TRATADO
DE LAS
ACOTACIONES

OBRAS PUBLICADAS

	PRECIOS	
	Madrid.	Provincias.
Tratado de las Acotaciones, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. José Goyanes y Soldevilla.—Un tomo en 4.°, en rústica, con 8 láminas, hechas con todo esmero: 3.ª edicion corregida.. Pesetas.	3,50	4
Tratado de Topografía, por los mismos.—Dos gruesos tomos en 4.°, en rústica, cada uno con su Atlas por separado, que constan entre ambos de 94 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas: 3.ª edición, corregida y aumentada....	40	42
Curso elemental de Topografía, por los mismos.—Un tomo en 4.°, en rústica, con 17 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas: 7.ª edición, corregida y notablemente aumentada..	10	11
Tratado de Agrimensura, por D. Isidro Giol y Soldevilla.—Un tomo en 4.°, en rústica, con 16 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas: 3.ª edición corregida y notablemente aumentada..........	8	9
Geometría descriptiva sobre un solo plano, ó tratado de planos acotados, por D. Isidro Giol y Soldevilla.—Un tomo en 4.°, en rústica, con 12 láminas perfectamente dibujadas y litografiadas: 1.ª edicion...	6	6,50
Manual de la juventud, ó prontuario de los estudios que son preciso hacer para seguir las diferentes carreras, por D. Isidro Giol y Soldevilla y D. Agapito González Callejo.—Un tomo en 4.°, en rústica: 1.ª edicion.........................	3	4
Elementos de vendajes, apósitos y aparatos; Anatomía quirúrgica y operaciones, por D. Isidro Giol y del Valle, Doctor en Medicina y Cirugía y Médico por oposición del Hospital provincial de Madrid: 2.ª edicion. Consta de tres cuadernos, que se venden por separado, á saber:		
El primer cuaderno..	2	2,50
El segundo idem...................................	3	3,50
El tercero idem...	2	2,50

Todas estas obras se hallan de venta en la librería de la Viuda de Hernando y Compañía, calle del Arenal, núm. 11.

NOTAS.

1.ª Un número encerrado entre paréntesis, así (25), da á conocer que la materia de que se trata está fundada en lo dicho en el párrafo 25, el que se deberá tener presente para la mejor inteligencia.

2.ª Las citas de Geometría se refieren á la octava edición del Tratado de Geometría elemental de D. Juan Cortázar, y en su defecto á cualquiera de las posteriores.

TRATADO

DE LAS

ACOTACIONES,

POR EL ILMO. SEÑOR

DON ISIDRO GIOL Y SOLDEVILLA,

Caballero de la Cruz de primera clase de la órden civil de María Victoria, y Vocal de la Asamblea de la misma, Caballero de la Real y Militar órden de San Fernando, Jefe honorario de Administracion de primera clase, Director de Caminos vecinales y Canales de riego, Profesor de Matemáticas, Arquitectura, Dibujo y Comercio, Vocal de varios de los Tribunales de oposiciones á las cátedras de Matemáticas vacantes en los Institutos y Catedrático libre de Acotaciones y Topografía en el Instituto de San Isidro de Madrid,

Y

DON JOSÉ GOYANES Y SOLDEVILLA,

Director de Caminos vecinales y Canales de riego, Ayudante de Obras públicas y de su Escuela especial.

TERCERA EDICION CORREGIDA.

MADRID.

IMPRENTA DE TOMAS MINUESA,

calle de Juanelo, núm. 19.

—

1890.

PRÓLOGO

En las anteriores ediciones de esta obra hemos puesto el siguiente:

«Al publicar el presente Tratado, lo hacemos sin pretension de ningún género, y hemos tenido principalmente por objeto el que pueda servir de texto al crecido número de alumnos que concurren á nuestras clases de topografía y dibujo topográfico.

»No siendo posible, sin el estudio de las acotaciones, prometerse grandes adelantos en el conocimiento de las operaciones topográficas, creemos que nuestra obra, escrita con todo el método y claridad que nos ha sido posible, y encaminada exclusivamente á conseguir dicho objeto, está llamada á prestar un servicio importante á todos los que en sus carreras necesiten como accesorio el estudio de la Topografía.

»Los que se dedican al dibujo topográfico, que hoy por sí sólo puede proporcionar á la juventud una posición desahogada, como lo acreditan los muchos discípulos de nuestras clases, los cuales han completado su instruccion en breve tiempo, disfrutando en la actualidad crecidos sueldos, necesitan para ser dibujantes inteligentes el estudio de las acotaciones, en donde tratamos con la conveniente extension cuanto tiene relación con la teoría adoptada para la representación gráfica del terreno, pudiendo despues dedicarse con todo conocimiento al desempeño de la parte artística del dibujo topográfico.

»Para conseguir este último é importante objeto, tenemos el placer de consignar aquí, que está ya concluida y empezará inmediatamente á publicarse una excelente obra titulada *Estudio completo de dibujo Topográfico*, debido á la laboriosidad de nuestro apreciable amigo y comprofesor D. José Pilar Morales, y que puede considerarse como el complemento de la presente. El método y claridad adoptados por el autor, que goza de una justa cuanto merecida reputacion por sus extensos conocimientos en la materia, la esmerada ejecucion de las bellas láminas que la acompañan, unas perfectamente grabadas en acero y otras en piedras con colores, abrazando cuanto puede necesitar el dibujante por los diferentes sistemas que establece y expone por completo, son circunstancias que dan á su publicación el mayor interés, hoy que esta clase de obras es de indisputable necesidad en España.»

El presente Tratado es la primera obra en España que cumple con la condicion de exponer esta ciencia con la extension y claridad que requiere para sus muchas aplicaciones á la Topografía.

Escrito para que sirva de introduccion al Tratado completo de Topografía y al Curso Elemental de la misma que tenemos publicados, no pueden consultarse con fruto estos libros, sin el estudio del presente, pues fundándose en la doctrina de éste los conocimientos que encierran aquéllos, hay necesidad de citar continuamente los principios que contiene.

Agotadas las primeras ediciones, por el favor que el público las ha dispensado, hemos hecho varias correcciones y mejoras en esta tercera edicion, que esperamos obtenga la misma acogida favorable.

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

SISTEMA DE LAS ACOTACIONES.

PRELIMINARES.

1. El *sistema de las acotaciones* ó de los *planos acotados*, es la parte de la Geometría descriptiva, que tiene por objeto la *representacion* de los cuerpos sobre un solo plano.

Siguiendo el *sistema de las proyecciones*, la geometría descriptiva consigue esta representacion, refiriendo á dos ó tres planos dados de posicion, los distintos puntos de que consta la superficie del cuerpo de que se trata.

Modifícase la posicion relativa de estos planos, haciendo que se confundan en uno solo, en el cual se resuelven muchos problemas de la geometría del espacio, interesantes por las aplicaciones que tienen, tanto á los proyectos de obras de arquitectura y máquinas y al trazado de los caminos y canales, como tambien á la representacion de una porcion de la superficie terrestre y á todo lo que tiene relacion con la ciencia del ingeniero y del geómetra.

2. El sistema de las *acotaciones* solo considera un plano en el cual se *representa* la figura, posicion y dimensiones de las diferentes partes de un cuerpo cualquiera y se resuelven los problemas á que acabamos de referirnos, pudiéndose además *construir* en el espacio el cuerpo representado en el plano.

Despréndese de lo dicho, que un cuerpo quedará determinado cuando hayamos conseguido representar la posicion de todos los puntos que componen su superficie. Daremos á conocer, por lo tanto, la manera de determinar un punto situado en el espacio, valiéndonos para ello de un solo plano, para pasar á la determinacion de las líneas y superficies, y resolver los problemas de que hemos hecho mérito en el párrafo anterior.

DEL PUNTO.

3. Si consideramos un punto P (fig. 1.ª) del espacio y desde él bajamos una perpendicular P *p* al plano horizontal M N, el pié *p* de esta perpendicular se llama la *proyeccion* del punto P sobre el plano. La línea P *p* es la *recta proyectante* del punto P. La longitud de esta proyectante se refiere á una unidad lineal determinada, y la relacion numérica que entre ambas líneas existe, es la *cota* del punto P. Suponiendo, por tanto, á P*p*=7,4, tomando siempre por unidad el metro, diremos que la cota de P es $7^m,4$ y el punto del espacio, al cual se refiere, quedará completamente determinado por su proyeccion *p* (figura 2) sobre el plano MN y el número 7,4 que expresa su cota.

Para fijar en el espacio la posicion del punto que acabamos de representar, bastará levantar en *p* la perpendicular al plano y tomar sobre ella una magnitud igual á $7^m,4$.

4. El plano á que se refieren las cotas de los puntos que se quieren determinar, se llama *plano de comparacion*. Se le supone generalmente horizontal, por cuya razon las proyectantes de los distintos puntos que se han de considerar son rectas verticales. En un problema cualquiera de acotaciones se supone además que el plano mismo del dibujo representa el de comparacion, que acabamos de considerar en el espacio.

5. Si tratamos ahora de hallar la diferencia de alturas de dos puntos M, N, (fig. 3), situados por encima de un plano de comparacion P Q, ó debajo de él (fig. 4), hallaremos sus proyecciones sobre este plano y la diferencia N *n'* de las longitudes de las proyectantes será la longitud de la diferencia de altura de los puntos dados. Si las cotas estuviesen dadas numéricamente, la diferencia que se busca, sería la de los números que expresasen dichas cotas.

Esta diferencia de alturas se llama tambien ***desnivel*** ó ***diferencia de nivel*** de los puntos dados.

Suponiendo que sea $Nn = 10^m$, y $Mm = 7^m$, resultará

$$Nn - Mm = 10^m - 7^m = 3^m,$$

lo cual nos dice que N está á 3^m de altura sobre M (fig. 3) con respecto al plano de comparacion, y que N (fig. 4) está 3^m mas bajo que M, con respecto al plano citado.

En vista de lo expuesto, podemos establecer los principios siguientes:

1.° Cuando dos puntos están por encima de un plano de comparacion, la diferencia de las cotas de dichos puntos representa el desnivel que existe entre ellos y el punto de cota mayor es el mas elevado ó mas distante del plano.

2.° Si dos puntos están por debajo de un plano de comparacion, el desnivel es tambien la diferencia de las cotas y el punto de cota mayor es el mas bajo, ó mas distante del plano de comparacion.

3.° Si uno de los puntos es superior y otro inferior al plano de comparacion (fig. 5), su desnivel equivaldrá á la suma de las cotas. Si, por ejemplo, tenemos $Mm = 10^m$, y $Nn = 7^m$, la diferencia de nivel será:

$$Mm + Nn = 10^m + 7^m = 17^m.$$

6. Cuando haya que considerar varios puntos cuyas cotas, referidas á un mismo plano, sean conocidas, se hallarán las alturas relativas de los mismos, comparando sus cotas respectivas dos á dos.

Así, si tenemos tres puntos A, B, C, sobre un plano de comparacion y las cotas respectivas son 7,5; 8,7; 10,6 referidas á la unidad que hemos establecido, deduciremos que A está mas bajo que B la cantidad 8,7 — 7,5 = 1,2 y mas bajo que C, 10,6 — 7,5 = 3,1. Que B está 1,2 mas elevado que A y 1,9 mas bajo que C. Y finalmente, que C está 3,1 y 1,9 respectivamente mas alto que A y B.

7. Si conocidos varios puntos *M*, *N*, O (fig. 6.), referidos á un plano horizontal que representaremos por P, el cual está situado en la parte inferior á ellos, queremos referirlos á otro plano, P′ cuya distancia al P, contada en sentido vertical, es conocida, bastará añadir á las cotas dadas la distancia *mm′* de los planos, si el nuevo P′ es inferior al P, ó restar de todas ellas la cantidad constante *mm″* si el nuevo plano P″ es superior al dado.

En el caso de que el plano P (fig. 7) fuese superior á los puntos dados, será necesario restar mm' si P' ha de estar por debajo de P, ó añadir mm'' si P'' ha de ser superior á P.

8. Cuando se tienen que considerar varios puntos, entre los cuales hay unos que están por encima y otros por debajo del plano de comparacion, las cotas de estos se deberán considerar como negativas y en tal concepto deben entrar en los cálculos que haya que hacer para la resolucion de los problemas. Es, sin embargo, más conveniente, hacer que el plano de comparacion pase por encima, ó lo que es preferible y nosotros adoptaremos, por debajo de todos los puntos: con lo cual todas las cotas serán de un mismo signo. De lo contrario hay mayor exposicion de cometer errores en la resolucion de muchos problemas. Se comprende que siempre puede satisfacerse la condicion á que acabamos de referirnos, para lo cual bastará añadir una misma cantidad á todas las cotas dadas ó restarla de ellas, segun los casos que hemos considerado (7).

Si tenemos, por ejemplo, las cotas de la (fig. 8)

$$Aa = -3{,}1;\quad Bb = -1{,}6;\quad Cc = 4{,}5;\quad Dd = 3{,}6;$$

referidas al plano de comparacion P, y queremos que el plano auxiliar P' pase por el punto mas bajo A, bastará añadir á todas las cotas la cantidad 3,1; con lo cual todas resultarán positivas. En efecto, tendremos:

$$\begin{aligned}
&\text{Cota de } A = -3{,}1 + 3{,}1 = 0.\\
&\text{Cota de } B = -1{,}6 + 3{,}1 = 1{,}5 = Bb'.\\
&\text{Cota de } C = 4{,}5 + 3{,}1 = 7{,}6 = Cc'.\\
&\text{Cota de } D = 3{,}6 + 3{,}1 = 6{,}7 = Dd'.
\end{aligned}$$

Si quisiésemos que el plano pasase por C bastaria restar de todas las cotas la cantidad 4.5, que es la cota de C, y resultaria

$$\begin{aligned}
&\text{Cota de } A = -3{,}1 - 4{,}5 = -7{,}6.\\
&\text{Cota de } B = -1{,}6 - 4{,}5 = -6{,}1.\\
&\text{Cota de } C = 4{,}5 - 4{,}5 = 0.\\
&\text{Cota de } D = 3{,}6 - 4{,}5 = -0{,}9.
\end{aligned}$$

En este caso se puede prescindir del signo negativo comun á todas las cotas; pues todos los puntos quedarán á una misma parte del plano y pueden considerarse aquellas como positivas sin inconveniente alguno.

Cuando el plano de comparación tenga que pasar por debajo de A una cierta cantidad, 10 metros por ejemplo, añadiríamos á todas las cotas la suma $3,1 + 10 = 13,1$.

Resulta de lo que acabamos de exponer:

1.° Que para hacer que el plano de comparacion pase por el punto más alto ó más bajo de varios que son dados por sus cotas, basta añadir á todas ellas la de dicho punto tomada con signo contrario.

2.° Que si el plano ha de hallarse cierta cantidad por debajo del punto menos elevado ó por encima del mas alto se añade á las cotas el número que resulta de sumar la de dicho punto con la cantidad dada; tomadas ambas cantidades con signo contrario á la cota del punto.

