág. 159).

Tendremos, siendo $P_{m,n}$ el coeficiente de x^m en el desarrollo de $(a + bx + \ldots)^{-n}$:

$$P_{10} = \frac{1}{a},\ P_{12} = -\frac{2b}{a^3},\ P_{23} = -\frac{3c}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5},$$

$$P_{34} = -\frac{4e}{a^5} + \frac{20bc}{a^6} - \frac{20b^3}{a^7},$$

$$P_{45} = -\frac{5f}{a^6} + \frac{15\,(2be + c^2)}{a^7} - \frac{105\,b^2c}{a^8} + \frac{70\,b^4}{a^9},$$

Pero

$$\varphi^{-1}x = P_{01}\,x + \frac{1}{2}P_{12}\,x^2 + \frac{1}{3}P_{23}\,x^3 + \frac{1}{4}P_{34}\,x^4 + \ldots\ldots$$

Si pues $u = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots\ldots$

será

$$x = \frac{u}{a} - b\frac{u^2}{a^3} + (2b^2 - ac)\frac{u^3}{a^5} - (5b^3 - 5abc + a^2 e)\frac{u^4}{a^7}$$

$$+ [\,14\,b^4 - 21\,ab^2c + 3a^2(2be + c^2) - a^3 f\,]\frac{u^5}{a^9}$$

$$- [42b^5 - 84ab^3c + 28a^2(b^2e + bc^2)$$

$$- 7a^3(bf + ce) + a^4 g]\,\frac{u^6}{a^{11}} + \ldots\ldots \quad (*)$$

66. Serie de Wronski Supongamos que se haya demostrado la posibilidad del desarrollo

$$f(x) = a_0 + a_1\,\omega_1 + a_2\,\omega_2 + \ldots\ldots + a_n\,\omega_n + \ldots\ldots,$$

expresando $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ constantes y $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots$ funciones dadas de x; y supongamos que se puedan calcular las derivadas de $f(x)$, derivando cada término del segundo miembro. Tendremos

$$f'(x) = a_1\,\omega'_1 + a_2\,\omega'_2 + \ldots\ldots + a_n\,\omega'_n + \ldots\ldots$$

$$\frac{f'(x)}{\omega'_1} = a_1 + a_2\,\frac{\omega'_2}{\omega'_1} + \ldots\ldots + a_n\,\frac{\omega'_n}{\omega'_1} + \ldots\ldots$$

Si se deriva de nuevo, tendremos

$$\frac{f''\,\omega'_1 - f'\,\omega''_1}{\omega'^2_1} = a_2\,\frac{\omega''_2\,\omega'_1 - \omega''_1\,\omega'_2}{\omega'^2_1} + \ldots\ldots$$

lo que puede escribirse bajo la forma

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 & f' \\ \omega''_1 & f'' \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 \\ \omega''_1 & \omega''_2 \end{vmatrix} + \ldots\ldots + a_n \begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_n \\ \omega''_1 & \omega''_n \end{vmatrix} + \ldots\ldots$$

(*) *A. Morgan.* The diferencial and integral calculus.

La fórmula más general

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 \ldots\ldots \omega'_{n-1} & f' \\ \omega''_1 \ldots\ldots \omega''_{n-1} & f'' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \omega^n_1 \ldots\ldots \omega^n_{n-1} & f^n \end{vmatrix} = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} a_\mu \begin{vmatrix} \omega'_1 \ldots\ldots \omega'_\mu \\ \omega''_1 \ldots\ldots \omega''_\mu \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega^n_1 \ldots\ldots \omega^n_\mu \end{vmatrix} \qquad (2)$$

es cierta para $n+2$. Admitamos que sea verdadera para cierto valor de n. Vamos á demostrar que es cierta para el valor $n+1$.

Hagamos, para obreviar

$$\begin{vmatrix} \omega'_1 & \omega'_2 \ldots\ldots \omega'_{n-1} & F' \\ \omega''_1 & \omega''_2 \ldots\ldots \omega''_{n-1} & F'' \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \omega^n_1 & \omega^n_2 \ldots\ldots \omega^n_{n-1} & F^n \end{vmatrix} = \Omega_n(F); \qquad (3)$$

entonces la fórmula (2) se podrá escribir así:

$$\Omega_n(f) = \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} a_\mu \Omega_n(\omega_\mu).$$

Derivando después de haber dividido por $\Omega_n(\omega_n)$, será

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(f)}{\Omega_n(\omega_n)} = a_\mu \frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\omega_\mu)}{\Omega_n(\omega_n)}. \qquad (4)$$

Pero, en general,

$$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(F)}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega'_n(F)\Omega_n(\omega_n) - \Omega_n(F)\Omega'_n(\omega_n)}{\Omega^2_n(\omega_n)}. \qquad (5)$$

Además la derivada respecto á x de un determinante tal como el (3), se obtiene tomando las derivadas de los elementos de la última línea; y por consiguiente

$$\Omega'_n(F) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega^n_n}, \qquad \Omega_n(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^n}$$

$$\Omega_n(F) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial\omega^{n+1}_n}, \qquad \Omega'(\omega_n) = \frac{\partial\Omega_{n+1}(F)}{\partial F^{n-1}};$$

luego (5) se reduce á

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}$$

$$\times\left[\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n}\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^n} - \frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^{n+1}}\frac{\partial\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\mathrm{F}^{n-1}}\right],$$

es decir, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{1}{\Omega_n^2(\omega_n)}\frac{\partial^2\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\partial\omega_n^n\,\mathrm{F}^{n+1}}\,\Omega_{n+1}(\mathrm{F})$

pero $$\frac{\partial^2\Omega_{n+1}}{\partial\omega_n^n\,\partial\mathrm{F}^{n+1}} = \Omega_n(\omega_n)$$

luego $$\frac{d}{dx}\frac{\Omega_n(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)} = \frac{\Omega_{n+1}(\mathrm{F})}{\Omega_n(\omega_n)},$$

y en virtud de ésta, (4) puede escribirse así:

$$\Omega_{n+1}(f) = \sum_{\mu=n+1}^{\mu-\infty} a_\mu\Omega_{n+1}(\omega_\mu),$$

quedando el teorema demostrado.

67. Serie de Lagrange. La serie de Lagrange, como se ha visto, tiene por objeto obtener el desarrollo en serie de las raíces de la ecuación.

$$z - x - tf(z) = 0, \qquad (1)$$

ó una función cualquiera de esta raíz.

Consideremos un contorno simple cerrado C, y supongamos que en su interior sea $f(z)$ sinéctica. El número N de las raíces de (1) contenidas en dicho contorno está expresado por

$$2\pi\sqrt{-1}\;\mathrm{N} = \int\frac{1-tf'(z)}{z-x-tf(z)}\,dz, \qquad (2)$$

tomándose la integral á lo largo del contorno, para el cual se tenga

$$\mathrm{mod}\,(z-x) > \mathrm{mod}\,t\,f(x);$$

lo que se verificará siendo t suficientemente pequeño.

Podremos desarrollar el segundo miembro de (2) según las potencias de t y será

$$2\pi\sqrt{-1}\,N = \int [1 - t f'(z)]\, dz \left[\frac{1}{z-x} + \frac{t f(z)}{(z-x)^2} + \ldots\ldots + \frac{t^n f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} + \ldots\ldots\right]$$

$$2\pi N\sqrt{-1} = \int dz \left\{ \frac{1}{z-x} + t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2} - \frac{f'(z)}{z-x}\right] + \ldots\ldots + t^n\left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z-x)^n}\right] \ldots\ldots \right\}$$

Supongamos á x en el interior del contorno C. Entonces, por ser,

$$\int \frac{F(z)\, dz}{(z-x)^n} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{(n-1)!} F^{n-1}(x);$$

y por destruirse todos los términos en t, será $N = 1$. Así, el contorno C, á lo largo del que se verifica la fórmula (3) contiene una sola raíz de (1). Llamémosla α, y sea $F(z)$ una función sinéctica en el contorno C.

Se tendrá

$$2\pi\sqrt{-1}\, F(\alpha) = \int \frac{1 - t f'(z)}{z - x - t f(z)} F(z)\, dz,$$

tomándose la integral á lo largo de C. Si desarrollamos ahora, según los potencias de t, será

$$2\pi\sqrt{-1}\, F(\alpha) = \int F(z)[1 - t f'(z)] dz \left\{ \frac{1}{z-x} + \frac{t f(z)}{(z-x)^2} + \ldots \right\}$$

$$= \int F(z) dz \left\{ \frac{1}{1-x} + t\left[\frac{f(z)}{(z-x)^2} - \frac{f'(z)}{z-x}\right] + \ldots + t^n\left[\frac{f^n(z)}{(z-x)^{n+1}} - \frac{f^{n-1}(z) f'(z)}{(z-x)^n}\right] + \ldots \right\},$$

y en virtud de la fórmula (4),

$$F(\alpha) = F(x) + t\left[\frac{d}{dx}F(x)f(x) - f'(x)F(x)\right] + \dots\dots$$

$$+ t^n \left[\frac{1}{1\,.\,2\,\dots\,n}\frac{d^n}{dx^n}F(x)f^n(x)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F(x)f^{n-1}(x)f'(x)\right] + \dots\dots$$

y haciendo reducciones,

$$F(\alpha) = F(x) + \frac{t}{1}F'(x)f(x) + \frac{t^2}{1\,.\,2}\frac{d}{dx}[F'(x)f^2(x)] + \dots\dots$$

$$+ \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[F(x)f^n(x)] + \dots\dots$$

68. SERIE DE LAPLACE. Para resolver por series la ecuación

$$z = \Phi[x + tf(z)]$$

se hace $\theta = x + tf(z)$ y $z = \Phi(\theta)$; luego $\theta = x + tf[(\Phi(\theta)]$.

Para desarrollar z bastará desarrollar $\Phi(\theta)$ por la fómula de Lagrange, y tendremos, salvo las notaciones, la expresión dada en el tomo I, pág. 192.

69. SERIE DE HERSCHEL. PROBLEMA. *Determinar los coeficientes del desarrollo de una función cualquiera $f(e^t)$ de e^t.*

$$f(e^t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots\dots + A_x t^x + \dots\dots .$$

Tenemos por el teorema de Taylor

$$f(e^t) = f(1) + \frac{f'(t)}{1}(e^t - 1) + \frac{f''(1)}{1\,.\,2}(e^t - 1)^2 + \dots\dots;$$

y expresando según Herschel, por $\Delta^n 0^m$ el valor de $\Delta^n x^m$ para $x = 0$, el coeficiente de t^x en el primer miembro de la última ecuación es igual á la suma de los coeficientes de t^x en los diferentes términos del segundo miembro, calcularemos primero el coeficiente de t^x en $f(1)$ que es $f(1) \cdot 0^x = f(1)$ para $x = 0$, y nulo en los demás casos; en seguida veremos que en

$$f' \frac{(1)}{1}(e^t - 1) \quad \text{es} \quad \frac{f'(1)}{1} \frac{1^x - 0^x}{1 \cdot 2 \ldots x} = \frac{f'(1)}{1} \frac{\Delta\, 0^x}{1 \ldots x}$$

en $\dfrac{f''(1)}{1 \cdot 2}(e^t - 1)^2$ ó $\dfrac{f''(1)}{1 \cdot 2}(e^{2t} - 2e^t + 1)$ es

$$\frac{f''(1)}{1 \cdot 2} \frac{2^x - 2 \cdot 1^x + 0^x}{1 \cdot 2 \ldots x} = \frac{f''(1)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2\, 0^x}{1 \cdot 2 \ldots x};$$

como se ve, considerando la igualdad

$$e^{nt} = 1 + \frac{n}{1} t + \frac{n^2}{1 \cdot 2} t^2 + \ldots\ldots + \frac{n^x}{1 \ldots x} t^x + \ldots\ldots$$

de manera que

$$A_x = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots x} \left\{ f(1)\, 0^x + \frac{f'(1)}{1} \Delta 0^x + \frac{f''(1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 0^x + \ldots\ldots \right\},$$

ó, separando los símbolos de operaciones y de cantidades,

$$A_x = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots x} \left\{ f(1) + \frac{f'(1)}{1} \Delta + \frac{f''(1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 + \ldots\ldots \right\} 0^x$$

$$= \frac{f(1 + \Delta)\, 0^x}{1 \cdot 2 \ldots x};$$

y obtenemos la siguiente expresión:

$$f(e^t) = f(1) + \frac{t}{1} f(1 + \Delta)\, 0 + \frac{t^2}{1 \cdot 2} f(1 + \Delta)\, 0^2 + \ldots \qquad (*)$$

(*) J. Herschel, *Sammlung v Aufgaben a endl. Differenzen se Summenrechnung.*

§ 4.º Nociones sobre las factoriales

70. Definiciones. Una factorial es un producto cuyos factores son términos de una progresión aritmética. Así

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots(a+(m-1)r)=a^{m|r}$$

es una factorial, en la que m es el exponente y r el incremento de la base a. Tenemos

$$a^{1|r}=a,\quad a^{2|r}=a(a+r),\quad a^{3|r}=a(a+r)(a+2r),\quad \ldots..$$

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+(m-1)r). \quad (1)$$

Esta factorial puede expresarse por medio de

$$[a+(m-1)r]^{m|-r},$$

de manera que $a^{m|r}=[a+(m-1)r]^{m|-r}$.

Enunciaremos las siguientes propiedades relativas al producto y al cociente de dos factoriales

$$a^{m+n|r}=a^{n|r}.(a+nr)^{m|r}, \quad (2)$$

$$a^{m-n|r}=\frac{a^{m|r}}{[a+(m-n)r]^{n|r}}. \quad (3)$$

71. Determinación de los coeficientes. Considerando el desarrollo del producto $(a+b)(a+c)\ldots\ldots$ en el caso de ser $a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]$, y expresando por $(m\text{I}1)$, $(m\text{I}2)\ldots..$ las sumas de los productos 1 á 1, 2 á 2, ... de los números naturales 0, 1, 2, ... $(m-1)$, tendremos que

$$a^{m|r}=a^m+(m\text{I}1)a^{m-1}r+(m\text{I}2)a^{m-2}r^2+\ldots\ldots$$
$$+(m\text{I}m-1)ar^{m-1}. \quad (4)$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo que corresponden á un exponente $m+1$, cuando se supone conocidos los correspondientes á m, multiplicaremos por $a + mr$ los dos miembros de

$$a^{m+1|r} = a^{m|r}(a + mr),$$

y tendremos

$$a^{m+1|r} = a^{m+1} + (m|1)\,a^m r + (m|2)\,a^{m-1}r^2 + \ldots..$$
$$+\, m a^m r + m\,(m|1)\,a^{m-1}r^2 + \ldots..$$

Los coeficientes de las potencias descendentes de a serán:

$$m + (m|1),\quad m\,(m|1) + (m|2),\quad m\,(m|2) + (m|3),\quad \ldots..$$

Pero sustituyendo m por $m + 1$ en (4) tenemos

$$a^{m+1|r} = a^{m+1} + (m+1|1)\,a^m r + (m+1|2)\,a^{m-1}r^2 + \ldots$$

é identificado será

$$(m+1|1) = m + (m|1),\ (m+1|2) = m\,(m|1) + (m|2), \ldots;$$

expresiones por las que se obtienen los coeficientes, para el exponente $m + 1$, por medio de los coeficientes para el exponente m. Así para

$$a^{2|r} = a^2 + ar, \qquad \text{se tiene} \qquad (2|1) = 1,\ (2|2) = 0;$$

para $a^{3|r}$, se tiene $(3|1) = 2 + 1 = 3$, $(3|2) = 2$;

luego $$a^{3|r} = a^3 + 3a^2 r + 2ar.$$

Siendo $(3|1) = 3$, $(3|2) = 2$, se tendrá:

$$(4|1) = 3 + 3 = 6,\ (4|2) = 3.3 + 2 = 11,\ (4|3) = 3.2 + 0 = 6,$$

$$a^{4|r} = a^4 + 6a^3 r + 11\,a^2 r^2 + 6ar^3.$$

Y tendremos el siguiente cuadro de coeficientes y exponentes:

1	1.					
2	1,	1.				
3	1,	3,	2.			
4	1,	6,	11,	6.		
5	1,	10,	35,	50,	24	etc.

El procedimiento seguido, no es más que un modo particular para obtener los coeficientes. Para llegar á la ley general de obtención de éstos, consideramos la expresión fundamental

$$(a + mr)^{n|r} \,.\, a^{m|r} = a^{n|r}\ (a + nr)^{m|r},$$

ó (haciendo $n = 1$) $\quad (a + mr) \,.\, a^{m|r} = a\,(a + r)^{m|r}.$

El desarrollo del primer miembro se ha obtenido multiplicando por $a + mr$ el desarrollo de $a^{m|r}$, habiéndose deducido que:

$$(a + mr)\, a^{m|r} = a^{m+1} + [m + m\text{I}1]\, a^m\, r$$
$$+ \ [m\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2)]\, a^{m-1}\, r^2$$
$$+ \ [m\,(m\text{I}2) + (m\text{I}3)]\, a^{m-2}\, r^3 + \ldots\ldots$$

Y el desarrollo del segundo miembro $a\,(a + r)^{m|r}$ se obtendrá sustituyendo a por $a + r$ en el desarrollo de $a^{m|r}$, y multiplicando enseguida todos los términos por a. Tendremos pues,

$$a(a + r)^{m|r} = a(a + r)^m + (m\text{I}1)\,a\,(a + r)^{m-1} r$$
$$+ \ (m\text{I}2)\ (a + r)^{m-2} r^2 + \ldots\ldots$$

y sustituyendo los desarrollos de las potencias de $a + r$, resulta:

$$a(a + r)^{m|r} = a^{m+1} + [m + (m\text{I}1)]a^m r$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + (m-1)\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2)\right] a^{m-1}\, r^2 + \ldots\ldots$$

é identificando, tendremos;

$$m + (m\text{I}1) = m + (m\text{I}1),$$

$$m(m\text{I}1) + (m\text{I}2) = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + (m-1)\,(m\text{I}1) + (m\text{I}2),$$

$$m(m\text{I}2) + (m\text{I}3) = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2}\,(m\text{I}1)$$
$$+ \ (m-2)\,(m\text{I}2) + (m\text{I}3), \ldots\ldots;$$

Restando de los dos términos de la segunda igualdad, primero el término $(mI2)$ y luego $(m - 1\ (mI1)$ será

$$mI1 = \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2}$$

Restando de los dos miembros de la tercera igualdad el término común $(mI3)$ y luego $(m-2)\ (mI2)$ será

$$2(mI2) = \frac{(m-1)\,(m-2)}{1 \, . \, 2}\,(mI1) + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}, \text{ etc.}$$

§ 4.° Ejemplos y Aplicaciones

a) El cálculo de las diferencias finitas nos ofrece ejemplos del empleo de factoriales. Así tenemos, por ejemplo,

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{2}\, x^{2|-1} + \frac{7}{3}\, x^{3|-1} + \frac{6}{4}\, x^{4|-1} + \frac{1}{5}\, x^{5|-1}$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{2}\, x^{2|-1} + 5x^{3|-1} + \frac{25}{4}\, x^{4|-1} + 2x^{5|-1} + \frac{1}{6}\, x^{6|-1}.$$

Si los factores son x, $x + a$, $x + 2a$, ... tendremos:

$$x^2 = x(x+a) - ax, \quad x^3 = x^{3|a} - 3ax^{2|a} + a^2 x$$

$$x^4 = x^{4|a} - 6ax^{3|a} + 7a^2 x^{2|a} + a^3 x$$

$$x^5 = x^{5|a} - 10ax^{4|a} + 25a^2 x^{3|a} - 15a^3 x^{2|a} + a^4 x.$$

b) Considerando los factores x, $x - a$, $x - 2a$, tenemos la siguiente ley:

$$x^m = a^{m-1}x + \Delta'' 0^m \, . \, a^{m-2}x^{2|-a} + \Delta''' 0^m \, . \, a^{m-3}x^{3|-a}$$

$$+ \Delta'''' 0^m a^{m-4} x^{4|-a} + \ldots\ldots$$

$$= x^{m|-a} + \Delta^{(m-1)} 0^m \, . \, a x^{m-1|-a} + \Delta^{(m-2)} 0^m a^2 x^{m-2|-a} + \ldots$$

b) Siendo $a(a+b)\,(a+2b)\,\ldots\ldots\,(a+xb)$ el primer término, $(a+b)\,\ldots\ldots\,(a+(x+1)b)$ el segundo, $(a + (n-1)b)$

$(a + nb) \ldots\ldots (a + (x + n - 1)b)$ el n^{simo} términos de una serie, las diferencias se expresan por las fórmulas

$$\Delta a = b,\ \Delta a(a + b) = (a + b)(a + 2b) - a(a + b) = 2b(a + b),$$

$$\Delta a(a + b)(a + 2b) = 3b(a + b)(a + 2b),$$

$$\Delta a(a + b)(a + 2b)(a + 3b) = 4b(a + b)(a + 2b)(a + 3b)$$

$$\Delta a(a - b)(a - 2b)(a - 3b) = 4ba(a - b)(a - 2b).$$

d) Expresado por $[a, a + xb]$ el producto de $a, a + b, \ldots\ldots, a + xb$, tendremos, en la hipótesis de que los términos sucesivos se forman cambiando a en $a + b$.

$$\Delta[a, a + xb] = (x + 1)b[a + b, a + xb]:$$

$$\Delta[a + yb,\ a + xb] = (x - y + 1)b[a + (y + 1)b,\ a + xb],$$

$$\Delta^2[a + yb,\ a + xb] = (x - y + 1)(x - y)b^2$$
$$\times\ [a + (y + 2)b,\ \ b + xb],\ \ \text{etc.}$$

e) Hallar la suma de la serie

$$x[a, a + yb] + [a + b, a + (y + 1)b] + \ldots\ldots$$
$$+ [a + xb, a + (y + x)b].$$

Esta es la función cuya diferencia, cuando x se cambia en $x + 1$, es $[a + (x + 1)b, a + (y + x + 1)b]$. Y, bien se cambie x en $x + 1$ ó a en $a + b$, el resultado es el mismo, expresándose por $\Sigma[a + (x + 1)b, a + (y + x + 1)b]$. Ahora bien,

$$(y + 2)b[a + (x + 1)b, a + (y + x + 1)b]$$
$$= \Delta[a + xb, a + (y + x + 1)b],$$

ó

$$\Sigma[a + (x + 1)b, a + (y + x + 1)b]$$

$$= c + \frac{[a + xb, (a + y + x + 1)b]}{(y + 2)b}$$

Pero, por hipótesis, $\Sigma[a, a+yb] = 0$, puesto que no hay términos anteriores á $[a, a+yb]$; luego haciendo $x = -1$, tenemos

$$0 = C + \frac{[a-b,\ a+yb]}{(y+2)b},$$

siendo el resultado final:

$$[a, a+yb] + \ldots\ldots + [a+xb,\ a+(y+x)b]$$
$$= \frac{[a+xb,\ a+(y+x+1)b]}{(y+2)b} - \frac{[a-b, a+yb]}{(y+2)b}.$$

Ejemplos:

$$2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 = \frac{4.5.6.7 - 1.2.3.4}{4.1} = 204$$

$$2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 = \frac{5.6.7 - 1.2.3}{3.1} = 68.$$

§ 5.° Cálculo de las integrales por series

72. Algunos desarrollos de serie. *Ejemplo 1.°* Se sabe que para todos los valores del módulo de x menores que 1,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots \pm x^n \mp \ldots\ldots$$

El segundo miembro es uniformemente convergente para todos los valores de x contenidos en un círculo de radio 1 descrito desde el origen como centro. Consideremos un contorno de longitud finita interior á este círculo, é integremos los dos miembros á lo largo de este contorno.

Tendremos para todos los valores de x tales que mód $x < 1$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{x+1}}{n+1} \mp \ldots\ldots$$

2.° Sea la ecuación

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots\ldots \pm x^{2n} \mp \ldots\ldots$$

que se verifica para todos los valores de x de módulo < 1. El segundo miembro es uniformemente convergente en todo el contorno interior al círculo del radio 1, descrito desde el origen como centro; é integrando á lo largo del contorno terminado en los puntos 0 y x, interior al círculo de convergencia, se tendrá

$$\text{arc tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{n+1}}{2n+1} \mp \ldots\ldots$$

para todos los valores de x cuyo módulo es < 1. El valor de arc tg x está definido por la condición de que para $x = 0$, arc tg $x = 0$ y que el valor que toma arc tg x en el punto x, cuyo módulo debe ser < 1, se obtiene haciendo variar á x de una manera continua, sin encontrar la circunferencia de radio 1 descrita desde el origen como centro, en el interior de la que arc tg x es monódroma.

3.° Sea $u = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

Sustituyendo e^{-x^2} por su desarrollo en serie, tenemos

$$u = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2\,!} - \ldots\ldots \pm \frac{x^{2n}}{n!} \mp \ldots\ldots\right) dx;$$

é integrando cada término, se tiene

$$u = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,5} - \frac{x^7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,7} + \ldots\ldots,$$

serie muy convergente para valores de x menores que 1.

Para $x = 1$ resulta

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

Ejemplo 4.º $\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, haciendo $\sqrt{x}=u$, se tiene $\frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$,

$$\int\frac{2du}{\sqrt{-u^2}}=2\left(u+\frac{1}{2}\frac{u^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{u^5}{5}+\frac{1\cdot 3\,5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{u^7}{7}+\ldots\right)+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^2}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^3}{7}+\ldots\right)\sqrt{x}+C.$$

5.º $dx\sqrt{2ax-x^2}=(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 2a}\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 4a^2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{9\cdot 8a^3}-\ldots\ldots\right)\sqrt{2a}.$$

$$\int dx\sqrt{2ax-x^2}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{x}{5\cdot 2a}\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\frac{x^2}{7\cdot 4a^2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{9\cdot 8x^3}{a^3}-\ldots\ldots\right)2\sqrt{x}\sqrt{2ax}+C.$$

6.º $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=lx-\frac{1}{2\cdot 2x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}-\ldots.+C.$$

Haciendo $x=1+u$, se tiene

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int u^{-\frac{1}{2}}du\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{2u+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5\cdot 4}-\ldots\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1\cdot u}{2\cdot 3\cdot 2}+\frac{1\cdot 3\cdot u^2}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5u^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots\ldots\right)\sqrt{2u}.$$

7.º Sea $\dfrac{dx\sqrt{1-\alpha^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$, expresando α una cantidad muy pequeña; se tendrá que integrar la serie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2x^2-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\alpha^4x^4-\ldots\ldots\right).$$

Sustituyendo en vez de

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ldots\ldots,$$

sus valores, se tendrá

$$\int\frac{dx\sqrt{1-\alpha^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=A+\frac{1}{2}\alpha^2\left\{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}-\frac{A}{2}\right\}$$

$$+\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\alpha^4\left\{\left(\frac{x^3}{4}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}A\right\}$$

$$+\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\alpha^6\left\{\left(\frac{x^5}{6}+\frac{1\,.\,5}{4\,.\,6}x^3+\ldots\ldots\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}A\right\},$$

habiendo hecho, por brevedad, el arco indicado en

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc sen } x.$$

8.º Siendo

$$(b-x)^{-\frac{1}{2}}=b^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{x}{b}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^2}{b^2}+\ldots\ldots\right],$$

la integración de la diferencial

$$\frac{dx}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}}$$

se reduce á la fórmula

$$\int\frac{x^q\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}}=-\frac{x^{q-1}\sqrt{2cx-x^2}}{q}+\frac{(2q-1)c}{q}\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}}.$$

9.° Consideremos la integral estudiada por Fourier en la teoría del calor:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx \, dx.$$

Por ser

$$\cos 2bx = 1 - \frac{(2bx)^2}{2} + \frac{(2bx)^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{(2bx)^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

se tendrá

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \frac{4b^2}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^m \frac{(2b)^{2m}}{(2m)!} \int_0^\infty x^{2m} e^{-x^2} dx + \ldots\ldots$$

La fórmula obtenida en el ejemplo 11 (cap. IV) da la fórmula recurrente.

$$A_m = \frac{2m-3}{2m-2} \frac{1}{a^2} A_{m-1}$$

aplicable á todos los valores de m mayores que 1. Pero

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} \right]_0^\infty = \frac{1}{a} \frac{\pi}{2};$$

luego, dando á m los valores 2, 3, ... m:

$$A_m = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \ldots\ldots \frac{2m-3}{2m-2} \frac{1}{a^{2m-1}} \frac{\pi}{2}.$$

Hagamos $x = \frac{z}{m}$, $dx = \frac{dz}{\sqrt{m}}$, y la fórmula anterior se reduce á

$$A_m \sqrt{m} = \int_0^\infty \frac{dz}{\left(a^2 + \frac{z^2}{m}\right)^m} = \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{3.4.6\ldots(2m-2)} \frac{\sqrt{m}}{a^{2m-1}} \frac{\pi}{2}.$$

Hagamos $a = 1$, suponiendo que m crezca al infinito, y la última fómula se reduce á

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\lim_{m=\infty}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2m-3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad 2m-2}\sqrt{m}\,,$$

y escribiendo $m+1$ en vez de m,

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}\lim_{m=\infty}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \quad 2m}\sqrt{2m+1}\sqrt{\frac{m}{2m+1}}$$

y en virtud de la fórmula de Wallis

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.$$

10. Sea $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x}$. Se tiene para $x < 1$,

$$\frac{\log x}{1-x} = \log x\,(1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots)$$

Pero $$\int_0^1 x^n \log x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2};$$

$$\int_0^1 \log x\,dx = -1, \quad \int_0^1 x \log x\,dx = -\frac{1}{2}, \ldots\ldots$$

luego

$$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1+x} = -\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\right) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

11. $$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1+x} = -\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6}\right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

12. $$\int_0^1 \frac{\log x\,dx}{1-x^2} = -\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = -\frac{\pi^2}{8}. \qquad (1)$$

Esta integral puede servir para calcular las dos anteriores. En efecto, sea

$$\int_0^1 \frac{x \log x \, dx}{1 - x} = \text{P}. \tag{2}$$

Haciendo $x^2 = z$, se tiene

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz \log z}{1 - z} = \text{P} \quad \text{ó} \quad \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = 4\text{P} \tag{3}$$

Sumando (1) y (2),

$$\int_0^1 \frac{(1 + x) \log x \, dx}{1 - x^2} = \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = 4\text{P} = \text{P} - \frac{\pi^2}{8};$$

luego $\quad \text{P} = -\dfrac{\pi^2}{24} \quad$ é $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1 - x} = -\frac{\pi^2}{6}.$

De igual manera restando 2 y 1, resulta

$$\int_0^1 \frac{(1 - x) \log x \, dx}{1 - x^2} = \int_0^1 \frac{dx \log x}{1 + x} = -\frac{\pi^2}{8} - \text{P} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

13. $$\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1} dx}{1 + x} = \int_0^1 (\log x)^{2n-1} dx\,(1 - x + x^2 - \ldots)$$

$$= -1 \,.\, 2 \ldots (2n - 1)\left(1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \ldots\ldots\right).$$

Pero $\quad 1 + \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} + \ldots\ldots = \dfrac{2^{2n-1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n}\,\pi^{2n}\,\text{B}_n;$

luego $\quad \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{4^{2n}} + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 2n}\,\dfrac{\pi^{2n}}{2}\,\text{B}_n,$

y $\quad 1 - \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{3^{2n}} - \ldots\ldots = \dfrac{2^{2n-1} - 1}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots 2n}\,\pi^{2n}\text{B}_n;$

luego $\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log x)^{2n-1} dx}{1 + x} = -\frac{2^{2n-1} - 1}{2n}\,\pi^{2n}\,\text{B}_n,$

y haciendo $x = e^{-z}$, resulta

$$\int_0^1 \frac{z^{2n-1}\,dz}{1+e^z} = \frac{2^{2n-1}-1}{2n}\,\pi^{2n}\,B_n\,. \tag{4}$$

14. Sea
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{1+e^x}\,dx.$$

Desarrollando sen mx é integrando por medio de la fórmula (4), se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{1+e^x}\,dx = \frac{m\pi^2 B_1}{1\,.\,2} - \frac{m^3\pi^4}{1.2.3}\,B_2 + \frac{m^5\pi^6}{5!}\,\frac{2^5-1}{6}\,B_3 + \ldots..$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{\pi}{2\sqrt{-1}}\operatorname{cosec} m\pi\sqrt{-1} = \frac{1}{2m} - \frac{\pi}{e^{m\pi}-e^{-m\pi}}\,.$$

15.
$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)\,dx}{x} = \int_0^1 dx\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots..\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots.. = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

16.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots.\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

17. Sea
$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Hagamos

$$\sqrt{1-x^2} = y,\quad dx = \frac{-\,y\,dy}{\sqrt{1-y^2}},\quad \log x = \frac{1}{2}\log(1-y^2).$$

Tendremos

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{dy}{2\sqrt{1-y^2}}\left(y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{3} + \ldots..\right)$$

luego

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \ldots\ldots\right).$$

Para sumar esta serie, observaremos que se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \ldots\ldots$$

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^2} + \ldots\ldots;$$

luego

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right).$$

Se tiene

$$\int dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right) = -\log\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z^2} - \log z$$

$$= -\log\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)$$

é

$$\int_0^1 dz\left(\frac{1}{z\sqrt{1-z^2}} - \frac{1}{z}\right) = \log 2;$$

luego

$$\int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Si se hace $x = \operatorname{sen}\varphi$ esta fórmula se reduce á

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

integral que puede obtenerse directamente, pues se tiene

$$\frac{1}{2}\log 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\varphi = -\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \ldots\ldots\right)$$

y haciendo $$\frac{1}{2}\varphi = x,$$

$$\log \operatorname{sen} x = -\log 2 - \cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{3}\cos 6x - \ldots \quad (5)$$

Pero $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx dx = 0;$$

luego $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

La fórmula (5) permite obtener la integral más general

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2mx \log \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\pi}{4m}.$$

18. $\int_0^1 \frac{dx}{x}(x^\alpha - x^\beta)$. Se tiene

$$x^\alpha = e^{\alpha lx} = 1 + \alpha \log x + \frac{\alpha^2 (\log x)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

$$x^\beta = e^{\beta lx} = 1 + \beta \log x + \beta^2 \frac{(\log x)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

y por ser $\int_0^1 dx (\log x)^n = (-1)^n\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$ será

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x}(x^\alpha - x^\beta) = \alpha - \beta - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} + \frac{\alpha^3 - \beta^3}{3} - \ldots\ldots$$

es decir, $$\int_0^1 \frac{dx}{\log x}(x^\alpha - x^\beta) = \log \frac{1+\alpha}{1+\beta}.$$

19. $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x}$. Se tiene

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^4 x - \ldots\ldots$$

La integración por partes, observando que $\int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,dx = 0$,

da
$$\int_0^\pi x \operatorname{sen} x \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2n+1};$$
luego
$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots\ldots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

20. $\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\,dx.$ Se tiene
$$e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x = e^{-\alpha^2 x^2}\left[1 - \frac{(2\beta x)^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(2\beta x)^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \ldots\right];$$
luego
$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\left[1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1} + \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4}{1 \,.\, 2} - \ldots\ldots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}.$$

73. Descomposición en integrales parciales. 1.° Sea
$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2}.$$

Tenemos que
$$\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} + \ldots\ldots$$

Haciendo $x = 2n\pi + y$, se tiene
$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2},$$
y haciendo $x = (2n+2)\pi - y$,
$$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[(2n+2)\pi - y]^2};$$

luego $$\int_{2n\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+(2n\pi+y)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos y\,dy}{a^2+[(2n+2)\pi-y]^2},$$

é $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dy\cos y\left[\frac{1}{a^2+y^2}+\frac{1}{a^2+(2\pi+y)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a^2+(2\pi-y)^2}+\ldots\ldots\right].$$

Diferenciando la última fórmula, después de haber tomado el logaritmo de los dos miembros, resulta

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{4a}\int_0^{2\pi} \frac{(e^a-e^{-a})\cos y\,dy}{e^a-2\cos y+e^{-a}}.$$

Pero

$$\frac{e^a-e^{-a}}{e^a-\cos y+e^{-a}} = 1+2e^{-a}\cos y+2e^{-2a}\cos 2y+\ldots\ldots$$

y además

$$\int_0^{2\pi} \cos ny\cos y\,dy = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 y\,dy = \pi;$$

luego $$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

2.º Sea $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{x}$. Haciendo la descomposición en integrales parciales, y escribiendo $x = n\pi \pm y$, podremos reducir á los límites comunes 0 y $\frac{\pi}{2}$, obteniendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y\,dy\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{\pi+y}+\frac{1}{2\pi+y}+\ldots\frac{1}{\pi-y}+\ldots\right).$$

Y la integral propuesta se reduce á $\frac{\pi}{2}$.

CAPÍTULO X

Métodos diversos de integración

§ 1.° POR CAMBIO DE VARIABLE

1.° $$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{sen} x dx. \tag{1}$$

Haciendo $x = \frac{\pi}{2} - y$, se tiene

$$u = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 - \log \cos y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos y \, dy;$$

luego $$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx. \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), resulta

$$2u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (l \operatorname{sen} x + l \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} l 2 dx.$$

Haciendo $2x = z$, se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \operatorname{sen} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} l \operatorname{sen} x dx.$$

Siendo la curva cuya ecuación es $y = \operatorname{sen} x$ simétrica con relación á una paralela al eje de las y cuya abscisa es $\frac{\pi}{2}$, la integral $\log \operatorname{sen} x\, dx$, entre los límites o y π, es doble que aquélla cuyos límites son o y $\frac{\pi}{2}$; luego

$$2u = u - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \log 2 = u - \frac{\pi}{2} \log 2,$$

es decir,
$$u = -\frac{\pi}{2} \log 2 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}.$$

2.°
$$u = \int_0^{\pi} x \log \operatorname{sen} x\, dx.$$

Haciendo $x = \pi - y$, se obtiene

$$\int_0^{\pi} x^2 \log \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi} (\pi - y)^2 \log \operatorname{sen} y\, dy;$$

y sustituyendo y por x, después de suprimir términos comunes,

$$0 = \pi^2 \int_0^{\pi} l \operatorname{sen} x\, dx - 2\pi \int_0^{\pi} x\, l \operatorname{sen} x\, dx.$$

Pero
$$\int_0^{\pi} l \operatorname{sen} x\, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} l \operatorname{sen} x\, dx = \pi l \frac{1}{2};$$

luego
$$\int_0^{\pi} x\, l \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2} \pi^2 l \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \pi^2 l 2.$$

3.° Sea
$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Haciendo $x = \pi - y$, se obtiene

$$\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - y) \operatorname{sen} y\, dy}{1 + \cos^2 y}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} y\, dy}{1 + \cos^2 y} - \int_0^{\pi} \frac{y \operatorname{sen} y\, dy}{1 + \cos^2 y}.$$

Si se hace pasar al primer miembro el segundo término del segundo, después de cambiar y por x, se tendrá

$$2\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} y dy}{1+\cos^2 y}$$

$$= -\pi(\operatorname{arc\,tg} \cos \pi - \operatorname{arc\,tg} \cos 0) = \frac{\pi^2}{2};$$

luego $$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x\, dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

§ 2.° Fórmula de Frullani

74. Esta fórmula se reduce á la igualdad siguiente:

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x} = \varphi(0)\, l\, \frac{b}{a},$$

cualquiera que sea la función φ. Para demostrarla hagamos

$$u = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(0)}{x}\, dx.$$

Si se hace $ax = z$, se tendrá

$$u = \int_0^h \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z}\, dz.$$

Siendo u independiente de a, conserva el mismo valor si esta constante se sustituye por otra, b por ejemplo, y se tiene

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(0)}{x}\, dx = \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx) - \varphi(0)}{x}\, dx;$$

luego

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx$$

$$= \int_{\frac{h}{b}}^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\log\frac{b}{a}.$$

El primer miembro puede escribirse así:

$$\int_0^{\frac{h}{a}} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\,dx - \int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\varphi(bx)}{x}\,dx;$$

y si se supone h infinito, resulta la fórmula de Frullani.

Ejemplo: Sea $\varphi(x) = \cos x$. Siendo nula la integral

$$\int_{\frac{h}{a}}^{\frac{h}{b}} \frac{\cos bx}{x}\,dx$$

cuando h es infinito, se tiene

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \log\frac{b}{a},$$

es decir,

$$2\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)x \operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)x}{x}\,dx = \log\frac{b}{a},$$

y haciendo $\frac{a+b}{2} = p, \quad \frac{b-a}{2} = q,$

será $$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{p+q}{p-q}.$$

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES REPRESENTADAS POR INTEGRALES

CAPÍTULO I

Generalidades sobre las ecuaciones diferenciales

§ I.° Teorema fundamental

75. Definiciones. Toda relación entre una ó varias funciones de una ó de varias variables, éstas variables y las derivadas de las funciones se llama *ecuación diferencial.*

Una ecuación diferencial *ordinaria* es una relación entre una ó varias funciones de una sola variable y sus derivadas.

Una ecuación es de *derivadas parciales*, cuando contiene derivadas parciales relativas á varias variables.

Ecuación de diferenciales totales es la que contiene las diferenciales totales de una ó de varias funciones y de sus variables.

Integrar ó resolver una ecuación difererencial ó un sistema de ecuaciones diferenciales, es hallar la forma que debe atribuirse á las funciones contenidas en dicha ecuación ó en el sistema de ecuaciones para que se reduzcan á una identidad ó á un sistema de identidades.

Teorema fundamental. *Sea* t *una variable real y* x, y, z, ... *un sistema de* ν *funciones desconocidas de* t. *Si las funciones* φ, χ, ψ ..... *de* x, y, z, ..., t *permanecen finitas y continuas, así como sus derivadas, cuando* x, y, z, ..., t *varían en la proximidad de* $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots, t_0$, *las ecuaciones diferenciales*

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \ldots\ldots$$

admitirán una solución tal, que para $t = t_0$ *se tenga* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots\ldots$

Diremos que las variables $x, y, z, \ldots\ldots, t$ se hallan comprendidas en el dominio D, si t varía entre $t_0 - k$ y $t_0 + k$ y al mismo tiempo $x, y, \ldots\ldots$ varían respectivamente entre $x_0 - a$ y $x_0 + a$, entre $y_0 - b$ é $y_0 + b, \ldots\ldots$

Supongamos ahora que, hallándose las variables comprendidas en el dominio D, las funciones $\varphi, \chi, \psi, \ldots\ldots$ y

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ldots\ldots, \chi_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \ldots\ldots$$

permanecen finitas y continuas. Hagamos $t_1 = t_0 + h$, siendo h una cantidad muy pequeña y

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt \\ y_1 = y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \chi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\, dt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

Llamemos M al máximo de φ tomado en valor absoluto, en el dominio D, N al máximo de χ, etc. Es claro que se tendrá

$$x_1 = x_0 + \theta h\text{M}, \qquad y_1 = y_0 + \theta h\text{N}, \ldots\ldots$$

hallándose θ comprendida entre -1 y $+1$; y si h es suficientemente pequeña, $x_1, y_1, \ldots\ldots$ quedarán dentro del dominio D. Supongamos que esto suceda, y hagamos $t_2 = t_1 + h$ y

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \varphi(x_1, y_1, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ y_2 = y_1 + \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \chi(x_1, y_1, \ldots\ldots, t)\, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

Se tendrá

$$x_2 = x_1 + \theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_1 + \theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots$$

y por consiguiente

$$x_2 = x_0 + 2\theta h\mathrm{M}, \qquad y_2 = y_0 + 2\theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots;$$

luego, si h es bastante pequeña, $x_2, y_2, \ldots\ldots$ estarán también comprendidas en el dominio D; y continuando así tendremos

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= x_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ \mathrm{Y} &= y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{\mathrm{T}} \chi(x_{n-1}, y_{n-1}, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

$$\mathrm{X} = x_0 + n\theta h\mathrm{M}, \qquad \mathrm{Y} = y_0 + n\theta h\mathrm{N}, \ldots\ldots;$$

y si h es suficientemete pequeña, X, Y, Z, ... estarán comprendidas en el dominio D. Bastará para ello que

$$n\theta h\mathrm{M} < a, \quad n\theta h\mathrm{N} < b, \quad \ldots\ldots \quad \text{ó} \quad \mathrm{T} - t_0 < \frac{a}{\mathrm{M}}, < \frac{b}{\mathrm{N}}, \ \ldots\ldots,$$

teniendo presente que $nh = \mathrm{T} - t_0$.

