Celestino Muga Diez

TRATADO

DE

ARITMÉTICA,

POR

D. J. CORTÁZAR,

CATEDRÁTICO QUE FUÉ DE COMPLEMENTO DE
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL.

CUADRAGÉSIMA EDICIÓN

CORREGIDA Y ARREGLADA

POR

D. DE CORTÁZAR,

Ingeniero Jefe del Cuerpo de Minas, individuo de la Real Academia de Ciencias
Exactas, Físicas y Naturales, Correspondiente de la Real Academia Española
y Consejero de Instrucción pública.

Celestino Moya Diez

MADRID.
LIBRERÍA DE HERNANDO.
Arenal, 11.
1897.

OBRAS DE D. J. CORTÁZAR.

	Pts. Cs.	
Memoria sobre el cálculo del interés.	1	En rústica.
Tratado de Aritmética, *40.ª edición*.	3'50	
Tratado de Álgebra elemental, *32.ª edición*.	3'50	
Tratado de Geometría elemental, *32.ª edición*. . . .	4	
Tratado de Trigonometría, *21.ª edición*.	3'50	
Complemento de Álgebra, *6.ª edición*.	4	
Tratado de Geometría analítica, *5.ª edición (agotada)*.	7'50	
Aritmética práctica para las Escuelas primarias, *10.ª edición*.	0'75	

Habiéndose impreso subrepticiamente en París y Nueva York las obras de D. Juan Cortázar, se hace presente que todos los ejemplares de aquellas procedencias están plagados de errores tan perjudiciales para los que se propongan estudiar en ellos, como lo ha sido la falsificación para los intereses del legítimo propietario, que hace la publicación solamente en Madrid.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJOS DE MANUEL TELLO,
Carrera de San Francisco, 4.

Legado P. Ruiz Collantes

Celestino Muga Diez

Celestino Muga Diez

PRÓLOGO.

Fernando Muga Sanchez de León

Emeterio Celestino Muga Diez

En la quinta edición de este tratado de Aritmética pusimos varias notas, ya para hacer ver la falta de exactitud en los enunciados de algunos teoremas en cuantos autores nacionales y extranjeros conocíamos, ya la demasiada extensión de estos enunciados, ya el corto alcance de las demostraciones. En esta nueva edición, así como en las posteriores á la quinta, hemos suprimido dichas notas, porque creemos preferible señalar en el prólogo las mejoras que hemos introducido en la ciencia desde que apareció nuestro tratado en 1846.

La proposición número 35 de esta Aritmética se enunciaba antes de nosotros de este modo: *Si uno de los factores de un producto se divide por un número, el producto queda dividido por dicho número.* No siendo viciosamente, no puede demostrarse este teorema, enunciado con tal extensión, antes de las operaciones con los números fraccionarios, pues su demostración se apoya en el teorema 106 de nuestra Aritmética.

Los teoremas de los números 84, 87 y 88 de nuestro libro solían enunciarse así: *Si el numerador de un quebrado se parte por un número, el quebrado queda partido por dicho número; si el denominador se parte por un número, el quebrado queda multiplicado por dicho número; si los dos términos de un quebrado se multiplican ó parten por un mismo número, el quebrado no muda de valor.* Pero las demostraciones que los autores dan de estos teoremas sólo alcanzan á los casos en que el número por el que se parten el numerador y el denominador es divisor de estos dos números, siendo lo peor que, habiendo demostrado sólo un caso particular de estos teoremas, creen haberlos demostrado generalmente, y por lo mismo ya no vuelven á hablar de ellos.

Cambiando los nombres de numerador en dividendo, de denominador en divisor y de quebrado en cociente, lo que nosotros podemos hacer después del *Corol. 2.° del teorema* 79, tenemos los teoremas que enunciamos en el número 89. Los autores de Aritmética se empeñan lastimosamente en querer demostrar dichos teoremas á seguida de la división de números enteros; pero, sin que preceda alguno de los dos corolarios del teorema 79, no es posible demostrarlos, según nuestros enunciados, y mucho menos según los suyos, casi tan extensos como los que nosotros volvemos á dar cuando podemos hacerlo, que es en el número 111; así es, que los referidos autores no los demuestran sino en los casos en que la división propuesta, y aun la nueva, son exactas. Sucede aquí lo mismo que antes, que abusando del sonsonete de las palabras, creen que han demostrado con toda generalidad los teoremas referidos, y algunos cometen luego el imperdonable error de deducir las alteraciones de los quebrados de las que sufren los cocientes.

Otra de las reformas introducidas por nosotros en 1846 es la supresión de las razones y proporciones aritméticas; ésta ha sido adoptada por el Gobierno francés, según puede verse en los programas modernos franceses. Nosotros conocíamos su completa inutilidad, y antes de publicarse los referidos programas teníamos intención de detenernos en demostrarla; mas, actualmente, la mejor demostración es el hecho citado.

Todos los autores decían antes de la aparición de nuestra Aritmética: *Las raíces de un mismo grado de los cuatro términos de una proporción forman también proporción;* pero no lo probaban sino en el caso en que los cuatro términos de dicha proporción tenían exacta la raíz que se extraía. No puede demostrarse generalmente este teorema si no se demuestra antes este otro: *La raíz de un cociente, cuyos términos son números cualesquiera, es igual al cociente de las raíces de sus dos términos;* teorema que depende del siguiente: *El producto de varios números conmensurables é inconmensurables, ó todos inconmensurables, no se altera, cualquiera que sea el orden en que se coloquen dichos factores,* lo que no se ha tenido en cuenta antes de nosotros.

Desde que se publicó la ley sobre el sistema métrico, ha sido inmenso el número de obras publicadas con objeto, al parecer, de propagar dicho sistema. Nosotros hemos expuesto el sistema métrico en pocas páginas, y más completo que todos los autores, pues partiendo de las equivalencias dadas por la Comisión de pesas y medidas, hemos hallado científicamente las equivalencias aproximadas entre las medidas llamadas de Castilla y las métricas, y dado la regla para hallar equivalencias análogas entre las medidas de cualquier provincia y las métricas: ni en Francia, ni en España, ha tenido nadie esta idea, y no dudamos que la falta de ello ha contribuído en Francia á dificultar la propagación del sistema métrico.

Tales son las mejoras de mayor importancia que nos debe la Aritmética científica, sin contar con nuestra *Memoria sobre el cálculo del interés*, publicada en 1843, y en la que hicimos ver que el interés del dinero no puede ser simple ó proporcional al tiempo; que la fórmula del interés verdadero ó compuesto es siempre la misma, ya sea el tiempo un número entero de años, ya sea una fracción de éstos, etc., etc.

Pasemos ahora á hablar de otro asunto, que tampoco ha sido tratado por ningún autor.

Opinan algunos que las demostraciones de la Aritmética deben hacerse en lenguaje vulgar, sin emplear signos de ninguna clase que representen ya las cantidades, ya las relaciones que las ligan, porque así, dicen, se desarrolla la facultad de pensar. Nosotros opinamos de un modo contrario: nuestra larga experiencia nos ha enseñado que, cuando la demostración es algo complicada, es necesario representar las cantidades sobre que giran los razonamientos, por signos, ya sean guarismos, ya sean letras; porque de otro modo no se fijan las ideas, los razonamientos son vagos, y por lo mismo difíciles de ser comprendidos. Cuando por medio de los signos se ha entendido una demostración, puede en seguida repetirse, sin ayuda de dichos signos, aunque no lo creemos necesario.

Vista la conveniencia de los signos para la representación de las cantidades en los razonamientos aritméticos, ¿deben dichos signos ser guarismos, ó deben ser letras?

Daremos nuestro parecer sobre esta cuestión, más difícil de decidir que la anterior.

Al principiante de Aritmética no le es fácil ver en una letra un número indeterminado, y por lo mismo, no es conveniente el uso de las letras en las primeras proposiciones, las cuales pueden demostrarse muy bien representando las cantidades por medio de guarismos; y no se crea que por eso dejarán de ser generales los razonamientos en buena lógica, esto es, si cuanto se dice respecto de los guarismos elegidos es independiente de sus valores particulares. Así, cuando nosotros demostramos que: *En un producto indicado de varios factores pueden permutarse dos consecutivos cualesquiera sin que el producto se altere*, aunque nos servimos de números particulares, y aun para mayor brevedad de factores de una sola cifra, el razonamiento que hacemos es general, puesto que no depende de los valores particulares de dichos factores. El razonamiento sería particular é insuficiente por tanto, ó más bien sería lo que se llama una *comprobación*, si se redujese á hacer ver que los guarismos elegidos verificaban la proposición enunciada.

Supongamos ahora que se quiere demostrar el teorema (60), esto es, que: *Si un número es divisor del producto de dos factores, y es primo con el uno, es divisor del otro;* y que representamos el número por 3, y el producto por 4×6: se tendría que demostrar que 3 es divisor de 6, lo que sorprende á un principiante, pues se le pide que demuestre lo que es evidente. En tal caso, es menester suponer, para hacer un razonamiento general, que 3 no es sólo 3, ni 6 es sólo 6, sino que 3 y 6 son números cualesquiera, sometidos únicamente á las condiciones del teorema; abstracción incomparablemente más difícil que la de suponer que una letra representa un número conveniente. Si, para evitar tal impropiedad, se eligieren otros números, sería, ó difícil hallarlos en un momento dado, como por ejemplo en un examen, ó no satisfarían á las condiciones del teorema.

En el caso, pues, de que las cantidades que entran en un teorema han de satisfacer á condiciones que no llenan números tomados á arbitrio, convendrá, para la resolución del teorema, representar dichas cantidades por letras.

Convendrá también representar las cantidades por letras en los razonamientos aritméticos, siempre que por su medio se abrevien notablemente las demostraciones, como sucede cuando dichas cantidades deben tener alternativamente en la misma proposición valores enteros, fraccionarios ó inconmensurables; pues si se representasen por guarismos, habría que escribir en primer lugar números enteros, en segundo números fraccionarios, y, finalmente, números inconmensurables, mientras que, representando las cantidades por letras, éstas indican sucesivamente las tres clases de números.

Nada más podemos decir de fijo acerca de esta cuestión, aunque quizá en otras ocasiones convendrá también preferir las letras á los guarismos para representar las cantidades en las demostraciones aritméticas.

ÍNDICE.

PARTE PRIMERA.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS.

PARTE SEGUNDA.

APLICACIONES USUALES DE LA ARITMÉTICA, Ó CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

ARITMÉTICA.

PARTE PRIMERA.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS.

LIBRO PRIMERO.

NUMERACIÓN Y OPERACIONES FUNDAMENTALES.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. Se llama *número entero* una cosa sola ó la reunión de varias cosas iguales ó semejantes; como una mesa, cuatro metros, siete libros, etc.

Se llama *unidad* cada una de las cosas iguales ó semejantes que componen un número entero. Así, si el número es cuatro metros, la unidad es el metro; si el número es siete libros, la unidad es el libro.

Si una unidad se divide en partes iguales, una de estas partes ó la reunión de varias de estas partes se llama *número quebrado*. Por ejemplo, si un libro se divide en ocho partes iguales, una de estas partes será el número quebrado *un octavo* de libro, y cinco de dichas partes compondrán el número quebrado *cinco octavos* de libro.

Se llama *número mixto* la reunión de un entero y un quebrado; como siete libros y cinco octavos de libro.

Se llama *cantidad* todo lo que se puede representar por números exacta ó aproximadamente; como el peso de los cuerpos, el tiempo, el dinero, las distancias, etc.

De aquí resulta que confundiendo, como es natural, el representante con el representado, se dé también á los números el nombre de cantidades.

En toda ciencia se llama *problema* ó *cuestión* una proposición en que se pide hallar una ó más cosas desconocidas ó *incógnitas*, conexas con otras conocidas ó *datos*. *Resolver* un problema es hallar las cosas desconocidas.

Se llama *matemáticas* la ciencia que enseña á resolver los problemas de la cantidad.

Se llama número *abstracto* el número en que no está determinada la unidad; como veinte, cinco octavos, etc.

La unidad abstracta se llama *uno.*

Se llama número *concreto* el número en que está determinada la unidad; como cuatro metros, tres cuartos de hora, etc.

La Aritmética enseña á efectuar con números cualesquiera las seis operaciones siguientes: *sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar á potencias* y *extraer raíces,* que también se llaman *adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias* y *extracción de raíces.* Las tres operaciones, sumar, multiplicar y elevar á potencias, se llaman operaciones de *composición*, y las otras tres, restar, dividir y extraer raíces, inversas de las anteriores, se llaman operaciones de *descomposición.*

Según esto, la *Aritmética* es la ciencia que tiene por objeto resolver los problemas que dependen de la composición y descomposición de los números.

Signos que se usan en la Aritmética para simplificar los razonamientos.

$+$	significa. .	más.
$-$	. . . . . .	menos.
$\times$ ó $\cdot$	. . . . . .	multiplicado por.
$:$	. . . . . .	dividido por, ó partido por.
$=$	. . . . . .	igual á.
$<$	. . . . . .	menor que.
$>$	. . . . . .	mayor que.

CAPÍTULO II.

NUMERACIÓN.

La numeración es una parte de la Aritmética que tiene por objeto expresar todos los números enteros abstractos con pocas palabras, y escribirlos con un corto número de figuras. Por consiguiente, la numeración es verbal y escrita.

ARTÍCULO 1.°

NUMERACIÓN VERBAL.

2. La reunión de uno y uno se expresa con la palabra *dos,* la reunión de dos y uno con la palabra *tres,* la de tres y uno con la palabra *cuatro*, la de cuatro y uno con la palabra *cinco*, la de cinco y uno con la palabra *seis*, la de seis y uno con la palabra *siete*, la de siete y uno con la palabra *ocho*, la de ocho y uno con la palabra *nueve;* y, finalmente, la reunión de nueve y uno se expresa con la palabra *diez*.

La reunión de diez unidades se considera como una nueva unidad llamada *decena*, y se cuenta por decenas, hasta llegar á diez decenas, del mismo modo que se cuenta por unidades hasta diez; y así se dice: dos decenas ó *veinte*, tres decenas ó *treinta*, cuatro decenas ó *cuarenta*, cinco decenas ó *cincuenta*, seis decenas ó *sesenta*, siete decenas ó *setenta*, ocho decenas ú *ochenta*, nueve decenas ó *noventa*, diez decenas ó *ciento*.

Para expresar los números comprendidos entre las decenas, se añaden á los nombres de éstas los nombres de los nueve primeros números. Añadiendo, por ejemplo, á la palabra *diez* los nombres de los nueve primeros números, tendremos los nombres de los números comprendidos entre diez y veinte, los cuales son *diez y uno* ú *once*, *diez y dos* ó *doce*, *diez y tres* ó *trece*, *diez y cuatro* ó *catorce*, *diez y cinco* ó *quince*, *diez y seis*,..., *diez y nueve*. Si, por nuevo ejemplo, añadimos á la palabra *cuarenta* los nombres de los nueve primeros números, tendremos los nombres de los números comprendidos entre cuarenta y cincuenta, los cuales son *cuarenta y uno*, *cuarenta y dos*, *cuarenta y tres*,..., *cuarenta y nueve*.

La reunión de diez decenas se considera como una nueva unidad llamada *centena*, y se cuenta por centenas, hasta diez centenas, del mismo modo que se cuenta por unidades hasta diez; y así tendremos: dos centenas ó *doscientos*, tres centenas ó *trescientos*, cuatro centenas ó *cuatrocientos*, cinco centenas ó *quinientos*, seis centenas ó *seiscientos*, siete centenas ó *setecientos*, ocho centenas ú *ochocientos*, nueve centenas ó *novecientos*, diez centenas ó *mil*.

Para expresar los números comprendidos entre las centenas, se añaden á los nombres de éstas los nombres de los noventa y nueve primeros números. Añadiendo, por ejemplo, á la palabra *cuatrocientos* los nombres de los noventa y nueve primeros números, tendremos los nombres de los números comprendidos entre cuatrocientos y quinientos, los cuales son *cuatrocientos y uno*, *cuatrocientos y dos*, *cuatrocientos y tres*,..., *cuatrocientos noventa y nueve*.

La reunión de mil unidades se considera como una nueva unidad llamada *millar*, y se cuenta por millares, decenas de millar y centenas de millar, hasta mil millares ó un *millón*, del mismo modo que se cuenta por unidades, decenas y centenas desde una unidad hasta *mil;* y así se dice: *mil*, *dos mil*, *tres mil*,..., *novecientos noventa y nueve mil*. Para expresar los números comprendidos entre los millares, se añaden á los nombres de éstos los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números. Añadiendo, por ejemplo, á la palabra *cuatrocientos treinta y siete mil* los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, tendremos los nombres de los números comprendidos entre cuatrocientos treinta y siete mil y cuatrocientos treinta y ocho mil, los cuales son *cuatrocientos treinta y siete mil y uno, cuatrocientos treinta y siete mil y dos,..., cuatrocientos treinta y siete mil novecientos noventa y nueve.*

La reunión de mil millares se considera como una nueva unidad llamada *millón*, y se cuenta por millones, decenas de millón, centenas de millón, millares de millón, decenas de millar de millón y centenas de millar de millón, hasta un millón de millones ó un *billón*, del mismo modo que se cuenta por unidades hasta un millón; y los números comprendidos entre los millones consecutivos, se cuentan añadiendo á los millones que estos números contienen, los nombres de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números.

En seguida se cuenta por billones, trillones, cuatrillones, etc., del mismo modo que se cuenta por millones.

Vemos, pues, que con estas pocas palabras: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, ciento, mil, millón, billón, etc., se puede expresar cualquier número por grande que sea.

Nota. Las unidades, las decenas, las centenas, etc., se llaman respectivamente unidades *simples*, *absolutas* ó *de primer orden*, unidades de *segundo orden*, unidades de *tercer orden*, etc.

Las unidades de un orden cualquiera son decenas de las unidades del orden inmediato inferior.

ARTÍCULO 2.°

NUMERACIÓN ESCRITA.

3. Los nueve números *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve*, se representan respectivamente por las figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se llaman *cifras* ó *guarismos*.

Con estas mismas cifras se representan las decenas, colocándolas á la izquierda de las unidades simples; las centenas, colocándolas á la izquierda de las decenas; los millares, colocándolas á la izquierda de las centenas; y del mismo modo se representan las decenas de millar, las centenas de millar, los millones, las decenas de millón, etc., colocando siempre las unidades de cada orden un lugar más hacia la izquierda que las del orden inmediato inferior.

Puede suceder que un número carezca de unidades de un cierto orden: entonces en el lugar correspondiente á dicho orden se coloca la cifra 0, que se llama *cero*, y que por sí no tiene valor alguno. Todas las cifras, excepto la cifra 0, se llaman cifras *significativas*.

Vemos, según esto, que cada unidad de un cierto orden vale diez unidades del orden inmediato inferior; y que toda cifra tiene dos valores, el uno llamado *valor absoluto*, en el cual sólo se considera el número de sus unidades, y el otro llamado *valor relativo*, en el cual se considera el orden de estas unidades.

Así, en el número 85642, que consta de 8 decenas de millar, 5 millares, 6 centenas, 4 decenas y 2 unidades, el valor absoluto de la cifra de los millares es 5, y su valor relativo 5 millares.

Según lo que acabamos de decir sobre la numeración escrita, para escribir un número cualquiera se escribirán sucesivamente las unidades de sus diferentes órdenes, principiando por las de orden superior, y poniendo la cifra 0 en los lugares que deben ocupar los órdenes donde no hay unidades.

Ejemplos. El número trescientos veintiocho unidades, que consta de tres centenas, dos decenas y ocho unidades, se escribe 328.

El número cuatro mil y cinco, que consta de cuatro millares, ninguna centena, ninguna decena y cinco unidades, se escribe 4005.

El número cuarenta y cinco billones, ciento tres mil y veinte millones, novecientas cinco mil y cuatro unidades, se escribirá 45 103020 905004.

Al contrario, para leer ó enunciar un número entero escrito por medio de guarismos, se divide dicho número en secciones de á seis cifras, principiando por la derecha; y en seguida se lee de izquierda á derecha cada sección, añadiendo al fin de ella la denominación de su última cifra.

Ejemplo. 40.583160.829003.

Se leerá: cuarenta billones, quinientos ochenta y tres mil ciento sesenta millones, ochocientas veintinueve mil y tres unidades (*).

(*) El sistema de numeración que acabamos de explicar se llama *décuplo ó decimal*, porque la *base*, es decir, el número de sus cifras, es diez, ó lo que es igual. porque cada cifra representa unidades diez veces mayores que la cifra inmediata de su derecha.

Hay tantos sistemas de numeración como se quieran; pero el décuplo es el único usual. Véase en el complemento de esta Aritmética la teoría de los diferentes sistemas de numeración.

CAPÍTULO III.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

Las cuatro reglas ú operaciones, adición, sustracción, multiplicación y división de los números enteros, se llaman reglas ú operaciones *fundamentales* porque de ellas se derivan todas las demás de la Aritmética.

ARTÍCULO 1.º

ADICIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.

4. Definición general.

Se llama *adición* una operación cuyo objeto es reunir varios números enteros, quebrados ó mixtos en uno solo.

Los números que se reúnen ó se *suman* se llaman *sumandos*, y el resultado de la adición se llama *suma*.

Para indicar que varios números se han de sumar, se pone entre ellos el signo $+$. Así, $18 + 9 + 5$ quiere decir que el número 18 se ha de sumar con el número 9, y la suma de estos dos con el número 5. Esta suma se puede hallar añadiendo al número 18 una á una las unidades del 9, y á la suma 27 una á una también las unidades del 5. De este modo se hallará que la suma de los tres números es 32: luego $18 + 9 + 5 = 32$ (*).

Los números 18, 9 y 5 son los sumandos, y 32 es la suma.

Para sumar números enteros, se colocan unos debajo de otros, de manera que se correspondan las cifras de igual orden. Se suman en seguida las unidades simples, y si esta suma contiene una ó más decenas, se guardan para añadirlas á la suma de las decenas, y sólo se escriben las unidades restantes. Se suman las decenas, y si esta suma contiene una ó más centenas, se guardan para añadirlas á la suma de las centenas, y sólo se escriben las decenas restantes; y así sucesivamente.

El resultado hallado de este modo contiene todas las unidades, todas las decenas, todas las centenas, etc., de los sumandos, y por tanto, es la suma pedida.

Antes de hacer uso de esta regla, se ha de saber sumar de memoria un número cualquiera con otro de una cifra. Por ejemplo, 35 y 6 son 41, 68 y 9 son 77, 143 y 8 son 151.

(*) La reunión por medio del signo $=$ de dos números iguales se llama *igualdad*. El número que está á la izquierda del signo $=$ se llama *primer miembro* de la igualdad, y el número que está á la derecha se llama *segundo miembro*.

Ejemplo. Hallar la suma de los números 49839, 287, 321 y 4502.

Disposición de esta operación.

$$\left.\begin{array}{r}49839\\287\\321\\4502\end{array}\right\}\ \textit{Sumandos.}$$

$$\begin{array}{rl}\hline 54949 & \textit{Suma.}\end{array}$$

ARTÍCULO 2.°

SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.

5. Definición general.

Se llama *sustracción* una operación contraria de la adición, y cuyo objeto es, conociendo la suma de dos números cualesquiera y uno de estos números, hallar el otro número.

La suma dada toma el nombre de *minuendo*, el sumando conocido el de *sustraendo*, y el sumando incógnito el de *resto* de la sustracción, *exceso* del minuendo al sustraendo ó *diferencia* entre minuendo y sustraendo.

Por consiguiente, el minuendo es igual á la suma del sustraendo y resto.

El resto, que es el número que falta al sustraendo para completar el minuendo, podrá hallarse evidentemente quitando del minuendo el sustraendo. Por consiguiente, en Aritmética se puede dar esta otra definición de la sustracción: la *sustracción* es una operación cuyo objeto es quitar ó *restar* de un número otro menor.

Para indicar la sustracción, se escribe el signo — entre minuendo y sustraendo. Así, 9 — 4 quiere decir que del número 9 se ha de restar el número 4. Como el número que falta al 4 para componer 9 es 5, tendremos $9 - 4 = 5$. El minuendo es 9, el sustraendo 4 y el resto 5.

6. Según la definición de la sustracción, es evidente que: *Si al minuendo se añade ó resta un número cualquiera, el resto aumentará ó disminuirá en el mismo número; si al sustraendo se añade ó resta un número cualquiera, el resto disminuirá ó aumentará en el mismo número*. De donde se infiere que: *Si á minuendo y sustraendo se añade ó resta un mismo número cualquiera, el resto no variará;* porque en el primer caso, el resto aumenta en tanto cuanto se añade al minuendo, y disminuye en tanto cuanto se añade al sustraendo; y pues suponemos que á minuendo y sustraendo se añade el mismo número, el resto no sufre alteración. En el segundo caso, el resto disminuye en tanto cuanto disminuye el minuendo, y aumenta en tanto cuanto disminuye el sustraendo; luego tampoco en este caso varía el resto.

Para restar un número entero de otro entero mayor, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las cifras de igual orden. Se restan en seguida las unidades simples del sustraendo de las del minuendo, y se escribe el resto; se restan las decenas del sustraendo de las del minuendo, y se escribe el resto; y así sucesivamente.

El resultado hallado por esta regla será el resto de la sustracción, pues que se restan del minuendo todas las partes del sustraendo.

Puede suceder que una cifra del sustraendo sea mayor que la correspondiente del minuendo: entonces, para efectuar con facilidad la operación, se añaden á la cifra del minuendo diez unidades de su orden, y en seguida se añade al guarismo siguiente del sustraendo una unidad de su orden, la cual vale diez unidades de las del orden inmediato anterior. De este modo se añade á minuendo y sustraendo un mismo número; lo que no altera al resto.

Antes de hacer uso de la regla de la sustracción, se ha de saber restar de memoria un número de una cifra de otro que le exceda en menos de diez unidades. Por ejemplo, de 5 á 9 van 4, de 7 á 16 van 9, de 3 á 11 van 8.

Ejemplos.

1.° Hallar la diferencia que hay entre los números 767543 y 538901.

Disposición de esta operación.

767543	*Minuendo.*
538901	*Sustraendo.*
228642	*Resto ó diferencia.*

Decimos: de 1 á 3 van 2, que se escribe debajo; de 0 á 4 van 4; de 9 á 5 no puede ser, por lo que añadimos 10 á 5, y diremos de 9 á 15 van 6. Ahora añadimos 1 á la cifra siguiente 8 del sustraendo, y diremos de 9 á 7 no puede ser; pero añadiendo 10 á 7, se dirá de 9 á 17 van 8. Añadiendo 1 á la cifra 3, diremos de 4 á 6 van 2, de 5 á 7 van 2.

2.° Restar del número 380005 el número 127894.

$$\begin{array}{r} 380005 \\ 127894 \\ \hline 252111 \end{array}$$

De 4 á 5 va 1; de 9 á 0 no puede ser, por lo que añadimos 10 á 0, y diremos de 9 á 10 va 1. Añadiendo ahora 1 á la cifra 8, se dirá de 9 á 10 va 1, de 8 á 10 van 2, de 3 á 8 van 5, de 1 á 3 van 2.

ARTÍCULO 3.°

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.

7. Definición general.

Multiplicar un número entero, quebrado ó mixto, por otro entero, quebrado ó mixto, es hallar un tercer número que sea respecto del primero lo que el segundo es respecto de la unidad.

El número que se multiplica se llama *multiplicando*, el número por quien éste se multiplica se llama *multiplicador*, y el resultado se llama *producto*.

Según la definición de esta operación, multiplicar 7 por 5 es hallar un número que sea respecto del multiplicando 7 lo que el multiplicador 5 es respecto de la unidad; y pues el multiplicador 5 es cinco veces mayor que la unidad, el producto deberá ser cinco veces mayor que el multiplicando 7; luego el producto será $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ ó 35.

Vemos que, si el multiplicador es un número entero, el producto contiene al multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador. Por consiguiente, en el caso en que el multiplicador sea entero, se puede dar esta otra definición de la multiplicación: *Multiplicar un número cualquiera, entero, quebrado ó mixto, por un entero*, es hallar un tercer número que contenga al primero tantas veces, ó que sea tantas veces mayor que el primero, como unidades tiene el segundo; ó bien, *multiplicar un número cualquiera por un entero*, es tomar ó repetir el primero tantas veces como unidades tiene el segundo.

Para indicar que un número se ha de multiplicar por otro, se escribe entre los dos el signo $\times$ ó un punto. Así, 7×3 ó $7 \,.\, 3$ quiere decir que el número 7 se ha de multiplicar por 3. El producto será, según la definición, $7 + 7 + 7$ ó 21; luego $7 \times 3 = 21$. El multiplicando es 7, el multiplicador 3 y el producto 21.

El multiplicando y el multiplicador se llaman *factores* del producto.

8. Según la definición de la multiplicación, pudiera hallarse el producto de un número entero por otro entero, repitiendo el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; pero esta operación sería sumamente larga en el caso en que el multiplicador fuese un número grande, y nosotros nos proponemos ahora explicar un método mucho más sencillo que el que resulta inmediatamente de la definición.

Distinguiremos tres casos:

1.° Multiplicar un número de una cifra por otro también de una cifra.

2.° Multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola cifra.

3.° Multiplicar dos números de varias cifras.

1.^{er} *caso*. La multiplicación de un número de una cifra por otro de una cifra, se efectúa fácilmente por la siguiente

Tabla de multiplicación.

0 por 0... 0	1 por 0... 0	2 por 0... 0	3 por 0... 0	4 por 0... 0
0 por 1... 0	1 por 1... 1	2 por 1... 2	3 por 1... 3	4 por 1... 4
0 por 2... 0	1 por 2... 2	2 por 2... 4	3 por 2... 6	4 por 2.. 8
0 por 3... 0	1 por 3... 3	2 por 3... 6	3 por 3... 9	4 por 3... 12
0 por 4... 0	1 por 4... 4	2 por 4... 8	3 por 4... 12	4 por 4... 16
0 por 5... 0	1 por 5... 5	2 por 5... 10	3 por 5... 15	4 por 5... 20
0 por 6... 0	1 por 6... 6	2 por 6... 12	3 por 6... 18	4 por 6... 24
0 por 7... 0	1 por 7... 7	2 por 7... 14	3 por 7... 21	4 por 7... 28
0 por 8... 0	1 por 8... 8	2 por 8... 16	3 por 8... 24	4 por 8... 32
0 por 9... 0	1 por 9... 9	2 por 9... 18	3 por 9... 27	4 por 9... 36
5 por 0... 0	6 por 0... 0	7 por 0... 0	8 por 0... 0	9 por 0... 0
5 por 1... 5	6 por 1... 6	7 por 1... 7	8 por 1... 8	9 por 1... 9
5 por 2... 10	6 por 2... 12	7 por 2... 14	8 por 2... 16	9 por 2... 18
5 por 3... 15	6 por 3... 18	7 por 3... 21	8 por 3... 24	9 por 3... 27
5 por 4... 20	6 por 4... 24	7 por 4... 28	8 por 4... 32	9 por 4... 36
5 por 5... 25	6 por 5... 30	7 por 5... 35	8 por 5... 40	9 por 5... 45
5 por 6... 30	6 por 6... 36	7 por 6... 42	8 por 6... 48	9 por 6... 54
5 por 7... 35	6 por 7... 42	7 por 7... 49	8 por 7... 56	9 por 7... 63
5 por 8... 40	6 por 8... 48	7 por 8... 56	8 por 8... 64	9 por 8... 72
5 por 9... 45	6 por 9... 54	7 por 9... 63	8 por 9... 72	9 por 9... 81

Es necesario, para hallar el producto con brevedad en los dos casos que siguen, saber de memoria esta tabla.

9. 2.° caso. *Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se multiplican sucesivamente las unidades simples, las decenas, las centenas, etc., del multiplicando por el multiplicador; se escribe la cifra de las unidades de cada producto parcial, y se guardan las decenas para añadirlas al producto parcial siguiente* (*).

El resultado obtenido de este modo contiene las unidades, decenas, centenas, etc., del multiplicando repetidas tantas veces

(*) Entendemos aquí por *producto parcial* el producto de cada cifra del multiplicando por la cifra de que consta el multiplicador.

como unidades tiene el multiplicador, ó lo que es igual, el resultado contiene á todo el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador; luego dicho resultado es el producto pedido.

Ejemplos.

1.° Multiplicar 6835 por 4.

Disposición de esta operación.

6835	*Multiplicando.*
4	*Multiplicador.*
27340	*Producto.*

Diremos: 5 por 4 son 20, que consta de dos decenas y ninguna unidad: escribimos, pues, 0 en el lugar de las unidades, y guardamos las dos decenas; 3 decenas por 4 son 12 decenas, y dos del producto parcial anterior son 14 decenas: escribimos 4 en el lugar de las decenas y guardamos una centena; 8 centenas por 4 son 32 centenas, y 1 centena del producto parcial anterior son 33 centenas: escribimos 3 en el lugar de las centenas, y guardamos 3 millares; 6 millares por 4 son 24 millares, y 3 millares del producto parcial anterior son 27 millares: escribimos 7 en el lugar de los millares, y en seguida, como no hay más cifras en el multiplicando, escribimos las dos decenas de millar.

2.° Multiplicar 69032 por 7.

$$\begin{array}{r} 69032 \\ 7 \\ \hline 483224 \end{array}$$

Decimos: 2 por 7 son 14: escribiremos 4 y llevamos 1; 3 por 7 son 21 y 1 son 22: escribimos 2 y llevaremos 2; 0 por 7 es 0 y 2 son 2, que lo escribimos; 9 por 7 son 63: escribiremos 3 y llevaremos 6; 6 por 7 son 42 y 6 son 48: escribiremos el 8 y á continuación y delante el 4.

10. Antes de entrar en el tercer caso, consideraremos dos de sus casos particulares: 1.° Multiplicar un número entero por 10, 100, 1000, etc. 2.° Multiplicar un número entero por cualquiera de las cifras significativas 2, 3, 4,..., 9 seguida de uno ó más ceros.

1.° *Para multiplicar un número entero por* 10, *se escribe un cero á su derecha;* pues de este modo las unidades del número pasan á ser decenas, las decenas á centenas, etc., es decir, que todas las partes del número se hacen 10 veces mayores, y por tanto, el número se hace 10 veces mayor ó se multiplica por 10.

Del mismo modo se demuestra que: *Para multiplicar un número entero por* 100, *se escriben dos ceros á su derecha; para multiplicar un número entero por* 1000, *se escriben tres ceros á su derecha*, etc.

Así, $128 \times 10 = 1280$; $34 \times 1000 = 34000$.

2.° *Para multiplicar un número entero por cualquiera de las cifras significativas* 2, 3, 4,..., 9 *seguida de uno ó más ceros, se multiplica el número por dicha cifra, y á la derecha del producto, hallado así, se escriben tantos ceros como tiene el multiplicador.*

Sea el multiplicando 327 y el multiplicador 400: el producto será 327 tomado 400 veces por sumando. Esta suma indicada $327 + 327 + 327 + \ldots + 327$, en la cual 327 entra 400 veces, puede dividirse en grupos de á cuatro sumandos, y es evidente que en los 400 sumandos existirán 100 de estos grupos. Cada grupo vale 327×4 ó 1308: luego el producto total se hallará haciendo á este número 100 veces mayor, es decir, escribiendo dos ceros á su derecha; lo que demuestra la verdad de la regla.

Disposición de esta operación.

$$\begin{array}{r} 327 \\ 400 \\ \hline 130800 \end{array}$$

11. 3.er *caso.* Multiplicar 7246 por 4908.

El producto se hallará repitiendo 4908 veces el multiplicando, ó, lo que es igual, repitiendo el multiplicando 8 veces, después 900 veces, después 4000 veces, y sumando estos tres productos parciales. El multiplicando repetido 8 veces da el producto parcial 57968. Para repetir dicho multiplicando 900 veces, ó multiplicarle por 900, no habrá más que multiplicarle por 9, y escribir en seguida dos ceros á su derecha (10, 2.°), lo que da el producto parcial 6.521400. En fin, para multiplicar el multiplicando por 4000, se multiplicará por 4 y se escribirán tres ceros á su derecha: luego el tercer producto parcial es 28.984000. El producto total es la suma 35.563368 de estos tres productos parciales.

Observemos que los ceros que acompañan al segundo y tercer productos parciales son inútiles, si para sumar estos tres productos parciales se coloca la cifra inmediata á estos ceros en el lugar en que por su valor relativo la corresponde.

Luego: *Para multiplicar un número de varias cifras por otro que también tenga varias cifras, se multiplica el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador, y los productos parciales se colocan unos debajo de otros de modo que la primera cifra de la derecha* *de cada uno de ellos ocupe el mismo lugar que la cifra correspondiente del multiplicador; y después se suman los productos parciales* (*).

Disposición de esta operación.

7246	*Multiplicando.*
4908	*Multiplicador.*
57968	*Productos parciales.*
6521400	
28984000	
35563368	*Producto total.*

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 5403214 \\ 700893 \\ \hline 16209642 \\ 48628926 \\ 43225712 \\ 37822498 \\ \hline 3787074870102 \end{array}$$

12. En el caso que estamos considerando puede suceder que uno solo de los factores termine en uno ó más ceros, ó que los dos factores terminen en uno ó más ceros: veamos cómo en tales casos debe efectuarse la multiplicación.

1.° Sea, por ejemplo, 5400×32: el producto se hallará repitiendo el número 5400 ó 54 centenas 32 veces; es decir, que el producto será (54×32) centenas $= 1728$ centenas $= 172800$, producto que ha resultado de multiplicar 54 por 32 y escribir dos ceros á su derecha.

2.° Sea 54 el multiplicando y 3200 el multiplicador; el producto se hallará repitiendo 54 3200 veces. La suma indicada $54 + 54 + 54 + \ldots + 54$, en la que el número 54 está repetido 3200 veces, puede dividirse en grupos de á 32 sumandos; y es claro que en dicha suma existirán 100 de estos grupos: cada grupo valdrá $54 \times 32 = 1728$: luego el producto total se hallará

(*) En la exposición de las verdades matemáticas pueden seguirse dos métodos llamados *analítico* y *sintético*. Se sigue el método analítico cuando se halla la verdad, proponiéndose un problema y resolviéndolo, y se enuncia en seguida la verdad hallada. Se sigue el método sintético cuando se enuncia desde luego la verdad, y se da en seguida la demostración.

En la exposición del tercer caso de la multiplicación hemos seguido el método analítico; en la exposición de las verdades anteriores hemos seguido el método sintético.

multiplicando por 100 este número, lo que da 172800, producto que ha resultado de multiplicar 54 por 32 y escribir dos ceros á la derecha del producto 1728 de estos dos números.

3.° Sea el multiplicando 5400 y el multiplicador 320; el producto será 5400 tomado 320 veces por sumando. Esta suma puede descomponerse en 10 grupos de á 32 sumandos: cada grupo vale 5400×32, que sabemos equivale á 172800; luego los 10 grupos valdrán 1728000, número que ha resultado de multiplicar 54 por 32 y escribir tres ceros á la derecha del producto 1728 de estos dos números.

Luego: *Para multiplicar un número por otro, cuando el uno ó los dos terminan en ceros, se prescinde de estos ceros, se multiplican los dos números restantes, y á la derecha de su producto se escriben tantos ceros como hay á la derecha de los dos factores.*

Ejemplos. 1.° Multiplicar el número 478000 por el número 308.

Disposición de esta operación.

$$\begin{array}{r} 478000 \\ 308 \\ \hline 3824 \\ 1434 \\ \hline 147224000 \end{array}$$

2.° Multiplicar 178 por 1800.

$$\begin{array}{r} 178 \\ 1800 \\ \hline 1424 \\ 178 \\ \hline 320400 \end{array}$$

3.° Multiplicar el número 17080 por 5600.

$$\begin{array}{r} 17080 \\ 5600 \\ \hline 10248 \\ 8540 \\ \hline 95648000 \end{array}$$

Nota. En la práctica de la multiplicación es conveniente, para la brevedad, tomar por multiplicador el factor que tiene menor número de cifras significativas: el producto será siempre el mismo, cualquiera que sea el factor que se tome por multiplicador, según se demuestra en la proposición siguiente.

13. Teorema. *El producto de dos números enteros no varía* *aunque se tome el multiplicando por multiplicador, y éste por multiplicando* (*).

Tomemos dos números enteros cualesquiera, por ejemplo 35 y 128: vamos á demostrar que $35 \times 128 = 128 \times 35$.

En efecto, $35 = 1 + 1 + 1 + ... + 1$, entrando 1 en este segundo miembro 35 veces. Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por 128, y observando que el segundo miembro se multiplicará por 128, ó se hará 128 veces mayor, si cada una de sus unidades se hace 128 veces mayor, tendremos $35 \times 128 = 128 + 128 + 128 + ... + 128$. En este segundo miembro 128 entra 35 veces: luego este segundo miembro es el producto de 128 por 35; luego $35 \times 128 = 128 \times 35$.

14. Un número se llama *duplo* ó *doble* de otro, cuando contiene á éste dos veces exactamente. Así, 12 es duplo de 6.

Un número se llama *triplo* de otro, cuando contiene á éste tres veces exactamente. Así, 15 es triplo de 5.

Un número se llama *cuádruplo* de otro, cuando contiene á éste cuatro veces exactamente. Así, 20 es cuádruplo de 5.

Del mismo modo, si un número contiene á otro 5, 6, 7, 8, 10 ó 100 veces, se llama respectivamente *quíntuplo, séxtuplo, séptuplo, óctuplo, décuplo* ó *céntuplo* de este otro.

15. Si un número cualquiera entero, quebrado ó mixto se divide en 2, 3, 4, 5,..., 10, 11, 12, 13, etc., partes iguales, estas partes se llaman respectivamente *medios* ó *mitades, tercios* ó *terceras partes, cuartos* ó *cuartas partes, quintos* ó *quintas partes,..., décimos* ó *décimas partes, onceavos, doceavos, treceavos,* etc., del mismo número.

ARTÍCULO 4.º

DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS ABSTRACTOS.

16. Definición general.

La *división* es una operación inversa de la multiplicación, y cuyo objeto es, conociendo el producto de dos factores cualesquiera y uno de esos factores, hallar el otro factor.

El producto dado toma el nombre de *dividendo*, el factor conocido el de *divisor*, y el factor incógnito el de *cociente*.

Por consiguiente, el dividendo es igual al producto del divi-

---

(*) Se llama *axioma* una verdad evidente.

Axiomas. { El todo es mayor que una de sus partes.
Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

Se llama *teorema* una proposición no evidente por sí misma, y cuya verdad se prueba por medio de un razonamiento llamado *demostración*.

sor por el cociente, ó al producto del cociente por el divisor (*).

Para indicar la división, se escriben dos puntos entre el dividendo y divisor. Así, 35 : 7 quiere decir que 35 se ha de partir ó dividir por 7; y como 5 es el número que multiplicado por 7 da 35, tendremos 35 : 7 = 5. El dividendo es 35, el divisor 7 y el cociente 5.

La división de dos números *enteros* se llama *exacta*, cuando el cociente es el entero, é *inexacta* en el caso contrario.

Por ejemplo, la división de 24 dividido por 6 es exacta, pues el cociente es el entero 4; y la división de 26 dividido por 6 es inexacta, puesto que el cociente debe ser mayor que 4 y menor que 5.

En la división inexacta el mayor número entero que contiene el cociente, se llama *cociente entero*.

17. De la definición de la división resultan las consecuencias siguientes:

1.ª *Cuando el dividendo es un número cualquiera entero, quebrado ó mixto, y el divisor es entero, el cociente es tantas veces menor que el dividendo como unidades tiene el divisor*, ó lo que es igual, *el cociente es una de tantas partes iguales del dividendo como unidades tiene el divisor*, pues el cociente, multiplicado por el divisor ó tomado tantas veces como unidades tiene el divisor, debe dar, según la definición, el dividendo.

Así, el cociente que se halla partiendo un número cualquiera entero, quebrado ó mixto por 2, 3, 4, etc., es un número 2, 3, 4, etc., veces menor que el dividendo, ó lo que es igual, es su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, etc.

2.ª *El cociente de una división exacta indica el número de veces que el dividendo contiene al divisor;* pues, según la definición, el divisor, multiplicado por el cociente ó tomado tantas veces como unidades tiene el cociente, debe dar el dividendo.

3.ª *El cociente entero de una división inexacta indica el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor;* pues el divisor, tomado tantas veces como unidades tiene el cociente entero, da una suma menor que el dividendo, y tomado una vez más da una suma mayor que el dividendo.

Según esto, para hallar el mayor número de veces que un número contiene á otro, se divide el primero por el segundo, y el cociente entero será este número de veces.

En la división inexacta el número que sobra, después de

(*) Hemos demostrado (13) que: *El producto de dos números enteros no varía, aunque se tome el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando.* Este teorema es cierto para dos números cualesquiera, como á su tiempo demostraremos.

restar del dividendo el producto del divisor por el cociente entero, se llama *residuo*. Es evidente que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente entero más el residuo.

El residuo debe ser menor que el divisor; pues si fuese igual ó mayor, el divisor estaría aún contenido en el dividendo una ó más veces, y por consiguiente, el cociente entero hallado sería menor que el verdadero.

18. Hemos visto que si la división es exacta, el cociente es el número de veces que el dividendo contiene al divisor; y que si es inexacta, el cociente entero es el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor: por consiguiente, el cociente, exacto ó entero, puede hallarse restando el divisor del dividendo todas las veces que se pueda, y este número de veces será dicho cociente. Mas aunque en todos casos puede seguirse esta regla, la operación sería muy larga, cuando el cociente exacto ó entero fuese bastante grande, como sucede comunmente. El método que vamos á explicar es mucho más breve (*).

Distinguiremos tres casos:

1.° El cociente tiene una cifra, teniendo el dividendo una ó dos cifras y el divisor una.

2.° El cociente tiene una cifra, teniendo el dividendo y el divisor varias cifras.

3.° El cociente tiene varias cifras.

19. 1.er *caso*. Si el dividendo tiene una ó dos cifras y el divisor tiene una sola, el cociente se hallará fácilmente, puesto que, multiplicado por el divisor, debe dar el dividendo. Así, $8 : 4 = 2$; $72 : 9 = 8$; $67 : 7 = 9$ y quedan 4 de residuo.

Estos cocientes se hallan diciendo: 8 entre 4 á 2, ó la cuarta parte de 8 2; 72 entre 9 á 8, ó la novena parte de 72 8; 67 entre 7 á 9 y sobran 4, ó la séptima parte de 67 9 y sobran 4.

20. 2.° *caso*. Sea el dividendo 35845 y el divisor 4797.

Disposición de esta operación.

Dividendo.	35845	4797	*Divisor.*
	38376	8...7	*Cociente.*
	33579		
Residuo.	2266		

(*) Advertimos que por la palabra *cociente* entenderemos en este artículo *cociente entero*, si la división es inexacta.

Si multiplicamos el divisor por 10, el producto 47970 es mayor que el dividendo; luego el cociente es menor que 10, ó tiene una cifra.

Para hallar este cociente, se observará que si prescindimos de todas las cifras que están á la derecha de la primera 4 del divisor, y de igual número de cifras de la derecha del dividendo, tendremos 35 millares en el dividendo y 4 millares en el divisor, números poco menores que los propuestos; por lo que el cociente 8 de dichos números no debe diferenciarse mucho del cociente verdadero.

Decimos ahora que el cociente de los millares del dividendo, divididos por los del divisor, es el cociente verdadero, ó es mayor que el verdadero. En efecto, supongamos que se haya hallado el cociente verdadero: siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente entero, más el residuo si la división es inexacta, los millares del dividendo contendrán los millares que resultan del producto de los millares del divisor por el cociente verdadero, más los millares que pueden resultar del producto, sumado con el residuo, de las centenas, decenas y unidades del divisor por el cociente verdadero. Es evidente que este último número de millares puede ser menor que el contenido en el divisor; mas por el contrario, dicho último número de millares puede ser mayor que el contenido en el divisor, pues sólo el producto de las centenas, decenas y unidades del divisor por el cociente verdadero puede dar tantos ó más millares que los que contiene el divisor, y sólo el residuo puede dar también tantos millares cómo contiene el divisor. Por consiguiente, si dividimos los millares del dividendo por los del divisor, el cociente será el verdadero ó mayor que el verdadero.

Para comprobar la cifra del cociente, se multiplicará por el divisor, y si el producto no es mayor que el dividendo, dicha cifra será buena. Pero si el producto es mayor que el dividendo, será la cifra demasiado grande; se la disminuirá en una unidad, y la cifra nueva se someterá á la misma comprobación.

Multipliquemos, según esto, la cifra 8 por el divisor 4797: el producto 38376 es mayor que el dividendo, por lo que la cifra 8 es demasiado grande. Tomemos la cifra 7 por cociente, y multiplicándola por el divisor, el producto 33579 es menor que el dividendo; luego 7 es el cociente verdadero. Restando del dividendo el producto 33579, quedan 2266 de residuo.

Podemos, pues, enunciar la regla siguiente:

Para dividir un número de varias cifras por otro que también tenga varias cifras cuando el cociente no tiene más que una, se ve en primer lugar si el dividendo tiene tantas cifras como el divisor, ó si *tiene una más; en el primer caso se divide la primera cifra de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor, y en el segundo se divide el número que componen las dos primeras cifras de la izquierda del dividendo por la primera de la izquierda del divisor: el cociente que resulte será el verdadero ó mayor que el verdadero. Para comprobar este número, se multiplica el divisor por él, y si el producto es mayor que el dividendo, será dicho número demasiado grande; pero si el producto es igual ó menor que el dividendo, el mismo número será el cociente pedido. Si el cociente hallado es demasiado grande, se le disminuye en una unidad, y la nueva cifra se comprueba del mismo modo. Hallado el cociente verdadero, su producto por el divisor se restará del dividendo y se tendrá el residuo.*

21. Conviene ejercitarse en hallar el residuo, efectuando la multiplicación y la sustracción al mismo tiempo; para lo cual será necesario, cuando el producto parcial que se quiera restar sea mayor que la cifra del dividendo, de la cual se resta, añadir á esta cifra las unidades suficientes del orden superior inmediato, para que la sustracción sea posible; y para que el resto no padezca alteración, se añadirán otras tantas unidades al producto parcial siguiente: de este modo se añade á minuendo y sustraendo una misma cantidad, y por tanto, el resto no se altera.

Así, en el ejemplo propuesto, siendo 8 la cifra que primeramente tomamos por cociente, diremos: 7 por 8 son 56, que no se puede restar de la cifra 5 del dividendo, por lo que añadiremos á esta cifra 6 decenas, y restando el 56 de 65, quedan 9 de resto. Ahora 9 decenas por 8 componen 72 decenas, á cuyo producto añadiremos las 6 decenas que habíamos añadido antes al minuendo, con lo cual tendremos 78 decenas, que no pueden restarse de 4 decenas, y por eso añadiremos al 4 8 centenas; y efectuando la sustracción, hallaremos 6 de resto: 7 centenas por 8 son 56 centenas, y 8 centenas que debemos añadir, por haberlas añadido al minuendo, componen 64 centenas, que restadas de 68 centenas, dejan 4 de resto: 4 millares por 8 son 32 millares, y 6 que debemos añadir, componen 38 millares, que no se pueden restar de 35 millares; lo que indica que la cifra 8 tomada por cociente es demasiado grande, pues el producto del divisor por 8 pasa de 38000, siendo así que el dividendo no llega á 36000.

Tomemos ahora el 7 por cociente, y diremos: 7 por 7 son 49, á 55 van 6 y llevamos 5; 9 por 7 son 63 y 5 son 68, á 74 van 6 y llevamos 7; 7 por 7 son 49 y 7 son 56, á 58 van 2 y llevamos 5; 4 por 7 son 28 y 5 son 33, á 35 van 2.

He aquí efectuada esta operación.

35845	4797
469	8...7
2266	

22. Es preferible la siguiente comprobación de la cifra del cociente:

Se multiplica esta cifra por la primera de la izquierda del divisor, y se resta el producto del dividendo parcial que se haya tomado para hallar dicha cifra: si el resto parcial que resulta es igual ó mayor que la cifra en cuestión, ésta será buena; pero si es menor, se coloca á su derecha la cifra siguiente del dividendo, y se vuelve á multiplicar la cifra del cociente por la segunda del divisor. Este nuevo producto podrá ser, ó no, mayor que el número que forman el resto parcial y la cifra colocada á su derecha: si es mayor, la cifra hallada es demasiado grande; si no es mayor, se resta del número formado por el resto parcial, y la cifra colocada á su derecha; si el nuevo resto parcial es igual ó mayor que la cifra del cociente, ésta será buena; pero si es menor, se coloca á su derecha la cifra siguiente del dividendo; y se continúa del mismo modo hasta que se llegue á un producto parcial de la cifra dudosa por una del divisor, producto que sea mayor que el número formado por el resto parcial respectivo y por la cifra siguiente del dividendo, en cuyo caso la cifra del cociente es demasiado grande; ó hasta que se llegue á un resto parcial igual ó mayor que la cifra que se comprueba, y entonces esta cifra es la verdadera.

Ejemplos. 1.°

35845	4797
2266	7

Diremos: 35 entre 4 á 8. Tómese mentalmente el 8 por cociente, multiplíquese por la primera cifra 4 del divisor, y restando este producto parcial de 35, hallaremos el resto parcial 3, que es menor que la cifra 8 que se comprueba, por cuyo motivo imaginemos á su derecha la cifra siguiente 8 del dividendo, y tendremos 38: vuélvase á multiplicar el 8 por la segunda cifra 7 del divisor; y como el producto parcial 56 es mayor que 38, el cociente hallado 8 es demasiado grande.

En efecto, el producto de 8, por el divisor, consta de 32 millares, 56 centenas, etc.; y el dividendo sólo tiene 32 millares, 38 centenas, etc.: luego la cifra 8 es demasiado grande.

Tomemos ahora la cifra 7 por cociente, y multiplicándola por 4, y restando el producto parcial 28 de 35, hallaremos el resto parcial 7, igual á la cifra que se comprueba; luego esta cifra es buena.

Para demostrarlo, observemos que las centenas, decenas y unidades del divisor componen un número menor que 1000, y por tanto el producto de este número por 7 es menor que 7000; pero como el resto parcial es 7 y el total 7845, el dividendo se compone de 28 millares y 7845 unidades, mientras que el producto del divisor por 7 sólo consta de 28 millares y de un número menor que 7000: luego la cifra 7 no es mayor que la verdadera; y como ya hemos visto que 8 es demasiado grande, resulta que 7 es la cifra verdadera.

2.ª

2381	572
093	4

Decimos: 23 entre 5 á 4. Tomemos mentalmente la cifra 4 por cociente, multiplíquese por 5, y restando el producto parcial 20 de 23 hallaremos el resto parcial 3 menor que la cifra que comprobamos. Imaginemos á la derecha del resto 3 la cifra siguiente 8 del dividendo, y tendremos 38: multipliquemos 4 por 7, y restemos el producto 28 de 38, y quedan 10 de nuevo resto parcial, el cual, como es mayor que 4, nos dice que esta cifra es buena.

En efecto, las unidades del divisor no llegan á 10; luego su producto por 4 es menor que 40: siendo el último resto parcial 10 y el total 101, vemos que el dividendo consta de 57 $\times$ 4 decenas y de 101 unidades, mientras que el producto del divisor por 4 sólo consta de 57 $\times$ 4 decenas y de un número menor que 40: luego la cifra 4 no es mayor que la verdadera del cociente; y como el cociente es evidentemente menor que 5, se ve que 4 es el cociente verdadero.

3.ª

8534	4236
0062	2

Decimos: 8 entre 4 á 2. Tómese mentalmente el 2 por cociente, y multiplicándole por 4 y restando el producto 8 de la primera cifra 8 del dividendo, queda 0 del resto parcial; y como este resto es menor que la cifra en cuestión 2, imaginemos á su derecha la cifra siguiente 5 del dividendo: volvamos á multiplicar la cifra 2 por la segunda 2 del divisor, y restando el producto parcial 4 de 5, queda 1 de resto; y como este resto parcial es menor que la cifra que se comprueba, imaginemos á su derecha la cifra siguiente 3 del dividendo y volvamos á multiplicar 2 por la tercera cifra del divisor, y restando el producto parcial 6 de 13, encontraremos el nuevo resto parcial 7, que, como es mayor que la cifra 2 que comprobamos, nos advierte que esta cifra es la que se busca.

Para demostrarlo, vemos que la cifra 6 de las unidades del divisor es menor que 10; luego su producto por 2 es menor que 20: el dividendo se compone de 423 $\times$ 2 decenas y de 70 unidades, mientras que el producto del divisor por 2 sólo consta de 423 $\times$ 2 decenas y de un número menor que 20: luego la cifra 2 no es mayor que la cifra verdadera del cociente; y como el cociente no puede llegar á 3, se infiere que 2 es la cifra verdadera del cociente.

4.°

596321	68324
49729	8

Decimos: 59 entre 6 á 9. Tomemos mentalmente el 9 por cociente y diremos: 6 por 9 54 á 59 5, 8 por 9 72 mayor que 56; el número 9 es demasiado grande.

En efecto, el dividendo consta de 54 decenas de millar, de 56 millares, etc., y el producto del divisor por 9 contiene 54 decenas de millar, 72 millares, etc., es decir, que el producto del divisor por 9 es mayor que el dividendo; luego el 9 es demasiado grande.

Tomemos el 8 por cociente, y diremos: 6 por 8 48 á 59 van más que 8; el 8 es cifra buena.

En efecto, los millares, centenas, decenas y unidades del divisor componen un número menor que 10000, y por consiguiente el producto del divisor por 8 consta de 48 decenas de millar y de un número menor que 80000, mientras que el dividendo consta de 48 decenas de millar y de un número mayor que 80000; luego el 8 no es mayor que la cifra verdadera del cociente: tampoco es menor, pues para esto sería menester que el cociente fuese por lo menos 9, contra lo demostrado; luego 8 es el cociente verdadero (*).

23. 3.er caso. *El cociente tiene varias cifras.*

Sea el dividendo 5798326 y el divisor 674.

Disposición.

5 7 9 8.3 2 6	674
4 0 6 3.2 6	8602
1 9 2.6	
5 7 8	

(*) Cuando siguiendo este método de comprobación, se halla la cifra buena del cociente, se puede hallar el residuo, sin efectuar la multiplicación de todo el divisor por el cociente: pues en la comprobación se ha restado del dividendo el producto de varias cifras superiores del divisor por el cociente; luego para hallar el residuo, sólo falta restar del resto to-

Escribiendo tres ceros á la derecha del divisor, el producto 674000 es menor que el dividendo; y escribiendo cuatro ceros, el producto 6 740000 es mayor que el dividendo; luego el cociente se halla comprendido entre 1000 y 10000, es decir, tiene cuatro cifras. Para hallar la primera cifra del cociente ó la cifra de los millares, partimos los 5798 millares del dividendo por el divisor, y decimos que el cociente 8, hallado según se ha explicado en los párrafos 20 y 22, es la cifra de los millares del cociente.

En efecto, el producto 674 × 8 es menor que 5798; luego el producto 674 × 8 millares es menor que los 5798 millares del dividendo, y con mayor razón será menor dicho producto que el dividendo 5798326. El producto 674 × 9 es mayor que 5798: luego el producto 674 × 9 millares será mayor que los 5798 millares del dividendo; y como dicho producto es un número justo de millares, excederá á los 5798 millares en uno ó más millares; pero el dividendo es menor que 5799 millares; luego el producto 674 × 9 millares es mayor que el dividendo. Tenemos, pues, que el dividendo está comprendido entre 674 × 8 millares y 674 × 9 millares; luego partiendo el dividendo por 674, el cociente estará comprendido entre 8 millares y 9 millares; 8 es, por tanto, el número de millares del cociente, ó la primera cifra del cociente.

Esto supuesto, multiplicando la cifra 8 de los millares del cociente por el divisor, y restando el producto del dividendo, el resto 406326 será el producto del divisor por el número que forman las demás cifras del cociente, más el residuo.

Para hallar la primera cifra de las que faltan en el cociente, es decir, las cifras de las centenas del cociente, partiremos las 4063 centenas del nuevo dividendo por el divisor, y el cociente 6, hallado como se ha visto en los párrafos 20 y 22, será la cifra de las centenas del cociente; lo que se demuestra del mismo modo que se ha

---

tal que haya quedado en esta comprobación, el producto de las demás cifras del divisor por el cociente.

Ejemplos.

1.°	2381	574
	38	4
	101	
Residuo..	85	
2.°	78432	8712
	64	9
	13	
	42	
Residuo..	24	

demostrado que la cifra 8 es la cifra de los millares del cociente.

Multiplicando la cifra 6 por el divisor, y restando el producto del nuevo dividendo, el resto 1926 es el producto del divisor por el número que forman las cifras que faltan del cociente, más el residuo.

Para hallar la cifra de las decenas del cociente, observemos que, cualquiera que fuese en este ejemplo la cifra significativa de las decenas multiplicada por el divisor, daría un producto mayor que las 192 decenas del nuevo dividendo; luego la cifra de las decenas es 0, y 1926 es el producto del divisor por las unidades del cociente, más el residuo. Dividiendo, pues, 1926 por el divisor, hallaremos la cifra 2 de las unidades, y el residuo 578.

24. Como para hallar cada cifra del cociente tomamos por dividendo parcial el resto total menos las cifras de orden inferior al de la que se va á hallar en el cociente, se abrevia la operación, no bajando á cada resto parcial más que una cifra, como se ve en el ejemplo que sigue:

1 1 7 4.2 3 4 6	295
2 8 9 2	39804
2 3 7 3	
0 1 3 4 6	
1 6 6	

En este ejemplo, al dividir 28 por 2, para hallar los millares, hemos principiado por suponer que el cociente que buscábamos era 9, y hecha la comprobación (22) hemos visto que esta cifra es buena.

Un cociente parcial no puede ser mayor que 9, pues para esto el resto parcial anterior debería ser mayor que el divisor, lo que no puede suceder (17), á no ser que la cifra anterior del cociente sea demasiado pequeña.

25. En vista de lo que llevamos dicho sobre el tercer caso de la división, podremos establecer la regla general siguiente:

Para dividir un número por otro, cuando el cociente tiene varias cifras, se tomará en la izquierda del dividendo un número que, considerado como de unidades simples, contenga al divisor menos de 10 veces. Se dividirá este primer dividendo parcial por el divisor, y se tendrá la primera cifra del cociente; se multiplicará esta cifra por el divisor, y el producto se restará del dividendo parcial; á la derecha del resto se colocará la cifra siguiente del dividendo, y se tendrá un nuevo dividendo parcial, con el cual se ejecutará la misma operación que con el anterior. Se continuará del mismo modo, hasta que se haya *bajado la última cifra del dividendo, y hallando la última cifra del cociente y el residuo.*

Si al hallar una cifra del cociente fuera el dividendo parcial menor que el divisor, se escribirá 0 en el cociente, y se continuará la división como en los demás casos.

NOTA 1.ª El cociente tiene tantas cifras más una, cuantas existen á la derecha del primer dividendo parcial.

NOTA 2.ª Debiendo ser el residuo menor que el divisor, si se halla un residuo igual ó mayor que el divisor, el cociente obtenido será demasiado pequeño.

26. *Casos particulares.*

1.° Cuando el cociente tiene varias cifras, no teniendo el divisor más que una, la regla general (25) enseña el modo de hallar el cociente. Mas por lo común se adopta en este caso una disposición diferente de la ordinaria, pues se omiten el divisor y los restos, y el cociente se escribe debajo del dividendo.

Ejemplo. Dividir 6804321 por 7.

Diremos: 68 entre 7 á 9 y sobran 5; 50 entre 7 á 8 y sobra 1; 14 entre 7 á 2; 3 entre 7 á 0 y sobran 3; 32 entre 7 á 4 y sobran 4; 41 entre 7 á 5 y sobran 6.

O mejor así: la 7.ª parte de 68 9 y sobran 5; la de 50 7 y sobra 1; la de 14 2; la de 3 0 y sobran 3; la de 32 4 y sobran 4; la de 41 5 y sobran 6.

Disposición.

6804321,
 972045 y 6 de residuo.

2.° *Para dividir por 10 un número que termina en uno ó varios ceros, se suprime un cero de su derecha.*

En efecto, háyase de dividir el número 420 por 10: el cociente debe ser un número que, multiplicado por el divisor 10, dé por producto el dividendo 420; y como 42, multiplicado por 10, da por producto 420, se infiere que 42 es el cociente.

Del mismo modo se demuestra que: *Para dividir por 100 un número que termina en dos ó más ceros, se suprimen dos ceros de su derecha;* que: *Para dividir por 1000 un número que termina en tres ó más ceros, se suprimen tres ceros de su derecha*, etc.

Ejemplos.

$$26000 : 100 = 260.$$
$$120000 : 10000 = 12.$$

27. Un número se llama *múltiplo de otro ó divisible por otro*, cuando contiene á éste exactamente cierto número de veces.