En el caso de que fuese absolutamente necesario que el plano de comparacion pasase por un punto determinado cualquiera, pueden referirse al mas alto ó mas bajo, como acabamos de decir, ejecutar la operacion ó resolver el problema de que se trate y restar despues de todas las cotas la cantidad que habíamos añadido. Debe tenerse presente que las adiciones y sustracciones á que ahora nos referimos son operaciones algébricas.

DE LA RECTA.

9. La proyeccion *ab* (fig. 9) de una recta es la recta que pasa por las proyecciones de sus diferentes puntos (Geom. 58).

10. De esta definicion se deduce que *la proyeccion* c *de un punto cualquiera* C *de una recta está en la proyeccion de la misma recta.*

11. En el sistema de cuyo estudio nos ocupamos, *una recta se determina por las proyecciones y las cotas de dos de sus puntos.*

En efecto, las proyecciones *a'*, *b'* (fig. 10) sobre el plano P Q y los cotas respectivas 4,0 y 7,0 sirven para hallar la posicion de dos puntos A, B (3) del espacio, que bastan para determinar la de la recta que pasa por ellos. (Geom. 5. Axioma (2.°)

El plano de las proyectantes A*a*, B*b* (fig. 9) de los puntos A y B, en el cual están la recta A B y su proyeccion *a b*, es perpendicular al de comparacion (Geom. Teorema 141) y se llama *plano proyectante de la recta* A B.

12. Si la recta dada A B (fig. 11) es horizontal, todos sus puntos tendrán la misma cota y será igual en magnitud á su proyeccion sobre el plano de comparacion. Quedará determinada, por lo tanto, por su proyeccion *ab*, y la cota comun á todos sus puntos.

13. Una recta vertical se determina por su sola proyeccion que es un punto, puesto que dicha recta es perpendicular al plano de comparacion y todas las proyectantes de sus puntos se confunden con la misma recta. Si se tienen que considerar varios puntos de esta vertical, se escribirán sus cotas al lado de la proyeccion comun á todos ellos.

14. Cuando dos rectas AB, A'B' (fig. 12) están situadas en un plano P perpendicular al de comparacion, este será el plano proyectante de ambas (11), el cual en su interseccion con Q dará para ellas proyecciones *a b*, *a' b'* situadas en una misma recta.

Se representarán, pues, estas rectas por sus proyecciones *a b*, *a' b'* (fig. 13) situadas como acabamos de decir en una misma recta. Para evitar la confusion á que esta circunstancia podría dar lugar, se acentúan las letras que designan las proyecciones, ó los números que marcan las cotas de los puntos que determinan una de las rectas dadas.

15. La proyeccion de una recta limitada se indica señalando sus extremos como en la recta M (fig. 14); la N es limitada en un sentido y la P ilimitada en ambos.

ESCALA DE LOS PLANOS ACOTADOS.

16. La distancia entre las proyecciones de dos puntos, ó lo que es lo mismo, la longitud que corresponde á la proyeccion de la recta que los une, se refiere á una escala que siempre acompaña al dibujo y se llama la *escala del plano*.

La escala ordinaria de partes iguales es una recta trazada sobre una regla ó un papel con varias divisiones para poder expresar en partes mas pequeñas la unidad y partes de la unidad de cualquiera medida. Tal es la recta LK (fig. 15) en la cual la parte AL está dividida en 10 partes iguales, por ejemplo, y las A B, B C, C D..... tienen la misma longitud que A L.

Si se establece que la magnitud AL expresa 10 metros, las partes A1, A2, A3... expresarán respectivamente uno, dos, tres... metros y así sucesivamente. Es evidente que si se quiere expresar, por ejemplo, una medida de 38 metros, esta se tendrá en la parte D8 de la escala.

Así dispuesta, suministra dos grados de la progresion décupla, esto es, ó las decenas y unidades, ó las centenas y decenas, ó los millares y centenas..... Hay otra disposicion de la escala, en la cual presenta tres grados de la misma progresion, esto es, ó las decenas, unidades y décimas de la unidad, ó los millares, centenas y decenas..... Esta escala se construye del modo siguiente:

Sobre las mayores divisiones DC, CE, EH..... (fig. 16) de la escala ordinaria, se forman los rectángulos DA, AE, EG..... de una misma altura arbitraria; la altura BD se divide en 10 partes iguales, y por los puntos de division se tiran paralelas á DH que tambien lo serán á BG. Se divide tambien la AB en 10 partes iguales como ya lo está la DC de la escala ordinaria y se une cada punto de division de la CD á partir de C con el inmediato de la izquierda en la AB.

Construida así la escala, tenemos el triángulo PAC en el cual las paralelas á la base PA serán partes alícuotas de esta base, y cada una de ellas representará tantas décimas partes de PA como expresa el número escrito á la izquierda de la paralela á DC en la cual se encuentra la fraccion ó parte de cuya magnitud nos ocupamos. Sea *mn*, por ejemplo, esta fracción; tendremos:

$$mn : PA :: Cn : CA; \text{ pero } Cn : CA :: 4 : 10; \text{ luego será}$$

$$mn : PA :: 4 : 10; \text{ de donde } mn = \frac{4}{10} PA.$$

Por tanto, si DC espresa 100 metros, C1 espresará 10 metros y entonces las décimas de PA serán metros y *mn* valdrá 4 metros.

Así como hemos dispuesto la escala para la progresion décupla, se comprende fácilmente que podría establecerse para otra progresion cualquiera y la construccion seria la misma; solo variaría la relacion de las longitudes de las distintas partes de la escala.

Con la escala que hemos enseñado á construir se pueden resolver los dos problemas siguientes:

17. 1.° *Tomar en la escala una magnitud dada, 146 metros por ejemplo.*

Para esto tendremos presente que las centenas están contadas de C á H y las decenas de C á D en la escala ordinaria, y que las unidades se cuentan en la línea DB Se buscará por lo tanto el punto L, interseccion de las rectas que parten de los puntos señalados con lós números respectivos 6 y 4 en las divisiones de las unidades y de las decenas; se fija en L una de las puntas del compás y la otra en I, interseccion de L*o* con EF que marca la primera centena. La abertura de compás LI es la longitud pedida. En efecto, ella se compone de *o*I que es igual á CE ó 100 metros, *ao* que vale 6, y *a*L igual á C4 que vale 40.

18. 2.° *Apreciar en partes de escala la longitud de una recta dada.*

Se toma esta magnitud con el compás y se lleva á la escala haciendo por tanteos que sus puntas coincidan con dos puntos de division situados en DH ó en una de sus paralelas. Para disminuir el número de los tanteos, se deberá colocar el compás primeramente de manera que una de las puntas estando en uno de los puntos C, E ó H..... de division de las centenas, por ejemplo en E, la otra vaya á parar entre C y D. Si lo verifica en un punto de division, por ejemplo el 4, en este caso la magnitud de la recta será de 140 metros. Si la segunda punta cae entre 4 y 5 se irá corriendo el compás hácia arriba hasta que estando una punta en I, por ejemplo, la otra vaya á parar al punto L de la misma paralela á la CD en que se encuentra I. Entonces la magnitud buscada será de 146 metros.

19. Ya hemos dicho (16) que la distancia entre las proyecciones de dos puntos se aprecia en la escala del plano (18). La diferencia de altura ó desnivel de los mismos por la diferencia de sus cotas (5).

Para la resolucion de algunos problemas se necesita apreciar distancias verticales y puede ser indiferente, en general, apreciarlas en la misma ó en diferente escala. Cuando se cree conveniente, la escala de alturas es múltipla de la de las distancias horizontales y suele ser 10 veces mayor. En algunos problemas es indispensable referir á la misma escala todas las magnitudes tanto horizontales como verticales.

20. *Aplicacion de una recta al plano de comparacion.* Si hacemos girar el plano proyectante de una recta A B (fig. 9) alrededor de su proyeccion *a b*, los proyectante A *a*, B *b*, describirán en su movimiento planos perpendiculares al eje *a b* y en todas sus posiciones se conservarán perpendiculares á esta recta. Cuando el plano proyectante se confunda con el de comparacion, tambien la A B se hallará en este plano y entonces se dice que la recta se ha *aplicado* al plano horizontal ó de comparacion.

21. *Para efectuar la aplicacion de una recta cualquiera al plano de comparacion, se levantarán en el plano del dibujo perpendiculares á la proyeccion* a b *desde dos puntos cuyas cotas se conozcan; se tomarán en estas perpendiculares á partir de ellos las magnitudes que las cotas respectivas indican, apreciadas en la escala préviamente asignada para las verticales, con lo cual se habrán obtenido las proyectantes de dichos puntos. La recta que une los extremos de estas proyectantes es la* A B *aplicada.*

PROBLEMAS DE LAS RECTAS

22. *Hallar la distancia entre dos puntos dados ó la verdadera magnitud de una recta limitada, conocidas las proyecciones y las cotas de sus puntos extremos.*

Resolución gráfica. Se aplica la recta al plano (21) tomando las longitudes de sus proyectantes en la escala de las horizontales del dibujo, y la longitud de la recta aplicada se aprecia despues en la misma escala (18).

Si esta es pequeña, puede construirse el trapecio en otra escala mayor, que permita apreciar mejor la magnitud que se busca.

Resolucion numérica.—Consideremos la recta A B (fig. 17) aplicada al plano. Tirando por A la AC paralela á *ab*, el triángulo rectángulo A B C dará

$$A\,B=\sqrt{\overline{A\,C}^2+\overline{B\,C}^2}.$$

A C es un número que se halla apreciando en la escala de las horizontales del dibujo, la magnitud de la proyeccion *ab* dada, y B C es la diferencia de las cotas, que se obtiene por una simple sustracion de los números que las expresan (5).

Ejemplo. Sea A C=36 metros en la escala del dibujo y B C=15,6—7,9=7,7; tendremos:

$$AB=\sqrt{36^2+7,7^2}=\sqrt{1296+59,29}=\sqrt{1355,29}=36,8.$$

23. *Dada la proyeccion* d (fig. 18) *de un punto situado en una recta dada, hallar su cota.*

Resolucion gráfica.—Se aplica la recta, y levantando en d la perpendicular dD, esta será la cota del punto D, cuya magnitud se apreciará en la escala de las verticales del dibujo.

Resolucion numérica.—Hecha la misma construccion, tendremos los triángulos semejantes AED, ACB, los cuales darán:

$$AE : ED :: AC : CB \; [a];$$

y si suponemos que es AE=ad=15^m la distancia entre la proyeccion dada y la del punto de cota menor; AC=ab=36; y BC = Bb — Aa = 15,6 — 7,9, la proporcion [a] se convertirá en la 15 : ED :: 36 : 7,7; de donde

$$ED=\frac{15\times 7,7}{36}=\frac{115,5}{36}=3,2.$$

Por otra parte, la cota que se pide es Dd=dE+ED; y como se tiene dE=Aa=7,9, será Dd=7,9+3,2=11,1.

Si llamamos en general C á la cota mayor de las dadas y c á la menor, L á la proyeccion ab de la recta dada, l á la distancia de la proyeccion dada á la del punto de cota menor y x á la cota que se busca, se tendrá

$$x=c+\frac{(C-c)\,l}{L}. \quad [1]$$

24. *Dada la cota de un punto que ha de estar en una recta conocida, hallar la proyeccion de este punto.*

Resolucion gráfica.—Se aplica la recta, se toma en la escala de las verticales la magnitud bE (fig. 19) que representa la cota dada y se lleva de b á E en la proyectante del punto más alto de la recta. Por E se tira la ED paralela á ab, y su interseccion D con AB será el punto de la recta que tiene la cota dada. Proyectando este punto sobre $a\,b$ se tendrá la proyeccion d, que se pedia.

Resolucion numérica.—Despejando l en la ecuacion [1], para lo cual haríamos en ella $l = z$ y $x = c'$, cota dada, se nos convertiria en $c' = c + \frac{(C - c)\,z}{L}$; y tendríamos sucesivamente:

$$c'L = cL + (C - c)z;$$
$$c'L - cL = (C - c)z;$$
$$(c' - c)L = (C - c)z;$$
$$z = \frac{(c' - c)\,L}{C - c}.$$

Si se tiene $c' = 12{,}3$ y los otros datos tienen los mismos valores que en el problema anterior, resultará:

$$z = \frac{(12{,}3 - 7{,}9)\,36}{7{,}7} = \frac{4{,}4 \times 36}{7{,}7} = \frac{158{,}4}{7{,}7} = 20{,}6.$$

25. *Hallar el ángulo que una recta dada forma con el horizonte.*

Resolucion gráfica.—Se aplica la recta al plano de comparacion y tirando por A (fig. 20) la AC paralela á ab, el ángulo BAC será el que se pide.

Resolucion numérica.—Trazando desde el punto A de la recta aplicada, con un radio ad igual á la unidad, el arco df y levantando en d la de perpendicular á AC, tendremos la proporcion BC : CA : : ed : dA; pero $BC = C - c$; $AC = L$; ed es la tangente trigonométrica del ángulo BAC ó m, y Ad la unidad: sustituyendo estos valores en la proporcion anterior, se convertirá en $C - c : L : : tang.\, m : 1$; de donde $tang.\, m = \frac{C - c}{L}$.

Esta fórmula nos dice que *la tangente del ángulo que una recta forma con el horizonte, es la razon del desnivel entre sus puntos extremos á la proyeccion de la misma recta.*

Si tenemos, por ejemplo, $C - c = 15{,}6 - 7{,}9 = 7{,}7$ y $ab = 36$ será $tang.\, m = \frac{7{,}7}{36} = \frac{77}{360} = 0{,}21388$. Buscando en una tabla de líneas trigonométricas naturales el arco á que esta tangente corresponde, hallaremos $m = 12^\circ\ 18'$.

La relacion 0,21388 toma tambien el nombre de *inclinacion* ó *pendiente de la recta* y es, como acabamos de ver, el cociente constante que resulta de dividir el desnivel entre dos puntos cualesquiera de la recta, por la distancia entre sus proyecciones.

Llamando p á esta pendiente, d al desnivel $C - c$ de dos puntos cualesquiera de la recta y l á la distancia entre sus proyecciones, tendremos la igualdad $p = \frac{d}{l}$ [2]; de la cual se puede deducir el valor de cualquiera de estas tres cantidades cuando se conocen las otras dos. En efecto, de la ecuacion [2] resulta $d = p\,l$ [3]; y de esta, $l = \frac{d}{p}$ [4].

26. *Dado un punto* (a. 7,2) (fig. 21) *hacer pasar por él una recta de pendiente dada.*

Sea esta pendiente $p = \frac{3}{5}$.

El punto en que la recta que tratamos de hallar ha de cortar al plano de comparacion tendrá la cota *cero*, y por tanto el desnivel entre este y el dado será $d = 7,2$.

En la fórmula [4] (25) tendremos

$$l = \frac{7,2}{\frac{3}{5}} = \frac{7,2 \times 5}{3} = \frac{36}{3} = 12.$$

Tomando en la escala del dibujo la magnitud de 12 metros y trazando con ella como radio, una circunferencia que tenga su centro en a, todas las rectas, que como ab, vayan desde el punto dado á terminar en uno cualquiera b de la circunferencia trazada, cumplen con la condicion pedida. Ellas son las generatrices de un cono, cuya base es esta circunferencia y su vértice el punto dado.