Resulta pues, que se puede elegir T bastante próximo de t_0 para que, por grande que sea n, las cantidades T, X, Y, ... se hallen contenidas en el dominio D. Sumando las fórmulas (1), (2), ..., (n), tendremos

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= x_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(x_i, y_i, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ \mathrm{Y} &= y_0 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \chi(x_i, y_i, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Podemos simplificar estas ecuaciones, llamando ξ á una función de t sujeta á permanecer igual á x_0 cuando t varía desde t_0 hasta t_1, á permanecer igual á x_1 cuando t varía desde t_1 hasta

t_2, ...; y llamando η á una función sujeta á permanecer igual á y_0 cuando t varía desde t_0 hasta t_1, á permanecer igual á y_1 cuando t varía desde t_1 hasta t_2, ... Las fórmulas (a) se escribirán así:

$$\left.\begin{aligned} X &= x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ Y &= y_0 + \int_{t_0}^{T} \chi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Esto sentado, si T es un valor fijo de t contenido en el dominio D, haciendo crecer indefinidamente el número n, las cantidades X, Y, Z, ... tenderán hacia límites finitos, funciones de T, pues comparando los valores de (b) con los siguientes:

$$X_0 = x_0 + \int_{t_0}^{T} \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)\,dt, \ldots\ldots,$$

tendremos

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} [\varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t) - \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t)]\,dt$$

ó

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} [(\xi - x_0)\varphi_1(x_0 + \theta\,\overline{\xi - x_0}, y_0 + \theta\,\overline{\eta - y_0}, \ldots, t) + \ldots]\,dt.$$

Llamemos μ á una cantidad mayor que la mayor de las cantidades $\varphi, \chi, \ldots\ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \chi_1, \chi_2, \ldots\ldots$ en el dominio D; y observemos que siendo $\xi - x_0$ una de las cantidades $x_i - x_0$, es de la forma $ih\theta M$ ó $nh\theta M$ ó $nh\theta\mu$. La fórmula anterior se reducirá pues á

$$X - X^0 = \int_{t_0}^{T} \nu nh\theta\mu^2\,dt = (T - t_0)\,\nu nh\theta\mu^2,$$

expresando, como se sabe, ν el número de funciones de t; y observando que $nh = T - t_0$

$$X - X^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \quad Y - Y^0 = \theta\nu\mu^2(T - t_0)^2, \ldots\ldots$$

Estas fórmulas dan á conocer las diferencias entre los valores de X, Y, ... calculadas, sin subdividir el intervalo $T - t_0$.

Dividamos ahora el intervalo $T - t_0$ en n^2 partes iguales, dividiendo en n partes iguales los intervalos $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$, $T - t_{n-1}$, y llamemos X^2, $Y^2, \ldots$ á los valores de X, Y, . . . correspondientes á este modo de división. La diferencia entre X y X^2 será una suma de n cantidades de la forma $\theta\nu\mu^2 \left(\frac{T - t_0}{n}\right)^2$, y por consiguiente de la forma $\frac{\theta\nu\mu^2}{n}(T - t_0)^2$. Dividamos el intervalo $T - t_0$ en n^3 partes iguales, subdividiendo en n partes iguales cada uno de los nuevos intervalos; y llamemos X^3, $Y^3, \ldots$ los nuevos valores de X, Y, . . . ; la diferencia entre X^2 y X^3 será de la forma $\frac{\theta\nu\mu^2}{n^2}(T - t_0)^2$, y así sucesivamente; luego tendremos

$$X - X_0 = \theta\nu\mu^2 (T - t_0)^2, \ldots, X^p - X^{p-1} = \theta\nu \frac{\mu^2}{n^{p-1}}(T - t_0)^2;$$

y sumando

$$X^p - X^0 = \mu^2\nu (T - t_0)^2 \left(\theta + \frac{\theta}{n} + \frac{\theta}{n^2} + \ldots + \frac{\theta}{n^{p-1}}\right).$$

En esta fórmula, la letra θ expresa cantidades diferentes, pero todas comprendidas entre -1 y $+1$ y bien determinadas. La cantidad escrita entre paréntesis es, para $p = \infty$, una serie convergente, y por consecuencia X^p tiene un límite para $p = \infty$, ó también X, Y, ... tienen límites determinados para $p = \infty$ (Cauchy demuestra que este límite permanece el mismo, cualquiera que sea la manera de crecer n).

Supongamos pues $n = \infty$, y calculemos las derivadas de las funciones X, Y, ... dadas por las fórmulas (b). Se tiene que

$$\Delta X = \int_T^{T+\Delta T} \varphi(\xi, \eta, \ldots\ldots, t)\, dt;$$

la cantidad colocada bajo el signo $\int$ difiere infinitamente poco de $\varphi(X, Y, \ldots\ldots, T)$. Se puede escribir pues, expresando por ε un infinitamente pequeño

$$\Delta X = \Delta T\,[\varphi(X, Y, \ldots\ldots, T) + \varepsilon],$$

y

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = \varphi(X, Y, \ldots\ldots, T) + \varepsilon,$$

cualquiera que sea n; luego para $n = \infty$ y $\Delta T = 0$,

$$\frac{dX}{dT} = \varphi(X, Y, \ldots\ldots, T), \quad \frac{dY}{dT} = \chi(X, Y, \ldots\ldots, T), \ldots\ldots$$

luego:

1.º Las cantidades X, Y, ..., calculadas como se acaba de exponer, satisfacen á las ecuaciones diferenciales del enunciado.

2.º Para $T = t_0$, es evidente que se reducen á x_0, y_0, ... respectivamente, quedando el teorema demostrado.

§ 2.º Continuidad de las soluciones

76. Supongamos ahora que las funciones φ, χ, ψ, ... contienen un parámetro α. Vamos á ver que las soluciones de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \quad \ldots\ldots \tag{1}$$

cuya existencia se ha demostrado, y que para $t = t_0$ se reducen á x_0, y_0, ..., son continuas con relación á α.

En efecto; hagamos variar α en g, y llamemos φ', χ' ψ', ... las derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, ..., x_1, y_1, z_1, ... variarán en h_1, k_1, l_1, ...; x_2, y_2, z_2, ... en h_2, k_2, l_2, ...; y aun para mayor generalidad, si se suponen x_0, y_0, z_0, ... funciones de

α, se podrá suponer que estas cantidades varían en h_0, k_0, l_0, ...
Se tendrá pues

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0, y_0, \ldots.., t)\, dt$$

$$x_1 + h_1 = x_0 + h_0 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x_0 + h_0, \ldots.., t)\, dt,$$

$$y_1 = y_0 + \ldots.., \qquad y_1 + k_1 = y_0 + k_0 + \ldots.., \quad \ldots.;$$

y por consiguiente

$$h_1 = h_0 + \int_{t_0}^{t} [h_0 \varphi_1 (x_0 + \theta h_0, \ldots.., \alpha + \theta g, t)$$

$$+ k_0 \varphi_2 (x_0 + \theta h_0, \ldots.., \alpha + \theta g, t) + \ldots..$$

$$+ g \varphi'(x_0 + \theta h_0, \ldots.., \alpha + \theta g, t]\, dt,$$

$k_1 = . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$

Llamando M á una cantidad mayor que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots.., \varphi', \chi_1, \chi_2, \ldots.., \chi', \ldots..$ en el dominio D, sin que ninguna sea infinita, y llamando H_0 una cantidad superior á la mayor de las cantidades g, h_0, k_0, ..., tomada en valor absoluto, se tendrá

$$H_1 = \theta[H_0 + (t_1 - t_0) M (\nu + 1) H_0]$$

ó, haciendo $\qquad \tau = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \ldots..,$

$$H_1 = \theta H_0 [1 + \tau M(\nu + 1)], \qquad H_2 = \theta H_1 [1 + \tau M(\nu + 1)], \ldots..$$

y por consiguiente

$$H_n = \theta H_0 \left[1 + \frac{M(\nu + 1)(T - t_0)}{n} \right]^n$$

ó en fin $\qquad H_n = \theta H_0 e^{M(\nu+1)(T - t_0)}.$

Si pues g es infinitamente pequeño, H_0 lo será y por consiguiente H_n, lo mismo que h_n, k_n, l_n, ... y sus límites, lo que prueba la continuidad de las funciones $x, y, z, \ldots$ con respecto á α y en particular con respecto á $x_0, y_0, \ldots$

Si ahora suponemos que, variando α en la cantidad g, se representan los incrementos de $x, y, z, \ldots$ por $x'g, y'g, z'g, \ldots$ las ecuaciones (1) se reducirán á

$$\frac{d(x+gx')}{dt} = \varphi(x+gx', \ldots, t), \ldots,$$

que combinadas con los (1) dan

$$\frac{dgx'}{dt} = \varphi(x+gx', \ldots, t) - \varphi(x, \ldots, t), \ldots$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= x'\varphi_1 + y'\varphi_2 + \ldots + \varphi' + g\omega, \\ \frac{dy'}{dt} &= x'\chi_1 = y'\chi_2 + \ldots + \chi' + g\bar{\omega}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

expresando $\omega, \bar{\omega}, \ldots$ funciones finitas de $x, y, \ldots, x', y', \ldots, \alpha, g$.

Supongamos ahora, en estas ecuaciones (2), $x, y, z, \ldots$ funciones de t dadas por las fórmulas (1). Estas ecuaciones definen un sistema de valores de $x', y', z', \ldots$ que se reducen á $x'_0, y'_0, z'_0, \ldots$ para $t = t_0$ (y uno solo) en un dominio convenientemente elegido. Además estos valores son continuos con relación al parámetro g; luego cuando g tiende hacia cero, las soluciones tienden hacia las del sistema

$$\frac{dx'}{dt} = x'\varphi_1 + \ldots + \varphi', \qquad \frac{dy'}{dt} = x'\chi_1 + \ldots + \chi', \ldots$$

Esto equivale á decir que para $g = 0$, las cantidades $x', y', \ldots$ tienen límites, y que por consiguiente:

Las soluciones de las ecuaciones (1) *tienen derivadas con relación á* α, *y en particular, con relación á* $x_0, y_0, z_0, \ldots$

Definición. Hemos visto que el sistema de ν ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = \chi, \quad \frac{dz}{dt} = \psi, \ldots\ldots \tag{1}$$

en el que φ, χ, φ, ... expresan funciones de $x, y, z, \ldots\ldots, t$ admite una solución que contiene ν constantes arbitrarias que son los valores de $x, y, z, \ldots\ldots, t$ para $t = t_0$, expresando t_0 un valor arbitrario de t.

Toda solución de las ecuaciones (1) que contiene ν constantes arbitrarias, *distintas*, se llama una *integral general* del sistema (1), ó una solución general de este sistema.

ν constantes se consideran como *distintas*, cuando se las puede elegir de manera que, para $t = t_0$ las funciones $x, y, z, \ldots$ reciban valores dados arbitrariamente. Así, las ν constantes que entran en una integral general deben ser tales, que se las pueda elegir de modo que, para $t = t_0$, adquieran $x, y, z, \ldots\ldots$ valores dados previamente $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots$ Sea

$$H_1 = 0, \quad H_2, \ldots\ldots, \quad H_\nu = 0 \tag{2}$$

un sistema de ecuaciones que contienen ν constantes arbitrarias $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu$. Para que estas constantes sean distintas, es preciso que haciendo $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0, \ldots\ldots$ se puedan resolver estas ecuaciones con relación á $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\nu$. Por consiguiente, para que las constantes sean distintas, es necesario y suficiente, que se tenga

$$\frac{\partial\,(H_1, H_2, \ldots\ldots, H_\nu)}{\partial\,(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\nu)} = 0.$$

Ejemplo 1.° Sean una ecuación primitiva y su diferencial

$$y = ce^{\alpha x} + c'e^{\alpha' x}, \ (1) \qquad \frac{dy}{dx} = c\alpha e^{\alpha x} + c'\alpha' e^{\alpha' x}.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones con respcto á c y c', el denominador común será $(\alpha - \alpha')\, e^{(\alpha+\alpha')x}$. Luego si α es diferente de α', los valores de c y de c', correspondientes á valores arbitrarios a, b, b' atribuidos á x, y, $\frac{dy}{dx}$ serán finitos y determinados; y en este caso la ecuación (1) será la integral general de una ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 2.º La ecuación

$$y = c \operatorname{sen}(x + \alpha) + c' \operatorname{sen}(x + \alpha') + c'' \operatorname{sen}(x + \alpha'')$$

no puede ser la integral general de una ecuación diferencial de tercer orden, porque se tiene

$$\frac{dy}{dx} = c \cos(x + \alpha) + c' \cos(\alpha + \alpha') + c'' \cos(x + \alpha''),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c \operatorname{sen}(x + \alpha) - c' \operatorname{sen}(x + \alpha') - c'' \operatorname{sen}(x + \alpha'');$$

y de la primera y la tercera resulta $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$.

Hallándose determinado el valor de y, no se puede dar un valor arbitrario á $\frac{d^2y}{dx^2}$.

También se llega á esta conclusión escribiendo la ecuación propuesta bajo la forma

$$y = (c \cos\alpha + c' \cos\alpha' + c'' \cos\alpha'') \operatorname{sen} x$$
$$+ (c \operatorname{sen}\alpha + c' \operatorname{sen}\alpha' + c'' \operatorname{sen}\alpha'') \cos x,$$

ó $$y = \mathrm{A} \operatorname{sen} x + \mathrm{B} \cos x,$$

que solo contiene dos contantes arbitrarias.

Volviendo á nuestro razonamiento, supongamos que se resuelvan las ecuaciones (2) con relación á a_1, a_2, ... obtendremos

$$a_1 = \omega_1, \quad a_2 = \omega_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\nu = \omega_\nu, \tag{3}$$

expresando ω_1, ω_2, ... funciones de $x, y, z, \ldots\ldots, t$. Cada una de las ecuaciones (3) es una *integral* del sistema (1); y en general, toda ecuación en x, y, z, ..., t que contenga una constante arbitraria y concurra á formar la solución general, es lo que se llama una *integral.*

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \qquad (a)$$

Cuando se trate de las ecuaciones diferenciales se verá que para obtener la integral general del sistema propuesto, hay que recurrir á lo que se llama un sistema de ecuaciones lineales sin segundo miembro, es decir, á ecuaciones de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{P}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + \mathrm{U}y = 0, \qquad (1)$$

en la que P, Q, ... expresan funciones algebráicas de x, cuya integral se obtiene fácilmente, pues si suponemos que $y = e^{rx}$ sea una de sus integrales, tendrá que satisfacer á la ecuación (1). Derivando n veces y sustituyendo en (1), tendremos después de haber suprimido el factor cumún e^{rx} la ecuación algebráica

$$r^n + \mathrm{P}r^{n-1} + \mathrm{Q}r^{n-2} + \ldots\ldots \mathrm{U} = 0 \qquad (2)$$

y las n raíces $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ de ésta darán otras tantas soluciones $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$, ..., $e^{r_n x}$ de la ecuación (1) que también la satisfarán, multiplicadas cada una por una constante arbitraria, de manera que tendremos las n integrales particulares $c_1 e^{r_1 x}$, $c_2 e^{r_2 x}$, ..., $c_n e^{r_n x}$ que sumadas, dan la integral general

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \ldots\ldots + c_n e^{r_n x}$$

Esto sentado, podemos resolver el sistema (a) propuesto. Para ello acudiremos á un artificio sencillo, que se reduce á derivar la primera ecuación, y tendremos inmediatamente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = x \text{ que dan } \frac{d^2x}{dt^2} = x \text{ ó } \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0.$$

La ecuación algebráica ó característica correspondiente es

$$r^2 - 1 = 0 \quad \text{que da} \quad r = \pm 1;$$

luego la integral general de $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x$ será

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Para obtener la segunda función derivaremos, y resultará

$$\frac{dx}{dt} = C_1 e^t - C_2 e^{-t};$$

y en virtud de $\dfrac{dx}{dt} = y$, tendremos determinada la segunda función

$$y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Las dos integrales

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

constituyen la integral general.

§ 3.º Propiedades de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales

Teorema I. *Si entre las ecuaciones* (2) (pág. 239) *que forman una integral general del sistema* (1) *y sus derivadas relativas á* t, *se eliminan* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, *se obtendrán las ecuaciones* (1) *ó un sistema equivalente, es decir, que dé los mismos valores de* x, y, z, ..., t *en función de* $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \ldots$

En efecto, si se obtienen los valores de $x, y, \ldots$ en (2) para sustituirlos en (1), estas ecuaciones se reducen á identidades, por hipótesis; es decir, quedan satisfechas, cualquiera que sea t, y también cualesquiera que sean $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$; de manera que si se diferencian las ecuaciones (2) y de las ecuaciones obtenidas juntamente con las (2) se despeja x, y, ..., $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... para sustituirlas en (1) éstas se hacen idénticas.

COROLARIO. *Si se dan* ν *ecuaciones entre* x, y, ... t, *que contienen* ν *constantes arbitrarias, y se eliminan éstas entre las ecuaciones dadas y sus derivadas relativas á* t, *considerando á* x, y, z, ... *como funciones de* t, *se obtendrán ecuaciones diferenciales cuya integral general será el sistema de las ecuaciones propuestas.*

TEOREMA II. *La condición necesaria y suficiente para que* $\omega = a$, *en la que* ω *expresa una función de* x, y, z, ..., t *y* a *una constante arbitraria, sea una integral del sistema de ecuaciones* (1), *es que se tenga idénticamente, esto es para cualquier valor de* x, y, z, ... t,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x}\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\chi + \frac{\partial\omega}{\partial z}\psi + \ldots\ldots = 0. \qquad (4)$$

En efecto, decir que (4) es una integral de (1), es decir que existen otras $\nu - 1$ ecuaciones

$$\omega_1 = a_1, \qquad \omega_2 = a_2, \ldots\ldots, \qquad \omega_{\nu-1} = a_{\nu-1}, \qquad (6)$$

en las que ω_1, ω_2, ... son funciones de x, y, z, ..., t y a_1, a_2, ... constantes arbitrarias que con (4) forman la integral general de (1).

Si diferenciamos las ecuaciones (4) y (6), tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \ldots\ldots = 0, \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t} + \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}; \qquad (7)$$

y si de (4), (6) y (7) se sacan los valores de x, y, ... $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... para sustituirlos en (1), las fórmulas se hacen idénticas, es decir, se verifican cualesquiera que sean t y a_1, ... a_ν.

Eliminemos desde luego $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ y tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\omega}{\partial y}\chi + \ldots\ldots = 0, \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \frac{\partial\omega_1}{\partial x}\varphi + \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\chi + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (8)$$

Estas fórmulas deben reducirse á identidades, sustituyendo $x, y, \ldots\ldots$ por sus valores sacados de (4) y (6); y hecha esta sustitución, se verifican para valores cualesquiera de $a_1, a_2, \ldots$.

Pero podemos elegir $a_1, a_2, \ldots\ldots$ de modo que $x, y, \ldots\ldots$ tengan valores dados arbitrarios; luego las fórmulas (8) se verifican para valores arbitrarios de $x, y \ldots$ Son pues identidades aún antes de sustituir $x, y, \ldots\ldots$ por sus valores deducidos de (4) y (6); luego (5) es una identidad, y recíprocamente, luego: *La condición necesaria y suficiente para que* $\omega =$ const. *sea una integral de la ecuación* (1), *es que* ω *sea una integral de la ecuación*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\chi + \ldots\ldots = 0.$$

§ 4.º Ecuaciones de orden superior al primero

77. Sea la ecuación diferencial de orden m,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0. \qquad (1)$$

Esta determina $\frac{d^my}{dx^m}$ en función de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$; y, si se diferencia sucesivamente, quedarán también determinados los coeficientes diferenciales $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}, \ldots\ldots$ en función de las mismas cantidades.

Toda función de x puede desarrollarse en serie por medio de los teoremas de Taylor y de Mac Laurin, hallándose el primero menos sujeto á excepciones, porque puede elegirse el valor de x que entra en los coeficientes, de manera que ninguno de estos se haga infinito.

Sea pues y el valor más general que satisfaga á la ecuación (1); si se la supone desarrollable según la fórmula de Mac Laurin

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots; \tag{2}$$

y si se sustituyen todos los coeficientes, á partir del de x^m, por sus valores en función de los precedentes, determinados como hemos dicho, la función buscada se hallará necesariamente comprendida entre las que representa este desarrollo, porque no hemos expresado mas que condiciones á que debe satisfacer. Y recíprocamente, la función así determinada satisface necesariamente á la ecuación diferencial; porque, si se diferencian m veces los dos miembros de la ecuación (2), se obtendrá precisamente el desarrollo de la ecuación (1), resuelta con relación á $\dfrac{d^m y}{dx^m}$.

La ecuación (2) daria pues la solución completa de la cuestión, si todos los valores de y fuesen desarrollables de esta manera. Y en todo caso faltarán tan sólo aquéllos en los cuales ciertos coeficientes diferenciales dejen de ser finitos y determinados para el valor particular $x = 0$.

Si se hubiese desarrollado conforme al teorema de Taylor, según las potencias de $x - x_0$, se habría obtenido como consecuencia de la ecuación (1)

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)} + \ldots; \tag{5}$$

determinándose los coeficientes diferenciales, á partir del de orden m, con auxilio de la ecuación (1), y referidos á $x = x_0$. Y recíprocamente la ecuación (1) se reduciría á ésta mediante m diferenciaciones sucesivas.

El valor arbitrario de x_0 podría elegirse de manera que ningún coeficiente de la serie se hiciese infinito, si los coeficientes dependiesen tan sólo de x_0; pero como contienen además el valor correspondiente de y con los de sus derivadas, podría suceder que cierta función $y = \varphi(x)$, satisfaciendo á la ecuación diferencial, hiciera infinitos ó indeterminados los coeficientes del desarrollo, cualquiera que fuera x.

Por consiguiente, las fórmulas (2) y (3) pueden no contener todas las funciones que satisfacen á la ecuación (1). Es evidente que estas dos fórmulas coinciden cuando todas las soluciones son desarrollables por medio de ambas; puesto que entonces representan las mismas funciones.

La ecuación (3) es la *integral general* de la (1); y la (2) es solamente un caso particular de aquélla correspondiente á $x = x_0$. Y por satisfacer la ecuación (3) á la propuesta, para valores cualesquiera de los m coeficiente primeros,

$$y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dy^2}\right)_0, \ldots\ldots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0;$$

puesto que desaparecen mediante m diferenciaciones que conducen de la ecuación (3) á la propuesta, *la integral general de una ecuación diferencial de orden* m *contiene necesariamente* m *constantes arbitrarias*, que son los valores de la función y de sus $m - 1$ primeras derivadas, correspondientes á un valor arbitrario de x.

Recíprocamente, toda ecuación entre x é y que satisface á la ecuación diferencial y que contiene m constantes arbitrarias, es idéntica á la integral general representada por el desarrollo (3), puesto que si desarrollamos, según las potencias de x, el valor de y dado por esta ecuación, los m primeros coeficientes contendrán á x_0 y á las m constantes arbitrarias, pudiendo adquirir todos los valores posibles, al elegirse convenientemente dichas constantes, cualquiera que sea el valor elegido para x_0. Pueden pues considerarse como absolutamente arbitrarios; y como los siguientes, dependen éstos, en virtud de la ecuación (1), el desarrollo no diferirá del que da la ecuación (3). De modo que: *Toda ecuación entre* x *é* y *que satisface á una ecuación diferencial de orden* m, *es su integral general, cuando contiene* m *constantes arbitrarias*, por medio de las que es posible dar valores arbitrarios á la función y á sus $m - 1$ primeras derivadas, para cierto valor de x,

Para cerciorarnos de que una ecuación constituye la integral general de una ecuación diferencial será preciso diferenciarla $m - 1$ veces, y ver si se puede dar á las m constantes valores tales, que para un valor dado de x se puedan obtener valores arbitrarios de y y de sus $m - 1$ primeras derivadas. Para ello bastará reconocer si las m ecuaciones pueden resolverse, respecto á las constantes, sin que resulte ningún absurdo; porque entonces se podrán elegir arbitrariamente, para un valor cualquiera de x, y juntamente con sus $m - 1$ primeras derivadas. Si, por ejemplo como ya hemos visto, una ecuación de segundo orden queda satisfecha, por el valor

$$y = \mathrm{C} e^{ax} + \mathrm{C}' e^{a'x},$$

siendo C y C′ constantes arbitrarias, se deducirá

$$\frac{dy}{dx} = a\mathrm{C} e^{ax} + a_1 \mathrm{C}' e^{a'x};$$

y para cualquier valor finito de x, estas ecuaciones darán valores finitos de C y de C′, mientras que no tengamos $a = a'$.

Cuando se da en la integral general, valores particulares á una ó á varias constantes arbitrarias, se tendrá una *integral particular*.

Ya hemos visto que una *solución singular* es aquélla que satisface á la ecuación diferencial, pero que no está contenida en la integral general.

§ 5.º Nociones acerca de las ecuaciones de derivadas parciales

78. Ecuaciones de primer orden. Las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales se distinguen porque contienen en su expresión derivadas parciales, tal es la siguiente:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots\ldots + P_n p_n = R, \tag{1}$$

en la que P_1, P_2, ..., P_n, R son funciones de las n variables independientes x_1, x_2, ..., x_n y de una función desconocida z de estas variables, mientras que p_1, p_2, ..., p_n expresan las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x_1}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial x_n}$. Dicha ecuación es también lineal respecto á los coeficientes diferenciales.

Si α_1, α_2, ..., α_n, funciones conocidas de x_1, x_2, ..., x_n y de z se hallan ligadas por una relación

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n) = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha_1 = \varphi(\alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n); \tag{2}$$

y si se elimina la función arbitaria ψ ó φ, se llega á una ecuación de la misma forma que la propuesta. Diferenciando la ecuación (2) con relación á x_1, x_2, ..., x_n, tendremos

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\left(\frac{d\alpha_2}{dx_1} + p_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}\right) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}\left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \alpha_n}{\partial z}\right),$$

. . . .

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}\right) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}\left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial z}\right).$$

Sumándolas, miembro á miembro, después de haberlas multiplicado respectivamente por $P_1, \ldots\ldots, P_n$, resulta

$$P_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} + (Pp_1 + \ldots\ldots + P_n p_n) \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \left[P_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} + (P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n) \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right]$$

Pero si la ecuación (2) es una integral de la propuesta, $P_1 p_1 + \ldots\ldots + P_n p_n$ será idénticamente igual á R, y se tendrá

$$P_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$$

$$= \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} \left(P_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_1} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \right).$$

Esta ecuación quedará satisfecha cualquiera que sea la función φ, si se eligen las α de modo que se tenga, para $k = 1, 2, \ldots\ldots, n_1$

$$P_1 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_2} + \ldots\ldots + P_n \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_n} + R \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} = 0; \qquad (3)$$

Pero, en virtud del teorema II (pág. 243) bastará tomar para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ funciones de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, z$ tales, que las ecuaciones simultáneas

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R} \qquad (4)$$

tengan por integrales á las siguientes:

$$\alpha_1 = c_1, \quad \alpha_2 = c_2, \ldots\ldots, \quad \alpha_n = c_n.$$

De manera que si obtenemos las integrales del sistema (4), se habrá obtenido la integral de la ecuación propuesta bajo la forma (2).

Supongamos que la ecuación de derivadas parciales y su integral sean, respectivamente

$$Pp + Qq = R \quad (5) \qquad \text{y} \qquad \alpha = \varphi(\beta), \quad (6)$$

siendo $\qquad \alpha = f(x, y, z), \qquad \beta = f_1(x, y, z). \qquad (7)$

Tendremos
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} p &= \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial z} p\right) \\ \frac{\partial\alpha}{y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} q &= \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z} q\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Es necesario que eliminando p y q entre las ecuaciones (5) y (7) se llegue á una ecuación idéntica, ó que se haga idéntica teniendo presente la ecuación de la integral general $F(x, y, z) = 0$.

Si se suman las ecuaciones (7), después de haberlas multiplicado respectivamente por P y Q, se tendrá, teniendo presente la (5),

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \varphi'(\beta)\left[P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z}\right];$$

y se satisfará idénticamente á esta ecuación, eligiendo α y β de modo que se tenga

$$P\frac{\partial\alpha}{\partial x} + Q\frac{\partial\alpha}{\partial y} + R\frac{\partial\alpha}{\partial z} = 0, \qquad P\frac{\partial\beta}{\partial x} + Q\frac{\partial\beta}{\partial y} + R\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0;$$

y estas condiciones quedan satisfechas, si se toman por α y β las funciones $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, que igualadas á constantes, den las integrales de las ecuaciones simultáneas

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{P} = \frac{dz}{R}. \qquad (9)$$

La integral $\alpha = \varphi(\beta)$ definida así, satisface á la condición característica de las integrales generales, de: *Dar para* z, *una expresión que pueda reducirse á una función dada* ω (y) *de* y *cuando se atribuye á* x *cierto valor* ξ, debiéndose tener

$$\alpha = f[\xi, y, \omega(y)], \qquad \beta = f_1[\xi, y, \omega(y)].$$

Si se elimina y entre estas dos ecuaciones, se tendrá un resultado de la forma

$$\alpha = \Phi(\beta),$$

de donde se concluye la forma que debe darse á la función arbitraria φ para satisfacer á la condición impuesta.

Además, toda integral general $F(x, y, z) = 0$ puede ponerse bajo la forma $\alpha = \varphi(\beta)$, pues de la primera se deduce

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z};$$

y sustituidos estos valores en la ecuación (5), á la que deben transformar en una identidad, y por ser $F = 0$ una integral, se tendrá

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} + R\frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

y vamos á ver que toda función θ que satisface á esta ecuación de derivadas parciales, es una función de α y de β; en cuyo caso la ecuación $F(x, y, z) = 0$ equivaldrá á una relación $\alpha = \varphi(\beta)$ entre estas dos funciones; y en efecto siendo $\theta = \omega(x, y, z)$, si hacemos

$$\alpha = f_1(x, y, z), \quad \beta = f_2(x, y, z);$$

eliminando y, z, llegaremos á una ecuación $\theta = \pi(\alpha, \beta, x)$, de la que debe desaparecer x, ya que sustituyendo en

$$P\frac{\partial\theta}{\partial x} + Q\frac{\partial\theta}{\partial y} + R\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

tendremos

$$P\left(\frac{\partial\pi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\pi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\pi}{\partial x}\right)$$
$$+ Q\left(\frac{\partial\pi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\pi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial\pi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\pi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right) = 0. \tag{2}$$

Y por satisfacer α, β á la ecuación (1), la ecuación (2) se reduce á $P\frac{\partial\pi}{\partial x} = 0$, de donde $\frac{\partial\pi}{\partial x} = 0$; ya que P solo puede ser nula para valores particulares de las variables. Así π no contiene x, reduciéndose á una función de α y β.

Queda probado que siendo $F(x, y, z) = 0$ una integral de $Pp + Qq = R$, $F(x, y, z) = 0$ equivale á una relación $\alpha = \varphi(\beta)$ entre estas dos funciones, es decir, que: *Si*

$$f(x, y, z) = c, \quad f_1(x, z, z) = c_1 \tag{10}$$

son dos integrales del sistema

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

y si se hace $\alpha = f(x, y, z)$, $\beta = f_1(x, y, z)$,

la integral de $Pp + Qq = R$ *será* $\alpha = \varphi(\beta)$, *designando* φ *una función arbitraria.*

Observación. De las integrales (10) puede deducirse una infinidad de otras integrales, como por ejemplo $\varphi(\alpha, \beta) = c$, lo que se demuestra derivando, y sumando término á término después de multiplicar respectivamente por P y Q.

79. Ecuación diferencial de segundo orden. La forma general de las ecuaciones diferenciales parciales ó de derivadas parciales de tres variables, es

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

Esta ecuación solo puede integrarse en casos particulares, siendo el más importante el en que las derivadas segundas se presentan únicamente en el primer grado, tomando esta ecuación la forma

$$Rr + Ss + Tt = V, \tag{2}$$

en la cual R, S, T y V son funciones de x, y, z, p y q.

El método de Monge consiste en cierto procedimiento para obtener una ó dos integrales primeras de la forma $u = f(v)$ siendo u y v funciones determinadas de x, y, z, p, q, y f una función arbitraria; después se obtiene por medio de estas integrales, ya separadamente ó combinadas, la integral que sigue.

Debe observarse que el método de Monge se funda en la hipótesis de que la primera integral es de la forma $u = f(v)$, caso que no ocurre siempre. Existen ecuaciones primitivas con dos funciones arbitrarias que pueden eliminarse por diferenciación, obteniéndose una ecuación de la forma (2), de la que es imposible eliminar una función tan solo, que conduzca á una ecuación de la forma (3). Así, la ecuación primitiva

$$\begin{aligned} z &= \Phi(y+x) + \Psi(y-x) \\ &\quad - x\left[\Phi'(y+x) - \Psi'(y-x)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

conduce á la ecuación diferencial parcial

$$r - t = \frac{2p}{x};$$

pero no á una ecuación de la forma (3).

Propongámonos averiguar: 1.° bajo qué condiciones una ecuación de primer orden de la forma (3) debe conducir á una ecuación de segundo orden de la forma (2). 2.° establecer mediante los resultados de esta investigación el método inverso de resolución.

TEOREMA. *Una ecuación de derivadas parciales de primer orden de la forma* u = f (v) *puede conducir únicamente á otra de segundo orden de la forma*

$$\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V}, \tag{6}$$

cuando u *y* v *satisfacen á la condición*

$$\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} = 0. \tag{7}$$

En efecto, diferenciando la ecuación $u = f(v)$ respecto á x é y sucesivamente, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q} = f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}=f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right);$$

y eliminando $f'(v)$, resulta

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right)=0. \quad (8)$$

Haciendo reducciones, se obtiene

$$\mathrm{R}r+\mathrm{S}s+\mathrm{T}t+\mathrm{U}(rt-s^2)=\mathrm{V} \qquad (9)$$

en la que $$\mathrm{U}=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Esta proposición puede también demostrarse observando que de $u=f(v)$, resulta $du=f'(v)dv$, ecuación que por ser $f(v)$ arbitraria, implica las ecuaciones $du=0$, $dv=0$, es decir,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial p}dp+\frac{\partial u}{\partial q}dq=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\frac{\partial v}{\partial p}dp+\frac{\partial v}{\partial q}dq=0\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

y $\quad dz=pdx+qdy,\quad dp=rdx+sdy,\quad dq=sdx+tdy;$

luego

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}\right)dy=0,$$

$$\left(\frac{dv}{dx}+p\frac{\partial v}{\partial z}+r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}\right)dx$$

$$+\left(\frac{dv}{dy}+q\frac{\partial v}{\partial z}+s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}\right)dy=0;$$

y eliminando dx y dy resulta lo mismo que anteriormente.

Problema. *Obtener, cuando sea posible, una integral primera de la forma* u = f(v) *de la ecuación* (6).

En virtud del teorema anterior u y v deben satisfacer á la condición (7) que puede expresarse bajo la forma

$$\frac{\partial u}{\partial q} : \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial v}{\partial q} : \frac{\partial v}{\partial p} = m, \tag{11}$$

de manera que

$$\frac{\partial u}{\partial q} = m\frac{\partial u}{\partial p}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = m\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Sustituyendo estos valores en (10), tenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial p}(dp + mdq) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial p}(dp + mdq) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Y, puesto que este sistema es equivalente á $du = 0$, $dv = 0$ modificado por la condición (7), solo puede tener un sistema integral de la forma $u = a$, $v = b$, (14) siendo a y b constantes arbitrarias y u, v funciones ligadas por la relación (11).

Haciendo $dz = pdx + qdy$ en (13), tenemos (15)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial p}(dp + mdq) = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial p}(dp + mdq) = 0$$

Eliminando entre éstas y

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy \tag{16}$$

las diferenciales dx, dy, dp, dq, obtendremos un sistema de la forma (6). Para efectuar esta eliminación, sumando las dos últimas ecuaciones después de multiplicar la segunda por m, tendremos

$$dp + mdq = (r + ms)\,dx + (s + mt)\,dy,$$

$$rdx + s\,(dy + mdx) + tmdy = dp + mdq. \qquad (17)$$

Pero el sistema (15) nos permite obtener las razones de dy y $dp + mdq$ á dx, que sustituídas en (17), la reduce á la forma (6); y para que sea equivalente á la ecuación (6), es necesario y suficiente que

$$\frac{dx}{\mathrm{R}} = \frac{dy + mdx}{\mathrm{S}} = \frac{mdy}{\mathrm{T}} = \frac{dp + mdq}{\mathrm{V}}. \qquad (18)$$

Este sistema incluye así á las ecuaciones (15); y juntamente con $dz = pdx + qdy$ incluye al sistema (13). Por consiguiente, en su sistema integral final incluye á las ecuaciones $u = a$, $v = b$. Concluímos pues, que si la ecuación $\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = \mathrm{V}$ resulta de una ecuación de primer orden de la forma $u = f(v)$, juntamente con la ecuación $dz = pdx + qdy$, debe admitir un sistema integral que determina á u y á v por ecuaciones de la forma $u = a$, $v = b$.

Para eliminar m de (18), obtendremos su valor mediante el primero y tercer miembro, sustituyendo en el segundo y cuarto. Reduciendo después, obtendremos

$$\mathrm{R}dy^2 - \mathrm{S}dxdy + \mathrm{T}dx^2 = 0 \qquad (20)$$

$$\mathrm{R}dpdy + \mathrm{T}dqdx = \mathrm{V}dxdy. \qquad (21)$$

Y estas ecuaciones con la (19) forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias con cinco variables x, y, z, p, q. Pero como entre cinco variables deben existir cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, se desprende el carácter hipotético del método de Monge. Únicamente, cuando la ecuación propuesta origina una ecuación de la forma $u = f(v)$, el sistema en cuestión admite dos integrales de la forma $u = a$, $v = b$.

Por ser la ecuación (20) de segundo grado, será resoluble, mientras no sea un cuadrado, en dos ecuaciones de primer grado; y esta juntamente con (19) y (21) conducirán á un sistema integral final que determinará u y v.

Teorema. *Si, en virtud de la proposición anterior, obtenemos dos ecuaciones integrales primeras de la forma*

$$u_1 = f(v_1), \qquad u_2 = \Phi(v_2);$$

y si considerando éstas como simultáneas, determinamos p *y* q *en función de* x, y, z, *éstos valores serán susceptibles de hacer integrable la ecuación* $dz = pdx + qdy$, *y conducirán á una integral segunda.*

Representemos para mayor sencillez, $u_1 - f(v_1)$ por F y $u_2 - \psi(v_2)$ por (Φ). Así las primeras integrales supuestas serán

$$F = 0, \qquad \Phi = 0. \tag{23}$$

Volviendo ahora al sistema (18), y haciendo $dy : dx = n$, sus dos integrales primeras toman la forma

$$\frac{1}{R} = \frac{n+m}{S} = \frac{nm}{T},$$

lo que manifiesta que m y n son las dos raíces de la ecuación $R\mu^2 - S\mu + T = 0$. De manera que el valor de la razón $dy : dx$ correspondiente á una de las integrales primeras (23), es el mismo que el correspondiente de m en la otra. Pero tenemos que

$$m = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial v_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial v_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial u_1}{\partial q} - f'(v)\dfrac{\partial v_1}{\partial q}}{\dfrac{\partial u_1}{\partial p} - f'(v)\dfrac{\partial v_1}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q}}{\dfrac{\partial F}{\partial p}}; \tag{24}$$

luego, considerando el valor de $dy : dx$ correspondiente á la integral Φ, tendremos

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}p + \frac{\partial \Phi}{\partial p}r + \frac{\partial \Phi}{\partial q}s\right)dx$$
$$+ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}q + \frac{\partial \Phi}{\partial p}s + \frac{\partial \Phi}{\partial q}t\right)dy = 0.$$

Igualando el valor obtenido de $dy : dx$ al de m, dado por (24), tendremos después de reducir:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}q$$

$$+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)s+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial q}t=0. \quad (25)$$

De igual manera, igualando los valores de m correspondientes á la integral $\Phi = 0$ y el de $dy : dx$ correspondiente á la integral $F = 0$, tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}p+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}q$$

$$+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial p}r+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)s+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial q}t=0. \quad (26)$$

Restando (25) de (26) se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)p+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)q=0, \quad (27)$$

condición que debe quedar satisfecha para que los valores de p y de q dados por $F = 0$ y $\Phi = 0$ puedan hacer exacta á la diferencial $dz = pdx + qdy$.

Observación. Cada una de las integrales primeras satisface á la ecuación diferencial parcial de primer orden y grado formada para integrar la otra.

El método de Monge queda comprendido en la

REGLA. *Dada la ecuación* $Rr + Ss + Tt = V$, *fórmese primero la ecuación*

$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0 \quad (28)$$

y resuélvase, suponiendo que no sea el primer miembro un cuadrado perfecto, en dos ecuaciones de la forma

$$dy - m_1dx = 0, \quad dy - m_2dx = 0. \quad (29)$$

De la primera de éstas y de la ecuación

$$\mathrm{R}\, dp\, dy + \mathrm{T}\, dq\, dx - \mathrm{V}\, dx\, dy = 0, \tag{30}$$

combinada, si es necesario, con la ecuación $dz = pdx + qdy$, *se obtendrán las ecuaciones* $u_1 = a$, $v_1 = b$. *Procediendo de igual manera con la segunda ecuación* (29), *obtendremos otras dos ecuaciones* $u_2 = \alpha$, $v_2 = \beta$, *y entonces las dos integrales primeras de la propuesta serán*

$$u_1 = f_1(v_1), \quad u_2 = f_2(v_2). \tag{31}$$

Para deducir la integral segunda, podemos integrar una de éstas, ó sacar de éstas los valores de p *y de* q *en funciones de* x, y, z, *para sustituirlos en* $dz = pdx + qdy$, *que satisfará entonces á las condiciones de integrabilidad. Su solución dará la integral segunda.*

Si m_1 y m_2 son iguales, solo se obtendrá una integral primera, y la solución final se obtendrá por su integración.

Ejemplo. Sea $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Tenemos $R = 1$, $S = 0$, $T = -a^2$, $V = 0$. Por (29) y (30)

$$dy^2 - a^2 dx^2 = 0, \quad dpdy - a^2 dqdx = 0. \tag{a}$$

La primera se puede resolver en las dos ecuaciones

$$dy + adx = 0, \quad dy - adx = 0. \tag{b}$$

De la primera resulta $y + ax = c$, que reduce la segunda de las (*a*) á la forma $dp + adq = 0$, cuya integral es $p + aq = c$. La integral primera de la ecuación propuesta es, por tanto,

$$p + aq = \varphi(y + ax). \tag{c}$$

Procediendo de igual manera con la segunda ecuación (*b*) obtendremos la integral primera

$$p - aq = \psi(y - ax). \tag{d}$$

Determinando enseguida p y q por medio de estas dos integrales, $dz = pdx + qdy$ se reduce á

$$dz = \frac{\Phi(y+ax)+\psi(y-ax)}{2}dx - \frac{\Phi(y+ax)-\psi(y-ax)}{2a}dy,$$

$$dz = \frac{\Phi(y+ax)(dy+adx) - \psi(y-ax)(dy-adx)}{2a}.$$

De manera que si hacemos

$$\frac{1}{2a}\int \Phi(t)\,dt = \Phi_1(t), \qquad -\frac{1}{2a}\int \Psi(t)\,dt = \Psi(t),$$

tendremos $\qquad z = \Phi_1(y+ax) + \Psi_1(y-ax),$

siendo Φ_1 y Ψ_1 funciones arbitrarias, por serlo Φ y Ψ.

Hemos visto que en cada una de las integrales primeras se verifica la condición (7); y suponiendo

$$p + aq - \Phi(y+ax) = \mathrm{F}, \quad p - aq - \Psi(y-ax) = \Phi,$$

es fácil verificar la condición (27).

§ 6.° Cambio de variables en las ecuaciones diferenciales

80. Diferenciaciones sucesivas. *a)* Aunque ya se han expuesto algunos problemas en los tomos 1.° y 2.°, vamos á añadir otros que serán útiles y se resuelven mediante la aplicación de la fórmula de Leibnitz.