Por ejemplo, 30 es múltiplo de 2, de 3, de 5, de 6, de 10 y de 15.

28. Un número se llama *divisor* ó *factor* (*) de otro, cuando está contenido en éste exactamente cierto número de veces.

Por ejemplo, 2 y 5 son divisores ó factores de 20; 6 lo es de 24, etc.

ARTÍCULO 5.º

PRUEBAS DE LAS CUATRO OPERACIONES.

29. Se llama *prueba* de una operación, otra operación cuyo objeto es asegurarse de la exactitud de la primera.

Para hacer la prueba de la adición, se suman las columnas de las unidades, decenas, centenas, etc., en un orden contrario al que se haya seguido para hallar la suma; es decir, que si se ha hallado la suma principiando por arriba, se hallará nuevamente la suma principiando por abajo. Las dos sumas deberán ser las mismas, para que la operación esté bien hecha.

Para la prueba de la sustracción, se suman el sustraendo y el resto, y la suma debe ser igual al minuendo.

Para hacer la prueba de la multiplicación, se toma el multiplicando por multiplicador y el multiplicador por multiplicando, y el producto deberá ser el mismo (13).

También se puede hacer la prueba de la multiplicación, dividiendo el producto por uno de los factores: el cociente debe ser igual al otro factor.

Para hacer la prueba de la división, se multiplica el cociente por el divisor, se añade al producto el residuo, y la suma debe ser igual al dividendo.

Nota. Las pruebas en que hay que escribir cifras nuevas, como son las de la multiplicación y división, son poco cómodas; y así es que en la práctica se prefiere efectuar nuevamente la operación, para lo cual no hay necesidad de escribir ningún guarismo.

Las pruebas de la adición y sustracción, que hemos indicado, pueden seguirse, pues en ellas no hay que escribir ninguna cifra nueva.

La mejor prueba es el obtener igual resultado dos ó más personas que hagan separadamente la misma operación.

(*) También se llama *parte alícuota* ó *submúltiplo*.

LIBRO SEGUNDO.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

30. Se llama *lema* un teorema poco interesante por sí, pero que se suele anteponer en algunos casos á otro teorema, para evitar en la demostración de éste la repetición del mismo razonamiento.

Se llama *corolario* un teorema que se deduce inmediatamente de otro sin necesidad de nuevo razonamiento, ó cuando más por medio de un razonamiento muy sencillo.

31. Un producto indicado de varios factores (*), como $4 \times 5 \times 7 \times 8 \times 3$ ó $4 . 5 . 7 . 8 . 3$, significa que se efectúen las multiplicaciones en el orden en que los factores están escritos, es decir, el factor 4 por el 5, su producto por el 7, este producto por el 8, etc.: dicho producto indicado equivale, pues, á $20 \times 7 \times 8 \times 3$, á $140 \times 8 \times 3$, á 1120×3.

El producto indicado $4 . 3 \times 5 . 7$, significa que el producto $4 . 3$ está multiplicado por el producto $5 . 7$.

En adelante, con objeto de simplificar los razonamientos, haremos, á veces, uso de letras para representar números cualesquiera. Para indicar que los números representados por estas letras están multiplicados, no hay más que juntar las letras sin interposición de ningún signo. Así, abc quiere decir que el número a se multiplique por el número b, y el producto de ambos por c. El producto $ab \times cd$ ó $ab . cd$, quiere decir que el producto de los dos números a y b se ha de multiplicar por el producto de los dos números c y d.

(*) Los números, cualesquiera, que están multiplicados unos por otros, se llaman *factores* del producto.

Para indicar que un número compuesto de otros varios ligados por medio de los signos $+$, $-$ se ha de someter á una de las cuatro operaciones, se escribe dicho número dentro de un paréntesis.

Así, para indicar que el número $a + b - c$ se ha de multiplicar por el número d, ó por el número $d - e$, se escribirá $(a + b - c)\, d$, ó $(a + b - c)\,(d - e)$; y entiéndase que el signo de la multiplicación en este caso es la falta de todo signo interpuesto entre los dos números. El paréntesis no es signo de multiplicación.

Para indicar que el número $20 + 7$ se ha de multiplicar por el número 9 ó por el número $9 - 5 + 8$, se escribirá $(20 + 7) \times 9$, ó $(20 + 7) \times (9 - 5 + 8)$.

CAPÍTULO II.

PRODUCTOS DE VARIOS FACTORES (*).

32. *Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplican todos los sumandos por este número, y se suman todos los productos parciales.*

Sea el multiplicando $17 + 25 + 33$, y el multiplicador 24: decimos que

$$(17 + 25 + 33) \times 24 = 17 \times 24 + 25 \times 24 + 33 \times 24.$$

En efecto, multiplicar $17 + 25 + 33$ por 24 es hacer 24 veces mayor á esta suma; y es claro que esto se conseguirá haciendo 24 veces mayor á cada una de sus partes: luego

$$(17 + 25 + 33) \times 24 = 17 \times 24 + 25 \times 24 + 33 \times 24.$$

Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplican el minuendo y el sustraendo por este número, y se restan los dos productos parciales.

Sea el multiplicando $49 - 31$, y el multiplicador 24: decimos que

$$(49 - 31) \times 24 = 49 \times 24 - 31 \times 24.$$

En efecto, siendo $49 - 31 = 18$, como el minuendo es igual á la suma del sustraendo y resto, será

$$49 = 31 + 18:$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 24, tendremos

$$49 \times 24 = (31 + 18) \times 24;$$

y pues acabamos de demostrar que $(31 + 18) \times 24 = 31 \times 24 + 18 \times 24$, será

$$49 \times 24 = 31 \times 24 + 18 \times 24.$$

(*) Todos los números que consideraremos en este libro segundo, serán enteros mientras no advirtamos otra cosa.

Restando de ambos miembros de esta igualdad 31×24, los resultados serán iguales; esto es,

$$49 \times 24 - 31 \times 24 = 18 \times 24;$$

y poniendo en lugar de 18 su igual $49 - 31$, será, por último,

$$49 \times 24 - 31 \times 24 = (49 - 31) \times 24,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Nota. Acabamos de demostrar las igualdades

$$(17 + 25 + 33) \times 24 = 17 \times 24 + 25 \times 24 + 33 \times 24$$
$$(49 - 31) \times 24 = 49 \times 24 - 31 \times 24.$$

A veces conviene escribir en lugar de estos segundos miembros los primeros (*), lo que se llama *separar un factor común;* y vemos que, para esto, no hay más que escribir dentro de un paréntesis los multiplicandos parciales, y fuera el factor común.

Por ejemplo, si en la cantidad $3 \times 7 + 5 \times 7 + 7$ se quiere separar el factor común 7, se escribirá $(3 + 5 + 1) \times 7$.

33. *El producto de varios factores no se altera aunque se mude el orden de colocación de estos factores.* Lección 9

Para demostrar este teorema, antepondremos el lema siguiente: ***En un producto indicado de varios factores enteros pueden permutarse dos factores consecutivos cualesquiera, sin que el producto se altere.***

Consideraremos los dos casos que pueden ocurrir: 1.°, que los factores sean los dos primeros; 2.°, que sean dos factores consecutivos situados á la derecha del primero.

1.er *caso.* Sea el producto 4.7.8.3.5.2.9: hagamos ver que los dos factores primeros 4 y 7 pueden permutarse, es decir, que el producto propuesto equivale al producto 7.4.8.3.5.2.9.

En efecto, hemos demostrado en el número (13) que $4 \times 7 = 7 \times 4$: multiplicando ambos miembros de esta igualdad primeramente por el factor 8, los dos miembros de la que resulte por el factor 3, los dos miembros de ésta por el factor 5, y así hasta el último factor, tendremos

$$4.7.8.3.5.2.9 = 7.4.8.3.5.2.9.$$

2.° *caso.* Hagamos ver ahora que dos factores consecutivos situados á la derecha del primero, como por ejemplo los dos factores 3 y 5, pueden permutarse; es decir, que el producto propuesto es igual al producto 4.7.8.5.3.2.9.

(*) Toda igualdad que provenga de un teorema se emplea, ya para reemplazar el primer miembro por el segundo, ya para reemplazar el segundo miembro por el primero. Esta observación que nos ha sugerido nuestra práctica, es sumamente interesante.

En efecto, $4.7.8.3 = 4.7.8 + 4.7.8 + 4.7.8$: multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 5, tendremos (32)

$$4.7.8.3.5 = 4.7.8.5 + 4.7.8.5 + 4.7.8.5,$$

ó escribiendo abreviadamente este segundo miembro,

$$4.7.8.3.5 = 4.7.8.5.3.$$

Multiplicando ahora los dos miembros de esta igualdad primeramente por el factor 2, los dos miembros de la que resulte por el factor 9, y así si hubiere mayor número de factores, es claro que los productos que vayan resultando serán respectivamente iguales; luego

$$4.7.8.3.5.2.9 = 4.7.8.5.3.2.9.$$

Pasemos ahora á la demostración del teorema.

Acabamos de demostrar que se puede permutar cada factor con su adyacente, sin que el producto varíe: luego efectuando esta permutacion las veces suficientes, puede cada factor llegar á ocupar un lugar cualquiera; y por consiguiente, el producto no varía, aunque se mude, como se quiera, el orden de los factores.

Por ejemplo, si quisiéramos probar que el producto 4.7.8.3 es igual al producto 7.3.4.8, permutaríamos en el primero el 7 con el 4, y resultaría el producto 7.4.8.3 igual al producto 4.7.8.3; permutaríamos ahora en el producto 7.4.8.3 el 3 con el 8 y en seguida con el 4, y resultaría el producto 7.3.4.8 igual al producto 4.7.8.3.

Consecuencias de este teorema.

34. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, el producto queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el producto 4.6.8.9: multipliquemos cualquiera de sus factores, por ejemplo el 8, por un número cualquiera, el 5: el producto será 4.6.40.9, ó según el teorema que acabamos de demostrar, 40.4.6.9, ó 5.8.4.6.9. Según el mismo teorema, este producto es igual á 4.6.8.9.5, y ya se sabe (31) que este producto es el de $4.6.8.9 \times 5$.

Corolario. *Para multiplicar un producto por un número, no hay más que multiplicar cualquiera de sus factores por dicho número.*

Por ejemplo, si queremos multiplicar el producto 6.9.11 por 7, tendremos 42.9.11, ó 6.63.11, ó 6.9.77.

35. *Si uno de los factores de un producto se parte por un divisor de dicho factor, el producto quedará partido por el mismo divisor.*

Sea el producto 6.63.11: dividiendo el factor 63 por su divisor 7, decimos que el resultado 6.9.11 es el cociente de 6.63.11 dividido por 7.

En efecto, multiplicando el número 6.9.11 por 7, el producto será, según el corolario último, 6.63.11: luego 6.9.11 es el cociente de 6.63.11 dividido por 7; pues ya se sabe que el cociente de dos números es un tercer número que, multiplicado por el divisor, da por producto el dividendo.

Corolario. *Para partir un producto por un divisor de uno de sus factores, no hay más que partir dicho factor por su divisor.*

Ejemplo. Si queremos partir el producto 6.63.11 por 3, el cociente será 2.63.11, ó 6.21.11.

CAPÍTULO III.

POTENCIAS DE LOS NÚMEROS.

36. Se llama *segunda potencia* ó *cuadrado* de un número entero, quebrado ó mixto el producto que resulta multiplicando el número por sí mismo, ó tomando el número dos veces por factor.

Así, la segunda potencia ó el cuadrado de 1 es 1×1 ó 1, el cuadrado de 6 es 6×6 ó 36.

Se llama *tercera potencia* ó *cubo* de un número cualquiera el producto que resulta multiplicando el cuadrado del número por el mismo número, ó tomando éste tres veces por factor.

Así, la tercera potencia ó el cubo de 1 es $1 \times 1 \times 1$ ó 1, el cubo de 7 es $7 \times 7 \times 7$ ó 343.

Se llama *cuarta potencia* de un número cualquiera el producto que resulta multiplicando el cubo del número por el mismo número, ó tomando éste cuatro veces por factor.

Así, la cuarta potencia de 1 es $1 \times 1 \times 1 \times 1$ ó 1, la cuarta potencia de 5 es $5 \times 5 \times 5 \times 5$ ó 625.

Generalizando estas definiciones, diremos que se llama *potencia de un cierto grado* de un número cualquiera el producto que resulta tomando el número por factor tantas veces como unidades tiene dicho grado.

Nota. La primera potencia de un número es el mismo número.

Las potencias de los números se indican abreviadamente poniendo en la parte derecha y superior del número otro que sea igual al número de veces que el primero está tomado por factor. Este segundo número se llama *exponente* de la potencia.

Por ejemplo, la potencia segunda de 6 se indica 6^2, y se lee 6 *elevado al cuadrado* ó *á la segunda potencia*, y el exponente de la potencia es 2.

La potencia tercera de 7 se indica 7^3, y se lee 7 *elevado al cubo* ó *á la tercera potencia*, y el exponente es 3.

La potencia cuarta de 5 se indica 5^4, y se lee 5 *elevado á la cuarta potencia*, y el exponente es 4 (*).

Vemos, según la definición de las potencias, que es muy fácil la formación de una potencia cualquiera de un número entero.

Lección CAPÍTULO IV. 10ª

DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS.

37. *Si un número es divisor de otros, es divisor de la suma de éstos.*

El número 7 es divisor de los números 14, 28 y 35: decimos que 7 es divisor de la suma $14 + 28 + 35$.

En efecto, $14 = 2 \times 7$, $28 = 4 \times 7$, $35 = 5 \times 7$;
luego $14 + 28 + 35 = 2 \times 7 + 4 + 7 + 5 \times 7$:
separando en el segundo miembro el factor común 7 (32, *Nota*), será
$$14 + 28 + 35 = (2 + 4 + 5) \times 7;$$
es decir, que la suma $14 + 28 + 35$ contiene exactamente al 7 $2 + 4 + 5$ veces; luego 7 es divisor de esta suma.

38. Corolario. *Si un número es divisor de otro, es divisor de cualquier múltiplo de este otro.*

El número 7 es divisor de 21: decimos que también es divisor de 21×3, múltiplo de 21.

En efecto,
$$21 \times 3 = 21 + 21 + 21;$$
y como 7 es divisor de 21, será, según el teorema último, divisor de la suma $21 + 21 + 21$, ó de 21×3.

Nota. Conviene enunciar también este teorema del siguiente modo: *Si un número es divisible por otro, es divisible por cualquier divisor de este otro;* pues siendo el número 21×3, por ejemplo, divisible por 21, y 7 divisor de 21, 7 será divisor de 21×3, ó bien 21×3 será divisible por 7.

39. *Si un número es divisor de otros dos, es divisor de la diferencia de éstos.*

El número 7 es divisor de 56 y 35; decimos que 7 es divisor de la diferencia $56 - 35$.

En efecto,
$$56 = 8 \times 7, \quad 35 = 5 \times 7;$$
luego
$$56 - 35 = 8 \times 7 - 5 \times 7.$$

(*) Este modo de enunciar las potencias, que es el que generalmente se usa, induce á los principiantes á confundir el exponente con la potencia. Nos parece preferible enunciar las potencias 6^2, 7^3, 5^4, etc., diciendo respectivamente: 6 elevado á 2, 7 elevado á 3, 5 elevado á 4, etc.

separando en el segundo miembro el factor común 7 (32, *Nota*), será

$$56 - 35 = (8 - 5) \times 7;$$

es decir, que la diferencia 56 — 35 contiene exactamente al 7 8 — 5 veces; luego 7 es divisor de esta diferencia.

40. *Si un número es divisor de uno de dos sumandos y nó lo es del otro, no es divisor de la suma:* pues si dicho número fuese divisor de la suma, sería también divisor del segundo sumando, diferencia entre la suma y el primer sumando; lo que es contrario á la suposición, y por consiguiente absurdo (*).

41. *Si un número es divisor del minuendo y no del sustraendo, no es divisor del resto:* pues si el número fuese divisor del resto, como el sustraendo es la diferencia entre el minuendo y el resto, dicho número sería divisor del sustraendo; lo que es contrario á lo supuesto.

42. Se llama número *par* el número que es divisible por 2, y número *impar* el número que no es divisible por 2.

Los números pares de una cifra son 2, 4, 6 y 8, pues todos ellos son divisibles por 2.

Los números impares de una cifra son 1, 3, 5, 7, 9, pues ninguno es divisible por 2.

43. *Todo número es divisible por* 10, *cuando su primera cifra de la derecha es cero;* pues el cociente exacto de dicho número, dividido por 10, es el mismo número sin el cero de la derecha.

Todo número es divisible por 100, *cuando sus dos primeras cifras de la derecha son ceros;* pues el cociente exacto de dicho número, dividido por 100, es el mismo número sin los dos ceros de la derecha.

Todo número es divisible por 1000, 10000, *etc., cuando sus tres, cuatro, etc., primeras cifras de la derecha son ceros.*

Se demuestra del mismo modo que los dos teoremas anteriores.

44. *Todo número es divisible por* 2, *cuando su primera cifra de la derecha es* 0 *ó par.*

1.° Tomemos un número cualquiera que termine en 0, tal

(*) En los teoremas se distinguen generalmente dos partes principales: 1.ª, *hipótesi* ó *suposición*, es decir, lo que se supone cierto; 2.ª, *conclusión*, que es la consecuencia de la hipótesi ó lo que se va á demostrar.

El método que hemos seguido para demostrar el teorema (40) se llama *método de reducción al absurdo*. Consiste dicho método en admitir que la conclusión no es cierta, y en deducir una consecuencia contraria á la hipótesi, ó á una verdad conocida, ó en deducir que es posible lo imposible. Esta consecuencia, que se llama *absurdo*, prueba que es cierta la conclusión del teorema.

como 470: este número es divisible por 10, y 10 es divisible por 2: luego (38) 470 es divisible por 2.

2.° Tomemos un número cualquiera, que en las cifras de las unidades simples sea par, tal como 476: este número equivale á 470 + 6; el número 470 es divisible por 2; el número 6 es también divisible por 2; luego (37) la suma 476 es divisible por 2.

Un número no es divisible por 2, *si la primera cifra de la derecha no es* 0 *ni par.*

Tomemos un número cualquiera, tal como 477, que no termine en 0 ni cifra par: este número equivale á 470 + 7; el sumando 470 es divisible por 2, y el sumando 7 no lo es; luego (40) la suma 477 no es divisible por 2.

Un número es divisible por 5, *cuando su primera cifra de la derecha es* 0 *ó* 5.

Un número no es divisible por 5, *si su primera cifra de la derecha no es* 0 *ni* 5.

Se demuestran estos dos teoremas del mismo modo que los dos anteriores.

45. *Un número es divisible por* 4, *cuando sus dos primeras cifras de la derecha son ceros ó componen un múltiplo de* 4.

1.° Tomemos un número cualquiera, cuyas dos primeras cifras de la derecha sean ceros, tal como 4700: este número es divisible por 100, y como 100 ó su igual 4 × 25 es divisible por 4, será (38) 4700 divisible por 4.

2.° Tomemos un número cualquiera en que las dos primeras cifras de la derecha compongan un múltiplo de 4, tal como 4728: este número equivale á 4700 + 28; el número 4700 es divisible por 4, y el número 28 lo es también; luego la suma 4728 es divisible por 4 (37).

Un número no es divisible por 4, *si sus dos primeras cifras de la derecha no son ceros ni componen un múltiplo de* 4.

Sea el número 4726, que no termina en dos ceros, ni sus dos primeras cifras de la derecha componen un múltiplo de 4: este número equivale á 4700 + 26; el sumando 4700 es divisible por 4, y el sumando 26 no lo es; luego (40) la suma 4726 no es divisible por 4.

46. *Para conocer si un número que no tiene más de tres cifras es divisible por* 8, *se halla el residuo de la división de dicho número por* 8, *y si este residuo es* 0, *el número será divisible por* 8.

Ejemplos. 1.° Sea el número 712. Para hallar el residuo abreviadamente, diremos: 71 fuera los 8, 7; 72 fuera los 8, 0; luego 712 es divisible por 8.

2.° Sea el número 508. Diremos: 50 fuera los 8, 2; 28 fuera los 8, 4; luego 508 no es divisible por 8.

Un número de más de tres cifras es divisible por 8, *cuando sus tres primeras cifras de la derecha son ceros, ó componen un múltiplo de* 8.

1.° Sea el número 47000: este número es divisible por 1000, y como 1000 ó su igual 125×8 es divisible por 8, 47000 será (38) divisible por 8.

2.° Sea el número 47328, en que las tres primeras cifras de la derecha componen un múltiplo de 8; dicho número equivale á $47000 + 328$: el número 47000 es divisible por 8; el número 328 es también divisible por 8; luego la suma 47328 es divisible por 8 (37).

Un número no es divisible por 8, *si sus tres primeras cifras de la derecha no son ceros ni componen un múltiplo de* 8.

Se demuestra fácilmente, como en (44 y 45).

Un número es divisible por 25, *cuando sus dos primeras cifras de la derecha son ceros ó componen un múltiplo de* 25, *es decir, son* 25, 50 *ó* 75.

Un número no es divisible por 25, *si sus dos primeras cifras de la derecha no son ceros, ni son* 25, 50 *ó* 75.

Se demuestran estas dos reglas del mismo modo que las dos anteriores.

47. *Todo número de dos ó más cifras se compone de un múltiplo de* 9, *y de la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

Lema. *Todo número formado por una cifra significativa seguida de uno ó más ceros, se compone de un múltiplo de* 9 *y del valor absoluto de dicha cifra.*

Sea, por ejemplo, el número 50000: decimos que este número se compone de un múltiplo de 9, más 5.

En efecto, $50000 = 10000 \times 5$, y como $10000 = 9999 + 1$, será $50000 = (9999 + 1) \times 5$, ó bien $50000 = 9999 \times 5 + 5$. Ahora bien, 9999, que es el producto de 1111 por 9, es divisible por 9; luego 9999×5 es también divisible por 9 (38); luego el número 50000 se compone de un múltiplo de 9 y del valor absoluto 5 de su cifra significativa.

Pasemos á la demostración del teorema.

Sea el número propuesto 78324. Tenemos, según el lema,

$$\begin{aligned} 70000 &= m.\ \text{de}\ 9 + 7\ (*), \\ 8000 &= m.\ \text{de}\ 9 + 8, \\ 500 &= m.\ \text{de}\ 9 + 3, \\ 20 &= m.\ \text{de}\ 9 + 2, \\ \text{y además}\quad 4 &= \phantom{m.\ \text{de}\ 9 +}\ 4: \end{aligned}$$

sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que

(*) Léase *múltiplo de* 9, *más* 7.

m. de $9 + m$. de $9 + m$. de $9 + m$. de 9 es también un múltiplo de 9, será

$$78324 = m. \text{ de } 9 + 7 + 8 + 3 + 2 + 4,$$

conforme al enunciado del teorema.

Corolarios. 1.° *Un número es divisible por 9 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9, y no lo es si esta suma no es divisible por 9.*

Sea el número N, y S la suma de los valores absolutos de sus cifras: tendremos $N = m$. de $9 + S$; luego si S es divisible por 9, el número N también lo será; pero si S no es divisible por 9, el número N no lo será (40).

2.° *Un número es divisible por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 3, y no lo es si esta suma no es divisible por 3.*

Sea N el número, y S la suma de los valores absolutos de sus cifras: tendremos $N = m$. de $9 + S$. El número m. de 9 es múltiplo de 3 (38); luego si S es divisible por 3, el número N será divisible por 3; pero si S no es divisible por 3, el número N no lo será.

48. *Todo número de dos ó más cifras es igual á un múltiplo de* 11, *más la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar* (contando de derecha á izquierda), *menos la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par.*

Lema 1.° *Todo número formado por una cifra significativa seguida de un número par de ceros es igual á un múltiplo de* 11, *más el valor absoluto de dicha cifra.*

Sea, por ejemplo, el número 60000: decimos que este número es igual á un múltiplo de 11, más 6.

En efecto,

$$60000 = 10000 \times 6,$$
$$60000 = (9999 + 1) \times 6;$$

y efectuando esta multiplicación (32),

$$60000 = 9999 \times 6 + 6:$$

el número 9999 tiene tantos nueves como ceros tiene el número propuesto, y es evidente que esto sucederá, cualquiera que sea el número de ceros que tenga dicho número propuesto; luego en el caso que estamos considerando, el número de nueves será par. Mas siendo 99 divisible por 11, es claro, por la regla de la división, que todo número compuesto de un número par de nueves es divisible por 11.

Tenemos, pues, que 9999 es divisible por 11, y por consiguiente (38) 9999×6 es divisible por 11; luego el número 60000 se compone de un múltiplo de 11 y del valor absoluto de su cifra significativa.

Lema 2.° *Todo número formado de una cifra significativa seguida de un número impar de ceros, es igual á un múltiplo de 11, menos el valor absoluto de dicha cifra.*

Consideremos, por ejemplo, el número 600000: decimos que este número es múltiplo de 11, menos 6.

En efecto, $600000 = 60000 \times 10$: según el lema 1.°, 60000 es un múltiplo de 11, más 6; luego

$$600000 = (m. \text{ de } 11 + 6) \times 10;$$

ó bien

$$600000 = m. \text{ de } 11 \times 10 + 6 \times 10.$$

Siendo $6 \times 10 = 10 \times 6 = (11 - 1) \times 6 = 11 \times 6 - 6$,

será $$600000 = m. \text{ de } 11 \times 10 + 11 \times 6 - 6.$$

Ahora bien: el número $m.$ de 11×10 es múltiplo de 11; 11×6 también lo es, y la suma de estos dos múltiplos de 11 es un múltiplo de 11.

Queda, pues, demostrado que el número propuesto 600000 es un múltiplo de 11, disminuido en el valor absoluto de su cifra significativa.

Pasemos ahora á la demostración del teorema.

Sea el número 54268. Tenemos, según los dos lemas,

$$\begin{aligned} 50000 &= m. \text{ de } 11 + 5, \\ 4000 &= m. \text{ de } 11 - 4, \\ 200 &= m. \text{ de } 11 + 2, \\ 60 &= m. \text{ de } 11 - 6, \end{aligned}$$

y además $$8 = \qquad 8:$$

sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que $m.$ de $11 + m.$ de $11 + m.$ de $11 + m.$ de 11 es un múltiplo de 11, será $54268 = m. \text{ de } 11 + 5 + 2 + 8 - 4 - 6$; pero restar 4 y en seguida 6 de un número, equivale evidentemente á restar $4 + 6$ de dicho número; luego

$$54268 = m. \text{ de } 11 + 5 + 2 + 8 - (4 + 6),$$

conforme al enunciado del teorema.

Corolario. *Un número es divisible por 11, cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar y la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par es cero ó un múltiplo de 11; y no lo será en caso contrario.*

1.er *caso.* Sea N el número; I la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, contando de derecha á izquierda; P la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par: tendremos, según queda demostrado,

$$N = m. \text{ de } 11 + I - P.$$

Si $I - P$ es cero, resulta $N = m.$ de 11, ó divisible por 11. Si $I - P$ no es cero, puede ser que I sea mayor ó menor que P. En el primer caso, N puede considerarse como la suma de los números $m.$ de 11 é $I - P$; luego si $I - P$ es divisible por 11, el número N también lo será (37). En el segundo caso, N puede considerarse como la diferencia entre los números $m.$ de $11 + I$ y P; y como la diferencia entre dos números no varía restando de ambos un mismo número, si restamos I del minuendo $m.$ de $11 + I$ y del sustraendo P, el nuevo minuendo será $m.$ de $11 + I - I$ ó $m.$ de 11, y el nuevo sustraendo $P - I$; luego

$$N = m. \text{ de } 11\ (P - I);$$

por lo que si $P - I$ es divisible por 11, el número N también lo será.

2.° *caso.* Hemos demostrado que $N = m.$ de $11 + I - P$. Si $I > P$, N es la suma de los números $m.$ de 11 é $I - P$: luego si, como suponemos, $I - P$ no es divisible por 11, N no lo será (40). Si $P > I$, hemos visto que $N - m.$ de $11 - (P - I)$; es decir, que N es la diferencia entre los números $m.$ de 11 y $P - I$; luego si, como suponemos, $P - I$ no es divisible por 11, N no lo será (41).

Ejemplos. **1.°** Sea el número 4608923. La suma de las cifras de lugar impar es $3 + 9 + 0 + 4 = 16$, y la de las cifras de lugar par es $2 + 8 + 6 = 16$: la diferencia de ambas sumas es 0; luego el número es divisible por 11.

2.° Sea el número 593428. La suma de las cifras de lugar impar es 21, y la de las cifras de lugar par es 10: la diferencia de estas sumas es 11; luego el número es divisible por 11.

3.° Sea el número 9180839261. La suma de las cifras de lugar impar es 7, y la de las cifras de lugar par 40: su diferencia es 33; luego el número es divisible por 11.

49. *La regla general para conocer si un número es ó no divisible por otro, consiste en hallar el residuo de la división del primer número por el segundo; y si este residuo es 0, el primer número será divisible por el segundo, y no lo será en el caso contrario.*

Ejemplo. Se quiere saber si el número 4732469 es ó no divisible por 7. Para hallar abreviadamente el residuo de la división, diremos: 47 fuera los 7, 5; 53 fuera los 7, 4; 42 fuera los 7, 0; 4, 4; 46, 4; 49, 0; luego el residuo es cero, y, por tanto, el número propuesto es divisible por 7.

CAPÍTULO V.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.

50. Dos números se llaman *primos entre sí* ó *primo el uno con el otro*, cuando no tienen más divisor común que la unidad.

Así, los números 8 y 15 son números primos entre sí.

Se dice que varios números son *primos entre sí*, cuando no tienen más divisor común (para todos ellos) que la unidad.

Por ejemplo, los números 8, 15, 9 y 6, que no tienen más divisor común que la unidad, son números primos entre sí.

Varios números se llaman *primos entre sí, dos á dos*, cuando cada uno de dichos números es primo con cada uno de los demás.

Así, los números 4, 9, 17 y 25, de los que cada uno es primo con cada uno de los demás, son números primos entre sí dos á dos. Los números 8, 15, 9 y 6, primos entre sí, no son primos entre sí dos á dos, pues el 8, por ejemplo, no es primo con el 6.

Vemos, pues, que varios números primos entre sí, pueden no ser primos entre sí dos á dos, y es evidente, por el contrario, que varios números primos entre sí dos á dos son, con mayor razón, primos entre sí.

Dos números que se diferencian en una unidad son primos entre sí: pues si tuviesen algún divisor común diferente de 1, este divisor sería también divisor de la diferencia 1 de los números (39); lo que es imposible.

Se llama *máximo común divisor* de varios números el mayor número que sea divisor de todos ellos.

Así, el *m. c. d.* de 20 y 50 es 10, El de 15, 30 y 45 es 15.

Para hallar de un modo general el *m. c. d.* de dos números, conviene anteponer los dos teoremas siguientes:

51. *Todo factor común al dividendo y divisor de una división inexacta es factor del residuo;* y al contrario, *todo factor común al divisor y residuo es factor del dividendo.*

Sea el dividendo 128 y el divisor 52; el cociente entero es 2 y el residuo 24: decimos que todo factor de 128 y 52 es factor de 24, y que todo factor de 24 y 52 es factor de 128.

En efecto, $128 = 52 \times 2 + 24$: todo divisor de 128 y 52 es divisor de 52×2, múltiplo de 52; luego también será divisor de 24, diferencia entre 128 y 52×2. Todo divisor de 52 y 24 es divisor de 52×2; luego también es divisor de 128, suma de 52×2 y 24.

aqui **52.** *El* m. c. d. *del dividendo y divisor de una división inexacta es igual al* m. c. d. *del divisor y residuo.*

Sea el dividendo 128 y el divisor 52: el cociente entero es 2, y el residuo 24; sea D el *m. c. d.* de 128 y 52, D' (*) el *m. c. d.* de 52 y 24: decimos que $D = D'$.

En efecto, siendo D factor de 128 y 52, es factor de 24; siendo D factor de 52 y 24, no es mayor que D'. Siendo D' factor

(*) Una letra, tal como D, escrita así: D', D'', D''', etc., se enuncia D prima, D segunda, D tercera.

de 52 y 24, es factor de 128; siendo D' factor de 52 y 128, no es mayor que D. Tenemos, pues, que D no es mayor que D', ni D' es mayor que D; luego $D = D'$.

Demostrados estos dos teoremas, podemos resolver fácilmente el siguiente problema:

X **53**. *Hallar el* m. c. d. *de dos números.*

Sean los dos números 128 y 52: el *m. c. d.* de estos dos números no es mayor que 52, pues debe ser divisor de 52; luego si 52 fuese divisor de 128, 52 sería el *m. c. d.* que se pide. Dividamos, pues, 128 por 52: resulta 2 de cociente entero y 24 de residuo; luego 52 no es el *m. c. d.* que se pide. Mas sabemos que el *m. c. d.* de 128 y 52 es igual al *m. c. d.* de 52 y 24; luego la cuestión se ha simplificado, y está reducida á hallar el *m. c. d.* de 52 y 24.

Hagamos con estos números el mismo razonamiento que acabamos de hacer con los números propuestos.

El *m. c. d.* de 52 y 24 no es mayor que 24; luego si 24 fuese factor de 52, 24 sería el *m. c. d.* de 52 y 24. Dividamos, pues, 52 por 24: resulta 2 de cociente entero y 4 de residuo; luego 24 no es el *m. c. d.* de 52 y 24. Pero como el *m. c. d.* de 52 y 24 es igual al *m. c. d.* de 24 y 4, la cuestión está reducida á hallar el *m. c. d.* de 24 y 4. Partiendo para esto 24 por 4, resulta 6 de cociente exacto; luego 4 es el *m. c. d.* de 24 y 4; por consiguiente, 4 es el *m. c. d.* de 52 y 24, y el de 128 y 52.

Luego: *Para hallar el* m. c. d. *de dos números, se divide el mayor por el menor; y si la división es exacta, el menor será el* m. c. d. *de ambos. Pero si queda residuo, se dividirá el divisor por el residuo, y se continuará dividiendo siempre el divisor por el residuo, hasta que se llegue á una división exacta: el último divisor es el* m. c. d. *de los dos números.*

Disposición de esta operación.

128	52	24	4
	2	2	6
24	4	0	

Como cada residuo es menor que el divisor correspondiente, y este divisor es el residuo anterior, se infiere que los residuos van constantemente disminuyendo, por lo que necesariamente se ha de llegar á un residuo cero (*).

(*) De que una cantidad vaya constantemente disminuyendo, no puede sacarse en consecuencia que ha de llegar á reducirse á 0; pues con

Ejemplos.

1.° Hallar el *m. c. d.* de los números 3836 y 1652.

3836	1652	532	56	28
	2	3	9	2
532	56	28	0	

Resulta que 28 es el *m. c. d.* de 3836 y 1652.

2.° Hallar el *m. c. d.* de 965 y 187.

965	187	30	7	2	1
	5	6	4	3	2
30	7	2	1	0	

Los dos números 965 y 187 no tienen más factor común que la unidad; es decir, que estos números son primos entre sí.

Nota. Si al hallar el *m. c. d.* de dos números se llega á un residuo que sea primo con el divisor, los dos números propuestos serán primos entre sí.

Así, en el último ejemplo, habiendo llegado al residuo 7, que es primo con el divisor 30, se podía asegurar, sin pasar adelante, que los dos números propuestos eran primos entre sí.

En efecto, siendo los números 30 y 7 primos entre sí, ó lo que es igual, siendo 1 su *m. c. d.*, como el *m. c. d.* de los números propuestos es igual al de 30 y 7, se infiere que el *m. c. d.* de los números propuestos es 1; es decir, que dichos números son primos entre sí.

54. *Máximo común divisor de tres ó más números.*

Para hallar el *m. c. d.* de tres ó más números, conviene anteponer el teorema siguiente:

Todo factor de dos números es factor del m. c. d. *de dichos números.*

Sean los dos números A y B; D un factor de los dos: decimos que D es factor del *m. c. d.* de A y B.

En efecto, hallemos, como á continuación se indica, el *m. c. d.*

frecuencia se encuentran en las cuestiones matemáticas cantidades que disminuyen constantemente y tienen límites menores que ellas, pero mayores que 0, y á los cuales no pueden llegar. *(Véase la nota del número 16 del Complemento.)* Pero en el caso actual, los residuos disminuyen sucesivamente por lo menos en una unidad, y es claro que un número entero que va disminuyendo sucesivamente por lo menos en 1, ha de llegar á ser 0 ó negativo: esto último no puede suceder ahora, porque, para ello, sería necesario que los cocientes fuesen mayores que los verdaderos; luego en la cuestión actual llegaremos necesariamente á un residuo 0.

de A y B; y para fijar las ideas, admitamos que á la cuarta división resulte el residuo 0.

$$\begin{array}{r|c|c|c|c} A & B & R & R' & R'' \\ \cline{2-5} & C & C' & C'' & C''' \\ R & R' & R'' & 0 & \end{array}$$

Siendo D divisor de A y B, es divisor de R (51); siendo D divisor de B y R, es divisor de R', y siendo divisor de R y R', es divisor de R'', que es el *m. c. d.* de A y B.

X **55**. *Hallar el máximo común divisor de varios números.*

Sean A, B, C y D cuatro números por ejemplo, cuyo *m. c. d.* queremos hallar: supongámosle hallado, y llamemos M á este *m. c. d.* Siendo M factor de A y B, será factor del *m. c. d.* de A y B, al cual llamaremos M'. Tenemos, pues, que M es factor de M', C y D. Siendo M factor de M' y C, será factor del *m. c. d.* de M' y C, al cual llamaremos M''. Tenemos que M es factor de M'' y D: luego M será factor del *m. c. d.* de M'' y D, al cual llamaremos M'''; luego M no es mayor que M'''.

Ahora, M''' es factor de M'' y D; luego será factor de M' y C, múltiplos de M''. Tenemos, pues, que M''' es factor de M', C y D. Siendo M''' factor de M', será factor de A y B, múltiplos de M': luego M''' es factor de A, B, C y D; luego M''' no es mayor que M, *m. c. d.* de A, B, C y D.

Hemos demostrado que M no es mayor que M''' y que M''' no es mayor que M; luego $M''' = M$.

Observando cómo se ha hallado M''', tendremos la regla siguiente:

Para hallar el m. c. d. *de varios números, se halla el* m. c. d. *de los dos primeros; después se halla el* m. c. d. *del* m. c. d. *hallado y del tercer número; después se halla el* m. c. d. *del último* m. c. d. *hallado y del cuarto número, y así sucesivamente: el último* m. c. d. *será el de los números propuestos.*

Para efectuar esta operación lo más brevemente posible, se toman por primeros números los más pequeños. X

56. *Si varios números se dividen por su* m. c. d., *los cocientes son números primos entre sí.*

Sean A, B y C tres números por ejemplo; D su *m. c. d.*; a, b y c los cocientes de las divisiones de A, B y C por D: decimos que a, b y c son números primos entre sí.

Admitamos que a, b y c no sean primos entre sí, ó lo que es igual, que tengan un factor común mayor que 1, al cual llamaremos d. Sean a', b' y c' los cocientes de a, b y c divididos por d: será $a = a'd$, $b = b'd$, $c = c'd$; pero $A = aD$, $B = bD$, $C = cD$: luego

$A = a'dD$, $B = b'dD$, $C = c'dD$: luego Dd sería divisor de A, B y C; luego D no sería el *m. c. d.* de A, B y C, contra lo propuesto.

57. *Si se multiplican el dividendo y el divisor de una división inexacta por un número entero, el cociente entero no varía; pero el residuo queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el dividendo 30 y el divisor 4, el cociente entero es 7 y el residuo 2; multipliquemos 30 y 4 por un número entero cualquiera 5, y decimos que, si partimos 30×5 por 4×5, el cociente entero será el mismo de la primera división, es decir, 7, y el residuo será 2×5.

En efecto, $30 = 7 \times 4 + 2$: multiplicando ambos miembros de esta igualdad por 5, tendremos, según los números (32) y (34),

$$30.5 = 7 \times 4.5 + 2.5.$$

El número 30×5 contiene, según esta igualdad, 7 veces á 4×5, y no le puede contener 8 veces; pues lo que además le sobra (á 30×5) es 2×5, que es menor que 4×5. Luego el cociente entero de 30×5 dividido por 4×5 es 7, y el residuo 2×5, conforme á lo que se quería demostrar.

58. *Si dos números se multiplican por un número entero, su* m. c. d. *queda multiplicado por dicho número entero.*

Sean los dos números A y B: hallemos su *m. c. d.*, y supongamos, para fijar las ideas, que á la cuarta división resulte el residuo cero, como aquí se ve:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c}
A & B & R & R' & R'' \\ \cline{2-5}
 & C & C' & C'' & C''' \\
R & R' & R'' & 0 &
\end{array}$$

Multipliquemos A y B por un entero cualquiera 5: decimos que el *m. c. d.* de $5A$ y $5B$ es $5R''$.

En efecto, hallemos el *m. c. d.* de $5A$ y $5B$. El cociente de $5A$ dividido por $5B$ será C, y el residuo $5R$ (57); el cociente de $5B$ dividido por $5R$ será C'', y el residuo $5R'$; el cociente de $5R$ dividido por $5R'$ será C', y el residuo $5R''$; el cociente de $5R'$ dividido por $5R''$ será C''', y el residuo $5 \times 0 = 0$: luego (53) $5R''$ es el *m. c. d.* de $5A$ y $5B$.

Corolario. *Si dos números se dividen por un factor común á ambos, su máximo común divisor queda dividido por dicho factor.*

Sean los dos números $5A$ y $5B$, que tienen el factor común 5, y sea D el *m. c. d.* de A y B, esto es, el de los cocientes que resultan dividiendo $5A$ y $5B$ por el factor común 5: según el teorema que acabamos de demostrar, el *m. c. d.* de $5A$ y $5B$ será $5D$; y pues el de A y B es D, se ve que si los dos números $5A$ y $5B$ se dividen por su factor común 5, su máximo común divisor $5D$ queda también dividido por el mismo factor.

59. En virtud de este corolario, se podrá simplificar la investigación del *m. c. d.* de dos números, siempre que tengan patente algún factor común; pues no habrá más que suprimir este factor en ambos, hallar el *m. c. d.* de los dos cocientes, y multiplicar después este *m. c. d.* por el mismo factor común.

Ejemplos. 1.° Hallar el *m. c. d.* de los números 128 y 52.

Vemos que ambos son divisibles por 4: dividiendo los dos por este factor común, los cocientes son 32 y 13; hallando ahora el *m. c. d.* de estos dos cocientes, resulta 1, que, multiplicado por 4, nos da 4 para *m. c. d.* de los dos números propuestos.

2.° Hallar el *m. c. d.* de los números 2890 y 2040.

Vemos que ambos son divisibles por 10: dividiéndolos por 10, los cocientes 289 y 204 tienen por *m. c. d.* 17; luego el de los dos números propuestos es $17 \times 10 = 170$.

NOTA. El teorema (58) prepara la demostración del siguiente, muy importante:

60. *Todo divisor del producto de dos números, que sea primo con uno de estos dos números, es divisor del otro número.*

Un número puede ser divisor de un producto de dos números, sin ser divisor de ninguno de los dos números. Por ejemplo, el 8 es divisor de 6×20, sin serlo de 6 ni de 20. Pero si un divisor del producto es primo con uno de los dos números, necesariamente es divisor del otro número. Así 8, que es divisor del producto 3×24 y es primo con el 3, es divisor del 24.

Demostración de este teorema.

Sea AB el producto y C un divisor de este producto primo con el número A: decimos que C es divisor de B.

En efecto, siendo A y C primos entre sí, su *m. c. d.* es 1: multiplicando por B los números A y C, el *m. c. d.* de los productos AB y BC será $1 \times B$ ó B (58). Esto lo indicamos así:

$$\left.\begin{matrix} A \\ \\ C \end{matrix}\right\} 1 \qquad \left.\begin{matrix} AB \\ \\ CB \end{matrix}\right\} 1 \times B \text{ ó } B.$$

Ahora bien, C es divisor de AB por suposición; lo es evidentemente de CB: luego C es divisor de B, *m. c. d.* de AB y CB (54).

aqui X **61.** Se llama ***menor múltiplo*** ó ***múltiplo más simple*** de varios números, el menor número que sea divisible por ellos.

Así, el múltiplo más simple de 20 y 50 es 100; el de 4, 12 y 15 es 60.

Todo múltiplo de dos números es un producto de tres factores, á saber: uno cualquiera de los dos números, el cociente del otro dividido por el m. c. d. *de ambos y un número entero.*

Sean: M un múltiplo de dos números A y B; D el *m. c. d.* de estos dos números; a y b los cocientes de A y B divididos por D: tendremos $A = aD$, $B = bD$. Siendo M múltiplo de $A = aD$ y de $B = bD$, se compondrá de aD y otro factor m, y de bD y otro factor n, es decir, que será $M = aDm = bDn$; luego $am = bn$, igualdad que nos dice que b es divisor de am; y como a y b son primos entre sí (46), b será divisor de m, ó m múltiplo de b; luego $m = bp$, siendo p un número entero. Por consiguiente $M = aDbp = Abp = Bap$, conforme al teorema.

Nota. Acabamos de ver que todo múltiplo M de los dos números A y D es Abp, siendo $p = 1, 2, 3, \ldots$, es decir, que todos los múltiplos de A y B son Ab, $2Ab$, $3Ab\ldots$ El menor de todos ellos es Ab.

Luego: *Para hallar el menor múltiplo de dos números, se halla su* m. c. d., *se divide uno de ellos por este* m. c. d., *y se multiplica el cociente por el otro número.*

Ejemplo. Hallar el menor múltiplo de los dos números 18 y 24.

El máximo común divisor de estos dos números es 6; dividiendo 18 por 6, y multiplicando el cociente por 24, se tendrá el múltiplo 72 de los números 18 y 24.

Si los dos números son primos entre sí, su máximo común divisor es 1, y por tanto, el menor múltiplo de los dos números es su producto.

62. *Menor múltiplo de tres números.*

Hemos demostrado que todo múltiplo común de dos números A y B está comprendido en Abp, y que el menor múltiplo de los dos es Ab; y es evidente que Abp es múltiplo de Ab.

Luego: *Todo múltiplo de dos números es múltiplo del menor múltiplo de estos dos números.*

En virtud de este teorema, podremos hallar el menor múltiplo de tres ó más números.

Sean A, B, C, D cuatro números por ejemplo, cuyo menor múltiplo queremos hallar: llamemos M á este menor múltiplo. Siendo M múltiplo de A y B, M es múltiplo del menor múltiplo de A y B, al cual llamaremos m. Siendo M múltiplo de m y C, es múltiplo del menor múltiplo de m y C, al cual llamaremos m'. Siendo M múltiplo de m' y D, es múltiplo del menor múltiplo de estos dos números, al cual llamaremos m'': luego M no es menor que m''.

Ahora, m'' es múltiplo de m' y D; y como m' es múltiplo de m y C, será m'' múltiplo de m, C y D. Siendo m'' múltiplo de m, y m

múltiplo de A y B, será m'' múltiplo de A y B: luego m'' es múltiplo de A, B, C y D; luego m'' no es menor que M.

Hemos demostrado que M no es menor que m'', y que m'' no es menor que M; luego $M = m''$: m'' es, pues, el menor múltiplo de los cuatro números A, B, C y D.

Observando cómo se ha hallado m'', tendremos la regla siguiente: *Para hallar el menor múltiplo de tres ó más números, se halla el menor múltiplo de los dos primeros, después se halla el menor múltiplo de este menor múltiplo y del tercer número, después el menor múltiplo de este menor múltiplo y del cuarto número, y así sucesivamente, hasta llegar al último número.*

En la práctica se toman por primeros números los menores.

Ejemplo. Hallar el menor múltiplo de los números 1830, 445 y 4514.

El máximo común divisor de 1830 y 445 es 5: dividiendo 445 por 5, resulta 89, que multiplicado por 1830 da 162870 para menor múltiplo de los dos primeros números. El máximo común divisor de 162870 y 4514 es 122: dividiendo 4514 por 122, resulta 37, que multiplicado por 162870 da 6026190, que es el menor múltiplo de los tres números propuestos.

CAPÍTULO VI.

NÚMEROS PRIMOS.

aquí **63.** Se llama número *primo* ó *simple* el número que no es divisible sino por sí mismo y por la unidad.

Los números primos menores que 100 son: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Se llama *número compuesto* el número que tiene algún factor primo mayor que la unidad.

Hay infinitos números primos.

Sea p un número primo cualquiera; admitamos que no exista ningún otro número primo mayor, ó lo que es igual, que todos los números mayores que p sean compuestos. La suma $2 \times 3 \times 5 \ldots \times p + 1$ del producto de todos los números primos sumado con la unidad, sería, según esto, un número compuesto, y por tanto divisible por alguno de los números primos 2, 3, 5,..., p; lo que es imposible, puesto que el sumando $2 \times 3 \times 5 \ldots \times p$ es divisible por dicho número primo, y el sumando 1 no lo es.

Queda, pues, demostrado que existe un número primo mayor que p, y que por tanto hay infinitos números primos.

64. Dado un número se conocerá si es primo por la siguiente regla:

Si se divide un número sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, etc., y se llega, sin obtener cociente exacto, á un cociente entero menor que el divisor, el número será primo.

Sea, por ejemplo, el número 313, que dividido por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 no da cociente exacto, y el último cociente entero es 16; decimos que el número 313 es primo.

En efecto: el número 313 no puede ser divisible por ningún número compuesto menor que 19, porque si lo fuera, sería también divisible por los factores primos de dicho compuesto (38), lo que es contrario á la hipótesi.

Hagamos ver ahora que dicho número 313 no puede ser divisible por ningún número mayor que 19, excepto por sí mismo.

Admitamos que 313 sea divisible por un número mayor que 19. Efectuando la división, el cociente, que sería exacto, no sería mayor que 16; pero en toda división exacta, es evidente que el dividendo es divisible por el cociente: luego el dividendo 313 sería divisible por un número menor que 19, lo que, según ya hemos probado, es imposible. Queda, pues, demostrado que el número 313 no es divisible por ningún número, excepto por sí mismo y por la unidad: luego dicho número 313 es primo.

CONSTRUCCIÓN DE UNA TABLA DE NÚMEROS PRIMOS.

65. Una tabla de números primos es una reunión de todos los números primos inferiores al límite que se señale.

Pudiera formarse esta tabla por medio de la regla (64); pero el método siguiente, debido al antiguo geómetra Eratóstenes, es mucho más breve.

Escribamos todos los números impares desde el 1 hasta el límite que se quiera, pues los pares, excepto el 2, no pueden ser primos: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,..., 995, 997, 999, 1001, 1003.

Es evidente que 1, 3, 5 y 7, son primos.

Observemos que son múltiplos de 3 el 9 y todos los siguientes que ocupan el tercer lugar, contándolos de tres en tres desde el 9 exclusive; pues estos números son $9 + 6 = 15$, $15 + 6 = 21$, $21 + 6 = 27$, etc.; es decir, que todos ellos se componen de dos múltiplos de 3, y por tanto son múltiplos de 3: los demás números que siguen al 9 se componen de un múltiplo de 3, más 2 ó más 4, y por tanto no son múltiplos de 3. Señalemos, pues, con un punto todos los múltiplos de 3: todos los números que queden sin señal menores que 25, no son divisibles por 2 ni por 3, y es claro que, si se divide por 5, los cocientes enteros serán menores que 5; luego, según el teorema (64), dichos números menores que 25 son primos.

Son múltiplos de 5 el 25 y los siguientes que ocupan el quinto lugar, contándolos de cinco en cinco desde el 25 exclusive; pues dichos números quintos son $25 + 10 = 35$, $35 + 10 = 45$, $45 + 10 = 55$, etc., es decir, que todos se componen de dos múltiplos de 5, y son por tanto múltiplos de 5; los demás números que siguen al 25 se componen de un múltiplo de 5, más 2, 4, 6 ú 8, y por tanto no son múltiplos de 5. Señalemos, pues, con un punto todos los múltiplos de 5; y todos los números que no tengan señal, menores que 7^2 ó 49, serán primos, porque ninguno de ellos es divisible por 2, 3 ni 5, y divididos por 7 dan un cociente entero menor que 7.

Los múltiplos de 7 son 49 y todos los siguientes que ocupan el séptimo lugar, contándolos de siete en siete desde el 49 exclusive. Pongamos un punto en cada uno; y todos los números que no tengan señal, inferiores á 11^2 ó 121, serán primos: todo lo cual se demuestra como en los casos anteriores.

Los múltiplos de 11 son el 121 y todos los siguientes que ocupan el undécimo lugar, contándolos de once en once. Señalemos estos múltiplos de 11; y todos los que queden sin señal, menores que 13^2 ó 169, serán primos: lo que también se demuestra como en los casos anteriores.

Continuaremos esta operación hasta que hayamos señalado los múltiplos de un número primo, tal que el cuadrado del primo siguiente sea mayor que el límite fijado. Por ejemplo, para construir una tabla de números primos menores que 1000, continuaremos la operación hasta señalar los múltiplos de 31, pues el cuadrado del siguiente número primo 37 es mayor que 1000. Todos los números que queden sin señalar serán primos, porque no son divisibles por ninguno de los primos 2, 3, 5,..., 31, y divididos por 37, dan cocientes enteros menores que 37. Estos números no señalados, y además el 2, componen la tabla pedida.

66. Las tablas más completas de números primos, que hasta ahora se han construído, son las de Chernac, que contiene todos los números primos y los menores factores primos de los compuestos hasta 1.000000, y la de Durkard, que contiene todos los números primos y los factores simples de los compuestos hasta 3.036000.

He aquí una tabla de números primos desde 1 hasta 3803:

1	241	577	937	1301	1697	2111	2539	2939	3389
2	251	587	941	1303	1699	2113	2543	2953	3391
3	257	593	947	1307	1709	2129	2549	2957	3407
5	263	599	953	1319	1721	2131	2551	2963	3413
7	269	601	967	1321	1723	2137	2557	2969	3433
11	271	607	971	1327	1733	2141	2579	2971	3449
13	277	613	977	1361	1741	2143	2591	2999	3457
17	281	617	983	1367	1747	2153	2593	3001	3461
19	283	619	991	1373	1753	2161	2609	3011	3463
23	293	631	997	1381	1759	2179	2617	3019	3467
29	307	641	1009	1399	1777	2203	2621	3023	3469
31	311	643	1013	1409	1783	2207	2633	3037	3491
37	313	647	1019	1423	1787	2213	2647	3041	3499
41	317	653	1021	1427	1789	2221	2657	3049	3511
43	331	659	1031	1429	1801	2237	2659	3061	3517
47	337	661	1033	1433	1811	2239	2663	3067	3527
53	347	673	1039	1439	1823	2243	2671	3079	3529
59	349	677	1049	1447	1831	2251	2677	3083	3533
61	353	683	1051	1451	1847	2267	2683	3089	3539
67	359	691	1061	1453	1861	2269	2687	3109	3541
71	367	701	1063	1459	1867	2273	2689	3119	3547
73	373	709	1069	1471	1871	2281	2693	3121	3557
79	379	719	1087	1481	1873	2287	2699	3137	3559
83	383	727	1091	1483	1877	2293	2707	3163	3571
89	389	733	1093	1487	1879	2297	2711	3167	3581
97	397	739	1097	1489	1889	2309	2713	3169	3583
101	401	743	1103	1493	1901	2311	2719	3181	3593
103	409	751	1109	1499	1907	2333	2729	3187	3607
107	419	757	1117	1511	1913	2339	2731	3191	3613
109	421	761	1123	1523	1931	2341	2741	3203	3617
113	431	769	1129	1531	1933	2347	2749	3209	3623
127	433	773	1151	1543	1949	2351	2753	3217	3631
131	439	787	1153	1549	1951	2357	2767	3221	3637
137	443	797	1163	1553	1973	2371	2777	3229	3643
139	449	809	1171	1559	1979	2377	2789	3251	3659
149	457	811	1181	1567	1987	2381	2791	3253	3671
151	461	821	1187	1571	1993	2383	2797	3257	3673
157	463	823	1193	1579	1997	2389	2801	3259	3677
163	467	827	1201	1583	1999	2393	2803	3271	3691
167	479	829	1213	1597	2003	2399	2819	3299	3697
173	487	839	1217	1601	2011	2411	2833	3301	3701
179	491	853	1223	1607	2017	2417	2837	3307	3709
181	499	857	1229	1609	2027	2423	2843	3313	3719
191	503	859	1231	1613	2029	2437	2851	3319	3727
193	509	863	1237	1619	2039	2441	2857	3323	3733
197	521	877	1249	1621	2053	2447	2861	3329	3739
199	523	881	1259	1627	2063	2459	2879	3331	3761
211	541	883	1277	1637	2069	2467	2887	3343	3767
223	547	887	1279	1657	2081	2473	2897	3347	3769
227	557	907	1283	1663	2083	2477	2903	3359	3779
229	563	911	1289	1667	2087	2503	2909	3361	3793
233	569	919	1291	1669	2089	2521	2917	3371	3797
239	571	929	1297	1693	2099	2531	2927	3373	3803

X **67.** *Todo número mayor que 1, que no es divisible por 2 ni por 3, es un múltiplo de 6, aumentado ó disminuido en 1.*

En efecto, dividiendo dicho número por 6, el residuo no podrá ser 0, 2, 3 ni 4; pues si fuera 0, el número sería divisible por 6, y por consiguiente por 2, contra el supuesto. Si el residuo fuese 2, 3 ó 4, el 2 ó el 3 sería factor del residuo y divisor, y por consiguiente también sería factor del dividendo, es decir, que éste sería divisible por 2 ó por 3, contra la hipotési: luego el residuo será 1 ó 5. Si es 1, el número será evidentemente un múltiplo de 6, aumentado en 1; y si el residuo es 5, llamando c al cociente entero, el número será $6c + 5 = 6c + 6 - 1 = 6(c + 1) - 1$, esto es, un múltiplo de 6, disminuido en 1 (*).

X **68.** *Si un número primo no es divisor de otro número, los dos son primos entre sí;* pues el número primo no tiene más divisores que la unidad y el mismo número, y como el otro número no tiene por divisor, según la hipótesi, al número primo de que hablamos, se infiere que ambos números no tienen más divisor común que la unidad, es decir, que son primos entre sí.

X Corolario. *Dos números primos son primos entre sí.*

X **69.** *Todo número primo, divisor de un producto, es por lo menos divisor de uno de los factores de este producto.*

Sea p el número primo divisor del producto $abcd$: decimos que si p no es divisor de los factores a, c y d por ejemplo, será necesariamente divisor del factor b.

En efecto, no siendo el número primo p divisor de ninguno de los tres factores a, c, d, será (68) primo con cada uno de ellos: el producto $abcd$ es igual á $a \times cdb$; y como por hipótesi p es divisor de este producto, y es primo con el factor a, será (60) divisor del producto cdb. Este producto equivale á $c \times db$; y puesto que p es divisor de él, y es primo con c, será divisor del producto db; y como p es primo con d, será divisor de b.

Consecuencias de este teorema.

/ 1.ª *Si dos números son primos entre sí, dos potencias cualesquiera de dichos números son también números primos entre sí.*

Sean 7 y 4 los dos números primos entre sí: decimos que dos potencias cualesquiera de estos números, 7^3 y 4^5 por ejemplo, son también números primos entre sí.

Admitamos que 7^3 y 4^5 no sean primos entre sí, y que tengan, por el contrario, un factor común D diferente de 1.

(*) El recíproco (166) de este teorema, es cierto y fácil de demostrar directamente. Los autores de Aritmética demuestran esta propiedad solamente para los números primos: nosotros hemos dado mayor extensión á la misma propiedad; y por eso nuestro recíproco es cierto, y no lo es el de ellos.

Si D fuese número primo, como suponemos que es divisor de 7^3 ó $7 \times 7 \times 7$, sería, en virtud del teorema anterior, divisor de uno de los factores 7 del producto $7 \times 7 \times 7$; por la misma razón sería D divisor de 4: luego 7 y 4 tendrían un divisor común diferente de la unidad; lo que es contrario á la suposición, y por consiguiente absurdo.

Si D fuese un número compuesto, sería divisible por un número primo p; y siendo 7^3 y 4^5 divisibles por D, lo serían por el número primo p divisor de D (38); lo que, según acabamos de demostrar, es imposible.

Luego 7^3 y 4^5 son números primos entre sí.

2.ª *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto.*

Supongamos que el producto sea 3.8.12.59, y 35 el número primo con cada uno de estos factores: decimos que 35 es primo con el producto.

En efecto, si 35 y el producto tuviesen un divisor común D mayor que 1, este divisor común sería primo ó compuesto; si fuese primo, sería, en virtud del teorema (69), divisor de alguno de los factores 3, 8, 12 ó 39 del producto: luego D sería divisor común á 35 y á uno de estos factores; lo que es contrario á la hipótesi. Si el divisor común D fuese un número compuesto, como éste es divisible por un número primo, el producto 3.8.12.39 y el número 35 tendrían un divisor primo común, lo que, según acabamos de demostrar, es imposible.

3.ª *El producto de varios números primos no es divisible por ningún otro número primo.*

Sea el producto de números primos 3.7.17.61: decimos que este producto no es divisible por ningún número primo, tal como 11, diferente de los del producto; pues siendo 11 primo con cada uno de los factores del producto, es, según acabamos de demostrar, primo con el producto.

70. *Si un número es divisible por dos números primos entre sí, es divisible por su producto; y si es divisible por tres ó más números primos entre sí dos á dos, es también divisible por su producto.*

1.° Sea a el número divisible por los números 8 y 15, primos entre sí: decimos que a es divisible por el producto 8×15 de estos dos números.

En efecto, sea q el cociente de la división de a por 8: será $a = 8 \times q$. Siendo a divisible por 15, también lo es $8 \times q$; y como 15 es primo con 8, será (60) 15 divisor de q: luego si llamamos q' al cociente de la división de q por 15, será $q = 15 \times q'$, y por consiguiente $a = 8 \times 15 \times q'$; lo que demuestra que a es divisible por el producto 8×15.

2.° Sea ahora el número a divisible por los números 7, 8, 15 y 121, primos entre sí dos á dos: decimos que a es divisible por su producto.

Siendo los números 7 y 8 primos entre sí, el número a es, según el primer caso, divisible por su producto 7×8. Siendo el número 15 primo con 7 y con 8, es primo con 7×8 (68, *Consec.* 2.ª): luego, según el primer caso, el número a es divisible por $7 \times 8 \times 15$. Siendo el número 121 primo con 7, 8 y 15, es primo con su producto: luego, según el primer caso, a es divisible por $7 \times 8 \times 15 \times 121$.

Del mismo modo se continuaría la demostración, si fuesen más de cuatro los números primos entre sí dos á dos, por cada uno de los cuales fuera divisible el número a.

Corolario. Un número será divisible por 6, si lo es por 2 y por 3; será divisible por 15, si lo es por 3 y por 5; será divisible por 60, si lo es por 3, por 4 y por 5.

71. *Descomponer un número en sus factores simples,* es decir, *transformar un número en un producto de factores simples.*

Sea el número 420: este número es divisible por 2, y el cociente es 210; luego $420 = 210 \times 2$. El número 210 es divisible por 2, y el cociente es 105; luego $210 = 105 \times 2$: por consiguiente, $420 = 105 \times 2 \times 2$. El número 105 es divisible por 3, y el cociente es 35; luego $105 = 35 \times 3$, y por consiguiente $420 = 35 \times 3 \times 2 \times 2$. El número 35 es divisible por 5 y el cociente es 7; luego $35 = 7 \times 5$, y por consiguiente $420 = 7 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2$. Como 7 es primo, no puede descomponerse. Queda, pues, descompuesto el número 420 en sus factores simples, y vemos que es igual al producto de sus factores.

Luego: *Para descomponer un número en sus factores simples, se divide dicho número y los cocientes sucesivos por su menor divisor simple, diferente de la unidad, hasta llegar al cociente 1. Los diferentes divisores hallados son los factores simples del número, el cual es igual al producto de todos ellos.*

Disposición de esta operación.

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Luego $420 = 2.2.3.5.7$, ó $420 = 2^2.3.5.7$.

Ejemplo.

Descomponer el número 33975 en factores simples.

33975	3
11325	3
3775	5
755	5
151	151

En este ejemplo, al llegar al cociente 151, no se halla ningún número primo 2, 3, 5, 7, 11, 13 que sea divisor del 151, y al dividir 151 por 13, el cociente entero es 11; luego (64) el número 151 es primo. Por consiguiente, $33975 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 151$. Este producto puede escribirse de este otro modo: $3^2 \times 5^2 \times 151$, pues vemos desde luego que dicho producto es $3^2 \times 5 \times 5 \times 151 = 5 \times 5 \times 3^2 \times 151 = 3^2 \times 5^2 \times 151$.