27. *Dada la proyeccion* ab (fig. 22) *de una recta, la cota* 4,3

del punto a *de la misma y la pendiente* $\frac{1}{20}$ *que debe tener, determinar dicha recta.*

A partir de *a* se toma una magnitud *am* igual á 20 metros de la escala del dibujo y *m* será la proyeccion de un punto que está un metro mas elevado que el dado (*a*. 4,3), suponiendo que la recta se eleva en el sentido *ab*. La cota 4,3 + 1 = 5,3 del punto cuya proyeccion es *m*, acaba de determinar la recta (11).

Si esta se elevase en el sentido *b a*, el nuevo punto (m' 5,3) determinaría con el dado la recta que se pedía.

Si el sentido en que la recta se eleva no es determinado, el problema tiene las dos soluciones correspondientes á los dos casos que acabamos de examinar.

En el caso de que la pendiente dada fuese $\frac{3}{5}$, tomando en la escala del dibujo la magnitud de 5^{m}, y llevándola á partir de *a* (fig. 23) en el sentido ascendente de la recta, el extremo *m* estaría 3 metros mas alto que *a*. La cota de *m* sería 4,3 + 3 = 7,3.

En general se toma en la escala la magnitud *l* que indica el denominador de la pendiente dada $\frac{d}{l}$ (25) y se obtendrá la proyeccion de un punto cuya cota se diferenciará de la del punto dado en *d* metros.

ESCALA DE PENDIENTE DE UNA RECTA Y PROBLEMAS CUYA RESOLUCION FACILITA.

28. Lema.—*Si una recta* A B (fig. 24) *del espacio, se divide en partes iguales ó proporcionales, su proyeccion quedará igualmente dividida en partes iguales ó proporcionales.*

En efecto, las proyectantes A *a*, C *c*..... siendo paralelas y estando situadas en el plano proyectante de la recta, dividirán á la *a b* en partes iguales ó proporcionales. (Geom. Teor. 54 y continuacion de la teoría de las líneas proporcionales).

29. *Escala de pendiente de una recta.*—Si se divide en partes iguales á un metro la proyectante B *b* (fig. 25) de un pun-

to B perteneciente á una recta A B y por los puntos de division se tiran rectas paralelas á su proyeccion *a b*, estas rectas estarán situadas en el plano proyectante de A B, y cortarán á esta recta en los puntos cuyas cotas son números enteros y difieren por lo tanto en un metro de altura con respecto al plano de comparacion.

Las proyecciones de estos puntos dividirán á la *a b* en partes iguales (28). La proyeccion así dividida se llama la *escala de pendiente* de A B. La magnitud de una de las partes iguales en que resulta dividida, es *la unidad de la escala de pendiente*.

Luego *la escala de pendiente de una recta es la proyeccion de la misma, dividida en partes iguales por las proyecciones de los puntos que en dicha recta tienen cota entera.*

30. *Hallar la escala de pendiente de una recta dada* a b (figura 26).

Si las cotas dadas son enteras, no habrá mas que dividir la *a b* en tantas partes iguales como unidades tiene la diferencia de dichas cotas. En el ejemplo propuesto se divide *a b* en las cuatro partes iguales que espresa la diferencia de las cotas extremas 5 y 9.

Si no son enteras, como en la (fig. 27) sería preciso hallar la longitud que corresponde á la unidad de la escala de pendiente. Esta longitud nos será dada por la ecuacion [4] (25) en la que se tiene $d=1$; y como la pendiente de cualquier porcion de la recta es la misma que la de toda ella, midiendo *a b* y suponiendo que su longitud resulte ser 78,0 se tendrá (25) [2]

$$p=\frac{8{,}1-4{,}2}{78}=\frac{3{,}9}{78}=\frac{39}{780}=\frac{1}{20}, \text{ luego será } l=\frac{1}{\frac{1}{20}}=20.$$

La longitud 20 tomada en la escala del plano, será pues, la que corresponde á la unidad de la escala de pendiente. La de dos unidades de la escala del plano será la distancia entre las proyecciones de dos puntos de la recta cuyo desnivel es un decímetro. Tomando por lo tanto, $2\times 8=16$ metros de la escala del plano á partir del punto *a*, tendremos la proyeccion *m* del punto de la recta cuya cota es 5, y llevando á continuacion de este punto la longitud *m n* $=20$ metros, obtendremos la proyeccion del punto de cota 6. Repitiendo esta misma magnitud sobre *a b*, obtendremos cuantos puntos se deseen de la escala de pendiente, que tambien se podrá prolongar desde *m* hácia la izquierda.

La parte *r b* debe ser igual á 2 metros de la escala del plano, toda vez que el desnivel entre *r* y *b* es un decímetro.

Resolucion gráfica. Siendo 3,9 la diferencia de nivel de los puntos extremos de la recta, dividiendo ésta en 39 partes iguales, cada una de éstas será la proyeccion de una parte de la recta, cuyos extremos tienen un decímetro de desnivel. Como la cota de *a* es 4,2, tomando 8 de estas divisiones sobre la recta obtendremos el punto *m* de cota 5. A cada 10 divisiones siguientes corresponde una cota entera, mayor que la anterior en una unidad. El punto *b* tendrá tambien la cota que le corresponde.

La recta *a c* de la figura es la auxiliar tirada para dividir la *a b* en partes iguales. (Geom. probema 24.) Una de las unidades *st* de la escala se divide en diez partes iguales, para apreciar los decímetros, y aun pudiera trazarse una escala de transversales para los centímetros (16).

Construida la escala de pendiente de una recta se resuelven con mayor facilidad algunos de los problemas anteriores.

31. *Dada una recta* b c (fig. 28) *por su escala de pendiente, hallar la cota de un punto de la misma recta cuya proyeccion* a *es tambien dada.*

Tomando la distancia de la proyeccion dada á la del punto de cota menor más próxima, y llevándola á la escala, se hallarán los decímetros que hay que añadir á dicha cota menor para hallar la que se busca.

32. *Dada la escala de pendiente de una recta* b c (fig. 28) *hallar la proyeccion de un punto de la misma cuya cota* 5,3 *es dada.*

Tomando 0,3 en la escala de pendiente y llevando esta magnitud desde la proyeccion del punto de cota 5, en el sentido ascendente de la recta, tendremos la proyeccion *a* pedida.

33. *Dado un punto* (a. 5,3) *y una recta* b c (fig. 28) *hallar si el punto pertenece ó no á la recta.*

Desde luego, la proyeccion del punto ha de estar en la proyeccion de la recta. Además, la cota 5,3 del punto dado, siendo la misma que la del punto de la recta proyectado en *a* (23 ó 31), ambos serán un solo y mismo punto.

La cota 7,2 del punto cuya proyeccion es *b*, siendo distinta de la que corresponde al punto de la recta proyectado en *b*, toda vez que el de la cota 7,2 de la recta es el punto *r*, nos dará á conocer que (b. 7,2) es un punto situado fuera de la recta.

Fácilmente se echa de ver que está en el plano proyectante de la recta y debajo de ella.

PARALELISMO DE LAS RECTAS

34. Teorema.—*Si dos rectas* A, B (fig. 29) *del espacio son paralelas, sus escalas de pendiente son iguales y acotadas en el mismo sentido.*

En efecto, sus proyecciones respectivas *a*, *b*, son paralelas (Geom. Teor. 133). Como tambien lo son las A y B por el supuesto, el ángulo de las A, *a* será igual al de las B, *b* (Geom. Teor. 130) y, por lo tanto, las pendientes respectivas p, p' serán iguales, como tambien las fracciones $\frac{d}{l}$, $\frac{d'}{l'}$ que las expresan (25). Si suponemos $d = d' = 1$, l y l' serán las longitudes que corresponderán á las unidades de las escalas de pendiente de ambas rectas; pero siendo las fracciones $\frac{d}{l}$, y $\frac{d'}{l'}$ iguales, y $d = d'$ resulta $l = l'$; luego las escalas de pendiente son iguales.

Además, estarán acotadas en el mismo sentido; pues fácilmente se vé que otra recta cualquiera A' de la misma pendiente, situada en el plano proyectante de una de ellas A, de manera que la corte, tendrá la misma escala de pendiente, pero acotada en sentido contrario.

35. Problema.—*Dada una recta* a b (fig. 30) *y un punto* (c. 5,7), *tirar por él una paralela á la recta dada.*

La proyeccion de la recta que se busca será paralela á la *a b* (34) y pasará por *c* (10); tiraremos, pues, por *c*, la *c d* paralela á *a b*. Uniendo *c* con el punto de igual cota *m* de la recta dada, y tirando por los puntos acotados de esta recta paralelas á la *c m*, se tendrá la escala de pendiente de la *c d* (34).

Si la recta fuese dada por los dos puntos (a. 12,5) (b. 14,7) (fig. 31) tiraríamos por *c* una paralela á *a b* sobre la que tomaríamos una magnitud *c d*=*a b*. Como las escalas han de ser iguales y acotadas en el mismo sentido, la diferencia de las cotas correspondientes á *c* y *d* ha de ser igual á la 2,2 que hay entre las de *a* y *b*. Añadiendo esta diferencia á la cota 15,6 del punto *c*, la suma 15,6+2,2=17,8 será la cota de *d*. La recta que se busca quedará por lo tanto determinada (11).

INTERSECCIONES

36. Lemas. 1.° *Si dos rectas se cortan en el espacio, la proyeccion de su interseccion será evidentemente la interseccion de las proyecciones de dichas rectas.*

2.° *Si se cruzan sin cortarse, las proyecciones se cortarán tambien y su punto de interseccion será la proyeccion comun á dos puntos, situados uno en cada recta y á desigual altura del plano de comparacion.* Porque si la altura fuese la misma, correspondería á un solo punto por el que pasarían las rectas, lo que es contrario á la hipótesis que hemos hecho.

37. Problema.—*Hallar la interseccion de dos rectas dadas.*

Si las proyecciones dadas son paralelas, las rectas lo serían tambien, ó estarían situadas en planos verticales paralelos, y por consiguiente, no se cortarían.

Si no son paralelas las proyecciones, se halla su punto de interseccion y se determina (23) ó (31) la cota que en ambas rectas le corresponde. Si se obtiene el mismo resultado, esta cota será la del punto de interseccion, que quedará completamente determinado. Si se hallase distinta cota, las rectas dadas se cruzarían sin cortarse (36. Lema 2.°).

38. El punto de interseccion de una recta con el plano de comparacion se llama la *traza* de esta recta.

Problema.—*Hallar la traza de una recta dada.*

Como la traza es un punto del plano de comparacion, su cota será *cero:* se resolverá el problema, por lo tanto, determinando la proyeccion del punto de cota cero de la recta (24) ó prolongando su escala de pendiente hasta encontrar el punto de cota *cero*.

PLANOS.

GENERACION Y REPRESENTACION DEL PLANO

39. *Generacion del plano.*—Si desde un punto *c* (fig. 32) de una recta *a b* situada en un plano horizontal Q, tiramos á la *a b* una perpendicular *c d* situada fuera de este plano, y suponemos que *a b* se mueve paralelamente á sí misma, recorriendo la recta *c d*, engendrará en su movimiento el plano P, que determinan las rectas *a b* y *c d* que se cortan.

La *c d* será la *directriz* y *a b* la *generatriz* del plano P.

Como esta generatriz es horizontal en su primera posicion por estar situada en un plano horizontal, todas las posiciones H H, H′ H′, H″ H″, paralelas á *a b* por la ley de generacion que hemos establecido, serán tambien horizontales.

Siendo *a b*, H H, H′ H′ paralelas, sus proyecciones respectivas *a b*, *h h*, *h′ h′* lo serán tambien. (Geom. Teor. 133).

40. Si hallamos la proyeccion *e* del punto *d* sobre el plano de comparacion, la recta *e c* será la proyeccion de la directriz *c d*. Esta proyeccion es tambien perpendicular á *a b*, y por consiguiente á sus paralelas *h h*, *h′ h′*.

En efecto, si *c e* no fuese perpendicular á *a b*, se podría tirar por *e* la *e m* que lo fuese, y resultaría que *d m* sería perpendicular á *a b* (Geom. Teor. 120); pero como *d c* lo es tambien por construccion, tendríamos en el plano P dos recta *d c*, *d m* perpendiculares á una recta *a b* del mismo plano, lo que no puede ser. (Geom. Teor. 5).

41. *Línea de máxima pendiente del plano.*—La *c d*, perpendicular á *a b*, y por consiguiente á las horizontales del plano P será la línea de máxima pendiente del mismo.

En efecto, hágase pasar por un punto *d* de la *c d* otra recta cualquiera situada en el plano P y prolónguese hasta encontrar en *m* á la *a b*. Hállese la proyeccion *e* del punto *d* y únase el punto *e* con los *c* y *m*; las líneas *e c*, *m e*, serán las proyecciones respectivas de las *d c* y *d m*. La pendiente de *c d* será $\frac{de}{ce}$ (25) y la de *d m* la fraccion $\frac{de}{em}$; pero en el plano Q se tiene $ce < em$ (40); luego será $\frac{de}{ce} > \frac{de}{em}$; y como lo mismo se demostraria de otra recta cualquiera, que pasase por d en el plano P, resulta que $c\,d$ es la línea de máxima pendiente del plano.

42. *Escala de pendiente del plano.*—La escala de pendiente de un plano P (fig. 32) es la que corresponde á su línea de máxima pendiente $c\,d$. (29) y (30).

Si consideramos las horizontales H H, H' H'... que corresponden á los puntos de cota 1, 2... de la recta, es evidente que las proyecciones $h\,h$, $h'\,h'$... de las horizontales de cota 1, 2... pasarán por los puntos 1', 2'... de division de la escala de pendiente $c\,e$.

43. Siendo las rectas cd, ce (fig. 32) perpendiculares á la intersección $a\,b$ de los planos P y Q, $d\,c\,e$ será el ángulo plano correspondiente al diedro de los planos (Geom. 67) y será la medida de este ángulo. (Geom. Teor. 145).

El ángulo plano $d\,c\,e$ será el que el plano P forma con el horizonte y que, por lo tanto, determina su pendiente.

44. *Representacion del plano.*—En vista de lo que acabamos de exponer, un plano se determina en general por la escala de pendiente $a\,b$ (fig. 33) que corresponde á su línea de máxima pendiente y las proyecciones 0 0, 1, 1, 2, 2... de las horizontales de cota 0, 1, 2... La escala de pendiente de un plano se representa por una línea doble para distinguirla de la de cualquiera otra recta que no represente lo mismo.

Para construir el plano así representado, se construiria la línea cuya escala de pendiente es $a\,b$, y esta línea seria la de máxima pendiente del plano. Esta recta y una horizontal cualquiera determinarian el plano en el espacio.

Se comprende ahora que para representar el plano bastará tener la escala de pendiente $a\,b$ (fig. 34) y una horizontal cualquiera (7,7); pero basta tener la escala de pendiente del plano, pues la direccion de una horizontal cualquiera que acabaria de determinarle, es conocida (40).