1.° Sea

$$u = e^{ax}\cos nx, \quad \text{será} \quad \frac{du}{dx} = e^{ax}(a\cos nx - n\,\text{sen}\,nx);$$

haciendo

$$\frac{n}{a} = \text{tg}\,\varphi, \quad a = (a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi, \quad n = (a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{sen}\,\varphi;$$

$$\frac{du}{dx} = (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} (\cos\varphi \cos nx - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} nx)$$

$$= (a^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \cos(nx + \varphi);$$

$$\frac{d^r u}{dx^r} = (a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}} e^{ax} \cos(nx + r\varphi).$$

2.° Sea $$uv = e^{ax} \cos nx \,.\, x^m,$$

y supongamos

$$u = e^{ax} \cos nx; \quad v = x^m, \quad \frac{n}{a} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Será $$\frac{d^p u}{dx^p} = (a^2 + n^2)^{\frac{p}{2}} e^{ax} \cos(nx + p\varphi).$$

Y desarrollando $\dfrac{d^r(uv)}{dx^r}$ por el teorema de Leibnitz, será

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = e^{ax}(a^2 + n^2)^{\frac{r}{2}} \left[x^m \cos(nx + r\varphi) \right.$$

$$+ rm\, x^{m-1} \frac{\cos[nx + (r-1)\varphi]}{(a^2 + n^2)}$$

$$\left. + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} m(m-1) x^{m-2} \frac{\cos[nx + (r-2)\varphi]}{(a^2 + n^2)} + \ldots\ldots \right]$$

3.° Sea $uv = e^{ax}\mathrm{X}$, siendo función de x. Haremos $u = \mathrm{X}$, $v = e^{ax}$, y será

$$\frac{d^r(uv)}{dx^r} = e^{ax} \left[\frac{d^r \mathrm{X}}{dx^r} + r.a \frac{d^{r-1}\mathrm{X}}{dx^{r-1}} + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} a^2 \frac{d^{r-2}\mathrm{X}}{dx^{r-2}} + \ldots \right]$$

$$= e^{ax} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^r + \ldots\ldots + \frac{r(r-1)}{1 \,.\, 2} a^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^{r-2} + \ldots\ldots \right] \mathrm{X}$$

$$= e^{ax} \left(\frac{d}{dx} + a\right)^r \mathrm{X}.$$

De modo que $\left(\frac{d}{dx}+a\right)^r X = e^{-ax}\left(\frac{d}{dx}\right)^r (e^{ax} X.$

b) Sea $(u)^n = (a + bx + x^2)^n$, $u' = b + 2cx$.

Sustituyendo $x + h$ á x en u^n, esta expresión se cambia en $(u + u'h + ch^2)^n$; y $\frac{d^r u}{dx^r}$ será el coeficiente de $\frac{h^r}{r\,!}$ en el desarrollo. Considerando pues, $u + u'h$ como el primer término de un binomio, se tendrá $(u + u'h)^n + n\,(u + u'h)^{n-1}\,ch^2 + \ldots\ldots$

Desarrollando enseguida cada binomio, y tomando tan solo términos que tengan h^r por factor, corresponderá

á $(u + u'h)^n$, $\quad \frac{n\,(n-1)\ldots(n-r+1)}{r\,!}\,u^{n-r}\,u'^r$;

á $(u + u'h)^{n-1}\,h^2 \quad \frac{(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-2)\,!}\,u^{n-r+1}\,u'^{r-2}$,

á $(u + u'h)^{n-2}\,h^4 \quad \frac{(n-2)\ldots(n-r+3}{(n-3)\,!}\,u^{n-r+2}\,u'^{r-4}$, etc.

Reunamos estos términos multiplicándolos por $1 \,.\, 2 \ldots\ldots r$, y obtendremos para el r^{simo} coeficiente diferencial de u^n;

$$\frac{d^r\,(u)^n}{dx^n} = n(n-1)\ldots(n-r+1)u'^r\left[1+\frac{r(r-1)}{1\,.\,(n-r+1)}\,\frac{cu}{u'^2}\right.$$

$$\left.+\frac{r(r-1)\,(r-2)\,(r-3)}{1\,.\,2\,(n-r+1)\,(n-r+2)}\,\frac{c^2u^2}{u'^2}+\ldots\ldots\right].$$

Se puede obtener una fórmula más cómoda desarrollando la expresión propuesta como sigue:

$$(u + u'h + ch^2)^n = u^n\left(1+\frac{u'}{u}\,h+\frac{c}{u}\,h^2\right)^n$$

$$= u^n\left[\left(1+\frac{u'}{2u}\,h\right)^2+\frac{4uc-u'^2}{4u^2}\,h^2\right]^n.$$

Supongamos $4uc - u'^2 = 4ac - b^2 = e^2$.

Desarrollando $u^n \left[\left(1 + \frac{u'}{2u} h \right)^2 + \frac{e^2}{(2u)^2} h^2 \right]^n$

por la fórmula del binomio, se tendrá:

$$u^n \left[\begin{array}{l} \left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{2n} + n \left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{2n-2} \frac{e^2}{(2u)^2} h^2 \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(1 + \frac{u'}{2u} h\right)^{n2-4} \frac{e^4}{(2u)^4} h^4 + \ldots\ldots \end{array} \right];$$

y la r^{sima} derivada de u^n será el coeficiente de h^r en este desarrollo, multiplicado por $1 \cdot 2 \ldots\ldots r$.

Desarrollemos cada término, y tendremos por coeficiente de h^r respectivamente, en el primero, en el segundo, ... términos:

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^r \frac{1}{u'} \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r},$$

$$\left(\frac{u'}{2}\right)^{r-2} \frac{1}{2^2 u^r} \frac{(2n-2)\ldots\ldots 2n - r + 1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-4)} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^4,$$

. . . .

Sumando y multiplicando por $1 \cdot 2 \ldots\ldots r$, se tendrá

$$\frac{d^r (u)^n}{dx^r} = 2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-r+1)\left(\frac{u'}{2}\right)^r u^{nr}$$

$$\times \left[1 + \frac{n}{1} \frac{r(r-1)}{2n(2n-1)} \frac{e^2}{u'^2} \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)\, r(r-1)(r-2)(r-3)}{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-3)} \frac{e^4}{u'^4} + \ldots\ldots \right].$$

Sea $u^n = (a^2 + x^2)$; será $u' = 2x$, $e^2 = 4a^2$; y haciendo $r = n$, tendremos:

$$\frac{d^n (a^2 + x^2)^n}{dx^n} = 2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)\, x^n \left[1 \right.$$

$$\left. + \frac{n^2}{1} \frac{n-1}{2n(2n-1)} \frac{a^2}{x^2} + \frac{[n(n-1)]^2}{1 \cdot 2} \frac{(n-2)(n-3)}{2n \ldots (2n-3)} \frac{a^4}{x^4} + \ldots \right].$$

El método de Lagrange sirve para obtener las derivadas sucesivas de funciones de otra forma. Así para $u = e^{cx^2}$ se escribirá

$$e^{c(x+h)^2} = e^{c(x^2+2hx+h^2)} = e^{cx^2} \,.\, e^{2cxh} \,.\, e^{ch^2}.$$

Pero

$$e^{2cxh} = 1 + 2cxh + \ldots., \qquad e^{ch^2} = 1 + ch^2 + \frac{c^2}{1\,.\,2} h^4 + \ldots..$$

Multiplicando estas ecuaciones, miembro á miembro, y tomando el coeficiente de h^r después de multiplicar por $1\,.\,2 \ldots r$, se obtendrá

$$\frac{d^r u}{dx^r} = e^{cx^2} [c^r (2x)^r + r(r-1) c^{r-1} (2x)^{r-2} + \ldots..].$$

Sea $u = \dfrac{1}{e^x + 1}$ que podría obtenerse en serie infinita por el procedimiento de Lagrange, pero por el siguiente procedimiento, debido á Laplace, puede obtenerse mediante un número finito de términos. Se ve que $\dfrac{d^r u}{dx^r}$ es de la forma

$$\frac{a_r e^{rx} + a_{r-1} e^{(r-1)x} + \ldots.. + a_1 e^x}{(e^x + 1)^{r+1}};$$

de manera que

$$(e^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{dx^r} = a_1 e^{rx} + a_{r-1} e^{(r-1)x} + \ldots + a_1 e^x. \tag{1}$$

Pero $\qquad u = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} + \ldots..;$

luego $$\frac{d^r u}{dx^r} = (-1)^r [1^r e^{-x} - 2^r e^{-2x} + 3^r e^{-3x} - \ldots] \tag{2}$$

Además tenemos que

$$(e^x + 1)^{r+1} = e^{(r+1)x} + \frac{r+1}{1} e^{rx} + \frac{(r+1)r}{1\,.\,2} e^{(r-1)x} + \ldots \tag{3}$$

Debiendo ser el producto de (2) y (3) igual á (1); por no contener ésta más que un número finito de términos con exponentes positivos, los términos con exponentes negativos deben destruirse; luego tendremos

$$(e^x + 1)^{r+1} \frac{d^r u}{dx^r} = (-1)^r \Big\{ 1^r e^{rx}$$

$$- \left[2^r - \frac{r+1}{1} 1^r \right] e^{(r-1)x} + \ldots\ldots \Big\}$$

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \frac{(-1)^r \left\{ 1^r e^{rx} - \left[2^r + \frac{r+1}{1} \right] e^{(r-1)x} + \ldots\ldots \right\}}{(e^x + 1)^{r+1}}.$$

81. *b)* Cambio de variables. 1.° Transformar

$$x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{siendo} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Tenemos $x^2 + y^2 = r^2$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$;

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{dr} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r};$$

luego

$$x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

Esta transformación se presenta en la teoría de los planetas.
Análogamente será

$$x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = r \frac{\partial R}{\partial \theta}.$$

2.° Transformar $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dada $x^2 + y^2 = r^2$ y $u = \varphi(r)$.

Será

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right);$$

de donde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,\frac{x^2+y^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2+y^2}{r^3}\right);$$

luego $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Esta ecuación se presenta en el estudio del movimiento de los fluidos.

3.° Sea $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$, siendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Para transformarla obtendremos

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \mathrm{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$+ \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\right).$$

El valor de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ se deduce del de $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ sustituyendo $\frac{\pi}{2} - \theta$ por θ; y se obtiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r}$$
$$- \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\right).$$

Sumando estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$

4.° Transformar $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, en una función de r, θ y φ, siendo

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi.$$

Hagamos $\rho = r \operatorname{sen} \theta$, y se tendrá

$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi; \quad \rho = r \operatorname{sen} \theta, \quad x = r \cos \theta.$$

Tomemos primero las variables y, z; y tendremos, como anteriormente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Siendo iguales las ecuaciones de condición, obtendríamos análogamente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Y procediendo como anteriormente, será

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Sumando las tres ecuaciones, resultará

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$$
$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Sustituyendo el valor de ρ, y haciendo reducciones,

$$r \frac{\partial^2 (rV)}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} = 0.$$

Esta ecuación es la base de la teoria matemática de la atracción y de la electricidad.

5.º Sea
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

siendo
$$x^2+y^2+z^2=r^2\; u=\varphi r.$$

Se tendrá que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

6.º Transformar la integral doble

$$\iint x^{m-1}y^{n-1}\,dy\,dx,$$

en otra, siendo u y v las nuevas variables independientes, hallándose ligadas las variables por

$$x+y=u,\qquad y=uv.$$

Tendremos
$$dy\,dx=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv.$$

Pero
$$\frac{\partial x}{\partial u}=1,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=0;$$

luego
$$dy\,dx=udu\,dv;$$

$$\iint x^{m-1}y^{n-1}dy\,dx=\iint u^{m+n-1}(1-v)^m v^n\,du\,dv.$$

7.º Transformar la expresión

$$\iint dx\,dy\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

en función de θ y φ, siendo: 1.º z función de x é y determinada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

2.º $\quad x=a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\qquad y=b\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi.$

Se tendrá

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = a \cos \theta \cos \varphi, \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = - a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = b \cos \theta \operatorname{sen} \varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = b \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = - c \operatorname{sen} \theta, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = ab \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} = - bc(\operatorname{sen} \theta)^2 \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \theta} \, ac\,(\operatorname{sen} \theta)^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ dx, \ dy,$$

se obtendrá que la expresión buscada es:

$$\iint d\theta\, d\varphi \operatorname{sen} \theta \left[a^2 b^2 (\cos \theta)^2 + (c \operatorname{sen} \theta)^2 (a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Ivory Phil. Trans. 1809).

CAPÍTULO II

Polinomios de Legendre

§ I.° Propiedades generales

82. Definición. Sea la expresión

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots \qquad (1)$$

desarrollada según las potencias ascendentes de z (se supone á x menor que 1 y á z comprendida entre 0 y 1). El coeficiente general X_n es una función de x llamada *función* X_n *de Legendre.*

83. Propiedades. I. Evidentemente $X_0 = 1$, $X_1 = x$ además X_n *es un polinomio entero en* x *de grado* n. En efecto, si hacemos

$$T = z^2 - 2zx = z(z - 2x),$$

el desarrollo de $(1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se expresará como sigue:

$$(1 + T)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} T + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{T^2}{2} + \ldots..$$

$$+ (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2k - 1)}{2^k} \frac{T^k}{k!} + \ldots..$$

siendo
$$T^k = z^k \left[z^k - k \frac{2x}{1} z^{k-1} \right.$$

$$\left. + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}(2x)^2 z^{k-2} + \ldots.. + (-1)^k (2x)^k \right].$$

Para que T^k contenga un término en z^n será necesario que k

sea por lo menos igual á $\frac{n}{2}$ y á lo más igual á n. Tomemos el término general de T^k

$$(-1)^p \frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-p+1)}{p!}(2k)^p z^{2k-p}.$$

Para que el exponente de z sea igual á n, es necesario tomar el exponente p de x igual á $2k-n$, valor comprendido entre cero y n.

II. *Se tiene que*

$$X_n = \frac{1}{2.4\ldots\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{2}$$

fórmula de Olinde Rodrígues (T. II pág. 169), que se obtiene tomando en el desarrollo de $(x^2-1)^n$ el término en x^{2k} y derivando n veces.

III. *La ecuación* $X_n = 0$ *tiene todas sus raíces reales, distintas y comprendidas entre* -1 y $+1$. En efecto, sea

$$u = (x^2-1)^n.$$

La función continua u tiene n raíces iguales á -1 y n raíces iguales á 1. La derivada tiene $n-1$ raíces iguales á -1 y $n-1$ raíces iguales á $+1$ y, según el teorema de Rolle, una raíz a_1 comprendida entre -1 y $+1$. La derivada segunda tendrá $n-2$ raíces iguales á -1 y $n-2$ raíces iguales á $+1$, y según el teorema de Rolle una raiz b_1 comprendida entre -1 y a_1 y una raiz b_2 comprendida entre a_1 y $+1$, y así sucesivamente, quedando el teorema demostrado.

IV. $X_n(1) = 1$, $X_n(-1) = (-1)^n$. En efecto, para $x = 1$ ó $x = -1$, la expresión $(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se reduce á

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots\ldots + z^n + \ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + \ldots\ldots + (-1)^n z^n + \ldots\ldots$$

V. *La función* X_n *satisface á la relación* (t. II, pág. 233)

$$n(n+1)X_n - 2xX'_n - (x^2 - 1)X''_n = 0. \tag{3}$$

VI. *Existe la siguiente relación recurrente entre las tres funciones sucesivas* X_{n+1}, X_n *y* X_{n-1},

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{4}$$

Para obtenerla basta diferenciar la ecuación (1) con relación á z y hallaremos

$$(x-z)(1-2zx+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma nX_n z^{n-1}.$$

Multipliquemos los dos miembros de esta igualdad por $1-2zx+z^2$, y sustituyamos en el primero $(1-2zx+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ por su valor $\Sigma X_n z^n$; tendremos la identidad

$$(x-z)\Sigma X_n z^n = (1-2zx+z^2)\Sigma nX_n z^{n-1},$$

é identificando los términos en z^n, resulta la relación (4), que permite calcular X_{n+1} cuando se conoce X_n y X_{n-1}, y dicha identidad demuestra además que las raíces de la función X_n dan signos contrarios á las dos funciones que la comprenden.

VII. *Tenemos que*

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \quad \text{si} \quad m \gtrless n. \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

En efecto, integrando por partes varias veces seguidas, se tendrá siendo $y = (x^2-1)^n$,

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)} y^{(m)} dx = \Big[y^{(n)} y^{(m-1)}\Big]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} y^{(n+1)} y^{(m-1)} dx$$

$$= \Big[y^{(n)} y^{(m-1)} - y^{(n+1)} y^{(m-2)}\Big]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} y^{(n+2)} y^{(m-2)} dx$$

$$=\left[y^{(n)}y^{(m-1)}-y^{(n+1)}y^{(m-2)}+\ldots+(-1)^k y^{(n+k)}y^{(m-k-1)}\right]_{-1}^{+1}$$

$$+(-1)^{k+1}\int_{-1}^{+1} y^{(n+k+1)}y^{(m-k-1)}\,dx.$$

Si $m < n$, todas las derivadas $y^{(m-1)}$, $y^{(m-2)}$, ... son nulas para $x = \pm 1$; la derivada de orden $m + 1$ y las siguientes son nulas idénticamente, lo que demuestra la primera fórmula.

Si $m = n$, y $k = n - 1$, se tendrá

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)}y^{(n)}\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{+1} y^{(2n)}y\,dx$$

$$= (-1)^n\, 2n! \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\,dx.$$

Considerando $x^2 - 1$ como el producto de $x - 1$ por $x + 1$ é integrando n veces por partes, se obtiene

$$\int_{-1}^{+1} y^{(n)}y^{(n)}\,dx = (n!)^2\,\frac{2^{2n+1}}{2n+1}\cdot$$

y siendo $X_n = \dfrac{y^n}{2^n\, n!}$ se tendrá $\displaystyle\int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$. (5)

VIII. *El polinomio X_n puede escribirse bajo la forma de determinante*

$$X_n = M\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_n \\ a_1 & a_2 \ldots\ldots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n \ldots\ldots & a_{2n-1} \\ 1 & x \ldots\ldots & x^n \end{vmatrix} \qquad (6)$$

siendo M un coeficiente numérico

$$a_r = \frac{1+(-1)^r}{2(r+1)}.$$ (*Rouché* C. R., t. LXVII).

IX. *La función* u *satisface á las ecuaciones diferenciales*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{1}{u^2}=ux \qquad (7) \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x-z)=z\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (8)$$

En efecto de la fórmula (1) resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}z=u^3 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x-z)=u^3(x-z).$$

Sumando después de haber multiplicado por $\frac{1}{u^2}$ cada una de estas derivadas, se obtiene la fórmula (7) y eliminando u^3 entre dichas derivadas, resulta la (8).

X. *Cuatro funciones consecutivas satisfacen á la relación*

$$(n+1)X_{n-1}-(2n+1)xX_n+(n-1)X_{n-1}$$
$$+\frac{dX_n}{dx}-2x\frac{dX_{n-1}}{dx}+\frac{dX_{n-2}}{dx}=0, \qquad (9)$$

que se obtiene sustituyendo $\frac{1}{u^2}$ por $(1-2xz+z^2)$, u y sus derivadas por sus valores desarrollados, é igualando los coeficientes de z^n en los dos miembros.

XI. *Dos funciones consecutivas se hallan ligadas por la relación*

$$nX_n=x\frac{dX_n}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx} \qquad (10)$$

que resulta de (8) cuando, después de sustituir los valores desarrollados de las derivadas, se igualan los coeficientes de z^n. (Bertrand. *Calcul différentiel).*

XII. *Se tiene entre tres funciones consecutivas la relación*

$$(2n+1)X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx}. \qquad (11)$$

Para demostrarlo, basta sustituir en (9) por $(n+1)X_{n+1}$ y $(n-1)X_{n-1}$ sus valores sacados de (10) y simplificar *(Chistoffel*, Journ. de Crelle, t. LV).

Si se cambia n en $n-2$, $n-4$, ..., la adición de los resultados da la fórmula

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n+1)X_n + (2n-3)X_{n-2} + (2n-7)X_{n-4} + \cdots$$

$$+ 3X_1 \ (n \text{ impar}); \ \ldots\ldots + 5X_2 + X_0 \ (n \text{ par}) \qquad (12)$$

Siendo $\dfrac{dX_0}{dx} = 0, \quad \dfrac{dX_1}{dx} = X_0$

deduciremos fácilmente

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx} = (2n+1)X_n$$

$$+ (2n-1)X_{n-1} + \ldots\ldots + 5X_2 + 3X_1 + X_0 \qquad (13)$$

XIII. *Entre* X_n *y* X_{n+1} *se tiene la relación*

$$(n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - x\frac{dX_n}{dx}, \qquad (14)$$

que resulta eliminando $\dfrac{dX_{n-1}}{dx}$ entre (10 y 11). *(Catalan* Mém. de l' Acad. de Belgique).

XIV. *Entre* X_{n+1}, X_n *y* X_{n-1} *se verifica*

$$X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}, \qquad (15)$$

que se obtiene restando (10) de (14) (Bertrand. Cal. diff.) Aplicando esta relación á los tres últimos términos de (9) se obtiene la relación

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \qquad (16)$$

XV. *Dos funciones consecutivas satisfacen á las relaciones*

$$\frac{n}{1+x}(X_n + X_{n-1}) = \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx}. \qquad (17)$$

$$\frac{n}{1-x}(X_{n-1}-X_n)=\frac{dX_{n-1}}{dx}+\frac{dX_n}{dx}. \qquad (18)$$

Cambiando n por $n-1$ en (14) y agregando (10) se obtiene la (17), y restando la (18).

La eliminación de una de las derivadas entre 17 y 18 conduce á

$$(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=n(X_{n-1}-xX_n). \quad \textit{(Catalán)}. \qquad (19)$$

$$(1-x^2)\frac{dX_{n-1}}{dx}=n(xX_{n-1}-X_n). \quad \textit{(O. Bonnet)}. \qquad (20)$$

XVI. *Entre tres funciones consecutivas se tiene*

$$X_{n+1}-X_{n-1}=\frac{2n+1}{n(n+1)}(x^2-1)\frac{dX_n}{dx}. \quad \textit{(Catalán)}. \qquad (21)$$

$$X_{n+1}-2xX_n+X_{n-1}=\frac{1-x^2}{n(n+1)}\frac{dX_n}{dx}. \qquad (22)$$

Se dividen los dos miembros de (19) por n, y después de haber cambiado n en $n+1$ en (20) se dividen los dos miembros por $n+1$. La adición da (21) y la sustracción la (22).

§ 2.° Formas de la función X_n

84. Teorema de Legendre. *Toda función X_n satisface á la fórmula*

$$(1-x^2)\frac{d^{p+1}X_n}{dx^{p+1}}-2px\frac{d^pX_n}{dx^p}=(p+n)(p-n-1)\frac{d^{p-1}X_n}{dx^{p-1}}$$

ó

$$\frac{d[(1-x^2)^p d^pX_n]}{dx^{p+1}}$$

$$=(p+n)(p-n-1)(1-x^2)^{p-1}\frac{d^{p-1}X_n}{dx^{p-1}}. \qquad (23)$$

Basta derivar p veces la fórmula (21). Cuando $p = 1$ se tiene

$$\frac{d\left[(1 - x^2)\dfrac{dX_n}{dx}\right]}{dx} + n(n+1)X_n = 0. \quad \textit{(Laplace)}. \quad (24)$$

85. Función de Legendre. La fórmula (18) da

$$(1 - x)\left(\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_0}{dx}\right) + X_1 - X_0 = 0.$$

Pero $$\frac{dX_1}{dx} = X_0 \quad \text{y} \quad \frac{dX_0}{dx} = 0;$$

luego $$(1 - x)X_0 + X_1 - X_0 = 0 \quad \text{ó} \quad X_1 = xX_0.$$

Siendo X_0 el término independiente de z, y haciendo $z = 0$ en la expresión $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, se tiene $X_0 = 1$ y por consiguiente $X_1 = x$.

La fórmula (16) permite obtener sucesivamente las otras funciones

$$X_2 = \frac{3}{2}xX_1 - \frac{1}{2}X_0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$X_3 = \frac{5}{3}xX_2 - \frac{2}{3}X_1 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$X_4 = \frac{7}{4}xX_3 - \frac{3}{4}X_2 = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^4 - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$$

$$X_5 = \frac{9}{5}xX_4 - \frac{4}{5}X_3 = \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}x^5 - \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}2x^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x.$$

Escribamos X_5 bajo la forma

$$X_5 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1}\frac{1}{2\cdot 4}x;$$

Podremos escribir, por analogía,

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n\,!}x^n - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{(n-2)\,!}\frac{1}{2}x^{n-2}$$

$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{(n-4)\,!}\frac{1}{2.4}x^{n-4}-\ldots\ldots,$$

y aplicando la fórmula (16), se obtendrá

$$X_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}{(n+1)\,!}x^{n+1}$$

$$-\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{(n-1)\,!}\frac{1}{2}x^{n-1}+\ldots\ldots$$

que es la forma de la función de Legendre. Esta fórmula puede obtenerse también aplicando la fórmula del binomio de Newton á la expresión $[1-z(2x-z)]^{\frac{1}{2}}$ en la fórmula de definición

$$u = [1-z(2x-z)]^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + \ldots\ldots + X_n z^n + \ldots\ldots$$

X_n es el coeficiente de z^n en el desarrollo

$$u = 1 + \frac{1}{2}z(2x-z)\frac{1.3}{2.4}z^2(2x-z)^2+\ldots\ldots$$

86. Forma de Rodrigues. Esta forma se deduce de la de Legendre observando que el coeficiente $\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{n\,!}$, multiplicado en el numerador por $2.4.6\ldots\ldots 2n$ y en el denominador por su igual $2^n\,n\,!$ se reduce á $\frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{2^n\,n!}$, y que el término general de $2^n.n!\,X_n$ puede escribirse sucesivamente

$$(-1)^m\,2n\,(2n-1)\ldots\ldots(n+1)$$

$$\times\frac{n(n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m\,(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)}x^{n-2m},$$

$$(-1)^m \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2m+2)}{2.4.6\ldots 2m}$$
$$\times (2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m},$$
$$(-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$
$$\times (2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m}$$

y por ser

$$(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m}$$
$$= \frac{d^n x^{2n-2m}}{dx^n},$$

el término general de $2^n n! X_n$ toma la forma

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^m \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{m!} x^{2n-2m}\right]$$

siendo la cantidad entre paréntesis el desarrollo de $(x^2-1)^n$; y obtenemos finalmente el valor

$$X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

También puede deducirse esta forma de la de Legendre.

87. Método de Jacobi. Si se hace

$$y = x + \frac{z}{2}(y^2 - 1),$$

resolviendo la ecuación con relación á y, se obtiene

$$y = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sqrt{1 - 2xz + z^2}$$

de donde
$$\frac{dy}{dx} = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pero si se aplica á $y = x + \frac{z}{2}(y^2 - 1)$ la fórmula de Lagrange,

$$y = x + \frac{z}{2}(x^2-1) + \frac{z^2}{1.2}\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1)^2 + \ldots\ldots$$

y por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)}{dx^n} + \ldots;$$

resultando el desarrollo

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{z^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \ldots\ldots$$

que da para el coeficiente de z^n el valor

$$X_n = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

88. Forma de Laplace. La expresión

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

puede escribirse así

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1 + \frac{(z-x)^2}{1-x^2}}.$$

En virtud de la fórmula de Mac Laurin, se tiene

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\right)_{z=0.}$$

Hagamos $$\frac{z-x}{\sqrt{1-x^2}} = \lambda\sqrt{-1}.$$

Tendremos $$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

y $$X_n = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^{n+1} \cdot (\sqrt{-1})^n \cdot n!}$$

$$\times \left(\frac{d^n}{d\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)_{\lambda = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Obtenida esta fórmula, Laplace, en su *Théorie analytique des probabilités* observa que se tiene

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{n!}{\pi (1-\lambda^2)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^\pi (\lambda + \cos \omega)^n \, d\omega,$$

y sustituyendo λ por su valor $\frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-x^2}}$ y á $1-\lambda^2$ su igual $\frac{1}{1-x^2}$, obtiene

$$\left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)_{\lambda = \frac{x\sqrt{-1}}{\sqrt{1-n^2}}}$$

$$= \frac{n!\,(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi} \int_0^\pi (x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega;$$

llevando después este valor á la expresión de X_n y simplificando, resulta

$$X_n = \frac{1}{\pi(\sqrt{-1})^n} \int_0^\pi (x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega,$$

ó más sencillamente,

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n \, d\omega. \quad (*)$$

Para demostrar que se puede expresar la derivada n^{sima} de

(*) E. Brand. *Notice sur la théorie de la fonction X_n de Legendre.*

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ó de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ por una integral definida, podemos emplear el método siguiente de Hermite. (*)

Sea la integral definida

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

en la que $a > 1$, y en la que por consiguiente el elemento infinitesimal no es infinito más que en los límites. Hagamos

$$x = \frac{1 + a\cos\varphi}{a + \cos\varphi},$$

y tendremos que

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{a^2-1}\,\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a+\cos\varphi}, \quad a - x = +\frac{a^2-1}{a+\cos\varphi},$$

$$dx = -(a^2-1)\frac{\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{(a+\cos\varphi)^2};$$

$d\varphi$ es negativa; para $x = -1$ haremos $\varphi = \pi$ y para $x = +1$, $\varphi = 0$. La integral se reducirá á

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-1}} = +\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}};$$

tenemos pues

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Diferenciemos respecto de a bajo el signo $\int$, y obtendremos

$$\frac{\pi}{n!}\,\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n} = \int_{-1}^{+1} \frac{(-1)^n\, dx}{(a-x)^{n+1}\sqrt{1-x^2}};$$

(*) **Tisserand** ***Recueil d'exercices de Calcul infinitesimal***, **p. 35.**

la integral del segundo miembro, cuando se sustituye el valor de x en función de φ, se reduce á

$$\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi (a+\cos\varphi)^n\, d\varphi;$$

Tendremos pues

$$\frac{\pi}{n!}\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n}=\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^\pi (a+\cos\varphi)^n\, d\varphi.$$

Pero en virtud de la fórmula del binomio

$$(a+\cos\varphi)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}\cos\varphi+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}\cos^2\varphi+\ldots$$

y además

$$\int_0^\pi \cos\varphi d\varphi=0,\qquad \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^\pi \cos^3\varphi\, d\varphi=0,\qquad \int_0^\pi \cos^4\varphi\, d\varphi=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\pi,\qquad \ldots\ldots;$$

luego

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n}=\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$\times\left[a^n+\binom{n}{2}\frac{1}{2}a^{n-2}+\binom{n}{4}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^{n-4}+\ldots\ldots\right].$$

Dividiendo por $\sqrt{-1}$, obtendremos la expresión de

$$\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}{da^n}\text{ y la de }\frac{d^n\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}{da^n},\text{ cambiando } a \text{ por } a\sqrt{-1}.$$

89. Aplicación á la función X_n. Vamos á aplicar el método de Laplace á la función X_n para representar por una integral definida el coeficiente y_s de t^s en el desarrollo, según las potencias ascendentes de la variable, de una potencia cualquiera de una función racional y entera de t.

Partamos de la fórmula (4) (pág. 272), escrita bajo la forma

$$(n+1)\, X_{n+1} - 2n\, X_n\, x + (n-1)\, X_{n-1} = x X_n - X_{n-1},$$

y hagamos $X_n = \int y^{n-1} . \psi . dy$, siendo ψ una función arbitraria, y además n puede tener todos los valores enteros.

La sustitución conducirá á la igualdad

$$(n+1)\int y^n . \psi . dy - 2n\int y^{n-1} . \psi\, dy + (n-1)\int y^{n-2}\, \psi\, dy$$
$$= x\int y^{n-1} . \psi\, dy - \int y^{n-2} . \psi\, dy.$$

Integrando por partes el primer miembro, resulta

$$y^{n+1} . \psi - 2x\, y^n . \psi + y^{n-1}\, \psi = x\int y^{n-1}\, \psi . dy - \int y^{n-2}\, \psi . dy$$
$$+ \int y^{n+1} . d\psi - 2x\int y^n . d\psi + \int y^{n-1} . d\psi.$$

Si se iguala á cero la parte de esta ecuación bajo el signo integral, será

$$0 = xy^{n-1}\, \psi\, dy - y^{n-2}\, \psi . dy + y^{n-1} . d\psi - 2xy^n . d\psi + y^{n-1} . \psi,$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{y^{n-2} - xy^{n-1}}{y^{n+1} - 2xy^n + y^{n-1}}\, dy \quad \text{ó} \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{\dfrac{1}{y^3} - \dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2x}{y} + 1}\, dy,$$

é integrando

$$\psi = A\left(\frac{2x}{y} - 1 - \frac{1}{y^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = A\,\frac{y\sqrt{-1}}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

siendo A una constante arbitraria; y los límites de la integración estarán dados por la ecuación primera, reducida á

$$y^{n+1}\psi - 2xy^n\psi + y^{n-1}\psi = 0;$$

de donde

$$y = x - \sqrt{x^2 - 1}, \qquad y = 0, \qquad y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Se tiene pues

$$X_n = A\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{0} y^{n-1}\frac{y\sqrt{-1}\,dy}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ A'\int_{0}^{x+\sqrt{x^2-1}} y^{n-1}\frac{y\sqrt{-1}\,dy}{(1 - 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Haciendo $y = x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega$, los límites se reducirán á

$$\omega = 0, \qquad \omega = \text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \omega = \pi;$$

luego

$$X_n = A\int_{0}^{\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\,d\omega$$

$$+ A'\int_{\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\,d\omega.$$

Para determinar las constantes A y A′, haremos $n = 0$ y por ser $X_0 = 1$, se obtiene

$$1 = (A - A')\,\text{arc cos}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + A'\pi;$$

y puesto que esta relación ha de verificarse independientemente de x, es necesario que se tenga $A = A' = \frac{1}{\pi}$.

Las dos integrales se reducen á una sola y resulta

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\omega)^n\, d\omega.$$

90. Método de Jacobi. Por hallarse x comprendida entre -1 y $+1$, puede hacerse $x = \cos\varphi$, y escribir

$$u = (1 - 2\cos\varphi z + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z\cos\varphi)^2 + z^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Pero se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a + bi\cos\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{bi\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\,d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sec^2\omega\, d\omega}{b^2 + a^2\sec^2\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\sec^2\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\omega} = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{a\,d\operatorname{tg}\omega}{a^2 + b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\omega}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\infty} \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\, d\,.\operatorname{tg}\omega}{\frac{a^2}{a^2+b^2}\operatorname{tg}^2\omega + 1}$$

$$= \frac{4}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\omega\right)_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{bi\cos d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = 2\int_0^{\pi} \frac{bi\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = 0,$$

porque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 \cos^2\omega} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos\omega\, d\omega}{a^2 + b^2 \cos^2\omega}$;

luego $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

obtenida esta fórmula, resultará que

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - z\cos\varphi - z\,\mathrm{sen}\,\varphi i\cos\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{1 - z(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)}$$

y efectuando la división,

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \left\{ 1 + z(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega) + \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + z^n(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)^n + \ldots\ldots \right\}$$

Siendo X_n el coeficiente de z^n en el desarrollo de u, resulta

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega)^n\, d\omega;$$

pero, por ser $\cos\varphi = x$,

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\omega)^n\, d\omega;$$

ó bien $X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2}\cos\omega)^n\, d\omega.$

91. Empleo de la integral de Hermite. La integral de Hermite

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}\,(\lambda - y)} = \frac{\pi}{\sqrt{-1}\,\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

permite llegar á las formas de Laplace y Jacobi. En efecto, se deduce inmediatamente

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x^2-1}}\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,(\lambda-y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-\lambda^2}};$$

y si se hace $\lambda=\dfrac{x-z}{\sqrt{x^2-1}}$ è $y=\cos\omega$, resulta

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)-z};$$

luego $$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^{n+1}};$$

y cambiando z en $\dfrac{1}{z}$, se obtiene

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\omega}{1-(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)\,z},$$

$$X_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega)^n\,d\omega.$$

92. Método de Laurent. De la fórmula

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}=X_0+X_1z+\ldots\ldots+X_nz^n+\ldots\ldots$$

y haciendo $z=e^{\theta i}$ y $(1-2xe^{\theta i}+e^{2\theta i})^{\frac{1}{2}}=f(\theta)$, resulta

$$f(\theta)=X_0+X_1e^{\theta i}+\ldots\ldots+X_ne^{n\theta i}+\ldots\ldots$$

Integrando entre o y 2π después de haber multiplicando los dos miembros de este desarrollo por $\dfrac{1}{2\pi}e^{-n\theta i}\,d\theta$, se obtiene

$$X_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

y volviendo á la variable z

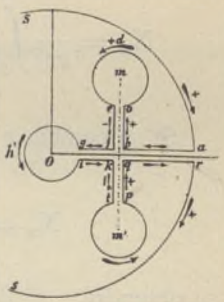
$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}},$$

hallándose tomada la integral alrededor del origen; X_n es pues el residuo de la función $\dfrac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$ relativo al polo $z = 0$.

La función bajo el signo integral presenta dos puntos críticos m y m' cuyas afijas son

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1}, \qquad z = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Tracemos el contorno *abcdefghiklnpqrsa* formado por una circunferencia de radio infinito unida á circunferencias de radio infinitamente pequeñas trazadas alrededor del polo y de los dos puntos críticos.



Permaneciendo la función sinéctica en el interior de este contorno, se tiene

$$\int_{abc.....sa} = 0.$$

Siguiendo el contorno en el sentido señalado, el radical $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$, que tiene el signo $+$ en a, tomará el signo $-$ después de la rotación *cde* y volverá á tomar el signo $+$ después de la rotación *lnp*. Entonces, señalando en la figura el signo de la integral el sentido de la flecha, se concluye la igualdad

$$\int_{ghi} = 2\int_{mm'} - \int_{lnp} + \int_{cde} - \int_{asr}.$$

Las tres últimas integrales valen cero, pues por el cálculo de los residuos

$$\int_{lnp} \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

$$= 2\pi i \lim \left[\left(z - x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \right]_{z = x - \sqrt{x^2-1}} = 0$$

lo mismo sucede respecto á la integral á lo largo de *cde*, é

$$\int_{asr} = 2\pi i \lim \left[z \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \right]_{z=\infty} = 0;$$

luego la integral alrededor del origen vale dos veces la integral á lo largo del contorno rectilíneo mm' que une los dos puntos críticos.

Si pues, hacemos $z = x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \omega$; como entonces $dz = -\sqrt{x^2 - 1} \operatorname{sen} \omega \, d\omega$ y $\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \pm \sqrt{1 - x^2} \operatorname{sen} \omega$, tendremos

$$X_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{ghi} = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\omega}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \omega\right)^{n+1}}.$$

Si se cambia z por $\frac{1}{z}$ en

$$X_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{ghi} \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}},$$

se obtendrá

$$X_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z^n \, dz}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}},$$

hallándose tomada la integral á lo largo de una circunferencia de radio infinito.

Por ser la nueva función sinéctica entre los mismos contornos, en virtud de análogas consideraciones, se tendrá

$$\int_{asr} = 2 \int_{mm'} \quad \text{y} \quad X_n = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \omega\right)^n d\omega. \text{ (*)}$$

(*) E. Brand. *Notice sur la théorie de la fonction* X_n *de Legendre.*

§ 3.° Expresión de los números de Bernoulli por integrales definidas

93. Integrando por partes, resulta

$$\int_0^1 (\log x)^n x^p \, dx = -\int_0^1 \frac{n}{p+1} (\log x)^{n-1} x^p \, dx =$$

$$= \ldots\ldots = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^n} \int_0^1 x^p \, dx = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Esto sentado, se tiene suponiendo $\alpha < 1$ y $x \leqq 1$,

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \ldots\ldots$$

Multipliquemos por $(\log x)^n \, dx$ é integremos desde 0 hasta 1; y tendremos

$$\int_0^1 \frac{(\log x)^n \, dx}{1-\alpha x} = n! \, (-1)^n \left(1 + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\ldots\right).$$

Si se hace $x = e^{-z}$, resulta

$$\int_0^\infty \frac{z^n \, dz}{e^z - \alpha} = n! \left(1 + \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha^2}{3^{n+1}} + \ldots\ldots\right).$$

El primer miembro es continuo con relación á α, y el segundo tiende hacia $n! \, s_{n+1}$; luego para $\alpha = 1$,

$$s_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{z^n \, dz}{e^z - 1}.$$

Pero $B_{2n} = \dfrac{2 s_{2n}}{(2\pi)^{2n}} (2n)!$; luego se tendrá

$$B_{2n} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}} (2n)! \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - 1} \quad \text{ó} \quad \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1} dz}{e^z - 1}.$$

CAPÍTULO III

Funciones eulerianas

§ 1.º La función gamma como límite de un producto

94. Preliminar histórico. La introducción en el Análisis de la función gamma se debe á Euler, aunque algunos resultados concernientes á esta función obtuvieron ya Wallis y Stirling; pero la Memoria de Gauss sobre la serie hypergeométrica señala un nuevo progreso en el estudio de dicha función, pues consideró á dicha transcendente como el límite, para $k = \infty$ del producto

$$\Pi(k, z) = \frac{k!}{(z+1)(z+2)\ldots\ldots(z+k)}\, k^z$$

Weierstrass, por fin, reconoció el carácter propio de la inversa de la función gamma, $\Gamma(x)$, á que llamó *factorial de x*.

La doctrina de Euler y Legendre tiende á expresar las numerosas relaciones que ligan á dicha función con las integrales definidas. Pero la definición de Gauss tiene la ventaja de gran generalidad, porque la variable solo tiene la condición restrictiva de no ser igual á un número negativo y además permite establecer todas sus propiedades de una manera más concisa, más rigurosa, más natural. (*)

95. Definiciones. La expresión

$$\Pi(x) = n^x \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)} \qquad (1)$$

(*) Maurice Godefroy. *La fonction gamma*. Introduction.

tiende hacia un límite cuando n aumenta indefinidamente, para cualquier valor de x que no sea nulo ni entero negativo. En efecto de $n = \dfrac{2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-1)}$ resulta

$$n^x = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2}\right)^x \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^x,$$

de manera que el producto $\Pi(x)$ puede escribirse bajo la forma

$$\Pi(x) = \frac{1}{x} \frac{\left(1 + \frac{1}{1}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2}\right)^x \ldots\ldots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^x}{\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{x}{n}\right)}.$$

Tomando los logaritmos, se obtiene que $x\,\Pi(x)$ es igual á

$$\sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{x}{p} - \log\left(1 + \frac{x}{p}\right)\right]$$

$$- x \sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{1}{p} - \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] - x \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

expresión en la que la segunda suma se deduce de la primera haciendo en ésta $x = 1$. Pero desde que n excede al mayor entero contenido en el módulo de x, se tiene

$$\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \ldots\ldots,$$

luego, si r es un entero positivo tan grande como se quiera, cuando se sustituye en este desarrollo x por r, y todos los coeficientes por la unidad resulta que

$$\left|\frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| < \frac{r^2}{n(n-r)},$$

que se verifica á partir de $n = r + 1$, si el módulo de x permanece inferior á r. Así la serie

$$\left[\frac{x}{1} - \log\left(1 + \frac{x}{1}\right)\right] + \left[\frac{x}{2} - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right] + \ldots\ldots$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo valor de x interior al círculo de radio r que no sea igual á un entero negativo. En particular, para $x = 1$, la serie positiva

$$\left[\frac{1}{1} - \log\left(1 + \frac{1}{1}\right)\right] + \left[\frac{1}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right] + \ldots\ldots$$

es convergente. Su suma, que expresaremos por ρ, se llama *constante de Euler.*

Resulta pues, lo que nos proponíamos demostrar. El límite del producto $\Pi(x)$ es una función transcendente de x que se llama *función gamma* y se representa por el símbolo $\Gamma(x)$, que empleó Legendre por vez primera. La constante de Euler, que es el límite para $n = \infty$ de la expresión

$$\rho_n = s_n - \log n,$$

en la que s_n expresa la suma de los n primeros términos de la serie armónica, representa en la teoría de la función gamma el mismo papel que el número π en la teoría de las funciones circulares. Su valor es

$$\rho = 0{,}5772156649015328606 \ldots\ldots$$

Weierstrass en su Memoria sobre las *facultades analíticas*, llama *factorial de x* á la inversa de $\Gamma(x)$, y la escribe bajo la forma siguiente:

$$\mathrm{F}c(x) = x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^x, \tag{2}$$

que se deduce de la igualdad

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x}\,\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots n},$$

obteniéndose

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[\frac{x+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$$

$$\times\left[\frac{x+2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\ldots\ldots\left[\frac{x+n-1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],$$

y haciendo $n=\infty$.

Podremos demostrar más brevemente la convergencia de la expresión (1) que define $\Gamma(z)$ escribiendo

$$\log\Gamma(x) = \log 2 + \log 3 + \ldots\ldots + \log(n-1) + \log n$$
$$+(x-1)\log n - \log x - \log(x+1) - \ldots - \log(x+n-1),$$

$$\log x + \log\Gamma(x) = x\log n - \log(x+1)$$
$$-\log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ldots\ldots - \log\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Sustituyendo $\log n$ por

$$\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \ldots\ldots + \log\frac{n}{n-1}$$

tendremos que

$$\log x\,\Gamma(x) = [x\log 2 - \log(1+x)]$$
$$+\left[x\log\frac{3}{2} - \log\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] + \ldots\ldots$$
$$=\sum_1^\infty\left[x\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)\right].$$

Pero

$$u_p = x\log\left(1+\frac{1}{p}\right) - \log\left(1+\frac{x}{p}\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3}\ldots\ldots\right) - \left(\frac{x}{p} - \frac{x^2}{2p^2} + \frac{x^3}{3p^3}\ldots\ldots\right).$$

Luego la serie es absolutamente convergente.