Nota. Acabamos de decir que para descomponer un número en sus factores primos, se dividen dicho número y los cocientes sucesivos por su menor divisor simple, diferente de 1. Pero también puede descomponerse un número en sus factores simples, dividiendo dicho número y los cocientes sucesivos por cualquiera de sus divisores simples.

Descompongamos el número 420, siguiendo un orden diferente del que indica la regla.

420	5
84	3
28	7
4	2
2	2

Por consiguiente, $420 = 5 \times 3 \times 7 \times 2 \times 2 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

En la práctica suele descomponerse el número en factores simples descomponiéndolo en el producto de dos factores, cada uno de éstos en el producto de otros dos, y así sucesivamente hasta que todos los factores que resulten sean primos.

Ejemplo. Descomponer el número 1400 en sus factores simples.

Tenemos $1400 = 14 \times 100 = 2 \times 7 \times 4 \times 25 = 2 \times 7 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 5^2 \times 7$.

Como quiera que la descomposición se efectúe, siempre se hallarán los mismos factores simples con los mismos exponentes, lo cual se funda en el teorema que sigue:

72. ***Un número no puede admitir dos composiciones diferentes en factores primos;*** es decir, que, ***descompuesto un número en factores***

primos, una nueva descomposición no puede dar ningún factor primo, diferente de los primeros, ni ningún factor primo con diferente exponente que en la primera descomposición.

Supongamos que el número descompuesto en factores simples sea $2^2 \times 3^3 \times 11$, y admitamos, para demostrar la primera parte del teorema, que una nueva descomposición del mismo número nos dé $2^3 \times 3 \times 7 \times 11$; tendríamos

$$2^2 \times 3^3 \times 11 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$$

Siendo el segundo miembro de esta igualdad divisible por 7, el primero debería serlo, y por consiguiente (69) 7 sería divisor de alguno de los números primos 2, 3, 11; lo que es absurdo.

Demostremos la segunda parte del teorema.

Admitamos que la primera descomposición de un número nos haya dado $2^5 \times 3^3 \times 11^3$ y la segunda $2^2 \times 3^3 \times 11^4$: tendríamos $2^5 \times 3^3 \times 11^3 = 2^2 \times 3^3 \times 11^4$. Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por la menor potencia de cualquiera de sus factores primos, por ejemplo por 2^2, para lo cual basta dividir por 2^2 uno de los factores de cada producto (35, *Corolario*), sería

$$(2^5 : 2^2) \times 3^3 \times 11^3 = 3^3 \times 11^4.$$

Pero el cociente de $2^5 : 2^2$ ó de $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 : (2 \times 2)$ es evidentemente $2 \times 2 \times 2 = 2^3$: luego tendríamos $2^3 \times 3^3 \times 11^3 = 3^3 \times 11^4$; y como el primer miembro es divisible por 2, el segundo también lo sería, y por tanto (69) 2 sería divisor de 3 ó de 11; lo que es imposible.

73. *Un número es divisor de otro, si todos los factores simples del primero entran en el segundo, y si además los exponentes que tienen los factores simples en el primero no son mayores que los que tienen en el segundo.*

Así, el número $2^2 \times 11^2 \times 7$ es divisor de $2^3 \times 3^4 \times 11^2 \times 7$.

Para demostrarlo, observemos que el segundo número es divisible por 2, por 11 y por 7; y como por ser primos los números 2, 11 y 7, y por consiguiente primos entre sí dos á dos, sus potencias son también números primos entre sí dos á dos, se infiere (70) que dicho segundo número es divisible por el producto $2^2 \times 11^2 \times 7$.

74. *Un número no es divisor de otro, si contiene algún factor simple que no entra en este otro; ó si alguno de los factores simples tiene en el primero mayor exponente que en el segundo.*

Así, el número $2^2 \times 11^2 \times 7$ no es divisor de $2^3 \times 3^4 \times 11^2$, ni tampoco de $2^3 \times 11 \times 7^2$. En efecto: 1.°, si $2^2 \times 11^2 \times 7$ fuese divisor de $2^3 \times 3^4 \times 11^2$, llamando c al cociente de la división del segundo por el primero, tendríamos $2^3 \times 3^4 \times 11^2 = 2^2 \times 11^2 \times 7 \times c$; es decir, que un número se podría descomponer de dos modos diferentes en factores simples; lo que es absurdo.

Del mismo modo se demuestra el segundo caso.

75. *Hallar todos los divisores de un número.*

Sea 1800 el número, cuyos divisores simples y compuestos queremos hallar.

Hecha la descomposición en factores simples, tendremos

$$1800 = 2^3 \times 3^2 + 5^2.$$

Es evidente que 1, 2, 2^2, 2^3, divisores de 2^3, son divisores de 1800 (38).

También serán divisores de 1800, según el teorema (73), los productos de los divisores 1, 2, 2^2, 2^3 de 1800 por cada uno de los divisores 3 y 3^2 de 3^2, los cuales productos son:

$$3,\ 2 \times 3,\ 2^2 \times 3,\ 2^3 \times 3,$$
$$3^2,\ 2 \times 3^2,\ 2^2 \times 3^2,\ 2^3 \times 3^2.$$

También serán divisores de 1800, según el teorema (73), los productos de todos los divisores, que hasta ahora se han hallado, por cada uno de los divisores 5 y 5^2 de 5^2; cuyos productos son:

$5,$	$2 \times 5,$	$2^2 \times 5,$	$2^3 \times 5,$
$3 \times 5,$	$2 \times 3 \times 5,$	$2^2 \times 3 \times 5,$	$2^3 \times 3 \times 5,$
$3^2 \times 5,$	$2 \times 3^2 \times 5,$	$2^2 \times 3^2 \times 5,$	$2^3 \times 3^2 \times 5,$
$5^2,$	$2 \times 5^2,$	$2^2 \times 5^2,$	$2^3 \times 5^2,$
$3 \times 5^2,$	$2 \times 3 \times 5^2,$	$2^2 \times 3 \times 5^2,$	$2^3 \times 3 \times 5^2,$
$3^2 \times 5^2,$	$2 \times 3^2 \times 5^2,$	$2^2 \times 3^2 \times 5^2,$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2.$

Demostremos ahora que los divisores hallados de este modo son todos los del número.

Sabemos (74) que todo divisor de $2^3 \times 3^2 \times 5^2$ no ha de tener otros factores simples que 2, 3 y 5, y aun ellos con exponentes que no sean mayores que en $2^3 \times 3^2 \times 5^2$. Ahora bien: todo número que satisfaga á estas dos condiciones será uno de los divisores hallados, puesto que para hallarlos se han combinado las potencias sucesivas de los factores primos 2, 3 y 5 de todos los modos posibles; luego los factores hallados ya son todos los del número.

Según esto, la regla para hallar todos los divisores de un número es la siguiente:

Descompóngase el número en sus factores primos, escríbanse la unidad y las potencias sucesivas (*) *del primer factor simple, y multiplíquense estos números por las potencias sucesivas del segundo factor simple. Multiplíquense todos los números obtenidos por las potencias sucesivas del tercer factor simple, después todos los números*

(*) Llamamos aquí *potencias sucesivas de un factor* á sus potencias 1.ª, 2.ª y 3.ª, etc., hasta llegar á una potencia igual á la que el factor tiene en el número.

obtenidos por las potencias sucesivas del cuarto factor simple, y continúese del mismo modo hasta que se empleen las potencias sucesivas del último factor simple: los números hallados de este modo serán todos los divisores del número propuesto (*).

Ejemplos: **1.°** Hallar todos los divisores del número **1155**.

1155	3	1,	3,
385	5	5,	15,
77	7	7,	21,
11	11	35,	105,
		11,	33,
		55,	165,
		77,	231,
		385,	1155.

2.° Hallar todos los divisores de **2160**.

2160	2	1,	2,	4,	8,	16,
1080	2					
540	2	3,	6,	12,	24,	48,
270	2	9,	18,	36,	72,	144,
135	3	27.	54,	108,	216,	432,
45	3					
15	3	5,	10,	20,	40,	80,
5	5	15,	30,	60,	120,	240,
		45,	90,	180,	360,	720,
		135,	270,	540,	1080,	2160.

Nota. Para hallar los productos, siendo el multiplicador una potencia cualquiera de un factor simple, se multiplican por la primera potencia de este factor los productos hallados, siendo multiplicador la potencia inmediata inferior de dicho factor.

Así, los productos por 3^2 se hallarán multiplicando por 3 los productos 3, 6, 12, 24, 48, hallados siendo el multiplicador el 3. Los productos por 3^3 se hallarán multiplicando por 3 los productos 9, 18, 36, 72, 144, hallados siemdo multiplicador 3^2.

76. La descomposición de un número en factores simples

(*) *El número total de factores de un número es igual al producto de los exponentes de sus factores primos, aumentado cada exponente en una unidad.*

En efecto, supongamos que el número descompuesto en factores simples sea $a^\alpha b^\beta c^\gamma$: las potencias sucesivas del primer factor simple precedidas de la unidad son $\alpha+1$ factores. Como estos factores se multiplican por las potencias sucesivas del segundo factor simple, resultan $(\alpha+1)\beta$ productos; luego el número de factores hallados será $(\alpha+1)+(\alpha+1)\beta=(\alpha+1)(\beta+1)$. Estos factores se multiplican por las potencias sucesivas del tercer factor simple, y resultan $(\alpha+1)(\beta+1)\gamma$ productos; luego el número total de factores hallados es $(\alpha+1)(\beta+1)+(\alpha+1)(\beta+1)\gamma=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$, conforme al teorema.

Así, el número total de factores de 2160, ó de 2^4, 3^3, 5, será $5\times4\times2=40$.

nos suministra nuevas reglas para hallar el máximo común divisor y múltiplo más simple de varios números.

Máximo común divisor.

Sean $2^7 . 3^5 . 5 . 7^2$; $2^8 . 3^9 . 5^3$; $2^{10} . 3^8 . 7^2 . 11$ tres números, por ejemplo, cuyo máximo común divisor queremos hallar.

El producto $2^7 . 3^5$ de las menores potencias de los factores simples 2 y 3, únicos que son comunes á los tres números propuestos, es divisor de estos tres números; y también lo es todo producto de los mismos factores simples 2 y 3 en que los exponentes de éstos no sean mayores que en el producto $2^7 . 3^5$ (73). Pero no lo es ningún producto de los factores 2 y 3 en el que el exponente de 2, el de 3 ó los de ambos sean mayores que en $2^7 . 3^5$, y tampoco ningún número que tenga algún factor simple diferente de 2 y 3 (74). Por consiguiente, el número $2^7 . 3^5$, que contiene los únicos factores simples 2 y 3 que puede tener para ser divisor de los números propuestos y contienen estos factores con los mayores exponentes posibles, es el máximo común divisor de dichos números.

Luego: *Para hallar el* m. c. d. *de varios números, se descomponen en sus factores simples, y el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á dichos números es su máximo común divisor.*

77. *Múltiplo más simple.*

Hemos dicho (61) que se llama *menor múltiplo* ó *múltiplo más simple* de varios números el menor número divisible por dichos números.

Hallar el menor múltiplo de varios números dados.

Sean los números $2^3 \times 3^2$; $3^4 \times 5^2$; $2 \times 3 \times 7$, cuyo múltiplo más simple queremos hallar. El producto $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ de las mayores potencias de todos los factores simples que contienen estos números es divisible por todos ellos, según el teorema (73). Mas no lo sería, según el teorema (74), si el producto no contuviera alguna de las potencias de los números primos 2, 3, 5, 7, ó si la tuviera con menor exponente que el que dicho número tiene en el producto $2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Luego este producto contiene los factores suficientes, y además necesarios, para ser divisible por todos los números propuestos; luego es su menor múltiplo.

Luego: *Para hallar el menor múltiplo de varios números dados, se descomponen en sus factores simples, y se multiplican las mayores potencias de todos estos factores simples* (*).

(*) Esta regla es preferible á la (62), cuando los números dados no son muy grandes, como sucede casi siempre; ó aun cuando lo sean, si se tiene una tabla de números primos y compuestos, como la de Chernac ó la de Burckhard.

Antes de aplicar esta regla, conviene prescindir de todos aquellos números dados que sean factores de los otros; pues si se halla un número divisible por éstos, lo será también por todos sus factores.

Ejemplo. Hallar el múltiplo más simple de los números 2, 4, 6, 7, 9, 14, 35, 36, 63.

Prescindamos de los números 2, 4, 6, 9, que son factores de 36; prescindamos también del 7, que es factor de 14. Descompongamos los restantes en factores simples, y tendremos:

$$14 = 2 \times 7,$$
$$35 = 5 \times 7,$$
$$36 = 2^2 \times 3^2,$$
$$63 = 3^2 \times 7.$$

Multiplicando ahora las mayores potencias de los factores simples, el producto $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ será múltiplo más simple de los números propuestos.

Nota. *Si los números son primos entre sí dos á dos, su múltiplo más simple será el producto de dichos números;* pues siendo el múltiplo más simple divisible por cada uno de estos números, debe ser (70) divisible por el producto de todos ellos; y no hay ningún número divisible por este producto que sea menor que este mismo producto.

Así, el múltiplo más simple de los números 7 y 12, que son primos entre sí, es 7×12; el múltiplo más simple de los números 4, 7, 15 y 11, que son primos entre sí dos á dos, es $4 \times 7 \times 15 \times 11$.

Libro tercero

LIBRO TERCERO.

QUEBRADOS.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

78. Si una unidad se divide en dos partes iguales, estas partes se llaman *medios;* si se divide en tres partes iguales, estas partes se llaman *tercios;* si se divide en cuatro partes iguales, se llaman *cuartos.* Del mismo modo, si una unidad se divide en 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 20, etc., partes iguales, estas partes se llaman respectivamente *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos*, *décimos*, *onzavos*, *veintavos*, etc.

Por consiguiente, una unidad tiene dos medios, tres tercios, cuatro cuartos, cinco quintos....., diez décimos, once onzavos, veinte veintavos, etc.

aqui Se llama *fracción* ó *quebrado* una parte de la unidad ó la reunión de varias partes iguales de la unidad.

Así, un noveno, siete novenos, un veintavo, quince onzavos, son fracciones ó quebrados.

Según esta definición, el quebrado consta de dos números enteros: el uno llamado *denominador*, y es el que indica en cuántas partes iguales está dividida la unidad, y el otro llamado *numerador*, que es el que indica cuántas de dichas partes contiene el quebrado.

El numerador y denominador se llaman *términos* del quebrado.

El quebrado se escribe poniendo sobre una línea el numerador y debajo el denominador. Así, los quebrados un noveno, siete novenos, un veintavo, quince onzavos, se escribirán:

$$\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{1}{20}, \frac{15}{11}.$$

Un quebrado cuyo numerador es igual á su denominador, vale una unidad. Por ejemplo, $\frac{7}{7} = 1$.

Un quebrado cuyo numerador es mayor que su denominador, vale más que una unidad.

Se llama quebrado *propio* el quebrado cuyo numerador es menor que su denominador; y quebrado *impropio* el quebrado cuyo numerador es igual á su denominador, ó es mayor que su denominador. Por ejemplo, los quebrados $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{10}$ son quebrados propios. Los quebrados $\frac{7}{7}$, $\frac{15}{11}$ son quebrados impropios.

Se llama número *mixto* la reunión de un entero y un quebrado. Así, $4\frac{3}{5}$ es un número mixto.

Los números quebrados y mixtos están comprendidos en la denominación común de números *fraccionarios*.

79. *El producto de un quebrado multiplicado por su denominador es igual á su numerador.*

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$: decimos que $\frac{4}{7} \times 7 = 4$.

En efecto, $\frac{4}{7} \times 7 = 4$ séptimos $\times$ $7 = 28$ séptimos $= 7$ séptimos $\times 4 = 1 \times 4 = 4$.

Corolarios. 1.° *El cociente completo de toda división inexacta se compone del cociente entero y de un quebrado cuyo numerador es el residuo y cuyo denominador es el divisor.* Este quebrado se llama *quebrado complementario* del cociente.

Sea el dividendo 49 y el divisor 9, el cociente entero es 5 y el residuo 4: decimos que $49 : 9 = 5 + \frac{4}{9}$.

En efecto, para completar el cociente, hay que añadir al cociente entero 5 un número que multiplicado por 9 dé 4 de producto. Mas, según el teorema (79), este número es $\frac{4}{9}$ y no puede ser ningún otro; pues de lo contrario, existirían dos números diferentes que, multiplicados por un tercero, darían el mismo producto, lo que es evidentemente imposible; luego el cociente completo es

$$5 + \frac{4}{9}, \text{ ó } 5\frac{4}{9}.$$

2.° *El cociente de toda división de números enteros es un quebrado cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.*

Sea el dividendo 49 y el divisor 15: decimos que $49 : 15 = \frac{49}{15}$.

En efecto, $\frac{49}{15} \times 15 = 49$; luego (16) $\frac{49}{15}$ es el cociente de $49 : 15$.

Según esto, en adelante todo quebrado, como $\frac{49}{15}$, podrá leerse de dos modos: *cuarenta y nueve quinzavos*, ó *cuarenta y nueve partido por* 15 (*).

(*) En adelante indicaremos, á veces, la división de dos números cualesquiera enteros ó fraccionarios, escribiendo el dividendo sobre una línea y el divisor debajo.

Corolario. *Todo número entero puede ponerse en forma de quebrado, poniéndole por denominador la unidad;* pues siendo $5 : 1 = 5$, si nos servimos de la raya en vez de los dos puntos para indicar la división, tendremos $\frac{5}{1} = 5$.

80. En virtud del corolario 2.° del teorema (79): *Se sacarán las unidades de todo quebrado impropio,* ó por mejor decir, *se hallará el número entero ó mixto á que equivale un quebrado impropio, efectuando la división.*

Así, $\frac{49}{7} = 7$, $\frac{123}{14} = 8\,\frac{11}{14}$.

Al contrario: *Para reducir un entero á quebrado impropio cuyo denominador sea dado, no habrá más que multiplicar el entero por dicho denominador, y el producto será el numerador del quebrado.*

En efecto, si queremos reducir el número 5 á quebrado impropio cuyo denominador sea 7, ó lo que es igual, á séptimos, observaremos que $5 = \frac{5 \times 7}{7}$, lo que demuestra la regla.

Ejemplo. 9 reducido á 17 avos es $\frac{153}{17}$.

81. *Reducir un número mixto á quebrado* es hallar un quebrado impropio equivalente al número mixto, y cuyo denominador sea el del quebrado del mismo número mixto.

Para reducir un número mixto á quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se añade el numerador y á la suma se le pone por denominador el denominador del mismo quebrado.

En efecto, sea $4\,\frac{3}{8}$ el número mixto que queremos reducir á octavos: sabemos que $4 = \frac{8 \times 4}{8}$; y como además el número mixto tiene el quebrado $\frac{3}{8}$, dicho número mixto equivale á $\frac{8 \times 4}{8} + \frac{3}{8}$; pero es evidente que 8×4 octavos $+$ 3 octavos componen $(8 \times 4 + 3)$ octavos: luego $4\,\frac{3}{8} = \frac{8 \times 4 + 3}{8}$, conforme á la regla.

Ejemplo. $6\,\frac{3}{11} = \frac{69}{21}$.

82. *De dos quebrados que tienen igual denominador, es mayor el que tiene mayor numerador.*

Sean los dos quebrados $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$ que tienen igual denominador: la magnitud de las partes de uno y otro quebrado es la misma, pues en ambos dichas partes son séptimos de la unidad; pero el segundo tiene más partes que el primero: luego el segundo quebrado es mayor que el primero.

83. *Si el numerador se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el quebrado $\frac{7}{9}$: multipliquemos el numerador por un entero cualquiera, por ejemplo 5, y decimos que $\frac{35}{9} = \frac{7}{9} \times 5$.

En efecto, los dos quebrados $\frac{35}{9}$ y $\frac{7}{9}$ representan partes del mismo tamaño; pero el primero tiene 5 veces más partes que el segundo: luego el primero es 5 veces mayor que el segundo, ó lo que es igual, $\frac{35}{9} = \frac{7}{9} \times 5$.

Corolario. *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, quedando el denominador el mismo.*

Ejemplo. $\frac{3}{5} \times 8 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

84. *Si el numerador se parte por uno de sus divisores, el quebrado queda partido por dicho divisor.*

Sea el quebrado $\frac{18}{7}$: dividamos el numerador por uno de sus factores, por ejemplo 3, y decimos que $\frac{6}{7} = \frac{18}{7} : 3$.

En efecto, los dos quebrados $\frac{6}{7}$ y $\frac{18}{7}$ representan partes del mismo tamaño; pero el primero tiene 3 veces menos partes que el segundo: luego el primero es 3 veces menor que el segundo, ó lo que es igual, $\frac{6}{7} = \frac{18}{7} : 3$.

Corolario. *Para partir un quebrado por un divisor de su numerador, se parte el numerador por dicho divisor, quedando el denominador el mismo.*

Ejemplo. $\frac{14}{17} : 7 = \frac{2}{17}$.

85. *De dos quebrados que tienen igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador.*

Sean los quebrados $\frac{8}{11}$ y $\frac{8}{15}$: como el numerador es el mismo, el número de partes que contienen uno y otro quebrado es también el mismo; pero las partes del primer quebrado tienen mayor magnitud que las del segundo, pues claro es que si la unidad se divide primeramente en 11 partes iguales y después en 15, cada una de las primeras partes es mayor que cada una de las segundas: luego el primer quebrado es mayor que el segundo.

86. *Si el denominador se multiplica por un número entero, el quebrado queda dividido por dicho número.*

Sea el quebrado $\frac{7}{9}$: multipliquemos su denominador por un entero cualquiera, por ejemplo 5, y decimos que $\frac{7}{45} = \frac{7}{9} : 5$.

En efecto, los dos quebrados $\frac{7}{45}$ y $\frac{7}{9}$ tienen igual número de partes; pero cada parte del primero es 5 veces menor que cada parte del segundo: luego el primer quebrado es 5 veces menor que el segundo, ó en otros términos $\frac{7}{45} = \frac{7}{9} : 5$.

Corolario. *Para partir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, quedando el numerador el mismo.*

Ejemplo. $\frac{5}{9} : 7 = \frac{5}{63}$.

87. *Si el denominador se parte por uno de sus divisores, el quebrado queda multiplicado por dicho divisor.*

Sea el quebrado $\frac{7}{12}$: dividamos el denominador 12 por uno de sus factores, por ejemplo 4, y decimos que $\frac{7}{3} = \frac{7}{12} \times 4$.

En efecto, los dos quebrados $\frac{7}{3}$ y $\frac{7}{12}$ tienen igual número de partes; pero cada parte del primero es 4 veces mayor que cada parte del segundo: luego el primer quebrado es 4 veces mayor que el segundo, ó en otros términos $\frac{7}{3} = \frac{7}{12} \times 4$.

Corolario. *Para multiplicar un quebrado por un divisor de su denominador, se divide el denominador por dicho divisor, quedando el numerador el mismo.*

Ejemplo. $\frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

88. *Si los dos términos de un quebrado se multiplican por un número entero, ó se parten por un divisor común á ambos, el quebrado no muda de valor.*

Sea el quebrado $\frac{9}{13}$: multipliquemos sus dos términos por un entero cualquiera, 6 por ejemplo, y decimos que $\frac{9}{13} = \frac{9 \times 6}{13 \times 6}$.

En efecto, el quebrado $\frac{9 \times 6}{13}$ es 6 veces mayor que $\frac{9}{13}$ (83), y también es 6 veces mayor que $\frac{9 \times 6}{13 \times 6}$ (86): luego $\frac{9}{13} = \frac{9 \times 6}{13 \times 6}$; igualdad que demuestra las dos partes del teorema.

89. En atención á lo demostrado (79, *Corol.* 2.°), los teoremas 83, 84, 86, 87 y 88, se pueden enunciar del modo siguiente:

1.° *Si el dividendo se multiplica por un número entero, el cociente queda multiplicado por el mismo número.*

2.° *Si el dividendo se parte por uno de sus factores, el cociente queda partido por dicho factor.*

3.° *Si el divisor se multiplica por un número entero, el cociente queda partido por el mismo número.*

4.° *Si el divisor se parte por uno de sus factores, el cociente queda multiplicado por dicho factor.*

5.° *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número entero, ó se parten por un factor común á ambos, el cociente no varía.*

De este último teorema se infiere que, si al fin del dividendo y divisor hay ceros, se puede suprimir en ambos el mismo número de ceros, sin que el cociente se altere; pues esta supresión equivale á dividir uno y otro por 10, si se ha suprimido un cero; por 100, si se han suprimido dos ceros, etc. X a ojiu

Así, $\frac{4700}{300} = \frac{47}{3} = 15\frac{2}{3}$.

90. Fundándose en la primera parte del teorema (88), podremos *reducir varios quebrados, cuyos denominadores sean diferentes, á un común denominador;* es decir, podremos transformar los quebrados propuestos en otros equivalentes cuyos denominadores sean todos iguales.

Para esto, *se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados.*

Los nuevos quebrados serán equivalentes á los propuestos, pues resultan de la multiplicación de los dos términos de éstos por un mismo número entero; y el común denominador de los nuevos quebrados será el producto de los denominadores de los propuestos.

Ejemplo. Los quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, reducidos á un común denominador, son $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$.

El primero de estos quebrados es igual al primero de los propuestos, pues los dos términos del quebrado $\frac{70}{105}$ han resultado de la multiplicación de los dos términos del quebrado $\frac{2}{3}$ por 35. Del mismo modo se demuestra que el segundo quebrado de los transformados es igual al segundo de los propuestos, y que el tercero de los transformados es igual al tercero de los propuestos.

91. Si dos ó más denominadores tienen factores comunes, ó bien si los denominadores no son primos entre sí dos á dos, es preferible reducir los quebrados á un común denominador, *hallando el múltiplo más simple de los denominadores, y multiplicando en seguida los dos términos de cada quebrado por el factor que falte á su denominador para componer dicho múltiplo más simple, ó lo que es igual, por el cociente de la división del múltiplo más simple por el denominador.*

El múltiplo más simple será el denominador común, por lo que puede excusarse la multiplicación de cada uno de los denominadores por el factor deficiente (*).

(*) Aplicando esta regla al caso en que los denominadores son primos entre sí dos á dos, tendremos que el múltiplo más simple de los denominadores será el producto de todos ellos (77, *Nota*), y el cociente de la división del múltiplo más simple por el denominador de cada quebrado es

Ejemplo. Reducir á un común denominador los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}, \frac{13}{18}$.

El múltiplo más simple de los denominadores es (77) $2^2 \cdot 3^2 = 36$, y por consiguiente los quebrados propuestos, reducidos al común denominador 36, serán $\frac{18}{36}, \frac{24}{36}, \frac{27}{36}, \frac{16}{36}, \frac{15}{36}, \frac{26}{36}$, iguales respectivamente á los propuestos (*).

92. Si dos quebrados tienen numeradores y denominadores diferentes, se sabrá cuál es el mayor reduciéndolos á un común denominador; y el que entonces tenga mayor numerador será el mayor.

Si á los dos términos de un quebrado menor que la unidad se añade un mismo número entero, el nuevo quebrado será mayor que el propuesto; y si á los dos términos de un quebrado mayor que la unidad se añade un mismo número entero, el nuevo quebrado será menor que el propuesto.

Sea el quebrado $\frac{a}{b}$: añadamos á sus dos términos el número entero c, y el nuevo quebrado será $\frac{a+c}{b+c}$. Reducidos estos dos quebrados á un común denominador, serán respectivamente

$$\frac{ab+ac}{b(b+c)}, \quad \frac{ab+bc}{b(b+c)}.$$

Ahora, si el quebrado propuesto es menor que la unidad, esto es, si $a < b$, será $ac < bc$, y $ab + ac < ab + bc$; luego en este caso el nuevo quebrado es mayor que el propuesto.

Si el quebrado propuesto es mayor que la unidad, esto es, si $b < a$, será $bc < ac$, y $ab + bc < ab + ac$; luego en este caso el nuevo quebrado es menor que el propuesto.

93. *Si un quebrado es igual á otro cuyos dos números son primos entre sí, los dos términos del primero serán iguales respectivamente á los del segundo, multiplicados por un mismo número entero.*

Sea el quebrado $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$, siendo primos entre sí los dos términos de éste: decimos que a y b son iguales respectivamente á 4 y 7, multiplicados por un mismo número entero.

En efecto, multiplicando por b los dos miembros de esta igualdad, tendremos (79 y 83) $a = \frac{4 \times b}{7}$: siendo, según esto, 7 divisor

---

el producto de los denominadores de los demás quebrados; de manera que dicha regla se reduce en tal caso á multiplicar los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás quebrados, es decir, se reduce á la regla (90).

(*) Esta regla tiene las dos ventajas siguientes sobre la anterior: 1.ª, dar reducidos los quebrados á un común denominador con menor trabajo; 2.ª, dar estos quebrados con la forma más sencilla posible.

de $4 \times b$ y primo con 4, es (60) divisor de b. Sea m el cociente de $b : 7$, y por consiguiente $b = 7 \times m$; sustituyendo en la igualdad $a = \frac{4 \times b}{7}$ en vez de b su valor $7 \times m$, tendremos $a = \frac{4 \times 7 \times m}{7}$, ó $a = 4 \times m$. Queda, pues, demostrado que a y b son iguales respectivamente á 4 y 7 multiplicados por un mismo número entero.

94. *Simplificar* un quebrado es hallar otro quebrado equivalente al propuesto, y cuyos términos sean menores que los de éste.

Se llama quebrado *irreducible* un quebrado que no se puede simplificar.

Un quebrado cuyos dos términos son primos entre sí, es irreducible.

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$, cuyos dos términos son primos entre sí: si otro quebrado fuese igual á $\frac{4}{7}$, serían (93) su numerador y denominador iguales respectivamente á 4 y 7, multiplicados por un mismo número entero; luego los dos términos de dicho quebrado serían mayores que 4 y 7, ó por lo menos iguales á 4 y 7; luego el quebrado propuesto no puede simplificarse, ó es irreducible.

Para simplificar un quebrado, cuyos dos términos tienen un divisor común diferente de la unidad, se parten dichos dos términos por este divisor común.

El nuevo quebrado será igual al propuesto, porque éste no muda de valor dividiendo sus dos términos por un divisor común á ambos (88).

Es fácil conocer, por las reglas de la divisibilidad, si alguno de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 es divisor común á los dos términos del quebrado. Mas si ninguno de estos dos números fuere divisor de los dos términos del quebrado, se hallará el máximo común divisor de estos dos términos, y se tendrá su divisor común cualquiera que sea éste.

Ejemplo. Sea $\frac{6162}{9126}$ el quebrado que queremos simplificar.

Los dos términos de este quebrado son divisibles por 2; suprimiendo este divisor, resulta el quebrado $\frac{3081}{4563}$ equivalente al propuesto. Los dos términos del nuevo quebrado son divisibles por 3; suprimiendo este divisor, resulta el quebrado $\frac{1027}{1521}$. Los dos términos de este quebrado no son divisibles por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11; por consiguiente, para hallar el divisor común á sus dos términos, hallaremos su *m. c. d.*, que es 13, y suprimiendo este común divisor, resulta el quebrado $\frac{79}{117}$, cuyos dos términos son primos entre sí (36), y por tanto no se puede simplificar (94): luego $\frac{79}{117}$ es el valor del quebrado propuesto reducido á sus menores términos.

95. *Dos quebrados irreducibles iguales tienen iguales sus numeradores y también sus denominadores.*

Sea $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ los dos quebrados irreducibles iguales: decimos que $a = c$ y $b = d$.

En efecto: según el teorema (93), el numerador a es múltiplo del numerador c, y c es múltiplo de a; luego $a = c$.

Del mismo modo se demuestra que $b = d$.

96. *Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero;* pues si el quebrado irreducible, $\frac{15}{7}$ por ejemplo, fuese igual á un entero, sería 7 divisor de 15; luego 7 sería divisor del numerador y denominador, y por consiguiente el quebrado no sería irreducible, lo que es contrario á lo supuesto.

97. *Si varios quebrados son irreducibles, no podrán reducirse á un común denominador que sea menor que el múltiplo más simple de los denominadores.*

Sean los quebrados irreducibles $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{15}$. Todo quebrado igual al quebrado irreducible $\frac{4}{7}$ tiene su denominador múltiplo de 7 (93); todo quebrado igual al quebrado irreducible $\frac{5}{9}$ tiene su denominador múltiplo de 9, y todo quebrado igual á $\frac{7}{15}$ tiene su denominador múltiplo de 15: luego el denominador común de los nuevos quebrados equivalentes á los propuestos, ha de ser divisible por todos los denominadores de éstos; y claro es que no hay ningún número divisible por estos denominadores que sea menor que su múltiplo más simple.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

ARTÍCULO 1.º

ADICIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Leccion 19

98 Las definiciones de la adición, la sustracción, multiplicación y división, que hemos dado al tratar de esas operaciones, con los números enteros, convienen á las mismas operaciones con todos los números, puesto que dichas definiciones son generales.

Para sumar quebrados que tienen un mismo denominador, se suman los numeradores, y á la suma se le pone el denominador común.

Pues si los quebrados son, por ejemplo, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{8}{7}$, es evidente que la suma será $3 + 5 + 8$ séptimos, ó $\frac{3+5+8}{7}$.

Para sumar quebrados que no tienen igual denominador, se reducen á un común denominador; y la cuestión queda reducida á la anterior.

Ejemplos. 1.º $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}=\frac{42}{70}+\frac{40}{70}+\frac{35}{70}=\frac{117}{70}=1\,\frac{47}{70}$.

2.º $\frac{3}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{5}+\frac{7}{15}=\frac{45}{60}+\frac{25}{60}+\frac{12}{60}+\frac{28}{60}=\frac{110}{60}=1\,\frac{50}{60}=1\,\frac{5}{6}$.

El múltiplo más simple de estos denominadores es 60.

En la práctica es preferible la siguiente disposición:

1.º
$$\begin{array}{lr}
\frac{3}{5}\ldots & 42\\
\frac{4}{7}\ldots & 40\\
\frac{1}{2}\ldots & 35\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
117 & 70\\ \cline{2-2}
47 & 1\,\frac{47}{70}\ \text{suma.}
\end{array}$$

2.º
$$\begin{array}{lr}
\frac{3}{4}\ldots & 45\\
\frac{5}{12}\ldots & 25\\
\frac{1}{5}\ldots & 12\\
\frac{7}{15}\ldots & 28\\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
110 & 60\\ \cline{2-2}
50 & 1\,\frac{5}{6}\ \text{suma.}
\end{array}$$

Para sumar números mixtos, se suman los quebrados; y si de esta suma resultan algunas unidades, se agregan á la suma de los enteros.

Ejemplo. Sumar los números $7\,\frac{1}{3}$, $5\,\frac{1}{2}$ y $18\,\frac{3}{5}$.

$$\begin{array}{lr}
7\,\frac{1}{3}\ldots & 10\\
5\,\frac{1}{2}\ldots & 15\\
18\,\frac{3}{5}\ldots & 18\\
\hline
31\,\frac{13}{10} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
43 & 30\\ \cline{2-2}
13 & 1\,\frac{13}{30}
\end{array}$$

ARTÍCULO 2.º

SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

99. *Para restar de un quebrado otro menor, teniendo ambos igual denominador, se resta el numerador del sustraendo del numerador del minuendo, y al resto se le pone el denominador común.*

En efecto, sea, por ejemplo, el minuendo $\frac{7}{9}$ y el sustraendo $\frac{5}{9}$: es evidente que la diferencia será 7 — 5 novenos, ó $\frac{7-5}{9}$.

Para restar de un quebrado otro menor teniendo ambos diferentes denominadores, se reducen á un común denominador, y quedará la cuestión reducida á la anterior.

Ejemplos. 1.° $\frac{7}{15} - \frac{4}{11} = \frac{77}{165} - \frac{60}{165} = \frac{17}{165}$.

2.° $\frac{13}{14} - \frac{3}{8} = \frac{52}{56} - \frac{21}{56} = \frac{31}{56}$.

El múltiplo más simple de 14 y 8 es 56.

Otra disposición.

1.° $\frac{7}{15} \ldots 77$

$\frac{4}{11} \ldots 60$

$\frac{17}{165}$ resto.

2.° $\frac{13}{14} \ldots 52$

$\frac{3}{8} \ldots 21$

$\frac{31}{56}$ resto.

Para restar de un número mixto otro número mixto menor, se halla la diferencia de los quebrados y la de los enteros, y la suma de estas dos diferencias parciales será la diferencia de los dos números mixtos.

Puede suceder que el quebrado del minuendo sea menor que el del sustraendo: entonces se añade una unidad al quebrado del minuendo, y al restar el entero del sustraendo del entero del minuendo, se añade otra unidad al entero del sustraendo, para que la diferencia no se altere.

Ejemplos. 1.° $14\frac{4}{5} - 8\frac{2}{3}$

Operación.

$14\frac{4}{5} \ldots 12$

$8\frac{2}{3} \ldots 10$

$6\frac{2}{15}$

2.° $17\frac{3}{7} - 4\frac{2}{3}$

Operación.

$17\frac{3}{7} \ldots 9 + 21 = 30$

$4\frac{2}{3} \ldots 14$

$12\frac{16}{21}$

3.° $14 - 7\frac{2}{5} = 6\frac{3}{5}$.

En el 2.° ejemplo los quebrados reducidos á un común denominador son $\frac{9}{21}$ y $\frac{14}{21}$, y así se ve que el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo. Añadiendo una unidad al primero será $\frac{30}{21}$, del cual, restando $\frac{14}{21}$, quedan $\frac{16}{21}$. Añadiendo ahora una unidad al entero del sustraendo, tendremos 5, y restándolo de 17, quedan 12; luego el resto es $12 \frac{16}{21}$.

En el 3.er ejemplo, para seguir la regla general, se supondrá que el quebrado del minuendo es cero, y que por tanto es menor que el quebrado $\frac{2}{5}$ del sustraendo. Añadamos, pues, una unidad á dicho quebrado cero, y tendremos por quebrado del minuendo $\frac{5}{5}$: restados los quebrados, resulta $\frac{3}{5}$. Al restar los enteros, añadamos una unidad al 7, y restando 8 del 14, tendremos 6. Luego el resto total es $6 \frac{3}{5}$.

4.° $25 \frac{3}{4} - 17 = 8 \frac{3}{4}$. 5.° $22 - \frac{7}{11} = 21 \frac{4}{11}$.

Para hallar este último resto, añadamos 1, ó bien $\frac{11}{11}$, al quebrado cero del minuendo, y tendremos $\frac{11}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$. Añadamos ahora 1 al entero cero del sustraendo, y restándolo del 22, tendremos 21; luego el resto total es $21 \frac{4}{11}$.

NOTA. La adición y sustracción de los números mixtos pudieran efectuarse reduciéndolos á quebrados, y sumando ó restando estos quebrados; pero estas operaciones no serían tan breves como las que acabamos de explicar.

ARTÍCULO 3.°

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

+ **100.** En la multiplicación de números fraccionarios conviene considerar, además del caso de multiplicar un quebrado por un entero, explicado ya (83), otros dos: 1.°, multiplicar un quebrado ó un entero por un quebrado; 2.°, multiplicar números mixtos.

leído X **101.** Si el multiplicador es un quebrado, como por ejemplo $\frac{3}{7}$, el producto, según la definición general (7), será respecto del multiplicando lo que el multiplicador $\frac{3}{7}$ es respecto de la unidad; el producto será, pues, $\frac{3}{7}$ del multiplicando. Por consiguiente, la definición de la multiplicación, cuando el multiplicador es un quebrado, es ésta: *Multiplicar un número cualquiera por un quebrado,* memoria *es hallar el valor de las partes del multiplicando indicadas por el multiplicador.*

X Según esta definición, el producto de un número por un quebrado propio es menor que el multiplicando, y el producto de un número por un quebrado mayor que la unidad, ó por un número mixto, es mayor que el multiplicando.

1.er caso. *Para multiplicar un quebrado por otro, se halla el producto de los numeradores y el de los denominadores, y se parte el primer producto por el segundo.*

Sea el multiplicando $\frac{2}{9}$ y el multiplicador $\frac{7}{5}$: el producto es el valor de $\frac{7}{5}$ de $\frac{2}{9}$. Ahora bien: $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{9}$ es el cociente de $\frac{2}{9}$ partido por 5 (17, 1.ª), esto es, $\frac{2}{9} : 5 = \frac{2}{9 \times 5}$ (86, *Corol.*); luego $\frac{7}{5}$ de $\frac{2}{9}$ valdrán 7 veces $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{9}$, es decir, $\frac{2}{9 \times 5} \times 7 = \frac{2 \times 7}{9 \times 5}$, resultado que demuestra la verdad de la regla.

Ejemplo. $\frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{15} = 1\,\frac{13}{15}$.

Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador y se parte el producto por el denominador.

Sea el entero 8 y el quebrado $\frac{5}{9}$: decimos que $8 \times \frac{5}{9} = \frac{8 \times 5}{9}$.

En efecto, $8 \times \frac{5}{9} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{9} = \frac{8 \times 5}{9}$.

Se puede también, y conviene, demostrar esta regla del mismo modo que la anterior.

Ejemplo. $7 \times \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4\,\frac{1}{5}$.

Corolarios. 1.° *El producto de dos quebrados no varía, aunque se tome el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando.*

2.° *Para multiplicar varios quebrados entre sí, se multiplican los numeradores y los denominadores, y se divide el primer producto por el segundo.*

Sean los quebrados $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{9}$: su producto indicado es $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{9}$. El producto $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4.3}{5.7}$; luego el producto de los tres quebrados es $\frac{4.3}{5.7} \times \frac{2}{9} = \frac{4.3.2}{5.7.9}$.

Nota. Toda vez que, al multiplicar varios quebrados, exista un factor común á un numerador y á un denominador, se abrevia esta operación suprimiendo en primer lugar dicho factor común.

Ejemplos. $\frac{4}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} = 1\,\frac{1}{5}$; $\frac{23}{8} \times 16 = 23 \times 2 = 46$;

$\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{10}{7} = \frac{1}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$; $72 \times \frac{7}{9} = 8 \times 7 = 56$.

2.° caso. *Para multiplicar un número mixto por otro número mixto, se transforman en primer lugar los mixtos en quebrados; y* quedará reducido este caso al de la multiplicación de quebrados.

Ejemplo. $17\frac{3}{4} \times 6\frac{2}{7} = \frac{71}{4} \times \frac{44}{7} = 78 \times \frac{11}{7} = 111\frac{4}{7}$.

Si el multiplicador es entero, en vez de reducir el multiplicando á quebrado, será preferible multiplicar las dos partes del mixto por el entero, y sumar en seguida los dos productos parciales.

La verdad de esta regla es evidente; pues si todas las partes de un todo se hacen un cierto número de veces mayores, el todo quedará hecho este número de veces mayor.

Ejemplo. $25\frac{3}{5} \times 17$.

Disposición.

$$\begin{array}{l} 25\frac{3}{5} \\ 17 \\ \hline 175 \\ 25 \\ \quad 10\frac{1}{5} \\ \hline 435\frac{1}{5} \textit{ Producto.} \end{array}$$

102. Se llama *quebrado de quebrado* una parte de un quebrado ó la reunión de varias partes iguales de un quebrado.

Así, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{5}$ de $\frac{7}{9}$ son quebrados de quebrados.

Para hallar el valor de un quebrado de quebrado, se multiplican ambos quebrados.

Sea $\frac{3}{5}$ de $\frac{6}{11}$ el quebrado de quebrado: decimos que su valor es $\frac{3.6}{5.11}$.

En efecto, hallar el valor de $\frac{3}{5}$ de $\frac{6}{11}$ es multiplicar $\frac{6}{11}$ por $\frac{3}{5}$ (101); luego el valor de $\frac{3}{5}$ de $\frac{6}{11}$ es $\frac{6}{11} \times \frac{3}{5} = \frac{6.3}{11.5}$.

ARTÍCULO 4.°

DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

103. En la división de números fraccionarios conviene considerar, además del caso explicado ya (86) de dividir un quebrado por un entero, otros dos: 1.°, dividir un quebrado ó un entero por un quebrado; 2.°, dividir números mixtos.

1.er caso. *Para partir un quebrado por otro, se multiplica el nu-*

merador del dividendo por el denominador del divisor y el numerador del divisor por el denominador del dividendo, y se parte el primer producto por el segundo.

Sea el dividendo $\frac{4}{9}$ y el divisor $\frac{3}{5}$: decimos que

$$\frac{4}{9} : \frac{3}{5} = \frac{4.5}{3.9}.$$

En efecto, sea c el cociente de $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$; tendremos (16) $c \times \frac{3}{5} = \frac{4}{9}$. Ahora bien, multiplicar c por $\frac{3}{5}$ es hallar el valor de $\frac{3}{5}$ de c (101): luego $\frac{3}{5}$ de c valen $\frac{4}{9}$; luego $\frac{1}{3}$ de c valdrá la tercera parte de $\frac{4}{9}$, que es $\frac{4}{9} : 3 = \frac{4}{9 \times 3}$. Si $\frac{1}{5}$ de c vale $\frac{4}{9 \times 3}$; $\frac{5}{5}$ de c valdrán $\frac{4}{9 \times 3} \times 5 = \frac{4 \times 5}{9 \times 3}$; y pues $\frac{5}{5}$ de c componen c, resulta $c = \frac{4 \times 5}{9 \times 3}$.

Ejemplo. $\quad \frac{7}{9} : \frac{4}{21} = \frac{147}{36} = 4\frac{3}{36} = 4\frac{1}{12}$.

Para partir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y el producto se parte por el numerador.

Sea el dividendo 7 y el divisor $\frac{3}{4}$; decimos que $7 : \frac{3}{4} = \frac{7.4}{3}$.

En efecto, $7 : \frac{3}{4} = \frac{7}{1} : \frac{3}{4} = \frac{7.4}{3}$.

Se puede también, y conviene, demostrar esta regla del mismo modo que la regla anterior.

Ejemplo. $\quad 15 : \frac{2}{7} = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$.

NOTA. Toda vez que al partir un quebrado por otro, exista un factor común á los numeradores ó á los denominadores, se abreviará la operación suprimiendo dicho factor común.

Ejemplos. $\quad \frac{7}{9} : \frac{4}{21} = \frac{7}{3} : \frac{4}{7} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$; $\quad \frac{18}{7} : 4 = \frac{9}{7} : 2 = \frac{9}{14}$;

$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} : \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$; $\quad 20 : \frac{5}{8} = 4 : \frac{1}{8} = 32$.

2.º caso. *Para partir un número mixto por otro, se transforman en primer lugar los mixtos en quebrados;* lo que reduce este caso al de la división de quebrados.

Ejemplos.

1.º $\quad 25\frac{2}{3} : 4\frac{7}{8} = \frac{77}{3} : \frac{39}{8} = 5\frac{31}{117}$.

2.º $\quad 25\frac{1}{7} : \frac{4}{11} = \frac{176}{7} : \frac{4}{11} = \frac{44}{7} : \frac{1}{11} = 69\frac{1}{7}$.

Si el divisor es entero, es preferible, en vez de reducir el mixto á quebrado, dividir las dos partes del dividendo por el divisor, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total. Pues si las dos partes de que se compone un número se hacen un cierto número de veces menores, el número quedará hecho este mismo número de veces menor.

Ejemplos. 1.° $45\frac{3}{8} : 9 = 5\frac{3}{72} = 5\frac{1}{24}$.

2.° $19\frac{2}{3} : 15 = 1\frac{14}{45}$.

En este ejemplo, dividiendo 19 por 15, resulta $1\frac{4}{15}$, y dividiendo después $\frac{2}{3}$ por 15, resulta $\frac{2}{45}$; y por tanto, el cociente será $1\frac{4}{15} + \frac{2}{45} = 1\frac{12}{45} + \frac{2}{45} = 1\frac{14}{45}$. Pero efectuando la operación de este modo no habría ventaja sobre el método de reducir el mixto á quebrado; y así, antes de partir por 15 el residuo 4 que ha quedado de dividir 19 por 15, se reducirá á quebrado el mixto $4\frac{2}{3}$, y tendremos $\frac{14}{3}$, y partiendo en seguida este quebrado por 15 resulta $\frac{14}{45}$; luego el cociente será $1\frac{14}{45}$.

3.° $256\frac{3}{7} : 34 = 7\frac{129}{238}$.

Nota. Si un número cualquiera se divide por la unidad, el cociente es igual al dividendo; si se divide por un número menor que la unidad, el cociente es mayor que el dividendo, y si se divide por un número mayor que la unidad, el cociente es menor que el dividendo.

Todo esto resulta fácilmente de la definición de la división.

CAPÍTULO III.

PRODUCTO DE VARIOS FACTORES.

aquí

104. *El producto de la suma indicada de varios números enteros y fraccionarios, ó todos fraccionarios, por un número entero ó fraccionario, es igual á la suma de los productos parciales de cada número del multiplicando por el multiplicador.*

Sea $a + b + c$ el multiplicando, cuyos números a, b y c son enteros y fraccionarios, ó todos fraccionarios, y sea m el multiplicador, también entero ó fraccionario, decimos que

$$(a + b + c)\,m = am + bm + cm.$$

1.° Sea el multiplicador m un número entero 7: el producto $(a + b + c) \times 7$ se hallará haciendo 7 veces mayor á cada una de las partes del multiplicando; luego $(a + b + c) \times 7 = a \times 7 + b \times 7 + c \times 7$.

2.° Si el multiplicador es un número fraccionario $\frac{7}{5}$, el producto $(a + b + c) \times \frac{7}{5}$ quiere decir (101) que se halle el valor de

$\frac{7}{5}$ de $a + b + c$; y es claro que, hallando el valor de $\frac{7}{5}$ de cada una de las partes del multiplicando, se tendrá el valor de $\frac{7}{5}$ del todo; luego $(a + b + c) \times \frac{7}{5} = a \times \frac{7}{5} + b \times \frac{7}{5} + c \times \frac{7}{5}$.

El producto de la diferencia indicada de dos números, uno entero y otro fraccionario ó ambos fraccionarios, por un número entero ó fraccionario, es igual á la diferencia de los productos parciales de cada número del multiplicando por el multiplicador.

Sea el multiplicando $a - b$ y el multiplicador c: decimos que

$$(a - b) = ac - bc.$$

En efecto, sea d la diferencia entre a y b, es decir, sea $a - b = d$, será por consiguiente $a = b + d$ (10); luego $ac = (b + d)c$; pero $(b + d)c = bc + dc$, según se acaba de demostrar; luego $ac = bc + dc$. Restando bc de los dos miembros de esta igualdad, tendremos $ac - bc = dc$, ó poniendo en lugar de d su igual $a - b$, será por último $ac - bc = (a - b)c$.

105. *El producto de varios números enteros y fraccionarios ó todos fraccionarios no se altera, aunque varíe el orden de colocación de los factores.*

Sea el producto $2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{17}{9}$: decimos que es igual á

$$\frac{4}{3} \times 2 \times \frac{17}{9} \times \frac{3}{5}.$$

En efecto, $2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{17}{9} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 17}{5 \times 3 \times 9}$ (101, *Corol.* 2.°), y el producto $\frac{4}{3} \times 2 \times \frac{17}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 2 \times 17 \times 3}{3 \times 9 \times 5}$. El quebrado $\frac{2 \times 3 \times 4 \times 17}{5 \times 3 \times 9}$ es igual al quebrado $\frac{4 \times 2 \times 17 \times 3}{3 \times 9 \times 5}$, pues sus numeradores son iguales, por constar de los mismos factores enteros (33), y sus denominadores son también iguales por la misma razón; luego los dos productos propuestos son iguales.

Consecuencias.

106. *El producto de varios productos indicados es igual á un producto compuesto de todos los factores de los productos propuestos.*

Consideremos dos casos: 1.°, que sean dos los productos indicados; 2.°, que el número de productos indicados sea cualquiera.

1.*er caso.* Sean los dos productos indicados $4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3}$, y $2 \cdot \frac{3}{5}$; decimos que $4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \times 2 \cdot \frac{3}{5} = 4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5}$.

En efecto, tenemos $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2.3}{5}$; luego

$$4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \times 2 \cdot \frac{3}{5} = 4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2.3}{5}.$$

No podemos ahora reemplazar en este producto la cantidad $\frac{2.3}{5}$ por su igual $2 \cdot \frac{3}{5}$, porque tendríamos el producto $4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5}$, que no es evidentemente igual al producto $4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2.3}{5}$; pero trasladando el factor $\frac{2.3}{5}$ al primer lugar, tendremos $\frac{2.3}{5} \cdot 4 \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3}$; y poniendo ahora en vez del quebrado $\frac{2.3}{5}$ su igual el producto $2 \cdot \frac{3}{5}$, lo que evidentemente es posible, pues el producto total significa lo mismo en ambos casos, tendremos

$$4 \cdot \tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{1}{3} \times 2 \cdot \tfrac{3}{5} = 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot 4 \cdot \tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{1}{3},$$

ó (106) $$4 \cdot \tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{1}{3} \times 2 \cdot \tfrac{3}{5} = 4 \cdot \tfrac{9}{7} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{5}.$$

2.° *caso.* Sean los productos abc, de, fg, etc., en los cuales las letras representan números cualesquiera, enteros ó fraccionarios; decimos que $abc \times de \times fg = abcdefg$.

En efecto, según el primer caso, es $abc \times de = abcde$: multiplicando ambos miembros de esta igualdad por fg, será $abc \times de \times fg = abcde \times fg$; y como, según el primer caso, $abcde \times fg = abcdefg$, será

$$abc \times de \times fg = abcdefg.$$

Del mismo modo se continuaría, si se considerasen más de tres productos.

Al contrario, dado un producto $abcdefg$ de varios factores, se podrá poner en su lugar un producto de varios productos de dichos factores, como $abc \times defg$, ó $abc \times de \times fg$. etc. (*Pág.* 29, *nota* (*).)

107. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número cualquiera, el producto queda multiplicado por el mismo número.*

Sea el producto $a \times b \times c$; multipliquemos el primer factor por un número cualquiera m, y tendremos $am \times b \times c$, que significa lo mismo que $a \times m \times b \times c$, y este producto es igual á $a \times b \times c \times m$, que es el producto propuesto multiplicado por m. Si se hubiese multiplicado otro de los factores, el b por ejemplo, por m, el producto hubiera sido $a \times bm \times c$, en el cual no podríamos poner, en lugar de bm, $b \times m$, porque tendríamos el producto $a \times b \times m \times c$, que no es evidentemente igual á $a \times bm \times c$; pero trasladando el factor bm al primer lugar, tendremos $bm \times a \times c$, y ahora estamos en el caso primero.

Corolario. *Para multiplicar un producto por un número, no hay más que multiplicar cualquiera de sus factores por dicho número.*

108. *Si uno de los factores de un producto se divide por un número cualquiera, el producto queda dividido por dicho número.*

Sea el producto $a \times b \times c$; dividamos cualquiera de sus factores, por ejemplo el b, por m, y resultará $a \times \frac{b}{m} \times c$. Si multiplicamos esta cantidad por m, para lo cual podemos, según el corolario anterior, multiplicar por m el factor $\frac{b}{m}$, resultará el producto $a \times b \times c$, esto es, el dividendo; luego $a \times \frac{b}{m} \times c$ es el cociente de $a \times b \times c$ dividido por m.

Corolario. *Para dividir un producto por un número cualquiera, se divide por éste uno cualquiera de los factores del producto.*

109. *Si uno de los factores de un producto se multiplica por un número cualquiera, y otro factor se divide por el mismo número, el producto no varía.*

Sea el producto $a \times b \times c$: multipliquemos uno de sus factores, a por ejemplo, por m, y dividamos otro de sus factores b por m, y tendremos el producto $am \times \frac{b}{m} \times c$, que decimos es igual al producto propuesto $a \times b \times c$. En efecto, según el teorema (108), tenemos $am \times \frac{b}{m} \times c = \frac{am \times b \times c}{m}$, y según el mismo teorema, este cociente equivale á $a \times b \times c$; luego $am \times \frac{b}{m} \times c = a \times b \times c$.

110. Suponiendo que el dividendo y el divisor sean números cualesquiera enteros ó fraccionarios:

1.° *Si el dividendo se multiplica por un número entero ó fraccionario, el cociente queda multiplicado por el mismo número.* 2.° *Si el dividendo se parte por un número entero ó fraccionario, el cociente queda partido por el mismo número.* 3.° *Si el divisor se multiplica por un número entero ó fraccionario, el cociente queda partido por el mismo número.* 4.° *Si el divisor se parte por un número entero ó fraccionario, el cociente queda multiplicado por el mismo número.* 5.° *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número entero ó fraccionario, el cociente no se altera.* 6.° *Si el dividendo y el divisor se parten por un mismo número entero ó fraccionario, el cociente no se altera.*

Sean a y b el dividendo y el divisor, c el cociente que según la regla de la división de quebrados será un número entero ó fraccionario, y sea m un número cualquiera entero ó fraccionario.

1.° Tenemos $\frac{a}{b} = c$, y por consiguiente $a = bc$. Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por m, será $am = bcm$, ó $am = b \times cm$; luego (16) $\frac{am}{b} = cm$.

Queda demostrado el primer teorema.

2.° Partiendo por m los dos miembros de la igualdad $a = bc$, será $\frac{a}{m} = \frac{bc}{m}$; pero (108) $\frac{bc}{m} = b \times \frac{c}{m}$: luego $\frac{a}{m} = b \times \frac{c}{m}$, y por consiguiente $\frac{\frac{a}{m}}{b} = \frac{c}{m}$, igualdad que demuestra el segundo teorema.

3.° Siendo $a = bc$, será (109) $a = bm \,.\, \frac{c}{m}$; luego $\frac{a}{bm} = \frac{c}{m}$, y así queda demostrado el tercer teorema.

4.° También $a = \frac{b}{m} \,.\, mc$; luego $\frac{a}{\frac{b}{m}} = mc$.

Queda demostrado el cuarto teorema.

5.° Siendo $am = bcm$, es $am = bm \times c$; luego $\frac{am}{bm} = c$.
Queda demostrado el quinto teorema.

6.° También $\frac{a}{m} = \frac{bc}{m} = \frac{b}{m} \times c$; luego $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \times c$, igualdad que demuestra el sexto teorema.

CAPÍTULO IV.

POTENCIAS DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

111. *Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan á dicha potencia sus dos términos.*

En efecto, según la definición de la potencia de un número, es $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{7}{5}$: el producto de estos tres quebrados es (101, *Corol.*) $\frac{7 \times 7 \times 7}{5 \times 5 \times 5}$ ó $\frac{7^3}{5^3}$; luego $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}$, conforme á la regla.

Para elevar un número mixto á una potencia, se reduce el mixto á quebrado y se eleva en seguida este quebrado á dicha potencia.

Así, $\left(7 + \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{38}{5}\right)^3 = \frac{38^3}{5^3}$.

Las potencias de un número menor que 1 van disminuyendo á medida que crece su grado, y las potencias de un número mayor que 1 van aumentando á medida que crece su grado.

1.° Sea $\frac{4}{7}$ el número menor que 1: tenemos (101)

$$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} < \frac{4}{7}, \text{ ó } \left(\frac{4}{7}\right)^2 < \frac{4}{7}.$$

También

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \frac{4}{7} < \left(\frac{4}{7}\right)^2, \text{ ó } \left(\frac{4}{7}\right)^3 < \left(\frac{4}{7}\right)^2;$$

y así sucesivamente.

2.° Sea $\frac{7}{4}$ el número mayor que 1: tendremos (101)

$$\frac{7}{4} \times \frac{7}{4} > \frac{7}{4}, \text{ ó } \left(\frac{7}{4}\right)^2 > \frac{7}{4}.$$

También $\left(\frac{7}{4}\right)^2 \times \frac{7}{4} > \left(\frac{7}{4}\right)^3$, ó $\left(\frac{7}{4}\right)^3 > \left(\frac{7}{4}\right)^2$;
y así sucesivamente.

112. *Si una fracción irreducible se eleva á una potencia, resulta otra fracción irreducible.*

Sea la fracción irreducible $\frac{7}{5}$: decimos que $\left(\frac{7}{5}\right)^3$ es otra fracción irreducible.

En efecto, acabamos de ver que $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}$. Mas siendo la fracción $\frac{7}{5}$ irreducible, ó lo que es igual, siendo 7 y 5 números primos entre sí, las dos potencias 7^3 y 5^3 son también números primos entre sí (60, *Consec.* 1.ª); luego la fracción $\frac{7^3}{5^3}$ es irreducible. x X con demostraciones todo

CAPÍTULO V.

QUEBRADOS Ó CANTIDADES DECIMALES.

ARTÍCULO 1.º

NUMERACIÓN DE LOS QUEBRADOS DECIMALES.

113. Se llaman *quebrados ó cantidades decimales* los quebrados que tienen por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros.

Cuando el denominador es 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1.000000, etc., las partes que contiene el quebrado se llaman respectivamente *décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas*, etc. Por consiguiente, una unidad tiene 10 décimas, 100 centésimas, 1000 milésimas, etc.; una décima tiene 10 centésimas, una centésima tiene 10 milésimas, una milésima tiene 10 diezmilésimas, y así sucesivamente.

Puesto que en el sistema ordinario de numeración cada cifra representa unidades diez veces menores que las que representa la cifra inmediata de la izquierda, si se continúa este sistema hacia la derecha de las unidades simples, las cifras 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, 6.ª, etc., representarán respectivamente décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, millonésimas, etc., ó unidades de 1.º, 2.º, 3.º, 4.º, 5.º, 6.º, etc., orden decimal.

Las cifras que representan estas unidades se llaman cifras *decimales;* y para distinguirlas de las que representan números enteros, se coloca una coma ó señal cualquiera inmediatamente después de las unidades simples.

De aquí se infiere que cualquier fracción decimal puede escribirse sin denominador, escribiendo el numerador, y separando con una coma tantas cifras de la derecha como ceros tiene el denominador; ó lo que es igual, colocando la coma de modo que la última cifra decimal ocupe el lugar correspondiente al orden de las unidades indicadas por la fracción. Si el numerador no tiene para esto bastantes cifras, se agrega á su izquierda un número suficiente de ceros. Cuando la cantidad decimal no tiene parte entera, el cero que ocupa el lugar de las unidades simples se llama *cero de enteros*.

Así, los quebrados $\frac{5234}{1000}$, $\frac{175}{10000}$, $\frac{324}{100000}$ serán escritos sin denominador, 5'234, 0'0175, 0'00324.

Para demostrarlo, consideremos cualquiera de estas cantidades, la primera por ejemplo.

El número 5'234 consta de 5 unidades, 2 décimas, 3 centésimas y 4 milésimas; y como una unidad tiene 10 décimas, las 5 unidades tendrán 50 décimas, y por tanto el número 5'234 consta de 52 décimas, 3 centésimas y 4 milésimas; y como una décima tiene diez centésimas, las 52 décimas compondrán 520 centésimas: luego el número 5'234 consta de 523 centésimas y 4 milésimas; y como una centésima tiene 10 milésimas, las 523 centésimas tienen 5230 milésimas, y por consiguiente, el número 5'234 consta de 5234 milésimas: es, pues, igual á $\frac{5234}{1000}$.

Según esta regla, una cantidad decimal, escrita sin denominador, contiene tantas unidades del orden de su última cifra, cuantas unidades simples tiene dicha cantidad prescindiendo de la coma. Por consiguiente, para leer ó enunciar una cantidad decimal escrita sin denominador, se lee dicha cantidad como si la coma no existiera, expresando en seguida que las unidades enunciadas son del orden de su última cifra.

Ejemplos. 3'29 se lee 329 centésimas; 0'4801 se lee 4801 diezmilésimas.

Si la cantidad decimal tiene enteros, se suele enunciar ordinariamente leyendo en primer lugar los enteros y en seguida la parte decimal.

Por ejemplo, 3'29 se lee 3 enteros y 29 centésimas.

114. Para dividir un número entero por la unidad seguida de uno ó más ceros, se separan de la derecha del número tantas cifras decimales como ceros tiene el divisor. Si el número no tiene bastantes cifras para su separación, se imagina á su izquierda un número suficiente de ceros.

Para demostrarlo, supongamos que se quiere dividir el número 821 por 10000: ya se sabe que el cociente es $\frac{821}{10000}$; y escribiendo ahora sin denominador este quebrado, resulta 0'0821, conforme á la regla.

Ejemplos. 7 : 10 = 0'7; 25 : 1000 = 0'025;
1412 : 100 = 14'12.

NOTA. Supondremos en adelante, mientras no advirtamos lo contrario, que las cantidades decimales están escritas sin denominador.

115. *Una cantidad decimal no se altera añadiendo uno ó más ceros á su derecha;* pues las cifras de esta cantidad representan, antes y después de la adición de los ceros, unidades del mismo orden.