45. Cuando un plano es horizontal, todos sus puntos tienen igual cota n y se le llama *plano horizontal de cota* n.

46. Un plano vertical se determina por su proyeccion que es una recta. Esta recta toma el nombre de *traza*. Si se quiere

determinar un punto cualquiera de este plano, se marca la proyeccion de dicho punto, que estará en la traza del plano, y al lado se escribe la cota que le corresponde.

47. Un plano limitado por varias rectas, se representa como el de la fig. 35, por las proyecciones y las cotas de los extremos de estas rectas.

Suelen añadirse las proyecciones de las horizontales del plano y su escala de pendiente, fácil de determinar, pues es perpendicular á dichas horizontales y queda dividida por ellas y acotada con los mismos números.

PROBLEMAS DE RECTAS Y PLANOS

48. *Dado un plano por su escala de pendiente* ab (fig. 36) *hallar la proyeccion de la horizontal del mismo cuya cota* 5,3 *es dada.*

Hállase el punto que tiene esta cota en la escala *a b* (32) y la perpendicular tirada por él á la escala, será la proyeccion que se pide.

49. *Dada la proyeccion* m (fig. 37) *de un punto situado en un plano, hallar su cota.*

Se tira por *m* una paralela á las horizontales del plano, la cual irá á cortar á la escala en la division que marca la cota que se busca. Esta cota se determina fácilmente (31).

Tambien se resuelve en la práctica aplicando una escala de modo que su canto pase por *m*, y que dos puntos de division entera de la misma se hallen en las horizontales entre las que se encuentra la proyeccion dada. En la disposicion que presenta la escala de la figura, cada dos pequeñas divisiones son una décima parte de la porcion *n o* de la escala comprendida entre las horizontales 7 y 8, y las doce divisiones que hay de *n* á *m*, dan por tanto seis decímetros, que habrá que añadir á la cota de la horizontal inferior para obtener la 7,6 que se busca.

50. *Dado un punto* (a. 6,6) (fig. 38) *determinar si se halla en un plano* P *tambien dado.*

Si el punto pertenece al plano, estará en la horizontal de este que tiene cota igual á la del punto; luego la proyeccion dada estará en la proyeccion de la horizontal (10).

Para resolver el problema, no habrá más que trazar la horizontal de cota 6,6 (48) y si esta horizontal pasa por la proyeccion dada *a*, el punto estará en el plano.

La horizontal de cota 4,2 del plano P no pasando por *b*, indica que el punto (b. 4,2) está fuera del plano, y fácilmente se vé que está situado este punto por debajo de P.

Tambien puede resolverse este problema tirando por la proyeccion del punto dado, una paralela á las horizontales del plano, y viendo si corta ó no á la escala de este en la division que marca la cota del punto dado.

51. *Dada una recta, hallar si está situada en un plano tambien dado.*

Estará en él, si dos de sus puntos lo están, lo que se averigua eligiendo dos de ellos y viendo (50) si se verifica la condicion que acabamos de enunciar.

Si la recta está dada por su escala de pendiente, no hay mas que prolongar dos horizontales del plano y ver si cortan á la proyeccion de la recta en los puntos de division de igual cota.

52. *Dada la proyeccion de una linea* A (fig. 39) *que esté situada en un plano* P, *hallar su escala de pendiente.*

Prolónguensé las horizontales del plano hasta encontrar á la proyeccion de la recta y se obtendrán los puntos de division de cota entera de la misma.

53. *Por un punto dado* (m. 4) (fig. 39) *que se halla situado en un plano* P, *hacer pasar una recta que esté situada en el mismo plano.*

Tírese por la proyeccion dada una recta cualquiera, que representará la proyeccion de una del plano. La escala de pendiente de esta recta resultará inmediatamente de la construccion, pues queda dividida y acotada por las horizontales del plano.

54. *Dado un polígono* a b c d e (fig. 35) *por las proyecciones y las cotas de sus vértices, determinar si es ó no la proyeccion de una figura plana.*

Se hallan las escalas de pendiente de los lados del polígono dado (30), y se trazan horizontales, uniendo los puntos de igual cota. Si estas horizontales resultan paralelas y equidistantes, la figura del espacio seria plana, y la recta *a'b'* perpendicular á sus horizontales y dividida por ellas, es la escala de pendiente del plano en que está situado el polígono.

Si las horizontales no son paralelas, ó distan desigualmente entre sí, no sería plana la figura representada por la proyeccion dada.

55. *Dada la proyeccion de una figura, que se sabe está en un plano dado, concluir de determinarla.*

Se hallan las cotas de sus vértices (49) y las escalas de pendiente de sus lados (52).

56. *Dadas dos rectas* A, B (fig. 40), *determinar si se hallan en un plano* P *tambien dado.*

Se traza una horizontal del plano, por ejemplo la *m*, y si esta horizontal prolongada va á cortar á las rectas dadas en los puntos de igual cota, 5, 5', estos se hallarán en el plano (50). Del mismo modo se prolongará la *n*, y se verá, que los puntos 2 y 2' de las rectas están en el plano; luego ellas los estarán tambien, porque cada una tiene dos puntos en dicho plano.

La horizontal *m* (fig. 41), no cortando á los puntos de igual cota 7 de las rectas, se deduce que ambas están fuera del plano.

Si las rectas dadas (fig. 42) fuesen paralelas (34), estarian en el mismo plano.

Cuando las proyecciones de las rectas son paralelas, pero tienen las escalas desiguales (fig. 43), ó dirigidas en sentido contrario (fig. 44), estarán en distintos planos verticales y paralelos, y las proyecciones de las horizontales irán á concurrir en un punto *m*.

57. *Dada una recta* A (fig. 39), *hacer pasar por ella un plano cualquiera.*

Se trazan en cualquier direccion, á partir de los puntos de division de la escala de pendiente, rectas paralelas entre sí. Estas serán las proyecciones de las horizontales de un plano, cuya escala de pendiente se determina con facilidad.

58. *Dados tres puntos* (a. 3,3) (b. 9,8) (c. 5,7) (fig. 45), *hacer pasar por ellos un plano.*

Se unen por medio de una recta las proyecciones *a* y *b* de los puntos de mayor y de menor cota, y se tendrá la proyeccion acotada *a b* de la recta que une estos puntos en el espacio, cuya escala de pendiente se determina despues (30).

Se une el tercer punto *c* con el que tiene igual cota en la recta *a b*, y tirando paralelas á esta horizontal desde los puntos de division de la escala de pendiente hallada, estas serán las proyecciones de las horizontales de cota entera, que pasando por la recta indicada, determinan la posición de un plano (51), en el cual se halla tambien el punto proyectado en *c* (50).

59. *Dadas dos rectas* A, B, *hacer pasar por ellas un plano.*

Para que el problema sea posible, se necesitará que las rectas se corten (fig. 40), ó que sean paralelas (fig. 42). En ambos casos las rectas que unen los puntos de igual cota en las rectas dadas, serán las proyecciones de las horizontales del plano que se pide.

Si uniendo los puntos de igual cota, las horizontales que así obtuviésemos no fuesen paralelas (figs. 41, 43 y 44), tampoco seria posible hacer pasar un plano por las rectas dadas.

60. *Dado un punto* A (fig. 46) *situado en un plano* Q, *hacer pasar por este punto una recta de pendiente dada que se halle situada en el mismo plano.*

Por una horizontal del plano Q hágase pasar un plano horizontal R, cuya cota será la misma que la de la horizontal de Q por que pasa. Hállese la proyeccion *a* del punto A sobre este plano y la longitud de la proyectante A*a*. Llamemos *d* á esta longitud y *p* á la pendiente asignada para la recta. Haciendo centro en *a* y con un rádio $l = \frac{d}{p}$, tracemos una circunferencia en el plano R, la cual será la base de un cono, cuyo vértice estará en A y cuyas generatrices tendrán la pendiente dada (26).

Esta circunferencia cortará á dicha horizontal en dos puntos *b*, *b'*, que unidos con A darán las rectas A*b*, A*b'*, que cumplen con las condiciones pedidas. En efecto, pasan por A, tienen la pendiente *p* por ser generatrices del cono, que hemos trazado, y están en el plano Q por tener en él dos puntos A y *b*, ó A y *b*.

Para resolver este problema en un plano acotado, sea Q (figura 47) el plano dado y (a. 7) el punto por el cual debe pasar la recta que se pide.

Supongamos que el plano horizontal en que vamos á hacer las construcciones pasa por la horizontal de cota 3 del plano dado.

Tendremos $d = 7 - 3 = 4$; y si suponemos $p = \frac{1}{5}$; tendremos $l = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 4 \times 5 = 20$. Tomando esta magnitud en la escala y haciendo centro en a, trazaremos con ella como rádio un arco, que en general cortará á la horizontal de cota 3 en dos puntos b y b'. Las rectas acotadas $a\ b$, $a\ b'$, serán las que resuelven el problema.

Si el punto dado es el (a. 9,4) (fig. 48), que no tiene cota entera, se traza una horizontal 6,4 de manera que dé un número entero para la altura del punto dado sobre el plano horizontal en que se ha de ejecutar la construccion; y se resuelve el problema del mismo modo que en el caso anterior, sirviéndonos de la horizontal que hemos determinado.

Este problema puede tener dos soluciones, una ó ninguna, segun la relacion de magnitud que existe entre la pendiente p de la recta que se quiere trazar y la P que corresponde al plano dado.

En efecto, la pendiente de una recta situada en un plano puede variar entre los límites, cero, que es la de la horizontal que pasa por el punto dado y P, que es la de la línea de máxima pendiente del plano.

Por consiguiente, si se tiene $p = 0$, la recta pedida será la horizontal m (fig. 48) del plano que pasa por el punto dado.

Si se tiene $p < P$, el problema tendrá las dos soluciones *an*, *ao*, del problema que hemos resuelto, y que es el caso más general.

Cuando es $p = P$, el problema tiene una sola solucion, que será la línea *ar* de máxima pendiente del plano. La construccion dará la proyeccion de la recta, en una direccion perpendicular á las horizontales, ó lo que es lo mismo, el arco trazado para resolver el problema será tangente á la horizontal *no*.

No habrá solucion alguna si se tiene $p > P$, y el arco *st* trazado para resolver el problema no cortará á dicha horizontal.

61. *Por una recta dada* A B (fig. 49) *hacer pasar un plano de pendiente dada* $\frac{1}{n}$.

Por el punto inferior A se hace pasar un plano horizontal P, y desde un punto B de la recta se traza el cono cuyas generatrices tienen la pendiente dada (26). Se tira desde *a* la tangente A*t* á la base del cono y la generatriz B*t* que corresponde al punto de tangencia *t*. El plano de las rectas BA y *at* es el plano pedido.

En efecto, siendo *bt* perpendicular á la horizontal *at* (Geometría Teor. 41. Recíproco), la recta B*t* tambien lo será (Geometría Teor. 120), y por tanto será la línea de máxima pendiente del plano BA*t*, el cual tendrá la pendiente $\frac{1}{n}$.

Si la recta dada es *ab* (fig. 50) y la pendiente del plano que se pide es $\frac{1}{2}$, se tomará en la escala la distancia espresada por la fraccion $\frac{13-5}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$ (25, fórmula [4]) y haciendo centro en *b*, punto que tiene la cota 13, se trazará una circunferencia en el plano de cota 5, en el cual se hacen las construcciones. Esta circunferencia será la base del cono cuyas generatrices tienen la pendiente $\frac{1}{2}$. Se tira la tangente *at* y la normal *bt*, la cual será la escala de pendiente del plano que se pide, determinada por los puntos (b. 13) (t. 5).

Cuando se tiene, como en el problema que acabamos de resolver, $bt < ab$ lo que dá para el plano mayor pendiente P que la *p* que tiene la recta, el problema admite dos soluciones, correspondientes á las dos tangentes que pueden tirarse por *a* á la circunferencia trazada desde *b* como centro. Este caso es el más general.

Cuando resulta $b\,t = b\,a$, lo que da P=*p*, los puntos *a* y *t* (fig. 51) se confunden en uno solo, y por este punto solo puede tirarse la tangente $t'\,t'$; hay pues una solucion y el plano hallado está determinado por las rectas $a\,b$ y $t'\,t'$. La escala de pendiente del plano es la misma ab de la recta dada.

Si resultase para l una magnitud $b\,t'' > a\,b$, lo que daria $P < p$, no se podria tirar desde a tangente alguna á la circunferencia trazada con el rádio $b\,t''$, y el problema no tendria, por lo tanto, solucion alguna.

Puede este problema resolverse de otro modo.

Se proyectan los puntos A y B (fig. 52) sobre un plano horizontal P, se trazan las bases de los conos, que teniendo sus vértices respectivos en A y B, tienen generatrices cuya pendiente es la que se asigna para el plano (26). Se tira despues la tangente $t\,t'$ comun á estas bases y las normales $a\,t$, $b\,t'$. Tirando tambien las generatrices At, Bt', que corresponden á los puntos de tangencia t y t', las rectas AB, At, $t\,t'$, Bt', están en un mismo plano que reune las condiciones pedidas.

En efecto, siendo Aa, Bb paralelas (Geom. Teor. 122) y tambien las at, bt', (Geom. Teor. 6), los planos Aat, Bbt' serán tambien paralelos (Geom. Teor. 130). Siendo además los ángulos Ata, B$t'b$ iguales por construccion, estando situados en planos paralelos, como acabamos de demostrar, y habiendo probado ya que los lados at, y bt' de estos ángulos son paralelos, se verificará que los At y Bt' tambien lo serán; porque si no lo fuesen, tirando por t una paralela á Bt', el ángulo que formase con $t\,a$ seria igual al B$t'b$ y además estaria en el plano Aat (Geom. Teor. 130); pero como por construccion el ángulo A$\,t\,a$ tambien es igual al B$\,t'b$, tendriamos en el punto t del plano Aat dos rectas que formarian ángulos iguales á un mismo lado de otra recta at del plano en que se encuentran, y tambien al mismo lado de la perpendicular que en el mismo plano puede levantarse por t á la at, lo que no puede ser.

Siendo pues At y Bt' paralelas, determinarán un plano en el que estarán las AB y tt' (Geom. 53).

Para resolver este problema, siendo ab (fig. 53) la proyeccion acotada de la recta dada, $\frac{1}{2}$ la pendiente que ha de tener el plano, y suponiendo que hacemos las construcciones en el plano de comparacion, haremos centro en *b* con un radio

$R = \frac{13}{\frac{1}{2}} = 26$ (26) y trazaremos una circunferencia; con el radio

$r = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, trazaremos otra desde *a*, y tiraremos la tangente

t t' comun á estas circunferencias, y las normales *a t*, *b t'*. Se hallará la escala de pendiente de una de ellas (30), la cual será la del plano que se pide.

Tambien se puede resolver este problema, aplicando la recta á un plano horizontal. Sea *m* (fig. 54) el ángulo que ha de formar el plano que se pide con el horizontal. Aplicando la recta dada al plano horizontal de cota 3, para lo cual servirá de eje la horizontal (3' — 3') del plano proyectante de la recta dada M N, se construirá en un punto cualquiera *a* de esta horizontal un ángulo igual al lado *m*, y se prolongará el lado que resulte hasta su encuentro en *b* con M N. Desde *b* se bajará la perpendicular *b c* á la horizontal (3' — 3'), y haciendo centro en *c*, se trazará con el radio *c a* una circunferencia, la cual será la base del cono que engendraría en el espacio el triángulo *a b c*, girando alrededor de la vertical aplicada en *b c*, y cuyas generatrices tendrían la inclinacion dada *m*.