96. Fórmula de Weierstrass. Se tiene

$$\frac{1}{\Pi(x)} = \frac{1}{n^x} \frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}{1.2\ldots\ldots n},$$

ó, designando por s_n la suma de los n primeros términos de la serie armónica,

$$\frac{1}{\Pi(x)} = x\left(\frac{e^{s_n}}{n}\right)^x\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]$$

$$\times\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\right]\ldots\ldots\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right].$$

Sea $\lambda_n = \frac{e^{s_n}}{n}$. Tomando los logaritmos, se obtiene

$$\log \lambda_n = s_n - \log n.$$

Cuando n crece indefinidamente, el límite del segundo miembro de esta igualdad es la constante de Euler ρ, y por consiguiente

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\rho x}\left[\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\right]\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right]\ldots\ldots$$

Esta expresión, que puede servir para definir la función gamma, da la descomposición de su inversa en factores primarios y fué obtenida por Weierstrass.

Si consideramos la fórmula

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \prod_{n-1}^{n-\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}},$$

se ve que $\Gamma(x)$ se halla formada por la mitad de los factores que constituyen la función simplemente periódica sen πx.

Este hecho conduce á imaginar funciones formadas con la mitad ó aun la cuarta parte de factores que constituyen ciertas funciones doblemente periódicas, como las funciones de Heine, la función gamma doble de Barnes, etc.

La fórmula de Weierstrass manifiesta que la función $\Gamma(x)$

es *meromorfa* (semejante á las fracciones racionales) para todo valor finito de x, pues admite como puntos singulares tan solo polos simples, correspondientes á los valores, $0, -1, -1, \ldots\ldots$ $n, \ldots\ldots$ de la variable x, siendo $x = \infty$ un punto singular esencial.

97. Teorema. *La inversa de la función gamma es desarrollable en una serie entera de radio de convergencia infinito*, pues descomponiéndose dicha función inversa en factores primarios, ésta función es desarrollable en una serie entera convergente en todo el plano.

Weierstrass demostró esta proposición de la manera siguiente:

Si hacemos $\quad 1 + u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}, \quad$ resulta

$$u_n = -\frac{1}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{n^2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{x^3}{n^3} - \ldots\ldots$$

$$- (-1)^p \frac{p-1}{n!} \frac{x^p}{n^p} - \ldots\ldots$$

Si r es el módulo de x, y consideramos la serie positiva

$$a_n = \frac{1}{2!} \frac{r^2}{n^2} + \frac{2}{3!} \frac{r^3}{n^3} + \ldots\ldots + \frac{p-1}{p!} \frac{r^p}{n^p} + \ldots\ldots,$$

cuyos coeficientes son menores que la unidad, desde que n llega al entero m inmediatamente superior á r, se tiene

$$a_n < \frac{r^2}{n(n-2)};$$

luego la serie positiva de término general a_n es convergente.

El producto infinito de término general $1 + u_n$ es por tanto desarrollable en una serie entera convergente para todo valor de la variable; luego la inversa de $\Gamma(x)$ es una función transcendente entera.

La función Γ se llama *función euleriana de segunda especie.*

§ 2°. Propiedades de las funciones eulerianas de segunda especie

98. Relación funcional. Se tiene que

$$\Pi(x+1) = n^{x+1} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n+1)}$$

$$= \frac{nx}{n+x+1}\,\Pi(x); \qquad (1)$$

luego, para $n = \infty$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Esta relación se llama *relación funcional*. Si en ésta se sustituye sucesivamente x por $x+1$, $x+2$, ..., $x+m-1$, tendremos

$$\Gamma(x+2) = (x+1)\,\Gamma(x+1), \quad \dots\dots$$

$$\Gamma(x+m) = (x+m-1)\,\Gamma(x+m-1),$$

y si m es un entero positivo,

$$\Gamma(x+m) = x(x+1)\dots\dots(x+m-1)\,\Gamma(x).$$

Sea x un valor real de la variable exterior al intervalo $(0, 1)$. Designando por m el entero positivo inmediatamente inferior á x ó superior á $-x$, según que x sea positivo ó negativo, la fórmula precedente permite reducir el cálculo de $\Gamma(x)$ á la determinación de esta función para un valor de x interior al intervalo $(0, 1)$. En efecto, si x es positivo, se tiene

$$\Gamma(x) = (x-m)(x-m+1)\dots\dots(x-1)\,\Gamma(x-m).$$

Si x es negativo, se puede hacer

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots\dots(x+m-1)}\,\Gamma(x+m).$$

Si la variable es un entero $m+1$, se tiene

$$\Gamma(m+1) = 1 \,.\, 2 \dots\dots m.$$

De la fórmula (I) resulta

$$\log \Gamma(x+1) = x \log n - \log(1+x)$$
$$- \log\left(1+\frac{x}{2}\right) \ldots\ldots - \log\left(1-\frac{x}{n}\right),$$

aumentando n indefinidamente. Si se supone x menor que 1, se pueden ordenar los logaritmos en series ordenadas según las potencias de x, y resulta

$$\log(x+1) = -x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}x^3\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^3}\right)+\ldots\ldots$$

Y haciendo para $n=\infty$

$$S_m = \lim\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^m}\right)$$

y $$C = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}-\log n,$$

se tendrá

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{1}{2}S_2x^2 - \frac{1}{3}S_3x^3 + \frac{1}{4}S_4x^4 + \ldots.$$

99. Módulo de $\Gamma(\alpha+\beta i)$. Si la variable es imaginaria, se puede reducir su parte real á hallarse comprendida entre 0 y 1. Sea pues $x=\alpha+\beta i$, siendo $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Se tendrá

$$\frac{1}{|\Gamma(\alpha+\beta i)|} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\rho\alpha} \prod_{n=1}^{n=\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{n}};$$

pero
$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{n}}$$
$$=\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$
por otra parte
$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}=e^{\alpha\rho}\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}},$$
y el producto $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]$ está comprendido entre los productos $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(n+1)^2}\right]$, $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{n^2}\right]$, que corresponden á los dos valores extremos de α, siendo sus límites
$$\frac{1}{1+\beta^2}\,\frac{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}{2\beta\pi},\quad \frac{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}{2\beta\pi};$$
se puede pues hacer por lo tanto,
$$|\Gamma(\alpha+\beta i)|=\lambda\,\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}},$$
siendo $1<\lambda<\sqrt{1-\beta^2}$, resultado debido á Herr. M. Lerch.

Cuando $\alpha=0$, λ se reduce á 1, y se obtiene la fórmula de Stieltjes,
$$|\Gamma(\beta i)|=\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\beta\pi}{e^{\beta\pi}-e^{-\beta\pi}}}.$$

100. Límite para $n=\infty$ de la expresión $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+1)}{1.2\ldots(n-n)}$.

Se tiene $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!}=\frac{1}{n^x}\frac{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}{(n-1)!}\Gamma(x)$,

es decir,
$$\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!}=\frac{n}{n+x}\frac{\Gamma(x)}{\Pi(x)}.$$

El límite de $\frac{1}{n^x}\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!}$ para $n=\infty$ es la unidad. Este resultado debido á Weierstrass, juntamente con la relación funcional bastan para caracterizar á la función gamma (*).

101. Propiedades principales. Podemos fundándonos en la relación

$$\varphi(n, x)=\frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)}$$

escribir que $\Gamma(x)=\lim\varphi(n, x)$, lo que nos permitirá enunciar las siguientes propiedades:

I. La igualdad $\dfrac{\varphi(n, x+1)}{\varphi(n, x)}=\dfrac{nx}{n+x}$,

conduce, pasando al límite, á la fórmula ya establecida

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{1}$$

II. Sustituyento en (1) x por $1, 2, \ldots\ldots p$, tendremos

$$\Gamma(2)=1,\ \Gamma(3)=2,\ \Gamma(4)=2.3,\ \ldots\ldots\Gamma(p)=(p-1)! \tag{2}$$

III. Hagamos $x=\frac{1}{2}$. Tendremos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\frac{n!}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}$$
$$=\lim\frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\sqrt{n}};$$

(*) Godefroy *La fonction gamma.*

Pero la fórmula de Wallis puede escribirse bajo la forma

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)\sqrt{2n+1}};$$

luego $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

IV. El producto $\varphi(n, x)\,\varphi(n, 1-x)$ puede escribirse así:

$$\frac{1}{x\left(1-\frac{x}{n}\right)(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left[1-\frac{x^2}{(n-1)^2}\right]};$$

luego, aplicando la fórmula

$$\text{sen}\,\pi x = \pi x \prod_0^\infty \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),$$

podremos escribir $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\text{sen}\,\pi x}$.

Corolario. Multiplicando las igualdades

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\text{sen}\,\frac{\pi}{n}}, \quad \ldots\ldots,$$

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\text{sen}\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi}$$

resulta

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\text{sen}\,\frac{\pi}{n} \ldots \text{sen}\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi}.$$

Para obtener la expresión del denominador del segundo miembro, hagamos sucesivamente $x = 1$ y $x = -1$ en la identidad

$$\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\left(1-2x\cos\frac{2\pi}{2n}+x^2\right)\left(1-2x\cos\frac{4\pi}{2n}+x^2\right)\ldots\ldots$$

$$\left(1-2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n}+x^2\right)$$

y tendremos

$$n=\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^2\ldots\ldots\left(2\operatorname{sen}\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

$$n=\left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\ldots\ldots\left(2\cos\frac{n-1}{n}\right)^2$$

de las que resulta

$$n=2^{n-1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Por consiguiente

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}.$$

Observación. Suponiendo $x<1$, de

$$\Gamma(x+n)=x(x+1)\ldots\ldots(x+n-1)\Gamma(x)$$

y $\Gamma(n+1-x)=(1-x)(2-x)\ldots\ldots(n-x)\Gamma(1-x),$

resulta

$$\Gamma(x+n)\Gamma(n+1-x)=x(1^2-x^2)(2^2-x^2)(3^2-x^2)\ldots\ldots$$

$$[(n-1)^2-x^2](n-x)\frac{\pi}{\operatorname{sen}x\pi}.$$

V. En virtud del teorema ya demostrado (pág. 168):

Si en dos series divergentes ordenadas según las potencias ascendentes de la variable, la relación de los coeficientes de la potencia m^sima^ *de la variable tiende hacia un límite finito* l, *las dos series se hallan en la misma relación*, podremos expresar $\Gamma(x)$

por medio de una integral definida. En efecto, las dos series son

$$f(z) = 1^{x-1}z + 2^{x-1}z^2 + 3^{x-1}z^3 + \ldots\ldots$$

$$\varphi(z) = (1-z)^{-x} = 1 + \frac{x}{1}z + \frac{x(x+1)}{1.2}z^2 + \ldots\ldots$$

que son divergentes para $x > 0$ y $\lim z = 1$.

La relación de los coeficientes de z^n es la función designada por $\varphi(n, x)$. Tenemos pues, suponiendo $z = \infty$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \varphi(n, x) = \lim_{z=1} \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

$$= \lim_{x=1} [1^{x-1}z + 2^{x-1}z^2 + \ldots\ldots](1-z)^x.$$

Sea $z = e^{-h}$; podemos hacer

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{(1-e^{-h})^x}{h}[h^{x-1}e^{-h} + (2h)^{x-1}e^{-2h}$$

$$+ (3h)^{x-1}e^{-3h} + \ldots\ldots] h.$$

Cuando z tiende hacia 1, h tiende hacia cero. El primer factor tiende pues hacia 1. En cuanto al producto de la cantidad entre paréntesis por h, tiende por definición, hacia

$$\int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz;$$

luego $$\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz.$$

102. Otra forma de la función Γ. Hagamos $e^{-x} = y$, de donde $e^{-x}dx = -dy$, $x = \log \frac{1}{y}$, correspondiendo los límites 0 é ∞ de x á los límites 1 y 0 de y. Por consiguiente

$$\int_0^\infty e^{-x} . x^{z-1} dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{z-1} dy.$$

Podemos pues escribir

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{y}\right)^{a-1} dy.$$

Valores particulares. Haciendo $a = 1$ y $a = 2$,

$$\Gamma(1) = \int_0^1 dy = 1, \quad \Gamma(2) = -\int_0^1 \log y dy = 1.$$

103. Aplicación del teorema de Riemann. *Si dos funciones uniformes* U *y* V *que tienen un número cualquiera finito ó infinito de polos ó puntos singulares esenciales, coinciden á lo largo de un elemento de magnitud finita, tan pequeño como se quiera, son necesariamente idénticas.*

Consideremos la diferencia U — V (*), que es una función uniforme nula á lo largo del elemento dado, y que será nula, por consiguiente, para todos los puntos situados en el interior de un contorno que no contenga ninguna discontinuidad de U ó de V, porque en el interior de tal contorno, U — V es una función holomorfa. Aumentemos este contorno, haciéndolo pasar por la proximidad de un punto de discontinuidad a de U ó V, pues no puede ser un polo, porque á una distancia suficientemente pequeña de este punto, la función se hace mayor que cualquier cantidad dada, debiendo ser nula para todos los puntos tan próximos como se quiera, ni puede ser un punto esencial, porque en la proximidad de dicho punto, una función uniforme es absolutamente indeterminada. La función U — V no admite pues, discontinuidades; y siendo nula en un elemento finito, es nula en todo el plano.

El teorema de Riemann manifiesta que una función dada á lo largo de una línea de magnitud finita, solo puede extenderse más allá de una manera, si se le impone la condición de ser uniforme y tener tan solo discontinuidades en puntos aislados. Se puede pues concluir que una parte tan pequeña como se

(*) Hermite *Cours d'Analyse*, p. 88.

quiera de una curva algebráica de grado conocido, la determina completamente en toda su extensión.

El ilustre Hermite aplicó este teorema al estudio de la integral euleriana de segunda especie, como sigue:

Sea $$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Hallemos en primer lugar los valores de z para los que esta integral define una función.

Limitándonos desde luego á los valores reales, vemos que en el límite inferior o, la función bajo el signo $\int$ es finita para $z > 0$ pero se hace infinita para z negativo (*); y para que la integral $\int_\varepsilon^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ tenga un límite finito cuando ε tiende hacia cero, z debe ser positivo.

Esto sentado, escribamos

$$\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{z-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

La primera integral del segundo miembro es finita, porque $z > 0$. La segunda aumenta con z, porque para todo valor de x superior á 1, $x^{z-1}e^{-x}$ crece con z. Pero cuando z es igual á un número entero $n + 1$, se obtiene para $\Gamma(n+1)$ el valor finito $1 . 2 . 3 \ldots\ldots n$, pues integrando por partes, se tiene

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Ahora bien, $x^n e^{-x}$ se anula para $x = 0$ y también para $x = \infty$, porque siendo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} + \ldots\ldots + \frac{x^i}{1 . 2 \ldots\ldots i} + \ldots\ldots,$$

(*) Si tuviésemos que $n = -p$, sería

$$\int_a^1 e^{-x} \frac{dx}{x^{1+p}} > \int_a^1 \frac{1}{e} \frac{dx}{x} = \frac{1}{e} \log \frac{1}{a};$$

y para $a = 0$, $\frac{1}{e} \log \frac{1}{a}$ es infinito; luego lo será la integral última, y con mayor razón la dada.

se tiene, cualquiera que sea i,

$$e^x > \frac{x^i}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots i}, \quad \text{y por consiguiente} \quad x^{-n} e^x > \frac{x^{2-n}}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots i};$$

de manera que si se hace $i > n$, lo que es permitido, el segundo miembro se hace infinito para $x = \infty$; luego el producto $x^{-z}e^x$ se hace infinito, y por consiguiente su inverso $x^z e^{-x}$ se hace nulo para $x = \infty$. Integrando pues entre o é ∞ resulta

$$\int_0^\infty x^z e^{-x} dx = z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx;$$

ó $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, y análogamente

$$\Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma(z-1),$$

$$\Gamma(z-1) = (z-2)\,\Gamma(z-2) \ldots\ldots \Gamma(2) = 1\,\Gamma(1).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Volviendo al razonamiento de Hermite, se concluye que para todos los valores positivos de z, y solo para ellos, la integral $\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ define una función $\Gamma(z)$.

Supongamos que z sea imaginaria de la forma $\alpha + i\beta$. Tendremos

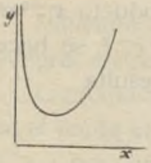
$$\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{lx(\alpha-1+i\beta)}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \cos l(x^\beta)\, dx + i \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \operatorname{sen} l(x^\beta)\, dx,$$

tomándose el logaritmo en el sentido aritmético, y se ve que las dos integrales solo serán finitas, suponiendo $\alpha > 0$. Esta condición que es necesaria, es también suficiente; y por tanto, la función uniforme representada por la integral euleriana de segunda especie solo existe en la mitad del plano que se encuentra á la derecha del eje oy.

Observación. La fórmula $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ que permite disminuir el argumento en una unidad y por consiguiente en tantas unidades como se quiera, permitirá reducir á z á hallarse comprendida entre 0 y 1.

Con auxilio de la fórmula $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$ se reducirá á z á estar comprendida entre 0 y $\frac{1}{2}$, y bastará tener una tabla de los valores de argumento comprendido entre estos dos últimos límites, representándose la curva en la figura adjunta, para una variación de z desde 0 hasta ∞.



El mínimo de $\Gamma(z)$, que es igual á 0,8856032 corresponde á $z = 1{,}4616321$.

La igualdad $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}$, hace ver que $\Gamma(z) = \infty$ para x infinitamente próxima á cero; y también observaremos que de la fórmula $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ resulta la siguiente

$$\Gamma(z+p) = (z+p-1)(z+p-2)\ldots\ldots z\,\Gamma(z),$$

deduciéndose que la integral euleriana de segunda especie es infinita al mismo tiempo que el argumento.

104. FUNCIONES DE PRYM. Hagamos

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \mathrm{P}(z) + \mathrm{Q}(z),$$

$$\mathrm{P}(z) = \int_0^\omega x^{z-1} e^{-x} dx, \qquad \mathrm{Q}(z) = \int_\omega^\infty x^{z-1} e^{-x} dx,$$

designando ω una función cualquiera positiva. La integral $\mathrm{Q}(z)$ define una función analítica de z en toda la extensión del plano, cualquiera que sea el valor real ó imaginario de z, pues hemos visto que la circunstancia del límite cero de la integral $\int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$ obligaba á suponer que z fuese positiva. La función $\mathrm{Q}(z)$ es pues finita, continua y uniforme en todo el plano, es decir, una función holomorfa. La función $\mathrm{P}(z)$ está dada por la integral $\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ tan solo en la mitad del plano, á la derecha de Oy. Pero, sustituyendo e^{-x} por su desarrollo en serie convergente, $1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$ se obtiene la siguiente expresión:

$$P(z) = \frac{\omega^z}{z} - \frac{\omega^{z+1}}{z+1} + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{\omega^{z+2}}{z+2} - \ldots\ldots$$

$$\text{ó} \quad P(z) = \omega^z \left[\frac{1}{z} - \frac{\omega}{z+1} + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2 (z+2)} - \ldots\ldots\right].$$

Además esta serie obtenida por medio de la integral

$$\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx,$$

en la que debe suponerse positiva la parte real de z, es convergente para todo valor real ó imaginario de z, por lo que define una función analítica uniforme.

Designándola por P(z), tenemos la fórmula

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

que nos da la expresión general de la función euleriana obtenida por Herr Prym. Se observará que P(z) representa la parte fraccionaria ó meromorfa de $\Gamma(z)$, que pone en evidencia los polos $z = 0, -1, -2, \ldots\ldots$ Se ve además que los numeradores de las fracciones parciales se reducen á constantes. La parte meromorfa y la parte entera de $\Gamma(z)$ se reducen á

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{1 \cdot 2 (z+2)} - \ldots + \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \ldots (z+n)} + \ldots$$

y

$$Q(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx.$$

Podremos obtener las funciones de Prym determinando la forma de las funciones $F(z)$ que satisfacen á la relación funcional

$$F(z+1) - z\,F(z) = A, \tag{1}$$

en la que A expresa una constante, y tales, que sea igual á una contante B, para $n = \infty$, el límite de la expresión

$$\frac{1}{n^x} \frac{F(z+n)}{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, n}$$

Si suponemos que esté satisfecha la relación funcional, tendremos

$$F(z) = \frac{1}{z} F(z+1) - A \frac{1}{z},$$

$$F(z+1) = \frac{1}{z+1} F(z+2) - A \frac{1}{z+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(z+n) = \frac{1}{z+n} F(z+n+1) - A \frac{1}{z+n};$$

y si se suman estas igualdades, multiplicadas respectivamente por las razones

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z(z+1)}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{z(z+1) \ldots\ldots (z+n-1)};$$

tendremos

$$F(z) = \frac{F(z+n+1)}{z(z+1) \ldots\ldots (z+n)}$$

$$- A \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{z(z+1) \ldots\ldots (z+n)} \right]$$

pero

$$\frac{F(z+n+1)}{z(z+1) \ldots\ldots (z+n)} = \frac{1}{n} \frac{A + (z+n)\,F(z+n)}{n^z \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots\ldots (n-1)}\, \Pi(x);$$

y siendo $B\,\Gamma(z)$ el límite de esta expresión, si se representa por $S(z)$ el límite de la serie convergente

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \ldots\ldots;$$

se tiene $F(z) = B\,\Gamma(z) - A\,S(z)$.

Esta es la forma general de las funciones $F(z)$, de las que la función gamma es la más sencilla, la cual corresponde al caso de ser $A = 0$ y $B = 1$.

Si ahora, en la relación funcional

$$F(z+1) = A + z\,F(z)$$

se sustituye z sucesivamente por $z-1$, $z-2$, $\ldots\ldots$, $z-m$, se deducirá

$$F(z) = A + (z-1)\,F(z-1),$$

$$F(z-1) = A + (z-2)\,F(z-2), \quad \ldots\ldots$$

$$F(z-m+1) = A + (z-m)\,F(z-m).$$

Multiplicando estas igualdades respectivamente por los productos 1, $z-1$, $(z-1)(z-2)$ $\ldots\ldots$, se obtiene

$$F(z) = A[1 + (z-1) + (z-1)(z-2) + \ldots + (z-1)\ldots(z-m+1)$$

$$+ (z-1)(z-2)\ldots\ldots(z-m)\,F(z-m)],$$

de donde, para $z = m+1$, siendo m entero positivo,

$$F(m+1) = A\,[1 \,.\, 2 \ldots\ldots m + 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m + \ldots\ldots$$

$$+ (m-1)\,m + m + 1] + 1 \,.\, 2 \ldots\ldots m\,(B - A\,e).$$

La serie $S(z)$ es el producto de dos series. En efecto, quitando denominadores en

$$\frac{1}{z(z+1)\ldots\ldots(z+n)} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z+1} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{z+n},$$

y haciendo después z igual á 0, -1, -2, ..., se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{n!}, \quad a_1 = -\frac{1}{1}\frac{1}{(n-1)!}, \quad a_2 = \frac{1}{n!}\frac{1}{(n-2)!}, \quad \ldots\ldots;$$

luego

$$\frac{1}{z(z+1)\ldots.(z+n)} = \frac{1}{n!}\frac{1}{z} - \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{1}\frac{1}{z+1}$$

$$+ \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} - \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{n!(z+n)}$$

que es el término general del producto de

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots$$

y
$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z+2} + \ldots\ldots$$

Se designa por $P(z)$ la suma de esta última y por $Q(z)$ la diferencia entre $P(z)$ y $\Gamma(z)$, de modo que

$$P(z) = \frac{1}{e}S(z), \quad Q(z) = \Gamma(z) - P(z);$$

las funciones $P(z)$ y $Q(z)$ son las *funciones de Prym* (*).

La función $\Gamma(z)$ se presenta como la suma de las funciones $P(z)$ y $Q(z)$, reduciéndose la expresión general de las funciones $F(z)$ á

$$F(z) = (B - Ae)P(z) + BQ(z).$$

La función $F(z)$ se reduce á la una ó á la otra de las funciones de Prym, según que se elije por constantes arbitrarias A y B los números

$$A_1 = \frac{1}{e}, \quad B_1 = 0 \quad \text{ó} \quad A_2 = \frac{1}{e}, \quad B_2 = 1.$$

(*) *Jour. für die reine und angew.* Maht. t. LXXXII. Godefroy. *La fonction gamma.*

La descomposición de la función gamma en funciones de Prym constituye una aplicación del teorema de Mittag-Leffler, pues no admitiendo como puntos singulares más que los polos simples $z = 0$, $z = -1$, $z = -2$, ... y el punto singular $z = \infty$, se ve que la serie

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{z+2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{x+n} + \dots$$

es uniformemente convergente para todo valor de z distinto de cero ó de un entero negativo; porque si r es un entero positivo tan grande como se quiera, la desigualdad

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{z+n} \right| < \frac{1}{n!}\frac{1}{n-r}$$

se verifica para todo valor de z correspondiente al interior del círculo de radio r, que no es igual á cero ni á un entero negativo. Así, la serie precedente representa la parte meromorfa de $\Gamma(z)$, mientras que la diferencia

$$Q(z) = \Gamma(z) - P(z)$$

es holomorfa en todo el plano (*).

105. Representación analítica de Gauss. Consideremos la integral definida

$$\int_0^1 x^{z-1} dx = \frac{1}{z} \quad \text{ó} \quad \int_0^1 x^z dx = \frac{1}{z+1}$$

siendo z un número positivo. Restando, tendremos

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)\,dx = \frac{1}{z(z+1)}.$$

Repitamos la misma operación y tendremos

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^2\,dx = \frac{2}{z(z+1)(z+2)}$$

(*) Godefroy. Obra citada, p. 23.

y en general,

$$\int_0^1 x^{z-1}(1-x)^n\,dx = \frac{1 \,.\, 2 \,.\,.\,.\,.\,.\, n}{z(z+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(z+n)}.$$

Sustituyamos x por $\frac{x}{n}$ en la integral, y tendremos sucesivamente

$$\int_0^n x^{z-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\,.\,.\,.\,.\,.\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx = \lim\left[\frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)}\right]_{n=\infty}$$

fórmula obtenida por Euler y hallada también por Gauss, que constituyen una definición de la función gamma, y ofrece la ventaja de presentar una significación determinada, cualquiera que sea el valor positivo, negativo, real ó imaginario de z.

106. Consecuencias de la representación de Gauss. Tomando la última expresión bajo la forma

$$l\Gamma(z) = zln - lz - l\left(1+\frac{z}{1}\right) - \,.\,.\,.\,.\,.\, - l\left(1+\frac{z}{n}\right)$$

la expresión de la derivada respecto á z será

$$D_z \log\Gamma(z) = \log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \,.\,.\,.\,.\,.\, - \frac{1}{z+n}$$

y derivando una vez más, resulta

$$D_z^2 \log\Gamma(z) = \lim\left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+n-1)^2} + \ldots\right]$$

en la que el segundo miembro es una serie absolutamente convergente, para cualquier valor real ó imaginario de z. Podemos pues integrar entre 0 y 1 y escribir

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = D\log\Gamma(z) = -C + \left(1-\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+1}\right) + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1}\right) + \ldots\ldots \qquad (1)$$

D log $\Gamma(z)$ se presenta bajo la forma de una serie absolutamente, porque su término general es

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n-1} = \frac{z-1}{n(n+z-1)}.$$

De la fórmula (1) resulta que la constante C de Euler se presenta bajo la forma $C = -\Gamma'(1)$. Y por ser

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \log x \,.\, e^{-x} dx$$

resulta
$$C = -\int_0^\infty \log x \,.\, e^{-x} dx.$$

Para obtenerla bajo otra forma más cómoda, hagamos $z = 1$ y tendremos

$$-\Gamma'(1) = C = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Cambiando z en $z+1$ en (1), resulta

$$D \log \Gamma(z+1) = -C + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) + \ldots\ldots$$

Integremos entre o y z, y resultará

$$\log \frac{1}{\Gamma(z+1)} = C_1 + Cz + [\log(z+1) - z] + \ldots\ldots$$

$$+ \left[\log(z+1) - \frac{z}{n}\right] = Cz + [\log(z+1) - z] + \ldots\ldots$$

$$+ \left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right] + \ldots\ldots$$

Las derivadas sucesivas son

$$\frac{1}{1}\,\frac{d^2 \log \Gamma(z)}{dz^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \cdots\cdots$$

$$-\frac{1}{1\,.\,2}\,\frac{d^3 \log \Gamma(z)}{dz^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+2)^3} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^4 \log \Gamma(z)}{dz^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{(z+1)^4} + \frac{1}{(z+2)^4} + \cdots\cdots$$

Considerando la fórmula

$$\mathrm{D} \log \Gamma(x+1) = \frac{d \log \Gamma(z+1)}{dz} = -\,\mathrm{C} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{z+1}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z+2}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right) + \cdots\cdots$$

é integrando entre los límites 0 y x, se tiene

$$\log \Gamma(z+1) = -\,\mathrm{C}z + [z - \log(z+1)]$$
$$+ \left[\frac{z}{2} - \log\left(1 + \frac{z}{2}\right)\right] + \cdots\cdots$$

$$\Gamma(z+1) = e^{-\mathrm{C}z}\,\frac{e^z}{1+z}\,\frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+\frac{z}{2}} \cdots\cdots = e^{\mathrm{C}z}\,\Pi\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{e^{-\frac{z}{n}}}$$

ó su inversa, cambiando los signos de los exponentes.

La función $\dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$ es pues monódroma y monógena en toda la extensión del plano y el punto en el infinito es un punto esencial. Se obtiene el desarrollo de $\dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$ según las potencias de z observando que

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\mathrm{C}z + \frac{1}{2} s_2 z^2 + \frac{1}{3} s_3 z^3 - \cdots\cdots}$$

$$= e^{Cz}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}s_2z^2 - \frac{1}{3}s_3z^3 \ldots\ldots\right) + \ldots\ldots\right]$$

$$= e^{Cz}\left[1 - \frac{1}{2}s_2z^2 + \frac{1}{3}s_3z^3 + \ldots\ldots\right].$$

107. FÓRMULA DE EULER. Euler estableció la siguiente fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-nz+\frac{1}{2}}\Gamma(nz). \quad (1)$$

Para demostrarla, observaremos que el primer miembro es el límite de

$$\varphi(p, z)\,\varphi\left(p, z+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\varphi\left(p, z+\frac{n}{n-1}\right)$$

para $p = \infty$. Además el producto

$n^{-nz}\varphi(pn, nz)$ se reduce á $n^{-nz}\Gamma(nz)$

para $p = \infty$; y el cociente de los dos productos $\dfrac{p!^n n^{np+1}}{(np)!\,p^{\frac{n-1}{2}}}$ es independiente de z. Debemos pues hallar el límite de esta fracción para p infinito, ó calcular dicho cociente para un valor particular de z. Hagamos $z = 1$, y calculemos

$$Q = \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}{n^{-n}\Gamma(n)}.$$

El valor del denominador es $n^{-n}(n-1)!$. El numerador equivale en virtud de $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, á

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\frac{n-1}{n}\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Pero en virtud de IV (pág. 302).

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}},\quad \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}\ldots.$$

$$\ldots.\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Y multiplicando estas igualdades, en virtud de la fórmula que da el producto de senos, será

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\ldots.\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{n\,2^{1-n}}}.$$

Por último, se tendrá

$$Q=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\,2^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{n^n}{(n-1)!}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}},$$

que demuestra la fórmula de Euler.

Esta fórmula permite calcular la integral

$$I=\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx.$$

En efecto; se tiene por definición $\operatorname{sen} nh=1$.

$$I=\lim\left[h\log\Gamma h+h\log\Gamma(2h)+\ldots..+h\log\Gamma(nh)\right]$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\log\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma(n-1)}{n}$$

$$=\lim\frac{\frac{n-1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2}\log n}{n}=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

ó

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx=\log\sqrt{2\pi}.$$

Se demuestra de una manera análoga la fórmula de Raabe

$$\int_0^{n+1} \log \Gamma(x)\, dx = a \log (a - 1) + \log \sqrt{2\pi}.$$

108. Consecuencias. Podemos llegar también á obtener la fórmula (1) y á otras propiedades que constituyen la base de la teoría de las funciones eulerianas de segunda especie, según Hermite, considerando la expresión

$$F(z+1) - F(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Podemos escribir además

$$F(z) + F(1-z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

lo que manifiesta que el segundo miembro es una función periódica, cuyo período es 1. Pero diferenciando la igualdad

$$\pi \cot z\pi = \frac{1}{z} + \Sigma \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n}\right),$$

en la que n adquiere todos los valores positivos y negativos, excepto el cero, resulta

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \sum \frac{1}{(z+n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{(z+n)^2};$$

luego $$F(z) - F(z-1) = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} z\pi}\right)^2.$$

Consideremos, en fin, la suma

$$F(z) + F\left(z + \frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots + F\left(z + \frac{n-1}{n}\right).$$

Tendremos $$\sum_{k=0}^{k=n-1} F\left(z + \frac{k}{n}\right).$$

$$ó \qquad \sum\sum \frac{1}{\left(z + \frac{k}{n} + \nu\right)^2} = \sum\sum \frac{n^2}{(nz + k + n\nu)^2},$$

variando k desde 0 hasta $n - 1$ y adquiriendo ν todos los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Pero la expresión $k + n\nu$ da: Para $k = 0$, todos los múltiplos de n; para $k = 1$, todos estos múltiplos aumentados en 1; para $k = 2$, todos estos múltiplos aumentados en 2, y así sucesivamente hasta $n - 1$. Luego $k + n\nu$ puede tomar un valor entero cualquiera y una vez solamente. Se puede pues escribir

$$\sum\sum \frac{n^2}{(nz + k + n\nu)^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{n^2}{(nz + \mu)^2} = n^2\,F(nz),$$

de la que se concluye la relación

$$F(z) + F\left(z + \frac{1}{n}\right) + \ldots\ldots + F\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = n^2\,F(nz).$$

Tales son las propiedades fundamentales de $F(z)$. De estas podemos deducir las propiedades correspondientes de $\Gamma(z)$.

En primer lugar, consideremos nuevamente la ecuación

$$F(z+1) - F(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Integremos dos veces, y resulta

$$\log \Gamma(z+1) = \log z + \log \Gamma(z) + Cz + C'$$

$$ó \qquad \log \frac{\Gamma(z+1)}{z\,\Gamma(z)} = Cz + C',$$

siendo C y C′ constantes. Pero se tiene para cualquier valor entero de z, $\Gamma(z+1) = z\,F(z)$. C y C′ son por consiguiente, nulas y se concluye para cualquier valor de z

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Además, considerando la igualdad

$$\Gamma(z) + \Gamma(1 - z) = \left(\frac{\pi}{\text{sen}\, z\pi}\right)^2,$$

é integrando dos veces y pasando de los logaritmos á los números, obtendremos

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\text{sen}\, z\pi}\, e^{Cz + C'}.$$

El primer miembro de esta igualdad es una función par de z, lo mismo sucede á $\frac{z\pi}{\text{sen}\, z\pi}$; luego $e^{Cz+C'}$ debe ser también función par; luego $C = 0$. Hagamos ahora $z = 0$; el primer miembro se reduce á 1 así como $\frac{z\pi}{\text{sen}\, z\pi}$; luego resulta $e^{C'} = 1$, es decir, $C' = 0$. Así, la segunda derivada de la función $\Gamma(z)$ se expresa por la fórmula

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\text{sen}\, z\pi}.$$

La función $\frac{1}{\Gamma(z)}$ es holomorfa en todo el plano, pues siendo

$$\frac{1}{\Gamma(1 - z)} = \frac{\Gamma(z)\,\text{sen}\, z\pi}{\pi},$$

si sustituímos $\Gamma(z)$ por $P(z) + Q(z)$ en el segundo miembro, el producto $P(z)\,\text{sen}\, z\pi$ no tendrá ya polos y siendo $Q(z)$ holomorfa, lo mismo sucede á $\frac{1}{\Gamma(1 - z)}$.

109. Sea

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{ó} \quad N = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Multiplicando y aplicando la fórmula precedente, resulta

$$N^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots\text{sen}\,\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Pero según hemos visto (pág. 303), el denominador es igual á $\frac{n}{2^{n-1}}$; luego

$$N = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}}.$$

Consideremos ahora la igualdad

$$\sum_{0}^{n-1} F\left(z + \frac{k}{n}\right) = n^2 F(nz),$$

é integremos dos veces; se obtendrá la relación

$$\sum_{0}^{n-1} \log\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \log\Gamma(nz) + Cz + C',$$

en la que determinaremos primero la constante C'. Para ello, escribamos, restando $\log z$ de los dos miembros,

$$\sum_{1}^{n-1} \log\Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right) = \log\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} + Cz + C',$$

y sea $z = 0$; el primer miembro se reduce á

$$\sum_{1}^{n-1} \log\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \log N = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Para obtener enseguida el valor de $\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)}$, observaremos que se tiene

$$\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{nz\,\Gamma(nz)}{nz\,\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(nz+1)}{n\Gamma(z+1)};$$

de modo que para $z = 0$, $\frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)}$ es igual á $\frac{1}{n}$; luego

$$C' = \log n + \log\left[(2\pi^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}\right] = \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right].$$

Para calcular C, cambiaremos z en $z+1$ en

$$\sum_0^{n-1} \log \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(nz) + Cz + C';$$

y restaremos la nueva ecuación de la anterior. Empleando la relación $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, se obtiene para el primer miembro la cantidad $\sum_0^{n-1} \log\left(z+\frac{k}{n}\right)$. El segundo se obtiene sustituyendo z por nz en la igualdad

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\ldots\ldots(z+n-1)\,\Gamma(z);$$

y llegamos á la condición:

$$\sum_0^{n-1} \log\left(z+\frac{k}{z}\right) = \log\left[nz(nz+1)\,.\;\ldots(nz+n-2)\right] + C,$$

de donde resulta $C = -n\log n$. Luego

$$\sum_0^{n-1} \log \Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma(nz) - zn\log n + \log\left[(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}\right],$$

y pasando de los logaritmos á los números

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-2n}\,\Gamma(nz).$$

Se observará que el cociente de $\Gamma(nz)$ por el producto

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)$$

es holomorfo; para $z = -\frac{k}{n}$ la relación de $\Gamma(nz)$ á $\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)$ es la cantidad finita: $\frac{(-1)^{\kappa}}{n}\,\frac{1}{1\,.\,2\ldots\ldots\kappa}$.

110. Cálculo de $\log \Gamma$. La derivada

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\log x\,dx$$

de $\Gamma(a)$ puede descomponerse en otras dos cuyos límites respectivos sean 0 y 1, 1 é ∞, pudiéndose sustituir en cada una log x por su expresión en integral definida,

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz,$$

invertiremos el orden de las integraciones, y reuniremos nuevamente las dos integrales. Tendremos pues,

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} (e^{-z} - e^{-xz})\, dx.$$

Pero se tiene que

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} e^{-z}\, dx = e^{-z}\, \Gamma(a),$$

y además, haciendo $x(1+z) = y$,

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x-xz}\, dx = \frac{1}{(1+z)^a} y^{a-1} e^{-y}\, dy = \frac{\Gamma(a)}{(1+z)^a};$$

luego $$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a} \right].$$

Dividamos por $\Gamma(a)$ é integremos desde 1 hasta a. En el primer miembro tendremos $\log \Gamma(a)$, porque $\log \Gamma(1) = \log(1) = 0$.

En el segundo miembro podremos invertir el orden de las integraciones, porque si descomponemos el campo de la integración relativo á z en dos partes, la una desde 0 hasta 1 y la otra desde 1 hasta ∞, la inversión en la primera podrá hacerse sin dificultad y en la segunda, si es finita la integral

$$\int_1^a \int_1^\infty \operatorname{mod} \frac{dz\, da}{z} \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a} \right].$$

Pero esta integral tiene sus elementos inferiores á los de

$$\int_1^a \int_1^\infty dz\, da \left(e^{-z} + \frac{1}{z^{a+1}} \right) = \int_1^a da \left(-e^{-z} - \frac{1}{a z^a} \right)_1^\infty$$

$$= \int_1^a da \left(e^{-1} + \frac{1}{a} \right) = (a-1)\, e^{-1} + \log a.$$

Así pues, efectuando la integración con relación á a, tendremos

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[(a - 1) e^{-z} - \frac{(1 + z)^{-1} - (1 + z)^{-a}}{\log(1 + z)} \right].$$

Haciendo $a = 2$, resultará, observando que

$$\log \Gamma(2) = \log 1 = 0, \quad 0 = \int_0^\infty dz \left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1 + z)^{-2}}{\log(1 + z)} \right].$$

Multiplicando por $(a - 1)$, y restando de la fórmula anterior resulta

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a - 1)(1 + z)^{-2} \right.$$
$$\left. - \frac{(1 + z)^{-1} - (1 + z)^{-a}}{z} \right] \frac{dz}{\log(1 + z)},$$

y, haciendo $\log(1 + z) = x$, de donde $z = e^x - 1$,

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a - 1) e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x}.$$

Desarrollando el factor $\dfrac{1}{1 - e^{-x}}$ en serie según las potencias crecientes de x, tendremos por primeros términos $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$; y reuniendo estos términos $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\right) e^{-ax}$ á los independientes de esta exponencial, resultará

$$\log \Gamma(a) = \mathrm{F}(a) + \omega(a),$$

haciendo, por brevedad,

$$\mathrm{F}(a) = \int_0^\infty \left[\left(a - 1 - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{-ax} \right] \frac{dx}{x},$$

$$\omega(a) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-ax} \frac{dx}{x}.$$

La integral $F(a)$ puede calcularse exactamente, pues se tiene que

$$F(a) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.\times \left(e^{-ax} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\right] \frac{dx}{x} = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2}.$$

Se tiene además que

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \log \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \log \pi - \omega\left(\frac{1}{2}\right).$$

y $$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \frac{dx}{x}. \qquad (1)$$

Además,

$$\omega(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) e^{-x} \frac{dx}{x};$$

y cambiando x en $2x$,

$$\omega(1) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right) e^{-2x} \frac{dx}{x},$$

y restando

$$0 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-2x}} - \frac{2 - e^{-x}}{2x} - \frac{1 - e^{-x}}{2}\right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Restando esta fórmula de la (1), resulta

$$\omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2;$$

luego $$\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

En cuanto á la segunda integral, tiende hacia cero cuando aumenta a. Se puede pues, desarrollar en serie.

Desarrollemos e^{-ax} según las potencias de x. Tendremos

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}-\frac{1}{x}=\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}.$$

Pero $$\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2z}{z^2-a^2},$$

y multiplicando por $\dfrac{i}{2\pi}$ después de hacer $z=\dfrac{ix}{2\pi}$,

$$\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}=2\sum_1^\infty\frac{x}{x^2+4a^2\pi^2},$$

luego: $$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=2\sum_1^\infty\frac{1}{x^2+4a^2\pi^2}$$

$$=2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{4a^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4a^2\pi^2)^2}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(4a^2\pi^2)^m(x^2+4a^2\pi^2)}\right]$$

Además

$$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^p}=\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_1^\infty\frac{1}{a^{2p}}=\frac{B_p}{1.2\ldots\ldots 2p}$$

y $$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^m(x^2+4a^2\pi^2)}$$

$$=2\theta\sum_1^\infty\frac{1}{(4a^2\pi^2)^{m+1}}=\theta\,\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots\ldots(2m+2)},$$

hallándose θ comprendido entre 0 y 1; luego

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^2+\ldots\ldots$$

$$+(-1)^m\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots\ldots(2m+2)}\,\theta\,x^{2m},$$

de la que se deducirá $\omega(a)$, multiplicando por e^{-ax} é integrando entre o é ∞. Pero, se tiene

$$\int_0^{\infty} x^{2p} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(2p+1)}{a^{2p+1}} = \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2p}{a^{2p+1}},$$

$$\int_0^{\infty} \theta\, x^{2m} e^{-ax} dx = \theta_1 \int_0^{\infty} x^{2m} e^{-ax} dx = \theta_1 \frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots 2m}{a^{2m+1}},$$

hallándose θ_1 entre o y 1; luego

$$\omega(a) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{a^3} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{m-1} B_m}{(2m-1)\, 2m} \frac{1}{a^{2m-1}} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \frac{\theta_1}{a^{2m+1}}.$$

La serie obtenida para el valor de $\omega(a)$ sería divergente, si se prolongase al infinito. Sin embargo, los primeros términos decrecen rápidamente por poco grande que sea n, y la expresión del resto manifiesta que el error es menor que el primer término despreciado. Deteniéndonos en el momento en que los términos comienzan á crecer de nuevo, se tendrá pues, un valor de $\omega(a)$ cuyo grado de exactitud será fácil de apreciar y, en general, suficiente.