También se puede demostrar esta proposición del modo siguiente. Sea la cantidad decimal 0'175 que, escrita en forma de fracción ordinaria, es $\frac{175}{1000}$. Añadamos á la derecha de 0'175 dos ceros por ejemplo, y la cantidad será 0'17500 ó $\frac{17500}{100000}$, fracción igual á la $\frac{175}{1000}$, porque los dos términos de aquélla son respectivamente iguales á los de ésta multiplicados por 100.

No alterándose una cantidad decimal porque se añadan ceros á su derecha, tampoco se alterará una cantidad decimal que tenga ceros á su derecha, aunque éstos se supriman.

ARTÍCULO 2.°

ADICIÓN DE LAS CANTIDADES DECIMALES.

116. *Para sumar las cantidades decimales, se colocan unas debajo de otras, de modo que las cifras del mismo orden se correspondan, lo que se consigue colocando las comas en columna. Se suman en seguida las unidades de todos los órdenes, principiando por las del orden inferior. Si la suma de las unidades de un orden compone una ó más unidades del orden inmediato superior, se retienen éstas para añadirlas á la suma de las unidades del orden siguiente, y se escriben las unidades restantes.*

El resultado obtenido así contiene las unidades que existen de todos los órdenes, y por tanto es la suma.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r}34'0178\\3'9682\\4'69\\18'204\\0'4368\\\hline 61'3168\end{array}$$

ARTÍCULO 3.°

SUSTRACCIÓN DE LAS CANTIDADES DECIMALES.

117. *Para restar de una cantidad decimal otra decimal, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las cifras del mismo orden se correspondan. Se restan en seguida las unidades de todos los órdenes del sustraendo de las correspondientes del minuendo; pero antes conviene igualar el número de cifras decimales en minuendo y sustraendo, agregando ceros á la derecha del que tenga menos cifras de éstas.*

El resultado obtenido por esta regla será el resto; pues, según ella, se restan del minuendo todas las partes del sustraendo.

Ejemplo. Sea el minuendo 25'14 y el sustraendo 3'7941.

Operación.

$$\begin{array}{r} 25'1400 \\ 3'7941 \\ \hline 21'3459 \end{array}$$

ARTÍCULO 4.°

MULTIPLICACIÓN DE LAS CANTIDADES DECIMALES.

118. En la multiplicación de las cantidades decimales conviene distinguir tres casos: 1.°, multiplicar una cantidad decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros; 2.°, multiplicar una cantidad decimal por una entera; 3.°, multiplicar una cantidad decimal por otra decimal.

1.er caso. *Para multiplicar una cantidad decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se mueve la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tiene el multiplicador.*

Sea el multiplicando 4'789 y el multiplicador 100: decimos que $4'789 \times 100 = 478'9$.

En efecto, cada cifra de la cantidad 478'9 representa unidades 100 veces mayores que las que representan la misma cifra en el multiplicando 4'789; luego las cuatro partes del número 478'9 son 100 veces mayores que las cuatro partes del número 4'789; luego el número 478'9 es 100 veces mayor que el número 4'789, ó bien

$$478'9 = 4'789 \times 100.$$

Así, $3'046 \times 1000 = 3046$; $0'45 \times 10000 = 4500$.

2.° caso. *Para multiplicar una cantidad decimal por una entera, se multiplica como si el multiplicando fuese entero, y de la derecha* *del producto, que así se obtenga, se separan con la coma tantas cifras como cifras decimales tiene el multiplicando.*

Sea el multiplicando 4'59 y el multiplicador 23: sabemos que $4'59 = \frac{459}{100}$; luego

$$4'59 \times 23 = \frac{459}{100} \times 23 = \frac{459 \times 23}{100};$$

es decir, que se deben multiplicar las dos cantidades, como si la coma del multiplicando no existiera, y partir en seguida por 100, ó separar de la derecha del producto dos cifras, esto es, tantas como cifras decimales tiene el multiplicando.

NOTA. La multiplicación de un número entero por un número decimal se ejecutará por la misma regla; pues, por ejemplo,

$$8 \times 2'25 = 2'25 \times 8 \ (105).$$

3.er caso. *Para multiplicar una cantidad decimal por otra decimal, se multiplican como si fuesen enteras, y de la derecha del producto, que así se obtenga, se separan tantas cifras como cifras decimales tienen los dos factores.*

Sea el multiplicando 4'59 y el multiplicador 3'7: sabemos que $4'59 = \frac{459}{100}$, y que $3'7 = \frac{37}{10}$; luego

$$4'59 \times 3'7 = \frac{459}{100} \times \frac{37}{10} = \frac{459 \times 37}{1000};$$

es decir, que deben multiplicar los dos números como si fuesen enteros, y dividir en seguida el producto por 1000, ó separar de la derecha del producto tres cifras, esto es, tantas como cifras decimales tienen ambos factores.

Ejemplos.

1.°

```
  7891'32
       27
 --------
  5523924
 1578264
 --------
 213065'64
```

2.°

```
    342
   5'79
 ------
   3078
  2394
 1710
 ------
 1980'18
```

3.°

```
    346'891
       7'32
 ----------
     693782
   1040673
  2428237
 ----------
  2539'24212
```

4.°

```
   0'046
    0'36
 -------
     276
    138
 -------
 0'01656
```

NOTA. Cuando sucede, como en el último ejemplo, que el producto hallado, prescindiendo de las comas, tiene menor número de cifras que el que se haya de separar de la derecha, se escriben á la izquierda del producto los ceros suficientes. En este ejemplo basta escribir un cero á la izquierda del producto 1656, y después se separan las cinco cifras poniendo antes un cero de enteros.

Si quedase alguna duda acerca de la razón de esta nota, se repetirá la demostración de la regla de la multiplicación de decimales para el último ejemplo.

ARTÍCULO 5.°

DIVISIÓN DE LAS CANTIDADES DECIMALES.

119. En la división de las cantidades decimales conviene distingunir tres casos: 1.°, dividir una cantidad decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros; 2.°, dividir una cantidad decimal por una entera; 3.°, dividir una cantidad entera ó decimal por una decimal.

1.er caso. *Para dividir una cantidad decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se mueve la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tiene el divisor.*

Sea el dividendo 34'89 y el divisor 100, decimos que $\frac{34'89}{100} = 0'3489$.

En efecto, $0'3489 \times 100 = 34'89$ (118, 1.°): luego (16) 0'3489 es el cociente de $\frac{34'89}{100}$.

2.° caso. *Para dividir una cantidad decimal por un número entero, se efectúa la división como si el dividendo fuese entero, y de la derecha del cociente si la división es exacta, ó dela derecha del cociente entero si es inexacta, se separan tantas cifras como cifras decimales tiene el dividendo. El resultado obtenido así será el cociente pedido si la división es exacta; y si es inexacta, el resultado se diferenciará del cociente pedido en menos de una unidad del último orden decimal.*

Sea el dividendo 45'24 y el divisor 12: dividiendo la cantidad 4524 por 12, resulta el cociente exacto 377; luego partiendo por 12 la cantidad 45'24, 100 veces menor que 4524, resultará (110, 2.°) por cociente una cantidad también 100 veces menor que 377: luego el cociente pedido es 3'77; resultando acorde con la primera parte de la regla.

Sea ahora el dividendo 45'29 y el divisor 12: dividiendo la cantidad 4529 por 12, la división es inexacta y el cociente completo es $377\frac{5}{12}$; luego dividiendo por 12 la cantidad 45'29, que es

100 veces menor que 4529, resultará un cociente 100 veces menor que el anterior, es decir, resultará $3'77+\frac{5}{12}\times\frac{1}{100}$; y pues $\frac{5}{12}\times\frac{1}{100}$ ó $\frac{5}{12}$ de $\frac{1}{100}$ es menor que $\frac{1}{100}$, vemos que la cantidad 3'77 es el cociente pedido con menor error que $\frac{1}{100}$; y así queda demostrada la segunda parte de la regla.

NOTAS. 1.ª Obsérvese que el cociente decimal inexacto se completa por la regla ordinaria (79, *Corol.* 1.º); pero la unidad á que se refiere el quebrado complementario es del último orden decimal.

2.ª En vez de separar las cifras después de la operación, viene á ser lo mismo el colocar la coma en el cociente, cuando la primera cifra decimal forma parte de un dividendo parcial.

3.ª Como se pueden añadir á la derecha del dividendo cuantos ceros se quieran, sin que sufra alteración (115), se infiere que si la división primitiva es inexacta, se podrá hallar el cociente con menor error que una unidad de un orden decimal cualquiera; y aun sucede á veces que, continuando la operación, resulta un cociente decimal exacto.

Ejemplos.

1.º

251'12	86
791	2'92
172	
00	

2.º

48'278	13
92	3'713
17	
48	
9	

En este segundo ejemplo el cociente 3'713 se diferencia del verdadero en $\frac{9}{13}$ de milésima; pero si se quisiera obtener el cociente con menor error que $\frac{1}{100000}$, hallaríamos dos cifras más añadiendo dos ceros al dividendo y continuando la división.

3.º

5'2663	4
12	1'3165
06	
26	
23	
3	

Aquí tenemos el cociente con menor error que una diezmilésima; pero si se continuara la división añadiendo ceros á la derecha del dividendo, hallaríamos el cociente decimal exacto, 1'316575.

3.er caso. *Para dividir una cantidad entera ó decimal por una* *decimal, se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor; lo que no altera el cociente* (110, 5.°), *y reduce este caso al de la división de enteros ó al caso anterior.*

Ejemplos. 1.° $\frac{113'4}{17'89}=\frac{11340}{1789}$,

$$\begin{array}{r|l} 11340 & 1789 \\ \cline{2-2} 606 & 6\,\frac{606}{1789} \end{array}$$

En el número siguiente se verá cómo puede obtenerse en fracción decimal, complementaria del cociente, la fracción $\frac{606}{1789}$.

2.° $\frac{25'42}{17'8}=\frac{254'2}{178}$,

$$\begin{array}{r|l} 2\,5\,4'2 & 1\,7\,8 \\ \cline{2-2} 7\,6\,2 & 1'4 \\ 5\,0 & \end{array}$$

Se puede continuar esta división añadiendo ceros al dividendo y hallar el cociente con tantas cifras decimales como se quiera.

Nota. Obsérvese que las operaciones con las fracciones decimales son mucho más fáciles que con las fracciones ordinarias, cuyo uso en la práctica ha de concluir en día no lejano.

ARTÍCULO 6.°

Lección 25

REDUCCIÓN DE QUEBRADOS ORDINARIOS Á QUEBRADOS DECIMALES.

X **160.** *Reducir una fracción ordinaria á fracción decimal* es hallar una fracción decimal equivalente á la fracción ordinaria, ó que se diferencie de ella en menos de cualquier cantidad dada, por pequeña que ésta sea.

X *Para reducir una fracción ordinaria á fracción decimal, se divide el numerador por el denominador, y se tendrá la parte entera. Para hallar la parte decimal, se continuará la división, añadiendo un cero á cada residuo.*

Para demostrar esta regla, tomemos la fracción $\frac{24}{7}$, que sabemos (79, *Corol.* 2.°) es el cociente de 24 : 7. Efectuando esta división, hallamos el cociente entero 3 y el resto 3; luego el cociente completo es $3\,\frac{3}{7}$. Observemos ahora que $\frac{3}{7}=\frac{30}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{30}{7}$ de décima, ó 4 décimas y $\frac{2}{7}$ de décima. Ahora, una décima vale 10 centésimas; luego $\frac{2}{7}$ de décima ó $\frac{2}{7}\times\frac{1}{10}=\frac{20}{7}\times\frac{1}{100}$, es decir, $\frac{20}{7}$ de centésima, ó 2 centésimas y $\frac{6}{7}$ de centésima; y así sucesivamente. Vemos que á cada residuo se le añade un cero para continuar la operación.

Si habiendo hallado un cierto número de cifras decimales queda un residuo, el cociente hallado se diferenciará del quebrado propuesto en menos de una unidad del último orden decimal.

Operación.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 3'428 \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array}$$

El cociente completo es $3'428 + \frac{4}{7}$ de milésima; luego 3'428 se diferencia del cociente completo, ó del quebrado propuesto, en menos de una milésima.

Cuando la reducción de un quebrado ordinario á decimal no da cociente exacto, se puede continuar la división tan lejos como se quiera; y por tanto, se puede hallar una fracción decimal que se diferencie del quebrado propuesto en menos de cualquier cantidad, por pequeña que ésta sea.

Ejemplos.

1.° $\frac{5}{8} = 0'625$ exactamente.

2.° $\frac{3}{47} = 0'0638$ en menos de 1 diezmilésima.

3.° $\frac{3}{11} = 0'272727...$ En este caso, después de hallar las dos primeras cifras 2 y 7, resulta 3 de residuo; luego es evidente que, si se continúa la división, las cifras 2 y 7 se repetirán indefinidamente.

4.° $\frac{7}{12} = 0'58333...$ En este ejemplo la cifra 3 se repite continuamente.

121. La fracción decimal, en que un cierto número de cifras se repite periódica é indefinidamente, se llama *fracción decimal periódica*. Se llama *período* el grupo de cifras que se repite continuamente. Fracción periódica *simple* ó *pura* es la fracción decimal cuyo período principia desde las décimas. Fracción periódica *mixta* es la fracción decimal cuyo período no principia desde las décimas.

Así, la fracción 0'272727... es una fracción decimal periódica pura, y 27 es el período. La fracción 0'58333... es una fracción periódica mixta, y su período es 3.

122. *Si una fracción ordinaria no es reducible exactamente á fracción decimal, la fracción decimal equivalente será necesariamente periódica.*

En efecto, los restos de las divisiones parciales son menores que el divisor; luego los restos diferentes que pueden resultar son, cuando más, todos los números enteros inferiores al divisor. Si resultan todos estos restos, es claro que en la división parcial siguiente aparecerá un resto igual á uno *r* de los anteriores; pero ordinariamente, antes de que se escriban por restos todos los números enteros inferiores al divisor, suele reaparecer dicho resto *r*. Llegados á este punto, y siguiendo la operación, resultará en la fracción decimal el mismo grupo de cifras que resultó desde que dicho resto *r* con un cero á la derecha se tomó por dividendo parcial, y aparecerá tercera vez el resto *r*; y continuando, se repetirá el mismo grupo de cifras, y volverá á salir el mismo resto *r*; y así sucesivamente. Vemos, pues, que un grupo de cifras decimales se repite periódica é indefinidamente, y que, por tanto, la fracción decimal es periódica.

Sea, por ejemplo, la fracción ordinaria $\frac{34}{7}$ la que vamos á reducir á fracción decimal.

Operación.

34	7
60	4'857142
40	
50	
10	
30	
20	
6	

En este ejemplo han resultado por restos todos los números enteros inferiores al divisor.

Sea $\frac{15}{28}$ la fracción que se quiere reducir á decimal.

Operación.

150	28
100	0'53571428
160	
200	
040	
120	
080	
240	
16	

En este ejemplo no han resultado más que ocho restos diferentes.

123. *Una fracción ordinaria, no convertible exactamente en decimal, no puede dar una fracción decimal periódica cuyo período sea la única cifra* 9.

Para demostrar este teorema, tenemos $0'999... \times 10 = 9'999...$, ó bien $0'999... \times 9 + 0'999... = 9 + 0'999...$; y restando de los dos miembros de esta igualdad la cantidad $0'999...$, se tendrá $0'999... \times 9 = 9$, y por consiguiente $0'999... = 1$.

Según esto, siendo e un número entero cualquiera, será $e'999... = e + 0'999... = e + 1$. También $e'843999... = \frac{e843'999...}{1000} = \frac{e844}{1000} = e'844$.

Vemos, pues, que las cantidades decimales periódicas, cuyo período es la única cifra 9, son enteras ó decimales exactas; luego si una fracción no es convertible exactamente en decimal, ésta no puede tener por período la única cifra 9.

NOTA. Puesto que la regla para reducir una fracción ordinaria á decimal, nos da la decimal equivalente exacta ó periódica, cuyo período no puede ser la única cifra 9, las cantidades periódicas, cuyo período es 9, no provienen de la reducción de las fracciones ordinarias á decimales, sino de reemplazar una cantidad entera ó decimal exacta por la cantidad equivalente, á saber, la misma cantidad disminuída en una unidad de su último orden y seguida de un número indefinido de nueves, poniendo una coma á la derecha de las unidades simples, si dicha cantidad es entera.

ARTÍCULO 7.°

Leccion 24

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN DECIMAL Á FRACCIÓN ORDINARIA.

124. Hemos visto que al reducir una fracción ordinaria á decimal, ésta puede tener un número limitado de cifras, ser periódica pura ó periódica mixta. Por consiguiente, en la cuestión inversa, que ahora tratamos de resolver, debemos considerar los tres casos siguientes: 1.°, la fracción decimal consta de un número limitado de cifras; 2.°, la fracción decimal es periódica pura; 3.°, la fracción decimal es periódica mixta.

1.er *caso.* Si la fracción decimal consta de un número limitado de cifras, se tendrá su fracción ordinaria equivalente poniendo su denominador de manifiesto.

Ejemplo. $0'3425 = \frac{3425}{10000} = \frac{137}{400}$.

2.° caso. *Si la fracción decimal es menor que la unidad y periódica pura, su fracción* GENERATRIZ, es decir, *la fracción ordinaria* *equivalente, tiene por numerador el periodo, y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el periodo.*

Sea la fracción periódica pura 0'357357357...: decimos que su fracción generatriz es $\frac{357}{999}$.

En efecto, llamemos f á la fracción generatriz de dicha fracción periódica, y tendremos $f = 0'357357357...$ Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por 1000, será

$$1000f = 357'357357357...:$$

la parte decimal de esta cantidad es igual á la fracción propuesta; luego si restamos ordenadamente de esta igualdad la anterior, será $999f = 357$, y partiendo ahora ambos miembros de esta nueva igualdad por 999, será (16) $f = \frac{357}{999}$.

Ejemplo. $0'818181... = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}$.

NOTA. Si la fracción periódica pura es mayor que la unidad, su fracción generatriz se compondrá de la parte entera y del quebrado equivalente á la parte decimal.

Ejemplo. $18'212121... = 18\frac{21}{90} = 18\frac{7}{33} = \frac{601}{33}$.

3.er *caso.* Si la fracción periódica es mixta, se mueve la coma á la derecha de la parte no periódica (*), y al mismo tiempo, para que la fracción no varíe, se divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica; y entonces será fácil hallar la fracción ordinaria equivalente á la decimal propuesta.

Ejemplos. 1.° Sea la fracción periódica mixta 0'435555... Esta fracción es igual á $\frac{43'5555...}{100} = \frac{43\frac{5}{9}}{100} = \frac{43 \times 9 + 5}{900} = \frac{98}{225}$.

2.° Sea la fracción periódica mixta 3'5214646... Esta fraccion es equivalente á $\frac{3521'464646...}{1000} = \frac{3521\frac{46}{99}}{1000} = \frac{3521 \times 99 + 46}{99000} = \frac{2789}{792}$.

3.° Sea la fracción periódica mixta 0'008383... Esta fracción es igual á $\frac{0'8383...}{100} = \frac{\frac{83}{99}}{100} = \frac{83}{9900}$.

125. *El denominador del quebrado irreducible, equivalente á una fracción periódica mixta, contiene al factor 2, al 5 ó á los dos; y el mayor exponente de estos factores es igual al número de cifras de la parte no periódica.*

Sea la fracción periódica mixta, *e'abcmnmnmn...*, en que,

(*) Llamamos *parte no periódica* á la parte decimal anterior al primer período.

para fijar las ideas, la parte no periódica tiene tres cifras a, b, c, y dos m, n el período: e es la parte entera que puede ser 0. Esta fracción equivale á $\frac{eabc + \frac{mn}{99}}{1000} = \frac{eabc \times 99 + mn}{99 \times 1000}$.

El numerador de este quebrado puede escribirse así: $eabc \times (100 - 1) + mn = eabc00 - eabc + mn = eabcmn - eabc$. Descomponiendo 1000 en factores simples, es $1000 = 2^3 . 5^3$; luego el quebrado será $\frac{eabcmn - eabc}{99 \times 2^3 \times 5^3}$. Observemos ahora que las cifras c y n son diferentes; pues si fuesen iguales, la decimal propuesta sería $e,abnmnmn...$, es decir, que la parte no periódica sólo tendría dos cifras, contra lo supuesto: luego efectuando la sustracción indicada en el numerador, éste no terminará en 0, y por tanto no será divisible por 10 ó por 2 y 5 á la vez. Luego simplificando este quebrado todo lo posible, el denominador del quebrado irreducible que resulte contendrá por lo menos uno de los factores 2 y 5, con el exponente 3 igual al número de cifras de la parte no periódica.

126. Además de las tres clases de fracciones decimales que acabamos de considerar, existe una cuarta clase, la cual comprende las fracciones decimales de un número indefinido de cifras y no periódicas. Estas nuevas fracciones decimales no proceden de la conversión de las fracciones ordinarias en decimales; pues ya hemos visto que las fracciones ordinarias no dan más que fracciones decimales limitadas ó periódicas (*). Por tanto, los valores de las nuevas fracciones decimales no pueden hallarse exactamente, pero sí con cuanta aproximación se quiera, por la regla siguiente:

Dada una cantidad decimal, periódica ó no periódica, de un número indefinido de cifras, se obtiene su valor aproximado con menor error que una unidad de un orden cualquiera, despreciando todas las cifras que siguen á la de este orden.

Supongamos, para fijar las ideas, que la fracción decimal 2'4532703... tenga un número indefinido de cifras, y que se quiera hallar su valor con menor error que una diezmilésima. Despreciemos todas las cifras siguientes á la 2 de las diezmilésimas, y decimos que la fracción 2'4532 que queda, se diferenciará de la propuesta en menos de una diezmilésima.

En efecto, la cantidad 0'0000703... que despreciamos, es evidentemente menor que 0'0000999...; y pues 0'999... = 1, será 0'0000999... = 0'0001; es decir, que la cantidad despreciada, ó el error cometido, no llega á una diezmilésima.

(*) Estas nuevas fracciones decimales resultan de la transformación de los números inconmensurables (de que hablaremos más adelante) en decimales.

ARTÍCULO 8.°

CONTINÚA LA REDUCCIÓN DE QUEBRADOS ORDINARIOS Á DECIMALES.

127. *Si el denominador de un quebrado no tiene más factores simples que el 2 y el 5, dicho quebrado puede convertirse exactamente en fracción decimal; y si el quebrado es irreducible, el número de cifras decimales de la fracción decimal equivalente será igual al mayor de los exponentes que tengan 2 y 5 en el denominador.*

1.° Sea el quebrado $\frac{n}{2^4.5^3}$, en cuyo denominador no hay más factores simples que el 2 y el 5: decimos que este quebrado se puede reducir exactamente á fracción decimal.

En efecto, tomemos la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el mayor exponente de 2 y 5 en el denominador del quebrado, en el caso actual 10000, y descompongamos este número en factores simples: será $10000 = 2^4 . 5^4$. Multipliquemos ahora los dos términos del quebrado propuesto por 5, para que los exponentes de 2 y 5 sean iguales, y tendremos $\frac{n}{2^4.5^3} = \frac{n.5}{2^4.5^3.5} = \frac{n.5}{2^4.5^4}$, ó bien $\frac{n}{2^4.5^3} = \frac{n.5}{10000}$, fracción decimal.

2.° Si el quebrado $\frac{n}{2^4.5^3}$ es irreducible, es decir, si n no tiene el factor 2 ni el factor 5, el numerador del quebrado $\frac{n.5}{10000}$ no puede ser divisible por 10; luego, si este quebrado se escribe sin denominador, el número de sus cifras decimales será cuatro (114), número igual al mayor de los exponentes de 2 y 5 en el denominador.

Nota. Si el exponente de 5 fuese mayor que el de 2 en el denominador del quebrado propuesto, la demostración se haría del mismo modo.

128. *Si un quebrado irreducible cuyo denominador no contiene al factor 2 ni al factor 5, se convierte en decimal, la fracción decimal que resulta es periódica pura.*

La fracción decimal equivalente al quebrado irreducible propuesto no puede ser limitada ni periódica mixta, porque ya hemos demostrado que el denominador del quebrado irreducible equivalente á una de estas fracciones decimales contiene al factor 2, al 5 ó á los dos; y en el denominador del quebrado irreducible propuesto no existe ninguno de estos factores. Luego la fracción decimal equivalente al quebrado irreducible propuesto es periódica pura.

Por ejemplo, si se convierte en decimal el quebrado irreducible $\frac{247}{21}$, cuyo denominador no es divisible por 2 ni por 5, resultará una fracción periódica pura.

*129. *Si un quebrado irreducible, cuyo denominador contiene además del factor 2, del 5 ó de ambos algún otro factor primo, se convierte en decimal, resulta una fracción periódica mixta.*

La fracción decimal equivalente á este quebrado no puede ser limitada, porque el denominador del quebrado irreducible equivalente á una fracción decimal limitada, no contiene ningún factor diferente de 2 y 5, y el denominador del quebrado propuesto contiene por lo menos un factor diferente de 2 y 5. Tampoco puede ser pura, porque el denominador del quebrado irreducible equivalente á una fracción decimal periódica pura, no contiene ningún factor 2 ni 5, y el denominador del quebrado propuesto contiene por lo menos uno de esos factores. Luego la fracción decimal equivalente al quebrado irreducible propuesto será periódica mixta.

NOTA. Está demostrado (125) que el número de cifras de la parte no periódica es igual al mayor de los exponentes que tengan 2 y 5 en el denominador del quebrado irreducible equivalente.

Por ejemplo, si se transforma en decimal el quebrado irreducible $\frac{17}{60}$ ó $\frac{17}{2^2 \times 3 \times 5}$, resultará una fracción periódica mixta, cuya parte no periódica tendrá dos cifras.

LIBRO CUARTO.

RAÍCES CUADRADA Y CÚBICA DE LOS NÚMEROS.

CAPÍTULO I.

Leccion 25

NOCIONES PRELIMINARES.

130. Se llama *raiz cuadrada* ó *raiz segunda* de un número, otro número cuyo cuadrado ó cuya segunda potencia es igual al número propuesto.

Así, la raiz cuadrada de 1 es 1, la raiz cuadrada de 4 es 2, la raiz cuadrada de 100 es 10.

Raiz cúbica ó *raiz tercera* de un número es otro número cuyo cubo ó cuya tercera potencia es igual al número propuesto.

Así, la raiz cúbica de 1 es 1, la de 8 es 2, la de 1000 es 10.

Raiz cuarta de un número es otro número cuya cuarta potencia es igual al número propuesto.

Así, la raiz cuarta de 1 es 1, la de 16 es 2, la de 10000 es 10.

Generalizando estas definiciones, diremos que se llama *raiz de cierto grado* de un número, otro número cuya potencia del mismo grado es igual al número propuesto.

Para indicar una raiz de un grado cualquiera de un número, se pone el signo $\sqrt{}$ delante del número, y en la abertura de este signo se coloca una cifra que indica el grado de la raiz: esta cifra se llama *índice* de la raiz.

Así, $\sqrt{9}$ quiere decir la raiz cuadrada ó segunda de 9, y el índice, que en este caso no se escribe, es 2; $\sqrt[3]{16}$ quiere decir la raiz cúbica ó tercera de 16, y el índice es 3.

131. *Una raiz cualquiera de un número menor que 1 es también menor que 1, pero mayor que dicho número; y una raiz cualquiera de un número mayor que 1, es también mayor que 1, pero menor que dicho número.*

1.° Sea $\frac{4}{7}$ el número menor que 1: decimos que una raiz cualquiera de este número, por ejemplo $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$, es menor que 1 y mayor que $\frac{4}{7}$.

En efecto, $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ debe ser un número menor que 1; pues si fuese 1 ó mayor que 1, su cubo no seria $\frac{4}{7}$, sino 1 ó mayor que 1 (111). Tampoco $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ puede ser $\frac{4}{7}$ ni menor que $\frac{4}{7}$, pues el cubo de $\frac{4}{7}$ ó de un número menor que $\frac{4}{7}$ es menor que $\frac{4}{7}$ (111): luego $\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ es menor que 1, pero mayor que $\frac{4}{7}$.

2.° Sea $\frac{7}{4}$ el número mayor que 1: decimos que una raíz cualquiera de este número, por ejemplo su raíz cúbica, es mayor que 1 y menor que el mismo número $\frac{7}{4}$. En efecto, $\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$ debe ser un número mayor que 1; pues si fuese 1 ó menor que 1, su cubo no sería $\frac{7}{4}$, sino 1 ó menor que 1 (111). Tampoco $\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$ puede ser $\frac{7}{4}$ ni mayor que $\frac{7}{4}$, pues el cubo de $\frac{7}{4}$, ó de un número mayor que $\frac{7}{4}$, es un número mayor también que $\frac{7}{4}$ (111); luego $\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$ es mayor que 1, pero menor que $\frac{7}{4}$.

CAPÍTULO II.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA.

ARTÍCULO 1.°

RAÍZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

132. Los cuadrados de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Al contrario, las raíces cuadradas de los números de la segunda de las dos líneas, que acabamos de escribir, son respectivamente los de la primera.

Luego si el número no es mayor que 100, su raíz cuadrada no será mayor que 10; y será fácil hallarla exacta, si el número es alguno de la segunda línea, y sinó la del mayor *cuadrado entero* contenido en el número, la cual se diferenciará de la raíz del número en menos de una unidad.

Así, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{70}$ está comprendida entre 8 y 9; 8 es la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero 64 contenido en 70; y es evidente que 8 se diferenciará de la raíz cuadrado de 70 en menos de 1.

133. *Si la raíz cuadrada de un número entero no es exactamente número entero, tampoco puede ser exactamente número fraccionario; y por tanto, el número no tiene raíz cuadrada exacta.*

Sea 70 el número entero que no tiene raíz cuadrada exacta entera: decimos que tampoco su raíz cuadrada puede ser exactamente un número fraccionario.

Porque si 70 tuviese por raíz cuadrada exacta un número fraccionario, este número estaría comprendido entre los enteros 8 y 9, y sería por ejemplo $8\frac{6}{10}$. Reducido este número mixto á quebrado irreducible, es $\frac{43}{5}$; luego si $\frac{43}{5}$ fuese la raíz cuadrada de 70, sería $\left(\frac{43}{5}\right)^2 = 70$. Pero siendo $\frac{43}{5}$ un quebrado irreducible, $\left(\frac{43}{5}\right)^2$ es otro quebrado irreducible (112): sacaríamos, pues, en consecuencia que un quebrado irreducible sería igual á un número entero; lo que es absurdo (96).

134. En adelante, por la expresión *raíz cuadrada entera* de un número, se entenderá la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en dicho número. Así, la raíz cuadrada entera de 70 es la raíz cuadrada del mayor cuadrado entero 64 contenido en 70, es decir, 8. La raíz cuadrada entera de $10\frac{1}{2}$ es la del mayor cuadrado entero 9 contenido en él, la cual es 3. Para abreviar, diremos á veces también *raíz cuadrada* de un número entero en lugar de raíz cuadrada entera de dicho número entero.

Llamaremos *residuo de la raíz cuadrada* al exceso del número sobre el mayor cuadrado entero contenido en él.

135. Pasemos ahora á hallar la raíz cuadrada entera de un número entero mayor que 100, la cual es mayor que 10, y por tanto tiene más de una cifra. Para esto conviene anteponer tres teoremas.

Teorema 1.° *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Sean los dos números a y b enteros, uno entero y otro fraccionario, ó ambos fraccionarios: decimos que

$$(a+b)^2 \text{ ó } (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

En efecto, puesto que $a+b$ es un número entero ó fraccionario, tendremos (104)

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b);$$

y como puede mudarse el orden de los factores (105), será

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b.$$

Mas $(a+b)a = a^2 + ab$, y $(a+b)b = ab + b^2$; luego

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Corolarios. 1.° *La diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencian en una unidad, es igual al duplo del menor, más* **1**.

Pues si los dos números enteros ó fraccionarios son n y $n+1$, será, según el teorema, $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$; y restando n^2 de ambos miembros, resulta $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, que es lo que queríamos demostrar.

2.° *El residuo de la raiz cuadrada de un número entero, es menor que el duplo de su raiz entera, más 1.*

Sea el número 845: buscando por tanteo su raíz cuadrada entera, hallaremos que es 29; luego el residuo de la raíz cuadrada de 845 es $845 - 29^2$. Siendo 29 la raíz cuadrada entera de 845, es claro que $845 < 30^2$; luego $845 - 29^2 < 30^2 - 29^2$: mas, según el corolario anterior, $30^2 - 29^2 = 2 \times 29 \times 1$; luego $845 - 29^2 < 2 \times 29 + 1$, conforme al enunciado.

3.° Todo número mayor que 10 se compone de decenas y unidades: luego, según el teorema, su cuadrado se compondrá del cuadrado de las decenas, del duplo del producto de las decenas por las unidades y del cuadrado de las unidades.

El número que resulta elevando al cuadrado las decenas, es un número de centenas, y el número que resulta multiplicando el duplo de las decenas por las unidades, es un número de decenas; pues si, por ejemplo, el número es $724 = 72$ decenas $+ 4 = 72 \times 10 + 4$, será $724^2 = (72 \times 10)^2 + 2 \times 72 \times 10 \times 4 + 4^2 = 72^2$ centenas $+ 2 \times 72 \times 4$ decenas $+ 4^2$.

Teorema 2.° *Separando las dos primeras cifras de la derecha de un número, la raiz cuadrada entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raiz cuadrada entera del número propuesto* (*).

Sea el número 32018: separemos las dos primeras cifras de la derecha, y sea a la raiz cuadrada entera del número 320 de la izquierda; decimos que a es el número de decenas de la raiz cuadrada entera del número 32018.

En efecto, el cuadrado a^2 está contenido en 320; luego a^2 cen-

(*) Antes del año 30 todos los autores de Aritmética admitían esta proposición como evidente, pues decian: *Existiendo en el total de centenas de un número el cuadrado de las decenas de la raíz cuadrada, si se extrae la raíz cuadrada entera del total de centenas del número, se tendrán las decenas de la raíz cuadrada de dicho número.* Wantzel, á la edad de 15 años, hizo observar á Reynaud que este razonamiento no es exacto, pues el total de centenas de un número contiene, no solamente las centenas que provienen del cuadrado de las decenas de la raíz cuadrada, sino también las que pueden dar la suma del duplo de decenas por unidades, el cuadrado de unidades y el residuo; y por consiguiente, puede dudarse que la raíz cuadrada entera del total de centenas del número sea mayor que el número de decenas de la raíz cuadrada del número propuesto. Desde entonces se ha demostrado esta proposición, aunque no faltan todavía autores que siguen la antigua rutina.

Wantzel, célebre matemático francés, nació el dia 5 de Junio de 1814, y murió el 21 de Mayo de 1848.

tenas está contenido en 320 centenas y también estaría contenido en el número propuesto, aun cuando éste terminara en dos ceros; luego la raíz cuadrada del número propuesto no es menor que la de a^2 centenas, que es a decenas. El cuadrado $a + 1$ es mayor que 320, y por consiguiente $(a + 1)^2$ centenas será mayor que 320, y por consiguiente $(a + 1)^2$ centenas es un número justo de centenas, su exceso á 320 centenas será una ó más centenas; pero el número propuesto no llega á 321 centenas; luego el número propuesto es menor que $(a + 1)^2$ centenas, y por tanto su raíz cuadrada es menor que $(a + 1)$ decenas. Tenemos, pues, que la raíz cuadrada del número propuesto no es menor que a decenas, y no llega á $(a + 1)$ decenas; luego a es el número de decenas de la raíz cuadrada de dicho número.

Teorema 3.° *Restando de un número entero el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada entera, y dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente entero será las unidades de la raíz ó un número mayor que estas unidades.*

Todo número entero es el cuadrado de su raíz cuadrada entera, sumado con el residuo de la raíz, que puede ser cero: por consiguiente, todo número entero se compone del cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada, del duplo del producto de las decenas por las unidades de la raíz, del cuadrado de estas unidades y del residuo; luego si restamos de dicho número el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada, el resto contendrá las otras tres partes. Como el duplo del producto de las decenas por las unidades es un número justo de decenas, este número de decenas estará contenido en las decenas del resto; pero en éstas existen también las que provienen del cuadrado de las unidades sumado con el residuo. Puede suceder, y es evidente, que la suma del cuadrado de las unidades y el residuo no produzca ninguna decena: en tal caso, las decenas del resto son exactamente el duplo del producto de las decenas por las unidades de la raíz; luego entonces, partiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, factor conocido, se tendrá en el cociente el otro factor, que serán las unidades de la raíz. Si el cuadrado de las unidades, sumado con el residuo, produce un número de decenas menor que el duplo de las de la raíz, es claro que, aun en este caso, dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente entero será las unidades de la raíz. Pero el cuadrado de las unidades, sumado con el residuo, puede producir un número de decenas igual ó mayor que el duplo de las de la raíz (*); luego

(*) En efecto, sea d el número de decenas de la raíz cuadrada del número propuesto, y u la cifra de las unidades: la raíz cuadrada entera de dicho en este caso dividiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, el cociente entero será mayor que las unidades de la raíz.

136. Para comprobar si el cociente entero, que resulta partiendo las decenas del resto por el duplo de las de la raíz, es la cifra de las unidades ó mayor que esta cifra, se eleva al cuadrado el número formado por las decenas de la raíz y por el cociente; y si este cuadrado no es mayor que el número del cual se quiere extraer la raíz cuadrada, el referido cociente no será mayor que las unidades de la raíz; y como, según el teorema último, tampoco puede ser menor, dicho cociente será las unidades de la raíz. Si el cuadrado de la suma de las decenas de la raíz y el cociente fuere mayor que el número cuya raíz cuadrada se trata de hallar, es claro que el cociente será mayor que las unidades de la raíz. En este caso se disminuye en una unidad dicho cociente, y se repite la comprobación.

La comprobación que ahora vamos á explicar es preferible á la anterior, y es la que nosotros seguiremos.

Se coloca el cociente á la derecha del divisor, y éste, así modificado, se multiplica por el mismo cociente; y si el producto no es mayor que el resto, dicho cociente será la cifra de las unidades de la raíz; en el caso contrario, será mayor que esta cifra.

En efecto, colocando el cociente á la derecha del divisor, tendremos el duplo de las decenas más el cociente; y si multiplicamos esta suma por el cociente, el producto será el duplo de las decenas por el cociente y el cuadrado del cociente. Si, pues, este producto no es mayor que el resto, ó sea el número propuesto disminuído en el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada, tendremos, añadiendo á dicho producto y al resto el cuadrado de las decenas, que el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por el cociente y el cuadrado del cociente, compondrán un número que no será mayor que el propuesto; mas, según el teorema (135, 1.°), el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por el cociente y el cuadrado del cociente, componen el cuadrado de la suma de las decenas de la raíz y el cociente: luego esta suma no será mayor que la raíz cuadrada del número propuesto, y por tanto el cociente no será mayor que las unidades de la raíz; como tampoco puede ser

---

número será $d \times 10 + u$. Como el residuo puede llegar hasta $2d \times 10 + 2u$ (135, *Corol.* 2.°), se infiere que el cuadrado de las unidades sumado con el residuo puede llegar á $u^2 + 2d \times 10 + 2u = 2d \times 10 + u\ (u + 2)$; la cantidad $2d \times 10$ es justamente el duplo de las decenas de la raíz, y la $u\ (u + 2)$ puede producir hasta nueve decenas, lo que sucederá cuando u valga 9. Ya se ve, pues, que el cuadrado de las unidades sumado con el residuo puede producir un número de decenas igual ó mayor que el duplo de las de la raíz.

menor, el cociente será las cifras de las unidades de la raíz. Si la suma del duplo de decenas por el cociente y cuadrado del cociente es mayor que el resto, el cual contiene el duplo de decenas por unidades, cuadrado de unidades y residuo, es evidente que el cociente será mayor que las unidades de la raíz.

Se fijarán mejor las ideas de esta demostración, si nos servimos de letras y signos para expresar el razonamiento.

Sea N el número del cual se trata de extraer la raíz cuadrada, d el número de decenas de esta raíz y u la cifra de las unidades de la misma: ésta será $d \times 10 + u$. Sea q el cociente entero de la división de las decenas del resto por el duplo de las de la raíz: colocado este cociente q á continuación del divisor $2d \times 10$, tendremos la suma $2d \times 10 + q$, la cual multiplicada por q nos da el producto $2d \times 10 \times q + q^2$. Esto supuesto, si este producto no es mayor que el resto $N - d^2 \times 100$, añadiendo á uno y otro la cantidad $d^2 \times 100$, tendremos que $d^2 \times 100 + 2d \times 10 \times q + q^2$, no será mayor que N; mas $d^2 \times 100 + 2d \times 10 \times q + q^2 = (d \times 10 + q)^2$; luego $(d \times 10 + q)^2$ no será mayor que N, y por tanto el número formado por la suma de las decenas de la raíz y el cociente no es mayor que la raíz cuadrada del número propuesto; luego dicho cociente no es mayor que las unidades de la raíz; y como, según el teorema (135, 3.°), tampoco puede ser menor, queda demostrado que el cociente es la cifra de las unidades de la raíz cuadrada del número propuesto. Si el producto $2d \times 10 \times q + q^2$ es mayor que el resto, que sabemos es $2d \times 10 \times u + u^2 +$ el residuo, será necesariamente $q > u$.

Nota. Siempre que el cociente sea mayor que la cifra de las unidades de la raíz, se disminuirá en una unidad y se comprobará del mismo modo la nueva cifra.

137. Esto supuesto, hallemos la regla de la extracción de la raíz cuadrada de un número entero, y sea este número 12241730.

Disposición.

1 2.2 4.1 7.3 0	3498
	64
3 2.4	689
6 8 1.7	6988
6 1 6 3.0	
5 7 2 6	

Observemos en primer lugar que, si dividimos el número dado en secciones de á dos cifras principiando por la derecha y extraemos la raíz cuadrada de la primera sección 12 de la izquierda, tendremos 3, que según el teorema (135, 2.°) serán las decenas de la raíz cuadrada del número 1224 formado por las dos primeras secciones de la izquierda. Para hallar las unidades de la raíz cuadrada de 1224, elevemos (135, *Teor.* 3.°) al cuadrado las 3 decenas de dicha raíz; restemos su cuadrado 9 centenas del número 1224, y partamos las 32 decenas del resto por el duplo 6 decenas de las 3 de la raíz; el cociente entero es 5, y para comprobar si esta cifra es ó no la de las unidades de la raíz cuadrada del número 1224, la colocaremos á la derecha del divisor 6; y como el producto de 65 por 5 no se puede restar del número 324, la cifra 5 es mayor que la que buscamos: comprobemos, pues, la cifra 4, y veremos que el producto de 64 por 4 se puede restar del número 324, y que el resto es 68, que es el residuo de la raíz cuadrada de 1224; luego 34 es la raíz cuadrada de este número, y también 34 decenas son las de la raíz cuadrada del número 122417, formado por las tres primeras secciones del número propuesto. Para hallar las unidades de la raíz cuadrada del número 122417, debemos elevar (según el *Teorema* 3.° *del número* 135) las 34 decenas de la raíz cuadrada al cuadrado, y restar este cuadrado de dicho número 122417; mas como hemos restado ya del número 1224 el cuadrado de 34 y han sobrado 68, es claro que si de las 1224 centenas del número 122417 restamos el cuadrado de las 34 decenas, el resto será 68 centenas; luego si del número 122417 restamos el cuadrado de las 34 decenas, el resto será 68 centenas + 17 = 6817. Partiendo ahora las 681 decenas de este resto por el duplo 68 de las 34 de la raíz cuadrada de 122417, el cociente entero es 10; mas como la cifra que se busca no puede ser mayor que 9, tomaremos esta cifra por la que buscamos: comprobándola, como es sabido, encontraremos que dicha cifra es buena, y que el residuo de la raíz cuadrada del número 122417 es 616; luego 349 es la raíz cuadrada de 122417, y 349 decenas son (135, *Teorema* 2.°) las de la raíz cuadrada del número propuesto. Para hallar las unidades de esta raíz cuadrada, elevemos al cuadrado sus 349 decenas, y restemos este cuadrado del número propuesto; mas como hemos restado del número 122417 el cuadrado de 349, y ha resultado el resto 616, es claro que si de las 122417 centenas del número propuesto restamos el cuadrado de las 349 decenas, el resto será 616 centenas, y por tanto el resto queque dará restando del número propuesto al cuadrado de las 349 decenas de su raíz cuadrada será 616 centenas + 30 ó 61630. Esto supuesto, partamos las 6163 decenas de este resto por el duplo 698 de las de la raíz, y el cociente entero es 8: hecha la comprobación de esta cifra, se halla que es buena; que, por lo tanto, 3498 es la raíz cuadrada del número propuesto; y que el residuo de esta raíz es 5726.

138. En vista de las operaciones que hemos hecho para hallar esta raíz cuadrada, podemos enunciar la regla general siguiente:

Para extraer la raiz cuadrada de un número entero mayor que 100, se divide este número en secciones de dos cifras, principiando por la derecha: la primera sección de la izquierda tendrá una sola cifra si los guarismos del número no son pares. Se extrae la raiz cuadrada de la primera sección de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raiz; se eleva esta cifra al cuadrado, y se resta este cuadrado de la primera sección, y al lado del resto se coloca la segunda sección; se separa la primera cifra de la derecha del número que resulta, y se parte el número de la izquierda por el duplo de la primera cifra de la raiz; el cociente entero se coloca á la derecha del divisor; éste, asi modificado, se multiplica por dicho cociente, y el producto se resta del número que forman el dividendo y la cifra separada: si esta sustracción es posible, el referido cociente será la segunda cifra de la raiz; pero si la sustracción es imposible, se disminuirá en una unidad el cociente, y la nueva cifra se comprobará del mismo modo. Hallada la segunda cifra de la raiz y el resto correspondiente, se coloca la tercera sección á la derecha de este resto, se separa la primera cifra de la derecha del número que así resulta, y el número de la izquierda se divide por el duplo del que forman las dos primeras cifras de la raiz; el cociente entero de esta división será la tercera cifra de la raiz ó mayor: se comprueba como la cifra anterior, y se continúa la operación hasta que se haya bajado la primera sección de la derecha, y se hayan hallado la cifra de las unidades de la raiz y el residuo de la misma.

Notas. 1.ª Puede comprobarse la cifra del cociente de la division de las decenas del resto por el duplo de las de la raiz por la regla (22), teniendo en cuenta que hay que colocar dicha cifra á la derecha del divisor.

2.ª Cuando las decenas del resto compongan menor número que el duplo de las de la raiz, la cifra que se busca es 0, y se continúa la operación como en los demás casos.

3.ª Según la regla de la extracción de la raiz cuadrada de un número entero mayor que 100, esta raiz tiene tantas cifras como secciones resultan de dicho número; lo que es fácil demostrar directamente. En efecto, si el número tiene tres ó cuatro cifras, estará comprendido entre 100 y 10000; por consiguiente, su raiz cuadrada estará comprendida entre 10 y 100, es decir, que tendrá dos cifras; si el número tiene cinco ó seis cifras, estará comprendido entre 10000 y 1,000000, y por consiguiente su raiz cuadrada estará comprendida entre 100 y 1000, es decir, que tendrá tres cifras, etc.

4.ª Debiendo ser el residuo de la raiz cuadrada menor que el duplo de la raiz, más 1 (135, *Corol.* 2.º), si en algún caso se encuentra un resto igual ó mayor que esta suma, la cantidad hallada por raiz cuadrada será menor que la raiz verdadera, pues siendo el número propuesto igual al cuadrado de dicha cantidad más el resto, se ve que el cuadrado de esta cantidad estará contenido en el número propuesto: luego dicha cantidad no será mayor que la raíz cuadrada verdadera; tampoco será la raíz verdadera, porque si lo fuese, el residuo sería menor que el duplo de la raíz, más 1. Luego la cantidad hallada por raíz, que no es mayor que la raíz verdadera, ni tampoco la verdadera, será menor que ésta.

Así, si al extraer la raíz cuadrada entera de 1385, escribiésemos equivocadamente 2 por primera cifra de la raíz, el residuo correspondiente, que sería 9, número mayor que 2 × 2, nos advertiría que la cantidad 2 tomada por raíz cuadrada de 13 era demasiado pequeña; y si al hallar la segunda cifra de la raíz escribiéramos 6 para segunda cifra, el residuo 89, número mayor que 2 × 36, nos advertiría también que 6 era cifra demasiado pequeña (*).

Ejemplos de raíces cuadradas.

1.°	2 3.8 7	48
	7 8.7	88
	0 8 3	

2.°	8.4 1	29
	4 4.1	49
	0 0 0	

3.°	1 8.3 0.3 9	247
	2 3.0	82
	6 6 3.9	847
	7 1 0	

4.°	7.3 1.6 1.2 9	2704
	3 3.1	470
	0 2 6 1 2.9	5404
	4 5 1 3	

139. Es muy casual que un número entero tomado á arbitrio sea *cuadrado perfecto*, es decir, tenga raíz cuadrada exacta; pues siendo el cuadrado de 1000 1.000000, no hay en el primer millón

(*) *Si el residuo de la raíz cuadrada de un número entero es igual ó menor que la raíz entera, ésta se diferenciará de la raíz verdadera en menos de $\frac{1}{2}$; y si el residuo es mayor que la raíz entera, ésta, aumentada en 1, excederá á la raíz verdadera en menos de $\frac{1}{2}$.*

1.° Sea N el número, a su raíz cuadrada entera y r el residuo: será $N = a^2 + r$. Siendo $r \leqq a$, será $r < a + \frac{1}{4}$: luego $N < a^2 + a + \frac{1}{4}$; y pues $a^2 + a + \frac{1}{4} = (a+\frac{1}{2})^2$, será $N < (a+\frac{1}{2})^2$, y $\sqrt{N} < a + \frac{1}{2}$. Luego $\sqrt{N}$ está comprendida entre a y $a + \frac{1}{2}$; por tanto, la raíz entera a se diferencia de $\sqrt{N}$ en menos de $\frac{1}{2}$.

2.° Siendo $r > a$, excederá r á la raíz entera a por lo menos en 1, puesto de números enteros más que mil que tengan raíz cuadrada exacta; los 999000 restantes no tienen raíz cuadrada exacta. Muchas veces se conoce que un número no es cuadrado perfecto, sin necesidad de extraer su raíz cuadrada; como lo vamos á ver.

El cuadrado de un número entero no puede terminar en 2, 3, 7 *ni* 8.

Pues si las cifras de las unidades de un número entero son

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$

multiplicando dicho número por sí mismo, las cifras de las unidades del cuadrado serán respectivamente

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1;$$

es decir, que el cuadrado del número no termina en 2, 3, 7 ni 8.

Corolario. *Un número entero no es cuadrado perfecto cuando la primera cifra de su derecha es* 2, 3, 7 *ú* 8.

140. *Si un cuadrado perfecto es divisible por un número primo, también es divisible por la segunda potencia de dicho número primo.*

Sea r la raíz cuadrada del número cuadrado perfecto: este cuadrado perfecto será r^2 ó $r \times r$. Sea d un número primo divisor del cuadrado perfecto r^2: decimos que d^2 será también divisor de r^2.

En efecto, siendo por hipótesi el número primo d divisor de $r \times r$, es también divisor de r (69): luego si llamamos q al cociente de la división de r por d, será $r = dq$, y por consiguiente $r^2 = dq \times dq$; y pues (107) $dq \times dq = dqdq = ddqq = dd \times qq = d^2q^2$, será $r^2 = d^2q^2$, igualdad que manifiesta que r^2 es divisible por d^2.

Corolario. *Un número entero que sea divisible por un número primo y no lo sea por el cuadrado de este número primo, no es cuadrado perfecto.*

Así, si un número es divisible por 2 y no por 4; por 3 y no por 9; por 5 y no por 25, etc., no es cuadrado perfecto. Por ejemplo, los números 1414, 2100, 2045, etc., de los que el 1.° es divisible por 2 y no por 4, el 2.° es divisible por 3 y no por 9, el 3.° es divisible por 5 y no por 25, etc., no son cuadrados perfectos.

---

que r y a son enteros; luego con mayor razón será $r > a + \frac{1}{4}$, y por consiguiente $N > a^2 + a + \frac{1}{4}$, ó $N > (a + \frac{1}{2})^2$, y $\sqrt{N} > a + \frac{1}{2}$; es decir, que $\sqrt{N}$ está comprendida entre $a + \frac{1}{2}$ y $a + 1$; luego $a + 1$ excede á $\sqrt{N}$ en menos de $\frac{1}{2}$.

Por ejemplo, siendo 21 la raíz cuadrada entera de 458 y 17 el residuo, 21 se diferencia de la raíz cuadrada completa de 458 en menos de $\frac{1}{2}$; y siendo 34 la raíz cuadrada entera de 1211 y 55 el residuo, 35 excederá á la raíz cuadrada verdadera de 1211 en menos de $\frac{1}{2}$.

141. *Un número entero que termina en un número impar de ceros no es cuadrado perfecto;* pues un número cuya primera cifra de la derecha no sea un cero, elevado al cuadrado, da un número cuya primera cifra de la derecha no es un cero, y un número que termina en uno ó más ceros, elevado al cuadrado, da un número que termina en un número par de ceros. Vemos, pues, que un número entero cualquiera, elevado al cuadrado, no da un número que termina en un número impar de ceros; luego si un número entero termina en un número impar de ceros, no es cuadrado perfecto.

El cuadrado de todo número impar, mayor que 1, *es múltiplo de* 8 *aumentado en* 1.

En efecto, todo número impar, mayor que 1, puede representarse por $2n + 1$, siendo n par ó impar según los casos; luego su cuadrado será $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1$. Si n es par, será $n = 2p$, y por consiguiente $(2n + 1)^2 = 8p(2p + 1) + 1$, es decir, múltiplo de 8, más 1. Si n es impar, será $n = 2p + 1$, y por consiguiente $(2n + 1)^2 = 4(2p + 1)(2p + 2) + 1 = 8(2p + 1)(p + 1) + 1$, múltiplo de 8, más 1.

Corolario. *Todo número impar que disminuido en* 1 *no sea múltiplo de* 8, *no es cuadrado perfecto;* pues admitiendo que dicho número impar sea cuadrado perfecto, su raíz cuadrada no podrá ser un número par, porque si tal fuera, el número propuesto sería divisible por 4 (140, *Corol.*), contra lo supuesto. Si fuese número impar la raíz cuadrada del número propuesto, éste sería un múltiplo de 8, más 1; ó lo que es igual, disminuido en 1, sería múltiplo de 8, contra lo supuesto. Luego el número propuesto no es cuadrado perfecto.

Así, los números 5301, 5125, 2789, que disminuidos en 1 no son múltiplos de 8, no son cuadrados perfectos.

Si un número, en que la cifra de las unidades es 5, *no tiene al* 2 *por cifra de las decenas, no es cuadrado perfecto.*

Pues si la cifra de las decenas es diferente de 2 ó de 7, el número no será divisible por 25 (46), y por tanto no será cuadrado perfecto (140, *Corol.*) Si la cifra de las decenas es 7, disminuyendo en 1 dicho número, las dos cifras de la derecha compondrán el número 74, el cual no es divisible por 4, y por tanto el número propuesto disminuido en 1 no será divisible por 4, y mucho menos lo será por 8; luego, según el corolario anterior, el número propuesto no será cuadrado perfecto. Queda, pues, demostrado que si la cifra de las decenas de un número que acaba en 5 no es 2, dicho número no puede ser cuadrado perfecto.

ARTÍCULO 2.º

RAÍCES CUADRADAS DE LOS QUEBRADOS.—RAÍCES INCONMENSURABLES.

X **142.** *La raiz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos tienen raiz cuadrada exacta, es igual á la raiz cuadrada del numerador, dividida por la raiz cuadrada del denominador.*

En efecto, $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, pues $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ (111).

X **143.** *Si alguno de los términos de un quebrado irreducible no tiene raiz cuadrada exacta, el quebrado no puede tener raiz cuadrada exacta.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{17}{9}$, cuyo numerador no tiene raíz cuadrada exacta: decimos que este quebrado no tiene raíz cuadrada exacta.

Desde luego se ve que $\frac{17}{9}$ no puede tener por raíz cuadrada exacta un número entero, pues un número entero elevado al cuadrado daría también un número entero, el cual no puede ser igual al quebrado irreducible $\frac{17}{9}$ (96).

Admitamos ahora que la raíz cuadrada de $\frac{17}{9}$ sea un número fraccionario: reducido este número fraccionario á quebrado irreducible, su cuadrado sería igual á $\frac{17}{9}$, y como este cuadrado sería también quebrado irreducible (112), su numerador será igual á 17 (95); luego 17 tendría raíz cuadrada exacta, lo que es contrario á la hipótesi.

Del mismo modo se demuestra el teorema, si el numerador del quebrado irreducible tiene raíz cuadrada exacta y el denominador no, ó si ninguno de los dos términos tiene raíz cuadrada exacta.

144. Las raices de cualquier grado, de números enteros ó fraccionarios que no tienen exacta la raiz de que se trate, se llaman *raices inconmensurables.*

Así, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{17}{9}}$ son raíces cuadradas inconmensurables.

X X **145.** *Hallar el valor de una raiz inconmensurable en menos de una parte alicuota de la unidad,* como en menos de $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{1000}$, etc., *es hallar un número que se diferencia de la raiz inconmensurable en menos que dicha parte alicuota.*

✓ X **146.** *Para hallar el valor de una raiz cuadrada inconmensurable en menos de una parte alicuota de la unidad, se multiplica el número por el cuadrado del denominador de dicha parte alicuota, se extrae la* *raiz cuadrada entera del producto; y esta raiz se divide por el mismo denominador.*

Sea $\sqrt{8}$ la raiz cuadrada inconmensurable (*), cuyo valor queremos hallar en menos de $\frac{1}{7}$. Multipliquemos 8 por 7^2; extraigamos la raiz cuadrada entera del producto $8 \,.\, 7^2$ ó 392, la cual es 19, y decimos que $\frac{19}{7}$ se diferencia de $\sqrt{8}$ en menos de $\frac{1}{7}$.

En efecto, 8×7^2 está comprendido entre 19^2 y 20^2; luego $\frac{8.7^2}{7^2}$, ó su igual 8, estará comprendido entre $\frac{19^2}{7^2}$ y $\frac{20^2}{7^2}$; luego $\sqrt{8}$ estará comprendidida entre las raices cuadradas de estos dos quebrados, las cuales son $\frac{19}{7}$ y $\frac{20}{7}$; y pues entre estos últimos quebrados hay $\frac{1}{7}$ de diferencia, es claro que $\sqrt{8}$ se diferencia de $\frac{19}{7}$ en menos de $\frac{1}{7}$.

Ejemplos.

1.° Extraer la raiz cuadrada de 5, de manera que el error no llegue á $\frac{1}{11}$.

Cálculo.

$$5 \times 11^2 = 6.05 \quad \begin{array}{|l} 24 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20.5 \\ 29 \end{array}$$

Luego $\sqrt{5} = \frac{24}{11}$ en menos de $\frac{1}{11}$.

Es preferible hallar los valores aproximados de las raices cuadradas inconmensurables en quebrados decimales á hallarlos en quebrados ordinarios, por dos razones: 1.ª, porque la operación por decimales es muchísimo más fácil que por quebrados ordinarios; 2.ª, porque al hallar la raiz cuadrada de un número entero, puede suceder que no se sepa de antemano si éste tiene ó no raiz cuadrada exacta; y en tal caso, siendo la aproximación por decimales, se considera al número como cuadrado perfecto; y si resulta residuo, se continúa la operación escribiendo dos ceros á la derecha de cada residuo, y al fin se separan tantas cifras de la derecha de la raiz como pares de ceros se han añadido. Esta ventaja no existe cuando el valor aproximado de la raiz inconmensurable se halla en quebrados ordinarios.

(*) En vez del número 8 se puede tomar otro número cualquiera entero ó fraccionario que no tenga raiz cuadrada exacta.

2.° Extraer la raíz cuadrada de 4123 en menos de $\frac{1}{100}$ si no la tiene exacta.

4 1.2 3.0 0.0 0	6421
5 2.3	124
2 7 0.0	1282
1 3 6 0.0	12841
7 5 9	

Luego $\sqrt{4123} = 64'21$ en menos de $\frac{1}{100}$.

3.° Extraer la raíz cuadrada de 3'8 en menos de $\frac{1}{100}$.

Cálculo. $3'8 \times 10000 = 3.8\,0.0\,0$

3.8 0.0 0	194
2 8.0	29
1 9 0.0	384
3 6 4	

Luego $\sqrt{3'8} = 1'94$ en menos de $\frac{1}{100}$.

4.° Hallar la raíz cuadrada de 0'0048, siendo $\frac{1}{1000}$ el límite del error.

Cálculo. $0'0048 \times 1000000 = 4\,8.0\,0$

4 8.0 0	69
1 2 0.0	129
3 9	

Luego $\sqrt{0'0048} = 0'069$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

5.° Hallar la raíz cuadrada de $\frac{3}{4}$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

Cálculo. $\frac{3}{4} \times 1000000 = 7\,5.0\,0.0\,0$

7 5.0 0.0 0	866
1 1 0.0	176
1 0.4 0.0	1726
4 4	

Luego $\sqrt{\frac{3}{4}} = 0'866$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

6.° Extraer la raíz cuadrada de $\frac{2}{3}$ aproximada hasta las centésimas.

Cálculo. $\frac{2}{3} \times 10000 = \frac{20000}{3} = 6666\,\frac{2}{3}$.

Despreciando el quebrado $\frac{2}{3}$ (147), y hallando la raíz cuadrada entera de 6666, resulta 81; luego $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0'81$ en menos de $\frac{1}{100}$.

147. *La raiz cuadrada entera de un número mixto* (*) *es igual á la raiz cuadrada entera de su número entero.*

(*) Ya se supone que el quebrado del mixto ha de ser menor que 1.

Sea $25\frac{5}{7}$ el número mixto, en el cual el entero es cuadrado perfecto: el número mixto $25\frac{5}{7}$ está comprendido entre los dos cuadrados enteros consecutivos 25 y 36; luego su raíz cuadrada estará comprendida entre 5 y 6, y por consiguiente 5, raíz cuadrada del número 25, es la raíz cuadrada entera del número mixto $25\frac{5}{7}$. Sea ahora $30\frac{5}{7}$ el mixto, en el cual el entero no es cuadrado perfecto: 30 está comprendido entre los cuadrados enteros consecutivos 25 y 36, y $30\frac{5}{7}$ está también comprendido entre los mismos cuadrados; luego la raíz cuadrada de $30\frac{5}{7}$ está comprendida entre 5 y 6; y por tanto 5, raíz cuadrada entera de 30, es la raíz cuadrada entera de $30\frac{5}{7}$.

ARTÍCULO 3.º

RAÍZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS.

148. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, cuyos dos términos tienen raíz cuadrada exacta, se extrae la raíz de los dos, y se divide la del numerador por la del denominador* (124).

Ejemplos. $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{11}{5}$.

Si alguno de los términos del quebrado, siendo éste irreducible, no tiene raíz cuadrada exacta, la raíz es inconmensurable (143 y 144); y hemos dado ya la regla para hallar esta raíz con la aproximación que se quiera. Pero también se pueden obtener las raíces cuadradas de los quebrados que se hallen en este caso, reduciéndolos primeramente á fracciones decimales, y aplicando la regla (146). Si el quebrado no se puede reducir exactamente á decimal, el número de cifras decimales que se tome en la fracción decimal equivalente ha de ser duplo del número de cifras decimales que ha de tener la raíz, pues mayor número de cifras es innecesario; y si se tomase menor número de cifras, la raíz entera del producto de esta cantidad por el cuadrado del denominador de la parte alícuota, límite del error, pudiera ser demasiado pequeña.

Ejemplo. Extraer la raíz cuadrada de $\frac{2}{3}$ aproximada hasta centésimas.

Como la raíz ha de tener dos cifras decimales, al reducir $\frac{2}{3}$ á fracción decimal, tomaremos las cuatro primeras cifras 0'6666; multiplicando esta cantidad por 10^4, el producto es 6666, cuya raíz cuadrada entera es 81, y por tanto 0'81 es la raíz cuadrada de $\frac{2}{3}$ aproximada hasta las centésimas.

Para extraer la raíz cuadrada de un número mixto, se reduce á quebrado, y en seguida se extrae la raíz del quebrado.

Ejemplo. $\sqrt{5\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{38}{7}} = 2'329...$

CAPÍTULO III.

EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CÚBICA.

ARTÍCULO 1.°

Lección 29

RAÍCES CÚBICAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

X X **149.** Los cubos de los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

son respectivamente

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

Al contrario, las raíces cúbicas de los números de la segunda línea son los números de la primera.