Tirando desde *r* la tangente *r d*, la perpendicular *c e* bajada á ella desde *c*, será la escala del plano que se pide, en la cual *e* tendrá la cota 3, y *c* la 6,3 que corresponde al punto *b*.

INTERSECCIONES

62. *Dado un plano* P (fig. 55) *determinar su* traza *ó su intersección con el plano horizontal de proyeccion.*

Se halla la *traza p* de la línea de máxima pendiente del plano dado (38), y la *m n*, perpendicular á ella por este punto, será la horizontal de cota cero, ó la traza que se pide.

63. *Dado un plano por su escala de pendiente* a b (fig. 36),

hallar su interseccion con otro plano horizontal de cota dada 5,3.

Como la interseccion que se busca ha de estar en el plano horizontal, todos sus puntos tendrán la cota 5,3 de este plano; y como tambien ha de hallarse en el plano dado, será la horizontal de cota 5,3 de este último.

64. *Hallar la interseccion de dos rectas* A, B, (fig. 40) *situadas en un plano dado* P.

La proyeccion del punto que se busca será la interseccion de las proyecciones de las rectas (36). La cota que corresponde al punto que buscamos se halla en la escala del plano (49).

65. *Dada la interseccion* a b (fig. 56) *de dos planos* P, P′, *hallar la de estos con un tercer plano* Q.

Sean (3 — 3) (7 — 7) las horizontales de cota 3 y 7 del plano P, y (3′ — 3′) (7′ — 7′) las de cota 3 y 7 del P′. El plano Q cortará á las horizontales de cota 7 en dos puntos de la misma cota, y la horizontal *m* que los une será la intersección del plano Q con el horizontal de cota 7.

De la misma manera la horizontal *n* será la interseccion de Q con el plano horizontal de cota 3.

Estas rectas *m*, *n*, serán paralelas (Geom. Teor. 128) como lo serán tambien sus proyecciones sobre un plano horizontal cualquiera (Geom. Teor. 133).

Además la recta (7 — 3) está en el plano P, y tambien en el Q, pues tiene en ambos los puntos 7 y 3. Por una razon análoga, la recta (7′ — 3′) está en los planos P′ y Q. Luego el punto Y en que estas rectas se cortan, estando en ambas, estará en los tres planos.

Para resolver este problema, siendo la recta *a* (fig. 57) la interseccion de los planos P y P′, se tirarán las horizontales paralelas (3 —3′) (7 — 7′), y se unirá el punto 3 con el 7, y el 3′ con 7′. La interseccion *y* de las rectas (3 — 7) y (3′ — 7′) será el punto que se busca, el cual, si la construccion está bien hecha, estará tambien en la interseccion dada *a* de los planos P y P′. La cota que corresponde á *y* se hallará fácilmente (23 ó 49).

66. *Hallar la interseccion de dos planos dados.*

Prolongando las horizontales de una misma cota cualquiera 8, (figs. 58 y 59) en los planos dados, el punto (m. 8′) en que se cortan, estará en ambos planos (50). Del mismo modo, el punto (n. 5') tambien lo estará. Luego la recta *m n* acotada, será la interseccion de los dos planos.

Esta interseccion es una *arista entrante* en la fig. 58 y una *arista saliente* en la fig. 59.

Si las horizontales de igual cota se han de encontrar fuera de los límites del dibujo, se hallará la interseccion *m* (fig. 60), de los planos dados P y P' con un tercer plano Q (65), y la *n* de los dos primeros con otro cualquiera Q'. Los puntos *m* y *n* determinan la interseccion que se pide.

En efecto, el punto *m* se halla en los planos P, P' y Q; luego es un punto comun á los *P* y *P'*.

El punto *n*, encontrándose en P, P' y Q' se halla tambien en P y P' Luego *m n* es la interseccion de estos planos.

Para efectuar la construccion siendo P y P' (fig. 61) los planos dados, se determinarán *m* y *n* (65). La recta acotada que uniera los puntos *m* y *n*, seria la que se trataba de hallar.

67. *Caso particular*.

Lema.—*Si dos planos tienen sus horizontales paralelas, la interseccion de estos planos es paralela á los horizontales*.

En efecto, tirando un plano perpendicular á una de las horizontales que lo será á las demás (Geom. Teor. 122 Recíp.) los planos dados serán perpendiculares al que acabamos de tirar (Geom. Teor 141) y por tanto su interseccion tambien lo será (Geom. Teor. 143). Habiendo probado que esta interseccion es perpendicular al plano tirado perpendicularmente á las horizontales del plano, será paralela á estas horizontales (Geom. Teor. 122).

Corolario.—La interseccion es horizontal, puesto que es paralela á las horizontales de los planos dados.

Problema.—*Dado un plano cuyas horizontales son paralelas á las de otro tambien dado, hallar la interseccion de los planos*.

El plano tirado por P (fig. 62) perpendicular á las horizontales de los dados, lo será á la P *o* de cota cero en uno de los planos y por tanto la P *o* perpendicular al plano, lo será á P Q. Esta recta es la traza del plano (46) el cual será vertical por ser perpendicular á las horizontales.

Para obtener la proyeccion y la cota de la interseccion, se aplica este plano al horizontal y se prolongan sus intersecciones M y N, (figs. 62 y 63) con cada uno de los dados hasta su encuentro en *t*. Tirando por este punto una paralela á las ho -

rizontales tendremos la proyeccion de la interseccion. La cota de esta recta es la del punto *t*, que se aprecia en la escala de las alturas ó en la de pendiente de uno de los planos dados.

68. *Hallar la interseccion de un plano* P (fig. 64) *y una recta* r.

Se trazan dos horizontales del plano que tengan cota dada, 3 y 8, y desde los puntos de igual cota de la recta *r*, se tiran en una direccion cualquiera dos paralelas, que cortarán á las horizontales del plano en los puntos 3′, 8′. Estas paralelas son las horizontales de un plano Q, que pasa por la recta dada (57), y la (3′—8′) será la interseccion de este plano con el dado (66).

La interseccion *m*, de (3′—8′) con la recta dada (37) será el punto que se busca.

En efecto, *m* se halla en la recta *r* y en el plano P.

69. *Hallar la interseccion de dos rectas situadas en un plano vertical.*

Por los puntos 3 y 7 (fig. 65) se tiran dos paralelas, que serán las horizontales de un plano, que pasa por una de las rectas. El punto que se busca estará en este plano.

Tambien estará en el plano de las horizontales de cota 3 y 7, tiradas por 3′ y 7′, que determinarán otro plano que pasa por la segunda recta.

Luego el punto que tratamos de hallar estará en la interseccion (3″—7″) de estos planos (66), y será por lo tanto el punto (m. 5, 7) en que esta recta corta á la proyeccion comun de las dos rectas dadas.

70. *Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á una recta dado.*

Se tira por el punto una paralela á la recta dada.

Entre todos los planos que pasan por esta paralela (57), hay uno que contiene á la recta dada; todos los demás le son paralelos.

71. *Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á otro tambien dado.*

Se tira por el punto una paralela á la escala de pendiente del plano (35), y esta recta será la escala de pendiente del plano que se pide.

72. *Por un punto dado hacer pasar una recta paralela á un plano tambien dado.*

Hágase pasar por el punto un plano paralelo al dado (71) Toda recta, que se haga pasar por el punto dado en este plano, será paralela al primero.

73. *Dadas dos rectas* a, b, (fig. 66) *tirar por ellas dos planos paralelos.*

Desde un punto (*m*. 1) de la recta *a* se tira la *a'* paralela á *b*, y desde el (n. 1) de igual cota en *b*, la *b'* paralela á *a* (35). El plano P que determinan las *a* y *a'* (59) será paralelo al P' que determinan las *b* y *b'* (Geom. Teor. 130).

PERPENDICULARIDAD DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS

74. *Desde un punto* (a. 3) (fig. 67) *situado fuera de una recta acotada* cb, *tirar una perpendicular á esta recta.*

Se une la proyeccion *a* del punto dado con las *b* y *c* de los extremos de la recta. Se hallan despues las magnitudes *cb'*, *b''a*, *b'''c* (22) de los lados del triángulo que forman las rectas proyectadas en *cb*, *ba*, *ac*, y se construye este triángulo (Geom. Prob. 10), tomando por base la *cb'* aplicacion de la recta dada. Desde el vértice *a'* que resulta de la construccion, se tira la *a'd* perpendicular á *cb'*, y por *d* la perpendicular *de* á la proyeccion *cb* de la recta dada. El pie *e* de esta perpendicular, cuya cota se halla facilmente (31), determinará con el punto dado la perpendicular que se pide.

Tambien puede resolverse este problema, uniendo la proyección *c* (fig. 68) del punto dado con la del que tiene igual cota en la recta, y haciendo girar á esta alrededor de la horizontal (3—3) hallada.

Un punto de la recta, tal como el proyectado en *b*, se moverá entonces en el plano vertical cuya traza es (3'—8), perpendicular al eje de rotacion. Cuando la recta que se mueve haya llegado al plano horizontal de cota 3, en que ejecutamos las construcciones, estará representada en el plano en su verdadera magnitud.

Esta magnitud se obtiene hallando la (3'—8') de la recta, proyectada en (3'—8), y llevándola desde 3', con el rádio (3'—8') hasta encontrar á la prolongacion de (3'—8) en el punto 8''.

Uniendo ahora los puntos 3 y 8'', la recta (3—8'') será la aplicacion de la recta dada al plano horizontal de cota 3.

Tirando desde *c* una perpendicular *c h* á esta recta y desde *h* la *h a* paralela á (3′—8″), el punto *a* será la proyeccion del pie de la perpendicular que buscamos, cuya cota se hallará en la escala de la recta dada.

Este punto hallado, determina con el dado la perpendicular que se pide.

75. *Hallar la distancia de un punto á una recta.*

Esta distancia es la perpendicular tirada desde el punto á la recta. Tirando esta perpendicular (74), se halla su verdadera magnitud, que será la distancia que se pide.

En las (figs. 67 y 68) la perpendicular á que nos referimos está en su verdadera magnitud en el plano horizontal de cota 3.

76. *Desde un punto dado* (a. 3) (fig. 69) *de una recta situada en un plano vertical, levantar una perpendicular á esta, en el mismo plano.*

Se aplica la recta al plano horizontal de proyeccion, y en el punto 3′ de esta recta (0—5′) aplicada, se tira una recta *cb*, que le sea perpendicular, la cual cortará á la proyeccion de la recta dada en un punto *b*, cuya cota será cero.

Los puntos (a. 3″) (b. 0″) determinarán la perpendicular que se pide.

77. *Por un punto* (a. 3) (fig. 69) *de una recta dada, hacer pasar un plano perpendicular á esta recta*

Debiendo ser la recta dada perpendicular á todas las que en el plano que se pide han de pasar por su pie, será perpendicular á la línea de máxima pendiente que ha de pasar por el punto dado en el plano que se busca, y ambas rectas estarán situadas en el plano vertical cuya traza es la proyeccion de la recta dada.

Tirando en este plano vertical una perpendicular á la recta dada desde el punto tambien dado (76), la escala de esta perpendicular será la del plano que se pide. En este caso la escala del plano pedido es la *ab*, que en el problema anterior resultó para la perpendicular en el punto (a. 3).

Se ve, por lo tanto, que cuando un plano es perpendicular á una recta, la escala del plano es paralela en proyeccion á la de la recta y la acotacion crece en sentido contrario.

78. *Por un punto tomado en una recta tirar perpendiculares á esta recta.*

Se hace pasar por el punto un plano perpendicular á la recta (77).

Todas las rectas que pasen por el punto dado, en este plano (53), serán perpendiculares á la recta dada (Geom. 54).

79. *Desde un punto* (a. 1') (fig. 70) *de un plano vertical tirar una perpendicular á la recta del mismo plano proyectada en* e d.

Aplicaremos la recta al plano de proyeccion en *e D*, y el punto dado en A, tiraremos la perpendicular A *b* desde el punto á la recta, y proyectando *b* en la recta, la *c a* acotada será la perpendicular que se pide.

80. *Dada una recta situada en un plano, tirarle desde uno de sus puntos, una perpendicular situada en el mismo plano.*

Se tira por el punto dado un plano perpendicular á la recta (77). Se halla la interseccion de este plano con el dado (66) y esta será la perpendicular que se busca (Geom. Teor. 142 y recíproco)

81. *Dado un punto* (a. 4) (fig. 71) *situado en un plano* P, *levantar desde él una perpendicular al plano.*

Esta línea ha de ser perpendicular á la horizontal de cota 4, y á la línea de máxima pendiente del plano, correspondiente al punto dado.

Además, estará en el plano vertical que tiene por traza la paralela tirada por *a* á la escala del plano. Esta paralela acotada será la línea de máxima pendiente que pasa por el punto *a* en el plano.

Se aplica esta recta al plano horizontal y se tira la perpendicular á ella desde el punto 4' (76) dado, la cual cumple con las condiciones que hemos indicado.

Las escalas de pendiente de estas rectas, perpendiculares entre sí, son iguales; pero inversas á partir del punto dado. Esto se verifica siempre que la pendiente de las rectas es de 45°.

82. *Dado un punto* (a. 3 (fig. 72) *fuera de un plano P, bajar una perpendicular á este plano.*

Se harán las construcciones siguientes:

1.ª Se tira por *a* una paralela á la escala del plano dado (35) y esta paralela será la línea de máxima pendiente del plano, la cual pasa por el punto dado.

2.ª Se aplica esta línea, en *m n*, al plano horizontal de cota 3, igual á la del punto dado.

3.ª Se tira *a b* perpendicular á *n m*.

4.ª Se proyecta el punto *b* en *c* y se determina su cota 5,6 en la escala del plano P.

La *c a* acotada, será la perpendicular que se pide.

83. *Hallar la distancia de un punto á un plano.*

Esta distancia es la perpendicular tirada al plano desde dicho punto.

Para hallarla es preciso verificar las siguientes construcciones.

1.ª Tirar por el punto dado una perpendicular al plano (82).

2.ª Hallar la intersección de esta recta con el plano (68).

3.ª Hallar la magnitud de la recta que une el punto dado con esta interseccion (22), y esta será la distancia que se pide.

84. *Dada una recta acotada, cuya proyeccion es* a m (figura 73), *tirar por ella un plano perpendicular á otro plano dado* P.

Desde uno de los puntos (a. o) de la recta dada se tira una perpendicular al plano (82).

El plano de estas dos rectas (59) es el que se busca; pues además de pasar por la recta dada, es perpendicular al plano dado (Geom. Teor. 141).

Para determinar este plano, se une el punto *c*, proyeccion del de interseccion *b* de la recta y el plano, con el punto de igual cota en la recta dada, y se tendrá una horizontal del plano que se pide; la cual, con una paralela á ella por el punto *a* nos determina la escala E de pendiente del mismo.