Si a tiende al infinito, $\omega(a)$ tenderá hacia cero y podrá despreciarse. Se tendrá pues, en el límite

$$\log \Gamma(a) = \Gamma(a)$$

y por ser $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$, será

$$\log \Gamma(a+1) = F(a) + \log a$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right) \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

111. Producto de dos funciones Γ. Se tiene, cambiando

x en x^2, y en y^2

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^\infty 2x^{2p-1}e^{-x^2}\int_0^\infty 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy,$$

y, haciendo $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty 4\cos^{2p-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,d\varphi\int_0^\infty 2\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho$$

$$= \mathrm{B}(p, q)\,\Gamma(p+q), \qquad \text{ó} \qquad \mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

haciendo, por brevedad,

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\mathrm{sen}^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Sea, en particular, $p = q = \frac{1}{2}$. Tendremos

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = \pi, \qquad \Gamma(p+q) = 1;$$

luego $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi.$$

Si hacemos $q = 1 - p$, resultará

$$\mathrm{B}(p, 1-q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\mathrm{sen}\,p\pi}.$$

112. Integrales eulerianas de primera especie. La integral $\mathrm{B}(p, q)$ se llama *integral euleriana de primera especie*, que puede escribirse bajo la forma

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{1}$$

haciendo $\cos^2 \varphi = x$ de donde $-2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi = dx$
y haciendo

$$x = \frac{y}{1 + y} \quad \text{de donde} \quad 1 - x = \frac{1}{1 + y}, \quad dx = \frac{dy}{(1 + y)^2},$$

resultará
$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1} \, dy}{(1 + y)^{p+q}}.$$

Si en (1) hacemos $x = \frac{u}{a}$, tendremos

$$\int_0^a \frac{u^{p-1}}{a^{p-1}} \frac{(a - u)^{q-1}}{a^{q-1}} \frac{du}{a} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)},$$

$$\int_0^a u^{p-1} (a - u)^{q-1} \, du = a^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

113. Integral múltiple. Sea la integral múltiple

$$\mathrm{I} = \iiint f \left[\left(\frac{x}{a}\right)^l + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{a}\right)^n \right] x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \, dx \, dy \, dz,$$

tomada en el sistema de valores de las variables que satisfacen á la desigualdad

$$\left(\frac{x}{a}\right)^l + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{a}\right)^n \leqslant 1.$$

Hagamos $x = a x_1^{\frac{1}{l}}, \quad y = b y_1^{\frac{1}{m}}, \quad z = c z_1^{\frac{1}{n}}$

$$p = l p_1, \quad q = m q_1, \quad r = n r_1.$$

La integral se reducirá á

$$\frac{a^p b^q c^r}{lmn} \iiint f(x_1 + y_1 + z_1) \, x_1^{p_1 - 1} y_1^{q_1 - 1} z_1^{r_1 - 1} \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1,$$

y deberá extenderse á todos los sistemas de valores positivos de las variables que satisfacen á la relación

$$x_1 + y_1 + z_1 \leqslant 1.$$

Hagamos

$$X = x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \quad Y = y_1 + z_1 = \xi\eta, \quad Z = z_1 = \xi\eta\zeta.$$

Resulta

$$x_1 = \xi(1 - \eta), \quad y_1 = \xi\eta(1 - \zeta), \quad z_1 = \xi\eta\zeta$$

$$dX\,dY\,dZ = dx_1\,dy_1\,dz_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} d\xi\,d\eta\,d\zeta = \xi^2\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

variando ξ, η, ζ entre 0 y 1. Tendremos

$$\frac{a^p b^q c^r}{lmn}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1}(1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}$$
$$\times (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Esta integral será el producto de las tres

$$\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi,$$

$$\int_0^1 (1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}d\eta = B(p_1, q_1+r_1) = \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}d\zeta = B(q_1, r_1) = \frac{\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(q_1+r_1)}.$$

Tendremos pues

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn}\,\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(q_1)\,\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi$$

$$= \frac{a^p b^q c^r}{lmn}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{l}\right)\Gamma\left(\frac{q}{m}\right)\Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{l}+\frac{q}{m}+\frac{r}{n}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{p}{l}+\frac{q}{m}+\frac{r}{n}-1}\,d\xi,$$

y la integral múltiple habrá quedado reducida á una integral simple.

Aplicación. Busquemos el momento de inercia de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

homogéneo y de densidad 1, con relación al eje de las z. Tendremos que calcular la integral

$$\iiint (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

cuya octava parte obtendremos, limitándonos á los valores positivos de las coordenadas. El primer término de la integral se obtiene haciendo

$$l = m = n = 2, \quad p = 3, \quad q = r = 1, \quad f = 1.$$

El valor buscado será

$$\frac{a^3bc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{a^3bc}{8} \frac{\pi}{\frac{1}{2}\frac{5}{2}}.$$

Calculando el segundo término, sumando y multiplicando por 8, resultará

$$\frac{4}{15}(a^2 + b^2)\,\pi\, abc.$$

114. Fórmula de Stirling. Sea la fórmula

$$\log(n + 1) - \log n = \frac{2}{2n + 1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n + 1)}\right]$$

que se deduce de

$$\log p - \log q = \log(1 + x) - \log(1 - x)$$

haciendo $\quad x = \dfrac{p - q}{p + q} \quad$ ó $\quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{1 + x}{1 - x}; \quad (p > q)$

y será:

$$\log p - \log q = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \dots\right].$$

Si tomamos los k primeros términos, el error será menor que

$$2\left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+1} + \frac{x^{2k+5}}{2k+1} + \dots\right],$$

ó á $\quad \dfrac{2 \cdot x^{2k+1}}{2k+1}(1 + x^2 + x^4 + \dots) = \dfrac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}$.

Podremos pues hacer

$$\log p - \log q = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{\theta x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}\right],$$

hallándose θ comprendido entre 0 y 1.

Si $p = N + h$, $q = N$, $k = 1$, será

$$l(N+h) - lN = \frac{2h}{2N+h}\left(1 + \frac{\theta h^2}{12N(N+h)}\right). \qquad (1)$$

Esta fórmula (1) puede escribirse bajo la forma

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)[\log(n+1) - \log n]$$

que se reduce á

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log\varphi(n) - \log\varphi(n+1),$$

si se hace $\qquad \varphi(n) = \dfrac{1 \cdot 2 \dots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad (2)$

resultando que $\qquad \log\varphi(n) > \log\varphi(n+1)$

y $\qquad \log\varphi(n) - \dfrac{1}{12n} < \log\varphi(n+1) - \dfrac{1}{12(n+1)};$

de manera que de las dos funciones $\varphi(n)$ y $\varphi(n)\,e^{-\frac{1}{12n}}$ la primera es creciente y la segunda decreciente. Si pues p es un entero positivo cualquiera, se tiene que

$$\varphi(n) > \varphi(n+p), \qquad \varphi(n)\,e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p)\,e^{-\frac{1}{12(n+p)}}$$

desigualdades que pueden sustituirse por la igualdad

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = \frac{\theta_p}{e^{12n(n+1)}}, \tag{3}$$

hallándose θ_p comprendido entre 0 y 1.

De esta fórmula se deduce fácilmente la fórmula de Stirling, por la evaluación aproximada del producto $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n$, cuando n es muy grande.

En efecto, la relación (3) aplicada al caso en que $n = p$, hace ver inmediatamente que el límite de $\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$ es la unidad, cuando p crece indefinidamente. Se tiene pues, para $p = \infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}, \tag{5}$$

ó según (2),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \,.\, \frac{2}{1} \,.\, \frac{2}{3} \,.\, \frac{4}{3} \,.\, \frac{4}{5} \ldots \ldots \frac{2p-2}{2p-1} \,.\, \frac{2p}{2p-1}},$$

y en virtud del teorema de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}. \tag{5}$$

Si pues, en la fórmula (3) se deja fijo á n, haciendo crecer á p indefinidamente, se obtiene

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}} \quad \text{ó} \quad 1 \,.\, 2 \ldots\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}} \tag{6}$$

ó sea la fórmula de Stirling que da los dos límites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad \text{y} \quad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{\frac{1}{12n}}$$

entre los que se halla comprendido el producto $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \; \ldots . \, n$.

Tomando los logaritmos puede escribirse

$$\log \Gamma(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\theta}{12n}. \quad (7)$$

El término complementario, dado por Euler, es

$$R_n = \frac{B_1}{1 \,.\, 2} \frac{1}{n} - \frac{B_2}{3 \,.\, 4} \frac{1}{n^2} + \ldots .$$

$$+ (-1)^p \theta_p \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{n^{2p+1}}. \qquad (\theta < \theta_p < 1)$$

115. Relación entre la función gamma y la serie hipergeométrica. La relación

$$\gamma[(\gamma - 1) - (2\gamma - \alpha - \beta - 1)x] \, F + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) x F(\gamma + 1)$$
$$- \gamma(\gamma - 1)(1 - x) F(\gamma - 1) = 0,$$

que existe entre la función F y las dos funciones contiguas $F(\gamma+1)$ y $F(\gamma-1)$, se reduce para $x = 1$ á

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)} = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)};$$

igualmente

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+2, 1)} = \frac{(\gamma - \alpha + 1)(\gamma - \beta + 1)}{(\gamma + 1)(\gamma - \alpha - \beta + 1)},$$

. . . .

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma+n-1, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} = \frac{(\gamma - \alpha + n - 1)(\gamma - \beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)(\gamma - \alpha - \beta + n - 1)}$$

de donde

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \alpha + 1) \ldots . (\gamma - \alpha + n - 1)}{\gamma(\gamma+1) \ldots . (\gamma + n - 1)}$$

$$\times \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\ldots\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma-\alpha-\beta+1)\ldots\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-1)}$$

$$=\frac{(\gamma+n)(\gamma-\alpha-\beta+n)\,\Pi(\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha+n)(\gamma-\beta+n)\,\Pi(\gamma-\alpha)\,\Pi(\gamma-\beta)}.$$

Cuando n aumenta indefinidamente, $F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)$ tiene por límite la unidad, y resulta

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Los parámetros α, β, γ supuestos reales, deben verificar á la desigualdad $\alpha+\beta-\gamma<0$.

Esta relación sirve para establecer las principales propiedades de la función gamma, constituyendo el método de Gauss. Así se tiene que

$$F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)};$$

ó,
$$F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)=1-\frac{n^2}{1\cdot 2}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots\ldots,$$

serie que se obtiene haciendo $x=\frac{\pi}{2}$ en el desarrollo de $\cos nx$ en función de $\operatorname{sen} x$:

$$1-\frac{n^2}{1\cdot 2}\operatorname{sen}^2 x+\frac{n^2(n^2-2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\operatorname{sen}^2 x$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\operatorname{sen}^6 x+\ldots\ldots;$$

luego
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}},$$

ó, sustituyendo n por $2x$,

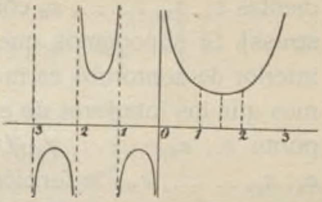
$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x},$$

y, sustituyendo x á $\frac{1}{2} - x$, se tiene $\Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$.

Así la teoría de la función Γ se deduce de la de la serie hipergeométrica.

116. Discusión de la curva $y = \Gamma(x)$. Para $x = 0, -1, -2, \ldots\ \Gamma(x)$ es infinita. Para $x = 1, 2, 3, \ldots\ \Gamma(x)$ es igual á $1, 2, 1.2, 1.2.3, \ldots$ se tiene

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + x\left[\frac{1}{1.(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)} + \ldots\right]$$



Anulándose el primer miembro de esta ecuación, se tendrá una ecuación transcendente para calcular los máximos y los mínimos de la función $\Gamma(x+1)$. Esta ecuación será

$$\frac{C}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{3(x+3)} + \ldots\ldots$$

Existe evidentemente un máximo entre 0 y $+\infty$, porque para $x = 0$ como para $x = \infty$, $\Gamma(x)$ es infinita. Además no hay más que uno; porque $\dfrac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ es siempre positivo; y puesto que para $x = 1$ y $x = 2$, adquiere $\Gamma(x)$ valores iguales á uno, el mínimo de $\Gamma(x)$ se halla comprendido entre 1 y 2 para valores iguales á 1. Se obtiene para este mínimo

$$x = 1{,}4616321\ldots\ldots,\qquad \Gamma(x) = 0.8856032\ldots\ldots$$

La ecuación $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ conduce á la construcción de la curva $y = \Gamma(x)$ para valores negativos de x, curva que próximamente tiene la forma indicada en la figura, puesto que las distancias relativas de las diversas ramas al eje de las x no pueden conservarse.

CAPÍTULO IV

Funciones sinécticas de muchas variables

PRELIMINARES. Un conjunto de muchas variables independientes $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ constituye un *punto* [*Eine Stelle*, Weierstrass]. Si suponemos que $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ se mueven en el interior de contornos cerrados simples $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, diremos que los interiores de estos contornos forman el *dominio* del punto $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ *(Umgebung)*. Sea el dominio del punto $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$; la función $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ se llamará sinéctica en el dominio D, si lo es respecto á cada variable, considerándose las otras como constantes.

117. FUNCIONES DESARROLLABLES EN SERIES ENTERAS. Si $P_0, P_1, \ldots\ldots, P_n, \ldots\ldots$ expresan polinomios enteros y homogéneos en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ respectivamente de grados 0, 1, 2, ..., llamaremos serie entera á una serie de la forma

$$P_0 + P_1 + \ldots\ldots + P_n + \ldots\ldots \quad \text{ó} \quad \sum_0^\infty A_{\nu_1, \nu_2} \ldots\ldots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots\ldots,$$

expresando $A_{\nu_1, \nu_2}, \ldots$ un coeficiente independiente de $z_1, z_2, \ldots$

TEOREMA I. *Suponiéndose que las variables* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *se hallan contenidas en círculos* $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$, *cuyos radios son* $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$, *y descritos desde el origen como centro; si los módulos de los términos de la serie*

$$\sum_0^\infty A_{\nu_1, \nu_2}, \ldots\ldots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots\ldots \tag{1}$$

son finitos cuando $\operatorname{mod} z_1 = r_1$, $\operatorname{mod} z_2 = r_2$, $\ldots\ldots$, *la serie es convergente en el dominio* $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$.

En efecto, la serie

$$\sum_0^\infty \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{\nu_2} - \ldots.., \tag{2}$$

en la cual se supone

$$\rho_1 < r_1, \quad \rho_2 < r_2, \quad \ldots.., \quad \text{y} \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0,$$

es convergente; lo que se puede ver de varias maneras, y en particular observando que la suma de los p primeros grupos homogéneos de la serie (2) es igual al producto

$$\left[1 + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right) + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2 + \ldots.. + \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{n-1}\right]$$

$$\times \left[1 + \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right) + \ldots.. + \left(\frac{\rho_2}{r_2}\right)^{p-1}\right] \ldots..$$

que tiende hacia un límite finito para $p = \infty$.

Sea $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots..}$ el módulo de $A_{\nu_1, \nu_2, \ldots..}$, siendo finitos por hipótesis los números $a_{\nu_1, \nu_2, \ldots..} r_1^{\nu_1} r_2^{\nu_2} \ldots..$ La serie

$$\Sigma a_{\nu_1, \nu_2, \ldots..} \rho_1^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \ldots.. \tag{3}$$

será convergente, y por tanto la serie (1), cuyos módulos son los diversos términos de (3), será convergente.

Teorema II. *Cuando una función* $f(z_1, z_2, \ldots.. z_n)$ *es sinéctica en un dominio* D *compuesto de círculos* $C_1, C_2, \ldots.., C_n$ *descritos desde el origen como centro con radios* $R_1, R_2, \ldots.., R_n$, *será desarrollable en este dominio en serie entera.*

En efecto, consideremos los puntos $x_1, x_2, \ldots.., x_n$ contenidos en el dominio D, la función de t

$$\varphi(t) = f(tx_1, tx_2, \ldots.., tx_n)$$

será sinéctica con relación á t en un círculo descrito desde el origen como centro con un radio un poco superior á 1, y se tendrá

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi(0) + \ldots.. + \frac{t^n}{n!}\varphi^n(0) + \ldots..$$

y por ser $\varphi^n(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n\right)^{(n)}$,

en la cual hay que hacer $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... en las derivadas, resulta el desarrollo de $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots\ldots\right)^n + \ldots\ldots,$$

que verificándose para $t = 1$, da

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = f(0, 0, \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots\ldots\right)^n + \ldots\ldots$$

Corolario I. *Si una función* $\mathrm{f}(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \ldots\ldots, \mathrm{z}_n)$ *es sinéctica en un dominio* D *compuesto de círculos* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots\ldots$ *descritos alrededor de los puntos* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots\ldots$ *como centros, es desarrollable en dicho dominio, en serie de la forma*

$$\Sigma A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

Esta condición, suficiente para que el desarrollo sea posible, no es necesaria.

Corolario II. *Los coeficientes del desarrollo de* $\mathrm{f}(z_1, z_2, \ldots)$ *pueden ponerse bajo la forma de integrales definidas.*

En efecto, se tiene

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)\, dz_1}{z_1 - x_1}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)\, dz_1\, dz_2}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\int \ldots\ldots \frac{f(z_1, \ldots\ldots, z_n)\, dz_1 \ldots\ldots dz_n}{(z_1 - x_1) \ldots\ldots (z_n - x_n)},$$

habiéndose tomado las integrales á lo largo de los círculos

$C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n$ que forman el dominio D y que se hallan descritos desde los puntos $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ como centros con radios $R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$; luego

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} \ldots\ldots}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \iint \ldots\ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{(z_1 - x_1)^{\alpha+1}(z_2 - x_2)^{\beta+1}} \frac{dz_1\, dz_2 \ldots\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

En particular, cuando $x_1 = x_2 \ldots\ldots = 0$, se tiene

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta}} = \frac{1}{2\pi i} \iint \ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{z_1^{\alpha+1} z_2^{\beta+1} \ldots\ldots} \frac{dz_1\, dz_2}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

Si se hace $z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$, ... se obtiene

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} \ldots\ldots}$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint \ldots\ldots \frac{f(z_1, z_2, \ldots\ldots)}{R_1^{\alpha} R_2^{\beta} \ldots\ldots} e^{-(\alpha\theta_1+\ldots)i} \frac{d\theta_1\, d\theta_2 \ldots\ldots}{\alpha!\, \beta! \ldots\ldots}.$$

TEOREMA IV. *Dos series enteras*

$$\Sigma A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

$$\Sigma B_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} (z_1 - a_1)^{\nu_1} (z_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots\ldots$$

que son iguales en un dominio de dimensiones finitas, tienen el mismo dominio de convergencia y representan dos funciones iguales en este dominio. Además, se tiene

$$A_{\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots} = B_{\nu_1, \nu_2} \ldots\ldots$$

TEOREMA V. *Una función no puede permanecer sinéctica en toda la extensión del plano; en otros términos, una función que permanece monódroma, monógena, finita y continua para todos los valores finitos de sus variables, se hace necesariamente infinita para valores infinitos de sus variables.*

En efecto, si la función $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ fuese sinéctica en el infinito, lo sería también la función $f(z_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ obtenida atribuyendo á $z_2, \ldots\ldots, z_n$ valores $a_2, \ldots\ldots, a_n$, lo que exige que $f(z_1, a_1, \ldots\ldots, a_n)$ sea una constante, es decir, independiente de z_1; luego será $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$, cualesquiera que sean $z_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$, ó $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$, luego será f independiente de z_1. Se verá de igual modo que es independiente de las demás variables, es decir, que es constante.

118. Teorema de Weierstrass. *Sea* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ *una función sinéctica en el interior de un dominio* D *que contiene el punto*

$$z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_n = 0,$$

y nula en este punto. Si la función $f(z_1, 0, 0, \ldots\ldots, 0)$ *obtenida haciendo* $z_2 = z_3 = \ldots\ldots = z_n = 0$ *en* $f(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n)$ *no es nula cualquiera que sea* z_1, *existirá un dominio* D' *contenido* D *en tal, que se tenga para los puntos interiores á este dominio*

$$f = P\,\varphi,$$

expresando P *un polinomio entero en* z_1 *con coeficientes sinécticos en* $z_2, \ldots\ldots, z_n$ *y* φ *una función sinéctica en el dominio* D' *que no se anula en el dominio* D.

Hagamos, en efecto, $f = f(z_1, \ldots, z_n)$, $f_0 = f(z_1, 0, \ldots, 0)$,

$$f_1 = f_0 - f. \tag{1}$$

La función f_0 tiene un número limitado de ceros en el dominio D, porque es sinéctica y no es idénticamente nula; se puede pues, suponer que no tiene más ceros que 0 en un círculo de radio ρ_1 descrito desde el origen como centro. La función f_1, en virtud de (1) es nula para $z_2 = 0, \ldots\ldots, z_n = 0$, cualquiera que sea z_1. Se puede pues suponer que hallándose $z_2, \ldots\ldots, z_n$ en el interior de un círculo de radio ρ y z_1 exterior á un círculo de radio $\rho_0 < \rho$, se tenga

$$\operatorname{mod} f_1 < \operatorname{mod} f_0.$$

En este dominio se tiene

$$\log f = \log (f_0 - f_1) = \log f_0 - \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n,$$

y diferenciando con relación á z_1,

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial z_1}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n; \qquad (2)$$

si se supone que f_0 sea de la forma

$$a_m z_1{}^m + a_{m+1} z_1{}^{m+1} + \ldots\ldots$$

$\frac{1}{f_0}\frac{\partial f_0}{\partial z_1}$ será de la forma $\frac{m}{z_1} + g(z_1)$, expresando $g(z_1)$ una serie ordenada según las potencias enteras de z_1, es decir, una función sinéctica en el dominio D′. En cuanto á $\frac{f_1}{f_0}$, vemos que será desarrollable bajo la forma $\frac{A}{z_1} + \theta$, expresando θ una función sinéctica así como A; de manera que $\Sigma \frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^n$ será desarrollable en una doble serie ordenada según las potencias enteras de z_1 y de $\frac{1}{z_1}$, con coeficientes sinécticos en z_2, z_3, ... Su derivada con relación á z_1 será una serie de igual forma que no contiene $\frac{1}{z_1}$, de modo que la fórmula (2) se pondrá bajo la forma

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + g(z) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu + \sum_2^\infty Q_{-\nu} z_1^{-\nu}. \qquad (3)$$

Se ve que $\frac{m}{z_1} + \sum_2^\infty Q_{-\nu} z_1^{-\nu}$ será la parte del desarrollo de $\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1}$ efectuando según las potencias de $\frac{1}{z_1}$. Esta parte tiene pues, por coeficientes funciones sinécticas de z_2, ..., z_n en el dominio D′.

Esto sentado, llamando $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ á los valores de z_1 que anulan á f_0 y cuyo módulo es menor que el de z_1, se puede escribir la fórmula (3) así;

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{m}{z_1} + \frac{a_1}{z_1 - a_1} + \frac{a_2}{z_1 - a_2} + \ldots + g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu,$$

expresando $a_1, a_2, \ldots\ldots$ los grados de multiplicidad de los ceros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$; y si se observa que $g(z_1) + \sum_0^\infty Q_\nu z_1^\nu$ es una función sinéctica h en el dominio D′, y que se puede hacer

$$P = z_1^m (z_1 - \alpha_1)^{a_1} (z_1 - \alpha_2)^{a_2} \ldots\ldots,$$

se deducirá, integrando la fórmula precedente,

$$f = P e^{\int h dz_1}.$$

Pero $e^{\int h dz}$ es una función sinéctica que se puede llamar φ y que no se anula en D′; luego en el dominio D′, $f = P\varphi$. Pero P es un polinomio entero en z_1, y sus coeficientes son sinécticos en $z_2, z_3, \ldots\ldots$ porque $\frac{P'}{P}$ se desarrolla en una serie cuyos coeficientes $m_1, Q_{-2}, Q_{-3}, \ldots\ldots$ son sinécticos, los cuales son $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha^2, \ldots\ldots$ Los coeficientes de P son funciones enteras de $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha^2, \ldots\ldots$; luego los coeficientes de P son sinécticos.

De este teorema de Weierstrass resulta que, dados los valores de $z_2, \ldots. z_n$, el valor de z_1 que debe adjuntarse para anular á $f(z_0, \ldots\ldots, z_n)$ en un dominio de círculos cuyo centro es el origen, es raiz de la ecuación P = 0 con coeficientes sinécticos. Esto supone que $f(z_1, 0, \ldots\ldots, 0)$ no es idénticamente nula, ó sea que $f(z_1, z_2, \ldots\ldots)$ contiene por lo menos un término independiente de $z_2, \ldots\ldots, z_n$, ó un término con una sola variable.

CAPÍTULO V

Transcendentes engendradas por la integración indefinida

§ 1.º Funciones implícitas

119. Teorema. *Sea el sistema de* ν *ecuaciones diferenciales simultáneas*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \varphi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t} = \chi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \psi(x, y, z, \ldots\ldots, t), \quad \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

entre las ν *funciones* $x, y, z, \ldots\ldots$, *la variable* t *y sus derivadas* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$, *resueltas con relación á estas derivadas.*

Si se supone que al variar $x, y, z, \ldots\ldots, t$ *alrededor de los puntos* $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots, t_0$, *las funciones* $\varphi, \chi, \psi, \ldots\ldots$ *permanecen sinécticas con relación á estas variables, las ecuaciones* (1) *admitirán una solución, reduciéndose al sistema* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots\ldots$ *para* $t = t_0$.

Cada una de las funciones $x, y, z, \ldots\ldots$ *permanecerá sinéctica en el interior de un círculo descrito desde* t_0 *como centro con un radio* R *definido por la fórmula*

$$R = \lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right],$$

expresando λ *una cantidad menor que el menor de los módulos de* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots\ldots$ *para los cuales* $\varphi, \chi, \ldots\ldots$, *dejarían de ser sinécticas alrededor de los puntos* $x_0, y_0, \ldots\ldots, t_0$, *y expresando* M *una cantidad mayor que los módulos máximos de* φ,

χ, ..., *cuando* x, y ..... *se mueven en circunferencias de radio* λ *alrededor de sus centros* x_0, y_0, ..., t_c.

Admitamos que sea cierta la propiedad por demostrar, y calculemos las derivadas sucesivas de las funciones x, y, z, ..., para lo que derivaremos las fórmulas (1), y tendremos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\chi}{\partial t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ó, sustituyendo $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... por sus valores (1),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \chi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \ldots, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi\frac{\partial\chi}{\partial x} + \chi\frac{\partial\chi}{\partial y} + \ldots, \quad \ldots \qquad (2)$$

Se obtendrán igualmente $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, derivando las fórmulas (2) y sustituyendo $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ... por sus valores (1), y así sucesivamente. Las derivadas $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... serán la función φ y sus derivadas totales sucesivas $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ...; lo mismo $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... se representarán por $\chi(t)$, $\chi'(t)$, ...; y tendremos, aplicando la fórmula de Taylor; que suponemos aplicable:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + (t - t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2}\,\varphi''(t) + \ldots\ldots \\ y &= y_0 + (t - t_0)\,\chi(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{1 \cdot 2}\,\varphi''(t_0) + \ldots\ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Vamos á demostar que estas fórmulas son *efectivamente* integrales de (1). Para ello demostraremos desde luego que son convergentes. En efecto se sabe que

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0 \ldots\ldots)}{\partial x_0^{\alpha}\,\partial y_0^{\beta}\ldots\ldots}$$

$$= \alpha!\,\beta!\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\nu}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\ldots\frac{e^{-(\alpha\xi+\beta\eta+\ldots)i}}{A^{\alpha}B^{\beta}\ldots\ldots}$$

$$\times\,\varphi_0(x_0 + Ae^{\xi i}, y_0 + Be^{\eta i}, \ldots\ldots)\,d\xi\,d\eta\ldots\ldots$$

expresando A, B, C, ... cantidades menores que los radios de los mayores círculos, descritos desde x_0, y_0, ... como centros, que no contienen puntos críticos de la función φ. Si en esta fórmula se sustituyen, la exponencial por su módulo 1, la función φ por una cantidad M superior al mayor valor que puede tomar su módulo en los círculos de radios A, B, ... y A, B, ... por una cantidad λ menor que cada uno de ellos, se tendrá

$$\text{mod.}\ \frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots)}{\partial x_0^{\alpha}\,\partial y_0^{\beta}\ldots\ldots}$$

$$< \frac{\alpha!\,\beta!\ldots M}{(2\pi)^{\nu}}\int_0^{2\pi}\ldots\ldots\frac{M}{\lambda^{\alpha+\beta+\ldots}}\,d\xi\,d\eta\ldots\ldots$$

ó

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots)}{\partial x_0^{\alpha}\,\partial y_0^{\beta}\ldots\ldots} < \frac{\alpha!\,\beta!\ldots\ldots M}{\lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}. \qquad (4)$$

Consideremos ahora las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{t-t_0}{\lambda}\right)}\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{t-t_0}{\lambda}\right)}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

De estas ecuaciones resulta $dx = dy = \ldots\ldots$, y por consiguiente

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = \ldots\ldots;$$

luego
$$\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^\nu \left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right)};$$

luego
$$dx\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^\nu = M \frac{dt}{1 - \frac{t - t_0}{\lambda}}.$$

Integrando desde $t = t_0$, se obtiene

$$\frac{1}{\nu + 1}\left[1 - \left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^{\nu+1}\right] = - M \log\left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right); \quad (6)$$

y las funciones x, y, ... permanecerán sinécticas, mientras que esta ecuación y su derivada con respecto á x no tengan ninguna raíz común. Esta derivada es

$$\left(1 - \frac{x - x_0}{\lambda}\right)^\nu = 0;$$

si se sustituye el valor de x en (6), resulta:

$$1 + (\nu + 1) M \log\left(1 - \frac{t - t_0}{\lambda}\right) = 0$$

$$t - t_0 = \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\lambda.$$

Las ecuaciones (5) dan pues valores de x, y, ... sinécticos alrededor del punto $t = t_0$, que se pueden desarrollar en serie en el interior de un círculo descrito alrededor de t_0 con un radio finito R, determinado por la fórmula

$$R \leqq \left(1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right)\lambda.$$

Las fórmulas (3) servirán para efectuar los desarrollos de

$x, y, \ldots\ldots$; pero será preciso suponer que $\varphi, \chi, \ldots$ son iguales á

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\cdots\cdots}.$$

Volvamos ahora á las ecuaciones (1). Si con auxilio de éstas, se obtienen, como se ha explicado, las fórmulas (3), éstas serán convergentes, pues se ha visto que lo eran cuando se sustituían $\varphi, \chi, \ldots\ldots$ por

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{\lambda}\right)\cdots\cdots}=\Phi.$$

Pero en este caso: 1.º Los módulos $\varphi, \chi, \ldots\ldots$ para $t=t_0$ solo pueden aumentar, porque se hallan sustituídos por M, que es mayor que todos ellos. 2.º Los módulos de sus derivadas solo pueden aumentar, porque son menores en virtud de (4) que las derivadas de Φ, es decir,

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots}\Phi}{\partial x_0^{\alpha}\,\partial y_0^{\beta}\cdots\cdots}=\frac{\alpha!\,\beta!\,\ldots\ldots M}{\lambda^{\alpha+\beta+\cdots}}.$$

En virtud, pues, de las fórmulas (1), (2) y de las que se obtendría derivando todavía $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\ldots y, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ para $t=t_0$, es decir, los valores de los módulos de las funciones $\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots\ldots, \psi(t_0), \psi'(t_0), \ldots\ldots$ solo pueden aumentar, y, puesto que siendo convergentes las series después de la sustitución, debían serlo antes; si de las fórmulas (3) se sacan los valores de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots\ldots$ para sustituirlos en (1), se tendrá

$$\varphi(t_0)+\frac{t-t_0}{1}\varphi'(t_0)+\ldots\ldots=\varphi(x, y, \ldots\ldots, t),$$

. . . .

Pero desarrollando los segundos miembros, se tiene

$$\varphi(t_0) + \frac{t - t_0}{1} \varphi'(t_0) = \varphi(x_0, y_0, \ldots\ldots, t_0)$$

$$+ (t - t_0)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 + \frac{(t - t_0)^2}{1 . 2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0 + \ldots\ldots, \qquad (6)$$

expresando $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_0, \ldots\ldots$ las derivadas totales de φ para $t = t_0$, tomadas considerando $x, y, \ldots\ldots$ como funciones de t, definidas por las fórmulas (3). Ahora bien,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

y si se hace $t = t_0$, resulta, según las fórmulas (3),

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t_0), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi(t_0), \quad \ldots\ldots;$$

luego $$\left(\frac{\partial\varphi}{dt}\right)_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\chi_0 + \ldots\ldots$$

El segundo miembro de esta fórmula es precisamente lo que hemos llamado $\varphi'(t_0)$, y así sucesivamente; la fórmula (6) es pues idéntica; luego queda demostrado que las fórmulas (1) admiten una solución $x, y, \ldots\ldots$ que para $t = t_0$ se reduce á x_0, $y_0, \ldots\ldots$, y permanece sinéctica en la proximidad de este punto, siempre que el módulo de $t - t_0$ sea inferior á $\lambda\left[1 - e^{-\frac{1}{(\nu+1)M}}\right]$.

§ 2.º Existencia de las funciones sinécticas

120. Para demostrar la sinecticidad de las funciones implícitas, consideremos las ecuaciones

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad f_n = 0,$$

en las cuales $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ expresan funciones de $n + 1$ variables $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ y x. Estas ecuaciones definen n funciones implícitas $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ de x, las cuales son sinécticas, porque satisfacen á las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y'_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y_1} y'_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} y'_n = 0,$$

ó bien $$y'_1 = A_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\ldots + A_{1n} \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y'_n = A_{n1} \frac{\partial f_1}{\partial x} + A_{n2} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\ldots + A_{nn} \frac{\partial f_n}{\partial x},$$

en las cuales $A_{11}, A_{12}, \ldots\ldots$ tienen valor bien determinados si

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)} \mp 0,$$

y son desarrollables según las potencias enteras de $x - x_0$ en el interior de un círculo cuyo radio es

$$R = \lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{M(n+1)}}\right)$$

expresando λ el menor de los módulos $x - x_0$, $y - y_0, \ldots\ldots$ para los que los segundos miembros de (1) dejan de ser sinécticos y M el módulo máximo de dichas funciones, cuando x, y_1, $y_2, \ldots\ldots$ se mueven en círculos de radio λ cuyos centros son x_0, y_{10}, y_{20}, expresando $y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots$ los valores de $y_1, y_2, \ldots\ldots$ para $x = x_0$.

Aplicando las conclusiones expuestas acerca de los lazos fundamentales á la integración á lo largo de un contorno, podemos enunciar el siguiente

Teorema. *Cuando se trata de integrar la función* f(z) dz *entre los límites* z_0 *y* Z, *á lo largo de un contorno cualquiera, éste puede reducirse, sin cambiar de valor la integral, á una serie de* *lazos que envuelven los puntos críticos, teniendo su entrada en* z_0, *y al camino rectilíneo* z_0Z.

§ 3.º Transcendentes á que conduce la integración de las funciones racionales

121. Uno de los primeros problemas que se presenta al principio del cálculo integral, es la integración de las funciones racionales. Para resolverlo, lo natural es descomponer estas funciones en fracciones simples de la forma Ax^m y $\frac{A}{(x-a)^n}$, en las que A, m, n expresan constantes, de las que las dos últimas son enteros. Cada una de estas funciones simples puede ser integrada. Sin embargo, cuando $n = 1$, no hallamos en el caso de la función

$$\int \frac{dx}{x-a} \quad \text{ó} \quad \int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^x \frac{dz}{z}.$$

Esta función es la logarítmica, y si bien nos es conocida, será interesante deducir de las propiedades de la ecuación

$$\log x = \int_1^x \frac{dz}{z}$$

que esta función no puede expresarse en función algebráica de x, y que constituye una transcendente.

Según lo expuesto en el párrafo anterior, todo contorno de integración que conduce desde 1 hasta x, puede reducirse á una serie de lazos que tienen su entrada en el punto 1, envolviendo al punto crítico cero, y al contorno rectilíneo que va del punto 1 al x. Llamemos u al valor de la integral tomada á lo largo de este último camino.

La integral tomada á lo largo del lazo se compone: 1.º de la integral

$$\int_1^{\varepsilon} \frac{dz}{z} = -\int_{\varepsilon}^1 \frac{dz}{z},$$

tomada á lo largo de un borde; 2.° de la integral tomada á lo largo de la circunferencia, que es igual á $\pm 2\pi i$ multiplicada por el residuo de $\frac{1}{z}$ ó 1; 3.° de la integral $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dz}{z}$ tomada á lo largo del otro borde, que destruye á la primera; luego en total se tiene para la integral tomada á lo largo del lazo, $\pm 2\pi i$, según que este lazo se haya recorrido en sentido directo ó retrógrado.

Supongamos que el lazo se haya recorrido m veces en un sentido, n veces en otro, y que después se haya recorrido el camino rectilíneo; el valor de la integral será

$$2N\pi i + u$$

expresando N la diferencia de los enteros m y n, y u la integral tomada á lo largo del camino rectilíneo que va desde el punto 1 hasta el z. La integral tiene pues una infinidad de valores.

Si pues y expresa el logaritmo de x, de modo que se tenga

$$y - \int_{1}^{x} \frac{dz}{z} = 0,$$

la función inversa x de y podrá expresarse por e^y, y en virtud del teorema de la pág. 345, e^y será monódroma, monógena, finita y continua en toda la extensión del plano, excepto para $x = 0$ y $x = \infty$; pero entonces y es infinito. Según lo que se ha deducido anteriormente, se tendrá, para todos valores enteros de N,

$$e^{y+2N\pi i} = e^y,$$

y la función e^y es periódica; su período es $2\pi i$.

La ecuación

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ó} \quad d(\log x + \log y) = 0,$$

que puede escribirse

$$ydx + xdy = 0 \quad \text{ó} \quad dxy = 0,$$

manifiesta que $\qquad \log x + \log y = f(xy),$

expresando f una función que determinaremos haciendo $x = 1$; entonces $\log x = 0$, y se tiene $\log y = f(y)$. La función f es pues un logaritmo, y se tiene

$$\log x + \log y = \log xy \quad \text{ó} \quad u + v = \log(e^u e^v), \quad e^{u+v} = e^u e^v,$$

habiendo hecho $\quad \log x = u, \quad \log y = v.$

Se ve pues que la teoría de las exponenciales y de los logaritmos se deduce sencillísimamente de los principios elementales del cálculo integral.

La función $\log x$ no puede ser algebráica ni su inversa e^x, pues para un mismo valor de x, una función algebráica de x solo tiene un número limitado de valores, que se permutan entre sí.

§ 4.° Integrales de las funciones algebráicas de segundo orden, de las funciones circulares é hiperbólicas

Sea y una función algebráica de segundo orden definida por la ecuación

$$X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0, \tag{1}$$

en la que X_0, X_1, X_2 expresan polinomios de los grados 0, 1, 2.

Toda integral de la forma

$$\int f(x, y)\, dx$$

en la que y expresa una solución de la ecuación (1), podrá obtenerse por medio de funciones algebráicas y logarítmicas.

Desde luego, suponiendo $y = u - \dfrac{X_1}{2X_0}$, la ecuación (1) se reduce á

$$X_0 u^2 + X_2 + \frac{X_1^2}{4X_0} = 0,$$

y u^2 es la raíz de un polinomio de segundo grado. La integral

(2) es pues la integral de una función racional de x y de un radical de la forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ (que se integra reduciendo la expresión irracional á racional por un cambio de variable). La integral (2) depende algebráicamente y aun racionalmente de las integrales simples

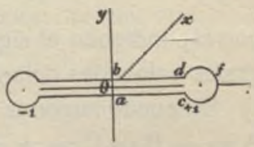
$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

que son arc sen x y $Arg\,Sh\,x$, $Arg\,Ch\,x$.

Vamos á estudiar directamente la función arc sen x, definida por la ecuación

$$\text{arc sen}\, x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2}$$

El radical se supone igual á $+1$, cuando es igual á su límite inferior. Veamos cuantos valores puede adquirir esta función para cada valor de x. Todos los caminos que conducen desde O hasta x pueden reducirse á lazos, seguidos del camino rectilíneo Ox. Sea u el valor de la integral tomada á lo largo del camino rectilíneo. La función bajo el signo integral tiene los dos puntos críticos $+1$ y -1 que dan lugar á dos lazos. Consideremos uno de ellos $bdfca$, habiéndose tomado el radical con el valor $+1$ para el valor inicial $x = 0$. La integral tomada á lo largo del borde bd será



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

La integral tomada á lo largo del círculo es nula; la relativa al borde ca es igual á

$$\int_0^1 \frac{dx}{-\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

En efecto, cuando la variable z ha girado á lo largo de la circunferencia dfc, el radical ha tomado en c un signo contrario al que tenía en d, y es necesario integrar $\frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}}$ á lo largo de ca. La integral relativa al lazo $+1$ es pues π. Se verá igualmente que la integral relativa á -1 es $-\pi$.

Supongamos ahora que la variable z, después de haber recorrido el lazo $+1$, describa todavía este lazo. El radical toma á la salida del lazo un valor igual y de signo contrario al que tenía á su entrada. Si z describe por segunda vez dicho lazo, la integral crecerá, no en π, sino en $-\pi$, lo que dará o para su valor total, después de haber descrito dos veces el lazo. Si se describiese por tercera vez el lazo, se obtendría de nuevo π para valor de la integral, y el valor del radical, á la salida, sería -1, y así sucesivamente.

Si z, después de haber descrito el lazo $+1$, describe el -1, la integral adquirirá el valor $\pi-(-\pi)$ ó 2π, y el radical vuelve á tomar en el origen el valor $+1$.

De una manera general: Llamemos A, B, C, ... á los valores de la integral tomada á lo largo de uno de los dos lazos, y supongamos que, después de haber recorrido varias veces en un orden cualquiera los lazos, la variable z describe el contorno rectilíneo Ox, la integral tomará el valor general

$$A - B + C - D \ldots\ldots \pm F \mp u,$$

correspondiendo el signo $+$ ó $-$ á que el número de las integrales colocadas delante de u sea par ó impar.

Se puede suponer siempre $A \neq B$, $B \neq C$, ... Ahora bien $A = -B = C = \pm\pi$; luego el valor general de la integral que hemos llamado arc sen x es

$$2n\pi + u \quad \text{ó} \quad (2n+1)\pi - u,$$

expresando n un número entero. La función inversa de arc sen x ó sen u gozará de las propiedades siguientes:

$$\operatorname{sen}(2n\pi + u) = \operatorname{sen} u, \qquad \operatorname{sen}(2n\pi + \pi - u) = \operatorname{sen} u.$$

Es fácil ver que la función definida por la ecuación

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1 - x^2}, \tag{3}$$

es monódroma. Solo podría haber excepción en la regla, si x se hallase en la proximidad de $+1$ ó -1 (119); pero si se hace $x = 1 - \xi^2$, se tiene

$$\frac{d\xi\, d\xi}{du} = \sqrt{2\xi^2 - \xi^4} \quad \text{ó} \quad \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \xi^2},$$

para $x = 1$, $\xi = 0$. Pero ξ es monódroma alrededor del punto para el que $\xi = 0$; luego x es también monódroma alrededor del punto para el que $x = 1$. Se vería igualmente que x no deja de ser monódroma alrededor del punto -1. Así pues, la ecuación (2) define á sen x como función de u, monódroma en toda la extensión del plano.

§ 5.º Fórmula fundamental de la Trigonometría

122. La fórmula fundamental de la Trigonometría puede deducirse del cálculo integral, pues tenemos que

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sen}\, x;$$

y adoptando esta fórmula como definición de arc sen x, se tendrá para la integral de la ecuación

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0, \tag{1}$$

$$\text{arc sen}\, x + \text{arc sen}\, y = \text{arc sen}\, c, \tag{2}$$

expresando c una constante. Pero se puede integrar de otro modo la ecuación diferencial, y escribirla así

$$dx\sqrt{1 - y^2} + dy\sqrt{1 - x^2} = 0$$

ó

$$\int dx\sqrt{1 - y^2} + \int dy\sqrt{1 - x^2} = a,$$

en la que a es una constante; é integrando por partes,

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}-\int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right)=a.$$

Pero en virtud de la ecuación diferencial (1)

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=a$$

y haciendo en (2) $x=0$, resulta $y=c$. Haciendo en (3) $x=0$, $y=c$; luego

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c; \qquad (3)$$

llamando sen x á la función inversa de arc sen x y haciendo arc sen $x=a$, arc sen $y=b$, tenemos $a+b=$ arc sen c; y tendremos en vez de (3)

$$\operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 b}+\operatorname{sen} b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}=\operatorname{sen}(a+b).$$

§ 6.º Método general para el estudio de las funciones definidas por ecuaciones diferenciales

123. *Lema I.* Sea $f(x)$ una función sinéctica de la variable imaginaria x, en el círculo descrito desde x_0 como centro con radio r. Llamemos M al máximo del módulo de la función $f(x)$ en el círculo de radio r. Si en la fórmula

$$f^n(x_0)=\frac{n!}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta,$$

se sustituye cada elemento de la integral definida por la cantidad $\mathrm{M}d\theta$, mayor que su módulo, se aumenta el módulo de la integral definida, que se reduce á

$$\operatorname{mod} f^n(x_0)<n!\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}.$$

Lema II. Sea $f(x, y, z)$ una función sinéctica respecto á x, y, z, hallándose estas variables en círculos de radios r, r' .... descritos desde x_0, y_0, z_0 como centros.