Luego si un número no es mayor que 1000, su raíz cúbica no será mayor que 10, y será fácil hallarla exacta si el número es alguno de la segunda línea; y si no, la del mayor cubo *entero* contenido en el número, la cual se diferenciará de la raíz cúbica de éste en menos de una unidad.

Así, $\sqrt{125} = 5$, $\sqrt[3]{70}$ está comprendida entre 4 y 5: 4 es la raíz cúbica del mayor cubo entero contenido en 70, que es 64; y es evidente que 4 se diferencia de $\sqrt{70}$ en menos de 1.

150. *Si la raíz cúbica de un número entero no es exactamente número entero, tampoco puede ser exactamente número fraccionario, y por tanto el número no tiene raíz cúbica exacta.*

Sea 70 el número entero que no tiene raíz cúbica exacta en enteros: decimos que tampoco puede tener raíz cúbica exacta en números fraccionarios.

Porque si 70 tuviese por raíz cúbica exacta un número fraccionario, este número estaría comprendido entre los enteros 4 y 5, y sería, por ejemplo, $4\frac{6}{10}$. Reducido este número mixto á quebrado irreducible, es $\frac{23}{5}$; luego si $\frac{23}{5}$ fuese la raíz cúbica de 70, sería $\left(\frac{23}{5}\right)^3 = 70$. Pero siendo $\frac{23}{5}$ un quebrado irreducible,

$\left(\frac{23}{5}\right)^3$ es otro quebrado irreducible (112); sacaríamos, pues, en consecuencia que un quebrado irreducible sería igual á un número entero; lo que es absurdo.

151. En adelante, por la expresión *raiz cúbica entera* se entenderá la raíz cúbica del mayor cubo entero contenido en el número. Así, la raíz cúbica entera de 70 es la del mayor cubo entero 64 contenido en él. La raíz cúbica entera de $23\frac{1}{2}$ es la del mayor cubo entero 8 contenido en él.

Por abreviar, diremos á veces *raiz cúbica* de un número entero, que no tiene raíz cúbica exacta, en vez de raíz cúbica entera de dicho número. Llamaremos *residuo de la raiz cúbica* al exceso de un número entero sobre el mayor cubo entero contenido en él.

152. Pasemos ahora á hallar la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000, la cual tiene más de una cifra, porque es mayor que 10. Para esto, conviene anteponer tres teoremas.

Teorema 1.° *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Sean los números a y b; decimos que

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En efecto, $(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$; pero hemos demostrado (135) que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; luego $(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$. Para efectuar esta multiplicación, consideraremos á $a + b$ como un número, y por tanto (104) $(a + b)^3 = a^2 (a + b) + 2ab (a + b) + b^2 (a + b)$, ó $(a + b)^3 = (a + b) a^2 + (a + b). 2ab + (a + b) b^2 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Corolarios. 1.° *La diferencia de los cubos de dos números, que se diferencian en una unidad, es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más* 1.

Pues si los números son n y $n + 1$, tendremos, según el teorema, $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, y restando n^3 de ambos miembros, será $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$, conforme al enunciado.

2.° *El residuo de la raiz cúbica de un número entero es menor que el triplo del cuadrado de su raiz cúbica entera, más el triplo de la misma raiz, más* 1.

Sea el número 13937, cuya raíz cúbica entera se hallará por tanteo, y es 24; el residuo es $13937 - 24^3$, número menor que $25^3 - 24^3$, puesto que $13937 < 25^3$; y como según el corolario 1.°, $25^3 - 24^3 = 3.24^2 + 3.24 + 1$, será $13937 - 24^3 < 3.24^2 + 3.24 + 1$, conforme al enunciado.

3.° Todo número mayor que 10 se compone de decenas y

Ayza

unidades; luego, según el teorema, su cubo se compondrá del cubo de las decenas, del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y del cubo de las unidades.

El número que resulta elevando al cubo las decenas es un número de millares; el número que resulta multiplicando el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades es un número de centenas, y el número que resulta multiplicando el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades es un número de decenas: pues si el número es, por ejemplo, $329 = 32$ decenas $+ 9 = 32 \times 10 + 9$, será $329^3 = (32 \times 10)^3 + 3 \times (32 \times 10)^2 \times 9 + 3 \times 32 \times 10 \times 9^2 + 9^3 = 32^3$ millares $+ 3 \times 32^2 \times 9$ centenas $+ 3 \times 32 \times 9^2$ decenas $+ 9^3$.

Teorema 2.° *Separando las tres primeras cifras de la derecha de un número, la raiz cúbica entera del número de la izquierda es el número de decenas de la raiz cúbica entera del número propuesto.*

Sea el número 78403192; separemos las tres primeras cifras de la derecha, y sea a la raiz cúbica entera del número 78403: decimos que a es el número de decenas de la raiz cúbica del número propuesto.

En efecto, el cubo a^3 está contenido en 78403; luego a^3 millares está contenido en 78403 millares, y también estaría contenido en el número propuesto, aun cuando las tres primeras cifras de la derecha de éste fuesen tres ceros: luego la raiz cúbica del número propuesto no es menor que la de a^3 millares, que es a decenas. El cubo de $a + 1$ es mayor que 78403, y por consiguiente $(a + 1)^3$ millares será mayor que 78403 millares; y como este cubo es un número justo de millares (*Corol.* 3.°), su exceso á 78403 millares será uno ó más millares; pero el número propuesto es menor que 78404 millares: luego el número propuesto es menor que $(a + 1)^3$ millares, y por tanto su raiz cúbica es menor que $(a + 1)$ decenas. Tenemos, pues, que la raiz cúbica del número propuesto no es menor que a decenas, y no llega á $(a + 1)$ decenas; luego a es el número de decenas de la raiz cúbica del número propuesto.

Teorema 3.° *Restando de un número entero el cubo de las decenas de su raiz cúbica, y dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las centenas de la raiz, el cociente entero será las unidades de la raiz, ó un número mayor que estas unidades.*

El número propuesto es el cubo de su raiz cúbica entera sumado con el residuo, el cual puede ser 0: por consiguiente, dicho número se compone del cubo de las decenas de su raiz cúbica, del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, del cubo de las unidades y del residuo; luego si restamos del mismo número el cubo de las decenas de su raíz cúbica, el resto contendrá las otras cuatro partes. Como el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades es un número justo de centenas, este número estará contenido en las centenas del resto; pero en éstas existen también las que pueden provenir de la suma del triplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de unidades y el residuo. Es claro que podrá suceder que esta suma produzca un número de centenas menor que el de las que contiene el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz; y en tal caso, dividiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente entero será las unidades de la raíz. Pero también la referida suma puede producir un número de centenas mayor que el de las contenidas en el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz (*), y en este caso el cociente entero, ya dicho, será mayor que las unidades de la raíz.

153. Para comprobar si el cociente entero, que resulta partiendo las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, es la cifra de las unidades ó mayor que esta cifra, se eleva al cubo el número formado por las decenas de la raíz sumadas con dicho cociente; y si este cubo no es mayor que el número cuya raíz cúbica se quiere hallar, dicho cociente no será mayor que las unidades de la raíz, y como, según el teorema último, tampoco es menor, resulta que el mismo cociente será las unidades de la raíz. Si el referido cubo es mayor que el número cuya raíz cúbica se quiere hallar, la cifra en cuestión será mayor que la de unidades de la raíz: en este caso se disminuye en una unidad dicha cifra, y se repite la comprobación.

154. Hallar la regla de la extracción de la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000.

Sea el número cuya raíz cúbica queremos hallar, 46651573.

(*) En efecto, si d es el número de decenas de la raíz cúbica del número propuesto, y u es de la cifra de las unidades, la raíz cúbica entera de dicho número será $d \times 10 + u$: la suma de las tres partes, triplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de unidades y residuo, será $3d \times 10 \times u^2 + u^3 +$ residuo; y como (152, *Corol.* 2.°) el residuo puede llegar á $3(d \times 10 + u)^2 + 3(d \times 10 + u)$, se infiere que dicha suma puede llegar á $3d \times 10 \times u^2 + u^3 + 3d^2 \times 10^2 + 6d \times 10 \times u + 3u^2 + 3d \times 10 + 3u = 3d^2 \times 10^2 + 3d \times 10\,(u^2 + 2u + 1) + u^3 + 3u^2 + 3u$; luego dividiendo esta cantidad por $3d^2 \times 10^2$, triplo del cuadrado de sus decenas, el cociente es $1 \times \frac{(u+1)^2}{d \times 10} + \frac{u^3 + 3u^2 + 3u}{3d^2 \times 10^2}$, cantidad mayor que 1, y que puede ser mucho mayor, según los valores de d y u. Si, por ejemplo, son $d = 1$ y $u = 4$, la parte entera de esta cantidad será 3; 3 serán, pues, las unidades de más que en este caso tendrá el cociente, como puede comprobarse extrayendo la raíz cúbica del número $14^3 + 3.14^2 + 3.14 = 3374$.

Disposición.

			4 6.6 5 1.5 7 3	359	359
			2 7		359
37	36	35			
37	36	35	1 9 6.5 1	27	3231
			4 2 8 7 5		1795
259	216	175			1077
111	108	105	3 7 7 6 5.7 3	3675	
			4 6 2 6 8 2 7 9		128881
1369	1296	1225			359
37	36	35	3 8 3 2 9 4		
					1159929
9583	7776	6125			644405
4107	3888	3675			386643
50653	46656	42875			46268279

Si dividimos el número dado en secciones de á tres cifras principiando por la derecha, y extraemos la raíz cúbica de la primera sección 46 de la izquierda, tendremos 3, que (*según el teorema* 2.°, *número* 132) serán las decenas de la raíz cúbica del número 46651 formado por las dos primeras secciones de la izquierda. Para hallar las unidades de la raíz cúbica de este número 46651, elevemos (132, *teor.* 3.°) al cubo las 3 decenas de su raíz cúbica, y restando su cubo 27 millares de dicho número 46651, y partiendo las 196 centenas del resto 19651 por el triplo del cuadrado de las tres decenas, que es 27 centenas, el cociente entero de esta división es 7. Para comprobar si esta cifra es la de las unidades de la raíz cúbica del número 46651, ó mayor, elevemos al cubo el número 37; y como el cubo de este número es 50653, inferiremos que la cifra 7 es demasiado grande; tomemos ahora el 6 por cifra de las unidades de la raíz cúbica del número 46651, y elevemos al cubo el número 36, y como este cubo es mayor que 46651, inferiremos también que 6 es mayor que las unidades. Tomemos ahora el 5 por cifra de las unidades de la raíz cúbica del número 46651, y elevando al cubo el número 35, hallaremos que este cubo es 42875, menor que 46651: luego 5 es la cifra de las unidades, y 35 es la raíz cúbica de 46651; luego (*en virtud del teorema* 2.°, *número* 132) 35 son las decenas de la raíz cúbica del número propuesto 46651573. Para hallar las unidades de la raíz cúbica, restemos del número el cubo de las 35 decenas de su raíz cúbica, el cual cubo es 42875 millares, siendo el resto 3776573, y partamos las centenas de este resto por el triplo del cuadrado de las 35 decenas de la raíz, que es 3675 centenas: el cociente entero es 10, pero es claro que la cifra que buscamos no puede ser mayor que 9. Tomemos, pues, el 9 por cifra de las unidades, y elevemos al cubo el número 359, y hallaremos que este cubo es 46268279, número menor que

$\sqrt{825} = 9{\cdot}24$

el propuesto; y por tanto 9 es la cifra de las unidades de la raíz cúbica de este número; 359 es su raíz cúbica, y el residuo 383294.

155. En vista de las operaciones que acabamos de hacer para la extracción de la raíz cúbica del número 46651573, y observando que de las tres cifras de las secciones que hemos bajado solamente la primera de cada sección es la que forma parte de los sucesivos dividendos, podemos enunciar la regla general siguiente:

Lección 27

Lección

Para extraer la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000, se divide dicho número en secciones de á tres cifras, principiando por la derecha: la primera sección de la izquierda podrá tener una ó dos cifras. Se extrae la raíz cúbica de la primera sección de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raíz; se resta el cubo de esta cifra de la primera sección; al lado del resto se coloca la primera cifra de la segunda sección, y el número que resulta se divide por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz: para comprobar si el cociente entero de esta división es la segunda cifra de la raíz, ó mayor que esta segunda cifra, se eleva al cubo el número formado por la primera cifra de la raíz y por dicho cociente, y si este cubo puede restarse del número que forman las dos primeras secciones de la izquierda, el cociente será la segunda cifra de la raíz; pero si el referido cubo es mayor que el número formado por las dos primeras secciones, el cociente será mayor que la cifra segunda; se disminuirá este cociente en una unidad, y la nueva cifra se comprobará del mismo modo. Hallada la segunda cifra de la raíz, y restando el cubo del número que forman las dos primeras cifras, del número que componen las dos primeras secciones de la izquierda, se baja al lado del resto la primera cifra de la tercera sección, y el número que resulta se divide por el triplo del cuadrado del que forman las dos primeras cifras de la raíz: se comprueba si el cociente entero es ó no la tercera cifra de la raíz, como se comprobó el anterior, y se continúa de este modo hasta que se haya bajado la primera cifra de la última sección, y hallado la última cifra de la raíz y el resto correspondiente, que será el residuo de la raíz cúbica del número propuesto.

NOTAS. 1.ª Si uno de los dividendos fuere menor que el divisor respectivo, la cifra que se buscará será 0. En este caso se bajarán á la derecha del último dividendo las dos cifras de la sección, que no se han bajado antes, y la primera de la sección siguiente; es decir, que se bajarán las tres cifras siguientes, y se continuará la operación como en los demás casos.

2.ª Según la regla de la extracción de la raíz cúbica de un número entero mayor que 1000, esta raíz tiene tantas cifras como secciones tenga el número; lo que es fácil demostrar directamente. En efecto, si el número tiene cuatro, cinco ó seis cifras, en cuyo caso tendrá dos secciones, estará comprendido entre 1000 y

1.000000, y por consiguiente su raíz cúbica estará comprendida entre 10 y 100; es decir, que tendrá dos cifras. Si el número tiene siete, ocho ó nueve cifras, y por consiguiente tres secciones, estará comprendido entre 1.000000 y 100.000000, y por tanto su raíz cúbica estará comprendida entre 100 y 1000; es decir, que tendrá tres cifras, etc.

3.ª Debiendo ser el residuo de la raíz cúbica menor que el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la raíz, más 1, si alguna vez se encuentra un resto igual ó mayor que esta suma, la cantidad hallada por raíz cúbica será menor que la raíz cúbica verdadera; pues siendo el número propuesto igual al cubo de dicha cantidad más el resto, se ve que el cubo de esta cantidad está contenido en el número propuesto; luego la misma cantidad no será mayor que la raíz cúbica verdadera: tampoco será la raíz cúbica verdadera, porque si lo fuese, el residuo sería menor que el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la raíz, más 1. Luego la cantidad hallada por raíz cúbica, que no es mayor que la raíz verdadera ni tampoco es la verdadera, será menor que ésta.

Así, si al extraer la raíz cúbica del número 34789 escribiésemos equivocadamente 2 por primera cifra de la raíz cúbica, el residuo correspondiente, que sería 26, número mayor que $3.2^2 + 3.2$, nos advertiría que la cifra 2 era demasiado pequeña; y si al hallar la segunda cifra de la raíz cúbica tomásemos el 1 por segunda cifra, el residuo 2998, número mayor que $3 \times 31^2 + 3 \times 31$, nos advertiría también que la cantidad 31 tomada por raíz cúbica del número propuesto era demasiado pequeña.

Ejemplos de raices cúbicas.

1.°	22.987	28 ;	2.°	71.519.197	415 ;	3.°	29.557.502	309
	8			64			27	
	149	12		75	48		25575	2700
	21952			68921			29503629	
	1035			25981	5043		53873	
				71473375				
				045822				

156. Es sumamente raro que un número entero señalado arbitrariamente sea *cubo perfecto*, es decir, tenga raíz cúbica exacta: pues siendo 1.000000 el cubo de 100, no hay en el primer millón de números enteros más que 100 que tengan raíz cúbica exacta, mientras que los 999900 restantes no la tienen.

He aquí dos reglas análogas á las de los números (140 y 141, *Corol.*), por medio de las cuales se conocerá, á veces, sin necesidad de extraer la raíz cúbica de un número, que éste no es cubo perfecto.

1.ª *Un número entero que sea divisible por un número primo, y no lo sea por el cuadrado y cubo de este número primo, no es cubo perfecto.*

2.ª *Un número que termine en una serie de ceros no divisible por 3, no es cubo perfecto.*

Se demuestran estas dos reglas de un modo semejante al que se siguió en la demostración de las dos reglas de los números (140 y 141, *Corol.*)

ARTÍCULO 2.°

Lección 18

RAÍCES CÚBICAS DE LOS QUEBRADOS.—RAÍCES INCONMENSURABLES.

157. *La raiz cúbica de un quebrado, cuyos dos términos tienen raiz cúbica exacta, es igual á la raiz cúbica del numerador partida por la raiz cúbica del denominador.*

En efecto, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$, pues $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$ (111).

158. *Si alguno de los dos términos de un quebrado irreducible no tiene raiz cúbica exacta, el quebrado no puede tener raiz cúbica exacta.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{17}{27}$, cuyo numerador no tiene raíz cúbica exacta: decimos que este quebrado no tiene raíz cúbica exacta.

Desde luego se ve que $\frac{17}{27}$ no puede tener por raíz cúbica exacta un número entero; pues un número entero elevado al cubo daría también un número entero, el cual no puede ser igual al quebrado irreducible $\frac{17}{27}$ (96).

Admitamos ahora que la raíz cúbica de $\frac{17}{27}$ sea un número fraccionario: reducido este número fraccionario á quebrado irreducible, su cubo sería igual á $\frac{17}{27}$; y como este cubo sería también quebrado irreducible (112), su numerador sería igual á 17 (95): luego 17 tendría raíz cúbica exacta, lo que es absurdo.

Del mismo modo se demuestra el teorema, si el numerador del quebrado irreducible tiene raíz cúbica exacta y el denominador no, ó si ninguno de los dos términos tiene raíz cúbica exacta.

NOTA. Las raíces cúbicas de números enteros, que no son cubos de otros enteros, y las raíces cúbicas de quebrados irreducibles, cuyos dos términos no tienen á la vez raíz cúbica exacta, son *raíces cúbicas inconmensurables* (150, 158 y 144).

159. *Para hallar el valor de una raiz cúbica inconmensurable en menos de una parte alícuota de la unidad, se multiplica el número por* *el cubo del denominador de dicha parte alícuota, se extrae la raíz cúbica entera del producto, y esta raíz se divide por el mismo denominador.*

Sea $\sqrt[3]{6}$ la raíz cúbica inconmensurable (*), cuyo valor queremos hallar en menos de $\frac{1}{7}$: el producto 6.7^3 es 2058, y su raíz cúbica entera es 12: decimos que $\frac{12}{7}$ se diferencia de $\sqrt[3]{6}$ en menos de $\frac{1}{7}$.

En efecto, 6×7^3 está comprendido entre 12^3 y 13^3; luego $\frac{6.7^3}{7^3}$, ó su igual 6, estará comprendido entre $\frac{12^3}{7^3}$ y $\frac{13^3}{7^3}$; luego $\sqrt[3]{6}$ estará comprendida entre las raíces cúbicas de estos dos quebrados, los cuales son (157) $\frac{12}{7}$ y $\frac{13}{7}$: y pues entre estos últimos quebrados hay $\frac{1}{7}$ de diferencia, es claro que $\sqrt[3]{6}$ se diferenciará de $\frac{12}{7}$ en menos de $\frac{1}{7}$.

Ejemplos.

1.° Extraer la raíz cúbica de 5 en menos de $\frac{1}{11}$.

Cálculo.

$$
\begin{array}{r|l}
5 \times 11^3 = 6.6\,5\,5 & 18 \\ \cline{2-2}
5.6 & 3 \\
5\,8\,3\,2 & \\ \cline{1-1}
8\,2\,3 &
\end{array}
$$

Luego $\sqrt[3]{5} = \frac{18}{11}$ en menos de $\frac{1}{11}$.

Se prefiere hallar los valores aproximados de las raíces cúbicas inconmensurables en quebrados decimales, en vez de hallarlos en quebrados ordinarios, por dos razones: 1.ª, porque la operación por decimales es muchísimo más fácil que por quebrados ordinarios; 2.ª, porque al hallar la raíz cúbica de un número entero, puede suceder que no se sepa de antemano si el número tiene ó no raíz cúbica exacta; y en tal caso, siendo la aproximación por decimales, se considera el número como cubo exacto; y si resulta residuo, se añaden á la derecha del número tantas secciones de á tres ceros como decimales ha de tener la raíz; se continúa la operación, y al fin se separa de la derecha de la raíz dicho número de cifras decimales. Esta ventaja no existe cuando el valor aproximado de la raíz inconmensurable se halla en quebrados ordinarios.

(*) En vez del número 6 se puede tomar otro número cualquiera entero ó fraccionario que no tenga raíz cúbica exacta.

2.° Hallar la raíz cúbica de 4123 en menos de $\frac{1}{100}$, si no la tiene exacta.

4.1 2 3.0 0 0.0 0 0	1603
3 1	3
4 0 9 6	
2 7 0 0 0 0	76800
4 1 1 9 0 8 3 2 2 7	
0 0 0 3 9 1 6 7 7 3	

Luego $\sqrt[3]{4123} = 16'03$ en menos de $\frac{1}{100}$.

3.° Extraer la raíz cúbica de 5'27, siendo $\frac{1}{100}$ el límite del error.

5.2 7 0.0 0 0	174
4 2	3
4 9 1 3	
0 3 5 7 0	867

Luego $\sqrt[3]{5'27} = 1'74$ en menos de $\frac{1}{100}$.

4.° Extraer la raíz cúbica de 0'00345 en menos de $\frac{1}{100}$.

3.4 5 0.0 0 0	151
2 4	3
3 3 7 5	
7 5 0	675

Luego $\sqrt[3]{0'00345} = 0'151$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

5.° Extraer la raíz cúbica de $\frac{3}{8}$ en menos de $\frac{1}{100}$.

$\frac{3}{8} \times 1000000 = \frac{3000000}{8} = 3\;7\;5.0\;0\;0$ | 72

3 7 5.0 0 0	72
3 4 3	
0 3 2	147

Luego $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 0'72$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

160. *La raíz cúbica entera de un número mixto es igual á la raíz cúbica entera de su número entero* (*).

Sea $27\frac{5}{7}$ el número mixto, en el cual el entero es cubo exacto: decimos que la raíz cúbica entera de $27\frac{5}{7}$ es igual á la raíz cúbica de 27, la cual es 3.

(*) Se supone que el quebrado que acompaña al entero es menor que 1.

En efecto, el número mixto 27 $\frac{5}{7}$ está comprendido entre los dos cubos enteros consecutivos 27 y 64; luego la raíz cúbica de dicho número mixto estará comprendida entre las raíces cúbicas 3 y 4 de 27 y 64; y por consiguiente 3, raíz cúbica de 27, es la raíz cúbica entera del número mixto 27 $\frac{5}{7}$.

Sea ahora 60 $\frac{5}{7}$ el mixto, en el cual el entero no es cubo exacto: vamos á demostrar que la raíz cúbica entera de 60 $\frac{5}{7}$ es igual á la raíz cúbica entera de 60.

En efecto, 60 está comprendido entre los cubos enteros consecutivos 27 y 64, y 60 $\frac{5}{7}$ está también comprendido entre los mismos cubos; luego la raíz cúbica de 60 $\frac{5}{7}$ está comprendida entre las raíces cúbicas 3 y 4 de 27 y 64; luego 3, raíz cúbica entera del número 60, es la raíz cúbica entera de 60 $\frac{5}{7}$.

4.° Extraer la raíz cúbica de $\frac{2}{3}$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

Cálculo. $\frac{2000000}{3} = 666666\ \frac{2}{3}$.

Despreciando el quebrado $\frac{2}{3}$, y hallando la raíz cúbica entera de 666666, resulta 87; luego $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0'87$ en menos de $\frac{1}{100}$.

ARTÍCULO 3.°

RAÍCES CÚBICAS DE LOS QUEBRADOS ORDINARIOS.

161. *Para extraer la raiz cúbica de un quebrado, cuyos dos términos tienen raiz cúbica exacta, se extrae la raiz de los dos, y se divide la del numerador por la del denominador* (157).

Ejemplos. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[3]{\frac{729}{125}} = \frac{9}{5}$.

Si alguno de los términos del quebrado, siendo éste irreducible, no tiene raíz cúbica exacta, la raíz es inconmensurable (158): ya hemos dado la regla (159) para hallar esta raíz con la aproximación que se quiera. Pero también se pueden hallar las raíces cúbicas de los quebrados que se hallan en este caso, reduciéndolos primeramente á decimales, y aplicando en seguida la regla (159). Si el quebrado no se puede reducir exactamente á decimal, el número de cifras decimales que se tomen ha de ser triplo del número de cifras decimales que ha de tener la raíz; pues mayor número es innecesario, y menor número daría quizá un resultado erróneo.

Para extraer la raiz cúbica de un número mixto, se reduce éste á quebrado, y luego se extrae la raiz cúbica del quebrado.

Ejemplo. $\sqrt[3]{5\ \frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{38}{7}} = 1'757...$

Ituza

LIBRO QUINTO.

PROPORCIONES.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

162. Se llama *razón* de dos números el cociente de dichos números. Así, la razón de 8 á 4 es 2, la razón de 3 á 5 es $\frac{3}{5}$.

Para indicar la razón de dos números a y b, se escriben $a : b$, ó $\frac{a}{b}$, y se lee a es á b, ó a partido por b.

El primer término de la razón, ó el dividendo, toma el nombre de *antecedente*, y el segundo, ó el divisor, el de *consecuente;* y como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, será también el antecedente igual al consecuente multiplicado por la razón.

Se llama *proporción* la reunión de cuatro números, tales que la razón de los dos primeros es igual á la de los segundos. Así, los números 24, 12, 16 y 8 forman una proporción, pues la razón del primero al segundo, que es 2, es la misma que la del tercero al cuarto.

Igualmente los cuatro números $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{21}{10}$ forman una proporción; pues la razón $\frac{25}{21}$ del primero al segundo es la misma que la del tercero al cuarto.

Para indicar que cuatro números 24, 12, 16 y 8 forman proporción, se escribe

$$24 : 12 :: 16 : 8,$$

y se enuncia así: 24 es á 12 como 16 es á 8.

Como el cociente ó la razón de los dos primeros números es igual al cociente ó á la razón de los dos últimos, la proporción puede escribirse de este otro modo: $\frac{24}{12} = \frac{16}{8}$, y se enunciará como antes, ó diciendo 24 dividido por 12 es igual á 16 dividido por 8.

CAPÍTULO II.

PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.

163. *En toda proporción el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.*

Sea la proporción $a : b :: c : d$,
cuyos términos pueden ser números enteros ó números fraccionarios (*). Sea q la razón del primer término al segundo, y por consiguiente también la del tercero al cuarto. Como cada antecedente es igual á su consecuente multiplicado por la razón, será $a = bq$, $c = dq$; luego la proporción será

$$bq : b :: dq : d.$$

El producto de los extremos es bqd, y el de los medios bdq, y ya se sabe (105) que estos dos productos, compuestos de los mismos factores, son iguales.

164. *Dados tres términos de una proporción, hallar el cuarto.*

Pueden suceder dos casos: 1.°, que el término desconocido sea un extremo de la proporción; 2.°, que el término desconocido sea un medio.

1.*er caso.* Sea la proporción $a : b :: c : x$.

Hemos demostrado que $ax = bc$; luego (16) x es el cociente de la división bc por a, esto es, $x = \frac{bc}{a}$.

Luego: *Para hallar un término extremo de una proporción, se multiplican los términos medios y el producto se parte por el extremo conocido.*

Ejemplo. $3 : 5 :: 17 : x = \frac{5 \times 17}{3} = 28\frac{1}{3}$.

2.° *caso.* Sea la proporción $a : x :: b : c$.

Tenemos $ac = bx$; luego $x = \frac{ac}{b}$.

Luego: *Para hallar un término medio de una proporción, se multiplican los extremos y se parte el producto por el medio conocido.*

Ejemplo. $7 : 23 :: x : 17$, $x = \frac{7 \times 17}{23} = 5\frac{4}{23}$.

165. Se llama proporción *continua* la proporción cuyos términos medios son iguales, como la siguiente:

$$5 : 10 :: 10 : 20.$$

En la proporción continua el término medio se llama *medio proporcional* entre los extremos.

(*) En todas las proporciones que siguen supondremos que los términos son números enteros ó fraccionarios: más adelante se harán extensivas las propiedades, que ahora demostremos, á las proporciones de números inconmensurables.

Así, 10 es medio proporcional entre 5 y 20.

Corolario del teorema (163). *El cuadrado de un medio proporcional entre dos números es igual al producto de estos dos números;* pues si la proporción es $a : b :: b : c$, en la cual b es medio proporcional entre los números a y c, tendremos $b^2 = ac$.

NOTA. Siendo $b^2 = ac$, es $b = \sqrt{ac}$. Luego: *Para hallar un medio proporcional entre dos números, se extrae la raíz cuadrada del producto de dichos números.*

Ejemplo. Hallar un medio proporcional entre los números 5 y 45.

El medio proporcional será $\sqrt{5 \times 45} = \sqrt{225} = 15$.

En la proporción continua el cuarto término se llama *tercero proporcional* al primero y segundo términos.

166. Teorema recíproco del (163) (*). *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, hay proporción entre ellos; siendo extremos de la proporción los factores de un producto, y medios los factores del otro.*

Si tenemos $a \times d = b \times c$, decimos que tendremos la proporción $a : b :: c : d$.

En efecto, sea q la razón $a : b$, será $a = bq$; luego $bq \times d = b \times c$, ó $b \times dq = bc$, y de aquí resulta $c = dq$, es decir, que la razón $c : d$ es q, la misma que la $a : b$. Siendo iguales las dos razones $a : b$ y $c : d$, tendremos la proporción

$$a : b :: c : d.$$

167. Según este principio, dada una proporción, se podrán permutar sus términos medios, é invertir los cuatro, sin que estos términos dejen de formar proporción.

Sea la proporción $3 : 6 :: 2 : 4$. Permutando los medios será $3 : 2 :: 6 : 4$.

Estos números forman proporción, pues el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

(*) Un teorema es *recíproco* de otro, cuando la conclusión é hipótesi del uno son hipótesi y conclusión del otro.

No siempre es cierto un teorema recíproco de otro; pero cuando lo es puede demostrarse por el método de reducción al absurdo (47, *Nota*); y las más veces este método de demostración es muy natural para los teoremas recíprocos de otros demostrados ya.

He aquí demostrado por reducción al absurdo el teorema (166).

Admitamos que las razones $a : b$ y $c : d$ no sean iguales: será una de ellas, $a : b$ por ejemplo, mayor que la otra. Siendo $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, multiplicando ambas razones por bd, será también $\frac{a}{b} \cdot bd > \frac{c}{d} \cdot bd$, ó $\frac{a}{b}\, b.d > \frac{c}{d}\, d.b$, ó $ad > cb$; lo que es contrario á la hipótesi, y por consiguiente absurdo. Luego las dos razones $a : b$ y $c : d$ son iguales; ó bien es cierto que $a : b :: c : d$.

Invirtiendo los términos de estas proporciones, tendremos

$$6 : 3 :: 4 : 2,$$
$$2 : 3 :: 4 : 6.$$

En estos dos casos los cuatro números forman también proporción, pues en ambos se verifica que el producto de los términos extremos es igual al de los medios.

168. *Se pueden multiplicar ó dividir por un número cualquiera, entero ó fraccionario, un extremo y un medio de una proporción, sin que los nuevos números dejen de formar proporción.*

Sea la proporción $a : b :: c : d,$

y sea m un número entero ó fraccionario: decimos que

$$am : b :: cm : d, \text{ y que } \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d.$$

En efecto, permutando los medios de la proporción propuesta será $a : c :: b : d.$

Ahora, siendo la razón $a : c = am : cm$, y también $a : c = \frac{a}{m} : \frac{c}{m}$ (110), tendremos

$$am : cm :: b : d, \qquad \frac{a}{m} : \frac{c}{m} :: b : d;$$

y permutando los medios de estas proporciones, resultan

$$am : b : cm : d, \qquad \frac{a}{m} : b :: \frac{c}{m} : d.$$

En virtud de la primera parte de este teorema se pueden quitar los denominadores de una proporción; y en virtud de la segunda parte se puede simplificar una proporción, si un extremo y un medio tienen un factor común, suprimiendo este factor común.

Así, la proporción $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} :: x : \frac{5}{8}$ será, multiplicando el extremo $\frac{3}{4}$ y el medio $\frac{2}{3}$ por un múltiplo de los denominadores 3 y 4, por ejemplo 12, que es su menor múltiplo,

$$9 : 8 :: x : \frac{5}{8}.$$

Multiplicando ahora por 8 el término medio 8 y el extremo $\frac{5}{8}$, será $9 : 64 :: x : 5,$

de donde resulta $x = \frac{45}{64}.$

La proporción $8 : 11 :: 20 : x$ se puede simplificar, dividiendo el extremo 8 y el medio 20 por su máximo común divisor 4, y resulta $2 : 11 :: 5 : x, \quad x = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}.$

169. *Si dos proporciones tienen una razón común, las otras dos razones forman proporción;* pues siendo estas dos razones iguales á la razón común, son iguales entre sí.

170. *Si se multiplican ordenadamente los términos de varias proporciones, los productos forman proporción.*

Sean las proporciones

$$a\ :b\ ::c\ :d,$$
$$a'\ :b'\ ::c'\ :d',$$
$$a''\ :b''\ ::c''\ :d'',$$

tendremos las igualdades

$$ad = bc,\quad a'd' = b'c',\quad a''d'' = b''c'',$$

y por consiguiente

$$ad \times a'd' \times a''d'' = bc \times b'c' \times b''c'',$$

ó bien (106) $\qquad aa'a'' \times dd'd'' = bb'b'' \times cc'c'',$

y de aquí resulta la proporción

$$aa'a'' : bb'b'' :: cc'c'' : dd'd''.$$

Corolario. *Las potencias del mismo grado de los cuatro términos de una proporción forman también una proporción.*

Sea la proporción $\qquad a : b :: c : d;$

decimos que, por ejemplo, las terceras potencias de estos términos forman también proporción, es decir, que

$$a^3 : b^3 :: c^3 : d^3.$$

En efecto, escribamos tres veces la proporción propuesta:

$$a : b :: c : d,\quad a : b :: c : d,\quad a : b :: c : d.$$

Multiplicando estas tres proporciones ordenadamente, resulta

$$a^3 : b^3 :: c^3 : d^3.$$

171. En toda proporción: *La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es al* $\left\{\begin{matrix}\textit{consecuente}\\ \textit{antecedente}\end{matrix}\right\}$, *como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es al* $\left\{\begin{matrix}\textit{consecuente}\\ \textit{antecedente}\end{matrix}\right\}$.

Sea la proporción $\qquad a : b :: c : d;$

decimos que $\qquad a + b : b :: c + d : d,$

y que $\qquad a + b : a :: c + d : c.$

En efecto, de la proporción propuesta resulta

$$ad = bc.$$

Añadiendo á los dos miembros de esta igualdad el producto bd de los consecuentes, será

$$ad + bd = bc + bd,$$

ó bien $\qquad (a + b)\,d = (c + d)\,b,$

de donde resulta la proporción

$$a + b : b :: c + d : d.$$

Queda demostrada la primera parte.

La segunda parte se demuestra con igual facilidad, añadiendo á los dos miembros de la igualdad $ad = bc$ el producto ac de los antecedentes.

172. En toda proporción: *La diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón es al* $\left\{\begin{matrix}\textit{consecuente}\\ \textit{antecedente}\end{matrix}\right\}$, *como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es al* $\left\{\begin{matrix}\textit{consecuente}\\ \textit{antecedente}\end{matrix}\right\}$.

Pueden ocurrir dos casos: 1.°, que los antecedentes sean mayores que los respectivos consecuentes; 2.°, que los antecedentes sean menores que los consecuentes.

1.er *caso.* De la proporción

$$a : b :: c : d$$

resulta $$ad = bc;$$

restando de ambos miembros el producto bd de los consecuentes, será $$ad - bd = bc - bd,$$

ó (104) $$(a - b)\,d = (c - d)\,b,$$

de donde resulta la proporción

$$a - b : b :: c - d : d.$$

Queda demostrada la primera parte.

Para demostrar la segunda, restemos de los dos miembros de la igualdad $ad = bc$ el producto ac de los antecedentes, y continuemos la demostración como en el caso anterior.

2.° *caso.* Si los antecedentes son menores que los consecuentes, invirtiendo la proporción $a : b :: c : d$, tendremos (160) esta otra proporción:

$$b : a :: d : c;$$

luego, según el primer caso, será

$$b - a : a :: d - c : c,$$

y también

$$b - a : b :: d - c : d.$$

173. En toda proporción: *La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es á su diferencia, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es á su diferencia.*

En efecto, acabamos de demostrar que de la proporción $a : b :: c : d$ se deducen estas otras dos:

$$a + b : b :: c + d : d,$$
$$a - b : b :: c - d : d \text{ (*)}.$$

Permutando los medios de estas dos proporciones, tendremos

$$a + b : c + d :: b : d, \quad a - b : c - d :: b : d,$$

y por consiguiente

$$a + b : c + b :: a - b : c - d,$$
$$a + b : a - b :: c + d : c - d,$$

que es el enunciado del teorema.

174. *En una serie de razones iguales la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Consideremos dos casos: 1.°, que las razones iguales sean dos; 2.°, que las razones iguales sean tres ó más.

1.er *caso.* Sean las dos razones iguales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Permutando

---

(*) Si los antecedentes fuesen menores que los consecuentes, escribiríamos $b - a : b :: d - c : d$.

los medios de esta proporción, será $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (167), y por consiguiente (171)

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d};$$

y permutando los medios de esta proporción, resulta

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d},$$

que es el enunciado del teorema.

2.° *caso.* Sean las razones iguales

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}:$$

para fijar las ideas, suponemos que son cuatro.

De la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ resulta, según el primer caso,

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d};$$

y como $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, será

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{e}{f}.$$

De esta otra proporción resulta, según el primer caso,

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{e}{f}; \text{ y como } \frac{e}{f} = \frac{g}{h}, \text{ será } \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{g}{h}.$$

De esta proporción resulta, según el primer caso,

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{g}{h}.$$

175. Nota. Siempre que una proporción tenga dos términos incógnitos, uno extremo y otro medio, y se conozca la suma ó la diferencia de los mismos, podremos deducir de la proporción los valores de las dos incógnitas con más sencillez que por el Algebra.

Supongamos que se tenga la proporción

$$x : y :: a : b,$$

y que además se conozca la suma s, de x é y, esto es,

$$x + y = s.$$

De la proporción dada deducimos (171) las proporciones

$$x+y : x :: a+b : a,$$
$$x+y : y :: a+b : b,$$

ó

$$s : x :: a+b : a,$$
$$s : y :: a+b : b,$$

de las cuales resultan

$$x = \frac{as}{a+b}, \quad y = \frac{bs}{a+b}.$$

Si fuese conocida la diferencia $x - y = d$, la proporción nos daría (172)

$$x-y : x :: a-b : a,$$
$$x-y : y :: a-b : b,$$

ó

$$d : x :: a-b : a,$$
$$d : y :: a-b : b,$$

y por consiguiente $x = \frac{ad}{a-b}, \quad y = \frac{bd}{a-b}.$

PARTE SEGUNDA.

APLICACIONES USUALES DE LA ARITMÉTICA, ó CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

LIBRO PRIMERO.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

SISTEMA ANTIGUO DE MEDIDAS Y PESAS MÁS USUALES EN ESPAÑA.

176. La unidad que se tome para medir ó pesar una cantidad debe ser proporcionada á esta cantidad; es decir, la unidad debe ser grande cuando la cantidad sea grande; mediana ó chica, si la cantidad se halla en el mismo caso: así se consigue el expresar las cantidades por números enteros de pocas cifras ó por quebrados propios cuyo denominador no sea muy grande. De lo contrario, las cantidades estarían representadas por números muy grandes, ó por quebrados muy pequeños, y en ambos casos sería difícil el escribirlos, expresarlos, formarse idea de ellos, y someterlos á operaciones ulteriores. Así, por ejemplo, antiguamente al querer medir la distancia entre Madrid y París, no se tomaba por unidad la vara ni el pie, ni mucho menos la pulgada, etc., pues en cualquiera de estos casos hubiera resultado un número muy grande para valor de dicha distancia; pero tomando por unidad la legua, se obtenía un número muy cómodo. Por el contrario, si se quería saber cuál era el largo de una sala ó la altura de un edificio, no se tomaba por unidad la legua, sino la vara ó el pie.

Ya se ve, pues, la necesidad de que existan varias unidades de diferente tamaño para la medición de las cantidades.

En todas las provincias de España, y aun en pueblos de una misma provincia, se usan aún medidas y pesas diferentes (*), á pesar de la Real orden de 26 de Enero de 1801, y de la ley de 19 de Julio de 1849, que mandan uniformar dichas medidas y pesas.

(*) Véase al fin de este tratado la correspondencia entre las medidas y pesas de las diferentes provincias de España, con las métricas.

Las que señaló dicha Real orden son, sin embargo, las que más se generalizaron en España, distinguiéndolas con el nombre de *pesas y medidas de Castilla.*

MEDIDAS LINEALES Ó DE LONGITUD DE CASTILLA (*).

Como modelo ó patrón de estas medidas servía la *vara* conservada en el archivo de la ciudad de Burgos.

La *legua* era de 20000 pies ó 6666 $\frac{2}{3}$ varas; el *estadal* de 12 pies ó 4 varas: la *vara* de 3 pies, 36 pulgadas ó 48 dedos; el *pie* de 12 pulgadas ó 16 dedos; la *pulgada* de 12 líneas, y el *dedo* de 9 líneas.

La legua se dividía en medias leguas y cuartos de legua; y la vara en medias varas ó *codos*, y en cuartas ó *palmos.*

MEDIDAS DE LONGITUD USADAS EN LA MARINA.

La *legua marina* ó de 20 al grado tiene tres millas, 6646 varas ó 19938 pies; la *milla* 1108 brazas; el *cable* 120 brazas; la *braza* 6 pies, y el *codo de ribera* 2 pies y 9 líneas, ó 33 dedos.

NOTA. Suele suponerse que la legua marina tiene 20000 pies, y que por tanto la milla tiene 1111 brazas; pero en tal caso estos pies serían menores que los de Burgos. Es fácil deducir de la relación que tiene el *metro* con la vara, que la legua de 20 al grado tiene 19938'4 pies de Burgos.

MEDIDAS DE CAPACIDAD DE CASTILLA PARA LOS ÁRIDOS.

Como patrón de estas medidas servía la media *fanega* conservada en el archivo de la ciudad de Avila.

El *cahiz* era de 12 fanegas, la *fanega* de 12 celemines, el *celemin* de 4 cuartillos.

La fanega se dividía en medias fanegas y cuartillas de fanega, el celemín en medios celemines, y el cuartillo en mitades sucesivas.

MEDIDAS DE CASTILLA PARA LOS LÍQUIDOS.

Como patrón de estas medidas servía la *cántara* conservada en el archivo de la ciudad de Toledo.

El *moyo* era de 16 cántaras ó arrobas, la *cántara* de 8 azumbres, la *azumbre* de 4 cuartillos, y el *cuartillo* de 4 copas.

La cántara se dividía en medias cántaras y en cuartillas, la azumbre en medias azumbres, y el cuartillo en medios cuartillos.

El aceite se arreglaba al peso.

(*) La palabra *medida* tiene varios sentidos en las Matemáticas: comunmente se llama así el valor numérico de las cantidades concretas. *Medida común* de varias cantidades concretas de la misma naturaleza es cualquier cantidad concreta contenida exactamente en todas ellas. Pero el sentido actual de la palabra *medidas* es el vulgar, esto es, el de unidades concretas.

La *arroba de aceite* era de 25 libras, y la *libra* de 4 panillas ó cuarterones.

La arroba de aceite se dividía en medias arrobas y en cuartillas; la cuartilla en medias cuartillas; la libra en medias libras y la panilla en medias panillas.

PESAS DE CASTILLA.

Como patrón de estas pesas servía el *marco* conservado en el archivo del Consejo de Castilla.

La *tonelada de peso* era de 20 quintales, el *quintal* de 4 arrobas ó 100 libras, la *arroba* de 25 libras, la *libra* de 2 *marcos* ó 16 onzas, la *onza* de 16 adarmes, 48 tomines ó 576 granos, el *adarme* de 3 tomines, y el *tomín* de 12 granos.

En medicina y farmacia la *libra* tenía 12 onzas, la *onza* 8 dracmas ó 576 granos, la *dracma* 3 escrúpulos, y el *escrúpulo* 24 granos.

MONEDAS ANTIGUAS DE ESPAÑA.

De oro. La *onza* valía 16 duros ó 320 reales, la *media onza* 160 reales, la *moneda* de 4 duros 80 reales, la de dos duros 40 reales, la de un duro 20 reales, y existió también la de 21 ¼ reales ó *coronilla vieja*. Son más modernas la *moneda* de 100 reales ó 10 escudos, la de 40 reales ó 4 escudos y la de 20 reales ó 2 escudos.

De plata. El *duro* valía 20 reales, el *medio duro* 10 reales, la *peseta* 4 reales, la *media peseta* 2 reales, y el *real* que se contaba por 8 ½ cuartos ó 34 maravedís. Hubo también la *peseta columnaria* de 5 reales, la *media peseta columnaria* de 2 ½ reales y el *real columnario* de 1 ¼ reales. Son posteriores la pieza de 2 escudos, la de 1 *escudo* ó 10 reales, la de 40 *centésimas*, la de 20 *centésimas* y la de 10 *centésimas de escudo.*

De cobre. La pieza de 2 cuartos, el *cuarto* que valía 2 ochavos y el *ochavo* de 2 maravedís, siendo en los últimos tiempos el *maravedí* moneda imaginaria. La pieza de medio real ó 50 céntimos de real, la de cuartillo ó 25 céntimos de real, la de 10 céntimos de real y la de 5 céntimos de real, han existido hasta 1870.

MONEDAS MODERNAS DE ESPAÑA.

La *base* del sistema monetario actual es la *peseta*, que pesa 5 *gramos* (V. el sistema métrico) de una pasta formada con nueve partes de plata y una de cobre. Se han acuñado monedas de oro de 25, 20 y 10 pesetas; de plata de 5, 2, 1, 0'50 y 0'20 pesetas, y de bronce de 10, 5, 2 y 1 céntimos de peseta, estando representado cada céntimo por un gramo de la aleación.

UNIDADES DE TIEMPO ADMITIDAS EN TODOS LOS PUEBLOS CIVILIZADOS.

El *siglo* tiene 100 años, el *lustro* 5 años, el *año* 12 meses, el *mes común* 30 días, el *día* 24 horas, la *hora* 60 minutos y el *minuto* 60 *segundos.*

NOCIONES DE GEOMETRÍA NECESARIAS PARA LA INTELIGENCIA DE LAS MEDIDAS CUADRADAS Y CÚBICAS.

177. Se llama *superficie* de un cuerpo ú objeto material el límite ó término de dicho cuerpo.

El término ó linde de una superficie se llama *línea.*

Las líneas se dividen en *rectas, quebradas* y *curvas.*

La línea *recta* ó *derecha* es conocida por todos: tal es el borde de una regla bien construída, un hilo tirante, etc.

Línea *quebrada* es la línea compuesta de dos ó más líneas rectas, sin ser toda una sola recta: tal es la *ABCD* (*fig.* 1).

Línea *curva* es aquella línea de la que ninguna porción, por pequeña que sea, es línea recta: tal es la *AB* (*fig.* 2).

Se llama *distancia* entre dos puntos, la línea recta comprendida entre ellos.

Se llama *plano* ó *superficie plana* toda superficie con la cual coincida el borde de una regla bien construida, aplicada á dicha superficie en cualquier sentido. Tal es, por ejemplo, la superficie de un espejo bien trabajado.

Se llama *circunferencia* una línea curva cerrada, cuyos puntos están todos en un plano, y equidistan de un punto interior llamado *centro.*

Círculo es la porción de plano interior á la circunferencia. Comunmente á la circunferencia se da el nombre de círculo.

Radio es una recta *OA* (*fig.* 3) cuyos extremos son el centro y un punto cualquiera de la circunferencia.

Cuerda es una recta *AC* cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda *BC* que pasa por el centro de la circunferencia.

Arco es una porción *AB* de la circunferencia.

Para trazar, tirar ó dirigir una recta, se emplea la regla; y para trazar ó describir una circunferencia, se emplea el compás.

La circunferencia se divide en 360 partes iguales que se llaman *grados;* cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos,* y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas *segundos.*

Los grados, minutos y segundos se indican con los signos °, ′, ″.

Por ejemplo, un arco de 35 grados, 25 minutos y 37 segundos, se escribe 35°, 25′, 37″.

Se llama *ángulo* la separación ó abertura de dos rectas indefinidas *CA* y *CB* (*fig.* 4), que tienen un punto común *C,* al que se llama *vértice* del ángulo.

Las dos rectas que forman el ángulo se llaman *lados* del ángulo.

Un ángulo se designa ó se lee con tres letras, una de cada lado, y la del vértice que se coloca en medio. Así, el ángulo formado por las rectas *CA* y *CB* se leerá *ACB* ó *BCA*.

Se dice que una recta *DC* (*fig.* 5) es ***perpendicular*** á otra *AB*, cuando los dos ángulos *DCA* y *DCB* que forma con esta recta, hacia un mismo lado de ella, son iguales.

Angulo *recto* es cualquiera de los dos ángulos *DCA* y *DCB* que forma una recta con otra, á la cual es perpendicular.

Angulo *agudo* es el ángulo menor que el recto, y ángulo *obtuso* es el ángulo mayor que el recto.

Rectas *paralelas* son dos rectas *AB* y *CD* (*fig.* 6) que están en un mismo plano, y que por más que se prolonguen no se encuentran.

Planos *paralelos* son dos planos que por más que se prolonguen no se encuentran.

178. *Rectángulo* es la porción de plano *ABCD* (*fig.* 7) comprendida entre cuatro líneas rectas paralelas dos á dos, y cuyos cuatro ángulos son rectos. Las cuatro rectas *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, que forman el rectángulo, se llaman sus *lados*.

Cuadrado es la porción de plano *ABCD* (*fig.* 8) comprendida entre cuatro rectas iguales, y cuyos cuatro ángulos son rectos. Las cuatro rectas *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, que forman el cuadrado, se llaman sus *lados*.

Legua cuadrada es un cuadrado cuyo lado es una legua lineal; *vara cuadrada* es un cuadrado cuyo lado es una vara lineal; *pie cuadrado* es un cuadrado cuyo lado es un pie lineal, etc.

179. Problema. *Averiguar cuántos cuadrados menores tiene un cuadrado mayor, conociendo el número de veces que el lado del mayor contiene exactamente al del menor* (*).

Fig. 9. Supongamos que el lado *AB* del cuadrado *ABCD* contenga ocho veces al lado *ab* del cuadrado menor *abcd:* dividamos cada lado del cuadrado mayor en ocho partes iguales, cada una de las cuales será igual al lado *ab* del cuadrado menor; juntemos los puntos correspondientes por medio de rectas, como lo indica la figura, y quedará el cuadrado mayor dividido en 64 cuadrados iguales al menor; y como 64 es el cuadrado de 8, y se puede hacer el mismo razonamiento en cualquiera otro caso, resulta que: *Para hallar el número de cuadrados menores que tiene un cuadrado mayor, no hay más que elevar al cuadrado el número de veces que el lado del mayor contiene al del menor.*

(*) Este problema y su análogo el 182, se resuelven en la Geometría de una manera general, esto es, cualquiera que sea el número de veces que el lado del cuadrado ó cubo mayor contiene al del menor, ya sea entero, ya fraccionario, ya inconmensurable dicho número. Pero como por ahora sólo nos hace falta resolver este problema para el caso particular en que el mismo número es entero, podemos hacerlo de un modo fácil y sencillo.

Ejemplos. *¿Cuántos pies cuadrados tiene una legua cuadrada?* Como la legua tiene 20000 pies, la legua cuadrada tendrá $20000 \times 20000 = 400.000000$ de pies cuadrados.

¿Cuántos pies cuadrados tiene una vara cuadrada?

Como la vara tiene 3 pies, la vara cuadrada tendrá $3 \times 3 = 9$ pies cuadrados.

¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene un pie cuadrado?

Como el pie tiene 12 pulgadas, el pie cuadrado tendrá $12 \times 12 = 144$ pulgadas cuadradas.

¿Cuántos pies cuadrados tiene un estadal cuadrado?

Como el estadal lineal tiene 12 pies lineales, el estadal cuadrado tendrá $12 \times 12 = 144$ pies cuadrados.

180. Se llama *cilindro* el espacio engendrado por un rectángulo que gire alrededor de uno de sus lados: tales son los rollos, los rodillos, algunas columnas, etc.

181. Se llama *cubo* el espacio limitado por seis cuadrados iguales; como son los *dados* usados en el juego, los cajones cuyas seis caras son seis cuadrados iguales, etc. Los doce lados que forman los seis cuadrados se llaman *lados* del cubo.

Legua cúbica es un cubo cuyo lado es una legua lineal, *vara cúbica* es un cubo cuyo lado es una vara lineal, *pie cúbico* es un cubo cuyo lado es un pie lineal, etc.

182. Problema. *Averiguar cuántos cubos menores tiene un cubo mayor, conociendo el número de veces que el lado del mayor contiene exactamente al lado menor.*

Fig. 10. Supongamos que el lado AB del cubo mayor AF contenga 4 veces al lado ab del cubo menor af: dividamos uno de los lados del cubo mayor, por ejemplo el lado CF, en 4 partes iguales, y por los puntos de división dirijamos planos paralelos á la cara $ABCD$, los cuales dividirán al cubo mayor en 4 porciones iguales: dividamos ahora los dos lados CD y CB en 4 partes iguales, y por los puntos de división dirijamos planos respectivamente paralelos á las caras $BCFG$ y $DCFE$. La primera porción $BDKH$ de las cuatro en que quedó dividido el cubo mayor, quedará dividida ahora en 16 cubos todos iguales al cubo menor af, puesto que el lado de cada uno de aquéllos es igual al lado de éste; ó bien dicha primera porción contendrá 16 cubos iguales al cubo menor; y pues las otras tres porciones son también iguales á la primera, cada una contendrá 16 cubos iguales al cubo menor, y por consiguiente el cubo mayor, que se compone de dichas cuatro porciones, contendrá $64 = 4^3$ cubos menores. Como el mismo razonamiento puede hacerse en cualquier otro caso, se infiere que: *Para hallar el número de cubos menores que contiene un cubo mayor, no hay más que elevar al cubo el número de veces que el lado de éste contiene al de aquél.*

Ejemplos. *¿Cuántos pies cúbicos tiene una vara cúbica?*

Como la vara lineal tiene 3 pies lineales, ó bien como el lado de la vara cúbica contiene tres veces al lado del pie cúbico, la vara cúbica tendrá $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ pies cúbicos.

¿Cuántas pulgadas cúbicas tiene un pie cúbico?

Como el pie lineal tiene 12 pulgadas lineales, el pie cúbico tendrá $12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$ pulgadas cúbicas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE Y DE VOLUMEN.

183. En las medidas de superficie se han venido considerando: la *legua cuadrada,* la *vara cuadrada*, el *pie cuadrado*, la *pulgada cuadrada*, el *estadal cuadrado*, etc.

Las medidas de superficie, llamadas de Castilla, eran la *aranzada* y la *fanega* superficial. La aranzada equivalía á un cuadrado cuyo lado era de 20 estadales lineales, y por consiguiente la aranzada tenía $20 \times 20 = 400$ estadales cuadrados. La fanega superficial representaba un cuadrado con lado de 24 estadales lineales, y por consiguiente tenía $24 \times 24 = 576$ estadales cuadrados. La fanega superficial se dividía en 12 celemines superficiales, y el celemín superficial en 4 cuartillos superficiales.

Nota. La legua cuadrada se usaba para la medición de provincias ó naciones. El estadal cuadrado, la aranzada y la fanega superficial servían para la medición de los campos, y por eso se llamaban medidas agrarias. El pie cuadrado ha sido la unidad de los terrenos de corta extensión, cuales son los que ocupan los edificios.

El espacio que ocupa un cuerpo se llama *volumen* del cuerpo.

Como medidas de volumen se han venido considerando la *legua cúbica*, la *vara cúbica,* el *pie cúbico*, la *pulgada cúbica*, etc.

Para el arqueo ó medición del volumen ó buque de una embarcación, era usual tomar por unidad la *tonelada,* con ocho codos cúbicos de ribera, ó bien 70'19 pies cúbicos.

CAPÍTULO II.

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO Á INCOMPLEJO, Y AL CONTRARIO.

184. Números *homogéneos* son los números referidos á unidades de la misma naturaleza, sean ó no estas unidades de igual magnitud. Por ejemplo, 7 varas de paño y 10 varas del mismo paño son números homogéneos; 11 cahíces, 10 fanegas y 5 celemines del mismo grano, son números homogéneos; 17 días y 11 horas son números homogéneos, etc.

Los números homogéneos referidos á la misma unidad se llaman números *de la misma especie;* como 7 varas de paño y 10 varas del mismo paño, 11 horas y 9 horas; etc.

Número *complejo* es el número compuesto de dos ó más homogéneos, pero de diferente especie. Por ejemplo, 7 varas, 2 pies y 9 pulgadas es un número complejo.

Número *incomplejo* es un número de una sola especie, como 6 fanegas.

Los números complejos é incomplejos están comprendidos en la denominación común de números *concretos.*

Reducir un número incomplejo á otro de especie menor.

Supongamos, por ejemplo, que 128 varas se quieren reducir á pies. Teniendo una vara 3 pies, 128 varas tendrán 128 veces 3 pies, ó (128×3) pies.

Sea $\frac{3}{7}$ de fanega el número que se quiere reducir á celemines. Teniendo una fanega 12 celemines, $\frac{3}{7}$ de fanega tendrán $\frac{3}{7}$ de 12 celemines, ó $(12 \times \frac{3}{7})$ celemines.

Como el mismo razonamiento puede hacerse en cualquier otro caso, resulta que: *Para reducir un número incomplejo á otro de especie menor, se multiplica el número de unidades inferiores que tiene la unidad del incomplejo dado por éste tomado abstractamente.*

Así, para reducir pies á pulgadas, se multiplica 12 pulgadas por el número abstracto de pies; para reducir libras á onzas, se multiplica 16 onzas por el número abstracto de libras; para reducir duros á pesetas, se multiplica 5 pesetas por el número abstracto de duros; etc.

185. *Reducir un número complejo á incomplejo de su menor especie.*

Redúzcase el número de la especie superior á la especie inferior inmediata, y al resultado añádase el número de esta especie; redúzcase la suma á la especie inferior inmediata, y al resultado añádase el número de esta especie; y así sucesivamente.

Ejemplo. Reducir el número complejo 17 varas, 2 pies y 9 pulgadas á incomplejo de su menor especie.

Cálculo.

17	106
3	53
51 *pies*	636 *pulgadas*
2 *pies*	9 *pulgadas*
53 *pies*	645 *pulgadas.*
12	

Luego 17 varas, 2 pies y 9 pulgadas = 645 pulgadas.

Reducir un número incomplejo á otro de especie mayor.

Supongamos que 344 libras se quieran reducir á arrobas. Como 1 arroba tiene 25 libras, 1 libra es $\frac{1}{25}$ de arroba, y por consiguiente 344 libras serán $\frac{344}{25}$ de arroba.

Sea el número $\frac{3}{7}$ de pie cúbico el que se quiere reducir á fracción de vara cúbica. Como una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, 1 pie cúbico es $\frac{1}{27}$ de vara cúbica, y por consiguiente $\frac{3}{7}$ de pie cúbico valdrán $\frac{3}{7}$ de $\frac{1}{27}$ de vara cúbica, ó $\left(\frac{1}{27} \times \frac{3}{7}\right)$ varas cúbicas, ó $\left(\frac{3}{7} : 27\right)$ varas cúbicas.

Luego: *Para reducir un número incomplejo á otro de especie mayor, se divide dicho número tomado abstractamente por el número de veces que su unidad está contenida en la especie mayor.*

Así, para reducir pulgadas á pies, se divide el número abstracto de pulgadas por 12; para reducir onzas á libras, se divide el número abstracto de onzas por 16; para reducir reales á pesetas, se divide el número abstracto de reales por 4; etc.

Reducir un número complejo á incomplejo de una especie diferente de la menor.

Redúzcase á incomplejo de su menor especie, y éste á la especie que se pida.

Ejemplo. Reducir el número complejo 9 días, 11 horas y 25′ á incomplejo de horas.

Reducido este número á su menor especie, es $13645' = \frac{13645}{60} = \frac{2729}{12}$ de hora.

Reducir un número incomplejo de especie inferior á complejo.

Redúzcase el número propuesto á la especie inmediata superior, el residuo será el número de la especie inferior del complejo que se busca. Redúzcase el cociente entero obtenido á la especie superior inmediata, el residuo será el número de la especie inmediata á la inferior del complejo. Continúese de este modo hasta que el cociente entero que se halle sea de la especie superior del complejo.

Ejemplo. 1.° Reducir 123489 onzas á complejo.

Cálculo.

123489	16		
114	7718 *libras*	25	
28			
129	218	308 *arrobas*	4
1 *onza*	18 *libras*	0 *arrobas*	77 *quintales.*

Luego 123489 onzas = 77 quintales, 0 arrobas, 18 libras y 1 onza.

2.° Reducir 12314'66 reales á complejo de onzas de oro, duros y reales.

Cálculo.

12314'66	20	
031	615 *duros*	16
114	135	38 *onzas*
14'66	7	

Luego 12314'66 reales = 38 onzas, 7 duros y 14'66 reales.

Reducir á complejo un quebrado de especie superior.

Redúzcase dicho quebrado á la especie inferior inmediata, y el entero que resulta será el número de la primera especie del complejo; redúzcase el nuevo quebrado á la especie inferior inmediata, y el entero que resulte será el número de la segunda especie del complejo, y así sucesivamente.

Ejemplos. 1.° Reducir 0'39 de hora á complejo de minutos y segundos.

Cálculo.

0'39 *horas*
60
23''40
60
24'''00

Luego 0'39 de hora = 23' y 24''.

2.° Reducir á complejo $\frac{13}{7}$ de quintal ó $\frac{13 \text{ quintales}}{7}$ (*).

Siendo este quebrado mayor que la unidad, hallaremos en primer lugar las unidades que contiene: resulta un quintal y $\frac{6}{7}$ de quintal. Reduzcamos ahora los $\frac{6}{7}$ de quintal á arrobas, y tendremos $\frac{24}{7}$ de arroba, ó 3 arrobas y $\frac{3}{7}$ de arroba. Reduzcamos los $\frac{3}{7}$ de arroba á libras, y tendremos $\frac{75}{7}$ de libra, ó 10 libras y $\frac{5}{7}$ de libra; y así si se quisiera mayor número de especies. Luego $\frac{13}{7}$ de quintal = 1 quintal, 3 arrobas y 10 $\frac{5}{7}$ libras.

Nota. Observemos que los numeradores 6, 3, 5 que hemos hallado son los residuos de las sucesivas divisiones; y por tanto podemos enunciar la regla práctica siguiente. Para reducir á complejo un quebrado ordinario de especie superior, se divide el numerador por el denominador, y el entero del cociente será el número

(*) $\frac{13 \text{ quintales}}{7}$ es la séptima parte de 13 quintales, ó lo que es igual, 13 séptimas partes de quintal.

de la primera especie del complejo que se busca. Multiplíquese el residuo por el número de veces que su unidad contiene á la de la especie inferior inmediata, y divídase el producto por el mismo divisor: el cociente será el número de la segunda especie del complejo; y así se continuará hasta que se llegue á la menor especie.

Apliquemos esta regla al ejemplo propuesto.

Disposición de esta operación.

13 *quintales*	7
6	1 *quintal*, 3 *arrobas*, 10 *libras* $\frac{5}{7}$.
4	
24 *arrobas*	
3	
25	
75 *libras*	
5	

3.° Reducir $\frac{7}{9}$ de onza de oro á complejo de duros y reales.

7 *onzas*	9
16	12 *duros*, 8'88 *reales*.
112 *duros*	
22	
4	
20	
80 *reales*	
80	
80	

Luego $\frac{7}{9}$ de onza de oro = 12 duros y 8'88 reales.

4.° Reducir $\frac{3}{149}$ de cahíz á complejo.

3 *cahices*	149
12	2 *celemines*, 3 *cuartillos* $\frac{89}{149}$.
36 *fanegas*	
12	
72	
36	
432 *celemines*	
134	
4	
536 *cuartillos*	
89	

Luego $\frac{3}{149}$ de cahíz = 2 celemines y 3 $\frac{89}{149}$ cuartillos.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS CONCRETOS.