85. *Hallar la distancia entre dos planos paralelos* P, P' (fig. 74).

Esta distancia es la longitud de la perpendicular tirada á uno de los planos, desde un punto tomado en el otro.

Se traza una paralela *c d* á las escalas de los planos dados, en el plano horizontal de cota 8, y se aplican á este plano las líneas *a*, *a'*, que son las de máxima pendiente de los dados, las cuales tienen por proyeccion comun á la *c d*.

La distancia *m n* entre las rectas aplicadas *a* y *a'* es la magnitud que se busca.

86. *Hallar la distancia entre dos rectas paralelas.*

Se traza el plano que ellas determinan (59).

Desde un punto de una de ellas, se tira en este plano una perpendicular á la otra (80), y se halla la verdadera magnitud de esta perpendicular (22).

87. *Hallar la distancia entre dos rectas del espacio, que se cruzan sin cortarse.*

Esta distancia es la línea perpendicular á la vez á las dos rectas dadas. (Geom. Prob. 50.)

Para resolver este problema, haremos las siguientes construcciones:

1.ª Por un punto de una de las rectas dadas *a*, se tira una paralela *c* á la otra recta *b* (35).

2.ª Se construye el plano de las *a*, *c* (59).

3.ª Desde un punto de la segunda *b*, se tira una perpendicular á este plano (82).

4.ª Se halla la interseccion de esta perpendicular y el plano á que lo es (68). Este punto y el dado determinan la recta que se pide.

5.ª Se halla despues su verdadera magnitud (22).

ÁNGULOS DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS

88. *Hallar el ángulo de dos rectas dadas.*

Si las rectas dadas fuesen la *e b* acotada (fig. 68), y la que quedaría determinada uniendo los puntos (c. 3) y (b. 8), haríamos girar el punto proyectado en *b*, que sería la interseccion de ambas rectas, alrededor de la horizontal *e c* de cota 3, con lo que dicha interseccion iria á parar á *d* (74). Estando los puntos *c*, *d* y *e* en un mismo plano horizontal, uniendo *d* con *e* y con *c*, el ángulo *e d c* seria el de las dos rectas dadas.

89. *Por un punto dado* (c. 3) (fig. 68) *hacer pasar una recta que forme con la* e b *acotada un ángulo dado.*

Se aplica la recta dada al plano horizontal que tiene la cota 3 del punto dado *c*, haciéndola girar alrededor de la horizontal *c e* que tiene dicha cota y *e d* será la recta aplicada. Se hace pasar por *c* una recta que forme con la *e d* un ángulo igual al dado (Geom. Prob. 7), con lo que se determinará un punto tal como *d*, que será la interseccion de estas dos rectas.

Bajando desde *d* la perpendicular *d b* al eje del giro, esta cortará á la recta dada *e b* en un punto *b*, y el (b. 8) será la proyeccion acotada del vértice del ángulo en la posicion que debe ocupar en el espacio. La recta que uniese *b* con *c* seria la proyeccion acotada de la que pasando por (c. 3), formaria con la dada *e b* el ángulo que se pedia.

90. *Hallar el ángulo que dos planos dados forman entre sí.*

Por el punto *c* (fig. 59) de la proyeccion *m n* de la interseccion de los planos dados, se traza una perpendicular á esta línea, hasta que corte en *a* y *b* á las horizontales de cota 5, en cada uno de los planos. La *a b* será una horizontal de esta cota y al mismo tiempo la traza de un plano perpendicular á la interseccion *m n*.

Apliquemos esta interseccion al plano horizontal de cota 5, y sea *n o* la interseccion aplicada; tiremos por *c* la *c s* perpendicular á *n o* y esta perpendicular será la magnitud de la recta, que une el punto *s*, en que la *m n* corta al plano perpendicular á ella y cuya traza es *a b*, con el punto *c*, proyeccion de la interseccion de esta traza con el plano perpendicular á ella, que pasase por la recta *m n*.

Llevando *s* á *t* por un arco de círculo, uniendo el punto *t* con los *a* y *b*, y trazando las rectas *t a* y *t b*, el triángulo *a t b* será la aplicacion al plano horizontal de cota 5, del que forman con la traza *a b* del plano perpendicular á *o s*, las rectas *t a*, *t b*, que en dicho plano pasan por su pié *s;* y que por lo tanto son perpendiculares á *o s*, que es la interseccion de los dos planos: luego el ángulo *a t b* que estas perpendiculares forman es el ángulo pedido.

LÍNEAS CURVAS.

91. Una curva A B C del espacio (fig. 75), se representa, en general, por su proyeccion *a b c* sobre el plano horizontal de comparacion, y las cotas de varios de sus puntos. Estas cotas y la forma de la proyeccion pueden servir para determinar la naturaleza de la curva representada.

Una curva *a b c* situada en el plano de proyeccion, en la cual todos sus puntos tienen la misma cota *n*, representa una curva situada en el plano horizontal de cota *n*.

Si la proyeccion *a,* ó *a'* (fig. 76) es la de una circunferencia *A* situada en el plano horizontal de cota *n*, la curva representada será tambien una circunferencia, y bastará acotar tres de sus puntos con el número *n*, que espresa la cota del plano. La cota *n* de A es 21,2.

Para *construir* en estos casos la curva representada, no habrá mas que cortar por un plano horizontal tirado á la altura de *n* metros sobre el de comparacion, la superficie cilíndrica cuya directriz es la proyeccion dada y cuya generatriz es la vertical proyectante de uno de los puntos de la curva.

92. Si la proyeccion *a b* (fig. 77) es una recta, y los puntos acotados no están todos situados en la recta que determinan dos de ellos (33), la *a b* acotada representará una curva *A B* situada en un plano vertical.

Si esta curva es cerrada (fig. 78), á cada punto de la proyeccion corresponden dos cotas, á escepcion de los puntos extremos, que cada uno es la proyeccion de un solo punto de ella.

Cuando son dos *r*, *r'* (fig. 79), ó más, las curvas situadas en un mismo plano vertical, se acentúan de una misma manera todos los puntos que corresponden á una misma curva, para poderlos distinguir de los de otra, cuya comun acentuacion será distinta de la que tienen los puntos de la primera. Una tercera curva tendría sus puntos acentuados de diferente modo que las dos anteriores, y así sucesivamente.

Para *construir* en estos casos la curva representada, no habria mas que seguir el método general de levantar perpendiculares al plano de comparacion, en las proyecciones de los puntos acotados, y tomar en estas perpendiculares, que determinarian un plano vertical, las alturas marcadas por las cotas. La curva que hiciésemos pasar por los puntos así determinados, seria la curva cuya representacion nos era conocida.

93. Toda curva cuyos puntos están diferentemente acotados, representa en general una curva del espacio; *plana*, si el plano que pasa por tres de sus puntos (58) contiene á los demás (50), y *de doble curvatura*, si esto no se verifica.

Se reproduce la curva representada, tomando en las verticales de los distintos puntos acotados, las alturas que las cotas indican, y haciendo pasar una curva contínua por los puntos así determinados.

Se vé, que cuanto mayor sea el número de puntos acotados, tanto mejor determinada estará la curva.

La (fig. 80) representa una *hélice*, y la (fig. 81) su proyeccion acotada. Esta proyeccion es una circunferencia, dividida en partes iguales por los puntos de cota entera.

SUPERFICIES CURVAS.

94. Las superficies curvas se representan, en general, por las proyecciones acotadas de los elementos necesarios para determinarlas.—Así, un cono se representa por las proyecciones acotadas de su base ó directriz (3 — 3′— 3″) (fig. 82) y la del vértice (*v*. 9,8); pues uniendo *v* con un punto cualquiera *r*, *n*.... de la base, se tendrán las proyecciones acotadas *vr*, *vn*, de las generatrices del cono.

Suelen dibujarse las proyecciones que resultan tangentes á la base, y son las de las generatrices que determinan el contorno aparente de la superficie en el plano horizontal.

95. Una superficie cilíndrica se representa por su directriz B (fig. 83), cuya cota suponemos ser el número 5, y una de las generatrices acotada *hg*; pues se podrán determinar cuantas generatrices se quiera, tirando paralelas á la generatriz dada, desde los puntos de la base. Se trazan por lo regular las que determinan en el plano horizontal, el contorno aparente de la superficie.

96. Las superficies de *revolucion* se determinan por un meridiano y un paralelo.

97. Una *superficie gaucha*, por sus directrices, y el plano ó cono director.

PROBLEMAS DE LAS SUPERFICIES.

98. *Dada una superficie cónica y un punto* (a. 4, 7) (fig. 82), *determinar si este se halla en la superficie.*

Unase el punto *a* con la proyeccion *v* del vértice, y prolónguese la recta que resulte, hasta encontrar en *n* á la parte cóncava de la circunferencia.

La recta *v n*, será la generatriz cuya proyeccion pasa por la del punto dado; se vé si el punto dado está en esta recta (33), en cuyo caso estará tambien en la superficie.

Esta generatriz *vn* pertenece á la parte vista de la superficie.

El punto proyectado en *a*, estará en la generatriz *vn*, y el punto cuya proyeccion es *b*, y cuya cota es 5,1 en la generatriz oculta *v r*.

El punto *a* puede ser tambien la proyeccion de otro punto de la superficie, situado en la generatriz oculta *vm*, prolongada por debajo del plano de la base. El punto *b* puede pertenecer tambien á otra generatriz vista, que se determinaría prolongando la *v r* hasta encontrar á la parte cóncava de la base.

99. *Por un punto* (a. 7,8) (fig. 84) *situado en una superficie cónica, tirar un plano tangente á esta.*

Se traza la generatriz que pasa por el punto dado (98), y la tangente T á la base del cono en el pié de la generatriz; el plano de ésta y la tangente T, es el plano que se pide. Para representarle, se tira por *v* una paralela á la tangente, que será la horizontal de cota 13 del plano. La perpendicular á estas dos paralelas será la escala E del plano tangente al cono, y que pasa por (*a*. 7,8).

Si el punto es dado por su proyeccion solamente, el problema tiene dos soluciones P y P′ que corresponden á las dos generatrices *v n*, *v m*, cuyas proyecciones pasan por *a*, y las tangentes respectivas T y T′.

100. *Por un punto dado* (*a*. 8) (fig. 85) *fuera de una superficie cónica, hacer pasar un plano tangente á esta.*

Se une *a* con la proyeccion *v* del vértice del cono, se halla la traza *r* (38) de esta recta en el plano horizontal de cota 5, en que se halla la base del cono, y se tira por *r* una tangente T á esta base.

La paralela á la tangente, tirada desde *v*, será la horizontal de cota 12 del plano que se busca, y la perpendicular E á esta horizontal y á la tangente, la escala acotada del mismo.

En efecto, este plano, pasando por la tangente T, será tangente al cono, y como además pasa por *r a* (51), cumple con las condiciones pedidas.

Este problema admite otra solucion correspondiente á la otra tangente que puede tirarse por *r* á la base del cono.

101. *Hallar la interseccion de un plano con una superficie cónica.*

Se trazarán las generatrices del cono que se crean necesarias, y se determinarán sus intersecciones respectivas con el plano dado (68). La curva que pase por los puntos así determinados, es la interseccion del plano y la superficie.

102. Los problemas de que acabamos de ocuparnos, se resuelven de una manera análoga, cuando se trata de una supercie cilíndrica.

REPRESENTACIÓN DE LAS SUPERFICIES POR CURVAS DE NIVEL

103. **Representacion de las superficies.**—Supongamos un cono recto, cuya proyeccion vertical es *b' v' b'* (fig. 86). Si dividimos su altura *a v'* en partes iguales, y por los puntos de division *a'*, *a''*... hacemos pasar planos horizontales, cuyas trazas serán P, P'..., las intersecciones de estos planos con la superficie cónica, serán circunferencias (Geom. Teor. 162), que tendrán respectivamente por radios las rectas *a' c'*, *a'' d''*... y que según la condicion á que los planos satisfacen, se proyectarán horizontalmente, en su verdadera magnitud, segun las circunferencias *c*, *d*..

Estas proyecciones han recibido por extension el nombre de *curvas de nivel* ó más propiamente *secciones* ó *curvas horizontales*.

104. Si la proyeccion vertical de la superficie es *b' v' b'* (fig. 87), y la suponemos engendrada por el movimiento de la línea quebrada *v' d' c' b'*, alrededor del eje vertical *v v'*, las curvas de nivel serán tambien circunferencias, y se proyectarán del mismo modo.

105. Examinando la representacion de las superficies de revolucion, cuya generacion hemos considerado (103 y 104), podemos establecer los principios siguientes:

1.° *Cuando una superficie está engendrada por una línea recta* (fig. 86), *la distancia entre las curvas de nivel consecutivas, contada en direccion normal á ellas, es una longitud constante.*

En efecto, siendo *v b* la proyeccion de la generatriz *v' b'*, se tiene *b c*=*c d*=*d c*=*e v* (28).

2.° *La pendiente de los elementos* b' c', c' d'.,. *es tambien constante*. En efecto, la de *b' c'* es $\dfrac{c'\,m}{m\,b'} = \dfrac{c'\,m}{c\,b}$, y la de *c' d'* es

$\frac{d'n}{nc'} = \frac{d'n}{dc}$ (25); y estas fracciones, así como las que expresan la pendiente de los demás elementos, tienen iguales sus numeradores y sus denominadores.

3.° *Cuando la generatriz está formada de rectas que tienen inclinaciones diferentes entre los planos secantes, las curvas no equidistan, y la mayor separacion entre ellas pertenece á la menor pendiente de la parte de generatriz que se considera.*

En efecto, la pendiente $\frac{c'm}{mb'} = \frac{c'm}{cb}$ (fig. 87) de la porcion de generatriz $c'b'$, tiene su numerador igual al de la $\frac{d'n}{nc'} = \frac{d'n}{dc}$ que corresponde al elemento $c'd'$, y su denominador cb es mayor que el dc de la segunda; luego el quebrado $\frac{c'm}{cb}$ es menor que el $\frac{d'n}{dc}$, y por tanto $c'b'$ tiene menor pendiente que $c'd'$.

106. Haciendo extensivos estos principios á las superficies curvas de formas irregulares cualesquiera, determinaremos el relieve de una superficie, por las proyecciones horizontales de las curvas, que resultan de las intersecciones de la superficie, con cierto número de planos horizontales equidistantes.

Esta manera de representar las superficies, dá una idea clara de su forma, y de la rapidez de su pendiente, en el sentido en que se quiera considerar: teniendo en cuenta, que la mayor separacion de las curvas corresponde á la menor pendiente, y al contrario. Si en algun punto viniesen á concurrir dos ó mas curvas, nos darian á conocer que el terreno era *vertical* ó *cortado á pico* en toda la extension que las curvas tuviesen comun.

107. La zona comprendida por dos curvas de nivel consecutivas c y c' (fig. 88), se considera engendrada por el movimiento de una recta mn que se apoya constantemente sobre las curvas c y c'. La superficie que la generatriz mn engendraria, seria una superficie *gaucha* en general; pero admi-

tiendo que las curvas estén bastante próximas, para que la generatriz pueda suponerse normal á ambas directrices, la superficie seria desarrollable; puesto que para pasar de una posicion á otra infinitamente próxima se mueve sobre dos tangentes, que en la suposicion que hacemos, se pueden considerar constantemente paralelas para cada posicion de la generatriz.