Sustituyendo análogamente cada elemento por $Md\theta d\theta' d\theta''$ en la fórmula conocida

$$D^{n+n'+n''}_{xyz} f(x_0, y_0, z_0) = n!\, n'!\, n''!\, \frac{r^{-n} r'^{-n'} r''^{-n''}}{(2\pi)^3}$$

$$\times \iiint_0^{2\pi} f(x_0 + re^{\theta i}, y_0 + r'e^{\theta' i},$$

$$z_0 + r''e^{\theta'' i})\, e^{-(n\theta + n'\theta' + n''\theta'')} d\theta\, d\theta'\, d\theta''$$

se reducirá á

$$\text{mod}\, D^{n+n'+n''}_{xyz} f(x_0, y_0, z_0) < n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Lema III. Es fácil componer una función cuyas derivadas parciales tengan en x_0, y_0, z_0 valores iguales á los límites asignados para los módulos de las derivadas correspondientes de la función propuesta $f(x, y, z)$.

Sea, en efecto, la función

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r'}\right)\left(1 - \frac{z - z_0}{r''}\right)}.$$

que se desarrolla en serie convergente, mientras que los módulos de las diferencias $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son respectivamente menores que r, r', r''. El término general de la serie es de la forma

$$M \frac{(x - x_0)^n (y - y_0)^{n'} (z - z_0)^{n''}}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Si se toma una derivada cualquiera, $D^{n+n'+n''}_{xyz}$ de la función $\varphi(x, y, z)$, y se hace en ella $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, el término arriba escrito da

$$n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}},$$

y los resultados dados por los demás se anulan. Luego

$$[D^{n+n'+n''}_{xyz} \varphi(x, y, z)]_0 = n!\, n'!\, n''!\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Así, en x_0, y_0, z_0, las derivadas de la función φ son límites superiores de los módulos de las derivadas de la función f.

Para demostrar con auxilio de estos principios debidos á Cauchy, la existencia de las funciones integrales, consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f(z, u);$$

la variable z parte del punto $z = z_0$, teniendo la función el valor inicial u_0. Supondremos que la derivada $f(z, u)$ es una función sinéctica de z y u en la proximidad de los valores z_0 y u_0.

Representemos las variables por $z_0 + z$, $u_0 + u$; la variable partirá de $z = 0$ teniendo u el valor inicial $u = 0$. Sea M el máximo del módulo de f, y ρ, r los radios de las circunferencias de sinectitud. Si la ecuación admite una integral sinéctica, tendremos

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du}{dz} = f(u, z) \\
&\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du}\frac{du}{dz} \\
&\frac{d^3u}{dz^3} = \frac{d^2f}{dz^2} + 2\frac{d^2f}{dz\,du}\frac{du}{dz} + \frac{d^2f}{du^2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

que se deduce por derivación.

Supongamos que en los segundos miembros se sustituyan los valores de f y de sus derivadas parciales, para $z = 0$ y $u = 0$, por sus módulos. La primera dará el módulo de $\left(\frac{du}{dz}\right)_0$. Sustituyendo este valor en la segunda, se tendrá un límite superior del módulo de $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0$. Sustituyendo estos valores en la tercera, se tendrá un límite superior del módulo de $\left(\frac{d^3u}{d^3z}\right)_0$, y así sucesivamente.

En virtud del lema III, las derivadas parciales de la función

$f(z, u)$, para $z = 0$ y $u = 0$, tienen valores cuyos módulos son menores que las derivadas correspondientes de la función

$$\varphi(z, u) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)}.$$

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{v}{r}\right)}, \tag{6}$$

en la que damos á la función v el valor inicial $v = 0$ para $z = 0$. Si esta nueva ecuación admite una integral sinéctica, se obtendrán sus derivadas sucesivas por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{dz} = \varphi(z, v) \\ &\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dz} \\ &\frac{d^3v}{dz^3} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dz\,dv}\frac{dv}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dv^2}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dv}\frac{d^2v}{dz^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

análogas á las ecuaciones (5). Cuando se sustituye en ellas $z = 0$ y $v = 0$, la función φ y sus derivadas parciales adquieren todas valores positivos, por lo que los segundos miembros son sumas de términos positivos; luego se obtienen para $\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0$, ... valores positivos. Así pues la función v tiene, para $z = 0$, todas sus derivadas reales y positivas.

Comparemos las ecuaciones (5) y (7). Se ve desde luego que $\operatorname{mod}\left(\frac{du}{dz}\right)_0 < \operatorname{mod}\left(\frac{dv}{dz}\right)_0$, y así sucesivamente; luego, si existen las funciones u y v, las derivadas de la primera, para $z = 0$, tienen valores cuyos módulos son respectivamente menores que las derivadas de la segunda. Pero la función v existe, porque la integral de la ecuación (6) es

$$v - \frac{v^2}{2r} = -\mathrm{M}\rho\mathrm{L}\left(1 - \frac{z}{\rho}\right), \tag{8}$$

anúlándose v con z. Esta ecuación define una función implícita v que se anula con z, permaneciendo sinéctica para todos los valores de la variable z inferiores ó iguales á cierto módulo R que se puede asignar, pues la función v permanece monódroma hasta que las dos raíces de la ecuación (8) se hacen iguales, lo que sucede cuando la derivada $1 - \dfrac{v}{r}$ del primer miembro con relación á v se anula, es decir, cuando $v = r$. El valor correspondiente R de z, se deduce de la ecuación

$$\mathrm{L}\left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\rho}\right) = -\frac{r}{2\mathrm{M}\rho}.$$

Si se llama A al máximo del módulo de v en el círculo de radio R, tendremos, según el lema I,

$$\left(\frac{d^n v}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^n}; \quad \text{luego} \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^n}.$$

Resulta pues que la serie

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots \tag{9}$$

ordenada según las potencias crecientes de z, es convergente para todos los valores de z cuyos módulos son menores que R, porque teniendo el término general de la serie un módulo $< \left(\dfrac{\operatorname{mod} z}{\mathrm{R}}\right)^n \mathrm{A}$, se ve que, si el módulo de z es $<$R, la serie de los módulos es convergente, y por tanto la serie propuesta. Esta serie convergente define una función sinéctica en el círculo de radio R.

Falta hacer ver que la función u definida por la serie (9), satisface á la ecuación propuesta (4). Si en esta ecuación se sustituye u por su valor, se tiene por una parte

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z}{1} + \ldots\ldots$$

y por otra $f(z, u) = f_0 + f_0' \frac{z}{1} + f_0'' \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$

llamando $f, f'', \ldots\ldots$ á las derivadas totales de f calculadas por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} f' = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dz} \\ f'' = \dfrac{d^2f}{dz^2} + 2\dfrac{d^2f}{dz\,du}\dfrac{du}{dz} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Se hará en estas ecuaciones $z = 0$, $u = 0$, y se sustituirán $\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \ldots\ldots$ por sus valores deducidos de las ecuaciones (5).

Pero los segundos miembros de la ecuaciones (5) y (10) son entonces idénticamente los mismos; luego

$$f_0' = \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \quad f_0'' = \left(\frac{d^3u}{dz^3}\right)_0, \ldots\ldots$$

y la ecuación diferencial queda verificada.

124. Aplicación á las ecuaciones simultáneas. Sean las m ecuaciones simultáneas

$$\frac{du}{dz} = f(z, u, u', \ldots\ldots), \quad \frac{du'}{dz} = f_1(z, u, u', \ldots\ldots), \ldots\ldots,$$

en las cuales suponemos que la variable z parte de $z = 0$, teniendo las funciones $u, u', \ldots\ldots$ por valores iniciales cero.

Las derivadas son funciones sinécticas con relación á $z, u, u', \ldots\ldots$, mientras que los módulos de estas variable permanecen inferiores á ρ, r, r', . , . . . Llamemos M, M_1, ... á los máximos de los módulos de las funciones f, f_1, ... en esta extensión, y hagamos

$$\varphi = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)\left(1 - \frac{u}{r}\right)\left(1 - \frac{u'}{r'}\right)\ldots\ldots}.$$

En virtud del lema III, las derivadas parciales de las funciones f, f_1, ... tienen para $z = 0$, $u = 0$, ... valores cuyos módulos son menores que las derivadas correspondientes de las funciones $M\varphi$, $M_1\varphi$, ... Si se comparan las ecuaciones diferenciales propuestas á las ecuaciones diferenciales simultáneas

$$\frac{dv}{dz} = M\varphi\,(z, v, v', \ldots\ldots), \quad \frac{dv'}{dz} = M_1\varphi\,(z, v, v', \ldots\ldots), \ldots\ldots$$

se verá, como anteriormente, que las derivadas

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{du'}{dz}\right)_0, \ldots\ldots, \quad \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2u'}{dz^2}\right)_0, \ldots\ldots$$

deducidas de las primeras por un cálculo sucesivo, tienen módulos menores que las cantidades reales y positivas

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{dv'}{dz}\right)_0, \ldots\ldots, \quad \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2v'}{dz^2}\right)_0, \ldots\ldots,$$

que se deducen de las segundas por un cálculo análogo.

Pero estas últimas ecuaciones pueden integrarse fácilmente, pues se tiene desde luego

$$\frac{dv}{M} = \frac{dv'}{M_1} = \ldots\ldots \quad \text{de donde} \quad \frac{v}{M} = \frac{v'}{M_1} = \ldots\ldots = k.$$

Si se sustituyen los valores de v, v', ... en una de ellas resulta

$$\left(1 - \frac{M}{r}k\right)\left(1 - \frac{M_1}{r'}k\right)\ldots\ldots dk = \frac{dz}{1 - \frac{z}{\rho}}, \qquad (12)$$

ó integrando:

$$k - \left(\frac{\mathrm{M}}{r} + \frac{\mathrm{M}_1}{r'} + \ldots\ldots\right)\frac{k^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{\mathrm{MM}_1}{rr'} + \ldots\ldots\right)\frac{k^3}{2} - \ldots\ldots = - \rho \mathrm{L}\left(1 - \frac{z}{\rho}\right). \quad (13)$$

Esta ecuación define una función k que se anula con z, permaneciendo sinéctica hasta cierto módulo R. Si se llama A al máximo del módulo de la función k en esta extensión, se tiene

$$\left(\frac{d^n k}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{R}^n};$$

y se tendrá con mayor razón,

$$\mathrm{mod}\left(\frac{d^n u}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{R}^n}, \quad \mathrm{mod}\left(\frac{d^n u'}{dz^n}\right)_0 < n!\,\frac{\mathrm{M}_1\mathrm{A}}{\mathrm{R}^n}, \ \ldots\ldots$$

Resulta pues, que las series

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots., \quad u' = \left(\frac{du'}{dz}\right)_0 \frac{z}{1} + \ldots., \ \ldots.$$

son convergentes para todos los valores de z cuyo módulo es menor que R. Estas series definen funciones sinécticas en el círculo de radio R, y satisfacen á las ecuaciones diferenciales propuestas.

Es fácil obtener el valor del radio de convergencia R. Anulándose la función k con z, permanece monódroma hasta que se hacen iguales dos raíces de la ecuación (13). Esto se verifica cuando la derivada del primer miembro de la ecuación (13), con relación á v, se anula. Los valores de k que anulan á esta derivada, son $\frac{r}{\mathrm{M}}, \frac{r'}{\mathrm{M}_1}, \ldots\ldots$ Sustituyendo el menor de estos valores en la ecuación (13), se deducirá el valor correspondiente R, real y positivo, de z.

125. CASO DE SER INFINITA LA DERIVADA. Supongamos que se parte del punto z_0 con el valor inicial u_0, y que al llegar la va-

riable al punto z_1, la función adquiera un valor u_1 tal, que para $z = z_1$ y $u = u_1$ la derivada $f(u, z)$ se haga infinita, de modo que su inversa $\frac{1}{f(u, z)}$ quede finita y continua en la proximidad de estos valores. Hagamos

$$z = z_1 + z', \; u = u_1 + u' \quad \text{de donde} \quad \frac{du'}{dz'} = f(u_1 + u', \; z_1 + z').$$

Si se considera á z' como función de u', esta función deberá satisfacer á la ecuación diferencial

$$\frac{dz'}{du'} = \frac{1}{f(u_1 + u', \; z_1 + z')},$$

y admitir el valor inicial $z' = 0$ para $u' = 0$.

Permaneciendo finita y continua la función

$$\frac{1}{f(u_1 + u', \; z_1 + z')},$$

es desarrollable en una serie convergente, ordenada según las potencias crecientes de u' y z', de manera que

$$\frac{dz'}{du'} = au'^m + bz' + cu'z' + cz'^2 + \ldots . \qquad (14)$$

Si el segundo miembro no contuviese un término independiente de z, la ecuación diferencial podría escribirse bajo la forma

$$\frac{dz'}{du'} = z'\,(b + cu' + ez' + \ldots .)$$

de la que se deduciría

$$\log \frac{z'}{z'_1} = \int_{u'_1}^{u'} (b + cu' + ez' + \ldots .)\, du',$$

llamando z'_1 al valor de z que corresponde á u'_1. Cuando z' y u' tienden hacia cero, el segundo miembro tiende hacia un valor finito, mientras que el primero crece indefinidamente. En este caso la ecuación diferencial no admite ninguna integral que se anule con z'. Por consiguiente, la serie contiene por lo menos un término independiente de z', y representaremos por au'^m aquél de los términos de este género que tenga menor grado.

Con el valor inicial $z' = 0$ para $u' = 0$, la ecuación diferencial (14) define una función de u' sinéctica en la proximidad de $u' = 0$, y, por consiguiente, desarrollable en serie convergente, ordenada según las potencias enteras y crecientes de u'.

Sea $$z' = A_0 u^\alpha + A_1 u^{\alpha+1} + \ldots\ldots$$

esta función. La ecuación diferencial debe quedar satisfecha, si se sustituye dicho valor en vez de z', y se tendrá

$$A_0 \alpha u'^{\alpha-1} + A_1 (\alpha + 1) u'^\alpha + \ldots\ldots = au'^m + bA_0 u'^\alpha + \ldots\ldots$$

Identificando estas dos series, iguales para todos los valores de u' inferiores á cierto módulo, se determinarán los exponentes y los coeficientes de la serie z'. Así tendremos

$$\alpha = m + 1, \qquad A_0 = \frac{a}{\alpha} = \frac{a}{m+1},$$

de donde $$z' = \frac{a}{m+1} u'^{m+1} + \ldots\ldots \tag{15}$$

Recíprocamente, si se considera u' como una función de z', esta función quedará determinada implícitamente por la ecuación (15). A cada valor muy pequeño de z' corresponden $(m+1)$ valores muy pequeños de u', que son sensiblemente iguales á los de la ecuación binomia

$$\frac{a}{m+1} u'^{m+1} = z', \quad \text{siendo aproximadamente} \quad u = B_0 z'^{\frac{1}{m+1}},$$

expresando B_0 la cantidad $\left(\frac{m+1}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$.

Hagamos $z' = \rho e^{\theta i}$, y llamemos $u'_0, u'_1, \ldots, u'_m$ á los $m + 1$

valores de u' dispuestos según los vértices de un polígono regular, á saber:

$$u'_0 = B_0\, \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta i}{m+1}}, \quad u'_1 = B_0\, \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2\pi}{m+1} i}, \; \ldots\ldots$$

$$u'_m = B_0\, \rho^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\theta+2m\pi}{m+1} i}.$$

Cuando el punto z' describe una circunferencia muy pequeña alrededor del punto $z' = 0$, el argumento aumenta en 2π, u'_0 se cambia en u'_1, u'_1 en u'_2, ... u'_m en u'_0, luego.

TEOREMA II. *Cuando, para un sistema de valores simultáneos* z_1 *y* u_1, *la derivada se hace infinita, si se expresa por* m *el orden de la primera derivada parcial de la función* $\frac{1}{f}$ *con relación á* u *que no se anula, la integral* u *adquiere* $m + 1$ *valores que se permutan entre sí circularmente, cuando la variable* z *gira alrededor del punto* z_1. *Después de* $m + 1$ *vueltas, la función vuelve á su valor primitivo.*

Las funciones algebráicas estudiadas por Puiseux entran en esta categoría (*); y en efecto, cuando en un punto del plano la ecuación admite raíces iguales, la derivada se hace, en general, infinita.

§ 7.° APLICACIÓN Á LAS FUNCIONES SIMPLEMENTE PERIÓDICAS

126. FUNCIÓN e^z. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = u \tag{1}$$

que admite el valor $u = 1$ para $z = 0$. Por ser la derivada una función sinéctica de u, mientras que u conserva un valor finito, la función integral u permanece función monódroma de z. Pero

(*) Briot et Bouquet *Théorie des fonctions doublement périodiques.*

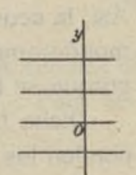
esta función no se hace infinita por ningún valor finito de z, porque hallándose dada la función inversa por la integral definida

$$z = \int_1^u \frac{du}{u}, \tag{2}$$

si u se aleja al infinito según una línea cualquiera, z va también al infinito. Permaneciendo finita, continua, monódroma y monógena la función u definida por la ecuación diferencial, para todos los valores finitos de z, es una función *sinéctica* de z en toda la extensión del plano.

Dicha función es periódica, porque á un mismo valor de u corresponden todos los valores que puede adquirir la integral definida (2), cuando se va del punto 1 al punto u por caminos distintos, y por hacerse infinita la función colocada bajo el signo $\int$ para $u = 0$, todos estos caminos pueden reducirse al camino rectilíneo aumentado en un número cualquiera de veces el contorno elemental que envuelve al punto $u = 0$. Si pues z expresa la integral rectilínea y ω la integral á lo largo del contorno elemental, se ve que á cada valor de u corresponde una infinidad de valores de z en progresión aritmética, esto es, $z + m\omega$, siendo m un entero cualquiera positivo ó negativo; luego u es una función simplemente periódica de z, cuyo periodo ω tiene el valor $2\pi i$. La función u no es más que la función e^z, cuando z es real, y conviene representarla con el mismo signo, cuando z es imaginaria.

Sea u_1 el valor de la función para un valor determinado z_1 de la variable. Hagamos $z = z_1 + z'$, $u = u_1 u'$, siendo z' una variable y u' la nueva función. La ecuación diferencial se reduce á $\frac{du'}{dz'} = u'$, y todavía $u' = 1$ para $z' = 0$; luego $u' = e^{z'}$, lo que da la relación fundamental $e^{z_1 + z'} = e^{z_1} . e^{z'}$.



Si trazamos, en el plano, paralelas al eje ox, á igual distancia 2π las unas de las otras, estas paralelas dividirán al plano en bandas iguales. Cuando z se mueve en una de ellas, la función e^z pasa por todos los valores posibles y una sola vez por cada uno, haciéndose infinita, si z se aleja al infinito hacia la derecha, y nula si se aleja hacia la izquierda. Cuando z pasa de una banda á otra, la función vuelve á tomar periódicamente el el mismo valor.

127. Función tg. z. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = 1 + u^2 \tag{3}$$

que admite el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$.

Siendo la derivada una función sinéctica de u, la integral u permanece monódroma, mientras conserva un valor finito. Pero puede suceder ahora que u se haga infinita para un valor finito de z, porque la integral definida

$$z = \int_0^u \frac{du}{1 + u^2} \tag{4}$$

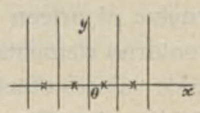
tiende hacia un valor finito cuando u se aleja al infinito en una dirección cualquiera. Sea pues α un valor finito de z que hace á u infinita. Para ver lo que sucede en la proximidad de este punto $z = \alpha$, haremos $z = \alpha + z'$, $u = \frac{1}{v}$, y la ecuación diferencial se reduce á

$$\frac{dv}{dz'} = -(1 + v^2), \tag{5}$$

reduciéndose v á cero para $z' = 0$. Permaneciendo la función v monódroma en la proximidad de $z = \alpha$, lo mismo sucede á u. Así, la ecuación diferencial propuesta define una función de z monódroma en toda la extensión del plano; pero no es sinéctica porque se hace infinita para valores finitos de z.

Dicha función es periódica. A un mismo valor de u corresponden los valores de z dados por la integral definida (4), en la cual debe suponerse que la línea de integración toma todas las formas posibles. Haciéndose infinita la función $\frac{1}{1 + u^2}$, para

$u = +i$ y $u = -i$, todos los caminos pueden reducirse al camino rectilíneo aumentado en un número cualquiera de contornos elementales, alrededor de uno ú otro de los puntos $u = +i$, $u = -i$. Estos dos contornos elementales dan la misma integral $\omega = \pi$, y á cada valor de u corresponden los valores $z + m\omega$. Así la función u es simplemente periódica y el período es π. Se expresa esta función por el signo $\operatorname{tg} z$, porque para los valores reales de z se confunde con la tangente trigonométrica del ángulo z.



Si se trazan paralelas al eje de las y, á la distancia π unas de otras, dividirán el plano en bandas iguales. Cuando z se mueve en una banda, la función $\operatorname{tg} z$ pasa por todos los valores posibles y una vez por cada uno de ellos. Cuando la variable pasa de una banda á otra, la función vuelve á adquirir periódicamente el mismo valor. La función $\operatorname{tg} z$ solo tiene un cero y un infinito en cada banda, en la primera el cero es $z = 0$ y el infinito $z = \frac{\pi}{2}$.

La función $\operatorname{tg} z$ es impar, porque si en la integral definida (4) se hace marchar á u según dos caminos opuestos, respecto al origen $u = 0$, se obtendrán para z valores iguales y de signos contrarios. Así

$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z.$$

128. Funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)}, \tag{6}$$

que admite el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$. Se da además el valor inicial de la derivada que expresaremos por U_0. Para estudiar la función inversa

$$z = \int_0^u \frac{du}{G\sqrt{(u-a)(u-b)}},$$

señalaremos en el plano dos puntos a y b que corresponden á los valores $u = a$, $u = b$. Expresemos por (A) el contorno elemental que se obtiene cuando la variable u va en línea recta desde el origen O hasta un punto muy próximo del a, describe una circunferencia muy pequeña alrededor de este punto, y vuelve al origen por la misma recta. Expresemos por (B) el contorno elemental que envuelve el punto b, y llamemos A y B á los valores obtenidos por la integral definida, cuando la variable u describe cada uno de estos contornos con el valor inicial U_0 del radical.

Observaremos desde luego que la integral relativa á cada uno de los círculos pequeños es infinitamente pequeña. Cuando la variable u, después de haber recorrido la recta Oa, describe una de las circunferencias alrededor del punto a, el radical cambia de signo y vuelve al origen con el valor $-U_0$. En la segunda parte del movimiento, la recta aO se recorre en sentido contrario con un radical cambiado de signo, y por consiguiente los elementos de la integral se reproducen con el mismo signo, por lo que la integral A, relativa al contorno elemental (A) es igual á dos veces la integral rectilínea según Oa. Lo mismo se dirá respecto al contorno elemental B.

Esto sentado, todos los caminos que van del origen O á un punto cualquiera M, pueden reducirse al camino rectilíneo, precedido de una combinación cualquiera de los contornos elementales (A) y (B): 1.° Los que se reducen al camino rectilíneo OM, sin pasar por ninguno de los puntos a y b, dan la integral rectilínea que llamamos z. 2.° Los que se reducen al contorno elemental (A) seguido del camino rectilíneo OM, dan la integral $A - z$, porque al cambiar de signo el radical, después de haber recorrido el contorno elemental (A), el camino rectilíneo da un resultado de signo contrario $-z$, lo que hace $A - z$. 3.° Los caminos que se reducen al contorno elemental (B), seguido del camino rectilíneo OM dan $B - z$. 4.° Si la variable u describe primero el contorno elemental (A), después el contorno elemental (B) y por fin el camino rectilíneo OM, el primer contorno dará A; habiendo cambiado el radical de signo, el segundo dará $-B$, y por cambiar el radical por segunda vez de signo, vuelve á tomar en el origen su valor primitivo $+U_0$; de manera que el camino rectilíneo dará de nuevo el valor z, en resumen, $A - B + z$. En general, el doble contorno elemental (A) + (B), precediendo á un camino cualquiera, aumenta la integral en una cantidad constante $\omega = A - B$. Y como puede introducirse este doble contorno cuantas veces se quiera, se añadirá á la integral un múltiplo cualquiera de ω.

Hemos encontrado pues, una primera serie $z + m\omega$ y enseguida un segundo valor $A - z$ que aumentado en un múltiplo cualquiera de ω, da una segunda serie $A - z + m\omega$. El tercer valor $B - z$ entra en las series anteriores, porque se tiene $B - z = A - z - \omega$.

Resulta pues, que á cada valor de u corresponden dos series de valores de z, á saber, $z + m\omega$ y $A - z + m\omega$ en progresión aritmética. Así la función u definida por la ecuación diferencial es simplemente periódica. En cada banda la función pasa dos veces por el mismo valor, y la suma de los dos valores de z, que en cada banda dan el mismo valor de u, tienen una suma constante A, abstracción hecha de los múltiplos del período ω.

La ecuación particular

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{1 - u^2},$$

á la que se unen las condiciones $u = 0$ y $U_0 = 1$ para $z = 0$, origina la función sinéctica impar y simplemente periódica llamada sen z. Siendo la integral rectilínea desde $u = 0$ hasta $u = 1$ igual á $\frac{\pi}{2}$, se tiene $A = \pi$, por otra parte $B = -A$; luego $\omega = 2\pi$. A cada valor de u corresponden dos valores de z, cuya suma constante es igual á π. Se tiene pues la relación

$$\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z \quad \text{y por tanto} \quad \operatorname{sen}(\pi + z) = -\operatorname{sen} z$$

Si se hace $u' = \sqrt{1 - u^2}$, la ecuación diferencial se reduce á

$$\frac{du'}{dz} = -\sqrt{1 - u'^2},$$

teniendo u' el valor inicial $u' = 1$ para $z = 0$, esta nueva función u', sinéctica con relación á z y simplemente periódica, se llama $\cos z$.

129. Propiedades. Una función simplemente periódica, monódroma y monógena se hace infinita, por lo menos una vez en el intervalo de cada período. Esta función debe también hacerse nula y pasar por todos los valores posibles.

La más simple de todas las funciones simplemente periódicas es la función sinéctica $e^{\frac{2\pi i}{\omega}}$, que admite el período ω. Si se divide el plano en bandas iguales por rectas paralelas á una dirección arbitraria, trazadas á la distancia ω, la función adquiere periódicamente el mismo valor en cada una de las bandas, en los puntos correspondientes, es decir, situados en una paralela á una misma dirección y á la distancia ω unos de otros. Dicha función solo pasa una vez por el mismo valor en cada banda, se hace infinita para $z = +\infty$ y nula para $z = -\infty$.

La función
$$\operatorname{tg}\frac{\pi z}{\omega} = \frac{e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} - 1}{i\left(e^{\frac{2\pi z i}{\omega}} + 1\right)}$$
como la precedente, no pasa más que una vez por el mismo valor en cada banda. Admite un solo infinito y un solo cero simples en cada banda.

Por medio de una función monódroma, simplemente periódica $\varphi(z)$ con un solo infinito, se pueden formar funciones simplemente periódicas, con el mismo período, y en cada período infinitos cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ y ceros cualesquiera en igual número $a, b, c, \ldots\ldots$ Basta para ello tomar la función

$$F(z) = A\,\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{\varphi(z) - \varphi(\alpha)} \times \frac{\varphi(z) - \varphi(b)}{\varphi(z) - \varphi(\beta)} \times \ldots\ldots$$

Cuando una función monódroma y monógena tiene una infinidad de infinitos colocados en línea recta y á igual distancia, y una infinidad de ceros colocados también en una misma línea paralela á la precedente y á igual distancia, esta función es simplemente periódica porque se puede formar una función simplemente periódica con infinitos y ceros dados, y según el teorema V (pág. 238, t. II), la función propuesta será igual á esta función periódica multiplicada por una cantidad constante.

Mas generalmente, consideremos una función $f(z)$ cuyos infinitos y ceros se hallen dispuestos por grupos iguales y equidistantes según una misma dirección. Vamos á ver que en cada grupo hay tantos ceros como infinitos, pues si suponemos que $f(z)$ contiene más ceros que infinitos, se podrá formar una función $F(z)$ simplemente periódica que admita todos los infinitos de $f(z)$ y una parte de los ceros. El cociente $\frac{f(z)}{F(z)}$, por no tener ya infinitos, será constante; luego $f(z)$ no puede tener más ceros que $F(z)$. Supongamos al contrario, que $f(z)$ tenga menos ceros que infinitos; formaremos una función simplemente periódica $F(z)$ que admita todos los ceros de $f(z)$ y una parte de los infinitos; y por no tener el cociente $\frac{F(z)}{f(z)}$ infinitos, será constante; luego $f(z)$ tiene tantos ceros como $F(z)$; y $f(z)$ tiene tantos ceros como infinitos. Si llamamos $F(z)$ á la función simplemente periódica que admite estos ceros é infinitos, el cociente $\frac{f(z)}{F(z)}$ es constante y $f(z)$ es simplemente periódica.

Si la función periódica no fuese monódroma y tomase m valores para cada valor de z, sería raíz de una ecuación de grado m, cuyos coeficientes fuesen funciones periódicas monódromas; porque toda función simétrica de los m valores de la función, es una función monódroma.

Se puede pues caracterizar el orden ó grado de una función simplemente periódica por el número de infinitos que admite en cada banda. Si es monódroma y admite n infinitos, se expresará por una función racional en $e^{\frac{2\pi z i}{\omega}}$ del grado n.

§ 8.º NOCIONES DE LAS FUNCIONES DOBLEMENTE PERIÓDICAS

130. ORIGEN. Sea la función definida por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dz} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}$$

con el valor inicial $u = 0$ para $z = 0$, y propongámonos estudiar la función inversa

$$z = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)}}.$$

131. LOS PERÍODOS. Señalemos en el plano que sirve para representar la variación de u los tres puntos a, b, c. Designemos por (A), (B), (C) los tres contornos elementales correspondientes, y llamemos A, B, C á los valores de la integral definida relativa á estos contornos. Todos los caminos que van desde el origen á un punto cualquiera del plano M, pueden reducirse al camino rectilíneo OM, ó á este camino rectilíneo precedido de uno de los contornos elementales ó de una combinación de estos contornos. Llamemos z á la integral rectilínea OM. Todos los caminos que se reducen al camino rectilíneo, sin pasar por uno de los puntos a, b, c, dan el mismo valor z.

Supongamos que la variable u describa desde luego el contorno elemental (A); por cambiar el radical de signo, volverá al origen con el valor $-U_0$, de manera que, si u recorre enseguida el camino rectilíneo OM, la integral tomará el valor $-z$, en resumen $A-z$. Supongamos ahora que la variable, después de haber descrito el contorno (A) describa otro contorno elemental (B). Por un segundo cambio de signo, el radical volverá al origen con su valor inicial U_0, y la integral tendrá entonces el valor $A-B$. Si se marcha enseguida, siguiendo un camino cualquiera, se ve que la integral quedará aumentada en la cantidad constante $A-B$; de manera que si se sigue después el camino rectilíneo OM, se tendrá $A-B+z$.

Pudiendo la variable u describir el doble contorno (A) + (B) tantas veces como se quiera, la integral quedará aumentada en un múltiplo cualquiera de la cantidad constante $\omega = A - B$, que constituye así un período. Se tendrán además otros dos períodos $\omega' = A - C$, $\omega'' = B - C$; pero como $\omega'' = \omega' - \omega$, este tercero entra en los dos primeros. Si se recorriese dos veces sucesivamente el mismo contorno (A), se volvería al valor inicial U_0 del radical, pero el valor de la integral $A - A$ sería nulo; por consiguiente solo existen los dos períodos obtenidos.

Resulta pues, que á cada valor de u corresponden dos series de valores de z, representados por las fórmulas

$$z + m\omega + m'\omega', \qquad A - z + m\omega + m'\omega',$$

en las cuales m y m' expresan números enteros cualesquiera positivos ó negativos. Los valores $B - z$, $C - z$, que se obtendrían recorriendo al principio uno de los contornos (B) ó (C), y después el camino rectilíneo OM, entran en la segunda serie; porque

$$B = A + B - A = A - \omega, \qquad C = A + C - A = A - \omega'.$$

Recíprocamente, u es una función monódroma de z, doblemente periódica; y cuando la variable z aumenta ó disminuye en una de las cantidades ω y ω', la función vuelve á adquirir su primitivo valor.

En el plano que sirve para representar las variaciones de z, tomaremos á continuación unas de otras, las longitudes oo_1, o_1o_2, o_2o_3, ... iguales al primer período ω y las longitudes oo', $o'o''$, $o''o'''$, ... iguales al segundo período ω'; y si trazamos por los puntos o, o', o'', ... paralelas á oo_1 y por o, o_1, o_2, ... paralelas á oo', quedará dividido el plano en paralelógramos iguales, en los cuales la función u adquirirá periódicamente el mismo valor.

En cada paralelógramo, la función u pasa dos veces por todos los estados de magnitud, y la suma de los dos valores de z, que corresponden al mismo valor de u, es constante é igual á A, despreciando los múltiplos de los períodos. La función, en cada paralelógramo admite dos ceros simples $z = 0$, $z = A$ y un infinito doble $z = \frac{A}{2}$.

132. Propiedades generales. Para que existan dos períodos, es necesario que la relación $\frac{\omega'}{\omega}$ sea imaginaria, porque de otro modo, teniendo las dos cantidades geométricas la misma dirección, los paralelógramos se reducirían á rectas, lo que es fácil ver directamente, pues, siendo $\omega = n\omega''$ y $\omega' = n'\omega''$, donde n y n' son primos entre sí, tendremos

$$p\omega + q\omega' = (pn + qn')\,\omega'';$$

las combinaciones de los dos períodos son múltiplos de ω'', y recíprocamente por poderse elegir p y q de modo que $pn + qn'$ sea igual á un entero dado, estas combinaciones darán todos los múltiplos de ω''. Así, los dos períodos ω y ω' se reducen al período ω'', y la función es simplemente periódica.

Se pueden elegir de infinidad de maneras los períodos de una función doblemente periódica. Para fijar las ideas, supongamos que la función sea monódroma y monógena. Sea o un punto cualquiera del plano para el que la función tiene el valor u_0 y la derivada el valor u'_0. A este punto corresponde una infinidad de otros puntos para los que la función y su derivada vuelven á adquirir los mismos valores u_0 y u'_0. Unamos dos cualesquiera de estos puntos o y o_1. Si en la recta oo_1 y en el intervalo que comprende no existe ningún otro punto, se podrá tomar la magnitud geométrica oo_1 como un primer período ω; porque al tener la función y su derivada el mismo valor en o y o_1, si se mueve la variable z, á partir de estos puntos, según rectas iguales y paralelas, la función y su derivada tendrán los mismos valores en los puntos correspondientes. Resulta pues, que en la recta indefinida determinada por o y o_1, existe una infinidad de puntos correspondientes o, o_1, o_2, ... separados por el mismo intervalo ω. Si ahora hacemos moverse la recta paralelamente á su posición primitiva, hasta encontrar á otro punto o', en esta nueva posición contendrá una nueva fila de puntos correspondientes, separados por el mismo intervalo ω. Si se unen dos puntos o y o', la magnitud oo' podrá servir de segundo período, etc. La función y su derivada tienen los mismos valores en los puntos homólogos de los paralelógramos formados. Uno cualquiera de éstos se llama *paralelógramo elemental.*

Sean ω y ω' ciertos períodos que forman un paralelógramo elemental. Siendo otros dos períodos ω_1 ω'_1 magnitudes geométricas que van del punto o á dos puntos homólogos, se tendrá

$$\omega_1 = p\omega + q\omega', \qquad \omega'_1 = p'\omega + q'\omega'.$$

Para que estos dos períodos puedan reemplazar á los otros dos y formar un nuevo paralelógramo elemental, es necesario desde luego que p y q sean primos entre sí, como p' y q', y además que, recíprocamente ω y ω' combinaciones de ω_1 y ω'_1, lo que exige que los números enteros p, q, p', q' verifiquen la la relación $pq' - qp' = \pm 1$.

Esta condición expresa que los dos paralelógramos son equivalentes. En efecto, sean

$$\omega = a + bi, \qquad \omega' = a' + b'i';$$

el área del primer paralelógramo es $\pm(ab' - ba')$, y la del segundo

$$\pm [(pa + qa')(p'b + q'b') - (pb + qb')(p'a + q'a')] =$$
$$\pm (pq' - qp')(ab' - ba').$$

Si la condición $pq' - qp' = \pm 1$ no se hubiese verificado, el nuevo paralelógramo sería demasiado grande, y se compondría de varios elementales.

Sea el paralelógramo $oo_1o'_1o'$. Conservando el primer período ω y tomando por segundo la recta que une o con un punto cualquiera o'_1 de la segunda fila, se obtiene un nuevo paralelógramo elemental $oo_1o'_2o'_1$ equivalente al primero; los nuevos períodos son ω y $\omega' + p\omega$, lo que añade á uno de los períodos un múltiplo del otro.

Se vería que se puede pasar, por una serie de transformaciones, de los períodos ω y ω' á los períodos equivalentes ω_1 y ω'_1.

133. PROPIEDADES.—TEOREMA I. *El residuo integral de toda función doblemente periódica, monódroma y monógena, relativo al área de un paralelógramo elemental, es nulo.*

Sea el paralelógramo formado por los dos períodos AB y AC. Consideremos el residuo integral de $f(z)$ relativo al paralelógramo ABCD y la integral definida tomada á lo largo de un contorno en el sentido ABDC. Siendo la función $f(z)$ la misma á lo largo de los lados opuestos AB y CD; pero como los lados opuestos están recorridos en sentido contrario, la integral definida es nula, y por consiguiente el residuo integral es nulo (*).

TEOREMA II. *Toda función doblemente periódica, monódroma y monógena admite por lo menos dos infinitos en cada paralelógramo elemental.*

En efecto, siendo periódica la función, admite un primer infinito en cada paralelógramo. Si solo tuviese un infinito simple $z = \alpha$ en un paralelógramo, se escribiría así:

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \varphi(z),$$

no haciéndose infinita la función $\varphi(z)$ en dicho paralelógramo; y siendo el residuo integral en éste igual á A, no sería nulo; luego hay por lo menos un segundo infinito.

Si la función doblemente periódica admite dos infinitos simples, $z = \alpha$, $z = \beta$ en un paralelógramo, se podrá escribir bajo la forma

$$f(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta} + \varphi(z),$$

no haciéndose $\varphi(z)$ infinita en este paralelógramo; para que el residuo sea nulo, será preciso que $B = -A$. Si la función admite un infinito doble, se tendrá

$$f(z) = \frac{A}{(z - \alpha)^2} + \varphi(z).$$

(*) Este teorema es debido á Hermite

TEOREMA III. *Cada paralelógramo de los períodos contiene tantos ceros como infinitos.*

Sea la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Esta función doblemente periódica, no admite como la propuesta $f(z)$ más que infinitos simples, á saber, los ceros y los infinitos de la función $f(z)$, pues si a es un cero de grado p de $f(z)$ se tendrá

$$f(z) = (z-a)^p \varphi(z),$$

no haciéndose $\varphi(z)$ ni nula ni infinita para $z = a$; luego

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Así, la cantidad a es un infinito simple de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$, y el residuo de esta función, relativo á a es igual á p.

De igual manera, si α es un infinito de grado q de $f(z)$, se tendrá

$$f(z) = (z-\alpha)^{-q} \varphi(z),$$

no siendo $\varphi(z)$ ni nula ni infinita para $z = \alpha$; y tendremos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{q}{z-\alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

de manera que la cantidad α es un infinito simple de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y el residuo correspondiente es igual á $-q$.

En fin, puesto que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ es doblemente periódica, el residuo integral de esta función, relativo al área del paralelógramo es nulo, luego se tiene

$$\Sigma p - \Sigma q = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma p = \Sigma q.$$

COROLARIO. Sea n el número de los infinitos de la función $f(z)$ en cada paralelógramo, el número de los ceros será también n. La función $f(z) - u$ que tiene n infinitos, tiene también

n ceros, lo que manifiesta que $f(z)$ pasa n veces por un valor cualquiera u.

Resulta pues, que puede caracterizar el orden de una función doblemente periódica el número de sus infinitos en cada paralelógramo, porque este número indica cuántas veces pasa la función por cada valor.

§ 9.° Nociones de las integrales y funciones elípticas

134. Definición. Se llaman *integrales elípticas* á los tipos más sencillos á que pueden reducirse las expresiones de la forma

$$V = \int F(x, y)\, dx, \tag{1}$$

en la que F es una función racional de x é y y ésta un radical de la forma

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4} = R,$$

pudiendo también ser la cantidad subradical de tercer grado.

Hasta Fagnano, y Legendre solo se habían estudiado las transcendentes más simples, consideradas como integrales de ciertas diferenciales algebráicas; pero Legendre estudió las nuevas transcendentes

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi$$

y

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \tag{2}$$

á las que llamó *integrales elípticas*, porque la primera permite valuar los arcos de elipse, cuya excentricidad es k, y la segunda por su analogía de expresión con la primera, especialmente de sus diferenciales, dependientes del parámetro φ, *amplitud*, y del parámetro k, *módulo*, no debiendo su existencia dichas integrales á ningún hecho algebráico ó geométrico elemental, sino á su propiedad de integrales.

Además calificó las integrales de *completas* y las representó por $F^1(k)$, $E^1(k)$ cuando la amplitud φ tiene el valor $\frac{\pi}{2}$, para la que el radical $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$ toma tan solo una vez, bajo el signo $\int$, todos los valores comprendidos entre 1 y $\sqrt{1 - k^2}$, por los cuales volvería á pasar, pero en orden inverso, cuando φ pasara desde $\frac{\pi}{2}$ hasta π, después en el directo desde $\varphi = \pi$ hasta $\varphi = \frac{3\pi}{2}, \ldots$ De manera que las funciones E y F crecen en $2E^1$ y $2F^1$ cada vez que la variable φ aumenta en π, y además toman valores equidistantes á una y otra parte de E_1 y de F_1 para valores de φ equidistantes á una y otra parte de $\frac{\pi}{2}$; y por consiguiente no hay más que calcularlas directamente en el intervalo comprendido entre $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Para calcularlas basta desarrollar en series convergentes según las fórmulas

$$\sqrt{1 - u} = 1 - \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{u^2}{3} + \ldots - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \ldots \frac{2n - 1}{2n} \frac{u^n}{2n - 1} - \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u}} = 1 + \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \frac{3}{4} u^2 + \ldots + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \ldots \frac{2n - 1}{2n} u^n + \ldots$$

las dos funciones bajo el signo $\int$, $(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\pm \frac{1}{2}}$, lo que es posible, por ser k y $\operatorname{sen} \varphi$ menores que la unidad; y si multiplicamos por $d\varphi$, indicando además la integración de cada término, tendremos

$$\left.\begin{aligned} E(k, \varphi) &= \varphi - \frac{1}{2} \frac{k^2}{1} \int_0^\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{k^4}{3} \int_0^\varphi \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi - \ldots \\ F(k, \varphi) &= \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \frac{3}{3} k^4 \int_0^\varphi \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Pero en el cálculo integral se ve, empleando la integración por partes, que las integrales de la forma $\int_0^\varphi \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi$ se desdoblan en términos, funciones enteras de sen φ y cos φ y en otras integrales análogas, que se reducen finalmente á la integral $\int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^0 \varphi d\varphi = \varphi$, y por consiguiente los segundos miembros de (3) llegarán á quedar libres del signo $\int$ y desarrollados en series convergentes, cuyos términos serán simplemente trigonométricos ó algebráicos, y se obtendrá:

$$E^1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2\right)^2 - \ldots\ldots\right]$$

$$F^1(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^2\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

La integral $F^1(k)$ menos complicada es la llamada por Legendre de primera especie y la $E^1(k)$ es la *integral elíptica de segunda especie*, según ya se vió (pág. 39).

Para calcular estas integrales y formar una tabla de sus valores, Legendre empleó el *módulo complementario* $k^1 = \sqrt{1 - k^2}$, que le condujo á una serie muy convervente según las potencias de $k'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$ (*).

Para dar una idea de los procedimientos que se han empleado en el cálculo de las integrales elípticas, se puede recordar la transformación de Landen, cuya aplicación repetida indefinidamente á la integral de primera especie $F(k, \varphi)$, hace tender al módulo hacia cero, lo que condujo á Gauss á una importante expresión de la integral completa $F^1(k)$.