186. Las definiciones de la adición, sustracción, multiplicación y división de los números concretos son las mismas que las de estas operaciones con los números abstractos; y los datos y resultados tienen también los mismos nombres respectivos.

ARTÍCULO 1.°

ADICIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

187. Los sumandos deben ser homogéneos, pues no tiene sentido una cuestión en que se pida sumar números de diferente naturaleza, como por ejemplo, sumar varas con fanegas.

1.^{er} *caso.* Si los sumandos son incomplejos, la suma será la de sus valores abstractos, referida ó concretada á la unidad de los sumandos.

Ejemplo. Sumar 7 varas, $5\frac{2}{3}$ varas, $\frac{3}{4}$ de vara y $\frac{5}{9}$ de vara.

Operación.

$$\begin{array}{lcl}
7 & & \\
5\frac{2}{3} & \ldots\ldots & 24 \\
\frac{3}{4} & \ldots\ldots & 27 \\
\frac{5}{9} & \ldots\ldots & 20 \\
\hline
 & & 71 \mid \underline{36} \\
13\frac{35}{36}\ \text{varas.} & & 35 \mid 1
\end{array}$$

Obsérvese que 36 es el menor múltiplo de los denominadores.

2.° *caso.* Si los sumandos son complejos, se pueden reducir á incomplejos de una misma especie, y queda reducido este caso al anterior; pero es preferible dejarlos en la forma que tienen, y sumarlos por la regla siguiente.

Para sumar los números complejos, se colocan de manera que se correspondan las especies iguales, y se suman sucesivamente los números de la misma especie, principiando por las de especie inferior. Si de la suma de los números de una especie resultan una ó más unidades de la inmediata superior, se reservan para sumarlas con los números de esta especie, y debajo se escribe el resto (*).

(*) Además de estos dos casos generales pueden ocurrir los siguientes: sumar números incomplejos homogéneos, pero de diferente especie; sumar complejos en que las especies del uno sean menores que la menor de los otros, etc. La adición en todos estos casos particulares no presenta ninguna dificultad.

Ejemplos. 1.°

125 *duros*	11 *reales*	$14\frac{2}{3}$ *mrs.*	... 16	
49	18	$23\frac{3}{4}$	 18	
19	14	$28\frac{5}{8}$	 15	
118	29	$17\frac{7}{12}$	 14	
312	14	$16\frac{5}{8}$	63	24
			15	2

Al sumar estos quebrados, se ha de observar que 24 es el múltiplo más simple de sus denominadores.

2.°

17 *quintales*	3 *arrobas*	17 *libras*	11 *onzas*
25	2	15	12
45	1	3	15
88	3	12	6

ARTÍCULO 2.°

SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

188. El minuendo y sustraendo deben ser homogéneos, pues nada significa restar de un número otro de diferente naturaleza. Por ejemplo, restar de 20 varas 17 libras es una cuestión que no tiene sentido.

1.^{er} *caso.* Si el minuendo y el sustraendo son incomplejos, su diferencia será la de sus valores abstractos referida á la unidad del minuendo y sustraendo.

Ejemplo. Restar de $15\frac{1}{3}$ fanegas $7\frac{3}{7}$ fanegas.

Operación.

$15\frac{1}{3}$.	7 + 21
$7\frac{3}{7}$.	9
$7\frac{13}{21}$ fanegas	$\frac{13}{21}$

2.° *caso.* Si son complejos, pueden reducirse á incomplejos y restarlos en seguida; pero es preferible dejarlos en la forma que tienen, y efectuar la operación por la regla siguiente.

Para restar de un número complejo otro complejo, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de manera que se correspondan las especies iguales. Se resta, principiando por la especie inferior, cada sustraendo parcial de su correspondiente minuendo. Si un sustraendo parcial es mayor que su minuendo, se añade á éste una unidad de especie superior inmediata; y para que el resto no padezca alteración, se añade otra unidad al sustraendo parcial siguiente (*).

(*) Además de estos dos casos generales, pueden ocurrir, así como en la adición, varios casos particulares que no presentan ninguna dificultad.

Ejemplos.	1.°	25 *varas*	1 *pie*	7 *pulgadas*	8 *líneas*
		14	2	4	11
		10	2	2	9

Como de 8 líneas no se pueden restar 11 líneas, añadamos á las 8 líneas 1 pulgada, que tiene 12 líneas, y entonces tendremos 20 líneas, de las que restando las 11 líneas, quedan 9 líneas. Añadamos ahora una pulgada al sustraendo parcial 4 pulgadas, y tendremos 5 pulgadas; restadas de 7 pulgadas, quedan 2 pulgadas. En la sustracción de los pies nos hallamos con la dificultad anterior; por lo que al minuendo 1 pie añadimos una vara, que tiene 3 pies, y después se añade una vara al sustraendo 14 varas.

2.°	17 *horas*	0′	17″
	11	25	49
	5	34	28

Se añade al primer minuendo 17″ un minuto, que tiene 60″; después se añade 1′ al sustraendo 25′. Al segundo minuendo 0′ añadimos una hora, que tiene 60′, y al sustraendo 11 horas añadimos una hora.

3.°	228°		
	39	17′	24″
	188	42	36

Siempre que, como en este ejemplo, falten en el minuendo las especies inferiores, primera, segunda, tercera, etc., se hará la sustracción con más facilidad, descomponiendo el minuendo en complejo que contenga todas las especies, como se ve á continuación.

227°	59′	60″
39	17	24
188	42	36

4.° *Averiguar la edad de un hombre que nació el dia* 25 *de Abril de* 1788.

Para resolver esta cuestión, se resta el tiempo que pasó (desde el principio del siglo en que vino al mundo) hasta el día de su nacimiento, del tiempo transcurrido desde el principio de aquel mismo siglo hasta el día en que se propone la cuestión.

Por ejemplo, si esta cuestión se propuso el día 6 de Febrero de 1848, sería

147 *años*	1 *mes*	6 *dias*	el minuendo, y
87	3	25	el sustraendo
59	9	11...	la edad de dicho hombre el

día 6 de Febrero de 1848. X

ARTÍCULO 3.°

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

189. En la multiplicación de un número concreto por un abstracto, el concreto es el multiplicando y el abstracto el multiplicador; y puesto que multiplicar un número concreto por un abstracto entero es repetir el primero tantas veces como unidades tiene el segundo, y multiplicar un concreto por un quebrado abstracto es hallar el valor de las partes del primero indicadas por el segundo, resulta que en todos los casos el producto es de la misma naturaleza que el multiplicando. Por consiguiente, cuando se dan para multiplicarlos dos números concretos, se pide implícitamente que uno de los dos se multiplique por un número abstracto, y el multiplicando será aquél de los dos números concretos que deba multiplicarse por el abstracto, ó sea de los dos concretos, aquél de la misma naturaleza que el producto. El multiplicador, necesariamente abstracto (*), depende del otro número concreto, pero no es siempre este otro tomado abstractamente.

Por ejemplo, si el valor de una arroba es 125 pesetas, y se quiere hallar el valor de 7 arrobas, el multiplicando será 125 pesetas, y el multiplieador el número abstracto 7; pues multiplicando 125 pesetas por 7 ó repitiendo 125 pesetas 7 veces, se tendrá el valor de las 7 arrobas. Pero si valiendo una arroba 125 pesetas, se pidiese el valor de 7 libras ó el de 7 quintales, el multiplicador no sería 7 en ninguno de estos casos; porque multiplicando 125 pesetas, valor de una arroba, por 7, obtendríamos el valor de 7 arrobas y no el de 7 libras ó 7 quintales.

Ejemplos. 1.° *Cada grado del círculo máximo de la tierra tiene 20 leguas: ¿cuántas leguas tienen los 360° de dicho círculo?*

Como el número de leguas de los 360° es evidentemente 360 veces mayor que el número de leguas de un grado, tenemos que multiplicar 20 leguas, que es el multiplicando, por 360, que es el

(*) Cuando para resolver una cuestión de multiplicación, se dice que se multiplica un número concreto por otro concreto, se usa de un lenguaje impropio. Por ejemplo, si teniendo una fanega 12 celemines, se quiere saber cuántos celemines tienen 9 fanegas, no debe decirse que se multipliquen 12 celemines por 9 fanegas, sino 12 celemines, que es el multiplicando, por 9, que es el multiplicador: pues nada significa repetir 12 celemines 9 veces fanegas, ni 9 fanegas veces. Cuando en la Geometría se dice que el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura, no se entiende que se multiplica el valor 11 metros, supongamos, de la altura, por 9 metros, por ejemplo, de la base, porque este lenguaje no tiene sentido, sino que se multiplican los números abstractos 11 y 9, y que el producto 99 indica el número de veces que el rectángulo contiene al metro cuadrado, ó lo que es igual, que 99 es el número de metros cuadrados del rectángulo.

multiplicador. El producto es 20 leguas $\times$ 360 = (20 $\times$ 360) leguas = 7200 leguas.

2.° *Una mano de papel tiene 25 pliegos: ¿cuántos pliegos tienen las 20 manos de una resma?*

Tenemos que multiplicar 25 pliegos por 20. El producto es 25 pliegos $\times$ 20 = (25 $\times$ 20) pliegos = 500 pliegos.

3.° *Pesando una fanega de trigo 93 libras, 7 onzas y 9 adarmes, ¿cuánto pesarán 7 fanegas del mismo trigo?*

Tenemos que multiplicar 93 libras, 7 onzas y 9 adarmes por 7.

Como el multiplicando 93 libras, 7 onzas y 9 adarmes es complejo, puede reducirse, si se quiere, á incomplejo de cualquiera de sus especies, por ejemplo á la menor, que es la más conveniente. Nosotros lo dejaremos en la forma que tiene, y multiplicando por 7 cada uno de los números de que consta, obtendremos el producto.

Cálculo.

	93 *libras*	7 *onzas*	9 *adarmes*
	7		
Producto....	651 *libras*	49 *onzas*	63 *adarmes*

Reduciendo ahora los adarmes á onzas, agregando las que resulten á las 49, y reduciendo todas las onzas á libras y agregando las que resulten á las 651 libras, tendremos por fin que 654 libras, 4 onzas y 15 adarmes, es el peso de las 7 fanegas.

4.° 28 *hombres hacen una obra en* 23 *horas y* 24': *¿un hombre en cuántas horas hará una obra igual?*

Suponemos que todos estos hombres trabajan igualmente.

Es evidente que un hombre tardará en hacer la referida obra 28 veces más horas que los 28 hombres. El multiplicando es 23 horas y 24', y el multiplicador 28. Dejaremos en la operación al multiplicando en la forma que tiene.

Cálculo.

	23 *horas*	24'
	28	
	184	192
	46	42
	644 *horas*	672'
ó bien	655 *horas*	12'

5.° *Para entapizar un salón se necesitan* 300 *varas de paño cuyo ancho es de tres varas: ¿cuántas varas se necesitarán, para lo mismo, de otro paño cuyo ancho es de una vara?*

Puesto que el ancho del nuevo paño es tres veces menor que el del primero, es claro que se necesitan del nuevo paño tres veces más varas que del primero. Tenemos, pues, que multiplicar 300 varas por 3: el producto es 900 varas.

190. Los tres primeros ejemplos que acabamos de resolver pertenecen á la clase de problemas que ocurren comunmente en la multiplicación de números concretos; y los dos últimos á otra clase mucho menos frecuente (*).

En la primera clase de estos problemas se conoce el *valor* (**) de una unidad concreta, y se trata de hallar el valor de un número cualquiera entero ó fraccionario de la misma naturaleza que dicha unidad.

En estos problemas el multiplicando es el valor de la unidad, y el multiplicador el número cuyo valor se pide, reducido á la especie de la unidad cuyo valor se da, y tomado abstractamente.

Resolvamos algunos ejemplos de esta clase.

6.° *¿Cuánto valen* $7\frac{7}{8}$ *varas de tela á* $25\frac{3}{4}$ *pesetas la vara?*

El multiplicando, valor de una vara, es $25\frac{3}{4}$ pesetas; y el multiplicador $7\frac{7}{8}$. El producto $25\frac{3}{4}$ pesetas $\times 7\frac{7}{8} = 202\frac{25}{32}$ pesetas, ó bien 202'78 pesetas.

7.° *Valiendo un quintal de lana 17 duros, ¿cuánto valdrán 3 arrobas y 14 libras?*

El multiplicando es 17 duros. Para saber qué número es el multiplicador, reduciremos las 3 arrobas y 14 libras á quintales, y son 0'89 quintales; luego el multiplicador es 0'89. El producto será 17 duros $\times$ 0'89 $=$ 15'13 duros; y reduciendo los 0'13 de duro á reales, son 2'60 reales. Luego las 3 arrobas y 14 libras valen 15 duros y 2'60 reales, ó 75'65 pesetas.

8.° *Una fanega de trigo pesa 3 arrobas, 16 libras y 13 onzas: ¿cuánto pesarán 6 cahices, 3 fanegas y 10 celemines del mismo trigo?*

El multiplicador será 6 cahices, 3 fanegas y 10 celemines reducidos á fanegas y tomado abstractamente; el multiplicador es, pues, $\frac{910}{12} = \frac{455}{6}$.

Cálculo dejando al multiplicando en la forma que tiene.

Peso de una fanega. .	3 *arrobas,*	16 *libras,*	13 *onzas,*
	455		
455 *fanegas.* .	1365 *arrobas,*	7280 *libras,*	5915 *onzas,*
$\frac{455}{6}$ *de fanega.* .	267 *arrobas,*	1125 *libras,*	$999\frac{1}{6}$ *onzas,*
ó bien	278 *arrobas,*	12 *libras,*	$7\frac{1}{6}$ *onzas.*

(*) Los tres primeros ejemplos pertenecen á la clase de problemas en que dos cantidades homogéneas son proporcionales á sus correspondientes, y los dos últimos á la clase en que dos cantidades homogéneas están en razón inversa de sus correspondientes.

(**) Empleamos esta palabra para significar la cantidad correspondiente ó equivalente á la unidad concreta.

Explicación. Para multiplicar el multiplicando por $\frac{455}{6}$, lo multiplicaremos por 455, y dividiremos el producto por 6. Para dividir por 6 el número 1365 arrobas, 7280 libras y 5915 onzas, dividiremos por 6 las 1365 arrobas, y hallaremos por cociente 227 arrobas, quedando 3 arrobas de resto, que las reduciremos á libras, y son 75 libras. Añadiremos estas libras á las 7280; y partiendo por 6 la suma, el cociente será 1225 libras y el resto 5 libras, que reducidas á onzas son 80. Añadiendo estas onzas á las 5915, y partiendo la suma por 6, resulta de cociente 999 $\frac{1}{6}$ onzas. Reduciendo ahora las onzas á libras y las libras á arrobas, resultan por último 278 arrobas, 12 libras y 7 $\frac{1}{6}$ onzas, peso de los 6 cahíces, 3 fanegas y 10 celemines.

9.° *Valiendo* 1 *duro* 3 *arrobas y* 5 *azumbres de vino, ¿cuántas arrobas y azumbres del mismo líquido se podrán comprar con* 375 *pesetas?*

El multiplicador es el número 375 pesetas, reducido á duros y tomado abstractamente, es decir, que el multiplicador es 75. Hallaremos, pues, el producto pedido multiplicando las 3 arrobas y 5 azumbres por 75.

Cálculo.

	3 *arrobas,*	5 *azumbres*
	75	
	225 *arrobas,*	375 *azumbres*
ó bien	271 *arrobas*	*y* 7 *azumbres.*

Nota. Todas las cuestiones en que el multiplicando es complejo, que hemos resuelto sin transformarlo en incomplejo, se pueden comprobar reduciendo el multiplicando á incomplejo y efectuando nuevamente la multiplicación.

ARTÍCULO 4.°

MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS EN LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

191. Cuando conociendo el valor de una unidad concreta se quiere hallar el valor de un número mixto ó complejo de la misma naturaleza que dicha unidad, puede obtenerse este valor hallando primeramente el valor del entero ó del número de la especie superior si es complejo; y para hallar los valores de las cantidades inferiores, se descomponen estas cantidades en partes alícuotas de otras cuyos valores sean conocidos, y entonces se obtendrán fácilmente los valores de dichas cantidades inferiores. La suma será el valor pedido.

Ejemplos. 1.° *Averiguar el valor de* 7 $\frac{7}{8}$ *varas de tela á* 25'75 *pesetas la vara.*

Cálculo.

	$25\frac{3}{4}$ *pesetas*		
	$7\frac{7}{8}$		
7 *varas*	175		
	$5\frac{1}{4}$	8	
$\frac{4}{8}$ *vara*	$12\frac{7}{8}$	28	
$\frac{2}{8}$ *vara*	$6\frac{7}{16}$	14	
$\frac{1}{8}$ *vara*	$3\frac{7}{32}$	7	
	$202\frac{25}{32}$ *pesetas,*	57	32
		25	1

ó bien 202'78 pesetas.

Para hallar el valor de las 7 varas, multipliquemos por 7 el valor de la vara. Para hallar el valor de los $\frac{7}{8}$ de vara, descompongamos estos $\frac{7}{8}$ en las partes siguientes: $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{8}$ de vara.

El valor de $\frac{4}{8}$ de vara se hallará tomando la mitad del valor de la vara; el de $\frac{2}{8}$ de vara tomando la mitad del valor de $\frac{4}{8}$ de vara, y el de $\frac{1}{8}$ de vara tomando la mitad del valor de $\frac{2}{8}$ de vara.

Al sumar los quebrados, se ha de observar que 32 es el menor múltiplo de todos los denominadores.

2.° *Hallar el peso de una barra de hierro de* $5\frac{2}{3}$ *pies de largo, sabiendo que cada pie de dicha barra pesa* $7\frac{3}{4}$ *libras.*

	$7\frac{3}{4}$ *libras.*		
	$5\frac{2}{3}$		
5 *pies*	35		
	$3\frac{3}{4}$	9	
$\frac{1}{3}$ *pie*	$2\frac{7}{12}$	7	
$\frac{1}{3}$ *pie*	$2\frac{7}{12}$	7	
	$43\frac{11}{12}$ *libras,*	23	12
		11	1

ó bien 43 libras y $14\frac{2}{3}$ onzas.

3.° *En una hora anda un móvil con movimiento uniforme 25 varas, 2 pies y 9 pulgadas: se quiere saber cuánto andará con dicho movimiento y con igual velocidad en 14 horas, 40′ y 35″* (*).

(*) Se llama movimiento *uniforme* ó *ecuable* el de un móvil que anda distancias iguales en tiempos iguales. En este movimiento se llama *velocidad* el camino andado por el móvil en una unidad cualquiera de tiempo.

1 *hora*	25 *varas*	2 *pies*	9 *pulgadas.*		
	14 *horas* 40′		35″		
14 *horas*	350	28	126		
30′	12	2	10 $\frac{1}{2}$	120	
10′	4	0	11 $\frac{1}{2}$	120	
1′	0	1	3 $\frac{11}{20}$		
30″	0	0	7 $\frac{31}{40}$	186	
5″	0	0	1 $\frac{71}{240}$	71	
	14	13			
	380 *varas*	1 *pie*	1 $\frac{17}{240}$ *pulgs.*	497	240
				17	2

Para hallar el valor de 35″, hallaremos primeramente el valor auxiliar de 1′, que es la décima parte del valor de 10′, el cual es 1 pie y 3 $\frac{11}{20}$ pulgadas; y en seguida hallaremos el valor de 30″, mitad del de 1′, y después el de 5″, sexta parte del anterior. Antes de sumar, rayaremos el valor auxiliar de un minuto, si es que no se ha colocado aparte este valor.

ARTÍCULO 5.º

DIVISIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

192. En la división de los números concretos pueden ocurrir dos casos: 1.º, dados dos números homogéneos, averiguar el número de veces que el uno contiene al otro (*); ó en otros términos, conociendo el producto que es uno de los números dados y el multiplicando que es el otro, hallar el multiplicador; 2.º, dados dos números de diferente naturaleza, averiguar el número concreto que multiplicado por otro abstracto, dependiente de uno de los dos números dados, nos dé un producto igual al otro número dado, ó bien, conociendo el producto que es uno de los dos números dados y el multiplicador que depende del otro, hallar el multiplicando.

193. 1.er caso. *El cociente ó la razón de dos números de la misma especie es igual al cociente ó á la razón de dichos números tomados abstractamente.*

Para demostrar este teorema, supondremos que 25 varas

(*) Cuando se dice que un número contiene á otro un número fraccionario de veces, como $\frac{1}{2}$ vez, $\frac{5}{4}$ de vez, 4 $\frac{2}{3}$ veces, etc., se usa de un lenguaje incorrecto y chocante, pero admitido, porque es muy cómodo, y lo que se quiere decir es que el primer número es igual al segundo multiplicado por $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, 4 $\frac{2}{3}$, etc.

y 7 varas sean el dividendo y el divisor: decimos que $\frac{25 \text{ varas}}{7 \text{ varas}} = \frac{25}{7}$.

En efecto, 7 varas $\times \frac{25}{7}$ es, según se ha visto en la multiplicación, $\left(7 \times \frac{25}{7}\right)$ varas $= 25$ varas; es decir, que el divisor 7 varas y el número $\frac{25}{7}$ son los dos factores cuyo producto es el dividendo 25 varas: luego $\frac{25}{7}$ es el cociente ó la razón de los dos números propuestos.

Por consiguiente: *Para dividir un número concreto por otro de la misma naturaleza, se reducirán á una misma especie, si no lo están ya, y el cociente de sus valores abstractos será el cociente pedido.*

La cuestión determinará la especie de la unidad á que debe concretarse el cociente hallado.

Ejemplos del 1.er caso. 1.° *¿Cuántos pliegos de á* 16 *páginas tiene un libro de* 500 *páginas?*

Es claro que tendrá tantos pliegos cuantas veces 500 páginas contengan á 16 páginas. Tenemos, pues, que dividir 500 páginas por 16 páginas, ó, según el teorema anterior, 500 por 16: el cociente es $31 \frac{1}{4}$, número de pliegos del libro (*).

2.° *Para hacer un tejedor una vara de tela tarda* $2 \frac{1}{2}$ *horas: ¿cuántas varas hará en* 9 *horas?*

Hará tantas varas cuantas veces $2 \frac{1}{2}$ varas estén contenidas en 9 horas: el número de varas será, pues, $9 : 2 \frac{1}{2} = 3 \frac{3}{5}$.

3.° *Pesando una fanega de trigo* 3 *arrobas y* 17 *libras, ¿cuántas fanegas tendrá una carga del mismo trigo, la cual pesa* 20 *quintales,* 2 *arrobas y* 11 *libras?*

Tendrá tantas fanegas cuantas veces el peso de una fanega esté contenido en el peso de todo el trigo. Tendremos, pues, que dividir 20 quintales, 2 arrobas y 11 libras por 3 arrobas y 17 libras.

Reduciremos el dividendo y el divisor á la menor especie: el dividendo será 2061 libras y el divisor 92 libras.

$$\begin{array}{r|l} 2061 & 92 \\ \cline{2-2} 229 & 22 \frac{37}{92} \\ 37 & \end{array}$$

Es decir, que $22 \frac{37}{92}$ es el número de fanegas de la referida

(*) Se puede evitar la incorrección de lenguaje de que 500 contienen á 16 $31 \frac{1}{4}$ veces, del modo siguiente, que puede emplearse en todos los casos de división. Sea x el número de pliegos del libro; el número de sus páginas será evidentemente 16 páginas $\times x$: luego 16 páginas $\times x = 500$ páginas, y por consiguiente $x = \frac{500 \text{ pág.}}{16 \text{ pág.}}$, ó $x = \frac{500}{16} = 31 \frac{1}{4}$, número de pliegos del libro.

carga; y reduciendo el quebrado $\frac{57}{92}$ de fanega á complejo, resultarán por fin 22 fanegas, 4 celemines y $\frac{7}{23}$ cuartillos.

4.° *Averiguar el número de fanegas superficiales que tiene una legua cuadrada.*

Una legua cuadrada tiene 20000×20000 pies cuadrados ó 400.000000 de pies cuadrados; una fanega superficial tiene $24 \times 24 = 576$ estadales cuadrados; y pues un estadal cuadrado tiene $12 \times 12 = 144$ pies cuadrados, la fanega tendrá 576×144 pies cuadrados, que son 82944 pies cuadrados: luego partiendo el número 400.000000 por 82944, el cociente será el número de fanegas que tendrá la legua cuadrada, á saber, 4822 fanegas y 6 $\frac{205}{576}$ celemines.

Ejemplos del 2.° caso. 1.° 24 $\frac{5}{8}$ *varas de tela han costado* 389 *pesetas: ¿á cómo sale la vara?*

El valor de la vara será 24 $\frac{5}{8}$ veces menor que el de 24 $\frac{5}{8}$ varas. Tenemos, pues, que dividir 389 pesetas por 24 $\frac{5}{8}$. El cociente es 15 $\frac{57}{74}$ pesetas.

2.° *Una locomotora ha corrido, con movimiento uniforme, en* 17 $\frac{3}{4}$ *horas* 130 *leguas: ¿cuál ha sido su velocidad, ó sea el número de leguas que ha andado por hora?*

El camino corrido en una hora será 17 $\frac{3}{4}$ veces menor que el andado en 17 $\frac{3}{4}$ horas. Tenemos, pues, que dividir 130 leguas por 17 $\frac{3}{4}$. El cociente es 7'323 leguas, ó 7 leguas y 6460 pies.

3.° *Un hombre hace una obra en* 29 *horas,* 12' *y* 20'': *¿*5 *hombres en cuánto tiempo harán la misma obra?*

Es claro que 5 hombres tardarán 5 veces menos tiempo que un hombre. Partamos, pues, 29 horas, 12' y 20'' por 5, y hallaremos de cociente 5 horas, 50' y 28''.

194. Los dos primeros de los tres ejemplos que acabamos de resolver pertenecen á la clase de problemas que ocurren comunmente en este segundo caso de la división de números concretos, y el tercero á otra clase de problemas que ocurren pocas veces (*).

En la primera clase de estos problemas se conoce el valor de un número concreto, entero ó fraccionario, y se trata de hallar el valor de una unidad de la misma naturaleza que dicho número.

El dividendo es, en estos problemas, el valor del número dado, y el divisor es este número reducido á la especie de la unidad cuyo valor se pide, y tomado abstractamente.

Resolvamos algunos otros ejemplos de esta clase.

4.° 17 $\frac{1}{2}$ *arrobas de vino se dan en cambio de* 490 *libras de pan: ¿cuántas libras de pan corresponden á una azumbre de vino?*

(*) Véase la nota (*) de la pág. 144.

El dividendo es 490 libras y el divisor es el número 17 ½ arrobas reducido á azumbres y tomado abstractamente, es decir, que el divisor es 140. El cociente es libras 490 : 140 = 3 ½ libras.

5.° *9 quintales, 3 arrobas y 11 libras han costado* 10011'72 *pesetas: ¿á cómo sale el quintal?*

Reduciremos los quintales, arrobas y libras á incomplejo de quintal, y son 9'86 quintales. El dividendo es 10011'72 pesetas, y el divisor 9'86.

Para hallar el cociente, multiplicaremos en primer lugar dividendo y divisor por 100 (119, 3.er caso).

```
1001172  | 986
         |----------------------------------------
1517     | 1015'38 pesetas, valor de un quintal.
 5312    |
  3820   |
   8620  |
```

Nota. Transformando los quebrados ordinarios en decimales, toda cuestión de números fraccionarios podrá resolverse por decimales. Pero para seguir este método cuando la reducción de los quebrados á decimales no es exacta, hay que calcular de antemano el número de cifras que deben tener los quebrados decimales que han de reemplazar á los ordinarios, á fin de evitar que el resultado salga con error de consideración; cuestión que tiene alguna dificultad, y que contribuye, al mismo tiempo que el trabajo de dicha reducción, á que este método no sea preferible al que hemos explicado. Cuando los quebrados pueden reducirse exactamente á decimales, la cuestión se resuelve fácilmente por este método. Presentaremos, para hacerlo ver, un caso de multiplicación y otro de división.

1.° *Averiguar el valor de* 7 ⅞ *varas de tela á* 25 ¾ *pesetas la vara.*

Reduciendo á decimales los quebrados ⅞ y ¾, son 0,875 y 0'75.

Operación.

```
      7'8 7 5
      2 5'7 5
  -------------
      3 9 3 7 5
    5 5 1 2 5
  3 9 3 7 5
1 5 7 5 0
  -------------
2 0 2'7 8 1 2 5 pesetas.
```

2.° *Una locomotora ha corrido, con movimiento uniforme, 130 leguas en 17 $\frac{3}{4}$ horas: ¿cuánto ha caminado por hora?*

Reduciendo el quebrado á decimal, es 0'75.

Operación.

13000	1775
5750	7'323 *leguas que ha caminado*
4250	*el móvil en cada hora.*
7000	

CAPÍTULO IV.

SISTEMA MÉTRICO DE MEDIDAS Y PESAS.

ARTÍCULO 1.°

NOCIONES PRELIMINARES.

195. El sistema de medidas y pesas mandado adoptar en España por ley de 19 de Julio de 1849, es el siguiente:

El *metro*, diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por París, es la unidad fundamental de este sistema, y por eso se llama *sistema métrico*. También se llama sistema *decimal* de medidas y pesas, porque las unidades de una misma naturaleza son 10, 100, 1000 ó 10000 veces mayores, ó 10, 100, 1000 veces menores que la unidad *principal* de cada clase, ó unidad de la cual se derivan las otras unidades de la misma naturaleza.

Unidad *usual* es la unidad que se usa más comunmente, y excepto en las unidades ponderales es la unidad principal.

Para formar las unidades mayores ó los múltiplos de la principal de cada clase, se anteponen á la unidad principal las palabras derivadas del griego *deca, hecto, kilo, miria,* que equivalen respectivamente á *diez, ciento, mil, diez mil;* y para formar las unidades menores ó los submúltiplos de la unidad principal, se anteponen á ésta las palabras originadas del latín *deci, centi, mili,* que equivalen á *décima, centésima, milésima.* Así, las palabras *decámetro, hectómetro, kilómetro* y *miriámetro* significan respectivamente *diez metros, cien metros, mil metros* y *diez mil metros;* y las palabras *decímetro, centímetro* y *milímetro* significan *décima de metro, centésima de metro* y *milésima de metro.*

196. UNIDADES PRINCIPALES DEL SISTEMA MÉTRICO.

La unidad principal de longitud es el *metro.*

La unidad principal de capacidad para áridos y líquidos es el *litro*, medida cilíndrica cuyo volumen es igual al de un decímetro cúbico.

La unidad principal para los pesos es el *gramo;* peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de su mayor condensación, que es á los 4° del termómetro centígrado.

La unidad principal para las superficies de mediana extensión es el *metro cuadrado.*

La unidad principal para las superficies agrarias es el *área*, que es un cuadrado cuyo lado tiene 10 metros, y su superficie es, por lo tanto (179), $10 \times 10 = 100$ metros cuadrados.

La unidad principal para los volúmenes es el *metro cúbico.*

Vemos que las unidades *litro*, *gramo*, *metro*, *metro cuadrado*, *área* y *metro cúbico* dependen del metro, y por eso es el metro la unidad fundamental del nuevo sistema.

NOTA. En adelante usaremos, á veces, las abreviaturas siguientes: m = metro, l = litro, g = gramo, m^2 = metro cuadrado, a = área, m^3 = metro cúbico, D = deca, H = hecto, K = kilo, M = miria, d = deci, c = centi, m = mili.

197. UNIDADES DE LONGITUD.

Metro, unidad principal y usual; *decámetro*, *hectómetro*, *kilómetro* y *miriámetro; decímetro*, *centímetro* y *milímetro.*

Cada unidad de longitud ó lineal tiene diez unidades inmediatas inferiores, ó bien cada unidad lineal es una decena de unidades inmediatas inferiores.

El *metro* reemplaza á la *vara* y al *pie.*

El *kilómetro* y *miriámetro* son unidades itinerarias, y reemplazan á las *leguas* y *millas.*

Además de estas unidades de longitud, se usan los medios y cuartos de cada una.

Equivalencias aproximadas entre las unidades de longitud de Castilla y las nuevas (*).

5 metros = 6 varas, 7 centímetros = 3 pulgadas, 11 kilómetros = 2 leguas.

198. UNIDADES DE CAPACIDAD PARA ÁRIDOS Ó LÍQUIDOS.

Litro, unidad principal y usual; *decálitro*, *hectólitro*, *kilólitro; decilitro* y *centilitro.*

(*) Damos en este capítulo las equivalencias aproximadas entre las medidas métricas y las de Castilla, con objeto de que se tenga desde luego una idea de la magnitud de las nuevas medidas. Más adelante daremos otras equivalencias más aproximadas á la exactitud, aunque no tan sencillas.

Cada unidad de capacidad tiene 10 de las del orden inmediato inferior, ó es una decena de estas unidades.

El *litro* y el *decálitro* reemplazan á los *cuartillos, azumbres* y *cántaras*. El *hectólitro* reemplaza á la fanega de áridos.

El *kilólitro* tiene 1000 litros; y como un litro es un decímetro cúbico, el kilólitro tiene 1000 decímetros cúbicos, y por tanto equivale al *metro cúbico* (182).

Además de las unidades dichas de capacidad pueden usarse según la ley, y se usan, los medios y cuartos de cada una.

Equivalencias aproximadas entre las unidades de capacidad de Castilla y las nuevas.

5 hectólitros = 9 fanegas, 1 litro de líquido = 2 cuartillos, 1 litro de aceite = 2 libras id.

199. UNIDADES DE PESO.

Gramo, unidad principal; *decágramo, hectógramo* y *kilogramo*, unidad usual; *decigramo, centigramo* y *miligramo*.

Cada unidad de peso, así como las de longitud y capacidad, tiene 10 unidades del orden inferior inmediato, ó es una decena de estas unidades.

Además de estas unidades múltiplas y submúltiplas de la unidad principal de peso, y sus mitades y cuartos, se usan para los grandes pesos las dos unidades siguientes: el *quintal métrico*, que tiene 100 kilogramos, y la *tonelada de peso*, que tiene 1000 kilogramos ó 10 quintales nuevos.

Equivalencia aproximada entre la libra de Castilla y el kilogramo.

6 kilogramos = 13 libras.

200. UNIDADES CUADRADAS Ó DE SUPERFICIE.

Las unidades de superficie son: el *miriámetro cuadrado*, el *kilómetro cuadrado*, el *hectómetro cuadrado*, el *decámetro cuadrado*, el *metro cuadrado*, el *decímetro cuadrado*, el *centímetro cuadrado* y el *milímetro cuadrado*.

¿Cuántos kilómetros cuadrados tiene un miriámetro cuadrado?

Como un miriámetro lineal tiene 10 kilómetros lineales, un miriámetro cuadrado tendrá (179) $10 \times 10 = 100$ kilómetros cuadrados.

¿Cuántos decímetros cuadrados tiene un metro cuadrado?

Como un metro lineal tiene 10 decímetros lineales, un metro cuadrado tendrá $10 \times 10 = 100$ decímetros cuadrados.

¿Cuántos centímetros cuadrados tiene un decímetro cuadrado?

Como un decímetro tiene 10 centímetros, un decímetro cuadrado tendrá $10 \times 10 = 100$ centímetros cuadrados.

Vemos que cada unidad de superficie tiene 100 unidades inmediatas inferiores ó es una centena de estas unidades.

El *metro cuadrado* reemplaza á las *varas cuadradas* y *pies cuadrados.*

El *decámetro cuadrado*, bajo el nombre de *área*, y el *hectómetro cuadrado*, bajo el nombre de *hectárea*, son las nuevas unidades agrarias, y reemplazan, por tanto, á las fanegas y celemines superficiales, aranzadas, etc.

Equivalencias aproximadas entre las unidades cuadradas de Castilla y las nuevas.

7 metros cuadrados = 10 varas cuadradas, 1 metro cuadrado = 13 pies cuadrados, 9 hectáreas = 14 fanegas superficiales.

201. UNIDADES CÚBICAS Ó DE VOLUMEN.

Las unidades de volumen son: el *miriámetro cúbico*, el *kilómetro cúbico*, el *hectómetro cúbico*, el *decámetro cúbico*, el *metro cúbico*, el *decímetro cúbico*, el *centímetro cúbico* y el *milímetro cúbico.*

¿Cuántos kilómetros cúbicos tiene un miriámetro cúbico?

Como 1 Mm tiene 10 Km, un Mm^3 tendrá $10^3 = 1000\ Km^3$.

¿Cuántos metros cúbicos tiene un decámetro cúbico?

Como 1 Dm tiene 10 m, 1 Dm^3 tendrá $10 \times 10 \times 10 = 1000\ m^3$.

¿Cuántos decímetros cúbicos tiene un metro cúbico?

Como 1 $m = 10\ dm$, 1 m^3 será igual á $10 \times 10 \times 10 = 1000\ dm^3$.

Se ve que cada unidad cúbica vale mil de las del orden inmediato inferior ó es un millar de estas unidades.

El metro cúbico, bajo el nombre de *tonelada de arqueo*, reemplaza á la tonelada antigua de arqueo (183, *Nota*).

NOTA. El metro cúbico tiene 1000 decímetros cúbicos; y como un decímetro cúbico de agua destilada á 4° centígrados, pesa en el vacío un kilogramo, el peso del agua, en las mismas circunstancias, contenida en un metro cúbico será 1000 kilogramos, ó una tonelada de peso. Luego la tonelada de peso es el peso del agua contenida en la tonelada de arqueo.

Equivalencias aproximadas entre las unidades cúbicas de Castilla y las nuevas.

7 metros cúbicos = 12 varas cúbicas,
1 metro cúbico = 46 pies cúbicos,
3 *toneladas de arqueo* nuevas, ó sean 3 metros cúbicos, equivalen próximamente á 2 toneladas de arqueo antiguas.

ARTÍCULO 2.°

LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NÚMEROS MÉTRICOS.

En el sistema decimal de pesas y medidas se ejecutan estas cuatro operaciones muy fácil y brevemente.

Adición de los números métricos.

202. Para sumar números métricos, se reducen á una misma especie, lo que no presenta ninguna dificultad, y se suman después.

Ejemplos. 1.° Sumar los números $125^{Km}'26$; $2583^{m}'24$; y 173^{dm}.

Reducidos estos números á una misma especie cualquiera, por ejemplo á metros, serán 125260^{m}, $2583^{m}'24$, $17^{m}'3$.

$$\begin{array}{r} 125260 \\ 2583'24 \\ 17'3 \\ \hline \end{array}$$

Suma. . . . . 127860^{m}'54, ó 127^{Km}, 860^{m} y 54^{cm}.

2.° Sumar las cantidades 29^{Hl}, 7^{Dl} y 9^{l}; 127^{Hl}, 6^{Dl} y 8^{l}.

Reduciremos los dos sumandos á litros, y serán 2979^{l} y 12768^{l}.

$$\begin{array}{r} 2979 \\ 12768 \\ \hline \end{array}$$

Suma.. . . . . 15747^{l}; ó 1574^{Dl} y 7^{l}; ó 157^{Hl} y 47^{l}; ó 157^{Hl}, 4^{Dl} y 7^{l}.

Este último resultado puede hallarse también fácil y directamente, conservando los sumandos su forma compleja.

Sustracción de los números métricos.

203. Redúzcanse minuendo y sustraendo á una misma especie, y réstense después.

Ejemplos. 1.° $175^{m^2}'18 - 5432^{dm^2}$.

Reduciendo minuendo y sustraendo á una misma especie, por ejemplo á decímetros cuadrados, serán 17518 y 5432.

$$\begin{array}{r} 17518 \\ 5432 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia. . . . . . . 12086$^{dm^2}$, ó 120$^{m^2}$ y 86$^{dm^2}$.

2.° De 42^{m^3}, 180^{dm^3} y 98^{cm^3} queremos restar 7^{m^3}, 288^{dm^3} y 900^{cm^3}.

Reducidos los dos números á cm^3, serán 42.180098 y 7.280900.

$$\begin{array}{r} 42.180098 \\ 7.280900 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia. . . . . . 34.899198^{cm^3}, ó 34^{m^3}, 899^{dm^3} y 198^{cm^3}; cuyo resultado podrá hallarse también fácil y directamente, dejando á minuendo y sustraendo en su forma compleja.

204. *Multiplicación de los números métricos.*

Ejemplos. 1.° *¿Cuánto valen 17 metros de paño á 6'7 pesetas el metro?*

$$\begin{array}{r} 6'7 \\ 17 \\ \hline 469 \\ 67 \\ \hline 113'9 \end{array}$$ *pesetas.*

2.° *1 quintal métrico de azogue vale 534 pesetas: ¿cuánto valdrán* 89^{Kg} *y* 14^{g}*?*

El multiplicador reducido á quintales métricos (198) es 0'89014.

$$\begin{array}{r} 0'89014 \\ 534 \\ \hline 356056 \\ 267042 \\ 445070 \\ \hline 475'33476 \end{array}$$ *pesetas.*

3.° *¿Cuántos* Kg. *pesan* 1^{m^3} *y* 289^{dm^3} *de agua de mar á la temperatura de 4° del termómetro centígrado, suponiendo que la densidad del agua del mar sea* 1'025?

Para resolver esta cuestión, hallaremos en primer lugar el peso del 1^{m^3} y 289^{dm^3} de agua pura. Sabemos que 1^{dm^3} de agua destilada á 4°, pesa en el vacío 1^{Kg}; luego 1289^{dm^3} de agua pura, que es el número dado, pesarán 1289^{Kg}.

Ahora, siendo la densidad del agua del mar 1'025, es decir, siendo 1'025 la razón de los pesos de dos volúmenes iguales de agua de mar y agua pura, si llamamos P y p á ambos pesos, tendremos $\frac{P}{p} = 1'025$; por consiguiente, $P = p \times 1'025 = 1289 \times 1'025$.

$$\begin{array}{r} 1289 \\ 1'025 \\ \hline 6445 \\ 2578 \\ 1289 \\ \hline 1321'225 \end{array} = 1321^{Kg} \text{ y } 225^{g}.$$

4.° *1^{Hl} de trigo pesa 72^{Kg} y 126^{g}: ¿cuánto pesarán 37^{Hl} y 3^{l}?*
El multiplicador, reducido á hectólitros y tomado abstractamente, es 37'03, y el multiplicando en *Kg* es 72'126.

```
           7 2'1 2 6
             3 7'0 3
     ---------------
         2 1 6 3 7 8
       5 0 4 8 8 2
     2 1 6 3 7 8
     ---------------
     2 6 7 0'8 2 5 7 8
```

$= 2670^{Kg}$, 825^{g} y 78^{cg} $= 26^{Qm}$, 70^{Kg}, 825^{g} y 78^{cg}.

División de los números métricos.

205. Distingamos los dos casos de la división de números concretos (192): 1.°, en que el dividendo y el divisor son de la misma naturaleza; 2.°, en que el dividendo y el divisor son de diferente naturaleza.

1.^{er} *caso.* Se reducen dividendo y divisor á una misma especie, y se parten en seguida.

Ejemplo. *Pesando un hectólitro de trigo 65^{Kg} y 78^{g}, ¿cuántos hectólitros contendrá una carga del mismo trigo, que pesa 10^{Qm} y 234^{gramos}?*

Si reducimos á gramos el dividendo y el divisor, serán 1.000234 y 65078^{g}.

```
1000234  | 65078
         |--------
 349454  | 15'3697
  240640 |
   454060|
    635920
     402180
```

Contendrá dicha carga 15^{Hl}, 36^{l} y 97^{cl}.

2.° *caso.* Suponiendo que la cuestión sea de las que ocurren comunmente en este segundo caso (194), se reduce el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se busca, y la división se hace después.

Ejemplo. 17^{Kg}, 4^{Hg}, 5^{Dg} y 6^{g} *de metal blanco han costado* 132'4 *pesetas: ¿á cómo sale el Kg?*

El divisor, reducido á *Kg*, es 17^{Kg}'456.

```
1324000 | 17456
        |---------
 102080 | 7'584 pesetas.
  148000|
   83520|
```

Luego el valor del kilogramo es 7'584 pesetas.

LIBRO SEGUNDO.

PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE POR UNA Ó MÁS PROPORCIONES SIMPLES (*).

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

206. *Un móvil ha andado en 3'', con velocidad constante, $17\frac{1}{2}$ metros: ¿cuántos metros andará en 7'' con la misma velocidad?*

Sea x el número de metros que andará el móvil en 7'': si en 3'' anda $17\frac{1}{2}$ metros, en 1'' andará $\frac{17\frac{1}{2}}{3}$ metros; si en 7'' anda x metros, en 1'' andará $\frac{x}{7}$ metros; y como admitimos que la velocidad es la misma para ambos casos, tendremos la proporción

$$\frac{17\frac{1}{2}}{3}=\frac{x}{7},$$

ó invirtiendo esta proporción, y permutando en seguida sus medios, será

$$3:7::17\tfrac{1}{2}:x.$$

Vemos que en esta cuestión entran cuatro cantidades, dos homogéneas conocidas 3'' y 7'', y otras dos homogéneas $17\frac{1}{2}$ metros y x metros, correspondientes á las primeras; siendo la segunda, x metros, la incógnita del problema; y que las cuatro están ligadas por la proporción

$$3:7::17\tfrac{1}{2}:x.$$

207. Siempre que dos cantidades homogéneas estén ligadas á otras dos correspondientes, y también homogéneas, por la proporción: *Primera cantidad es á su homogénea como la correspondiente á la primera es á la correspondiente á la segunda*, se dice que dos homogéneas de dichas cuatro cantidades son *proporcionales* á las otras dos, ó son *entre sí* como las otras dos, ó están en *razón directa* de las otras dos.

Así, en el problema anterior se dirá que las distancias andadas por el móvil son proporcionales á los segundos empleados en andarlas, ó que los segundos empleados en andar las distancias son proporcionales á estas distancias.

(*) Entendemos por proporción *simple* una proporción en la cual uno de los términos es la incógnita de un problema. Así, si x es la incógnita de un problema, la proporción $a:b::c:x$ es una proporción simple; la proporción $a:b::c:x^2$ no lo es, ni tampoco la proporción $a:b::c:\sqrt{x}$.

208. *Un móvil, caminando* $5\frac{1}{2}$ *metros por segundo, ha tardado* $20''\frac{1}{3}$ *en andar una distancia: ¿caminando 7 metros por segundo, cuántos segundos tardará en andar la misma distancia?*

Llamemos x á este número de segundos: la distancia andada por el móvil será $5\frac{1}{2} \times 20\frac{1}{3}$ metros. Ahora, andando 7 metros por segundo, la distancia andada en los x segundos será también $7 \times x$ metros; luego $5\frac{1}{2} \times 20\frac{1}{3} = 7 \times x$, de donde resulta la proporción

$$5\frac{1}{2} : 7 :: x : 20\frac{1}{3}.$$

En esta cuestión entran, como en la anterior, cuatro cantidades, dos homogéneas conocidas $5\frac{1}{2}$ metros y 7 metros, y otras dos correspondientes á las primeras $20''\frac{1}{3}$ y x segundos, de las que la segunda es la incógnita del problema; y dichas cuatro cantidades están ligadas por la proporción

$$5\frac{1}{2} : 7 :: x : 27\frac{1}{3}.$$

209. Siempre que dos cantidades homogéneas estén ligadas á otras dos homogéneas correspondientes á las primeras por la proporción: *Cantidad primera es á su homogénea como la correspondiente á la segunda es á la correspondiente á la primera*, se dice que dos homogéneas de dichas cuatro cantidades están en *razón inversa* de las otras dos (*).

Así, en el problema anterior se dirá que las velocidades $5\frac{1}{2}$ metros y 7 metros están en razón inversa de los tiempos empleados por el móvil en andar la distancia, ó que los tiempos empleados por el móvil en andar la distancia están en razón inversa de las velocidades.

210. En toda cuestión en que entren dos cantidades homogéneas conocidas y otras dos correspondientes, siendo una de éstas la incógnita de la cuestión, las dos primeras serán proporcionales á las otras dos, si duplicando una cantidad indeterminada de la naturaleza de las primeras, debe duplicarse su correspondiente; y las dos primeras estarán en razón inversa de las otras dos, si duplicando una cantidad indeterminada de la naturaleza de las primeras, su correspondiente debe ser mitad.

Lo primero se verifica en el primer problema; pues si el móvil en cierto tiempo anda cierta distancia, en doble tiempo andará doble distancia, y hemos demostrado (é igualmente se puede demostrar en cualquier otro problema análogo) que las dos cantidades homogéneas $3''$ y $7''$ son proporcionales á sus correspondientes $17\frac{1}{2}$ metros y x metros.

(*) Si las mismas cantidades están ligadas por la proporción: *Primera cantidad es á su correspondiente como la correspondiente á la segunda es á la segunda*, siendo extremos de la proporción dos homogéneas y medios las otras dos, se dice que dos homogéneas son *recíprocamente proporcionales* á las otras dos.

Lo segundo sucede en el segundo problema; pues, si andando cierto número de metros por segundo, tarda el móvil cierto tiempo en andar la distancia, andando doble número de metros por segundo, tardará la mitad del tiempo; y hemos demostrado (y del mismo modo se puede demostrar en cualquier otro problema análogo) que las dos cantidades homogéneas $5\frac{1}{3}$ metros y 7 metros están en razón inversa de sus correspondientes $20''\frac{1}{3}$ y x segundos.

211. Si duplicando una de las cantidades homogéneas conocidas, su correspondiente no debe duplicarse ni ser mitad, la cuestión no depende de una proporción simple.

Ejemplo. *Un cuerpo, al caer en la atmósfera, corre en el primer segundo* (prescindiendo de la resistencia del aire) 4'9 *metros; en el segundo siguiente corre* $3 \times 4'9$ *metros; en el tercer segundo* $5 \times 4'9$ *metros; en el cuarto segundo* $7 \times 4'9$ *metros, y así sucesivamente: ¿en cuántos segundos bajará de* 400 *metros de altura?*

Cuanto mayor sea la altura, mayor es el tiempo que tarda el cuerpo en bajar; pero duplicando la altura, el tiempo que el cuerpo tarda en bajar ésta es menor que el doble del tiempo que tarda en bajar la primera: luego los tiempos empleados por el cuerpo en bajar no son proporcionales á las alturas bajadas, ni están en razón inversa de estas alturas; luego esta cuestión no depende de una proporción simple.

CAPÍTULO II.

PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE POR UNA SOLA PROPORCIÓN SIMPLE Ó REGLA DE TRES SIMPLE.

212. 1.° 13 *hectólitros de trigo han costado* 287'50 *pesetas: ¿cuánto costarán* 47 *hectólitros del mismo trigo?*

13 *hectólitros*. . . . . 287'50 *pesetas.*
47 x

Si cierto número de hectólitros cuestan cierto número de pesetas, doble número de hectólitros costarán doble; luego (210) los hectólitros son proporcionales á sus valores: tendremos, pues (*),

$$13 : 47 :: 287'50 : x = 1351'25 \text{ pesetas.}$$

2.° 20 *hombres hacen una obra en* 36 *días: ¿*45 *hombres en cuántos días harán una obra igual?*

20 *hombres*. . . . . 36 *días.*
45. x

Si cierto número de hombres hacen la obra en cierto tiempo,

(*) Antes de establecer la proporción, se reducirán las dos cantidades homogéneas conocidas á una especie, si no lo están ya.

doble número de hombres harán la misma obra en la mitad del tiempo, pues en esta cuestión se supone implícitamente que todos estos hombres trabajan lo mismo: luego (210) los hombres están en razón inversa de los dias; por consiguiente, tendremos la proporción $20 : 45 :: x : 36$.

Antes de hallar el valor de x se puede simplificar esta proporción, dividiendo por 5 el extremo 20 y el medio 45; y así tendremos

$$4 : 9 :: x : 36.$$

Aquí pueden partirse por 9 el medio 9 y el extremo 36, y la proporción será $4 : 1 :: x : 4$, $x = 16$ *dias.*

3.° *Una fuente arroja en 14 horas 2825 litros de agua: ¿cuántos arrojará en 23 horas?*

14 *horas*. . . . . . . 2825 *litros*
23. x

En doble tiempo arrojará doble cantidad de agua: es decir, que los tiempos son proporcionales á las cantidades de agua arrojadas por la fuente; luego la proporción será

$$14 : 23 :: 2825 : x = 4641 \tfrac{1}{14} \text{ litros.}$$

4.° *Una plaza sitiada tiene víveres para 15 dias: ¿cuál deberá ser la ración de cada persona para sostenerse 25 dias?*

15 *dias*. . . . . 1 *ración*
25. x

Si el tiempo se duplica, la ración debe ser mitad: luego los tiempos están en razón inversa de las cantidades de ración; si llamamos, pues, 1 á la ración ordinaria, tendremos la proporción

$$15 : 25 :: x : 1, \quad x = \tfrac{15}{25} = 0'60 \text{ de ración.}$$

5.° *Para empapelar una sala se han necesitado 200 metros de un papel cuyo ancho es $\frac{3}{4}$ de metro: ¿cuántos metros se necesitarán de otro papel cuyo ancho es $\frac{2}{3}$ de metro?*

$\frac{3}{4}$ *metro*. . . . . 200 *metros*
$\frac{2}{3}$. x

Si el ancho del papel fuese doble, el largo sería la mitad: los anchos están, pues, en razón inversa de los largos; luego

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{3} :: x : 200.$$

Quitando quebrados en esta proporción (168), será la nueva proporción $9 : 8 :: x : 200$;
y partiendo por 8 el medio 8 y el extremo 200, la proporción será

$$9 : 1 :: x : 25,$$

de donde resulta $x = 225$ *metros.*

213. MÉTODO DE REDUCCIÓN Á LA UNIDAD.

Las cuestiones que acabamos de resolver, y sus análogas, se pueden también resolver, sin formar proporción, por la regla siguiente: *hállese la cantidad correspondiente á una unidad de la especie de las dos homogéneas conocidas, y después se hallará la incógnita del problema, es decir, la cantidad correspondiente á una de las homogéneas conocidas.*

Resolvamos por este método los ejemplos anteriores.

Dispónganse las cantidades como en el procedimiento anterior.

1.° Si 13 hectólitros han costado 287'50 pesetas, un hectólitro costará 13 veces menos, ó $\frac{287'50 \text{ pts.}}{13}$, y por consiguiente 47 hectólitros costarán 47 veces más que 1 hectólitro, ó $\frac{287'50}{13} \times 47$ pesetas; en donde se ve que se hacen las mismas operaciones que formando la proporción.

2.° Si 20 hombres hacen una obra en 36 días, un hombre hará la misma obra en 36 días $\times$ 20, y por consiguiente 45 hombres harán la misma obra en $\frac{36 \times 20}{45}$ días $= \frac{4 \times 4}{1}$ días $=$ 16 días.

3.° Si en 14 horas arroja la fuente 2825 litros, en una hora arrojará $\frac{2825 \text{ litros}}{14}$, y por consiguiente en 23 horas, $\frac{2825}{14} \times 23$ litros.

4.° Si debiendo permanecer 15 días en la plaza sitiada, toca á cada persona la ración 1, debiendo permanecer un día, tocarán á cada persona 15 raciones; luego si han de permanecer 25 días, tocará á cada persona $\frac{15}{25} = 0'60$ de ración.

5.° Para aplicar este segundo método cuando los dos términos homogéneos conocidos son fraccionarios, conviene transformar dichos dos términos en quebrados de igual denominador. Así la cuestión del empapelado, después de reducidos los quebrados $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ á un común denominador $\left(\text{lo que da } \frac{9}{12} \text{ y } \frac{8}{12}\right)$, se resolverá como sigue: Si el ancho del papel fuere $\frac{1}{12}$ de metro, se necesitarían 200 $\times$ 9 metros; pero siendo de $\frac{8}{12}$, se necesitarán $\frac{200 \times 9}{8}$ metros $=$ 25 $\times$ 9^{m} $=$ 225 metros.

CAPÍTULO III.

PROBLEMAS QUE PUEDEN RESOLVERSE POR DOS Ó MÁS PROPORCIONES SIMPLES, Ó REGLA DE TRES COMPUESTA.

214. 1.° 18 *piezas de tela de* 1 $\frac{1}{2}$ *metros de ancho han costado* 5989 *pesetas: ¿cuánto costarán* 11 *piezas de tela de la misma calidad,* *y de igual largo que las anteriores, pero cuyo ancho es* 1 $\frac{1}{4}$ *metros?*

Disposición.

18 *piezas*. . . 1 $\frac{1}{2}$ *metros*. . . 5989 *pesetas*
11. . . . . . 1 $\frac{1}{4}$. x

Para resolver esta cuestión, haremos el siguiente razonamiento. Si 18 piezas de 1 $\frac{1}{2}$ metros de ancho cuestan 5989 pesetas, 11 piezas iguales á las anteriores ¿cuánto costarán? Sea y el número de pesetas que cuestan dichas 11 piezas: como á doble número de piezas, todas iguales, corresponde doble valor, las piezas serán proporcionales á sus valores; luego

$$18 : 11 : : 5989 : y.$$

Aquí pudiera hallarse el valor de y.

Considerando á y como conocida, diremos: si 11 piezas cuyo ancho es 1 $\frac{1}{2}$ metros cuestan y pesetas, 11 piezas cuyo ancho es 1 $\frac{1}{4}$ metros ¿cuánto costarán? Sea x el número de pesetas que costarán estas últimas 11 piezas: piezas de doble ancho deben valer doble; luego los anchos son proporcionales á los valores de las piezas; y por tanto

$$1\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{4} : : y : x.$$

Para hallar ahora la x, que es la incógnita del problema, pudiéramos despejar la y en la primera proporción, sustituir su valor en la segunda, y en seguida despejar la x; pero es preferible multiplicar las dos proporciones ordenadamente; y suprimiendo al mismo tiempo el factor y, común á los dos términos de la segunda razón, tendremos

$$18 \times 1\tfrac{1}{2} : 11 \times 1\tfrac{1}{4} : : 5989 : x.$$

Para deducir de esta proporción el valor de x, quitaremos primeramente los quebrados, multiplicando los dos términos de la primera razón por 4, y la nueva proporción será

$$18 \times 6 : 11 \times 5 : : 5989 : x,$$

de la cual resulta $x = 3049'95$ pesetas.

Resolvamos la misma cuestión por el método de reducción á la unidad.

Dispónganse las cantidades como en el procedimiento anterior.

Si 18 piezas de metro y medio de ancho valen 5989 pesetas, una de dichas piezas valdrá $\frac{5989}{18}$ pesetas. Si, siendo el ancho $\frac{6}{4}$ de metro, una de estas piezas vale $\frac{5989}{18}$ pesetas, siendo el ancho de $\frac{1}{4}$ de metro valdrá $\frac{5989}{18 \times 6}$; y siendo el ancho $\frac{5}{4}$ de metro, valdrá $\frac{5989 \times 5}{18 \times 6}$. Tenemos, pues, que una pieza cuyo ancho es $\frac{5}{4}$ de metro, vale $\frac{5989 \times 5}{18 \times 6}$; luego 11 piezas iguales á ellas valdrán $\frac{5989 \times 5 \times 11}{18 \times 6}$.

2.° *40 obreros, trabajando 7 horas al día, han hecho 300 metros de cerca en 8 días: ¿cuántos días tardarán 51 obreros, trabajando 6 horas al día, para hacer 459 metros de la misma labor?*

40 obreros. . . 7 horas. . . 300 metros. . . 8 días
51. . . . . 6. . . . . . . 459 x

Si 40 obreros, trabajando 7 horas al día, han hecho 300 metros en 8 días, ¿51 obreros, trabajando también 7 horas diarias, en cuántos días harán los 300 metros? Sea y este número de días: tendremos la proporción

$$40 : 51 :: y : 8 \qquad (A).$$

Si 51 obreros, trabajando 7 horas al día, hacen 300 metros en y días, ¿en cuántos días los harán, trabajando 6 horas al día? Sea z este número de días: tendremos

$$7 : 6 :: z : y \qquad (B).$$

Si para hacer 300 metros tardan z días, para hacer 459 ¿cuántos días tardarán? Sea x este número de días, que es la incógnita de la cuestión: tendremos $300 : 459 :: z : x$,
ó
$$459 : 300 :: x : z \qquad (C).$$

Para hallar el valor de x, multipliquemos ordenadamente las tres proporciones (A), (B), (C), y suprimiendo en la segunda razón el factor yz, común á sus dos términos, resulta

$$40 \times 7 \times 459 : 51 \times 6 \times 300 :: x : 8.$$

Simplificando esta proporción y despejando la x, se hallará

$$x = 11'2 \text{ días}.$$

Reducción á la unidad.

Si 40 obreros, trabajando 7 horas al día, han hecho 300 metros de cerca en 8 días, un obrero, trabajando 7 horas al día, tardará en hacer los 300 metros 8×40 días; trabajando una hora al día tardará $8 \times 40 \times 7$ días; trabajando 6 horas diarias tardará $\frac{8 \times 40 \times 7}{6}$ días. Si un obrero, trabajando 6 horas diarias, tarda $\frac{8 \times 40 \times 7}{6}$ días en hacer 300 metros, 51 obreros, trabajando las mismas 6 horas diarias, harán los 300 metros en $\frac{8 \times 40 \times 7}{6 \times 51}$ días; harán 1 metro en $\frac{8 \times 40 \times 7}{6 \times 51 \times 300}$ días, y harán 459 metros en $\frac{8 \times 40 \times 7 \times 459}{6 \times 51 \times 300}$ días.

lecion 81

CAPÍTULO IV.

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES Y REGLAS DE COMPAÑÍA.

215. *Dividir un número dado en partes proporcionales á otros números dados.*

Sea, por ejemplo, 100 el número dado: supongamos, para fijar las ideas, que se quiera dividir en tres partes proporcionales dos á dos á los números 2, 3, 5.

Sean x, y, z las tres partes de 100: tendremos

$$x + y + z = 100.$$
$$x : y :: 2 : 3,$$
$$x : z :: 3 : 5;$$

ó bien $\quad x : 2 :: y : 3, \qquad y : 3 :: z : 5,$

y por consiguiente

$$x : 2 :: y : 3 :: z : 5.$$

De estas tres razones iguales resultan (174) las proporciones:

$$x + y + z \quad \text{ó} \quad 100 : 2 + 3 + 5 :: x : 2,$$
$$x + y + z \quad \text{ó} \quad 100 : 2 + 3 + 5 :: y : 3,$$
$$x + y + z \quad \text{ó} \quad 100 : 2 + 3 + 5 :: z : 5.$$

Por consiguiente

$$x = \frac{100}{2 + 3 + 5} \times 2; \; y = \frac{100}{2 + 3 + 5} \times 3; \; z = \frac{100}{2 + 3 + 5} \times 5.$$

Luego: *Para dividir un número dado en partes proporcionales á varios números dados, se divide dicho número por la suma de los números á que deben ser proporcionales dichas partes, y el cociente se multiplica por cada uno de estos números.*

Nota. Los valores de x, y, z pueden escribirse de este modo:

$$x = \frac{100 \cdot 2}{2 + 3 + 5}; \; y = \frac{100 \cdot 3}{2 + 3 + 5}; \; z = \frac{100 \cdot 5}{2 + 3 + 5};$$

es decir: *Que las partes del número pueden hallarse multiplicándolo por cada uno de los números á que deben ser proporcionales dichas partes y dividiendo los productos por la suma de estos números.*

La primera regla no exige más que una división y tantas multiplicaciones cuantas son las partes en que se ha de dividir el número, mientras que la segunda regla exige tantas divisiones y multiplicaciones cuantas sean dichas partes.

216. Cuando el cociente de la división del número dado por la suma de los números á que deben ser proporcionales las partes no es exacto en enteros ni en decimales, y se trata de obtener los valores de las partes del número por la regla primera; como el cociente decimal no es exacto, los productos del mismo cociente por los números á que deben ser proporcionales las partes no serán exactos, y por eso quizá será preferible la regla segunda.

Para seguir la regla primera en tal caso, y obtener los productos de modo que los errores no lleguen á $\frac{1}{10^q}$, se verá cuál es el mayor número de cifras de la parte entera de los números á que deben ser proporcionales las partes; y si llamamos n á este número de cifras, el cociente, ó sea el multiplicando, deberá tener

$n + q$ cifras decimales (*). Pronto haremos uso de esta regla.

Ejemplos. 1.° *Dos personas de igual habilidad han hecho una obra, trabajando la primera 7 dias y la segunda 9 dias: se les han pagado por dicha obra 584 pesetas, y se trata de repartir esta cantidad entre las dos personas.*

Las dos partes en que debe dividirse la cantidad 584 pesetas deben ser proporcionales á los números 7 y 9 (209), pues duplicando el número de días de trabajo, se duplica también la cantidad correspondiente: luego la parte correspondiente á la primera persona es $\frac{584}{7+9} \times 7 = 255'50$ pesetas, y la correspondiente á la segunda $\frac{584}{7+9} \times 9 = 328'50$ pesetas.