108. *Líneas de máxima pendiente de las superficies.*

La generatriz MN (fig. 89), normal á las directrices por la ley de generacion de la zona comprendida entre las curvas de nivel C y C′, situada en el plano de las tangentes (107), será tambien normal á estas tangentes, que tienen un elemento comun con las curvas respectivas, y por lo tanto, será la línea de máxima pendiente del plano tangente (41). Esta línea es tambien la de *máxima pendiente de la superficie.*

Si proyectamos el punto M en el plano horizontal que contiene á C, N *m* será la proyeccion de la línea de máxima pendiente MN. Esta proyeccion es tambien normal á T, y á *t′* proyeccion de la tangente T′ (41) y por lo tanto á las curvas C y *c′*, proyecciones de las curvas C y C′, en el plano horizontal de la curva C.

109. Si desde un punto *a* (fig. 90) de una superficie, se baja la normal *ab* á la curva inmediata y desde *b* la *bd*, normal á la curva siguiente, y se continúa este trazado de normales, la línea *abde*, será la que tiene en general la máxima pendiente entre todas las trazadas en la superficie por el punto *a*.

Si el punto *a* estuviese en la zona comprendida entre dos curvas, la línea de máxima pendiente, que le corresponde en la superficie, se hallaria del mismo modo.

Esta línea es en general de doble curvatura.

110. Cuando la superficie es convexa en sentido horizontal, como representa la fig. 91, se pueden tirar tres normales *ab*, *ab′*, *ab″*, desde el punto más saliente *a* de una de las curvas de nivel á la curva inmediata inferior. La normal *ab″* tirada desde *a* al punto más saliente *b″* inmediato inferior, es una *línea de mínima pendiente* en la porcion *abb′* de la superficie, por ser *ab″* mayor que todas las demás rectas tiradas desde *a* á la porcion *bb″b′* de la curva inmediata.

La línea *ab″d″e″*, de mínima pendiente, divide á la superficie en dos porciones *ae''m*, *ae''n*, á cada una de las cuales corresponde para el punto *a*, una línea de máxima pendiente *ae*, *ae'*. Otra recta *ac* seria de menor pendiente que *ab* (105.-3.°).

111. Si la superficie es cóncava en sentido horizontal, no habria desde *a* (fig. 92) mas que una sola normal *ab* á la curva inferior. Toda otra recta *ae* tendria menor pendiente que *ab*.

La *abcd*, seria por lo tanto, una línea de máxima pendiente.

PROBLEMAS DE LAS SUPERFICIES Y SUS NORMALES

112. *Hallar la inclinacion ó pendiente de la normal cuya proyeccion es* mn (fig. 93).

Siendo *mn* la proyeccion acotada de la normal, su pendiente será $p = tg.a = \frac{mo}{mn}$ (25); siendo *on* la normal aplicada al plano horizontal de la curva 2, y *om* la equidistancia de los planos. Llamando *e* á esta equidistancia, y *l* á la longitud de la proyeccion *mn* de la normal, tendremos

$$p = tg.a = \frac{e}{l} \quad [5].$$

113. *Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas* (fig. 93), *determinar la de un punto comprendido entre ellas, y cuya proyeccion* b *es dada.*

Se tira por *b* la normal *mn* á las curvas, con lo que se tiene la proyeccion acotada de una recta de la superficie, en la cual estará la proyeccion *b* del punto cuya cota se busca, y estaremos en el caso del problema 23.

114. *Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas* (fig. 93) *y la cota que corresponde á un punto de la normal, cuya proyeccion es* mn, *hallar la proyeccion de dicho punto.*

Se tiene la proyeccion acotada de la normal *mn*, en que se halla el punto cuya cota es dada. La proyeccion de este punto se determina por el problema 24.

115. *Dada una superficie por las proyecciones y las cotas de sus curvas horizontales, hallar la proyeccion de una curva de cota intermedia dada,* 2,5 *por ejemplo.*

Se trazan las normales *n'n''*... (fig. 93) entre las curvas 2 y 3, cuyas cotas comprenden á la que ha de tener la curva que se quiere trazar, y se determina en cada normal la proyeccion del punto cuya cota es 2,5 (114). La curva *rs* que pasa por estas proyecciones es la curva pedida.

116. *Dadas las proyecciones de dos puntos situados en una superficie representada por curvas de nivel, hallar la longitud é inclinacion de la recta, que une en el espacio los puntos cuyas proyecciones son dadas.*

Se hallarán las cotas de estos puntos (113), y á continuacion la longitud de la recta que los une (22), y su pendiente (25).

117. *Dadas dos curvas y un punto* m (fig. 94) *de una de ellas, determinar una recta de pendiente dada, que vaya desde* m *á un punto de la otra curva.*

La longitud l de la proyeccion de la recta que buscamos, se deduce de la ecuacion [4] (25), en la que se conoce p, que es la pendiente dada, y d, que es aquí la equidistancia e de los planos secantes, que han determinado las secciones de la superficie. Tomando en la escala la magnitud l calculada, y haciendo centro en m se trazará, con ella como rádio, un arco que cortará á la otra curva en un punto c, y entonces cm será la proyeccion acotada de la recta que se busca.

Este problema admite en general dos soluciones, pues el arco trazado puede cortar á la curva en otro punto c', y la recta mc' cumple del mismo modo con las condiciones pedidas. Puede ser tambien imposible, cuando el valor de l resulta menor que la normal mg, tirada desde m á la otra curva; y tener una solucion, cuando dicho valor es igual á la longitud de esta normal.

Otra proyeccion cualquiera md corresponderia á una línea de inclinacion diferente.

En efecto, sea l' la longitud de $md > mc$ ó de $mg < mc$; llamando p' á la pendiente de esta línea, tendriamos para ella $p' = \frac{e}{l'}$; de donde resulta $e = p' \times l'$. Tambien deduciriamos de la ecuacion [5] (112) $e = p \times l$; y comparando esta ecuacion con la anterior tendríamos $p' \times l' = p \times l$; y como suponemos que es $l' > l$ ó $l' < l$, resultará $p' < p$ ó $p' > p$.

118. *Dado un punto* A (fig. 95) *de una superficie, trazar*

desde él en la misma superficie, una línea de pendiente dada.

Conocida la equidistancia e, y la pendiente p dada, hallariamos la longitud l que nos ha de dar el punto m, y la Am que tiene la pendiente dada (117). Si la equidistancia de las curvas fuese 5 metros y la pendiente $p = \frac{5}{100}$, encontrariamos $l = 100$ metros, y esta magnitud seria la que deberiamos tomar en la escala para trazar el arco, que en su interseccion con la curva de cota 10 nos ha de dar el punto m.

A partir de m y con el mismo rádio, determinariamos del mismo modo el punto n de la curva inmediata superior; y así continuando, obtendriamos una línea poligonal A... n... tvB, que tendria la pendiente dada.

Como la determinacion de cada punto tiene en general dos soluciones (117), se ha convenido en distinguir con los nombres de *camino directo* á la línea $Amnr$..., determinada por las soluciones, que dan los puntos más próximos á otro fijo B, y *camino indirecto* á la línea $nr's'$... cuyos puntos pertenecen á las soluciones que tienden á alejar del mismo punto B la línea que se traza.

En el problema de cuya resolucion nos estamos ocupando, el camino directo $A\,m\,n\,r\,s\,t\,v\,B$ es la mas corta distancia de A á B, caminando por la superficie y siguiendo una línea de la pendiente dada. El camino $A\,m\,n\,r\,s\,t\,v'\,x'\,B$ será mayor que el anterior en la longitud x'B. El punto x' resulta de tomar en v'B desde v' una magnitud igual á tv'.

Debemos observar, que la línea trazada como acabamos de decir, se aproximará bastante á coincidir con la superficie, cuando la curvatura sea uniforme, como en la porcion An de la línea AB de camino directo. Cuando la superficie presenta una parte entrante, la línea de pendiente pasa en general por encima de la superficie, como en los elementos nr y tv, y por debajo de la misma cuando presenta una parte saliente como le sucede al elemento rs.

119. Para trazar, en general, la línea más corta de pendiente dada entre dos puntos fijos A y B (fig. 96), se traza desde A la línea At de camino directo, y desde B la Bd de camino indirecto, hasta que estas líneas se encuentren en un punto v. Entonces la línea poligonal $A\,m\,r\,s\,v\,c\,B$

resuelve el problema, que en general tiene dos soluciones.

La otra solucion se hallaria trazando desde A la línea de camino indirecto y desde B la de camino directo.

Este problema tiene muchas é importantes aplicaciones en los trazados de los caminos y de los canales.

INTERSECCIONES.—PERFILES

120. *Hallar la interseccion de una superficie* S (fig. 97) *con un plano dado* P.

Se prolongan las horizontales del plano hasta que corten á las curvas de igual cota.

Los puntos de interseccion así determinados, son las proyecciones acotadas que se buscan.

En efecto, ellos tienen su proyeccion en las proyecciones de dichas rectas y en las curvas de la superficie, y además tienen la misma cota que los puntos correspondientes de esta.

La interseccion que buscamos se hallará, uniendo por una curva contínua los puntos que hemos encontrado.

Para hallar el punto culminante *m* de la interseccion, se traza la normal (8—7), y se hace pasar un plano por ella, cuya interseccion con el dado será la recta (7′—8′) (66).

El punto *m*, interseccion de (8 — 7) y (8′ — 7′), perteneciendo al plano P y á la superficie, será el punto culminante de la seccion.

121 *Hallar la interseccion de una recta* R (fig. 98) *con una superficie dada* S.

Se hará pasar un plano cualquiera por la recta (57), y se determinará su interseccion Q con la superficie (120).

El punto *m* en que R y Q se cortan es un punto comun á la superficie y al plano, pues pertenece á Q; y estando en el plano y su proyeccion en la de la recta, estará tambien en R; luego es la interseccion de esta recta y la superficie.

122. *Hallar la interseccion de una curva y una superficie irregular*.

Sea S (fig. 99) la superficie y AB la curva dada.

Desde un punto *a* de cota entera de la curva AB, se tira una recta á un punto cualquiera de la curva de nivel de la superficie, que tiene la misma cota.

La *ab* será una horizontal, y si suponemos que se mueve paralelamente á sí misma recorriendo todos los puntos de AB, determinará una superficie cilíndrica de generatrices horizontales, que cortará á las curvas de la superficie segun las rectas (8′—8″) (9′—9″)... paralelas entre sí.

La línea (8″—9″—10″...) será la interseccion de la superficie dada con la superficie cilíndrica horizontal; y el punto *m* perteneciendo á S y á AB es la interseccion pedida.

123. *Hallar la interseccion de una superficie y un plano vertical.*

Sea M (fig. 100) la traza del plano. Si hacemos mover el plano paralelamente á sí mismo hasta que M ocupe la posicion M′, y le aplicamos al plano horizontal de cota 5, que es el de la curva inferior de la superficie, los puntos en que el plano secante corta á la curva 5 se habrán movido tambien paralelamente á sí mismos, puesto que están en la traza que sirve de eje al giro ejecutado para la aplicacion del plano secante, y habrán ido á ocupar las posiciones 5′, despues de haber recorrido las líneas (5—5′) perpendiculares á la traza M.

Si trazamos las rectas P, P′, P″, paralelas á M y separadas entre sí por la equidistancia *mn* de los planos horizontales, las rectas P, P′, P″, serán las intersecciones de estos planos con el vertical dado, y serán por lo tanto horizontales de este plano.

Ahora, el punto *r* de la traza M es la proyeccion de un punto de la superficie, el cual se encuentra en la vertical que pasa por él; esta vertical se halla aplicada segun *mn;* y como la cota del punto proyectado en *r* es 6, *n* será este punto de la superficie; es además un punto de la horizontal de cota 6 del plano vertical; luego lo será tambien de la interseccion.

Resolveremos este problema, trazando una recta M′, paralela á la traza M, tirando las paralelas P, P′, P″, separadas entre sí una cantidad igual á la equidistancia de las curvas, que determinan la superficie, y hallando las intersecciones de cada una de estas horizontales con las perpendiculares levantadas á la traza M desde los puntos de igual cota.

La curva que pasa por los puntos de interseccion, hallados como acabamos de decir, es la interseccion que se pide.

124. **Perfiles.**—La interseccion de una superficie y un plano, la cual acabamos de ver como se determina, se llama el *perfil* de la superficie, en la direccion de la traza M del plano dado.

125. Para determinar la forma de una superficie en la direccion de una recta M, se halla la interseccion de la superficie y el plano vertical cuya traza es M (123). Nuevos planos secantes, trazados en diversas direcciones, darian otros tantos perfiles, que proporcionarian un conocimiento de la forma que la superficie afecta, tan completo como pueda desearse.

126. Si se quieren conocer las inflexiones, que la superficie del terreno presenta, siguiendo una direccion curvilínea dada *ab...h* (fig. 101), se determina la interseccion de la superficie dada y la cilíndrica engendrada por una vertical, que recorriese todos los puntos de la curva dada.

Se resolveria este problema y se formaria el perfil (fig. 102), llevando á partir de un punto *a'*, tomado sobre una horizontal indefinida, que representa el plano de comparacion, las partes *a'b'*, *b'c'*... iguales á los desarrollos respectivos de las porciones *ab*, *bc*... (fig. 101) de la directriz, comprendidas entre las curvas de la superficie; despues se levantarán desde los puntos marcados *b'*, *c'*..., perpendiculares á *a'h'*, hasta encontrar á la horizontal que marca la cota correspondiente á cada punto.

La directriz dada, puede componerse de elementos alternativamente rectilíneos y curvilíneos. Entonces la superficie engendrada por la vertical, se compondrá de elementos planos correspondientes á los primeros, y elementos cilíndricos correspondientes á los segundos. Se resolverá el problema del mismo modo que el anterior, y el perfil se obtendrá tomando sobre la horizontal que representa el plano de comparacion, las longitudes de las porciones rectas de la directriz y los desarrollos de las porciones curvas.

127. *Dado un perfil* T (fig. 100) *y su traza* M, *determinar las proyecciones que sobre ella corresponden á los puntos de cota entera del perfil.*

Tírense las trazas P, P', P'' de los planos secantes de cota entera, y proyéctense sobre la traza M sus intersecciones con la curva T.

Si esta traza fuese una curva *ah* (fig. 101), se obtendria cada punto, *b* por ejemplo, dividiendo *a'b'* (fig. 102) en un número de partes de magnitud tal, que llevadas á la curva, cada una de ellas se confundiese sensiblemente con el elemento correspondiente de la misma.

El mismo procedimiento se seguiria para los elementos curvilíneos de la traza, cuando esta fuese una línea mista.

Si se tuviesen las trazas de otros perfiles tambien dados, se determinarían del mismo modo las proyecciones de cota entera correspondientes. Uniendo despues por curvas contínuas las proyecciones de igual cota que resulten, se tendrán las curvas de nivel que determinan la superficie.