Si dividimos por a la función $F(k, \varphi)$ que se reduce á

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1 - k^2)\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

de manera que se escriba el cociente $\dfrac{F(k, \varphi)}{a}$ bajo la forma

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}}, \tag{4}$$

(*) Véase Boussinesq *Cours d'Analyse infinitesimal, Cal. integ. part élém.*, pág. 85.

en la que la b representa la cantidad positiva $a\sqrt{1-k^2} < a$; se trata de sustituirla por una integral de la forma

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\varphi_1 + b_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi_1}},$$

cuya amplitud φ_1 se halle comprendida entre o y $\frac{\pi}{2}$, si la propuesta φ está ya comprendida en el mismo intervalo, expresando a_1 y b_1 respectivamente las dos medias de los dos números dados a y b, la una aritmética $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ y la otra $b_1 = \sqrt{ab}$ geométrica. Como se tiene idénticamente

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

y por consiguiente

$$\frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{4}\frac{a-b}{a+b} < \frac{1}{4}, \tag{5}$$

la diferencia $a_1^2 - b_1^2$ será á lo más un cuarto de la diferencia análoga en la integral propuesta. Luego, repitiendo la transformación un número suficiente n de veces, se llegará á una integral de la misma forma, pero en la que, bajo el radical de la diferencial por integrar, el coeficiente del cuadrado del coseno de la variable no exceda al del cuadrado del seno de una cantidad inferior á $\frac{a^2 - b^2}{4^n}$ tan pequeña como se quiera, sin que estos coeficientes, evidentemente comprendidos entre a^2 y b^2, tiendan á anularse, de modo que el cuadrado del módulo, relación de la diferencia de los dos coeficientes al mayor de ellos, se aproxime indefinidamente á cero.

Dicha relación, que se ha de establecer entre φ y φ_1 es

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{a} = \frac{\operatorname{sen}\varphi_1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \operatorname{sen}^2\varphi_1}}, \tag{6}$$

la que da una relación $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_1}$ igual á la cantidad esencialmente positiva

$\frac{a}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}$ decreciente de $\frac{a}{a_1}$ á $\frac{a}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}} = 1$

cuando φ_1 crece de 0 á $\frac{\pi}{2}$; lo que hace variar gradualmente á φ de 0 á $\frac{\pi}{2}$ al mismo tiempo que φ_1, permaneciendo φ_1 inferior en el intervalo. De (6), donde a puede sustituirse por $a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}$, se deduce para $\cos \varphi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}$, la expresión

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{a^2{}_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \cos \varphi_1. \tag{7}$$

Diferenciando (6) resulta

$$\frac{\cos \varphi \, d\varphi}{a} = \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{[a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}]^2} \cos \varphi_1 \, d\varphi_1;$$

ó, después de sustituir por $\cos \varphi$ su valor (7),

$$d\varphi = a \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2{}_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}; \tag{8}$$

y si en el radical propuesto se sustituye $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{a}$ por su valor, después de haberlo transformado en

$$a \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1}}{a} \operatorname{sen} \varphi\right)^2},$$

se obtiene

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = a \frac{a_1 - \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a^2{}_1 - b^2{}_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}. \tag{9}$$

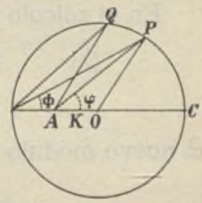
Dividiendo (8) por (9), é indicando la integración desde o á φ,

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a^2_1 \cos^2 \varphi_1 + b^2_1 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}}. \quad (10)$$

Así como el primer miembro expresa $\frac{F(k, \varphi)}{a}$ cuando se hace $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, el segundo miembro será $\frac{F(k_1, \varphi_1)}{a_1}$ cuando por k_1 se sustituya la expresión análoga ó sea $\frac{a - b}{a + b}$. Luego, haciendo $a = 1$ y, por consiguiente, $a_1 = \frac{1 + k'}{2}$, la fórmula (9) se reducirá á otra cuyo módulo es menor

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1 + k'} F\left(\frac{1 - k}{1 + k'}, \varphi_1\right). \quad (11)$$

135. Interpretación geométrica. Jacobi dió una interpretación geométrica de la transformación de Landen. Sea una circunferencia de radio 1 y un punto A situado en el diámetro BC á una distancia AO$=k$ del centro y P un punto cualquiera de la circunferencia. Unamos P con A, B y O; y designemos con φ y ψ los ángulos PAO y PBO. Tendremos que POC $= 2\psi$ y APO$=2\psi - \varphi$. Esto sentado, se obtiene que



$$AP^2 = 1 + k^2 + 2k \cos 2\psi = (1 + k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi$$

$$\operatorname{sen}(2\psi - \varphi) = k \operatorname{sen} \varphi, \qquad \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Sea Q un punto de la circunferencia infinitamente próximo de P; unamos Q con P, A y B. Podremos hacer PAQ $= d\varphi$, PBQ $= d\psi$; y resultará que

$$\frac{\operatorname{sen} d\varphi}{PQ} = \frac{\operatorname{sen} APQ}{AQ}.$$

Pero se tiene aproximadamente que

$$\operatorname{sen} d\varphi = d\varphi, \quad PQ = \operatorname{arc} PQ = 2d\psi,$$

$$\operatorname{sen} APQ = \cos APO = \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$AQ = AP = \sqrt{(1+k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi};$$

luego
$$\frac{d\varphi}{2d\psi} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{\sqrt{(1+k)^2 - 4k \operatorname{sen}^2 \psi}},$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} \qquad \left(k_1 = \frac{2k}{1+k}\right).$$

Integrando desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = \Phi$ resulta

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2}{1+k} \int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \psi}},$$

hallándose determinado el límite superior de la nueva integral por la ecuación

$$\operatorname{sen}(2\Psi - \Phi) = k \operatorname{sen} \Phi.$$

En el cálculo de la integral análoga

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} \tag{12}$$

el nuevo módulo k_1 es todavía menor que 1, porque se tiene

$$1 - k_1 = \frac{1 + k - 2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{1+k} > 0;$$

pero es menor que $\sqrt{k}$, porque se tiene que $\dfrac{2}{1+k} > 1$.

Una transformación análoga reducirá el cálculo de la integral (12) al de otra cuyo módulo k_2 será $> \sqrt{k_1}$, y así sucesivamente hasta que se llegue á una integral cuyo módulo esté bastante próximo de 1.

136. Transformación de Gauss. Consideremos el caso de la integral completa en el que los dos límites superiores φ y

φ_1, al tener el valor $\frac{\pi}{2}$, se hacen iguales como los inferiores. Entonces la transformación (10) aplicada al segundo miembro, cuyos dos parámetros a_1 y b_1 están comprendidos entre a y b, dará una nueva integral análoga, con límites siempre entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, pero cuyos parámetros sean las medias aritmética y geométrica de a_1 y b_1, que llamaremos a_2 y b_2. Continuando así, formaremos una serie de medias aritméticas $a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n$ cada vez más pequeñas y una serie de medias geométricas $b_3, b_4, \ldots, b_n$ cada vez más grandes, cuyo intervalo mútuo tenderá hacia cero, según la desigualdad (5). Es decir, que existe cierto límite común M de las medias aritméticas y geométricas formadas sucesivamente, á partir de los dos números dados a y b, que se llama *media aritmético-geométrica* de estos números. La integral propuesta (4), sin cambiar de valor, adquirirá una infinidad de formas, y variará finalmente hacia cuando, bajo el radical, los dos coeficientes de $\cos^2\varphi$ y $\operatorname{sen}^2\varphi$ tengan el valor común M^2. Pero *bajo esta forma límite* es inmediatamente integrable, puesto que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{M^2\cos^2\varphi + M^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M} = \frac{\pi}{2M}.$$

Siendo pues su valor $\frac{\pi}{2M}$, resulta que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M},$$

ó bien, sustituyendo el primer miembro por

$$\frac{F^1(k)}{a} = \frac{1}{a}F^1\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right),$$

y resolviendo con relación á M, tendremos que

$$\text{med. arit. geom. de } a \text{ y } b = \frac{\pi a}{2F^1\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)}.$$

Propiedades. Entre las propiedades de las funciones elípticas citaremos primeramente las relativas á la adición y sustracción, que son análogas á las de las funciones circulares. Así tenemos, adoptando la notación de Gudermann (véase p. 393),

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \qquad (1)$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \qquad (2)$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \qquad (3)$$

y análogas para las diferencias.

Además

$$\operatorname{sn}(u+v) + \operatorname{sn}(u-v) = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \qquad (4)$$

y sus correspondientes para los demás casos.

Nos fijaremos en las analogías que ofrece la doble periodicidad respecto á las funciones circulares é hiperbólicas, pues del mismo modo que las circulares tienen un período real al que hay que agregar un período imaginario, como las hiperbólicas.

La doble periodicidad de las funciones elípticas se deduce fácilmente de las fórmulas que dan las funciones elípticas de la suma ó diferencia de dos argumentos, haciendo $v = \mathrm{F}$, por ejemplo en (1) y teniendo presente que $\operatorname{sn} \mathrm{F} = 1$, $\operatorname{cn} \mathrm{F} = 0$, $\operatorname{dn} \mathrm{F} = k'$, se obtendrá

$$\operatorname{sn}(u \pm \mathrm{F}) = \pm \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$$

y además $\operatorname{cn}(u \pm \mathrm{F}) = \mp k' \dfrac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$, $\operatorname{dn}(u \pm \mathrm{F}) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u}$.

Pero llegaremos á las propiedades fundamentales, empleando otras consideraciones. Así, vemos que la ecuación

$$u = \int_0^z \frac{\mathrm{G}\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}$$

permite considerar, á voluntad, u como función de z ó z como función de u. Si se considera z como función de u, observaremos que á cada valor de u corresponde un valor y solo uno de z, lo que resulta de la teoría de las ecuaciones diferenciales (pág. 345); z se halla definida por la condición de anularse para $u = 0$ y de satisfacer á la ecuación

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}.$$

La función no puede cesar de ser monódroma más que alrededor de los puntos $z = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \infty$.

Supongamos que z esté muy próxima de α. Si se hace $z = \alpha + \zeta^2$, tendremos

$$2\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{G}\sqrt{(\zeta^2+\alpha-\beta)(\zeta^2+\alpha-\gamma)(\zeta^2+\alpha-\delta)}.$$

Cuando $z = \alpha$, se tiene $\zeta = 0$. Cuando u varía de manera que z permanezca en la proximidad de α, ζ permanece monódroma, y lo mismo sucede á la función z. Si z es muy grande, hagamos $z = \frac{1}{\zeta}$, la ecuación diferencial que define á z se reduce á

$$\frac{d\zeta}{du} = -\frac{1}{G}\sqrt{(\alpha\zeta-1)(\beta\zeta-1)(\gamma\zeta-1)(\delta\zeta-1)}.$$

Cuando z es muy grande, ζ se halla muy próxima de cero; luego ζ es una función monódroma de u; lo mismo sucede á z cuando esta variable es muy grande.

A cada valor de z corresponde una infinidad de valores de u, á saber,

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + u \quad \text{y} \quad m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + A - u,$$

expresando m_1 y m_2 números enteros arbitrarios.

Si se hace $z = f(u)$, se tendrá:

1.° *En cada paralelógramo de los períodos, la función* $z = f(\omega)$

no pasa más que dos veces por el mismo valor, porque, despreciando los múltiplos de los períodos, se tiene para un mismo valor de z *dos, y solamente dos valores de* u, *á saber,* u *y* A — u.

2.º *La función* f(ω) *es siempre monódroma y monógena.*

3.º Puesto que, para cada paralelógramo pasa dos veces por el mismo valor, *tiene en cada paralelógramo dos ceros, á saber,* o *y* A.

4.º *Tiene también en cada paralelógramo dos infinitos,* uno de ellos es el valor de la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{G\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}} = a$$

y el otro $A - a$.

5.º *Se puede verificar que la función* f(u) *pasa por todos los valores dos veces, en cada paralelógramo de los períodos.*

En efecto, si se considera la ecuación

$$f(u) - a = 0,$$

se obtendrá el número de las raíces disminuído en el número de los infinitos, calculando la integral

$$V = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f'(u)\,du}{f(u) - a},$$

tomada á lo largo del paralelógramo de los períodos; pero esta integral es nula; porque, siendo $\frac{f(u)}{f'(u) - a}$ como $f(u)$, doblemente periódica, toma valores iguales á lo largo de los lados opuestos del paralelógramo de los períodos, y hallándose cada dos lados opuestos recorridos en sentido contrario, dan elementos que se destruyen; luego $V = 0$; luego el número de las raíces de $f(u) - a = 0$ es igual al número de los infinitos de $f(u)$, es decir, igual á dos. De las tres integrales elípticas la más importante es la de primera especie

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}.$$

Al considerarse φ como función de u, se llama la *amplitud*, y se representa por el símbolo *am*; así

$$\varphi = am\, u.$$

Luego $$x = \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} am\, u,$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos \varphi = \cos am\, u.$$

De manera que x y $\sqrt{1 - x^2}$ son dos funciones de u que se denominan *seno de la amplitud* y *coseno de la amplitud.*

Análogamente $\sqrt{1 - k^2 x^2}$ se considera como una tercera función de u que se llama la *delta de la amplitud* y se representa por

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta\, am\, u.$$

Dichas tres funciones x, y, z de u que hemos considerado según las denominaciones de Jacobi, se representan más sencillamente por las denominaciones debidas á Gudermann

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{cn} u, \quad z = \operatorname{dn} u.$$

La variable u, considerada como función inversa, se llama *argumento*, de modo que

$$u = \arg am\, \varphi = \arg \operatorname{sn} x = \arg \operatorname{cn} y = \arg \operatorname{dn} z.$$

La constante k se llama módulo y $\sqrt{1 - x^2}$ *módulo complementario.*

137. Función sn u. La función $\operatorname{sn} u = z$ se define por la ecuación

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

con la condición $z = 0$ para $u = 0$, ó por la fórmula

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Si se hace, según Jacobi,

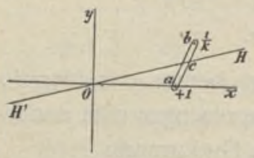
$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

$$\mathrm{K}'\sqrt{-1} = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z^2)}},$$

ó haciendo en la última $k'^2 = 1 - k^2$ y $1 - k^2z^2 = k'^2t^2$,

$$\mathrm{K}' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

Las integrales tomadas á lo largo de los lazos relativos á los puntos críticos están dadas por el cuadro siguiente:



el punto	$+1$	da	$2\mathrm{K}$
»	-1	»	$-2\mathrm{K}$
»	$+\frac{1}{k}$	»	$2\mathrm{K} + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$
»	$-\frac{1}{k}$	»	$-2\mathrm{K} - 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$

En cuanto á los puntos críticos $+1$ y -1 es evidente. Para calcular la integral relativa al lazo del punto $\frac{1}{k}$, se observará que el contorno cerrado, que se compone de los lazos sucesivos del punto $\frac{1}{k}$ y del punto 1, es equivalente al lazo doble *abc*. Así

$$2\int_0^{\frac{1}{k}} - 2\int_0^1 = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \quad \text{de donde} \quad 2\int_0^{\frac{1}{k}} = 2\mathrm{K} + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$$

luego:

1.º *La función* sn u *es monódroma y monógena.*

2.º *Tiene dos períodos distintos* $4\mathrm{K}$ *y* $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$.

3.º *Tiene dos ceros en cada paralelógramo de los períodos, á saber,* 0 *y* $2\mathrm{K}$.

4.º *Tiene dos infinitos, uno de ellos* α *dado por la fórmula*

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

de donde $$2\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Se puede suponer que la integración se efectúa á lo largo de la recta HH′ que pasa por O un poco inclinada respecto al eje Ox. Se puede sustituir esta recta por los dos lazos situados sobre ella y por una semicircunferencia de radio infinito, cuyo diámetro sea HH′, que da un valor nulo de la integral. Se tiene pues,

$$2\alpha = 2K + 2K' \sqrt{-1} + 2K = 4K + 2K' \sqrt{-1}$$

ó $$\alpha = 2K + K' \sqrt{-1}.$$

Los dos infinitos son entonces

$$2K + K' \sqrt{-1}$$

y $$2K - (2K + K' \sqrt{-1}) = -K' \sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad K' \sqrt{-1}.$$

§ 8.º Imposibilidad de expresar las funciones abelianas por medio de los signos ordinarios del Álgebra

138. Definición. El caso general de una integral de diferencial algebráica es una integral de la forma

$$\int F(x, y)\, dx,$$

en la que F es una función racional de x é y, hallándose ligadas x é y por la ecuación

$$f(x, y) = 0,$$

cuyo primer miembro es un polinomio irreducible en x é y.

La integral considerada se llama una *integral abeliana*, es decir, que integrales *abelianas* son las integrales de las funciones algebráicas irracionales.

139. Imposibilidad de expresión algebráica. Liouville llama *transcendentes de primera especie* á las funciones algebráicas e^{u_1}, e^{u_2}, . . . , log u_1, log u_2, . . . u_1, u_2, . . . en las que las letras

$u_1, u_2, \ldots$ expresan funciones algebráicas. Se llaman *transcendentes de segunda especie* á las funciones algebráicas de $e^{v_1}, e^{v_2}, \ldots$, $\log v_1$, $\log v_2, \ldots, v_1, \ldots$ en las que las letras $v_1, v_2, \ldots$ expresan transcendentes de primera.

Esto sentado, vamos á buscar la condición para que la integral abeliana $\int y dx$ en la que y es una función algebráica, sea expresable por medio de funciones algebráicas de funciones exponenciales y logarítmicas.

Supongamos desde luego $\int y dx$ expresable en función algebráica de funciones de primera especie y sea

$$\int y dx = f(x, e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots) \qquad (1)$$

Nada impide el suponer que entre $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots$ no existe ninguna relación algebráica, sin lo que, si existiera se podría sustituir, por ejemplo, $\log u_1$ por su valor mediante otras transcendentes.

Vamos á demostrar que la función e^{u_1} no podrá figurar en el segundo miembro de (1).

En efecto, sustituyendo f por $\varphi(e^{u_1}, x)$, ó por $\varphi(\theta, x)$, haciendo $e^{u_1} = \theta$, tendremos

$$\int y dx = \varphi(\theta, u),$$

y diferenciando $$y = \varphi_1(\theta, x)\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x), \qquad (2)$$

en la que expresamos por φ_1 y φ_2 las derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}$; pero esta fórmula (2) no podría tener lugar, porque establecería una relación algebráica entre las transcendentes que consideramos, lo que es contrario á la hipótesis, mientras que las transcendentes bajo los signos funcionales no desaparezcan idénticamenre. Si estas exponenciales desaparecen, se pueden sustituir θ por $\mu\theta$ ó por una cantidad cualquiera, sin alterar la igualdad (2), y se tiene entonces

$$y = \varphi_1(\theta, x)\,\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\theta, x) = \varphi_1(\mu\theta, x)\,\mu\theta\frac{du_1}{dx} + \varphi_2(\mu\theta, x); \quad (3)$$

de donde resulta, integrando:

$$\varphi(\theta, x) = \varphi(\mu\theta, x) + \psi(\mu). \tag{4}$$

Siendo (3) una identidad, (4) también lo será, cualquiera que sea θ. Se puede pues suponer $\theta = 1$, y tendremos

$$\varphi(1, x) = \varphi(\mu, x) + \psi(\mu),$$

que determina á μ, y (4) se reduce á

$$\varphi(\theta, x) - \varphi(1, x) = \varphi(\mu\theta, x) - \varphi(\mu, x).$$

Si se diferencia sucesivamente con relación á θ y μ, se tendrá

$$\varphi_1(\theta, x) = \mu\varphi_1(\theta\mu, x), \qquad \theta\varphi_1(\mu\theta, x) = \varphi_1(\mu, x);$$

de las que resulta, eliminando $\varphi_1(\theta\mu, x)$,

$$\mu\varphi_1(\mu, x) = \theta\varphi_1(\theta, x) = \text{const.} = a.$$

Así $\varphi_1(\theta, x) = \frac{a}{\theta}$ é integrando, $\varphi(\theta, x) = a \log \theta + b$, en la que b expresa una nueva constante. Se tiene pues

$$\varphi(\theta, x) = a \log e^{u_1} + b = au_1 + b;$$

la función φ no contiene pues exponenciales; luego:

Una integral abeliana no puede contener exponenciales en su expresión, si es transcendente de primera especie.

Supongamos ahora que $\theta = \log u_1$ y hagamos,

$$\int y\,dx = \varphi(\theta, x) \tag{5}$$

$$\varphi_1(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \varphi_2(\theta, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Diferenciando (1), se tiene

$$y = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u} + \varphi_2(\theta, x).$$

El segundo miembro debe ser independiente de θ. Se puede pues sustituir θ por $\theta + \mu$, y se tiene idénticamente

$$\varphi_1(\theta + \mu, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta + \mu, x) = \varphi_1(\theta, x)\frac{u'_1}{u_1} + \varphi_2(\theta, x)$$

Integrando, se tiene

$$\varphi(\theta + \mu, x) = \varphi(\theta, x) + \psi(\mu),$$

en la que $\psi(\mu)$ expresa una constante con relación á x. Si se hace $\theta = 0$, resulta

$$\varphi(\mu, x) = \varphi(0, x) + \psi(\mu)$$

ó por sustracción

$$\varphi(\theta + \mu, x) - \varphi(\mu, x) = \varphi(\theta, x) - \varphi(0, x).$$

Si se diferencia sucesivamente con relación á μ y á θ, se tiene

$$\varphi_1(\theta + \mu, x) - \varphi_1(\mu, x) = 0, \quad \varphi_1(\theta + \mu, x) - \varphi_1(\theta, x) = 0;$$

luego $$\varphi_1(\mu, x) = \varphi_1(\theta, x) = \text{const.} = a \tag{6}$$

de donde $$\varphi(\theta, x) = a\theta + b,$$

expresando a y b constantes de integración, es decir, cantidades independientes de θ, pero que pueden depender de x.

Se tiene pues

$$\varphi(\theta, x) = \int y dx = a \log u_1 + b, \tag{7}$$

pudiéndose demostrar que a es constante, pues en virtud de (6) se puede hacer

$$\varphi_1(\theta + \mu, x) = a,$$

expresando μ una constante, luego

$$\varphi(\theta + \mu, x) = a\theta + b_1.$$

Cambiando θ en $\theta - \mu$, se tendrá

$$\varphi(\theta, x) = \int y dy = a(\theta - \mu) + b_1;$$

pero los valores de $\int y dy$, dados por esta fórmula y por (7), solo pueden diferir por una constante; luego

$$a\theta + b - a(\theta - \mu) - b_1 = \text{const};$$

luego $a\mu - b - b_1$ debe ser constante, cualquiera que sea μ, y en particular, suponiendo μ constante

$$\mu \frac{da}{dx} + \frac{d(b - b_1)}{dx} = 0,$$

cualquiera que sea μ; luego $\frac{da}{dx} = 0$ y $\frac{d(b - b_1)}{dx} = 0$; luego a es constante. Por consiguiente:

TEOREMA 1.° DE LIOUVILLE. *Si la integral* $\int y\,dx$ *es una transcendente de primera especie, se tiene necesariamente que*

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ *funciones algebráicas, y* $A_1, A_2, \ldots\ldots$ *constantes.*

TEOREMA 2.° DE LIOUVILLE. *Si una integral abeliana es expresable por los signos del Álgebra ordinaria, adjuntando los signos logarítmicos ó trigonométricos, es necesariamente de la forma*

$$\int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ *funciones algebráicas y* $A_1, A_2, \ldots\ldots$ *constantes.*

En efecto, si suponemos que la integral $\int y dx$ sea expresable por medio de una transcendente de segunda especie, se podrá escribir

$$\int y\,dx = \varphi(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots\ldots),$$

expresando φ una función algebráica de funciones de primera especie y de $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots, \log u_1, \log u_2, \ldots\ldots, u_1, u_2, \ldots\ldots,$ donde las u expresan, no ya funciones algebráicas, sino transcendentes de primera especie.

Se probará como anteriormente que $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots\ldots$ no pueden figurar en la expresión de $\int y dx$ y que $\log u_1, \log u_2, \ldots\ldots$ no entran en ella más que en forma lineal con coeficientes constantes, de manera que

$$H = \int y\,dx = u_0 + A_1 \log u_1 + A_2 \log u_2 + \ldots\ldots,$$

expresando u_1, u_2, ... transcendentes de primera especie. Pero Liouville halló que u_0, u_1, ... son simplemente algebráicas, lo que se demuestra haciendo

$$\int y dx = \varphi(e^v, x) = \varphi(\theta, x),$$

en la cual v expresa una de las funciones algebráicas que figuran en u_1, u_2, ... y empleando la misma demostración que anteriormente, que resulta, porque las derivadas φ son algebráicas con relación á u_1, u_2, ...; y se demuestra que e^v no puede figurar en u_1, u_2, ...; se ve también que haciendo

$$\int y dx = \varphi(\log v, x) = \varphi(\theta, x)$$

que θ no puede entrar en $\int y dx$.

El mismo razonamiento se aplicaría al caso en que $\int y dx$ fuese transcendente de tercera especie, y así sucesivamente.

Observación.—Abel demostró que u_0, u_1, ..., u_n son funciones racionales de x é y. Para verlo, es suficiente expresar u_0, u_1 ....., en función racional de una misma función algebráica λ. Esta funcion λ satisfará á una ecuación irreducible con coeficientes enteros en x, que se podrá alterar de modo que sus coeficientes contengan y. Podemos suponer esta ecuación $\Lambda = 0$ irreducible en λ. Y diferenciando la ecuación H tendremos una relación racional en x é y. Siendo $\Lambda = 0$ irreducible, dicha relación admite todas sus raíces. Haciendo λ igual á cada una en H, y sumando tendremos por fin

$$\mu \int y dx = \Sigma u_0 + A_1 \log H u_1 + A_2 \log H_2 + \ldots..$$

siendo Σu_0, $H u_1$, ... funciones simétricas de las raíces de $\Lambda = 0$.

LIBRO TERCERO

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

CAPÍTULO I

Variación de una integral definida

§ 1.° Nociones preliminares

140. Objeto del cálculo de las variaciones. En las cuestiones ordinarias de máximo y de mínimo, se da la *forma* de una función de una ó de varias variables, y se buscan los valores particulares que es preciso atribuir á estas variables para que la función disminuya ó aumente cuando se modifican muy poco estas variables. En el *cálculo de las variaciones* se considera una integral definida

$$\int_{x_0}^{x} f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots\right)$$

que contiene bajo el signo $\int$ una variable x, una función desconocida de la misma y algunas de sus derivadas; y es necesario hallar para y una función $F(x)$ tal, que esta integral tenga un valor mayor ó menor que el obtenido sustituyendo $F(x)$ por una función de una forma muy poco diferente. Así pues, no se trata de obtener una ó varias variables, sino la forma de cierta función desconocida, ó el valor de y en función de x.

Ejemplo: Dados dos puntos C *y* D, *hallar una curva plana* CMD *tal, que la superficie de revolución engendrada por el mo-*

vimiento de esta curva al girar alrededor de un eje Ox, *situado en su plano, sea un máximo ó un mínimo.*

Sea u el área. Haciendo $OA = x_0$ y $OB = x_1$, se tendrá

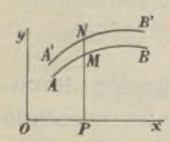
$$u = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \frac{ds}{dx} dx.$$

Hay que obtener pues, una función de x, $y = F(x)$ tal, que la integral precedente tenga un valor mayor ó menor que los que se obtendrían modificando infinitamente poco la forma de la función $F(x)$.

La marcha que debe seguirse para resolver estas nuevas cuestiones difiere poco de la seguida en las cuestiones ordinarias de máximo y de mínimo. Se supone conocida la función que se busca, se la hace variar infinitamente poco, y se expresa que el valor de la integral aumenta si esta integral debe ser un mínimo ó disminuye si debe ser un máximo.

Para llegar á este resultado, es necesario obtener los incrementos ó *variaciones* de y y de las cantidades que de ella dependen, cuando se cambia la función de x que expresa y.

141. Definiciones y notaciones. Sea $y = F(x)$ é $y = f(x)$ las ecuaciones de una curva CMD y de la C′ND′ obtenida haciendo variar muy poco la función $f(x)$. Si se llama δy el incremento de la ordenada PM, cuando se pasa á la segunda curva siendo x la misma, se tendrá



$$\delta y = NP - MP \quad \text{ó} \quad \delta y = F(x) - f(x).$$

Esta diferencia δy se llama *variación* de la ordenada ó de la función.

Se ve por lo tanto, que la diferencial es el incremento de la ordenada cuando se pasa del punto M á un punto infinitamente próximo *en la misma curva*, mientras que la variación es el incremento de esta ordenada, cuando se pasa del punto M á un punto infinitamente próximo *en una curva infinitamente poco diferente* de la curva dada.

Se reduce el cálculo de las variaciones á las diferenciales, considerando y como una función de x y de un parámetro arbitrario t. Sea $y = \varphi(x, t)$; y supongamos que $\varphi(x, t)$ se reduzca á $F(x)$ para cierto valor de t y que para un valor poco diferente $t + \delta t$, esta función se reduzca á $F(x)$. Llamando δy al incremento infinitamente pequeño de y, según que t reciba el incremento δt, permaneciendo x constante, ó que x reciba el incremento dx, permaneciendo t constante, se tendrá

$$\delta y = \frac{d\varphi}{dt}\,\delta t \quad \text{ó} \quad dy = \frac{d\varphi}{dx}\,dx.$$

Así pues, δy y dy son las diferenciales de una misma cantidad; pero δy ó dy corresponden tan solo al caso de variar t ó x sola.

Puede suceder que varíen x é y simultáneamente, cuando se pasa de la curva dada á la infinitamente próxima, representándose entonces los incrementos arbitrarios de dichas variables por δx y por δy. Se puede también, sin fijar ninguna relación entre dichos incrementos, considerar á x é y como funciones de una variable independiente u y de cierto parámetro t. Sea

$$x = \varphi(u, t), \quad y = \psi(u, t).$$

Supondremos que para un valor particular de t, $t = 0$ por ejemplo, y se reduzca á cierta función de x, $F(x)$, y que x se reduzca á una función cualquiera de u, $f(u)$. Tendremos

$$\varphi(u, 0) = f(u), \qquad \psi(u, 0) = F[f(u)].$$

Haciendo variar á t de una manera continua, á partir de 0, la forma de la función de x, representada por y, cambiará insensiblemente.

Para obtener las variaciones de x y de y, se multiplicarán por δt las derivadas de $\varphi(u, t)$ y de $\psi(u, t)$ con relación á t, y se tendrá

$$\delta x = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 \delta t, \qquad \delta y = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 \delta t;$$

y si, permaneciendo t constante, se hiciera variar á u, resultaría

$$dx = \frac{d\varphi}{du}\,du, \qquad dy = \frac{d\psi}{du}\,du.$$

142. Variaciones. Cuando x é y adquieren incrementos δx y δy, toda función U dependiente de x, y y de una ó varias derivadas de y con relación á x, adquiere un incremento correspondiente ΔU. Se llama *variación* de U á la parte de ΔU que depende tan solo de las primeras potencias de las variaciones δx y δy. Pero, según la fórmula de Taylor, se tiene

$$\Delta U = \frac{dU}{dx}\,\delta x + \frac{dU}{dy}\,\delta y$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\,\delta x^2 + 2\left(\frac{dy\,dx}{d^2U}\right)\delta x\,\delta y + \frac{d^2U}{dy^2}\,\delta y^2\right] + \ldots\ldots$$

luego

$$\delta U = \frac{dU}{dx}\,\delta x + \frac{dU}{dy}\,\delta y.$$

Si se considera á x é y como funciones de una variable independiente u y de un parámetro t, se tendrá

$$\delta U = \frac{dU}{dt}\,\delta t,$$

expresando $\frac{dU}{dt}$ la derivada con relación á t, de U considerada como función de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ y estas últimas cantidades como funciones de t.

Se llama *variación segunda* de una función U á la variación de δU; se representa por $\delta^2 U$. *Variación tercera* de U es la variación $\delta^3 U$ de $\delta^2 U$, y así sucesivamente.

§ 2.º Propiedades generales

143. Permutación de los signos d y δ.—Teorema. *La variación de la diferencial de una función de* x *es igual á la diferencial de la variación.*

En efecto, siendo y la ordenada del punto de la curva dada, la de un punto próximo de la misma curva es $y+dy$, y la correspondiente á la curva inmediata es $y+\delta y$; luego la ordenada del punto siguiente de esta misma curva será

$y+dy+\delta(y+dy)$ ó $y+\delta y+d(y+\delta y)$; luego $\delta dy = d\delta y$,

ó se tiene que

$$\delta d\mathrm{U} = \frac{d\frac{d\mathrm{U}}{du}}{dt}\, du\,\delta t, \quad d\delta\mathrm{U} = \frac{d\frac{d\mathrm{U}}{dt}}{du}\,\delta t\, du;$$

luego $$\delta d\mathrm{U} = d\delta\mathrm{U}.$$

Además $\delta\,.\,d^2\mathrm{U} = d^2\,.\,\delta\mathrm{U}$, porque

$$\delta d^2\mathrm{U} = \delta d\,.\,d\mathrm{U} = d\,.\,\delta d\mathrm{U} = d\,.\,d\,.\,\delta\mathrm{U};$$

y, en general $$\delta^m d^n\mathrm{U} = d^n\delta^m\mathrm{U}. \qquad (1)$$

144. PERMUTACIÓN DE δ CON $\int$. TEOREMA.—*Se puede invertir el orden de los signos δ é $\int$.*

En efecto, sea $$\mathrm{U} = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}\,dx;$$

sean u_0 y u_1 los valores de la variable independiente u que corresponden á los límites x_0 y x_1. Se tendrá

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}\,dx = \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{V}\,\frac{dx}{du}\,du.$$

Supongamos que u_0 y u_1 son independientes de la variable t á la que se refieren las diferenciaciones expresadas por el signo δ. Se puede diferenciar bajo el signo $\int$; y tendremos

$$\delta\mathrm{U} = \int_{u_0}^{u_1} \delta\left(\mathrm{V}\,\frac{dx}{du}\right) du;$$

pero, no variando u con t, se tiene que

$$\delta\left(\mathrm{V}\,\frac{dx}{du}\right) = \frac{\delta(\mathrm{V}dx)}{du};$$

y si se integra con relación á x, resultará

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx) \quad \text{ó} \quad \delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx). \qquad (2)$$

§ 3.º Variación de una integral definida

145. Caso en que la función no depende de los límites. Vamos á obtener la variación de la integral definida

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx,$$

siendo V una función cualquiera de x, de y y de cierto número de derivadas de y tomadas con relación á x. Para simplificar, supondremos que sean dos las derivadas. Sea

$$V = f(x, y, p, q), \qquad p = \frac{dy}{dx}, \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Según el teorema anterior, tendremos

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx). \qquad (1)$$

Pero $\delta \,.\, V dx = \delta V \,.\, dx + V \,.\, \delta dx = \delta V \,.\, dx + V \,.\, d\delta x$;

y, en general, $\int V d\delta x = V\delta x - \int \delta x \,.\, dV$;

luego, si $(V\delta x)_0$ y $(V\delta x)_1$ expresan los valores $V\delta x$ correspondientes á $x = x_0$ y á $x = x_1$, y se escribe por brevedad

$$(V\delta x)_0^1 = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0,$$

se tendrá $$\int_{x_0}^{x_1} V d\delta x = (V\delta x)_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta x dV \qquad (2)$$

y puesto que

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta (V dx) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta V dx + V d\delta x),$$

será $$\delta U = (V\delta u)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta V dx - \delta x dV). \tag{3}$$

Hagamos ahora

$$M = \frac{\partial V}{\partial x},\ N = \frac{\partial V}{\partial y},\ P = \frac{\partial V}{\partial p},\ Q = \frac{\partial V}{\partial q};$$

y tendremos

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,\ \delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3) y sustituyendo $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ por p, q, r, será

$$\delta U = (V\delta x)_0^1$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [N(\delta y - p\delta x) + P(\delta p - q\delta x) + Q(\delta q - r\delta x)]\, dx. \tag{4}$$

La función V no entra ya bajo el signo de integración. Para simplificar esta expresión, hagamos $\omega = \delta y - p\delta x$, expresando ω la diferencia de las ordenadas que corresponden, en las dos curvas, á la abscisa $x + \delta x$, tendremos $d\omega = d\delta y - pd\delta x - dp\delta x$ ó $d\omega = \delta dy - pd\delta x - dp\delta x$.

Pero, en virtud de ser $dy = pdx$, resulta

$$\delta dy = p\delta dx + \delta pdx = pd\delta x + \delta pdx;$$

luego $d\omega = \delta pdx\, dp\delta x$ ó $\frac{d\omega}{dx} = \delta p - q\delta x.$

Se obtendrá de igual manera

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \delta q - r\delta x,$$

y la ecuación (4) se transforma en

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} Vdx = (V\delta x)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) dx \tag{5}$$

Podemos simplificar todavía el segundo miembro de esta ecuación, y hacer salir del signo $\int$ las derivadas de la función arbitraria ω. Así

$$\int \mathrm{P}\frac{d\omega}{dx}dx = \mathrm{P}\omega - \int \omega \frac{d\varphi}{dx}dx.$$

E integrando por partes, dos veces,

$$\int \mathrm{Q}\frac{d^2\omega}{dx^2}dx = \mathrm{Q}\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{d\mathrm{Q}}{dx} + \int \omega\frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}dx.$$

Sustituyendo en la ecuación (5), resulta

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \left[\mathrm{V}\delta x + \left(\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\omega + \mathrm{Q}\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\left(\mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}\right)\omega dx. \tag{6}$$

En esta fórmula se consideran á y, p, q ligadas á x por medio de la ecuación $y = f(x)$. Escribiendo por brevedad

$$\Gamma = \left[\mathrm{V}\delta x + \left(\mathrm{P} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)\omega + \mathrm{Q}\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1, \tag{7}$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{N} - \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Q}}{dx^2}, \tag{8}$$

la fórmula (6) puede escribirse bajo la forma

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}\omega dx,$$

ó

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{K}\delta y - \mathrm{K}p\delta x)\,dx, \tag{I}$$

puesto que $\omega = \delta y - p\delta x$.

Se puede escribir también Γ bajo otra forma, sustituyendo ω

y $\frac{d\omega}{dx}$ por sus valores arriba obtenidos, y será

$$\Gamma = \left\{ \left[V - \left(P - \frac{dQ}{dx} \right) p - Qq \right] \delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx} \right) \delta y + Q \delta p \right\}_0^1,$$

Si V contiene dos funciones de x, siendo

$$V = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \right),$$

tendremos $\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma' + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega')\, dx,$

haciendo $\qquad \frac{dz}{dx} = p', \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q',$

$$\frac{dV}{dz} = N', \quad \frac{dV}{dp'} = P', \quad \frac{dQ}{dq'} = Q', \quad \omega' = \delta z - p'\,\delta x,$$

$$K' = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2}.$$

La parte representada por Γ' se obtendrá agregando á Γ los términos que resultan de cambiar las cantidades P, Q, p, ... por P', Q', p', ... en la expresión (7).

146. CASO EN EL QUE V DEPENDE DE LOS LÍMITES. Supongamos que V contenga una sola función de x, pero que dependa de los límites x_0 y x_1 de la integración. Es necesario, en este caso, añadir á la variación de la integral los términos que provienen de la variación de estos límites, á saber:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dx_0} \delta x_0 + \frac{dV}{dy_0} \delta y_0 + \frac{dV}{dp_0} \delta p_0 + \frac{dV}{dq_0} \delta q_0 \right) dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dV}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dV}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dV}{dp_1} \delta p_1 + \frac{dV}{dq_1} \delta q_1 \right) dx$$

Pero como δx_0, δy_0, ..., δx_1, δy_1, ... son constantes en la integración relativa á x, se podrá escribir los términos que deben añadirse á Γ, bajo la forma siguiente:

$$\delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0} dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0} dx + \ldots + \delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_1} dx \ldots$$

Las integrales contenidas en los términos de esta expresión no contienen ya nada que dependa de las variaciones.

Se completaría de igual manera el valor de $\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx$, si V contuviese dos funciones y, z con las derivadas de estas funciones y sus valores en los límites.

147. Otro procedimiento. Los cálculos hechos, pueden modificarse ventajosamente en las aplicaciones. Para ello, sustituyamos en V (fórm. (2) pág. 406) p y q por $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, considerando á $x, y, dx, dy, d\frac{dy}{dx}$ como funciones del parámetro t. El resultado contendrá, bajo forma lineal, las variaciones δx, δy y δdx, δdy, ... ó las diferenciales $d\delta x$, $d\delta y$, ... Y puesto que debe integrarse con relación á x, se hará salir del signo $\int$, mediante integraciones por partes, las diferenciales de las variaciones δx, δy; de manera que solo quedarán bajo el signo, estas variaciones multiplicadas por cantidades independientes de las mismas. El resultado será de la forma

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (H \delta x + K \delta y)\, dx, \tag{II}$$

siendo H y K funciones conocidas de x, y y de las derivadas de y, sin contener las variaciones de estas variables. Comparando este resultado con el obtenido anteriormente,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V \delta x = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (K \delta y - Kp \delta x)\, dx, \tag{I}$$

se concluirá que Γ y K deben ser las mismas en las dos expresiones, y se tendrá idénticamente $H = -Kp$.

El cálculo que ha dado la ecuación (I) ha servido para poner en evidencia esta relación.

En las aplicaciones se debe seguir la marcha que ha conducido á la relación (II), sin pasar por la intermediaria de la cantidad ω, y sin recurrir á las fórmulas generales.

Si varía tan solo y, se tendrá $\delta x = 0$, y

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \Gamma' + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}\delta y dx,$$

deduciéndose Γ' de Γ por la supresión de los términos que contienen δx_0 y δx_1.

Si tan solo varía x, se tendrá

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \Gamma'' + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{H}\delta x dx = \Gamma'' - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}p\delta x dx,$$

expresando Γ'' el resultado de hacer $\delta y_0 = 0$ y $\delta y_1 = 0$ en Γ.

En el caso de entrar en V otra función z de x con las derivadas p' y q' en z, se llegará á la ecuación

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (\mathrm{H}\delta x + \mathrm{K}\delta y + \mathrm{K}'\delta z)\, dx.$$

Pero el procedimiento que conduce á la relación (II) daría

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} [\mathrm{K}(\delta y - p\delta x) + \mathrm{K}'(\delta z - p'\delta x)]\, dx,$$

debiendo ser estos valores idénticos.

Será pues $\qquad \mathrm{H} = -(\mathrm{K}p + \mathrm{K}'p').$

CAPÍTULO II

Aplicaciones

§ 1.º MÁXIMOS Y MÍNIMOS

148. CONDICIÓN DE EXISTENCIA. Supongamos que la función U deba ser un mínimo, y sea $y = f(x)$ la función que se busca. Si esto se verifica, el incremento de $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ será constantemente positivo para valores cualesquiera de δx y de δy. Pero

$$\Delta U = \delta U + \rho,$$

conteniendo δU linealmente á las variaciones δx, δy, δp, δq y ρ potencias de grado superior al primero de estas variaciones ó sus productos. De manera que si δU no es nula, el límite de $\frac{\rho}{\delta U}$ es cero; luego, si δx y δy son infinitamente pequeñas, el signo de Δu y de δU será el mismo. Para que U tenga un valor mínimo se necesita pues que $\delta U = 0$; porque en el caso contrario, al cambiar los signos de las variaciones δx y δy, sin cambiar sus valores absolutos, cambiaría el signo de δU y por consiguiente el de ΔU, y U no sería un mínimo.

Así $\delta U = 0$ es la condición necesaria para que ΔU sea un mínimo y también para que sea un máximo. Esta condición no es suficiente; porque siendo

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!}\delta^2 U + \frac{1}{3!}\delta^3 U + \ldots\ldots,$$

si δU es nula, el signo de ΔU dependerá del de $\delta^2 U$ para valores pequeños de δx y de δy; luego, si $\delta^2 U$ permanece positiva ó negativa cuando las variaciones δx y δy cambian de una manera cualquiera, permaneciendo infinitamente pequeñas, U será respectivamente un mínimo ó un máximo. Y si $\delta^2 U$ puede cambiar de signo, U no será ni máximo ni mínimo. En cada caso la naturaleza de la cuestión, hace innecesario este examen, indicando claramente la existencia del máximo ó del mínimo.

Tenemos pues, que la condición

$$\delta U = 0, \quad \text{se reduce á} \quad \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx = 0. \qquad (1)$$

Esta condición lleva consigo las dos siguientes: $\Gamma = 0$, $K = 0$.

En efecto, si K no fuese igual á cero, se podría para cada valor de x comprendido entre x_0 y x_1 cambiar como se quiera los valores de δx y de δy que son arbitrarios, y por consiguiente el de ω ó $\delta y - p\delta x$, suponiendo constantes los valores de δx_0, δy_0, δp_0, δx_1, δy_1, δp_1 relativos á los límite x_0 y x_1. Pero el término Γ, que no contiene más que las variaciones relativas á los límites, permanecería constante, mientras que la integral $\int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx$, en la que se halla la función arbitraria ω, no podría conservar el mismo valor, cualquiera que fuese esta función ω; luego la ecuación (1) no podría quedar satisfecha siempre, mientras K no fuese cero.