2.° *Deja uno al morir la cantidad de 31200 duros, y su mujer en cinta; y dispone en su testamento que si su mujer pare hijo, la cantidad que se dé á la madre sea los $\frac{2}{3}$ de la correspondiente al hijo; y que si pare hija, la cantidad que perciba la madre sea los $\frac{5}{7}$ de la que se guarde para la hija. Sucede que esta mujer pare hijo é hija; y se trata de repartir la cantidad de 31200 duros entre la madre y los dos hijos, cumpliendo la voluntad del testador.*

La voluntad del testador es que la cantidad que perciba la madre sea á la del hijo como 2 : 3, y que la cantidad que perciba la madre sea á la de la hija como 5 : 7. Para reducir este problema al (215), representaremos la cantidad que corresponde á la madre por un número divisible por 2 y por 5, por ejemplo 10. Siendo 10 la parte de la madre, la del hijo se hallará por la pro-

---

(*) En efecto, sea c el cociente que tenga $n + q$ cifras decimales, e el error que se comete tomando esta cantidad en vez del cociente completo: éste será $c + e$, que multiplicado por el multiplicador N, cuya parte entera tiene n cifras, nos daría el producto verdadero $Nc + Ne$; y pues tomamos por multiplicando la cantidad c, y hallamos el producto Nc, este producto tiene de error Ne. Ahora bien: si en vez del cociente ó cantidad decimal indefinida tomamos la cantidad decimal de $n + q$ cifras, será (126) el error $e < \frac{1}{10^{n+q}}$; y como $N < 10^n$, será $Ne < \frac{10^n}{10^{n+q}}$, ó bien $Ne < \frac{1}{10^q}$. Si en el multiplicando tomásemos menor número de cifras decimales que $n + q$, por ejemplo $n + q - 1$, el error sería, según acabamos de demostrar, menor que $\frac{1}{10^{q-1}}$; y como esta cantidad es mayor que $\frac{1}{10^q}$, el error podría ser mayor que esta última fracción.

Es, pues, suficiente y necesario que el número de cifras decimales del multiplicando sea, según hemos dicho, $n + q$.

Por ejemplo, si una fracción decimal indefinida se ha de multiplicar por un número cuya parte entera tenga cuatro cifras, y se quiere obtener el producto de manera que el error no llegue á una milésima, el número de cifras decimales del multiplicando deberá ser $4 + 3 = 7$.

porción $2:3::10:x=15$, y la de la hija por la proporción $5:7::10:y=14$.

Así, pues, la cuestión está reducida á dividir el número 31200 duros en tres partes proporcionales dos á dos á los números 10, 15 y 14.

Luego, según la regla (215), la parte correspondiente á la madre será $\frac{31200}{39}\times 10 = 800\times 10 = 8000$ duros; la correspondiente al hijo $800\times 15 = 12000$ duros, y la de la hija $800\times 14 = 11200$ duros.

agu **217.** Se llama *regla de compañía* la regla que enseña á hallar la ganancia ó pérdida correspondiente al capital de cada uno de varios asociados, conociendo los capitales de éstos y la ganancia ó pérdida del capital social.

218. La resolución de los problemas de compañía estriba en estos dos principios:

1.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están el mismo tiempo en sociedad son proporcionales á los capitales.*

Este principio es evidente.

2.° *Las ganancias ó pérdidas de un capital son proporcionales á los tiempos que dicho capital está en sociedad.*

Este principio, aunque no es enteramente cierto (*), se admite como tal.

De estos dos principios se deduce el siguiente:

3.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales diferentes, que están diferentes tiempos en sociedad, son proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.*

Sean G y G' las ganancias correspondientes á los capitales C y C' que han estado en sociedad durante los tiempos T y T': decimos que $G : G' :: C\times T : C'\times T'$.

En efecto, sea G'' la ganancia correspondiente al capital C, al cumplir en sociedad el tiempo T'.

Las ganancias G'' y G', correspondientes al mismo capital C, son (2.° *principio*) proporcionales á los tiempos T y T', esto es,

$$G : G'' :: T : T'.$$

Las ganancias G'' y G', correspondientes á los capitales C y C', que

(*) En efecto, supongamos que un capital c empleado en un negocio, haya dado cierta ganancia al cabo de un año. En los seis primeros meses debe suponerse que habrá producido también una ganancia g: luego el capital que contribuye á la ganancia en el segundo semestre es $c+g$; c producirá en dicho segundo semestre la ganancia g, y g producirá una ganancia g': luego la ganancia que resulta en el segundo semestre es $g+g'$; y como la ganancia en el año es $2g+g'$, vemos que la ganancia g en el primer semestre es menor que la mitad de la ganancia en un año. Luego *las ganancias de un capital no son en realidad proporcionales á los tiempos.*

han estado igual tiempo T' en sociedad, son proporcionales á estos capitales (1.^{er} *principio*), esto es,

$$G'' : G' : : C : C'.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor G'', común á los dos términos de la primera razón, resulta $$G^{*}: G' : : C \times T : C' \times T'.$$

Problemas. 1.° *Tres comerciantes forman sociedad: el primero pone* 6500 *pesetas, el segundo* 9600 *pesetas y el tercero* 6000 *pesetas; han ganado* 25600 *pesetas: ¿cuánto corresponde á cada uno?*

Como en este problema se supone que los capitales han estado el mismo tiempo en sociedad, las ganancias respectivas serán proporcionales á dichos capitales.

Se trata, pues, de dividir la ganancia 25600 pesetas en tres partes proporcionales dos á dos á los números 6500, 9600 y 6000. Según la regla deducida del problema 215, las ganancias de los socios serán:

$$\text{la del primero } \frac{25600}{6500+9600+6000} \times 6500 = \frac{256}{221} \times 6500,$$
$$\text{la del segundo } \frac{25600}{6500+9600+6000} \times 9600 = \frac{256}{221} \times 9600,$$
$$\text{y la del tercero } \frac{25600}{6500+9600+6000} \times 6000 = \frac{256}{221} \times 6000.$$

Como la unidad es la peseta, los productos no deben tener errores que lleguen á 1 céntimo de peseta: luego si se quieren obtener los resultados por la primera regla (215), el cociente $\frac{256}{221}$ deberá tener seis cifras decimales, puesto que el mayor de los multiplicadores, que es 9600, tiene cuatro cifras. El cociente será, pues, 1'158371 pesetas, que multiplicado por los números 6500, 9600 y 6000 da los productos 7529'41 pts., 11120'36 pts. y 6950'22 pesetas, ganancias respectivas de los tres comerciantes.

2.° *Tres socios han puesto iguales capitales: el primero por* 7 *meses, el segundo por* 5 *meses y el tercero por* 4 *meses; han ganado* 10000 *pesetas: ¿cuánto corresponde á cada uno?*

Las ganancias de un mismo capital son proporcionales á los tiempos: luego la cuestión se resolverá dividiendo el número 10000 en tres partes proporcionales dos á dos á los números 7, 5 y 4. Luego la parte del primero será

$$\frac{10000}{7+5+4} \times 7 = 625 \times 7 = 4375 \textit{ pesetas},$$
$$\text{la del segundo } \frac{10000}{7+5+4} \times 5 = 625 \times 5 = 3125 \textit{ pesetas},$$
$$\text{y la del tercero } \frac{10000}{7+5+4} \times 4 = 625 \times 4 = 2500 \textit{ pesetas}.$$

3.° *Una persona emprende un negocio con* 12365 *pesetas de capital; un mes después se le une otra persona con* 20000 *pesetas; y pasado otro* *mes, se junta á las anteriores otra persona con* 15000 *pesetas; al cabo de* 7 *meses, contados desde el principio de la operación, la sociedad ha obtenido una utilidad de* 14340 *pesetas. ¿Cuál es la ganancia de cada uno de los socios?*

El capital 12365 pesetas del primer socio ha permanecido 7 meses en sociedad, el capital 20000 pts. del segundo socio ha permanecido 6 meses y el capital 15000 pts. del tercero ha permanecido 5 meses. La cuestión se reduce, pues, á dividir 14340 pts. en tres partes proporcionales dos á dos á los productos $12365 \times 7 = 86555$; $20000 \times 6 = 120000$; $15000 \times 5 = 75000$ de los capitales por los tiempos. La suma de estos tres números es 281555: luego la ganancia del primer socio es

$\frac{14340 \text{ pesetas}}{281555} \times 86555$, ó $\frac{2868 \text{ pesetas}}{56311} \times 86555 = 4408'37$ pesetas;

la ganancia del segundo es $\frac{2868 \text{ pesetas}}{56311} \times 120000 = 6111'77$ pesetas,

y la ganancia del tercero es $\frac{2868 \text{ pesetas}}{56311} \times 75000 = 3819'86$ pesetas.

Si se obtienen estos resultados por la primera regla (215), en el cociente $\frac{2868}{56311}$ deberán tomarse ocho cifras decimales, puesto que el error de cada producto debe ser menor que un céntimo de peseta, y que el mayor de los multiplicadores, que es 120000, tiene seis cifras (216).

CAPÍTULO V.

Leccion 18

INTERÉS.

219. Se llama *interés* la ganancia que produce un capital prestado con la condición de que 100 unidades de dinero produzcan al prestador una cantidad al cabo de un año.

Se llama *tanto por* 100 la cantidad que producen 100 unidades de dinero en un año.

En las cuestiones de interés conviene distinguir dos casos: 1.°, el tiempo en que el capital produce interés es un año; 2.°, este tiempo es diferente de un año.

1.er *caso.* Las cuestiones de este primer caso contienen tres cosas, de las que una cualquiera depende de las otras dos: estas tres cosas son el *capital*, el *tanto por* 100 y el *interés.*

Para hallar la relación que liga á estas tres cosas, llamemos c al capital, r al tanto por 100 é i al interés. Como á doble capital corresponde evidentemente doble interés, el capital 100 y el capital c serán (210) proporcionales al interés r de 100, ó tanto por 100, y al interés i del capital propuesto; es decir, que tendremos la proporción $$100 : c :: r : i,$$

de la cual se deducirá la incógnita de cualquiera de las tres cuestiones que pueden ocurrir.

Ejemplos. 1.° *¿Cuánto producirán en un año* 20000 *pesetas á* 6 *por* 100?

Tendremos

$$100 : 20000 : : 6 : i = \frac{20000 \times 6}{100} = 1200 \text{ pesetas.}$$

2.° *Hallar el capital que produce en un año* 1200 *pesetas de interés á* 5 *por* 100.

El capital c se hallará por la proporción

$$100 : c : : 5 : 1200, \quad c = \frac{1200 \times 100}{5} = 24000 \text{ pesetas.}$$

3.° *¿A cuánto por* 100 *habrán estado impuestas* 120000 *pesetas, para que hayan producido* 5800 *pesetas de interés en un año?*

El tanto por 100 se hallará por la proporción

$$100 : 120000 : : r : 5800, \quad r = \frac{58}{12} = 4\tfrac{5}{6} \text{ (*).}$$

2.° *caso.* Si el tiempo es diferente de un año, hay cuatro cosas que considerar, á saber: *capital, tanto por* 100, *tiempo* é *interés.*

Como cada una de estas cuatro cantidades puede ser incógnita, siendo conocidas las otras tres, pueden ocurrir cuatro problemas, cuya resolución exacta corresponde al Algebra. Pero como en la

---

(*) De las tres cuestiones que acabamos de resolver, la más frecuente es la primera, y ya se ve que su resolución consiste en *multiplicar el capital por el tanto por 100, y separar dos cifras de la derecha del producto para decimales:* si éstas son centésimas de real, tomando la tercera parte, se tendrán los maravedises á que equivale *(Comp.to*, 9).

Ejemplo. ¿Cuál es el interés anual de 34828 reales impuestos al 3 por 100?

Operación.

$$\begin{array}{r} 34828 \\ 3 \\ \hline 1044'84 \end{array}$$

1044 *rs.* 28 *mrs.*

Con más frecuencia aún suele tenerse que sacar un cierto tanto por 100 de una cantidad, sin que sea precisamente interés de un capital en un año, y para esto, se procede del mismo modo que se acaba de decir.

Ejemplo. Hallar el 5 por 100 de 22317 pesetas.

Operación.

$$\begin{array}{r} 22317 \\ 5 \\ \hline 1115'85 \end{array}$$

1115'85 *pesetas.*

Igualmente, para hallar el tanto por 1000 de una cantidad, se multiplica ésta por el tanto, y se separan tres cifras de la derecha del producto para decimales. Si la unidad de dinero es el real, se despreciará la cifra práctica se admite, por lo menos cuando el tiempo es menor que un año, que los intereses de un capital son proporcionales á los tiempos en que ha estado impuesto, se podrá hallar fácilmente *en esta suposición* la relación que liga á dichas cuatro cantidades.

Tomemos por unidad de tiempo el día, y consideremos el año de 360 días: llamemos t al tiempo ó número de días, é y al interés del capital al cabo del tiempo t.

Tendremos, en primer lugar, la proporción

$$100 : c :: r : i.$$

Ahora, como se admite que los intereses de un mismo capital son proporcionales á los tiempos en que ha estado impuesto, será

$$360 : t :: i : y.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor i común á los dos términos de la razón segunda, resulta

$$36000 : ct :: r : y \text{ (*)}.$$

De esta proporción se deducirá fácilmente cualquiera de las cuatro cantidades c, t, r, y, dadas las otras tres.

Resolvamos esta cuestión por el método de reducción á la unidad.

Si 100 en 360 días producen r, 1 producirá en el mismo tiempo $\frac{r}{100}$, y en un día producirá $\frac{r}{36000}$. Por consiguiente, c producirá en un día $\frac{cr}{36000}$, y en t días $\frac{crt}{36000}$; luego $y = \frac{crt}{36000}$, igualdad que da cualquiera de las cuatro cantidades y, c, r, t, conociendo las otras tres.

Obsérvese que el valor de y que acabamos de hallar, es justamente el que resulta de la proporción hallada por el otro método.

Ejemplos. 1.° *¿Qué interés producen 20000 pesetas en 149 días, siendo 6 el tanto por 1000 anual?*

---

de las milésimas, y sacando la tercera parte del número de centésimas, se tendrán los maravedises equivalentes.

Ejemplo. ¿Cuál es el 2 por 1000 de 85723 reales?

Operación.

$$\begin{array}{r} 85723 \\ 2 \\ \hline 171'446 \end{array}$$

171 *rs.* 15 *mrs.*

(*) Si el año se considera de 365 días, se hallará igualmente la proporción

$$36500 : ct :: r : y.$$

Si el mes fuese la unidad de tiempo, se hallaría del mismo modo la proporción

$$1200 : ct :: r : y.$$

Si la unidad de tiempo es el año, se hallará igualmente la proporción

$$100 : ct :: r : y.$$

Tendremos $36000 : 20000 \times 149 :: 6 : y$:

$$y = \frac{20000 \times 149 \times 6}{36000} = \frac{20 \times 149}{6} = \frac{10 \times 149}{3} = 496'66 \text{ pesetas.}$$

2.° *¿Cuál es el capital que produce en* 182 *días* 600 *pesetas de interés á* 5 *por* 100 *al año?*

Tendremos $36000 : c \times 182 :: 5 : 600$,

de donde sale $c \times 182 = \frac{36000 \times 600}{5}$,

y por consiguiente $c = \frac{36000 \times 600}{5 \times 182} = \frac{7200 \times 300}{91} = 23736'26$ pesetas.

3.° *¿En cuánto tiempo el capital* 20000 *pesetas producirá* 280 *pesetas á* 6 *por* 100 *al año?*

Tendremos $36000 : 20000 \times t :: 6 : 280$,

de donde resulta $20000 \times t = \frac{36000 \times 280}{6}$,

y $$t = \frac{36000 \times 280}{6 \times 20000} = \frac{6 \times 14}{1} = 84 \text{ días.}$$

4.° 20000 *pesetas han producido* 300 *pesetas de interés en* 3 *meses y* 20 *días: ¿cuál es el tanto por* 100 *anual?*

Tendremos $36000 : 20000 \times 110 :: r : 300$,

de donde resulta $r = \frac{36000 \times 300}{20000 \times 110} = \frac{18 \times 3}{11} = 4\frac{10}{11}$.

CAPÍTULO VI.

DESCUENTO.

Leccion 79

220. En el comercio no se hacen todos los pagos al contado: muchas veces da el deudor una *letra* ó *pagaré*, en que se obliga á pagar cierta cantidad en un plazo determinado. Si el dueño ó *tenedor* de la letra quiere deshacerse de ella, y obtener su valor antes de su vencimiento, y para esto halla quien quiera tomar dicho pagaré, convendrán ambos en que el tomador entregará en el acto cierta cantidad, menor que el valor nominal de la letra, al tenedor de la misma. La diferencia entre el valor futuro ó nominal de la letra y su valor actual se llama *descuento* de la letra. Esta diferencia es evidentemente el interés que debe producir el valor actual de la letra hasta el vencimiento de ésta.

De dos modos se suelen hacer los convenios para el cálculo del descuento: en el primero convienen tomador y tenedor en que el dinero que el primero entrega al segundo producirá al primero un cierto tanto por 100 al año; en el segundo convienen en que de cada 100 unidades del valor nominal de la letra se rebaje una cierta cantidad llamada *tanto de descuento*.

Primer modo de descontar.

Distinguiremos dos casos: 1.°, el plazo de la letra es de un año; 2.°, dicho plazo es diferente de un año.

1.er *caso.* Cada 100 unidades de dinero producen al tomador de la letra un cierto tanto por 100: luego 100 unidades en la actualidad equivalen á 100 + *el tanto* al cabo de un año, ó al contrario, 100 + *el tanto* dentro de un año valen 100 ahora; luego para hallar el valor actual de la letra, tendremos la proporción

$$100 + \text{tanto} : \text{valor nominal} : : 100 : x.$$

Ejemplo. *¿Cuánto vale actualmente una letra de* 20000 *pesetas que vence dentro de un año, siendo* 6 *el tanto por* 100 *de interés según convenio?*

Sea x el valor actual de la letra: tendremos

$$106 : 20000 : : 100 : x = \frac{20000 \times 100}{106} = 18867'92 \text{ pesetas.}$$

2.° *caso.* Si el plazo no es de un año, se admite en la práctica que el interés es proporcional al tiempo (*); y en este supuesto se resuelve la cuestión por medio de dos proporciones.

Ejemplo. *¿Cuál es el valor actual de una letra de* 20000 *pesetas que vence dentro de* 7 *meses, siendo* 6 *el tanto de interés al año?*

Hallaremos en primer lugar el interés x de 100 en 7 meses por la proporción $12 : 7 : : 6 : x.$

Conociendo el interés x de 100 en los 7 meses, hallaremos el valor actual y de la letra por la proporción

$$100 + x : 20000 : : 100 : y.$$

Sacando de la primera el valor x; sustituyendo en la segunda, y despejando la y, resulta

$$y = \frac{20000 \times 100}{100 + \frac{6 \times 7}{12}} = \frac{20000 \times 100 \times 12}{12 \times 100 + 6 \times 7} = 19323'67 \text{ pesetas.}$$

Segundo modo de descontar.

Rebajando de cada 100 unidades el tanto del descuento, se hallará fácilmente lo que hay que rebajar del capital, suponiendo que el plazo es de un año; y si el plazo es diferente del año, se

(*) Siempre que se use la frase abreviada *una cantidad de cierta especie es proporcional á otra de diferente especie, ó de la misma*, se debe entender que dos cantidades de la primera especie son proporcionales á sus dos correspondientes de la otra especie. Así, cuando decimos el *interés es proporcional al tiempo*, debemos entender que los intereses de un mismo capital correspondientes á dos tiempos diferentes, son proporcionales á estos tiempos.

calcula en la práctica el descuento correspondiente, admitiendo la proporción entre el descuento y el tiempo. Hallado el descuento, se tendrá el valor actual de la letra restando el descuento de su valor nominal.

Ejemplos. 1.° *¿Cuánto vale una letra de 20000 pesetas, cuyo plazo es un año y 6 el tanto de descuento?*

Resolución. $100 : 20000 :: 6 : x = 1200$ pesetas, que es el descuento; luego el valor actual será 18800 pesetas.

2.° *¿Cuánto vale actualmente una letra de 20000 pesetas, cuyo plazo es de 7 meses y 5 el tanto de descuento anual?*

Resolución. $100 : 20000 :: 5 : x$, descuento de un año:

$$12 : 7 :: x : y.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y despejando la y en la proporción que resulta, será

$$y = \frac{20000 \times 7 \times 5}{12 \times 100} = 583'33,$$

descuento en 7 meses; luego el valor actual de la letra será 19416'67 pesetas (*).

CAPÍTULO VII.

Seccion 1ª

REGLA CONJUNTA.

228. *Si se multiplican ordenadamente varias equivalencias* (**) (como las siguientes: 4 kilogramos = 3 duros, 8 duros = 7 metros, 5 metros = 3 hectólitros), *en las que la especie del primer miembro de cada uno sea la misma que la del segundo miembro anterior, los productos serán equivalentes, siendo el primer producto de la primera especie y el segundo producto de la última especie.*

Para demostrar este teorema, consideraremos dos casos: 1.°, que sean dos solas las equivalencias; 2.°, que sea cualquiera el número de equivalencias.

1.er *caso.* Sean las dos equivalencias

$$3^a = 5^b,$$
$$6^b = 7^c:$$

decimos que $3^a \times 6 = 5 \times 7^c$, ó que $18^a = 35^c$.

En efecto, multiplicando los dos miembros de la primera

(*) Véase mi *Memoria sobre el cálculo del interés*, en la que se manifiesta por primera vez el error de estas reglas, y se dan las verdaderas para calcular el interés y el descuento.

(**) Entendemos por *equivalencia* la reunión por medio del signo = de dos cantidades equivalentes, pero referidas á unidades diferentes como ésta: 3 duros = 15 pesetas.

equivalencia por el número 6 y los dos de la segunda por el número 5, tendremos

$$18^a = 30^b, \quad 30^b = 35^c;$$

luego $\quad 18^a = 35^c.$

2.º *caso.* Sean las equivalencias

$$3^a = 5^b,$$
$$6^b = 7^c,$$
$$11^c = 9^d,$$
$$10^d = 21^e,$$

decimos que $\quad 3.6.11.10^a = 5.7.9.21^e.$

En efecto, según el primer caso, de las dos equivalencias primeras resulta esta otra: $\quad 3.6^a = 5.7^c.$

De ésta y de la tercera resulta, según el primer caso, esta otra:

$$3.6.11^a = 5.7.9^d.$$

De ésta y de la cuarta resulta igualmente

$$3.6.11.10^a = 5.7.9.21^e.$$

Del mismo modo se continuaría si hubiera mayor número.

222. Se puede reducir por medio de proporciones, ó por el método de reducción á la unidad, una cantidad de especie dada á su equivalente en otra especie, estando ambas ligadas por cierto número de equivalencias entre ellas y otras cantidades; pero se reducirá con mayor brevedad por medio del teorema que se acaba de demostrar. Este último método de reducción se llama *regla conjunta.*

Ejemplo. *Reducir* 21000 *libras catalanas á reales, sabiendo que* 7 *libras catalanas equivalen á* 5 *pesos, que un peso tiene* 512 *maravedises, y que* 34 *maravedises hacen un real.*

Resolvamos, en primer lugar, esta cuestión por medio de proporciones.

Diremos: si siete libras catalanas valen 5 pesos, ¿21000 libras catalanas cuántos pesos valdrán? Sea x este número de pesos, tendremos la proporción

$$7 : 5 : : 21000 : x.$$

Considerando ahora á x como si fuese conocida, diremos: si un peso tiene 512 maravedises, ¿x pesos cuántos maravedises tendrán? Sea y este número de maravedises, tendremos

$$1 : 512 : : x : y.$$

Consideremos á y como una cantidad conocida y diremos: si 34 maravedises componen un real, ¿y maravedises cuántos reales compondrán? Sea z este número de reales, será

$$34 : 1 : : y : z.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor xy común á los dos términos de la segunda razón, tendremos

$$7 \times 1 \times 34 : 5 \times 512 \times 1 : : 21000 : z.$$

Simplificando esta proporción (168), y despejando la z, se hallará $z = 225882$ reales y 8 maravedises.

Resolvamos el ejemplo por reducción á la unidad.

Si 7 libras catalanas valen 5 pesos, una libra catalana valdrá $\frac{5 \text{ pesos}}{7}$, y 21000 libras catalanas valdrán $\frac{5 \times 21000}{7}$ pesos. Teniendo 1 peso 512 maravedises, los $\frac{5 \times 21000}{7}$ pesos compondrán $\frac{5 \times 21000 \times 512}{7}$ maravedises, ó $\frac{5 \times 21000 \times 512}{7 \times 34}$ reales, número idéntico al hallado por el método anterior.

Resolvamos ahora la misma cuestión por la regla conjunta.

Representemos por x el número de reales á que equivalen las 21000 libras catalanas, y establezcamos las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} x \text{ reales} &= 21000 \text{ libras catalanas,} \\ 7 \quad &= 5 \text{ pesos,} \\ 1 \quad &= 512 \text{ maravedises,} \\ 34 \quad &= 1 \text{ real.} \end{aligned}$$

Se principia por cualquiera de las cantidades, y se continúan las equivalencias, teniendo siempre cuidado de que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo miembro de la inmediata anterior, hasta llegar á un segundo miembro de la misma especie que la del primer miembro de la primera equivalencia. Multiplicando en seguida ordenadamente todas las equivalencias, los productos serán equivalentes, ó más bien iguales, puesto que ambos representan unidades de la misma especie.

Tendremos, pues, según el teorema de las equivalencias,

$$x \times 7 \times 1 \times 34 \text{ reales} = 21000 \times 5 \times 512 \times 1 \text{ reales,}$$

ó $$x \times 7 \times 1 \times 34 = 21000 \times 5 \times 512 \times 1;$$

y de aquí se deduce (16)

$$x = \frac{21000 \times 5 \times 512 \times 1}{7 \times 1 \times 34}.$$

Simplifiquemos este quebrado, suprimiendo factores comunes á numerador y denominador, y tendremos

$$x = \frac{3000 \times 5 \times 256}{7}.$$

He aquí las equivalencias escritas en otro orden diferente del primero:

$$\begin{aligned} 512 \text{ mrs.} &= 1 \text{ peso,} \\ 5 \quad &= 7 \text{ libras,} \\ 21000 \quad &= x \text{ rs.,} \\ 1 \quad &= 34 \text{ mrs.} \end{aligned}$$

Multiplicando estas equivalencias ordenadamente, se hallará el mismo resultado que con la disposición primera.

Nota. Antes de despejar la incógnita, conviene efectuar las simplificaciones posibles entre los primeros miembros y los segundos. En seguida, si la incógnita es un primer miembro, se hallará su valor dividiendo el producto de los segundos miembros por el producto de los primeros miembros conocidos; y si la incógnita es un segundo miembro, se hallará su valor dividiendo el producto de los primeros miembros por el producto de los segundos miembros conocidos.

Así, en el ejemplo propuesto suprimiremos el factor 2 común al primer miembro 512 y al segundo 34, y tendremos en lugar de ellos 256 y 17; suprimiremos en seguida el factor 7 común á 21000 y 7, y tendremos en lugar de estas cantidades las 3000 y 1. Como ya no hay más reducciones, se tendrá

$$x = \frac{256 \times 5 \times 3000}{17}.$$

CAPÍTULO VIII.

REGLA DE ALIGACIÓN.

Alig.

223. Se llama *regla de aligación* la regla que enseña á resolver estos dos problemas:

1.° Conociendo las cantidades de diferente especie, que deben entrar en una mezcla, y sus precios (*) respectivos, hallar el precio medio ó precio de la mezcla.

2.° Conociendo el precio medio y los de las especies, hallar las cantidades de dichas especies que deben entrar en la mezcla.

Para resolver el primer problema, se hallan los valores de las cantidades que se mezclan, y la suma será el valor de la mezcla: dividiendo dicha suma por la de las cantidades mezcladas, se tendrá el valor de una unidad de la mezcla ó el precio medio de ésta.

Ejemplos. 1.° *Se han mezclado 25 hectólitros de trigo de á 20 pesetas el hectólitro con 30 hectólitros de á 18 pesetas, y se quiere averiguar lo que vale el hectólitro de trigo mezclado.*

25 hectólitros de trigo de á 20 pesetas valen 500 pesetas, y 30 hectólitros de á 18 pesetas valen 540 pesetas; luego los 55 hectólitros valen 1040 pesetas: por tanto, cada hectólitro de trigo mezclado valdrá $\frac{1040}{55}$ pesetas $=$ 18'90 pesetas.

2.° *Mezclando 24 litros de vino de á 3 pesetas litro con 7 litros de agua, ¿cuánto valdrá cada litro de la mezcla, suponiendo que el agua no cueste nada?*

(*) Entendemos por *precio* el valor de la unidad.

Los 24 litros valen 72 pesetas; y como la mezcla contiene 31 litros, cada litro del vino aguado valdrá $\frac{72}{31} = 2\frac{10}{31}$ pesetas.

3.° *Se ligan 32 marcos de plata cuya ley es de 11 dineros; 20 marcos de plata cuya ley es de 11 dineros y 10 granos, y 8 marcos de plata cuya ley es de 10 dineros y 9 granos, y se quiere saber cuál será la ley de la aleación* (*).

32 marcos cuya ley es de 11 dineros valen 552 dineros de plata pura; 20 marcos de á 11 dineros y 10 granos valen 228 dineros y 8 granos de plata pura; y 8 marcos de á 10 dineros y 9 granos valen 82 dineros de plata pura: luego los 60 marcos de la liga valen 663 dineros y 8 granos; luego cada marco de la liga valdrá $\frac{663 \textit{ dineros y } 8 \textit{ granos}}{60} = 11$ dineros y $1\frac{1}{3}$ granos; luego la ley de la aleación es de 11 dineros y $1\frac{1}{3}$ granos (**).

224. Para resolver el segundo problema de la regla de aligación, demostraremos antes el siguiente teorema:

Si son dos las especies que se mezclan, las cantidades que deben tomarse de ambas especies están en razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio; es decir, que tendremos la proporción: cantidad de la primera especie es á cantidad de la segunda especie, como la diferencia entre el precio medio y el de la segunda especie es á la diferencia entre el precio medio y el de la primera especie.

Demostración. Sean c las unidades de la especie cuyo precio

(*) El marco de plata se dividía en 12 *dineros;* el dinero en 24 *granos;* y se entendía por *ley* de una aleación de plata la cantidad de plata pura que había en cada marco de dicha aleación. Así, si la ley de la plata era de 11 dineros, cada marco de dicha plata contenía 11 din. de plata pura y 1 din. de materia extraña. Si la ley era de 10 dineros y 9 granos, cada marco contenía 10 din., 9 gran. de plata pura y 1 din., 15 gran. de materia extraña. Hoy la *ley de la plata* se señala, por las milésimas de ésta que entran en cada unidad de la aleación.

(**) A esta misma clase de problemas puede asimilarse el siguiente: *Conocidos* por la experiencia ú observación *varios valores aproximados de una cantidad, hallar el valor de esta cantidad.*

Súmense todos los valores de dicha cantidad, y divídase la suma por el número de valores: el cociente (que será probablemente más aproximado al valor verdadero de la cantidad que todos los demás valores) se considera como el verdadero valor de la cantidad.

Ejemplo. Habiendo medido cuatro veces la distancia que hay entre dos puntos del terreno, se han hallado los siguientes valores:

1.ª medición..	1423'5 metros.	3.ª................	1422'5.
2.ª...........	1425.	4.ª................	1424.

La suma de los cuatro valores de la distancia pedida es 5695 metros: dividiéndola por 4, el cociente 1423,75 metros se toma por la verdadera distancia de los dos puntos.

sea 55 por ejemplo, c' las de la especie cuyo precio supongamos sea 47, y sea 50 el precio medio, decimos que

$$c : c' : : 50 - 47 : 55 - 50.$$

En efecto, cada unidad que para mezclar se tome de la primera especie, sufre en su valor una baja de 55 — 50; luego el valor de las c unidades disminuye en $(55 - 50) \times c$. Cada unidad de la segunda especie tiene en su valor un aumento de 50 — 47; luego el valor de las c' unidades aumenta en $(50 - 47) \times c'$. Mas como queremos que el valor total de las dos cantidades que entran en la mezcla sea el mismo antes y después de mezclarse, la disminución que sufre la una debe ser igual al aumento de la otra; luego

$$(55 - 50) \times c = (50 - 47) \times c',$$

de donde resulta la proporción

$$c : c' : : 50 - 47 : 55 - 50.$$

Teorema recíproco. *Si las cantidades de las dos especies están en razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio, el precio de su mezcla será igual al precio medio dado.*

Tenemos por hipótesi la proporción

$$c : c' : : 50 - 47 : 55 - 50,$$

y vamos á demostrar que el precio de la mezcla de las cantidades c y c' es 50, precio medio dado.

En efecto, de la proporción supuesta se deduce la igualdad

$$(55 - 50) \times c = (50 - 47) \times c',$$

ó

$$55\,c - 50\,c = 50\,c' - 47\,c';$$

y añadiendo á los dos miembros de esta igualdad $50\,c$ y $47\,c'$ y separando en el segundo miembro de la nueva igualdad el factor común 50, tendremos

$$55\,c + 47\,c' = 50 \times (c + c'),$$

ó

$$\frac{55\,c + 47\,c'}{c + c'} = 50;$$

y pues, según el problema primero, el primer miembro de esta última igualdad es el precio de la mezcla de las cantidades c y c', se ve que éste es igual al precio medio dado.

225. Esto supuesto, observemos que en el ejemplo general que nos ha servido para la demostración del teorema, la diferencia entre el precio medio y el de la segunda especie es 3, y la diferencia entre el precio medio y el de la primera especie es 5; luego si tomamos por cantidad de la primera especie 3, y por cantidad de la segunda especie 5, estas dos cantidades están en razón inversa de las diferencias 5 y 3 de los precios de las dos especies al precio medio 50; luego, en virtud del teorema recíproco, formarán una solución de la cuestión. Vemos, pues, que se tiene una solución del problema tomando por cantidad de la primera especie la diferencia entre el precio medio y el de la segunda especie, y por cantidad de la segunda especie la diferencia entre el precio medio y el de la primera especie; y como, multiplicando las dos cantidades de la primera solucion por un número cualquiera, su razón no se altera, los productos estarán también en razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio, y por consiguiente formarán otra solución. Tiene, pues, el problema infinitas soluciones fáciles de hallar.

Ejemplo. *Teniendo plata cuya ley es de* 835 *milésimas, como es la que se emplea para las monedas pequeñas, y plata pura con ley de* 1000 *milésimas, ¿cuántos gramos de una y otra plata se deben ligar para que la ley de la liga sea de* 900 *milésimas, necesaria para acuñar monedas de cinco pesetas?*

Disposición de la operación.

	835.	100
900		
	1000.	65

Las diferencias 65 y 100 entre las leyes de los dos metales y la ley media, trocadas, manifiestan los gramos de plata que se deben mezclar, para que la ley media sea de 900 milésimas. Si se quieren obtener otras soluciones, no hay más que multiplicar las cantidades 100 y 65 por números cualesquiera. Siendo éstos 2, 3, etc., resultarán las soluciones siguientes: 200 gramos de 835 milésimas y 130 gramos de 1000 milésimas; 300 gramos de 835 milésimas y 195 gramos de 1000 milésimas, etc.

226. Si las especies son más de dos, se reduce este caso al que acabamos de considerar; para lo cual, se hallarán por la regla anterior las cantidades que se deben tomar de dos especies cuyos precios comprendan al precio medio; se hallarán igualmente las cantidades de otras dos especies cuyos precios comprendan también al precio medio, y así se continuará hasta que se conozcan las cantidades que deben tomarse de todas las especies.

Ejemplo. *¿Cuántos kilogramos de te de á* 11 *pesetas, de á* 9 *pesetas, de á* 6 *pesetas, de á* 5 *pesetas y de á* 2 *pesetas se deben mezclar, para que resulte te de á* 8 *pesetas el kilogramo?*

	11	2	6
	9	3	
8	6	3	
	5	1	
	2		3

Resulta que se pueden mezclar 2 kilogramos de á 11 pesetas con 3 kilogramos de á 6 pesetas, y se tendrán 5 kilogramos de á 8 pesetas (224); 6 kilogramos de á 11 pesetas con 3 kilogramos de á

2 pesetas, y se tendrán 9 kilogramos de á 3 pesetas; 3 kilogramos de á 9 pesetas con 1 kilogramo de á 5 pesetas, y se tendrán 4 kilogramos de á 8 pesetas.

Luego, mezclándolos todos, tendremos 18 kilogramos de á 8 pesetas.

Se pueden multiplicar cada dos cantidades correspondientes 2 y 3, 6 y 3, 3 y 1 por números cualesquiera, y cada dos productos correspondientes pueden reemplazar á los dos primeros números.

Son, pues, infinitas las soluciones que pueden hallarse.

Otra infinidad de soluciones.

	11	3		6
8	9		2	
	6		1	
	5	3		
	2			3

Es decir, que se pueden mezclar 3 kilogramos de á 11 pesetas con 3 kilogramos de á 5 pesetas; 2 kilogramos de á 9 pesetas con 1 kilogramo de á 6 pesetas; 6 kilogramos de á 11 pesetas con 3 de á 2 pesetas, y la mezcla contendrá 18 kilogramos de á 8 pesetas. Multiplicando en seguida cada dos cantidades correspondientes por números cualesquiera, se tendrá otra infinidad de soluciones.

Todavía se podrían hallar más soluciones.

227. Para que el segundo problema de la regla de aligación sea determinado (*), es preciso someter las incógnitas á otras condiciones, en virtud de las cuales cada incógnita no tenga más que un solo valor.

Si sólo se mezclan dos especies, basta añadir una cualquiera y sola condición. La que se puede añadir, sin que la cuestión salga de la Aritmética y entre en el dominio del Algebra, es una de estas tres: *Que se conozca la cantidad de una de las dos especies; que se conozca la suma de las cantidades de ambas especies; que se conozca la diferencia de las mismas.*

Ejemplo 1.° *Teniendo* 16 *kilogramos de pólvora de á* 12 *pesetas kilogramo, ¿cuántos de á* 8 *pesetas se deberán juntar con ellos, para que cada kilogramo de la mezcla valga* 10'50 *pesetas?*

Sean x los kilogramos que se deben tomar de á 8 pesetas: tendremos

$$16 : x : : 2'50 : 1'50;$$

(*) Un problema se llama *determinado*, cuando cada una de sus incógnitas no tiene más que un solo valor; y se llama *indeterminado* cuando alguna de sus incógnitas tiene varios valores.

ó bien multiplicando por 2 el término medio 2'50 y el extremo 1'50, tendremos

$$16 : x : : 5 : 3, \quad x = 9'60 \text{ kilogramos de á 8 pesetas.}$$

2.° *Con agua cuya temperatura es de 32° se quiere mezclar agua á 0°: ¿cuántos litros de las dos se deben tomar para que resulten 100 litros de á 19°?*

Sean x é y los litros que se deben tomar de las dos aguas: tendremos $x : y : : 19 : 32.$

Como en el caso actual conocemos la suma de x é y, que es 100, tendremos (175)

$$x : x + y : : 19 : 32,$$
$$y : x + y : : 13 : 32,$$

ó bien $x : 100 : : 19 : 32, \quad x = \frac{1900}{32} = 59 \frac{3}{8}$ *litros,*

$y : 100 : : 13 : 32, \quad y = \frac{1300}{32} = 40 \frac{5}{8}$ *litros.*

Deben, pues, mezclarse $59 \frac{3}{8}$ litros á 32° con $40 \frac{5}{8}$ litros á 0°, para tener en el instante de la mezcla 100 litros á 19°.

3.° *¿Cuántos hectólitros de trigo de á 30 pesetas y de á 20 pesetas se han de mezclar para tener trigo de á 27 pesetas, excediendo el primer número al segundo en 30 hectólitros?*

Sean x é y los hectólitros de á 30 pesetas y de á 20 pesetas: tendremos $x : y : : 7 : 3.$

Como en el caso actual conocemos la diferencia de x é y, que es 30, modificaremos la proporción hallada, del modo siguiente (175):

$$x - y : x : : 4 : 7,$$
$$x - y : y : : 4 : 3,$$

ó bien $30 : x : : 4 : 7, \quad x = 52'5$ *hectólitros de 30 pesetas,*

$30 : y : : 4 : 3, \quad y = 22'5$ *hectólitros de 20 pesetas.*

228. Hemos resuelto los dos problemas que comunmente se proponen en la regla de aligación; pero también pueden llamarse *problemas de aligación* aquéllos en que, conociendo el precio medio y las cantidades que entren en la mezcla, se piden los precios de las especies. Todos los problemas de aligación se resuelven por el Algebra muy naturalmente, sin necesidad de ningún conocimiento particular, ni aun del teorema (224); pues no son más que problemas de primer grado, determinados ó indeterminados, que se ponen en ecuación en virtud de la condición de que la suma de las cantidades valga lo mismo antes y después de la mezcla, ó en virtud de la condición de que la disminución de valor que en unas resulta por la mezcla, sea igual al aumento que reciben las otras.

COMPLEMENTO DE LA ARITMÉTICA.

CAPÍTULO I.

TEORÍA DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE NUMERACIÓN.

1. En el sistema ordinario de numeración cada unidad de un orden cualquiera vale 10 unidades del orden inmediato inferior, lo que exige que el número de cifras sea diez, incluso el cero.

Si conviniésemos en que cada unidad de un orden cualquiera valiese b unidades del orden inmediato inferior, serían necesarias y suficientes b cifras, entre ellas el cero, y así se pueden formar tantos sistemas de numeración como se quieran.

Se llama *base* de un sistema de numeración el número de sus cifras.

Escrito un número en el sistema decimal, escribir dicho número en otro sistema.

Propongámonos escribir en el sistema duodecimal el número 14829.

En el sistema duodecimal se necesitan dos signos nuevos para indicar los números *diez* y *once:* nosotros representaremos estos dos números por las letras griegas δ y ω.

Esto supuesto, debemos, antes de todo, hallar el número total de unidades de segundo orden del nuevo sistema que contienen las 14829 unidades de primer orden. Como una unidad de segundo orden vale 12 de las del primero, dividiendo las 14829 por 12, obtendremos 1235 unidades de segundo orden y 9 de primer orden. Como una unidad de tercer orden tiene 12 de segundo orden, dividiendo las 1235 por 12, hallaremos 102 unidades de tercer orden y 11 de segundo orden. Del mismo modo, partiendo las 102 unidades de tercer orden por 12, el cociente 8 será las unidades de cuarto orden y el resto 6 las de tercer orden. Como el número 8 no tiene ninguna unidad de orden superior, resulta que el número 14829, escrito en el sistema duodecimal, será $86\omega9$.

Operación.

14829	12		
28	1235	12	
42		102	12
69	035		
9	$11 = \omega$	6	8

Dado un número escrito en un sistema diferente del decimal, escribir dicho número en este sistema.

Este problema, inverso del anterior, es también muy fácil de resolver.

Sea el número 86ω9 escrito en el sistema duodecimal.

Es evidente que el número propuesto equivale á

$$9 + \omega \times 12 + 6 \times 12^2 + 8 \times 12^3,$$

ó á $$9 + 11 \times 12 + 6 \times 144 + 8 \times 1728 = 14829.$$

Dado un número escrito en un sistema diferente del decimal, escribir dicho número en otro sistema diferente también del decimal.

Se hallará el valor del número en el sistema decimal, y en seguida se pasará al nuevo sistema.

Ejemplo. Escribir en el sistema cuya base es 7 el número 423 escrito en el sistema duodecimal.

En primer lugar, hallaremos que el número 423, escrito en el sistema duodecimal, equivale á

$$3 + 2 \times 12 + 4 \times 144 = 603$$

en el sistema ordinario. Ahora se hallará que el número 603 equivale en el sistema cuya base es 7 á 1521. Luego los números 423 y 1521, escritos respectivamente en el sistema duodecimal y en el sistema cuya base es 7, son iguales; y ambos equivalen al número 603 del sistema ordinario.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES ABREVIADAS.

Multiplicación de números enteros.

2. Se puede efectuar una multiplicación de dos números enteros del modo siguiente: hállense los productos del multiplicando por las cifras del multiplicador, lo que se hace fácilmente observando que el producto del multiplicando por 3 es la suma de los productos por 2 y por 1; el producto por 4 es doble del producto por 2, el producto por 5 es la suma de los productos por 2 y por 3, etc. Escríbanse los productos parciales en sus lugares correspondientes, y súmense dichos productos parciales.

Ejemplo.

Multiplicando	43216893
Multiplicador	6284543
	129650679
	172867572
	216084465
	172867572
	345735144
	86433786
	259301358
	271598422384899

Productos parciales.

1	43216893
2	86433786
3	129650679
4	172867572
5	216084465
6	259301358
8	345735144

Este método es preferible al ordinario cuando el multiplicador tiene muchas cifras.

3. *Multiplicación de un número por* 11, 12, 13....., 19.

Multiplíquese el número por la cifra de las unidades, y colóquese debajo de dicho número el producto parcial adelantando un lugar á la derecha, y súmense los dos productos parciales.

Ejemplos. 1.° Multiplicar 136 por 11.

Operación.

```
136
 136
----
1496 producto.
```

2.° Multiplicar 434 por 18.

Operación.

```
434
3472
----
7812 producto.
```

4. *Multiplicación de un número por* 21, 31....., 91.

Multiplíquese el número por la cifra de las decenas, y colóquese debajo de dicho número, y un lugar más á la izquierda, el producto parcial, y súmense los dos números.

Ejemplo. Multiplicar 4892 por 61.

Operación.

```
  4892
 29352
------
298412 producto.
```

5. *Multiplicación por* 5, 25, 125.....

Para multiplicar un número por 5, se pone un cero á su derecha y se divide el producto por 2; para multiplicarle por 25, se ponen dos ceros á su derecha y se divide por 4; para multiplicarle por 125, se ponen tres ceros á su derecha y se divide por 8; etc.

Estas reglas son evidentes.

6. *Multiplicación por* 9, 99, 999.....

Se ponen á la derecha del número uno, dos, tres, etc., ceros, y de este producto se resta el número.

Ejemplo. Multiplicar 3829 por 999.

Operación.

$$\begin{array}{r} 3829000 \\ 3829 \\ \hline 3825171 \end{array} \text{ \textit{producto.}}$$

7. Siempre que haya que multiplicar un número entero a por otro entero b, y que dividir el producto por un tercer número entero c, y uno de los dos primeros números, a por ejemplo, sea divisible por el tercero c, es preferible invertir las operaciones, esto es, dividir dicho número a por c, y multiplicar el cociente por el otro número b.

Se ve, en primer lugar, que el resultado debe ser el mismo, porque $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \times b$.

Para demostrar ahora la ventaja de la segunda regla sobre la primera, no hay más que observar que más fácil es partir a por c que ab por c, y más fácil es multiplicar el entero $\frac{a}{c}$ por b que el entero a por b.

Las operaciones por las dos reglas son una multiplicación y una división; pero por la segunda estas operaciones se hacen con números mucho menores que por la primera.

Ejemplo. $\frac{47}{33} \times 34617$.

Como el número 34617 es divisible por 33, puesto que lo es por 3 y por 11 (70, *Corol.*), efectuaremos esta división, y multiplicaremos el cociente 1049 por 47.

8. *Reducir centésimas de real á maravedises.*

Para reducir una fracción propia de real expresada en centésimas á maravedises, se divide el número de centésimas por 3, y si el residuo es 0 ó 1, el cociente entero será el número de maravedises, con un error por defecto menor que un maravedí; pero si el residuo es 2, el cociente entero, aumentado en 1, será el número de maravedises con un error, por exceso ó por defecto, menor que $\frac{1}{3}$ de maravedí.

Sea 0'88 de real la fracción que se quiere reducir á maravedises: el número de maravedises equivalente será

$$34 \times 0'88 \times \left(33\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) \times 0'88 = \left(\tfrac{100}{3} + \tfrac{2}{3}\right) \times 0'88.$$

Según el número (105), el producto será $\frac{100}{3} \times 0'88 + \frac{2}{3} \times 0'88 = \frac{88}{3} + \frac{2}{3} \times 0'88$. El cociente $\frac{88}{3}$ es $29\frac{1}{3}$; y como $\frac{2}{3} \times 0'88$ no llega á $\frac{2}{3}$, el número de maravedises equivalente á la fracción propuesta es mayor que 29 y no llega á 30: luego 29 es el número de maravedises con un error por defecto menor que un maravedí.

Sea 0'89 de real la fracción que se quiere reducir á maravedises: el número de maravedises equivalente será $34 \times 0'89 = \left(33\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \times 0'89 + \frac{100}{3} \times 0'89 + \frac{2}{3} \times 0'89 = \frac{89}{3} + \frac{2}{3} \times 0'89$. El cociente de $\frac{89}{3}$ es $29\frac{2}{3}$; y como $\frac{2}{3} \times 0'89$ es menor que $\frac{2}{3}$, el número de maravedises equivalente á la fracción propuesta es mayor que $29\frac{2}{3}$ y menor que $30\frac{1}{3}$: luego 30 es el número de maravedises con un error, por exceso ó por defecto, menor que $\frac{1}{3}$ de maravedí.

9. *Dada una cantidad decimal con cierto número de cifras decimales, hallar su valor en menos de media unidad de un orden anterior al último.*

Despréciense todas las cifras que estén á la derecha de la última que ha de quedar; pero si la primera de las cifras despreciadas es 5 ó mayor que 5, añádase una unidad á la última que quede.

Sea, por ejemplo, la fracción decimal 0'2765496, cuyo valor queremos tener en menos de media diezmilésima: escribiremos 0'2765. Pero si quisiéramos tener el valor de la misma fracción en menos de media milésima, escribiríamos 0'277.

Ciertamente, el error por defecto que cometemos tomando por valor de la fracción propuesta la 0'2765, es 0'0000496; cantidad menor que 0'0000500 = 0'00005 ó media diezmilésima. El error por exceso que cometemos tomando en vez de la fracción propuesta la 0'277, es 0'277 — 0'2765496 = 0'0004504; cantidad menor que 0'000500 = 0'0005 ó media milésima.

Método abreviado para la multiplicación de las cantidades decimales.

10. Cuando el multiplicando y multiplicador tienen muchas cifras decimales, y es suficiente en el producto una aproximación menor que la que resultaría por el método ordinario, se puede hallar el producto con más brevedad que por este método.

Supongamos que el multiplicando sea 5'5821475 y el multiplicador 37'23524, y que se quiere hallar el producto en diezmilésimas.

Disposición de la operación.

$$
\begin{array}{r}
5'3\,8\,2\,1\,4\,7\,5 \\
4\,2\,5\,3\,2\,7\,3 \\
\hline
1\,6\,1\,4\,6\,4\,2 \\
3\,7\,6\,7\,4\,7 \\
1\,0\,7\,6\,4 \\
1\,6\,1\,4 \\
2\,6\,5 \\
1\,0 \\
\hline
2\,0\,0'4\,0\,4\,2
\end{array}
$$

Multiplicando por las cifras de las unidades del multiplicador el multiplicando, contando hasta la cifra de las diezmilésimas, este producto parcial representará diezmilésimas.

Ahora, para que los demás productos parciales representen también diezmilésimas, es menester que, si la cifra del multiplicador representa unidades 10, 100, 1000, etc., veces mayores que las unidades absolutas, el multiplicando represente unidades 10, 100, 1000, etc., veces menores que las diezmilésimas. Al contrario, si la cifra del multiplicador representa unidades 10, 100, 1000, etc., veces menores que las unidades absolutas, el multiplicando ha de representar unidades 10, 100, 1000, etc., veces mayores que las diezmilésimas.

Por consiguiente, si invertimos el multiplicador y lo colocamos de modo que la cifra de sus unidades simples esté debajo de la cifra de las diezmilésimas del multiplicando, la cifra de las decenas del multiplicador quedará debajo de la cifra de las cienmilésimas del multiplicando, la cifra de las centenas del multiplicador quedará debajo de la cifra de las millonésimas del multiplicando, etc., la cifra de las décimas del multiplicador quedará debajo de la cifra de las milésimas del multiplicando, la cifra de las centésimas del multiplicador quedará debajo de la cifra de las centésimas del multiplicando, etc. Multiplicando, pues, por cada cifra del multiplicador, invertido y colocado como se acaba de decir, el multiplicando, contando hasta la cifra que está sobre la que se considera en el multiplicador, todos los productos parciales representarán diezmilésimas, y la suma de dichos productos parciales será el producto pedido.

Nos falta ahora determinar un límite del error del producto.

Para esto observemos que al tomar en vez del multiplicando verdadero uno cualquiera de los multiplicandos abreviados, el error que se comete es menor que una unidad del último orden de dicho multiplicando abreviado: luego el error de cada producto parcial será menor que tantas diezmilésimas como unidades tenga la cifra respectiva del multiplicador; y el error del producto total será menor que tantas diezmilésimas como unidades hay en la suma de las cifras que se tomen del multiplicador: luego si la suma de los valores absolutos de todas estas cifras no llega á 100, como sucede casi siempre, el error del producto no puede llegar á 100 diezmilésimas ó una centésima. Luego para hallar el producto final en menos de una centésima se hallarán los productos parciales en diezmilésimas.

Como lo que acabamos de decir, suponiendo, para fijar las ideas, que los productos parciales están hallados en diezmilésimas, puede aplicarse, aunque los productos se hallen en unidades de otro orden cualquiera; resulta, hablando de un modo general, que para hallar el producto final en menos de una unidad de cierto orden, se han de hallar los productos parciales en unidades inferiores en dos órdenes.

Obtenido el producto, se desprecian las dos últimas cifras de la derecha; y por un cálculo sencillo, como lo veremos en los ejemplos, se conocerá si, para tener el producto final con menor error que el límite fijado, hay que añadir ó no una unidad á la última cifra del número que queda.

En el ejemplo propuesto, el error del producto 200'4042 es menor que $2 + 5 + 3 + 2 + 7 + 3$ diezmilésimas, ó 22 diezmilésimas. Si ahora despreciamos las 42 diezmilésimas, el error total será menor que 64 diezmilésimas; luego 200'40 es el producto con un error por defecto menor que una centésima.

Ejemplo. Hallar el producto de 0'18932596 por 436'823759 con menor error que una milésima.

Operación.

```
0'18932596
957328634
----------
  7573036
   567975
   113592
    15144
      378
       54
        7
----------
 82'70186
```

El error de este producto es menor que 7 + 3 + 2 + 8 + 6 + 3 + 4 = 33 cienmilésimas. Si ahora despreciamos las 86 cienmilésimas, el error será menor que 119 cienmilésimas, y mayor que 86 cienmilésimas: luego añadiendo 1 á la cifra 1 de las milésimas, el error, si es por exceso, no llegará á 14 cienmilésimas, y si es por defecto, no llegará á 19 cienmilésimas; luego 82'702 es el producto en menos de media milésima.

División de números enteros.

11. Se puede efectuar una división de números enteros formando en primer lugar los productos parciales del divisor por las nueve cifras; y observando en seguida entre cuáles de estos productos se halla comprendido cada dividendo parcial, se conocerá al momento la cifra respectiva del cociente. Restando del dividendo parcial el producto parcial correspondiente á dicha cifra, se tendrá el resto, y se continuará del mismo modo.

Ejemplo.

```
764.3201045 | 489
489         |---------
----        | 15630267
2753        |
2445        |
----        |
 3082       |
 2934       |
 ----       |
  1480      |
  1467      |
  ----      |
    1310    |
     978    |
    ----    |
     3324   |
     2934   |
     ----   |
      3905  |
      3423  |
      ----  |
       482  |
```

Productos parciales.

1	489
2	978
3	1467
4	1956
5	2445
6	2934
7	3423
8	3912
9	4401

Este método es preferible al ordinario cuando el cociente debe tener muchas cifras.

12. *Dividir un número por 5, 25, 125.....*

Multiplíquese el dividendo por 2, 4, 8....., y divídanse los productos respectivamente por 10, 100, 1000, etc.

Ejemplo. Dividir 1584 por 25.

Operación.

$$\begin{array}{r} 1584 \\ 4 \\ \hline 63'36 \end{array} \text{ cociente.}$$

13. *Método abreviado para la extracción de la raiz cuadrada.*

Cuando por el método ordinario de la extracción de la raiz cuadrada se ha hallado una parte a de la raiz cuadrada de un número entero A, compuesta con más de la mitad de las cifras de la raiz entera, la parte que falta de la raiz será, con menor diferencia que una unidad, el cociente entero de $\frac{A-a^2}{2a}$.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera hallar la raiz cuadrada de 2 000000 000000, que ya se sabe tiene siete cifras.

Con las cuatro primeras cifras de la raiz cuadrada de este número se compone 1414000. Para hallar la parte que falta, partiremos el resto $A - a^2 = 604\ 000000$ por $2a = 2 \times 1414000$, y el cociente 213 es la parte que falta; luego la raiz cuadrada es 1414213 en menos de una unidad.

Para demostrar la exactitud de esta regla, llamemos b á la cantidad que falta al número a para ser la raiz cuadrada del A: tendremos $A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Restando a^2 de ambos miembros, y dividiendo en seguida por $2a$, será

$$\frac{A-a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Sea q el cociente entero de $\frac{A-a^2}{2a}$ y r el residuo, tendremos $b + \frac{b^2}{2a} = q + \frac{r}{2a}$; y restando $\frac{b^2}{2a}$ de ambos miembros, será

$$b = q + \frac{r}{2a} - \frac{b^2}{2a}\text{.....} \ [1].$$

Sea n el número de cifras que tiene la parte entera de b, será $b < 10^n$, $b^2 < 10^{2n}$; pero teniendo a por lo menos $2n + 1$ cifras, según la hipótesi, será $a > 10^{2n}$: luego $\frac{b^2}{2a} < 1$. También $\frac{r}{2a} < 1$; luego $\frac{r}{2a} - \frac{b^2}{2a} < 1$: luego b y q se diferencian en menos de una unidad, y por tanto $\sqrt{A} = a + q$ en menos de una unidad.

Nota. 1.°, *si* q = b, *será* $q^2 = r$; 2.°, *si* $q < b$, *será* $q^2 < r$; 3.°, *si* $q > b$, *será* $q^2 > r$.

En efecto: 1.° Siendo $q = b$, la igualdad [1] nos da $b^2 = r$; y por consiguiente $q^2 = r$.

2.° Siendo $q < b$, la igualdad [1] nos da $b^2 < r$; luego con mayor razón $q^2 < r$.

3.° Siendo $q > b$, la igualdad [1] nos da $b^2 > r$; luego con mayor razón $q^2 > r$.

Recíprocamente. 1.°, *si* $q^2 = r$, *será* $q = b$; 2.°, *si* $q^2 < r$, *será* $q < b$; 3.°, *si* $q^2 > r$, *será* $q > b$.

Se demuestran estas tres consecuencias con facilidad por reducción al absurdo.

En el primer caso la raíz $a + q$ es exacta; en el segundo caso es menor que la verdadera, y en el tercero es mayor que la verdadera.

CAPÍTULO III.

CANTIDADES INCONMENSURABLES.

14. Cantidad *conmensurable* es todo número entero ó fraccionario.

Cantidad *inconmensurable* ó *irracional* es toda expresión numérica, cuyo valor no puede hallarse exactamente, pero sí con tanta aproximación como se quiera.

Las raíces cuadradas y cúbicas inconmensurables (144 y 158), son ejemplos de cantidades inconmensurables, pues que no pueden hallarse sus valores exactamente, mas sí con cuanta aproximación se desee.

15. Se llama *límite* de una cantidad variable la cantidad constante á la cual puede aproximarse la variable cuanto se quiera, sin poder nunca igualarse á dicha constante.

Ejemplos. 1.° Sea el quebrado menor que la unidad $\frac{5+x}{7+x}$, siendo x un número entero cualquiera: sabemos (92) que este quebrado va creciendo conforme crece x, y va por tanto aproximándose á 1. La diferencia $1 - \frac{5+x}{7+x} = \frac{7+x}{7+x} - \frac{5+x}{7+x} = \frac{2}{7+x}$ va disminuyendo á medida que x va siendo mayor; y es evidente que esta diferencia puede llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, creciendo x suficientemente. Queda, pues, demostrado que la cantidad variable $\frac{5+x}{7+x}$ puede aproximarse á 1 cuanto se quiera; luego 1 es el límite de dicha variable, la cual es menor que su límite.

2.° Sea el quebrado mayor que la unidad $\frac{7+x}{5+x}$, que sabemos va disminuyendo, y por consiguiente aproximándose á 1, conforme crece el entero x: la diferencia $\frac{7+x}{5+x} - 1 = \frac{7+x}{5+x} - \frac{5+x}{5+x} = \frac{2}{5+x}$

va disminuyendo, y puede disminuir cuanto se quiera, creciendo x suficientemente. Luego la cantidad variable $\frac{7+x}{5+x}$ puede acercarse á 1 en términos que su exceso sea menor que cualquiera cantidad asignable; luego 1 es el límite de dicha cantidad variable, la cual es mayor que su límite.

3.° Según la definición de la cantidad inconmensurable, ésta es el límite del número variable que puede aproximarse indefinidamente á dicha cantidad inconmensurable.

Así, $\sqrt{2}$ es el límite de la cantidad variable 1'4142....., pues cuanto mayor sea el número de cifras que se tomen en este valor aproximado, mayor es la aproximación de esta cantidad variable á $\sqrt{2}$; y podemos tomar en dicho valor aproximado un número de cifras tan grande, que la diferencia entre la cantidad que ellas compongan y $\sqrt{2}$ sea menor que cualquiera cantidad dada; luego $\sqrt{2}$ es el límite de la cantidad variable 1'4142....., y es mayor que esta variable (*).

16. *Si dos cantidades variables, que tienen límites, son constantemente iguales, estos límites son también iguales.*

Observemos en primer lugar que una variable, que tiene un límite, puede aproximarse á él en menos de cualquiera cantidad dada; pero no puede aproximarse del mismo modo á una cantidad fija mayor ó menor que dicho límite: luego una cantidad variable no tiene más que un solo límite.

Esto supuesto, siendo las dos variables siempre iguales, no componen más que una sola; luego los dos límites de las dos variables son límites de una sola, y por tanto no componen más que un solo límite, es decir, que los dos límites son iguales.

17. *El producto de la suma indicada de dos números conmensurables, uno conmensurable y otro inconmensurable, ó ambos inconmensurables, por un número también conmensurable ó inconmensurable, es igual á la suma de los productos parciales de cada número del multiplicando por el multiplicador.*

(*) Obsérvese que puede existir una cantidad variable que vaya continuamente creciendo, y que, por causa de tener un límite, no pueda llegar, no sólo á ser mayor que dicho límite, pero ni aun á ser tan grande como él; y que puede existir una cantidad variable que vaya continuamente disminuyendo, y que, por causa de tener un límite, no pueda llegar, no sólo á ser menor que dicho límite, pero ni aun á ser tan pequeña como él.

Esta observación prueba que son erróneas las ideas vulgares de que si una cantidad va continuamente creciendo, llegará siempre á ser mayor que cualquiera cantidad dada; y que si va continuamente disminuyendo, llegará siempre á ser igual á cero.

Sea $a + b$ el multiplicando y m el multiplicador: decimos que

$$(a + b)\,m = am + bm.$$

1.° Sea el multiplicador un número entero, por ejemplo 7: el producto $(a + b) \times 7$ se hallará haciendo 7 veces mayor á cada una de las dos partes del multiplicando; luego

$$(a + b) \times 7 = a \times 7 + b \times 7.$$

2.° Si el multiplicador es un número fraccionario $\frac{7}{5}$, el producto $(a + b) \times \frac{7}{5}$ quiere decir (101) que se halle el valor de $\frac{7}{5}$ de $a + b$; para lo cual se hallará el valor de $\frac{7}{5}$ de cada una de sus partes, y se sumarán los dos resultados: luego

$$(a + b) \times \frac{7}{5} = a \times \frac{7}{5} + b \times \frac{7}{5}.$$

3.° Sea el multiplicador m un número inconmensurable; m' un valor conmensurable aproximado al número inconmensurable m, mayor ó menor que éste, pero tan próximo á él como se quiera. Siendo m' conmensurable, hemos demostrado en los dos casos anteriores que $(a + b)\,m' = am' + bm'$; y como el límite del primer miembro es $(a + b)\,m$ y el del segundo es $am + bm$, tendremos, según el teorema de los límites,

$$(a + b)\,m = am + bm.$$

X **18.** *El producto de la diferencia de dos números conmensurables, uno conmensurable y otro inconmensurable, ó ambos inconmensurables, por un número cualquiera conmensurable ó inconmensurable, es igual á la diferencia de los dos productos parciales del minuendo y sustraendo por el multiplicador; es decir,* $(a - b)\,m = am - bm$.

En efecto, sea $a - b = d$, será $a = b + d$; y por consiguiente $am = bm + dm$, ó $am - bm = dm$, ó $am - bm = (a - b)\,m$.

X **19.** *El producto de varios factores conmensurables é inconmensurables, ó inconmensurables solamente, no varía, cualquiera que sea el orden de colocación de dichos factores.*

Sea el producto $abcd$, en el cual supondremos que el factor c es conmensurable, y los demás inconmensurables: decimos que es igual á un producto compuesto de los mismos factores, colocados en un orden cualquiera, tal como $cdba$.

Sea a', b' y d' los valores aproximados, todos por exceso ó todos por defecto, á los factores inconmensurables a, b y d. Siendo conmensurables los números a', b', c y d', tenemos demostrado que $a'b'cd' = cd'b'a'$. Mas siendo a, b, d los límites de a', b' y d', es evidente que $abcd$ es el límite de la variable $a'b'cd'$, y que $cdba$ es el límite de la variable $cd'b'a'$; luego, en virtud del teorema de los límites, $abcd = cdba$.

Si todos los factores fuesen inconmensurables, se demostraría el teorema del mismo modo.

De este teorema se sacarán como consecuencia los siguientes:

20. *El producto de varios productos, compuesto cada uno de varios factores inconmensurables, ó conmensurables é inconmensurables, es igual á un producto compuesto de todos los factores, y al contrario.*

21. *Si en un producto compuesto de factores inconmensurables, ó conmensurables é inconmensurables, se multiplica ó parte uno de dichos factores por un número conmensurable ó inconmensurable, el producto quedará multiplicado ó partido por el mismo número.*

22. *Si en un producto compuesto de factores inconmensurables, ó conmensurables é inconmensurables, se multiplica uno de dichos factores por un número cualquiera, y otro factor se divide por el mismo número, el producto no varia.*

23. Suponiendo que el dividendo y el divisor sean números cualesquiera, conmensurables ó inconmensurables: *Si el dividendo se multiplica ó parte por un número conmensurable ó inconmensurable, el cociente queda multiplicado ó partido por el mismo número. Si el divisor se multiplica ó parte por un número conmensurable ó inconmensurable, el cociente queda partido ó multiplicado por dicho número. Si el dividendo y el divisor se multiplican ó parten por un mismo número conmensurable ó inconmensurable, el cociente no varia.*

Las demostraciones de estos teoremas son las mismas que las de sus análogos (106, 107, 108, 109 y 110).

Raices cuadradas y cúbicas inconmensurables de los quebrados.

24. *La raiz de un grado cualquiera de un cociente cuyos dos términos son números cualesquiera, es igual á la raiz del dividendo partida por la raiz del divisor;* es decir, que $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, siendo a y b números enteros, fraccionarios, inconmensurables, ó de dos cualesquiera de estas clases.

En efecto, $\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}\right)^m=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}\ldots$, entrando en este producto m veces el factor $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}$. Ahora, el segundo miembro equivale (*Comp.*[to], 20) á $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\ldots\times\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{b}\ldots=\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m=\frac{a}{b}.b=a$; luego $\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}\right)^m=a$. Por consiguiente (130), $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a}$; y en fin (16),

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

25. Si alguno de los términos de un quebrado irreducible no tiene raiz cuadrada exacta, se puede hallar la raíz cuadrada aproximada del quebrado por el método siguiente:

Si el denominador tiene raiz cuadrada exacta y el numerador no, se extraerá aproximadamente la raiz cuadrada del numerador, y se dividirá por la raiz cuadrada exacta del denominador.

Ejemplo. Extraer la raiz cuadrada de $\frac{3}{25}$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

La raiz cuadrada de 3 en menos de $\frac{1}{1000}$ es 1'732, y partiéndola por 5, raíz cuadrada exacta del denominador, el cociente 0'346 será la de $\frac{3}{25}$ con menor error por defecto que $\frac{1}{1000}$.

En efecto, $\sqrt{5} \begin{smallmatrix} > 1'730 \\ < 1'735 \end{smallmatrix}$ (*); luego $\sqrt{\frac{3}{25}}$ ó $\frac{\sqrt{3}}{5} \begin{smallmatrix} > 0'346 \\ < 0'347 \end{smallmatrix}$; luego $\sqrt{\frac{3}{25}} = 0'346$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

Si el denominador no tiene raiz cuadrada exacta, téngala ó no el numerador, *se transforma el quebrado en otro equivalente cuyo denominador tenga raiz cuadrada exacta; para lo cual se multiplican los dos términos del quebrado por el denominador (aunque á veces basta multiplicar dichos dos términos por un número menor), y quedará reducido este caso al anterior* (**).

Ejemplos. 1.° $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Hallemos esta raiz cuadrada en menos de $\frac{1}{1000}$.

La raiz cuadrada de 6 en menos de $\frac{1}{1000}$ es 2'449; y por consiguiente $\frac{\sqrt{6}}{3} = 0'816$ en menos de $\frac{1}{1000}$.

En efecto, $\sqrt{6} \begin{smallmatrix} > 2'448 \\ < 2'451 \end{smallmatrix}$: luego $\frac{\sqrt{6}}{3} \begin{smallmatrix} > 0'816 \\ < 0'817 \end{smallmatrix}$; luego 0'816 es el valor de $\frac{\sqrt{6}}{3}$ con menor error por defecto que $\frac{1}{1000}$.

2.° *Extraer la raiz cuadrada de $\frac{3}{8}$ en menos de una milésima.*

Como 8 es divisor del cuadrado 16, bastará multiplicar los

(*) Para demostrar esto, conviene que la raiz cuadrada del número se halle comprendida entre dos números que se diferencien en tantas unidades del último orden decimal como unidades tiene la raiz cuadrada del denominador del quebrado propuesto.

(**) En este caso, según el principio (*Comp.to*, 24), se pudiera hallar la raiz cuadrada del quebrado, extrayendo la raiz cuadrada del numerador y la del denominador, y dividiendo la primera por la segunda; pero de este modo habría que hallar dos raíces cuadradas, hacer una división bastante larga, y no se conocería á punto fijo, sin efectuar cierto cálculo, la aproximación obtenida, por no ser exacta la raiz del denominador. Es, pues, conveniente en todos casos que el denominador tenga raiz cuadrada exacta.

dos términos de este quebrado por el factor 2 que falta al 8 para componer 16: tendremos, pues, $\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Puesto que tratamos de hallar su valor en milésimas, extraeremos la raiz de 6 en milésimas, que es 2'449; luego $\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{2'449}{4} = 0'612$ en menos de $\frac{1}{1000}$; lo que se demuestra como en el ejemplo anterior.

26. *Si el denominador de un quebrado irreducible tiene raiz cúbica exacta y el numerador no, se extraerá la raiz cúbica del quebrado, extrayendo la raiz cúbica aproximada del numerador, y dividiéndola por la raiz cúbica exacta del denominador.*

Ejemplo. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{1'442}{2} = 0'721$ en menos de $\frac{1}{1000}$; lo que puede demostrarse como en los casos anteriores.

Si el denominador no tiene raiz cúbica exacta, téngala ó no el numerador, *se transformará el quebrado en otro equivalente, cuyo denominador tenga raiz cúbica exacta; para lo cual se multiplican los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador (aunque á veces basta multiplicar los dos términos por un número menor), y quedará reducido este caso al anterior* (*).

Ejemplos. 1.° $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2'62}{3} = 0'87$ en menos de $\frac{1}{100}$; como es fácil demostrar.

2.° Hallar en menos de $\frac{1}{1000}$ la $\sqrt[3]{\frac{7}{25}}$.

Siendo 25 divisor del cubo 125, basta multiplicar los dos términos por el factor 5 que falta á 25 para componer 125; luego $\sqrt[3]{\frac{7}{25}} = \sqrt[3]{\frac{35}{125}} = \frac{\sqrt[3]{35}}{5} = \frac{3'271}{5} = 0'654$ en menos de $\frac{1}{1000}$; como es fácil demostrar.

Proporciones.

27. Los teoremas 163, 168, 171, 172 y 173 se fundan respectivamente en los teoremas 106, 111, 107, 105 1.° y 105 2.°, teoremas que sólo habian sido demostrados para números conmensurables; por cuya razón los teoremas de las proporciones también se referian á números conmensurables. Actualmente habiendo demostrado (*Comp.*to, 16, 17....., 23) que los teoremas 105 y siguientes hasta 111 son ciertos aun cuando los números sean inconmensurables, se infiere que los teoremas 163, etc., de las

(*) Se prefiere que el denominador tenga raiz cúbica exacta, por la misma razón que hemos dado en la nota del número anterior.

proporciones quedan también demostrados de una manera general. Los demás teoremas que hemos demostrado en las proporciones son consecuencias de éstos.

Hasta ahora no hemos podido demostrar rigorosamente el teorema siguiente:

Las raices del mismo grado de los cuatro términos de una proporción, forman también proporción.

Sea la proporción $a : b :: c : d$; decimos que $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

En efecto, siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, será $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$,

ó (*Comp.to*, 24) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}.$$

CAPÍTULO IV.

TABLAS PARA LA REDUCCIÓN DE LAS MEDIDAS Y PESAS DE CASTILLA Á SUS EQUIVALENTES MÉTRICAS Y AL CONTRARIO.

28. Unidades de longitud.

Varas.	*Metros.*	*Metros.*	*Varas.*
1	0'835905	1	1'196308
2	1'671810	2	2'392616
3	2'507715	3	3'588924
4	3'343620	4	4'785232
5	4'179525	5	5'981540
6	5'015430	6	7'177848
7	5'851335	7	8'374156
8	6'687240	8	9'570464
9	7'523145	9	10'766772

Pulgadas.	*Centímetros.*	*Centímetros.*	*Pulgadas.*
1	2'3220	1	0'43067
2	4'6439	2	0'86134
3	6'9659	3	1'29201
4	9'2878	4	1'72268
5	11'6098	5	2'15335
6	13'9318	6	2'58402
7	16'2537	7	3'01469
8	18'5757	8	3'44536
9	20'8976	9	3'87604

Leguas.	*Kilómetros.*	*Kilómetros.*	*Leguas.*
1	5'5727	1	0'1794462
2	11'1454	2	0'3588925
3	16'7181	3	0'5383387
4	22'2908	4	0'7177849
5	37'8635	5	0'8972312
6	33'4362	6	1'0766773
7	39'0089	7	1'2561236
8	44'5816	8	1'4355698
9	50'1543	9	1'6150161

Unidades de capacidad.

Fanegas de áridos.	*Hectólitros.*	*Hectólitros.*	*Fanegas de áridos.*
1	0'55501	1	1'801769
2	1'11002	2	3'603539
3	1'66503	3	5'405308
4	2'22004	4	7'207077
5	2'77505	5	9'008847
6	3'33006	6	10'810616
7	3'88507	7	12'612385
8	4'44008	8	14'414156
9	4'98509	9	16'215924

Celemines.	*Litros.*	*Litros.*	*Celemines.*
1	4'625083	1	0'216212
2	9'250167	2	0'432425
3	13'875250	3	0'648637
4	18'500333	4	0'864849
5	23'125417	5	1'081062
6	27'750500	6	1'297274
7	32'375583	7	1'513486
8	37'000667	8	1'729699
9	41'625750	9	1'945911

Cuartillos de líquido.	*Litros.*	*Litros.*	*Cuartillos de líquido.*
1	0'5042	1	1'98351
2	1'0083	2	3'96702
3	1'5125	3	5'95054
4	2'0166	4	7'93405
5	2'5208	5	9'91756
6	3'0250	6	11'90107
7	3'5291	7	13'88458
8	4'0333	8	15'86810
9	4'5374	9	17'85161

Libras de aceite.	*Litros.*	*Litros.*	*Libras de aceite.*
1	0'50252	1	1'989971
2	1'00504	2	3'979941
3	1'50756	3	5'969912
4	2'01008	4	7'959882
5	2'51260	5	9'949853
6	3'01512	6	11'939823
7	3'51764	7	13'929794
8	4'02016	8	15'919764
9	4'52268	9	17'909735

Arrobas de aceite.	*Litros.*	*Litros.*	*Arrobas de aceite.*
1	12'563	1	0'079599
2	25'126	2	0'159198
3	37'689	3	0'238797
4	50'252	4	0'318395
5	62'815	5	0'397994
6	75'378	6	0'477593
7	87'941	7	0'557192
8	100'504	8	0'636791
9	113'067	9	0'716390

Unidades de peso.

Libras.	*Kilogramos.*	*Kilogramos.*	*Libras.*
1	0'460093	1	2'173474
2	0'920186	2	4'346948
3	1'380279	3	6'520422
4	1'840372	4	8'693896
5	2'300465	5	10'867370
6	2'760558	6	13'040844
7	3'220651	7	15'214318
8	3'680744	8	17'387792
9	4'140837	9	19'561266

Onzas.	*Gramos.*	*Gramos.*	*Onzas.*
1	28'756	1	0'035
2	57'512	2	0'070
3	86'267	3	0'104
4	115'023	4	0'139
5	143'779	5	0'164
6	172'535	6	0'209
7	201'291	7	0'243
8	230'046	8	0'278
9	258'802	9	0'313

Adarmes.	Gramos.
1	1'797
2	3'594
3	5'392
4	7'189
5	8'986
6	10'783
7	12'581
8	14'378
9	16'175

Gramos.	Adarmes.
1	0'556
2	1'113
3	1'669
4	2'226
5	2'782
6	3'338
7	3'895
8	4'451
9	5'008

Granos.	Miligramos.
1	49'92
2	99'85
3	149'77
4	199'69
5	249'62
6	299'54
7	349'46
8	399'38
9	449'31

Miligramos.	Granos.
1	0'02
2	0'04
3	0'06
4	0'08
5	0'10
6	0'12
7	0'14
8	0'16
9	0'18

Unidades de superficie.

Pies cuadrados.	Metros cuadrados.
1	0'077637
2	0'155275
3	0'232912
4	0'310550
5	0'388187
6	0'465825
7	0'543462
8	0'621100
9	0'698737

Metros cuadrados.	Pies cuadrados.
1	12'880375
2	25'760751
3	38'641126
4	51'521502
5	64'401887
6	77'282253
7	90'162628
8	103'043004
9	115'923379

Varas cuadradas.	Metros cuadrados.
1	0'698737
2	1'397474
3	2'096212
4	2'794949
5	3'493686
6	4'192423
7	4'891160
8	5'589897
9	6'288635

Metros cuadrados.	Varas cuadradas.
1	1'431153
2	2'862307
3	4'293416
4	5'724613
5	7'155766
6	8'586920
7	10'018073
8	11'449226
9	12'880380

Fanegas superficiales.	*Hectáreas.*	*Hectáreas.*	*Fanegas superficiales.*
1	0'643956	1	1'552901
2	1'287912	2	3'105802
3	1'931869	3	4'658703
4	2'575825	4	6'211604
5	3'219781	5	7'764506
6	3'863737	6	9'317407
7	4'507693	7	10'870308
8	5'151649	8	12'423209
9	5'795606	9	13'976110

Unidades de volumen.

Varas cúbicas.	*Metros cúbicos.*	*Metros cúbicos.*	*Varas cúbicas.*
1	0'5840778	1	1'712100
2	1'1681556	2	3'424199
3	1'7522334	3	5'136299
4	2'3363112	4	6'848398
5	2'9203890	5	8'560498
6	3'5044668	6	10'272597
7	4'0885446	7	11'984697
8	4'6726224	8	13'696796
9	5'2567002	9	15'408896

Pies cúbicos.	*Metros cúbicos.*	*Metros cúbicos.*	*Pies cúbicos.*
1	0'0216325	1	46'2266865
2	0'0432650	2	92'4533730
3	0'0648975	3	138'6800595
4	0'0865300	4	184'9067460
5	0'1081625	5	231'1334325
6	0'1297950	6	277'3601190
7	0'1514275	7	323'5868055
8	0'1730600	8	369'8134920
9	0'1946625	9	416'0401785

Toneladas de arqueo antiguas.	*Toneladas de arqueo nuevas.*	*Toneladas de arqueo nuevas.*	*Toneladas de arqueo antiguas.*
1	1'5183752	1	0'6585988

Por medio de estas dos últimas equivalencias pueden formarse, si se quiere, tablas como en los casos anteriores.

Para reducir un número cualquiera de unidades antiguas á su equivalente en unidades métricas, se multiplica el valor de la unidad antigua en unidades modernas por el número dado de unidades antiguas, tomado abstractamente: y al contrario, para reducir un número cualquiera de unidades métricas á su equivalente en unidades antiguas, se multiplica el valor de la unidad métrica en unidades antiguas por el número dado de unidades métricas tomado abstractamente. Estas multiplicaciones se facilitan por medio de las tablas anteriores.

Aunque estas tablas sólo contienen las equivalencias de los números enteros hasta 9, son suficientes para reducir cualquier número de unidades antiguas á modernas y viceversa, pues si se quieren hallar los números equivalentes á 10, 20, 30, 40....., no habrá más que mover la coma un lugar á la derecha en los números equivalentes á 1, 2, 3, 4.....; si se quieren hallar los números equivalentes á 100, 200, 300, 400....., se moverá la coma dos lugares á la derecha en los números equivalentes 1, 2, 3, 4....., y así sucesivamente. Los números equivalentes á 0'1, 0'2, 0'3, etc., se hallarán moviendo la coma un lugar á la izquierda; los equivalentes á 0'01, 0'02, 0'03, etc., se hallarán moviendo la coma dos lugares á la izquierda, y así sucesivamente.

Un ejemplo será bastante para la inteligencia del uso de estas tablas.

Reducir 385 *varas á metros.*

Cálculo por medio de las tablas.

$300^{var.}$	250^{m}'7715
80	66^{m}'8724
5	4^{m}'1795
	321^{m}'8234,

resultado que puede comprobarse multiplicando 0^{m}'835905 por 385.

CAPÍTULO V.

REDUCCIÓN DE UN NÚMERO DE UNIDADES ANTIGUAS Á SU EQUIVALENTE EN UNIDADES MÉTRICAS Y AL CONTRARIO, POR MEDIO DE EQUIVALENCIAS APROXIMADAS FÁCILES DE CONSERVAR EN LA MEMORIA.

30. Acabamos de ver lo fácil que es resolver estos dos problemas por medio de las equivalencias exactas (*). Pero muchas veces, cuando se trata de resolver uno de estos problemas, no se tienen á mano estas equivalencias, y en tales casos la resolución del problema sería imposible. Para obviar este inconveniente, dedujimos en 1853 de las equivalencias exactas otras aproximadas, que pueden retenerse sin esfuerzo, y que evitan, por tanto, la incomodidad de tener que ir á buscar en los libros la equiva-

(*) Para abreviar la frase, llamaremos relaciones *exactas* á las formadas por la Comisión de pesas y medidas.

lencia que se necesite. Además, nuestras equivalencias tienen la ventaja de dar una idea suficientemente aproximada de la magnitud de las nuevas medidas, á los que conozcan las antiguas.

31. He aquí el método que seguimos para construir dichas equivalencias.

Concretémonos para fijar las ideas á la relación entre el metro y la vara.

Tenemos la relación exacta $1^m = 1^v'196308 = \frac{1196308^v}{1000000}$. Transformado este quebrado en fracción continua (*Comp.to del Alg.*, 3), resulta

$$1^m = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}} \text{ varas.}$$

Las reducidas de esta fracción continua son (*Comp.to del Alg.*, 3)

$$\frac{1}{1},\ \frac{6}{5},\ \frac{61}{51},\ \frac{67}{56},\ \text{etc., varas (*)};$$

y pues las reducidas de lugar impar son menores que la fracción continua y las de lugar par son mayores, se tendrá

$$\frac{1^v}{1} < 1^m,\quad \frac{6^v}{5} > 1^m,\quad \frac{61^v}{51} < 1^m,\quad \frac{67^v}{56} > 1^m, \text{etc.},$$

ó bien

$$1^v < 1^m,\ 6^v > 5^m,\ 61^v < 51^m,\ 67^v > 56^m, \text{ etc.}$$

Esto supuesto, como toda reducida da el valor de la fracción continua con mayor aproximación que cualquiera otra fracción de

---

(*) Si hubiésemos reducido á fracción continua el quebrado 0'835905, valor de la vara en metros, hubieran resultado estas mismas reducidas, pero invertidas. Para demostrar que esto debe ser así, observaremos que $1^m = 1^v'196308$, y por consiguiente $1^v = \frac{1}{1'196308}$ metros; y pues $1^v = 0'835905$ metros, será $0'835905 = \frac{1}{1'196308}$. La fracción continua equivalente al quebrado 1'196308, es

$$1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.};}}}$$

luego

$$0'835905 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.},}}}}$$

cuyas reducidas son $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{5}{6}, \frac{51}{61}, \frac{56}{67}$, etc.; es decir, desde la segunda en adelante, recíprocas de las reducidas correspondientes á la fracción 1'196308.

términos más pequeños, la reducida $\frac{6^v}{5}$, por ejemplo, nos dará el valor de la fracción continua con la mayor aproximación posible en términos tan sencillos. Lo mismo diremos de las reducidas $\frac{61^v}{51}$, $\frac{67^v}{57}$, etc.

32. El corolario 1.° del teorema (*Comp.*[to] *del Alg.*, 8) nos da dos límites, entre los cuales se halla comprendido el error que se comete tomando por valor de la fracción continua una reducida; pero como en la cuestión presente conocemos en fracción decimal el valor exacto de la fracción continua, podremos calcular con exactitud el referido error.

Tomemos, por ejemplo, la reducida $\frac{6}{5}$ *de vara* por valor de la fracción continua, ó por valor del quebrado 1'196308 *varas*, y por consiguiente $\frac{5}{6}$ *de metro* por valor de 0'835905 *metros*, y calculemos el error que se comete en el resultado.

Reducción de varas á metros.

Tenemos la relación exacta

1 *vara* = 0'835905 *metros*,

y según la relación aproximada,

1 *vara* = 0'833333 *metros*,

es decir, que en vez de la cantidad 0'835905 *metros*, tendremos en el resultado la cantidad 0'833333 *metros*, y por tanto en esta cantidad 0'833333 hay el error por defecto de 0'002572; luego por cada unidad del resultado se comete el error $\frac{0'002572}{0'833333} = \frac{2572}{833333} = \frac{1}{\frac{833333}{2572}} = \frac{1}{324}$; luego el error total por defecto será $\frac{1}{324}$ del resultado. Añadiendo, pues, al resultado en metros $\frac{1}{324}$ del mismo, se hallaría el resultado final con tanta exactitud, poco menos, como por la relación 1 *vara* = 0'835905 *metros*.

Reducción de metros á varas.

Tenemos exactamente

1 *metro* = 1'196308 *varas;*

y según la relación aproximada,

1 *metro* = 1'200000 *varas*,

es decir, que en vez de la cantidad 1'196308 *varas* hallamos en el resultado la cantidad 1'200000 *varas:* cometemos, pues, en este resultado un error por exceso de 0'003692; luego por cada unidad del resultado el error por exceso será $\frac{0'003692}{1'200000} = \frac{1}{\frac{1200000}{3692}} = \frac{1}{325}$; y por consiguiente el error del resultado será $\frac{1}{325}$ del mismo.

Luego, restando del resultado hallado en varas $\frac{1}{325}$ del mismo, hallaríamos el resultado final con tanta aproximación, poco menos, como por la equivalencia 1 *metro* = 1'196308 *varas*.

33. La regla general para determinar el error del resultado, cuando para reducir una cantidad de una especie á su equivalente de otra especie, nos servimos de un valor aproximado de la unidad de la especie dada en vez de su valor exacto, es la siguiente: *El error del resultado es una parte alicuota de este resultado, la cual tiene por denominador el cociente de la división del valor aproximado por la diferencia de éste al valor exacto.*

Demostración.

Sea m el número de una especie que se quiere reducir á su equivalente de otra especie, a el valor exacto de la unidad de la especie dada en unidades de la nueva especie, b un valor aproximado de la misma: el resultado exacto es am, y el resultado hallado es bm; luego el error cometido en el resultado será $\pm (a - b) m$, tomando el signo + si $a > b$, y el — en el caso contrario. Este error $\pm (a - b) m = \frac{\pm (a-b) m}{bm} \cdot bm = \frac{\pm (a-b)}{b} \cdot bm = \frac{1}{\frac{b}{\pm (a-b)}} \cdot bm$, conforme al enunciado de la regla.

34. Por el método que acabamos de explicar pueden construirse equivalencias aproximadas entre medidas antiguas cualesquiera y las métricas, toda vez que se conozcan sus equivalencias exactas ó con error despreciable, y calcular los errores que produce el empleo de las equivalencias aproximadas en lugar de las exactas. De este modo hemos formado el siguiente cuadro, en que las medidas antiguas son las llamadas *de Castilla*.

Unidades de longitud.

	Error del resultado obtenido en virtud de estas equivalencias.
5 *metros* = 6 *varas*.	$\frac{4}{15}$ por 100 del resultado.
51 *metros* = 61 *varas*.	$\frac{1}{8}$ por 1000, poco menos.
100 *kilóm.* = 18 *leguas comunes ó de 20000 pies de Burgos*. . .	$\frac{4}{15}$ por 100 (*).
39 *kilóm.* = 7 *leguas comunes*.. .	$\frac{1}{4}$ por 1000, poco menos (**).

(*) Esta relación es consecuencia de la de 5 metros = 6 varas: pues si multiplicamos por 20000 los dos términos de esta equivalencia, tendremos 100000 metros = 120000 varas = 360000 pies; y pues 1000 metros = 1 kilómetro y 20000 pies = 1 legua, será 100 kilómetros = 18 leguas.

(**) De la definición del metro resulta que 100 kilómetros = 18 leguas

Unidades de capacidad para áridos.

		Error del resultado.
37 *litros*	= 8 *celemines*.	Menor que $\frac{1}{54000}$ del mismo.
5 *hectólitros*	= 9 *fanegas*.	1 por 1000.

Unidades de capacidad para líquidos.

		Error del resultado.
1 *litro*	= 2 *cuartillos*. .	1 por 100, poco menos.
60 *litros*	= 119 *cuartillos*. .	1 por 10000, id.
1 *litro de aceite*	= 2 *libras*.. . .	$\frac{1}{2}$ por 100.
100 *litros de aceite*	= 199 *libras*.. . .	Menor que $\frac{1}{67000}$ del mismo.

Unidades de peso.

		Error del resultado.
6 *kilogramos*	= 13 *libras*.	$\frac{1}{3}$ por 100, poco menos.
46 *kilogramos*	= 100 *libras*.	$\frac{1}{5}$ por 1000, poco más (*).
46 *quint. mét.*	= 100 *id. antiguos*. .	
92 *tonel. mét.*	= 100 *id. antiguas*. .	

Unidades de superficie.

		Error del resultado.
1 *metro cuad.*	= 13 *pies cuadrad.*	1 por 100, poco menos.
7 *metros cuad.*	= 10 *varas cuad.* .	$\frac{1}{6}$ por 100, poco más.
100 *metros cuad.*	= 1288 *pies cuadrad.*	Menor que $\frac{1}{34000}$ del mismo.
9 *hectáreas*	= 14 *faneg. sup.* .	$\frac{1}{6}$ por 100, poco más.

---

marinas exactamente. En efecto, puesto que el metro es la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por París, ó lo que es igual, teniendo los 90° de dicho cuarto de meridiano 10.000000 de metros, 9° del mismo tendrán 1.000000 de metros; y como cada uno en estos grados tiene 20 leguas marinas, se tendrá 20 $\times$ 9 leguas marinas = 1000 kilómetros, ó 18 leguas marinas = 100 kilómetros.

(*) Estas dos últimas equivalencias pueden deducirse de la 46 kilog. = 100 libras; pues si multiplicamos por 100 los dos miembros de ésta, tendremos 4600 kilog. = 10000 libras, ó bien 46 quint. mét. = 100 idem antiguos. Multiplicando ahora por 20 los dos miembros de esta última, será 920 quint. mét. = 2000 id. antiguos, ó bien, como la tonelada nueva de peso tiene 10 quint. mét. y la antigua 20 quintales antiguos, será 92 tonel. mét. = 100 tonel. antiguas.

Unidades de volumen.

		Error del resultado.
1 *metro cúbico*	= 46 *pies cúb..*	$\frac{1}{2}$ por 100, poco menos.
7 *metros cúbicos*	= 12 *varas cúb.*	$\frac{1}{3}$ por 100, poco más.
59 *metros cúbicos*	= 101 *varas cúb.*	Menor que $\frac{1}{7200}$ del mismo.
3 *ton. de arq. nuev.*	= 2 *id. ant...*	$\frac{5}{4}$ por 100, poco menos.
41 *ton. de arq. nuev.*	= 27 *id. ant...*	Menor que $\frac{1}{10000}$ del mismo.

34. Cuando para reducir un número antiguo á moderno, ó al contrario, nos valemos de una equivalencia aproximada, se puede en seguida corregir el resultado y obtenerlo exacto.

Por ejemplo, si queremos reducir 365 varas á metros por medio de la equivalencia $5^m = 6^v$, formaremos la proporción

$$6 : 5 : : 385 : x = 320'8333 \textit{ metros.}$$

Observemos ahora que, valiendo 6 varas más que 5 metros, el resultado obtenido tiene un error por defecto de $\frac{4}{13}$ por 100, ó mejor (*Comp.to*, 32) de $\frac{1}{324}$ del mismo. Añadiendo, pues, al resultado obtenido $\frac{1}{324}$ del mismo, ó sea 0'992, resultará exactamente 321'8235 metros.

Para no tener necesidad de estas correcciones, nos valdremos, en la reducción de un número antiguo á moderno, y al contrario, de aquellas equivalencias (que dejamos indicadas en el cuadro anterior) que dan los resultados con menor error, las cuales son las siguientes:

Medidas de longitud.	$51^m = 61^v$.
Medidas de capacidad para áridos.	37^l = 8 *celemines.*
Medidas de capacidad para líquidos, excepto el aceite.	60^l = 119 *cuartillos.*
Medidas de capacidad para el aceite	100^l = 199 *libras.*
Unidades de peso.	46^{Kg} = 100 *libras.*
Unidades de superficie.	100^{m^2} = 1288 *pies cuadrados.*
Unidades de volumen.	59^{m^3} = 101 *varas cúbicas.*
	41 *tonel. mod.* = 27 *id. antiguas.*

La última equivalencia da un resultado algo menos erróneo que la penúltima; y si bien pudiéramos servirnos de ella en la reducción de unas medidas cúbicas á otras, aun cuando las unidades de volumen no fueran toneladas de arqueo, no lo haremos por causa del valor fraccionario del codo de ribera en pies ó pulgadas.

Sólo usaremos, pues, de la última equivalencia, cuando se trate de toneladas de arqueo.

Ejemplos (*). *Reducir* 385 *varas á metros.*

$$61 : 51 : : 385 : x = 321'88 \text{ metros.}$$

Reducir 235 *kilómetros á leguas.*

$$\begin{array}{rcl} x^{\,leg.} & = & 235^{\,Km} \\ 1 & = & 1000^{\,m} \\ 51 & = & 61^{\,v} \\ 1 & = & 3^{\,p} \\ 20000 & = & 1^{\,leg.} \end{array}$$

Haciendo las reducciones y despejando la x, resulta

$$x = 42'16 \textit{ leguas.}$$

¿Cuántas cántaras hacen 728 *litros?*

$$\begin{array}{rcl} x^{\,cánt.} & = & 728^{\,l} \\ 60 & = & 119^{\,cuartillos.} \\ 32 & = & 1^{\,cánt.} \end{array}$$

Resulta $x = 45'12$ *cántaras.*

Reducir 558 *hectólitros á fanegas.*

$$\begin{array}{rcl} x^{\,faneg.} & = & 558^{\,Hl} \\ 1 & = & 100^{\,l} \\ 37 & = & 8^{\,celem.} \\ 12 & = & 1^{\,faneg.} \end{array}$$

Resulta $x = 1005'4$ *fanegas.*

¿Cuántos litros de aceite hacen 17 *arrobas y* 15 *libras?*

Reducido este número á libras, es 440 libras de aceite.

$$199 : 100 : : 440 : x = 221'1 \text{ litros de aceite.}$$

¿79 kilogramos cuántas libras hacen?

$$46 : 100 : : 79 : x = 171'7 \text{ libras.}$$

(*) Advertimos que si las unidades á que se refieren el número dado y el pedido no son las mismas que las de la equivalencia respectiva, de que nos serviremos, la resolución del problema casi siempre será por la regla conjunta.

¿126 hectáreas á cuántas fanegas superficiales equivalen?

$$\begin{array}{lcl} x^{\text{faneg.}} & = & 126^{Ha} \\ 1 & = & 10000^{m^2} \\ 100 & = & 1288^{p^2} \\ 144 & = & 1^{\text{estadal cuadrado.}} \\ 576 & = & 1^{\text{faneg.}} \end{array}$$

Despejando la x, resulta $x = 195'66$ *faneg. superf. de Castilla.*

¿Cuántos pies cúbicos hacen 25 metros cúbicos?

$$\begin{array}{lcl} 59^{m^3} & = & 101^{v^3} \\ 1 & = & 27^{p^3} \\ x & = & 25^{m^3} \\ \hline x & = & 1155'5 \text{ pies cúbicos.} \end{array}$$

¿A cuántas toneladas de arqueo antiguas equivalen 250 *toneladas de arqueo modernas?*

$41 : 27 : : 250 : x = 164'63$ toneladas de arqueo antiguas.

CORRESPONDENCIA

ENTRE LAS MEDIDAS Y PESAS DE LAS DIFERENTES PROVINCIAS DE ESPAÑA Y LAS MÉTRICAS, SEGÚN LA COMISIÓN DE PESAS Y MEDIDAS.

CASTILLA.

La vara tiene 0'835905 metros; *el metro* 1'196308 varas, ó 1 vara, 7 pulgadas y 0'805 líneas: *la libra* 0'460093 kilogramos; *el kilogramo* 2'173474 libras, ó 2 libras, 2 onzas y 12'409 adarmes: *la cántara ó arroba de vino* 16'133 litros: *el litro de vino* 1'983512 cuartillos, ó 1 cuartillo y 3'934 copas: la *arroba de aceite* 12'563 litros; *el litro de aceite* 1'989971 libras, ó 1 libra y 3'960 panillas: *la fanega de áridos* 55'501 litros; *el litro de grano* 0'864849 cuartillos, ó 3'459 ochavillos: *la fanega superficial* 64'395617 áreas; *la área* 143'115329 varas cuadradas.

ALAVA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la cántara* tiene 16'365 litros; *el litro de líquido* 1 cuartillo y 3'822 copas: *la media fanega de áridos* 27'81 litros; *el litro de grano* 0'863 cuartillos: *la fanega de tierra de* 660 *estados de* 49 *pies cuadrados* 25'107956 áreas; *la área* 26 estados y 14'038 pies cuadrados.

ALBACETE.

La vara tiene 0'837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0'129 líneas: *la libra* 0'458 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 2 onzas y 14'952 adarmes: *la media arroba para líquidos* 6'365 litros; *el litro de líquido* 2'514 cuartillos: *la media fanega de áridos* 28'325 litros; *el litro de grano* 0'847 cuartillos: *la fanega de tierra de* 10000 *varas cuadradas* 70'0569 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6'670 pies cuadrados.

ALICANTE.

La vara tiene 0'912 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 5'684 líneas: *la libra* 0'533 kilogramos; *el kilogramo* 1 libra, 14 onzas y 0'300 adarmes: *la medida de libra para aceite* 0'60 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 2'667 cuarterones: *el cántaro* 11'55 litros; *el litro de vino* 1'385 michetas: *la barchilla de grano* 20'775 litros; *el litro de grano* 0'770 cuartillas: *el jornal de tierra de* 5776 *varas cuadradas* 48'041533 áreas; *la área* 120 varas cuadradas y 2'64 pies cuadrados.

ALMERÍA.

La vara tiene 0'833 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 2'607 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos* tiene 8'18 litros; *el litro de líquido* 2'200 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'531 litros; *el litro de grano* 0'872 cuartillos: *la tahulla de* 1600 *varas castellanas cuadradas para las tierras de riego* 11'182336 áreas: *la fanega para las tierras de secano* es la de Castilla.

ÁVILA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'96 litros; *el litro de líquido* 2'010 cuartillos: *la media fanega para áridos* 28'20 litros; *el litro de grano* 0'851 cuartillos: *la fanega de tierra de* 5625 *varas cuadradas* 39'303966 áreas: *la fanega de puño de* 6000 *varas cuadradas*

*

41'924230 áreas: *la aranzada de viña de* 6400 *varas cuadradas* 44'719179 áreas: *la huebra de* 3200 *varas cuadradas* 22'359589 áreas: *la peonada de prado de* 5600 *varas cuadradas* 39'129281 áreas.

BADAJOZ.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para aceite* tiene 6'21 litros; *el litro de aceite* 4'831 cuartillos: *la media arroba para los demás líquidos* 8'21 litros; *el litro de líquido* 2'314 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'92 litros; *el litro de grano* 0'860 cuartillos: la fanega *superficial* es la de Castilla.

BALEARES.

La media cana tiene 0'782 metros; *el metro* 5'115 palmos: *la libra* 0'407 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 5'484 onzas: *la mensura para aceite* 16'221 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 2'055 onzas: *la cuarta para vino* 1'026 litros; *el litro de vino* 0'975 cuartas: *la libra para aguardiente* 0'41 litros; *el litro de aguardiente* 2'438 libras: *la media cuartera para áridos* 35'17 litros; *el litro de grano* 0'512 almudes: *el destre mallorquín lineal* 4'214 metros lineales; *el destre mallorquín superficial* 17'7578 metros cuadrados: *la cuarterada* 71'031184 áreas; *la área* 5 destres superficiales, 16 varas de Burgos cuadradas y 0'402 pies idem.

BARCELONA.

La cana tiene 1'555 metros; *el metro* 5'145 palmos: *la libra* 0'400 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 6 onzas: *la libra medicinal* 0'300 kilogramos; *el kilogramo* 3 libras y 4 onzas medicinales: *el barrilón de líquido* 30'35 litros; *el litro de líquido* 1'054 mitadellas: *el cuartán de aceite* 4'15 litros; *el litro de aceite* 3'836 cuartas: *la media cuartera para áridos* 34'759 litros; el *litro de grano* 0'173 cuartanes: *la muxada superficial de* 2025 *canas superficiales* 48'965006 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 22'788 palmos cuadrados.

BURGOS.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'05 litros; *el litro* 2'270 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'17 litros; *el litro de grano* 0'883 cuartillos: *la fanega de tierra* es la de Castilla.

CÁCERES.

La vara es la de Castilla: *la libra* tiene 0'456 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 3 onzas y 1'404 adarmes; *el medio cuarto para vino* 1'73 litros; *el litro de vino* 2'601 cuartillos: *el medio cuarto para aceite* 1'60 litros; *el litro de aceite* 2'187 panillas: *la media fanega para áridos* 26'88 litros; *el litro de grano* 0'893 cuartillos: *la fanega de tierra* es la de Castilla.

CÁDIZ.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para vino* tiene 7'922 litros; *el litro de vino* 2'020 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6'26 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 3'987 panillas: *la media fanega para áridos* 27'272 litros; *el litro de grano* 0'880 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

CANARIAS.

La vara tiene 0'842 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 9'064 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la arroba de líquido de Santa Cruz de Tenerife* tiene 5'08 litros; *el litro de líquido* 0'984 cuartillos: *la arroba de líquido* *de la ciudad de las Palmas* 5'34 litros; *el litro de líquido* 0'936 cuartillos; *el cuartillo de líquido de Guía* 0'995 litros; *el litro de líquido* 1'005 cuartillos; *el cuartillo del Arrecife de Lanzarote* 2'46 litros; *el litro de líquido* 0'407 cuartillos: *la media fanega de áridos de Santa Cruz de Tenerife* 31'33 litros; *el litro de grano* 0'766 cuartillos: *el medio almud de la ciudad de las Palmas* 2'75 litros; *el litro de grano* 0'182 almudes: *el medio almud de Guía* 2'84 litros; *el litro de grano* 0'176 almudes: *la fanega superficial de* 7511 $\frac{1}{3}$ *varas castellanas cuadradas* 52'482925 áreas; *la área* 30'486 brazas.

CASTELLÓN.

La vara tiene 0'906 metros; *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 11'762 líneas, ó bien 1 vara y 1'660 cuartas: *la libra* 0'358 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 9 onzas, 2 cuartas y 0'313 adarmes: *el cántaro para los líquidos excepto el aceite*, 11'27 litros; *el litro de liquido* 1'420 cuartillos: *la arroba para aceite* 12'14 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 2'544 cuartas; *la barchilla* 16'60 litros; *el litro de grano* 0'241 celemines: *la fanegada superficial de* 200 *brazas reales* 8'310964 áreas; *la área* 24'065 brazas reales.

CIUDAD-REAL.

La vara tiene 0'839 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 10'899 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos, excepto el aceite*, tiene 8 litros; *el litro de líquido* 2 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6'22 litros; *el litro de aceite* 0'08 arrobas; *la media fanega para áridos* 27'29 litros; *el litro de grano* 0'879 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

CÓRDOBA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la arroba para líquidos* tiene 16'31 litros; *el litro de líquido* 1'962 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'60 litros; *el litro de grano* 0'870 cuartillos: *la fanega superficial de* 8760 $\frac{5}{12}$ *varas cuadradas* 61'212287 áreas: *la aranzada de* 5256 $\frac{1}{4}$ *varas cuadradas* 36'727372 áreas.

CORUÑA.

La vara tiene 0'843 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 8'456 líneas: *la libra* 0'575 kilogramos; *el kilogramo* 1 libra y 14'783 onzas: *el ferrado de trigo* 16'15 litros; *el litro de trigo* 1'486 cuartillos: *el ferrado de maíz* 20'87 litros; *el litro de maíz* 1'15 cuartillos: *la cántara de vino* 15'58 litros; *el litro de vino* 2'182 cuartillos: *la cántara de aguardiente* 16'43 litros; *el litro de aguardiente* 2'069 cuartillos: *la arroba de aceite* 12'43 litros; *el litro de aceite* 2'011 cuartillos: *el ferrado superficial de* 900 *varas cuadradas* 6'395841 áreas: *el ferrado superficial de* 625 *varas cuadradas* 4'441556 áreas; *la área* 140 varas cuadradas y 6'448 pies cuadrados.

CUENCA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para líquidos* tiene 7'88 litros; *el litro* 2'030 cuartillos; *la media fanega para áridos* 27'10 litros; *el litro de grano* 0'886 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

GERONA.

La cana tiene 1'559 metros; *el metro* 5 palmos y 0'526 cuartos: *la libra* 0'400 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 6 onzas; *el mallal para vino* 15'48 litros; *el litro de vino* 1'034 porrones: *el cuartán para áridos* 18'08 litros; *el litro de grano* 0'332 mesurones: *la vesana de tierra de* 900 *canas cuadradas* 21'874329 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 9'224 palmos cuadrados.

GRANADA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para líquidos tiene* 8'21 litros; *el litro de líquido* 2'314 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'35 litros; *el litro de grano* 0'878 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

GUADALAJARA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para líquidos* tiene 8'21 litros; *el litro de líquido* 2'314 cuartillos: *la media arroba para aceite* 6'35 litros; *el litro de aceite* 1 libra y 3'874 panillas: *la media fanega para áridos* 27'40 litros; *el litro de grano* 0'876 cuartillos: *la fanega superficial de* 4444 $\frac{4}{9}$ *varas cuadradas* 31'054985 áreas.

GUIPÚZCOA.

La vara tiene 0'837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0'129 líneas: *la libra de* 17 *onzas* 0'492 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 0'553 onzas: *la media azumbre* 1'26 litros; *el litro de líquido* 1'587 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'65 litros; *el litro de grano* 1'157 chillas: *la fanega superficial de* 4900 varas cuadradas 34'327881 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6'670 pies cuadrados.

HUELVA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para líquidos* tiene 7'89 litros; *el litro de líquido* 1'014 jarros: *la media fanega para áridos* 27'531 litros; *el litro de grano* 0'872 cuartillos: *la fanega superficial de* 5280 *varas cuadradas* 36'893323 áreas.

HUESCA.

La vara tiene 0'772 metros; *el metro* 1 vara y 0'886 tercias: *la libra* 0'351 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 10 onzas y 3'009 arienzos: *el cántaro* 9'98 litros; *el litro* 0'802 jarros: *la medida de libra para el menudeo de aguardiente* 0'36 litros; *el litro de aguardiente* 2'778 libras: *la medida de libra para el aceite* 0'37 litros; *el litro de aceite* 2'703 libras: *la fanega para áridos* 22'46 litros; *el litro de grano* 0'534 almudes: *la fanega superficial de* 1200 *varas cuadradas* 7'151808 áreas; *la área* 1 almud, 67 varas cuadradas y 8'108 tercias cuadradas.

JAÉN.

La vara tiene 0'839 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 10'899 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la medida de media arroba para vino* tiene 8'02 litros; *el litro* 1'995 cuartillos; *la medida de media arroba para aceite* 7'12 litros; *el litro de aceite* 1'896 libras: *la media fanega para áridos* 27'37 litros; *el litro de grano* 0'877 cuartillos: *la fanega superficial de* 8963 *varas castellanas cuadradas* 62'627812 áreas.

LEÓN.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'92 litros; *el litro* 2'020 cuartillos: *la emina para áridos* 18'11 litros; *el litro de grano* 0'883 cuartillos: *la emina superficial de* 1344 $\frac{4}{9}$ *varas cuadradas para las tierras de secano* 9'394133 áreas; *la emina superficial de* 900 *varas cuadradas para las tierras de regadío* 6'262238 áreas.

LÉRIDA.

La media cana tiene 0'778 metros; *el metro* 5'141 palmos: *la libra* 0'401 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 5 onzas, 3 cuartas y 2'803 arxens: *la* *cántara de vino* 11'38 litros; *el litro* 1'054 porrones: *la medida de tres cuartanes para áridos* 18'34 litros; *el litro de grano* 1'309 picotines: *el jornal superficial de* 1800 *canas cuadradas* 43'580448 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 19'387 palmos cuadrados.

LOGROÑO.

La vara tiene 0'837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0'129 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la cántara* tiene 16'04 litros; *el litro de vino* 1'995 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'47 litros; *el litro de grano* 0'874 cuartillos: *la fanega superficial de* 2722 *varas castellanas cuadradas* 19'019626 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6'670 pies cuadrados.

LUGO.

La vara tiene 0'855 metros; *el metro* 1 vara y 6'105 pulgadas: *la libra* 0'573 kilogramos; *el kilogramo* 1 libra y 2'981 cuarterones: *el cuartillo para líquidos* 0'47 litros; *el litro* 2'128 cuartillos: *el ferrado para áridos* 13'13 litros; *el litro de grano* 0'076 ferrados; *el ferrado superficial de* 625 *varas castellanas cuadradas* 4'367107 áreas.

MADRID.

La vara tiene 0'843 metros; *el metro* 1 vara, 6 pulgadas y 8'456 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos* tiene 8'15 litros; *el litro de líquido* 1'963 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'67 litros; *el litro de grano* 0'867 cuartillos: *la fanega superficial de* 4900 *varas castellanas cuadradas* 34'238121 áreas: *la fanega superficial* de 4900 *varas madrileñas cuadradas* 34'821801 áreas; *la área* 140 varas cuadradas y 6'448 pies cuadrados.

MÁLAGA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba para líquidos* tiene 8'33 litros; *el litro de líquido* 1'921 cuartillos: *la media fanega para áridos* 26'97 litros; *el litro de grano* 0'890 cuartillos; *la fanega superficial de* 8640 *varas cuadradas* 60'370891 áreas.

MURCIA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media arroba de vino* tiene 7'80 litros; *el litro de vino* 2'051 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'64 litros: *el litro de grano* 0'868 cuartillos: *la fanega superficial de* 9600 *varas cuadradas* 67'078768 áreas.

ORENSE.

La vara es la de Castilla: *la libra* tiene 0'574 kilogramos; *el kilogramo* 1 libra y 14'843 onzas: *la cántara* 15'96 litros; *el litro de líquido* 2'256 cuartillos: *el ferrado para medir grano* 13'88 litros; *el litro de grano* 1'729 copelos: *el ferrado colmado para medir maíz* 18'79 litros; *el litro de maíz* 1'277 copelos: *el ferrado superficial de* 900 *varas cuadradas* 6'288635 áreas. *la cavadura de* 625 *varas cuadradas* 4'367107 áreas.

OVIEDO.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la cántara* tiene 18'41 litros; *el litro* 1'738 cuartillos: *la media fanega asturiana para áridos* 37'07 litros; *el litro de grano* 1'726 cuartillos: *el día de bueyes ó sean* 1800 *varas cuadradas* 12'577269 áreas.

PALENCIA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'88 litros; *el litro* 2'030 cuartillos; *la media arroba para aceite* 6'12 litros; *el litro de aceite* 2'042 libras: *la media fanega para áridos* es la de Castilla: *la obrada de tierra de* 7704 $\frac{1}{6}$ *varas cuadradas* tiene 53'831876 áreas.

PAMPLONA.

La vara tiene 0'785 metros; *el metro* 1 vara, 9 pulgadas y 10'318 líneas: *la libra* 0'372 kilogramos; el *kilogramo* 2 libras, 8 onzas y 2'064 ochavas: *el cántaro* 11'77 litros; *el litro de vino* 1 pinta y 1'438 cuartillos: *la libra para medir aceite* 0'41 litros; *el litro de aceite* 2 libras y 1'756 cuarterones: *el robo para áridos* 28'13 litros; *el litro de grano* 0'569 almudes: *la robada superficial de* 1458 *varas cuadradas* 8'984560 áreas; *la área* 162 varas cuadradas y 2'506 pies cuadrados.

PONTEVEDRA.

La vara es la de Castilla: *la libra* tiene 0'579 kilogramos, *el kilogramo* 1 libra, 14 onzas y 8'677 adarmes; *el medio cañado para líquidos* 16'35 litros; *el litro* 2'080 cuartillos: *el ferrado para medir trigo* 15'58 litros; *el litro de trigo* 0'770 concas: *el ferrado para medir maíz* 20'86 litros; *el litro de maíz* 0'575 concas: *el ferrado de sembradura de* 900 *varas cuadradas* 6'288635 áreas.

SALAMANCA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *el medio cántaro* tiene 7'99 litros; *el litro de líquido* 2'003 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'29 litros; *el litro de grano* 0'879 cuartillos; *la fanega de tierra* es la de Castilla.

SANTANDER.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'90 litros; *el litro de líquido* 2'025 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'42 litros; *el litro de grano* 0'875 cuartillos: *la fanega superficial* es la de Castilla.

SEGOVIA.

La vara tiene 0'837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0'129 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media arroba para líquidos* tiene 8 litros; *el litro de líquido* 2 cuartillos; *la media fanega para áridos* 27'30 litros; *el litro de grano* 0'879 cuartillos: *la obrada de tierra* 39'407006 áreas; *la área* 142 varas cuadradas y 6'670 pies cuadrados.

SEVILLA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la arroba para líquidos* tiene 15'66 litros; *el litro* 2'043 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'35 litros; *el litro de grano* 0'878 cuartillos: *la fanega superficial de* 85'07 $\frac{15}{16}$ *varas cuadradas* 59'447248 áreas; *la aranzada de* 6806 $\frac{1}{4}$ *varas cuadradas* 47'557799 áreas.

SORIA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'90 litros; *el litro de líquido* 2'025 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'57 litros; *el litro de grano* 0'871 cuartillos: *la fanega superficial de* 3200 *varas cuadradas* 22'359589 áreas.

TARRAGONA.

La media cana tiene 0'780 metros; *el metro* 5'128 palmos: *la libra* 0'400 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 6 onzas; *la armiña para vino* 34'66 litros: *el litro de vino* 0'923 porrones, *la sinquena para aceite* 20'65 litros; *el litro de aceite* 0'242 cuartales: *la media cuartera para áridos* 35'40 litros; *el litro de grano* 0'169 cortanes: *la cana superficial de rey de* 2500 *canas cuadradas* 60'84 áreas; *la área* 41 canas cuadradas y 5'849 palmos cuadrados.

TERUEL.

La vara tiene 0'768 metros; *el metro* 1'302 varas: *la libra* 0'367 kilogramos; *el kilogramo* 2'725 libras: *el medio cántaro* 10'96 litros; *el litro de líquido* 0'091 cántaros: *la media fanega para áridos* 21'40 litros; *el litro de grano* 0'023 fanegas: *la fanega de tierra de* 1600 *varas castellanas cuadradas* 11'179795 áreas.

TOLEDO.

La vara tiene 0'837 metros; *el metro* 1 vara, 7 pulgadas y 0'129 líneas: *la libra* es la de Castilla: *la media cántara* tiene 8'12 litros: *el litro de líquido* 1'970 cuartillos: *la media arroba para medir aceite* 6'25 litros: *el litro de aceite* 2 libras: *la media fanega para áridos* es la de Castilla: *la fanega superficial de* 5377 $\frac{7}{9}$ *varas castellanas cuadradas* 37'576532 áreas; *la fanega superficial* de 6722 $\frac{2}{9}$ *varas castellanas cuadradas* 46'970665 áreas.

VALENCIA.

La vara tiene 0'906 metros: *el metro* 1 vara, 3 pulgadas y 8'821 líneas, ó bien 1 vara y 1'660 cuartas: *la libra* 0'355 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 9 onzas y 3'211 cuartas: *el cántaro de vino* 10'77 litros; *el litro de vino* 1'486 cuartillos: *la arroba de aceite* 11'93 litros; *el litro de aceite* 0'335 azumbres: *la barchilla para áridos* 16'75 litros; *el litro de grano* 0'955 cuartillos: *la fanega superficial de* 1012 $\frac{1}{2}$ *varas cuadradas* 8'310964 áreas; *la área* 24'065 brazas reales.

VALLADOLID.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *la media cántara* tiene 7'82 litros; *el litro* 2'046 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'39 litros; *el litro de grano* 0'876 cuartillos: *la obrada superficial de* 6666 $\frac{2}{3}$ *varas cuadradas* 46'582478 áreas.

VIZCAYA.

La vara es la de Castilla: *la libra* tiene 0'488 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras y 13'377 adarmes: *la media azumbre* 1'11 litros; *el litro* 1'802 cuartillos: *la media arroba de aceite* 6'74 litros; *el litro de aceite* 1 libra, 3 cuarterones y 0'837 ochavas: *la media fanega para áridos* 28'46 litros; *el litro de grano* 0'211 celemines: *la peonada superficial de* 544 $\frac{4}{9}$ *varas cuadradas* 3'804236 áreas.

ZAMORA.

La vara es la de Castilla: *la libra* también: *el medio cántaro* tiene 7'98 litros; *el litro* 2'005 cuartillos: *la media fanega para áridos* 27'64 litros; *el litro de grano* 0'868 cuartillos; *la fanega superficial de* 4800 *varas cuadradas* 33'539384 áreas.

ZARAGOZA.

La vara tiene 0'772 metros; *el metro* 1 vara, 10 pulgadas y 7'585 líneas: *la libra* 0'350 kilogramos; *el kilogramo* 2 libras, 10 onzas, 1 cuarto y 0'571 adarmes: *el cántaro de vino* 9'91 litros; *el litro* 1'615 cuartillos: *la arroba para medir aceite* 13'93 litros; *el litro de aceite* 2'584 libras: *la arroba para medir aguardiente* 13'33 litros; *el litro de aguardiente* 2'701 libras: *la fanega para áridos* 22'42 litros; *el litro de grano* 0'535 almudes: *el cuartal superficial de* 400 *varas aragonesas cuadradas* 2'333936 áreas; *la área* 1 almud y 67'790 varas cuadradas.

MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE INGLATERRA.

Medidas de longitud.

La *milla* (mile) tiene 1760 yardas (yards), el *furlong* 220 yardas, el *pole* ó la *perch* 5 $\frac{1}{2}$ yardas, la *braza* (fathom) 2 yardas, la *yarda* (yard) 0'9144 metros, el *pie* (foot) $\frac{1}{3}$ de yarda, la *pulgada* (inch ó thumb) $\frac{1}{12}$ de pie.

Medidas de capacidad.

El *chaldron* tiene 12 sacos (sacks), el *quarter* 8 bushels, el *saco* 3 bushels, el *bushel* 8 gallons, el *peck* 2 gallons, el *galón* (gallon) 4'5435 litros, el cuarto de galón (quart) y el octavo de galón (pint).

Pesas troy *para las materias preciosas.*

La *libra* (livre) tiene 12 onzas (ounces), la *onza* 20 pennyweights, el *pennyweight* 24 granos (grains), el *grano* (grain) 0'065 gramos.

Pesas avoir dupois *para los usos ordinarios.*

La *tonelada* (ton) tiene 20 quintales, el *quintal* 112 libras (pounds) ó 50'8 kilogramos, la *libra* (pound) 16 onzas, la *onza* 16 adarmes (drams).

Medidas de superficie.

El *acre* tiene 4 roods, la *rood* 1210 yardas cuadradas (yards squares), la *rod* ó la *perch square* 30'25 yardas cuadradas, la *yarda cuadrada* 0'836 de metro cuadrado.

Monedas de oro.

El *soberano* (sovereign) ó *libra esterlina* (pound sterling) tiene 20 chelines (schillings), que equivalen á 25 pesetas en oro, y el *medio soberano* (half sovereing) 10 chelines.

Monedas de plata.

El *chelín* (schilling) tiene 12 peniques (pence), y 6 el *medio chelín*. La *corona* (crown) tiene 5 chelines.

Monedas de cobre.

El *penique* (penny), el *doble penique*, el *medio penique* y el *cuarto de penique* ó farthing.

PROBLEMAS DE REDUCCIÓN DE MEDIDAS Y PESAS INGLESAS

Á ESPAÑOLAS.

1.° *¿100 yardas cuántas varas hacen?*
La yarda tiene 0'9144 metros; luego 100 yardas equivalen á 91'44 metros, y como (*pág.* 209) 51 metros hacen 61 varas, formaremos la proporción

$$51 : 61 :: 91'44 : x,$$
$$17 : 61 :: 30'48 : x = 109'37 \text{ varas.}$$

2.° *¿100 millas inglesas cuántas leguas españolas hacen?*
Una milla inglesa tiene 1760 yardas, y una yarda equivale á 0'9144 metros, y por tanto una milla inglesa equivale á $176 \times 9'144$ metros, y 100 millas valen $176 \times 914'4$ metros; como además 7 leguas hacen 39 kilómetros, formaremos la proporción

$$39000 : 7 :: 176 \times 914'4 : x,$$
ó $$1300 : 7 :: 176 \times 30'48 : x = 29 \text{ leguas próximamente.}$$

3.° *¿Cuántas fanegas de grano tienen el bushel, el saco y el quarter?*
El bushel tiene 8 galones, y el galón 4'5435 litros: por consiguiente, el bushel tiene 36'3480 litros, y como (*pág.* 208) 5 hectólitros equivalen á 9 fanegas, formaremos la proporción

$$500 : 9 :: 36'348 : x = 0'654264 \text{ fanegas.}$$

Como el saco tiene 3 bushels, equivale á 1'962792 fanegas; y como el quarter tiene 8 bushels, resulta el quarter = 5'234112 fanegas; es decir, que aproximadamente

$$1 \text{ bushel} = \tfrac{2}{3} \text{ de fanega,}$$
$$1 \text{ saco} = 2 \text{ fanegas,}$$
$$1 \text{ quarter} = 5\tfrac{1}{4} \text{ fanegas.}$$

4.° *¿Cuántos cuartillos de líquido tiene el galón?*
El galón tiene 4'5435 litros, y como 60 litros equivalen á 119 cuartillos, tendremos

$$60 : 119 :: 4'5435 : x,$$
ó $$20 : 119 :: 1'5145 : x = 9 \text{ cuartillos.}$$

5.° *¿Cuántas libras españolas tiene la tonelada inglesa?*
La tonelada tiene 20 quintales, el quintal inglés 112 libras ó 50'8 kilogramos; por consiguiente, la tonelada inglesa tiene 1016 kilogramos. Ahora, como 46 kilogramos = 100 libras españolas, tendremos la proporción

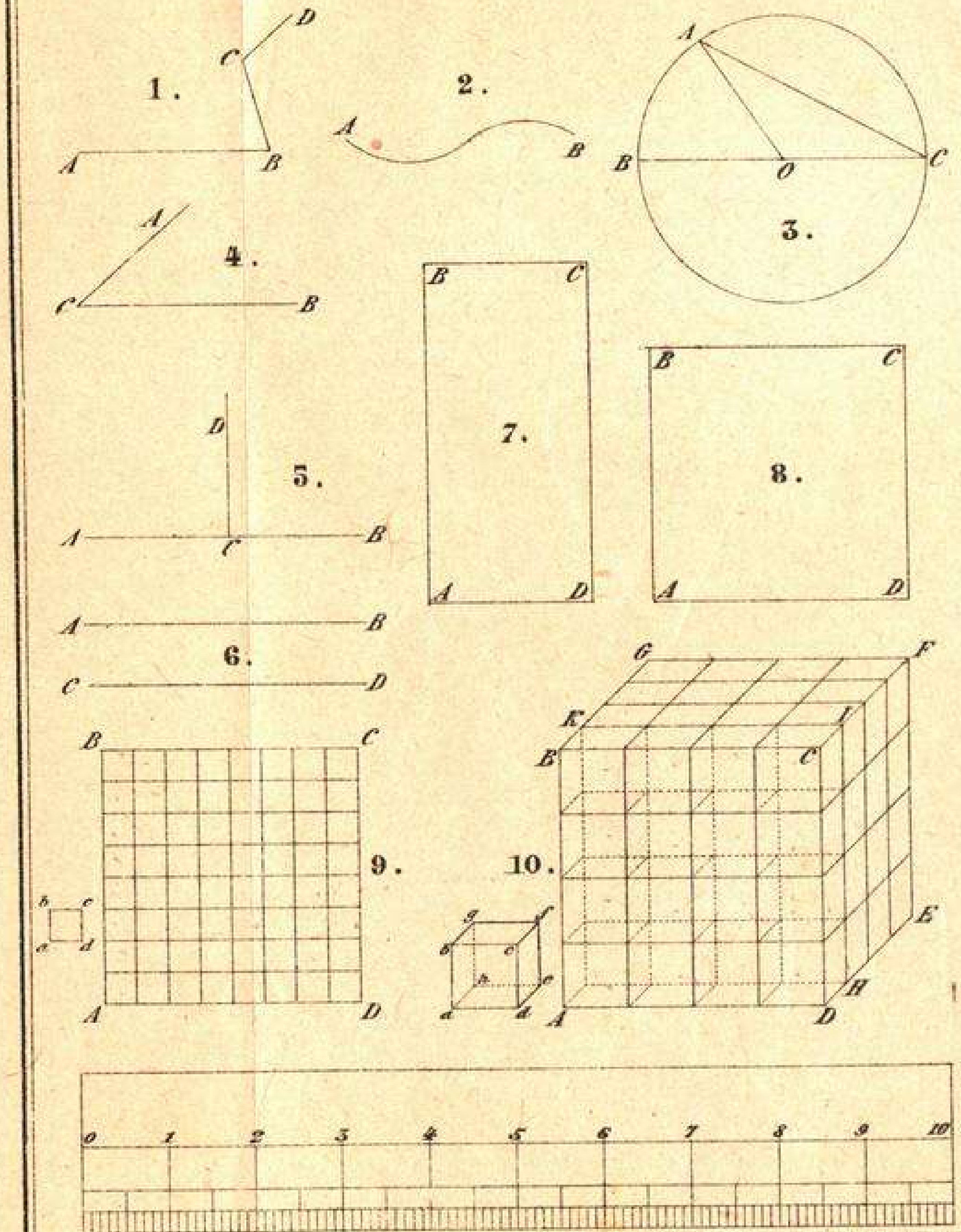
$$46 : 100 :: 1016 : x,$$
ó $$23 : 100 :: 508 : x = 2206 \text{ libras españolas.}$$

6.° *¿100 acres á cuántas fanegas superficiales equivalen?*
El acre = 4840 yardas cuadradas; la yarda cuadrada = 0'836 de metro cuadrado: luego el acre = 4046'24 metros cuadrados = 0'404624 de hectárea; y como 9 hectáreas equivalen á 14 fanegas castellanas, tendremos $9 : 14 :: 0'404624 : x = 63$ fanegas superficiales de Castilla, poco menos.

NOTA. La reducción de monedas inglesas á españolas, y al contrario, depende del cambio, que á la par sería de 25 pesetas por libra esterlina. Véase nuestra Aritmética práctica.

FIN.

Celestina Nuga Diez



Decímetro dividido en centímetros y milímetros.

CORTÀZAR

ARITMÉTICA