También podemos llegar á esta conclusión observando que por ser ω una función arbitraria, podemos elegirla de manera que tenga de igual signo que K para cada valor de x, cuando Γ es positiva ó nula, y signo contrario á K, si Γ es negativa. La suma $\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\, dx$ sería positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Es necesario pues que se tenga $K = 0$, de lo que también resulta que $\Gamma = 0$.

149. Condiciones relativas á los límites. Cuando V contiene tan solo x, y, p y q, la ecuación $K = 0$, ó

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

es de cuarto orden, porque $\frac{d^2Q}{dx^2}$ contiene á $\frac{d^2q}{dx^2}$ ó á $\frac{d^4y}{dx^4}$. Al integrar esta ecuación se tendrá, pues un rsultado de la forma

$$y = f(x, C, C', C'', C'''),$$

que contendrá cuatro constantes arbitrarias. Para determinarlas se tendrá presente la ecuación $\Gamma = 0$, relativa á los límites de la integración, distinguiéndose cuatro casos.

1.º Si se dan los valores de x, y, p, q en los dos límites, siendo nulas las variaciones de dichas cantidades en éstos, la ecuación $\Gamma = 0$ queda satisfecha idénticamente; y si representamos por $f'(x, C, C', C'', C''')$ la derivada de $f(x, C, C', C'', C''')$, se tendrá

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = f(x_0, C, C', C'', C'''),\ p_0 = f'(x_0, C, C', C'', C'''), \\ y_1 = f(x_1, C, C', C'', C'''),\ p_1 = f'(x_1, C, C', C'', C'''), \end{array}\right\} \quad (1)$$

ecuaciones que determinan las cuatro constantes.

2.º Si una de las seis cantidades $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$ permanece arbitraria, p_1 por ejemplo, la ecuación $\Gamma = 0$ no quedará satisfecha idénticamente; pero será preciso igualar á cero el coeficiente de δp_1, y se tendrá la ecuación $Q_1 = 0$, que con la ecuación (1) determinará las cuatro constantes y el valor de p_1.

3.º Si se tuviese entre los valores de x, y, p relativos á los límites, una ecuación

$$\varphi(x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1,) = 0, \quad (2)$$

se diferenciaría esta ecuación con relación al parámetro t, y se tendría

$$\frac{d\varphi}{dx_0}\delta x_0 + \frac{d\varphi}{dy_0}\delta y_0 + \frac{d\varphi}{dp_0}\delta p_0 + \frac{d\varphi}{dx_1}\delta x_1 + \ldots\ldots = 0.$$

Sustituyendo el valor de δp_1, sacado de esta ecuación, en la ecuación $\Gamma = 0$, será preciso igualar á cero los coeficientes de δx_0, $\delta y p_0$, δy_0, δx_1 y δy_1. Se tendrá pues cinco ecuaciones, que juntamente con las (1) (2) determinarán las diez incógnitas C, C', C'', C''', $x_0, y_0, p_0, x_0, y_0, p_1$.

150. Caso en que V contiene dos funciones. Sean y, z las dos funciones de x. Se tendrá entonces

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega')\, d\omega = 0,$$

ecuación equivalente á las tres

$$\Gamma = 0, \quad K = 0, \quad K' = 0.$$

En efecto: ω y ω' son dos funciones de x arbitrarias é independientes la una de la otra y Γ solo contiene las variaciones relativas á los límites; luego, si K y K′ fuesen nulas, dejando constantes los valores relativos á los límites, se tendría $\Gamma = 0$; mientras que se podría hacer variar á ω y ω' de modo que la integral $\int_{x_0}^{x_1} (K\omega + K'\omega')\, dx$ no fuese igual á cero; luego se debe tener $K = 0$, $K' = 0$, y por consiguiente, $\Gamma = 0$. Las dos primeras ecuaciones determinan y y z en función de x, y la tercera las constantes introducidas por la integración de las dos primeras.

Hemos supuesto que y y z son independientes entre sí. En el caso de existir entre ellas una relación

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

las variaciones δy y δz no serían ya independientes, y tendríamos

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0,$$

ecuación que se obtiene diferenciando (1) con relación á t. Sustituyamos δy y δz por sus valores

$$\delta y = p\delta x + \omega, \quad \delta z = p'\delta x + \omega'$$

y será $$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}(p\delta x + \omega) + \frac{dF}{dz}(p'\delta x + \omega') = 0,$$

ó $$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}p + \frac{dF}{dz}p'\right)\delta x + \frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0,$$

o
$$\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0, \tag{2}$$

por ser
$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}p + \frac{dF}{dx}p' = 0,$$

En virtud de la ecuación (2) tendremos

$$\omega' = -\frac{\dfrac{dF}{dy}}{\dfrac{dF}{dz}}\omega \quad \text{y} \quad \int_{x_0}^{x_1} V dx = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}\left(K - K'\frac{\dfrac{dF}{dy}}{\dfrac{dF}{dz}}\right)\omega dx.$$

Para que esta variación sea nula, se necesita que

$$\Gamma = 0, \qquad K\frac{dF}{dz} - K'\frac{dF}{dy} = 0.$$

Estas ecuaciones darán los valores de y, z en función de x, y $\Gamma = 0$ servirá para determinar las constantes.

§ 2.º Problemas de máximos y mínimos

151. Línea más corta entre dos puntos. *Problema.—Se pide hallar la línea situada en un plano que pasa por dos puntos* A *y* B, *siendo la más corta que se pueda trazar entre dichos puntos.*

Sean x_0, y_0 las coordenadas rectangulares del punto A y x_1, y_1 las del punto B. En este ejemplo debemos tener

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+p^2}\,dx = 0 \quad \text{y} \quad K = N - \frac{dp}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0;$$

pero
$$N = 0, \quad P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad Q = 0;$$

luego será
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0, \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.},$$

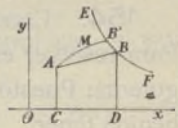
es decir,
$$p = C \quad \text{de donde} \quad y = Cx + C',$$

siendo C y C′ dos constantes. Además, basta que la ecuación $K = 0$ quede satisfecha, porque siendo fijos los valores de x é y relativos á los límites, las variaciones δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 son nulas; luego se tiene idénticamente $\Gamma = 0$. La línea buscada es por lo tanto una recta. Las constantes C y C′ se determinarán por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \qquad y_1 = Cx_1 + C'.$$

152. Línea más corta entre un punto y una curva plana. Sean A y EF el punto y la curva dada en el plano xOy, é $y = \psi(x)$ la ecuación de la curva.

Sea AB la línea más corta trazada desde A á un punto de la curva dada. Hallándose fijo el extremo A de AB, el otro extremo puede variar de posición en la curva EF. Tendremos, según el problema anterior, que la línea buscada es una recta $y = Cx + C'$. Para hallar las constantes, tenemos $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $Q = 0$; pero las variaciones δx_1 y δy_1 se hallan sujetas solamente á la condición de que el punto $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ debe hallarse en la curva dada; luego



$$y_1 = \psi(x_1), \quad \text{de donde} \quad \delta y_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1;$$

y para que Γ se anule, $\delta x_0 + p_1 \delta y_1 = 0$; luego

$$1 + p_1\psi'(x_1) = 0 \quad \text{ó} \quad 1 + C\psi'(x_1) = 0.$$

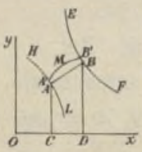
Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \ 1 + C\psi'(x_1) = 0, \ y_1 = Cx_1 + C', \ y_1 = \psi(x_1).$$

Por consiguiente: *La línea más corta entre un punto y una curva es una recta normal á la curva.*

153. Línea más corta entre dos curvas planas. Sean

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$



las ecuaciones de las dos curvas situadas en el mismo plano. Razonando como en los problemas anteriores, se obtendrá una recta $y = Cx + C'$.

En este caso δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 pueden variar, siempre que $A'(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ y $B'(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ se hallen respectivamente en la primera y en la segunda curva. Pero la ecuación $\Gamma = 0$ se reduce á

$$\frac{\delta x_1 + p_1 \delta y_1}{\sqrt{1 + p_1^2}} - \frac{\delta x_0 + p_0 \delta y_0}{\sqrt{1 + p_0^2}} = 0,$$

que en el caso actual se transforma en

$$\delta x_1 [1 + C\psi'(x_1)] - \delta x_0 [1 + C\varphi'(x_0)] = 0, \qquad (a)$$

por tenerse que $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$.

Pero siendo las variaciones δx_0 y δx_1, independientes entre sí, la ecuación (a) se descompone en las dos:

$$1 + C\psi'(x_1) = 0, \qquad 1 + C\varphi'(x_0) = 0,$$

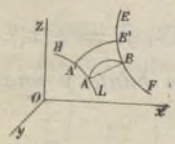
que juntamente con las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \quad y_0 = \varphi(x_0); \quad y_1 = Cx_1 + C', \quad y_1 = \psi(x_1),$$

determinan las constantes C y C′ y las coordenadas x_0, y_0, x_1, y_1 de los extremos de la recta mínima. *La recta más corta es, por lo tanto, una normal común á dos curvas.*

154. LÍNEA MÁS CORTA ENTRE DOS PUNTOS, EN EL ESPACIO. Para resolver este problema emplearemos el procedimiento siguiente: Puesto que para resolver los problemas anteriores debemos tener

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0, \qquad (1)$$



y haciendo $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, resulta

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\, d\delta x + dy\, d\delta y}{ds}.$$

Integrando por partes, se tiene

$$\int \frac{dx}{ds}\, d\delta x = \frac{dx}{ds}\, \delta x - \int \delta x\, d\, \frac{dx}{ds},$$

$$\int \frac{dy}{ds}\, d\delta y = \frac{dy}{ds}\, \delta y - \int \delta y\, d\, \frac{dy}{ds},$$

y la ecuación (1) se reduce á

$$\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y\right)_1 - \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y\right)_0$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left(\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\,\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Pero $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ y $\frac{dx}{ds}\, d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\, d\,\frac{dy}{ds} = 0;$

luego $d\,\frac{dx}{ds} = -\frac{dy}{dx}\, d\,\frac{dy}{ds} = -p d\,\frac{dy}{ds};$

luego, para que la cantidad colocada bajo el signo $\int$ sea nula, basta que se tenga $d\,\frac{dx}{ds} = 0$ ó $d\,\frac{dy}{ds} = 0$. Supongamos $d\,\frac{dx}{ds} = 0$. De esta hipótesis resultará

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.}, \quad \text{de donde} \quad p = \frac{dy}{dx} = C, \quad y = Cx + C',$$

ecuación de una recta.

Determinemos las constantes, según la naturaleza del problema propuesto.

1.° Si se dan los dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), las variaciones de los limites δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 son nulas y la ecuación $\Gamma = 0$ ó

$$\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y\right)_1 - \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y\right)_0 = 0,$$

queda satisfecha idénticamente. Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$y_0 = Cx_0 + C', \qquad y_1 = Cx_1 + C'.$$

2.° Si el punto $A(x_0, y_0)$ es fijo, y el otro punto $B(x_1, y_1)$ debe estar en una curva dada $y = \psi(x)$, se tendrá $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, y la ecuación $\Gamma = 0$ se reducirá

$$dx_1 \delta y_1 + dy_1 \delta y_1 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad 1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{\delta y_1}{\delta x_1} = 0;$$

luego la recta $y = Cx + C'$ es normal á la curva $y = \psi(x)$; porque $y_1 = \psi(x_1)$ da $\delta y_1 = \psi'(x_1)\,\delta x_1$ y, por consiguiente, será $1 + C\psi'(x_1) = 0$.

Las constantes se determinan por las ecuaciones

$$Y_0 = Cx_0 + C',\ 1 + C\psi'(x_1) = 0,\ y_1 = Cx_1 + C',\ y_1 = \psi(x_1).$$

3.º Si los dos puntos A y B se hallan en dos curvas $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, se tendrá $y_1 = \psi(x_1)$, $y_0 = \varphi(x_0)$, lo que da

$$\delta y_1 = \psi'(x_1)\delta x_1, \quad \delta y_0 = \varphi'(x_0)\,\delta x_0.$$

La ecuación $\Gamma = 0$ se reduce entonces á

$$[dx_1 + dy_1\,\psi'(x_1)]\,dx_1 - [dx_0 + dy_0\,\varphi'(x_0)]\,\delta x_0 = 0,$$

y se divide en las dos ecuaciones:

$$1 + \frac{dy_1}{dx_1}\psi'(x_1) = 0, \quad 1 + \frac{dy_0}{dx_0}\varphi'(x_0) = 0,$$

porque δx_0 y δx_1 son cantidades independientes y arbitrarias. Estas dos ecuaciones hacen ver que la recta buscada es normal á las curvas dadas.

Las constantes C y C′ y las coordenadas x_0, y_0, x_1, y_1 de los extremos de la línea mínima se determinan por las seis ecuaciones

$$\begin{aligned} y_0 &= Cx_0 + C', & y_0 &= \varphi(x_0), & 1 + C\varphi'(x_0) &= 0, \\ y_1 &= Cx_1 + C', & y_1 &= \psi(x_1), & 1 + C\psi'(x_1) &= 0. \end{aligned}$$

155. Resolución del problema de la menor distancia. Sean x_0, y_0, z_0 y x_1, y_1, z_1 las coordenadas de los dos puntos A y B. La longitud del arco AMB estará representada por

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Tendremos pues,

$$V dx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},\ \delta V dx = \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds};$$

é integrando por partes

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V} dx = \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)_1$$

$$- \left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)_0$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta x\, d\,\frac{dx}{ds} + \delta y\, d\,\frac{dy}{ds} + \delta z\, d\,\frac{dz}{ds}\right). \qquad (1)$$

Es necesario igualar á cero la expresión colocada bajo el signo $\int$; y puesto que las variaciones δx, δy, δz son independientes y arbitrarias, se tendrá

$$d\,\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\,\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (2)$$

Pero estas ecuaciones se reducen á dos distintas. En efecto, de la identidad

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1$$

resulta $\frac{dx}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds} = 0$;

luego, si se tiene $d\,\frac{dx}{ds} = 0$, $d\,\frac{dy}{ds} = 0$, resultará $d\,\frac{dz}{ds} = 0$.

De las ecuaciones $d\,\frac{dy}{ds} = 0$, $d\,\frac{dz}{ds} = 0$, resulta, por una primera integración,

$$\frac{dy}{ds} = a, \quad \frac{dz}{ds} = a', \quad \text{ó bien} \quad \frac{dy}{dx} = c, \quad \frac{dz}{dx} = c';$$

é integrando nuevamente,

$$y = \mathrm{C}x + \mathrm{C}, \qquad e = \mathrm{C}'x + \mathrm{C}', \qquad (3)$$

ecuaciones de una recta. Para determinar las constantes hay que distinguir varios casos.

1.° Si se dan los puntos A y B, las variaciones δx_0, δy_0, δz_0,

δx_1, δy_1, δz_1 son nulas, y la ecuación $\Gamma = 0$ queda satisfecha. Las cuatro constantes se determinarán sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B en las ecuaciones de la recta.

2.º Supongamos que los puntos A y B se hallen en dos curvas

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \quad \text{é} \quad y = \Phi(x), \quad z = \psi_1(x); \tag{4}$$

la ecuación $\Gamma = 0$, formada por medio de la ecuación (1) dará

$$\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_1 = 0, \left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)_0 = 0.$$

En efecto, siendo $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_1$ los dos arcos infinitamente pequeños AA′ y BB′ situados en las curvas dadas; y siendo A′B′ una curva cualquiera infinitamente próxima á la recta AB, se podrá escribir Γ bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} \Gamma = \delta\sigma_1 &\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 \\ - \delta\sigma_0 &\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Los factores colocados entre paréntesis tienen valores finitos, porque representan los cosenos de los ángulos que la recta AB forma con las curvas en los puntos A y B.

Como, por otra parte $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_0$ son cantidades independientes entre sí, vemos que la ecuación $\Gamma = 0$, lleva consigo las siguientes:

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 = 0;$$

estas ecuaciones expresan que la recta AB es normal á las dos curvas. Pero, en virtud de las ecuaciones (3), $\dfrac{dy}{dx} = c$, $\dfrac{dz}{dx} = c'$; y puesto que los extremos de la línea AB deben permanecer en las curvas (4), se tendrá:

$$\delta y_1 = \Phi'(x_1)\delta x_1, \ \delta z_1 = \Psi'(x_1)\delta x_1, \ \delta y_0 = \varphi'(x_0)\delta x_0, \ \delta z_0 = \psi'(x^0)\delta x^0.$$

Las ecuaciones (5) pueden pues escribirse bajo la forma

$$1 + c\,\Phi'(x_1) + c'\,\Psi'(x_1) = 0, \quad 1 + c\varphi'(x_0) + c_{,}\,\psi'(x_0) = 0,$$

y juntamente con las ocho

$$y_0 = cx_0 + C, \quad z_0 = c' x_0 + C', \quad y_0 = \varphi(x_0), \quad z_0 = \psi(x_0),$$

$$y_1 = cx_1 + C, \quad z_1 = c' x_1 + C', \quad y_1 = \Phi(x_1), \quad z_1 = \Psi(x_1),$$

forman un sistema de diez ecuaciones, que determinan las cuatro constantes y las seis coordenadas de los extremos de la recta.

3.° Supongamos que los dos puntos se hallen en dos superficies dadas. Se podrá escribir todavía la ecuación $\Gamma = 0$ bajo la forma (6) representando por $\delta\sigma_0$ y $\delta\sigma_1$ dos arcos infinitamente pequeños AA′ y BB′, situados en las dos superficies; y por ser las mutaciones de los puntos A y B independientes entre sí, se tendrá todavía

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_1 = 0.$$

La primera ecuación expresa que la recta AB es normal á una curva cualquiera situada en la primera superficie y que pasa por el punto A; luego la recta AB es normal á la primera superficie. Y por la misma razón es normal á la segunda.

156. Línea más corta en una superficie dada. *Sea* F $(x, y, z) = 0$ *la ecuación de una superficie curva; y propongámonos hallar la línea más corta que se puede trazar en esta superficie entre dos de sus puntos* A *y* B.

Sean x_0, y_0, z_0 las coordenadas del punto A y x_1, y_1, z_1 las del punto B.

Hallándose todas las curvas que se van á comparar en la superficie dada, las variaciones de las coordenadas deben satisfacer á la ecuación

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0 \qquad (1)$$

y una de las condiciones para el mínimo es

$$K = \delta x d\frac{dx}{ds} + \delta y d\frac{dy}{ds} + \delta z d\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (2)$$

Pero de la ecuación (1) se puede sacar el valor de δz y sustituirlo en la (2). Tendremos pues,

$$\delta x\left(d\frac{dx}{ds} - \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}d\frac{dz}{ds}\right) + \delta y\left(d\frac{dy}{dx} - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}d\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Esta ecuación, en virtud de la independencia de las variaciones δx y δy, se reduce á las dos

$$d\frac{dx}{ds} + \frac{dF:dx}{dF:dz}d\frac{dz}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} + \frac{dF:dy}{dF:dz}d\frac{dz}{ds} = 0: \qquad (3)$$

que con la ecuación de la superficie forman un sistema de tres ecuaciones para determinar y y z. Pero una de estas últimas ecuaciones es una consecuencia de la otra y de la ecuación de la superficie. En efecto, dichas ecuaciones se reducen á

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}$$

ó, representando por λ el valor común de estas relaciones

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{dF}{dx}d\lambda, \quad d\frac{dy}{ds} = \frac{dF}{dy}d\lambda, \quad d\frac{dz}{ds} = \frac{dF}{dz}d\lambda.$$

Sumando estas ecuaciones, después de haberlas multiplicado respectivamente por $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, tendremos

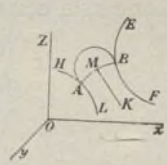
$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz\right)\frac{d\lambda}{ds}; \qquad (4)$$

y por ser nulo el primer miembro, y el coeficiente de $\frac{d\lambda}{ds}$ también, en virtud de la ecuación de la superficie, la ecuación (4) es una identidad; luego una de las ecuaciones (3) y la $F(x, y, z) = 0$ es consecuencia las otras dos. Bastará considerar dos de estas ecuaciones para determinar la línea buscada

Definición. Las líneas más cortas trazadas en una superficie se llaman *líneas geodésicas.*

157. Superficie mínima de revolución. Problema.—*Dados, en un mismo plano, dos puntos* A *y* B *y una recta* CD, *hallar una curva* AMB *situada en este plano y que al girar alrededor de* CD, *engendre una superficie de revolución cuya área sea un mínimo.*



Tomemos la recta CD por eje de las x, y por eje de las y una perpendicular á esta recta. Sean x_0 é y_0 las coordenadas del punto A y x_1, y_1 las del punto B. Siendo $2\pi\int_{x_0}^{x_1} yds$ la expresión de la superficie engendrada por AMB, la cuestión propuesta se reduce á buscar el mínimo de la integral definida. Pero se tiene

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} yds = \int_{x_0}^{x_1} \delta y ds = \int_{x_0}^{x_1} (\delta y ds + y\delta ds)$$

y
$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

$$dy\delta ds = dx\delta dx + dy\delta dy = dx d\delta x + dy d\delta y;$$

luego $\delta \int_{x_0}^{x_1} y ds = \int_{x_0}^{x_1} \left(\delta y ds + y \frac{dx}{ds} d\delta x + y \frac{dy}{ds} d\delta y \right).$

Integrando por partes, tendremos

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} y ds = \left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right) - \left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right)_0$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta x d \left(y \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(y \frac{dy}{ds} \right) - \delta y ds \right].$$

Es necesario igualar á cero á la cantidad colocada bajo el signo $\int$ en el segundo miembro, lo que da

$$d \left(y \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad (1) \qquad ds - d \left(y \frac{dy}{ds} \right) = 0. \quad (2)$$

Pero la segunda ecuación es una consecuencia de la primera, pues se tiene idénticamente

$$d \left(y \frac{dx}{ds} \right) = \left[ds - d \left(y \frac{dy}{ds} \right) \right] \frac{dy}{dx},$$

ya que esta ecuación se reduce á

$$\frac{dx}{ds} d \left(y \frac{dx}{ds} \right) - \frac{dy}{ds} ds + \frac{dy}{ds} d \frac{ydy}{ds} = 0,$$

ó $\quad dy \left(\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} \right) - dy + y \left(\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} \right) = 0,$

consecuencia de las ecuaciones

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1, \quad \frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} = 0;$$

luego basta considerar la ecuación (1) que da

$$y \frac{dx}{ds} = c \quad \text{de donde} \quad y = c \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}};$$

cuya integral es

$$x - c' = cl\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}\right), \quad y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}\right),$$

ecuación de una catenaria.

Las constantes c y c' se determinan como en el ejemplo anterior. Si se hace pasar el eje de las y por el punto más bajo de la curva, se tiene $c' = 0$

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

158. Braquistócrona. Problema.—*Dados dos puntos* A *y* B, *hallar la curva* AMB *que debe seguir un punto pesado para ir desde el punto* A *hasta el punto* B *en el menor tiempo posible.* Esta curva se llama *braquistócrona* ó curva del más rápido descenso.

Tomemos una vertical cualquiera por eje de las x y dos ejes rectangulares Oz, Oy en un plano horizontal cualquiera. Si se supone que el móvil parte del punto A (x_0, y_0, z_0) sin velocidad inicial, se tendrá, expresando por V su velocidad en el punto M (x, y, z),

$$V^2 = 2g(x - x_0). \tag{1}$$

Pero siendo s el arco recorrido y t el tiempo correspondiente, se tiene $V = \frac{ds}{dt}$, valor que debe tomarse positivamente, porque el arco aumenta continuamente con el tiempo. Resulta pues

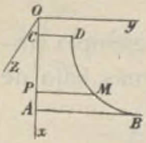
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x - x_0)}, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}.$$

Se tendrá pues, llamando T al tiempo necesario para recorrer el arco AB y x_1 á la abscisa del punto B,

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x - x_0}}. \tag{2}$$

Para hallar la variación de la integral definida, haremos $X = \frac{1}{\sqrt{x - x^0}}$, y se tendrá

$$\delta \int X ds = \int (\delta X ds + \delta ds).$$



Pero $\delta X = -\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}}(\delta x - \delta x_0)$.

Además $\delta ds = \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z.$

Sustituyendo en la ecuación $\delta \int X ds = 0$, se tendrá

$$\delta x_0 \int \frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds - \int \Big[\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} \delta x ds$$
$$- X\left(\frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z\right)\Big] = 0.$$

Integrando por partes, y haciendo salir del signo $\int$ las diferenciales de las variaciones, resulta

$$\left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \Big[\delta x d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \delta y d\left(X\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+ \delta z d\left(X\frac{dz}{ds}\right) + \frac{1}{2}\delta x (x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds\Big] = 0.$$

Para que la cantidad colocada bajo el signo $\int$ en la segunda integral sea nula, es necesario igualar á cero los coeficientes de las variaciones δx, δy, δz, lo que da

$$\frac{1}{2}(x - x_0)^{-\frac{3}{2}} ds + d\left(X\frac{dx}{ds}\right) = 0, \qquad (3)$$

$$d\left(X\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad d\left(X\frac{dz}{ds}\right) = 0. \qquad (4)$$

Las dos últimas ecuaciones son suficientes, porque se tiene idénticamente

$$\frac{dx}{ds} d\left(X \frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} d\left(X \frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} d\left(X \frac{dz}{ds}\right) = dX.$$

Pero $$dX = -\frac{1}{2}\frac{dx}{(x-x_0)^{3:2}}.$$

Resultará pues, teniendo presentes las ecuaciones anteriores,

$$\frac{dx}{ds} d\left(X \frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{2}\frac{dx}{(x-x_0)^{3:2}},$$

es decir, la ecuación (3). Y deducimos de las (4)

$$X \frac{dy}{ds} = C, \qquad X \frac{dz}{ds} = C',$$

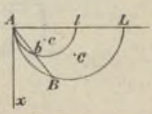
ó $$\frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \frac{dy}{ds} = C, \qquad \frac{1}{\sqrt{x-x_0}} \frac{dz}{ds} = C'; \tag{5}$$

luego $$\frac{dy}{dz} = \frac{C}{C'}, \qquad y = \frac{C}{C'} z + C''. \tag{6}$$

Esta ecuación manifiesta que todos los puntos de la curva están en un mismo plano vertical. Sustituyendo ds por su valor, y C por $\frac{1}{\sqrt{a}}$, para la homogeneidad, se deduce de la primera ecuación (5)

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x-x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x - x_0, \quad dy = dx\sqrt{\frac{x-x_0}{a-x-x_0}}$$

Si se toma el plano de la curva por plano de las xy, y el punto A por origen de coordenadas, se tendrá $x_0 = 0$, y la ecuación diferencial de la curva se reduce á



$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}. \tag{7}$$

La cicloide, representada por esta ecuación, tiene un punto de retroceso en A; su base es horizontal y el diámetro de su círculo generador es igual á a. La integral de la ecuación (7) es

$$y = \frac{a}{2} \text{ arc cos } \frac{a-2x}{a} - \sqrt{ax - x^2}.$$

Determinaremos la constante a, es decir, el diámetro del círculo generador, expresando que la curva pasa por el punto B (x_1, y_1), de la manera siguiente:

Tracemos una cicloide cualquiera cuyo vértice esté en el punto A, siendo Al su base y b el punto en que AB encuentra á esta curva. En virtud de la semejanza de las dos cicloides, siendo c y C los centros de las dos circunferencias generatrices, que corresponden á los dos puntos b y B, los triángulos ABC y Abc son semejantes. Pero, por ser conocidos los puntos b, B y c, bastará para tener el centro C trazar BC paralela á bc, hasta encontrar á Ac prolongada.

El tiempo empleado por el móvil para ir desde el punto A hasta el B, es igual á $\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{x}}$, tomando el origen de coordenadas en A. Se tendrá por tanto, en virtud de la ecuación de la curva

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{a}\,dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \text{ arc cos } \frac{a - 2x_1}{a}.$$

Supongamos ahora que los dos puntos, en vez de estar dados, se hallan sujetos á estar en dos curvas dadas CD y EF. Se obtiene todavía una cicloide situada en un plano vertical. Para determinar los puntos A y B que fijan su posición, es necesario recurrir á la ecuación general $\Gamma = 0$, que es en este caso

$$\left[\mathrm{X}\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_1$$

$$-\left[\mathrm{X}\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_0 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\frac{ds}{(x - x_0)^{2:3}} = 0.$$

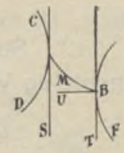
Puesto que las mutaciones de los puntos A y B en las dos curvas son independientes entre sí, se tendrá desde luego

$$\left[X\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)\right]_1 = 0. \qquad (8)$$

Esta ecuación expresa que el coseno del ángulo TBU de las tangentes BM y BU á las curvas EF y AB en B, es nulo. Por consiguiente la cicloide AMB corta á la curva EF según un ángulo recto.

Es necesario igualar á cero el resto de la ecuación $\Gamma = 0$; pero antes, se puede simplificar ésta. En efecto, se tiene para todos los puntos de la curva AMB,

$$\frac{dx}{ds}\,d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{(x-x_0)^{3:2}} = 0$$



ó $$d\left(X\frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{ds}{(x-x_0)^{3:2}} = 0,$$

obteniéndose

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\,\frac{ds}{(x-x_0)^{1:2}} = -\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 + \left(X\frac{dx}{ds}\right)_0$$

Sustituyendo este valor en la ecuación $\Gamma = 0$, esta se reduce á

$$\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(X\frac{dy}{ds}\right)_0 \delta y_0 + \left(X\frac{dz}{ds}\right)_0 \delta z_0 = 0. \qquad (9)$$

Esta ecuación puede hacerse simétrica respecto á las variables. Así, habiéndose obtenido que $X\frac{dy}{ds} = C$, $X\frac{dz}{ds} = C'$, se tendrá

$$\left(X\frac{dy}{ds}\right)_1 = \left(X\frac{dy}{ds}\right)_0, \quad \left(X\frac{dz}{ds}\right)_1 = \left(X\frac{dz}{ds}\right)_0.$$

La ecuación (9) se reduce á

$$\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(X\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_0 + \left(X\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_0 = 0,$$

y dividiendo por X_1, factor común,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_0 = 0.$$

Esta ecuación expresa que la tangente á la cicloide en el punto B es perpendicular á la tangente trazada á la curva CD por el punto A.

Las constantes y las incógnitas $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ se determinarán como en los ejemplos precedentes:

Observación sobre la integración de $K=0$. Sea

$$K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

1.º Supongamos $N=0$, es decir, que no entre y explícitamente en V. La ecuación (1) se reduce á

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \quad \text{de donde} \quad P - \frac{dQ}{dx} = C. \qquad (2)$$

Esta ecuación solo es de tercer orden, si V no contiene derivadas de un orden superior al segundo.

2.º Si $M=0$, es decir, si x no entra explícitamente en V, la ecuación $K=0$ se reducirá también al tercer orden tomando y por variable independiente. Pero se la puede reducir también al tercer orden de la manera siguiente. Por ser $M=0$, se tiene

$$dV = Ndy + Pdp + Qdq;$$

pero
$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Eliminando N entre estas ecuaciones, se tendrá

$$dV = \left(\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2}\right) dy + Pdp + Qdq$$

$$= pdP + Pdp + Q\left(\frac{d^2p}{dx^2} - p\frac{d^2Q}{dx^2}\right) dx;$$

de donde $$V = Pp + Q\frac{dp}{dx} - p\frac{dQ}{dx} + c \qquad (3)$$

ecuación de tercer orden solamente.

3.° Si se tuviese $M = 0$ y $N = 0$, la ecuación se reduciría al segundo orden. Se tendría entonces:

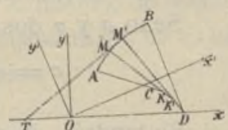
$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad P - \frac{dQ}{dx} = c',$$

y la ecuación (3) se reduciría á

$$V = Qq + c'p + c.$$

Estas simplificaciones se presentan en el siguiente

PROBLEMA. *Hallar una curva plana* AMB *tal que el área comprendida entre el arco* AMB, *los rayos de curvatura* AC *y* BD *que corresponden á los dos puntos extremos* A *y* B *y la parte de evoluta* CD *comprendida entre los centros de curvatura* C *y* D, *sea un mínimo.*



No puede haber máximo, porque al reducirse AB á una recta, el área correspondiente se haría infinita; y tomando una curva poco distinta de esta recta, se tendría una área tan grande como se quisiera.

Sean MK y M'K' los radios de curvatura de dos puntos M y M' infinitamente próximos. El triángulo infinitamente pequeño MK'M' es igual á $\frac{1}{2}\rho ds$, llamando ρ al radio de curvatura MK y ds al arco infinitamente pequeño MM'. La expresión de la medida del área es

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx,$$

siendo x_0 y x_1 las abscisas de los puntos extremos A y B.

Puesto que la función V no contiene explícitamente ni á x ni á y, aplicaremos la fórmula

$$V = Qq + c'p + c, \qquad \text{siendo} \qquad Q = -\frac{(1+p^2)^2}{2q^2};$$

luego $$\frac{(1+p^2)^2}{2q} = -\frac{(1+p^2)^2}{2q} + c'p + c$$

ó $$\frac{(1+p^2)^2}{q} = c'p + c.$$

Y puesto que $\rho = \frac{(1+p^2)^{3:2}}{2}$, esta ecuación se reduce á

$$\rho = \frac{c'p + c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Sea θ el ángulo MTx de la tangente en M con el eje Ox.

$$\operatorname{tg}\theta = p, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Por consiguiente $\rho = c' \operatorname{sen}\theta + c\cos\theta$,

Sean a y α dos nuevas constantes tales, que sea

$$c = -2a \operatorname{sen}\alpha, \qquad c' = 2a\cos\alpha'.$$

Se tendrá $$a = \frac{1}{2}\sqrt{c + c'},$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2}},$$

y $$\rho = 2a \operatorname{sen}(\theta - \alpha).$$

Tomemos dos nuevos ejes rectangulares Ox' y Oy' tales que sea $x'\mathrm{O}x = \alpha$.

Si se hace $\theta - \alpha = \theta'$ se tendrá $\rho = 2a \operatorname{sen}\theta'$.

Formemos la ecuación diferencial que conviene á estos nuevos ejes. Se tiene

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{dy}{dx} \quad \text{de donde} \quad \operatorname{sen}\theta' = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

Sustituyamos ρ por

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3:2} : -\frac{d^2y}{dx^2},$$

valor que supone á la curva cóncava hacia el eje de las x. Tendremos

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2=-a\,\frac{d\,\frac{dy^2}{dx^2}}{dx},$$

ecuación diferencial de la curva buscada, con relación á los nuevos ejes. De esta ecuación se deduce

$$dx=-\frac{a d\,\frac{dy^2}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} \quad \text{de donde} \quad x-c-\frac{a}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Suponiendo conocida la constante c, podemos imaginar que se transporta el eje de las y paralelamente á sí mismo, de manera que todas las antiguas abscisas queden disminuídas en c. La ecuación diferencial de la curva será entonces

$$x=\frac{a}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \quad \text{ó} \quad dy=dx\sqrt{\frac{a}{x}-1}.$$

La curva buscada es pues una cicloide cuyo eje está dirigido según el eje de las x y cuya tangente en el vértice es el eje de las y.

Para determinar las cuatro constantes de la ecuación de la curva referida á los ejes primitivos, distinguiremos varios casos.

1.° Si están dados los puntos A y B, así como las tangentes á la curva en estos puntos, la ecuación $\Gamma=0$ queda satisfecha idénticamente; porque se tiene $\delta x_0=0$, $\delta y_0=0\ldots$. Se obtendrán las cuatro constantes sustituyendo las coordenadas de A y B en la ecuación de la curva, y expresando que están dadas las tangentes en estos puntos.

2.° Si se dan los puntos A y B sin darse las tangentes á la curva en estos dos puntos, la ecuación $\Gamma=0$ se reducirá

$$Q_1\,\delta p_1-Q_0\,\delta p_0=0;$$

y, como las variaciones δp_1 y δp_0 son independientes entre sí, es necesario que se tenga separadamente $Q_1 = 0$, $Q_0 = 0$.

Se ha obtenido generalmente

$$Q = -\frac{(1+p^2)^2}{2q^2},$$

y como $1 + p^2$ no puede anularse, es necesario que se tenga

$$Q_1 = \infty, \; q_0 = \infty.$$

De esto se deduce el radio de curvatura es nulo en A y B. Estos puntos son pues, de retroceso.

3.º Supongamos dado el punto A y la tangente á la cicloide en este punto y que el punto B se halla en la curva $y = \psi(x)$. En este caso la ecuación $\Gamma = 0$ se compone de dos partes. Un término que contiene δx_1 y el término $Q_1 \, \delta p_1$. Siendo δx_1 y δp_1 independientes, se debe tener $Q_1 = 0$, de donde $q_1 = \infty$. Así, el punto B es todavía un punto de retroceso de la cicloide.

159. MÁXIMO Ó MÍNIMO RELATIVO. En las cuestiones anteriores se trataba de hacer máxima ó mínima una integral definida $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$, sin más condiciones. Se puede añadir al problema la condición de que otra integral definida $\int_{x_0}^{x_1} U\,dx$ tenga un valor determinado l. Por ejemplo, propongámonos hallar, entre todas las curvas planas de igual longitud l terminadas en los puntos A y B, aquélla cuya área comprendida entre dicha curva, el eje de abscisas y las dos curvas extremas, sea un máximo.

La cuestión consiste en determinar y en función x, de modo que siendo

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+p^2} = l,$$

la integral $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$ tenga un valor mayor ó menor que si se sustituye y por cualquiera otra función de x que satisfaga á la ecuación precedente. Se dice entonces que la integral admite un *máximo* ó un *mínimo* relativo.

Por ejemplo, si se trata de hacer máxima la integral $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx = l$, las variaciones de estas integrales deben ser nulas, cuando se compara la función obtenida de x con aquellas que hacen conservar á $\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx$ el mismo valor. Se debe pues tener

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}dx = 0, \quad \delta \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}dx = 0. \tag{2}$$

Desarrollando estas dos condiciones, como se ha hecho para el máximo absoluto, se tendrá dos ecuaciones tales como

$$\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}\omega\, dx = 0, \quad (3) \qquad \Theta + \int_{x_0}^{x_1} \Gamma\omega dx = 0, \quad (4)$$

Γ, Θ, K, L son funciones que se formarán, como se ha dicho arriba. Pero no es necesario hacer separadamente $\Gamma = 0$, $\mathrm{K} = 0$, porque ω no es ya una función completamente arbitraria de x. Para obtener las condiciones que deben satisfacerse en este caso, es necesario eliminar ω. Hagamos

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{L}\omega dx = \varphi(x), \tag{5}$$

de donde $\qquad \varphi(x_0) = 0, \quad \int_{x^0}^{x_1} \mathrm{L}\omega dx = \varphi(x_1).$

Por consiguiente,

$$\Theta + \varphi(x_1) = 0 \quad \text{ó} \quad \varphi(x_1) = -\Theta.$$

De esto resulta, por efecto de la indeterminación de ω, que $\varphi(x)$ es una función arbitraria de x, sujeta solamente á anularse para $x = x_0$ y á ser igual á $-\Theta$ para $x = x_1$. Pero, en virtud de la ecuación (5)

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{L}} \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3) resulta

$$\Gamma + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K}{L}\, d\,\varphi(x) = 0,$$

ó, integrando por partes,

$$\Gamma - \left(\frac{K}{L}\right)_1 \Theta - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, d\left(\frac{K}{L}\right) = 0. \qquad (6)$$

Puesto que $\varphi(x)$ es una función arbitraria de la que se dan tan solo los valores para $x = x_0$, $x = x_1$, se deben verificar separadamente las ecuaciones

$$d\left(\frac{K}{L}\right) = 0, \quad (7) \qquad\qquad \Gamma - \left(\frac{K}{L}\right)_1 \Theta = 0. \quad (8)$$

La primera da $\frac{K}{L} = -a$ ó $K + aL = 0$, expresando a una constante arbitraria.

La segunda condición se reduce á $\Gamma + a\Theta = 0$, porque $\left(\frac{K}{L}\right)_1 = -a_1$, por tener $\frac{K}{L}$ un valor constante $-a_1$. Se tiene pues las dos ecuaciones

$$\Gamma + a\Theta = 0, \qquad K + aL = 0. \qquad (9)$$

Habrá una constante más que cuando se busca un mínimo absoluto; pero se tiene también una ecuación de más $\int_{x_0}^{x_1} V dx = l$.

Si se hubiese buscado el máximo de la integral definida

$$\int_{x_0}^{x_1} (V + aU)\, dx,$$

se habría llegado á dos ecuaciones (9). Por consiguiente, la investigación del máximo *relativo* de la integral $\int_{x_0}^{x_1} V dx$, cuando la integral $\int_{x_0}^{x_1} U dx$ debe conservar un valor constante, se reduce á buscar el máximo absoluto de la integral $\int(\mathrm{V}+a\mathrm{U})\,dx$, lo que puede razonarse como sigue:

Si $\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{V}+a\mathrm{U})\,dx$ es un máximo, mientras que $\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{U}dx$ conserva un valor constante é igual á l, expresando U′ y V′ funciones poco diferentes de U y V, debe tenerse

$$\int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{V}+a\mathrm{U})\,dx > \int_{x_0}^{x_1}(\mathrm{V}'+a\mathrm{U}')\,dx \qquad (10)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{U}dx = \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{U}'dx = l \qquad (11)$$

luego

$$\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx > \int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}'dx \qquad (12)$$

lo que demuestra que $\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{V}dx$ es un máximo, cuando queda satisfecha la condición $\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{U}dx = l$. Recíprocamente, de la desigualdad (12) y de la (1) se deducirá la (10).

160. Problemas de los isoperímetros. *Dados dos puntos* C *y* D *en un plano, hallar entre todas las curvas de igual longitud, situadas en este plano, y terminadas en* C *y* D, *aquélla para la que el área* ABCD *es un máximo.*

Se debe tener

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{dx^2+dy^2} = l$$

y es necesario hallar el máximo de la integral $\int_{x_0}^{x_1} ydx$.

Según la teoría precedente, se deberá buscar el máximo absoluto de la integral $\int_{x_0}^{x_1}(ydx + a\sqrt{dx^2+dy^2})$ lo que conduce á escribir

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}(ydx + a\sqrt{dx^2+dy^2}) = 0. \qquad (1)$$

Puesto que los límites x_0 y x_1 son fijos, la parte Γ de la variación es idénticamente nula. Además puede hacerse que no varíe más que x. Se tiene pues,

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(y + a\,\frac{dx}{ds}\right) d\delta x = 0, \qquad (2)$$

ó, integrando por partes y suprimiendo la cantidad exterior á la integral, que es nula,

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta x d\left(y + a\,\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

é igualando á o el coeficiente de δx,

$$d\left(y + a\,\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad \text{de donde} \quad y + a\,\frac{dx}{ds} = c'.$$

Sustituyendo por ds su valor y resolviendo respecto á dx

$$dx = \frac{(y - c')\,dy}{\sqrt{a^2 - (y - c')^2}}, \qquad x - c = \sqrt{a^2 - (y - c')^2}$$

y $$(x - c)^2 + (y - c')^2 = a^2.$$

La curva buscada es una circunferencia.

Problema. *De todas las curvas isoperímetras que pueden trazarse en un plano entre dos puntos dados* A *y* B, *obtener la que girando alrededor de la recta* Ox, *engendra una superficie máxima ó mínima.*

Hay que hallar el máximo ó mínimo de $\int_{x_0}^{x_1} y ds$ con la condición $\int_{x_0}^{x_1} ds = l$; y la cuestión se reduce á obtener el máximo ó mínimo absoluto de $\int_{x_0}^{x_1} (y + a)\,ds$, que por ser a una constante, se reducirá á obtener el máximo absoluto de $\int y ds$.

Problema. *Entre todas las curvas isoperímetras hallar la que engendra el volumen de revolución mínimo.* La ecuación del problema es

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (y^2 dx + a ds) = 0.$$

Puesto que están dados los puntos A y B, puede no hacerse variar más que x y prescindir de la parte Γ que es idénticamente. nula, puesto que no hay derivada de orden superior al primero Según esto, se tendrá

$$d\left(y^2 + a\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad y^2 + a\frac{dx}{ds} = 0.$$

y

$$ds = \frac{(y^2 - c)\,dy}{\sqrt{a^2 - (y^2 - c)^2}}.$$

FIN DEL TOMO CUARTO

ÍNDICE

LIBRO PRIMERO

INTEGRALES INDEFINIDAS Y DEFINIDAS

LIBRO SEGUNDO

FUNCIONES REPRESENTADAS POR INTEGRALES

LIBRO TERCERO

CALCULO DE LAS VARIACIONES