128. Cuando la equidistancia de las curvas es diferente de un metro, se resuelve del mismo modo el problema de que nos acabamos de ocupar, teniendo en cuenta, que lo que hemos dicho para las cotas enteras, se refiere en el caso general á las que son múltiplas de la equidistancia. Si esta fuese de 5 metros, por ejemplo, solo tendríamos en cuenta las cotas o, 5, 10, 15...

129. *Dadas las proyecciones acotadas de varios puntos, que pertenecen á una superficie, trazar las curvas de nivel que la representan.*

Unanse las proyecciones dadas (fig. 113) por medio de rectas, cuyas escalas de pendiente se hallarán (30), y uniendo por curvas contínuas los puntos que resulten de igual cota, se tendrá completamente determinada la superficie.

La línea A B C D puede ser también el resultado de un *perfil longitudinal*, compuesto de los perfiles tomados sobre la superficie, segun las trazas *A B*, B C... (127) y de *perfiles transversales* tomados á derecha é izquierda de los puntos A, B, C, D.

La línea A B C D se llama entonces *base de operaciones.*

En la (fig. 104) los perfiles parten de un mismo punto que es el más elevado, y siguen la direccion de las líneas que mejor caracterizan la superficie.

PLANOS TANGENTES.

Problemas.

130. *Trazar un plano tangente á una superficie dada* S (figura 105) *desde un punto dado* m *de ella.*

Según la generacion de la superficie (107), el plano tangente tendrá común con ella la generatriz (2″—3″) de la zona en que se halla comprendido el punto dado y que pasa por este punto. El plano tangente pasará además por la tangente (3″—3,) en el pié 3″ de la normal.

Esta tangente será una horizontal del plano que se pide, cuya escala de pendiente se obtendrá por la recta acotada (2″—3″).

La superficie propuesta, convexa en sentido horizontal, lo es tambien en sentido vertical, y, por lo tanto, inferior al plano tangente, pues bajando á partir de la generatriz de contacto, la pendiente de la superficie va aumentando, y subiendo la pendiente disminuye, lo cual se vé claramente, trazando el perfil (o′, 1′, 2′...) de la superficie y su tangente en la dirección marcada por la escala de pendiente del plano (125).

131. *Por una recta dada* R (fig. 105), *tirar un plano tangente á una superficie* S.

Desde cada uno de los puntos de cota entera, se tirará una tangente á la curva de la superficie, que tiene igual cota.

Cada una de estas tangentes, la (4—4,) por ejemplo, determinará con la recta dada un plano, cuya traza horizontal será ($0-0_4$), paralela á (4—4,).

El plano cuya traza ($0-0_2$) forma con la parte descendente de la recta dada el menor ángulo *a*, será el que forme el menor ángulo con el horizonte, y por consiguiente será tambien el plano tangente que se pide.

En efecto, si haciendo centro en el punto 1, y con un rádio igual á (1,—0) se traza una semicircunferencia que corte á las trazas de los planos en *b*, *c*, *d*..., las líneas (2,—*b*) (2,—*c*)... serán las proyecciones de las partes de línea de máxima pendiente de los planos respectivos. Pero el desnivel de las líneas (2,—*b*) (2,—*c*) (2,—*d*)... es el mismo, pues el extremo 2, es comun á todas ellas, y los puntos *b*, *c*... tienen la cota cero; luego la (2,—f) cuya longitud es mayor, tiene menor pendiente que las otras rectas (2,—*b*) (2,—*c*)...., (105—3°), y por consiguiente el plano cuya pendiente mide, forma con el horizonte un ángulo menor que los demás planos, cuyas pendientes están medidas por (2,—*b*) 2,—*c*)...; luego es el plano que se pide.

Las horizontales ($0-0_2$) ($0-0_3$) se confunden en una sola, y el plano toca á la superficie en toda la longitud de la generatriz (2″—3″).

APLICACION DE LA TEORÍA DE LAS CURVAS DE NIVEL Á LA REPRESENTACION DEL TERRENO.

132. Cuando se trata de representar con precision una porcion de la superficie terrestre, es preciso estudiar detenidamente las inflexiones que presenta, con objeto de elegir de una manera conveniente los puntos que se han de acotar, ó las direcciones que deben darse á los perfiles.

Estudiando separadamente las formas principales que los terrenos presentan, consideraremos las siguientes:

1.° Cimas.
2.° Divisorias.
3.° Talwegs ó arroyadas.
4.° Depresiones ó gargantas.

133. **Cimas.**—Se da el nombre de *cima* á una porción A (fig. 106) mas elevada que el terreno que la rodea, y de forma cónica mas ó menos irregular. Es la forma que afectan los *cerros* y las partes mas elevadas de las *montañas* y de las *cordilleras*.

Las curvas de nivel resultan cerradas.

Se determinan (129) (fig. 104), acotando el punto mas alto y los más bajos de la superficie, así como todos aquellos en que varía la pendiente del terreno: con lo que las rectas que han de unir los puntos acotados se confundirán sensiblemente con la superficie del mismo.

134. **Divisorias.**—*Divisoria* es la interseccion D (fig. 106) de dos *vertientes* contíguas P, convexas en sentido horizontal.

La línea de mínima pendiente $a\ b''\ d''\ e''$ (fig. 91) es la divisoria de la superficie convexa S, y las porciones m, n de esta superficie son sus *faldas, laderas ó vertientes*.

Un cuerpo pesado, que se colocase en a, abandonándole despues á su propio peso, seguiría la direccion de una de las líneas $a\ e$ ó $a\ e'$ de máxima pendiente; y una masa líquida se dividiria en dos partes, de las que cada una seguiria la direccion de una de estas líneas.

Por esta razon, la línea de mínima pendiente $a\ e''$, cuyos puntos todos gozan de la misma propiedad, ha recibido el nombre de *línea de separacion de las aguas*, ó mas abreviadamente el de *divisoria* de la superficie, y caracteriza la parte de ésta, que es convexa en sentido horizontal.

135. **Talwegs.**—Se da el nombre de *talweg* á la interseccion T (fig. 106) de dos vertientes contiguas M, cóncavas en sentido horizontal. La palabra talweg significa en aleman *camino del valle*. La línea de máxima pendiente *a b c d* (fig. 92) es el talweg de la superficie.

Todo cuerpo grave, que recorriese las vertientes de la superficie, iria á parar á la línea *a d*, por la cual continuaria bajando. Esto sucede á las aguas de lluvia, y por tanto á la *a d* se la llama *talweg* ó línea de reunion de las aguas. Esta línea caracteriza la parte cóncava de la superficie.

Los rios y los arroyos siguen los talwegs de los valles y de las cordilleras.

136. Si en la superficie convexa S (fig. 91), partiéramos desde e'' hácia las curvas superiores, nos encontrariamos en un caso análogo al de la (fig. 92) y la $e''\,a$ seria una línea de *máxima pendiente*. Si en la superficie cóncava (fig. 92), partiéramos de *d* hácia *a*, la *d a* seria, como en el caso de la (fig. 91), una línea de mínima pendiente.

De lo que acabamos de exponer se deduce, que las divisorias son líneas de *mínima pendiente absoluta;* pero si se consideran partiendo de uno de sus puntos situado en una curva, hácia las curvas inferiores ó superiores, son líneas de mínima pendiente bajando, y de máxima pendiente subiendo; y los talwegs son de un modo análogo, líneas de *máxima pendiente absoluta,* y relativamente, líneas de máxima pendiente bajando, y de mínima pendiente subiendo. Esta propiedad sirve para determinarlas en la práctica.

137. **Gargantas ó depresiones.**—*Garganta* ó *depresion* se llama á todo punto G (fig. 106), que es á la vez el mas bajo del perfil de la superficie en sentido de la divisoria D D', y el mas alto del perfil de la misma superficie, segun la directriz T T' de los talwegs.

138. Resumiendo lo que llevamos dicho acerca del modo de representar el terreno por curvas de nivel, resulta que debemos acotar:

1.° Las divisorias.

2.° Los talwegs.

3.° Todas aquellas líneas que pueden contribuir á caracterizar el terreno, y que se determinan por las direcciones segun las cuales tiene lugar algun cambio notable en la forma de la superficie: los rios y los arroyos entran como ya hemos dicho en la clase de los talwegs, y conviene determinar en sus orillas las proyecciones y las cotas de los puntos mas notables: tambien deben fijarse las de algunos puntos en los caminos que crucen el terreno, que se trata de representar.

Es preciso determinar todas las líneas, acotando cuidadosamente los puntos en que la pendiente cambie de intensidad.

FIN.

INDICE.

	Págs.	Párs.
Preliminares	1	1
Del punto	2	3
Plano de comparacion y desniveles	id.	4
De la recta	5	9
Escalas de los planos acotados	6	16
Problemas.—1.° Tomar en la escala una magnitud dada	8	17
2.° Apreciar en partes de escala la longitud de una recta dada	id.	18
Aplicación de una recta al plano de comparación	9	20

Problemas de las rectas.

Hallar la distancia entre dos puntos dados, ó la verdadera magnitud de una recta limitada, conocidas las proyecciones y las cotas de sus puntos extremos	9	22
Dada la proyeccion de un punto situado en un recta dada, hallar su cota	10	23
Dada la cota de un punto que ha de estar en una recta conocida, hallar la proyeccion de este punto	id.	24
Hallar el ángulo que una recta dada forma con el horizonte	11	25
Dado un punto hacer pasar por él una recta de pendiente dada	12	26
Dada la proyeccion de una recta, la cota de un punto de la misma y la pendiente que debe tener, determinar dicha recta	id.	27

Escala de pendiente de una recta y problemas cuya resolucion facilita.

Si una recta del espacio se divide en partes iguales ó proporcionales, su proyeccion quedará igualmente dividida en partes iguales ó proporcionales	13	28
Escala de pendiente de una recta	id.	29
Hallar la escala de pendiente de una recta dada	14	30

Dada una recta por su escala de pendiente, hallar la cota de un punto de la misma recta cuya proyeccion es tambien dada.......... 15 31
Dada la escala de pendiente de una recta, hallar la proyeccion de un punto de la misma cuya cota es dada.......... id. 32
Dado un punto ó una recta, hallar si el punto pertenece ó no á la recta.......... id. 33

Paralelismo de las rectas.

Si dos rectas del espacio son paralelas, sus escalas de pendiente son iguales y acotadas en el mismo sentido.......... 16 34
Dada una recta y un punto tirar por él una paralela á la recta dada.......... id. 35

Intersecciones.

Rectas que se cortan ó se cruzan en el espacio...... 17 36
Problema.—Hallar la interseccion de dos rectas dadas. id. 37
Problema.—Hallar la traza de una recta dada....... id. 38

PLANOS.

Generacion y representacion del plano.

Generacion del plano.......... 18 39
Línea de máxima pendiente del plano.......... id. 41
Escala de pendiente del plano.......... 19 42
Representacion del plano.......... id. 44

Problemas de rectas y planos.

Dado un plano por su escala de pendiente, hallar la proyeccion de la horizontal del mismo cuya cota es dada.......... 20 48
Dada la proyeccion de un punto situado en un plano, hallar su cota.......... id. 49
Dado un punto determinar si se halla en un plano tambien dado.......... id. 50
Dada una recta, hallar si está situada en un plano tambien dado.......... 21 51
Dada la proyeccion de una línea que esté situada en un plano hallar su escala de pendiente.......... id. 52
Por un punto dado que se halla situado en un pla-

no, hacer pasar una recta que esté situada en el mismo plano... .... 21 53
Dado un polígono por las proyecciones y las cotas de sus vértices, determinar si es ó no la proyeccion de una figura plana.......................... id. 54
Dada la proyeccion de una figura, que se sabe está en un plano dado, concluir de determinarla...... 22 55
Dadas dos rectas determinar si se hallan en un plano tambien dado.......................... id. 56
Dada una recta hacer pasar por ella un plano cualquiera.. .... id. 57
Dados tres puntos hacer pasar por ellos un plano... id. 58
Dadas dos rectas hacer pasar por ellas un plano..... 23 59
Dado un punto situado en un plano, hacer pasar por este punto una recta de pendiente dada que se halle situada en el mismo plano.. .... 23 60
Por una recta dada hacer pasar un plano de pendiente dada.......................... 25 61

Intersecciones.

Dado un plano, determinar su traza ó su interseccion con el plano horizontal de proyeccion............ 27 62
Dado un plano por su escala pendiente, hallar su interseccion con otro plano horizontal de cota dada. id. 63
Hallar la interseccion de dos rectas situadas en un plano dado.......................... 28 64
Dada la interseccion de dos planos, hallar la de estos con un tercer plano.......................... id. 65
Hallar la interseccion de dos planos dados.......... id. 66
Caso particular.......................... 29 67
Hallar la interseccion de un plano y una recta...... 30 68
Hallar la interseccion de dos rectas situadas en un plano vertical.......................... id. 69
Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á una recta dada.......................... id. 70
Por un punto dado hacer pasar un plano paralelo á otro tambien dado.......................... id. 71
Por un punto dado hacer pasar una recta paralela á un plano tambien dado.......................... id. 72
Dadas dos rectas tirar por ellas dos planos paralelos. 31 73

Perpendicularidad de las rectas y de los planos.

Desde un punto situado fuera de una recta acotada, tirar una perpendicular á esta recta.............. id. 74
Hallar la distancia de un punto á una recta......... 32 75
Desde un punto dado de una recta situada en un

plano vertical, levantar una perpendicular á esta, en el mismo plano.......................... 32 76
Por un punto de una recta dada hacer pasar un plano perpendicular á esta recta.................... id. 77
Por un punto tomado en una recta tirar perpendiculares á esta recta........................... id. 78
Desde un punto de un plano vertical tirar una perpendicular á una recta del mismo plano........... 33 79
Dada una recta situada en un plano, tirarle desde uno de sus puntos, una perpendicular situada en el mismo plano................................ id. 80
Dado un punto situado en un plano, levantar desde él una perpendicular al plano..................... id. 81
Dado un punto fuera de un plano, bajar una perpendicular á este plano.............................. id. 82
Hallar la distancia de un punto á un plano......... 34 83
Dada una recta acotada, tirar por ella un plano perpendicular á otro plano dado..................... id. 84
Hallar la distancia entre dos planos paralelos....... id. 85
Hallar la distancia entre dos rectas paralelas........ id. 86
Hallar la distancia entre dos rectas del espacio, que se cruzan sin cortarse.......................... 35 87

Angulos de las rectas y de los planos.

Hallar el ángulo de dos rectas dadas................ id. 88
Por un punto dado hacer pasar una recta que forme con la otra un ángulo dado......................... id. 89
Hallar el ángulo que dos planos dados forman entre sí...................................... 36 90

LINEAS CURVAS

Representacion y construccion...................... id. 91

SUPERFICIES CURVAS

Representacion.................................. 38 94

Problemas de las superficies.

Dada una superficie cónica y un punto, determinar si este se halla en la superficie.................. id. 98
Por un punto situado en una superficie cónica, tirar un plano tangente á esta........................ 39 99
Por un punto dado fuera de una superficie cónica,

tirar un plano tangente á esta.................... 39 100
Hallar la interseccion de un plano con una superficie cónica............................ id. 101

Representacion de las superficies por curvas de nivel.

Representacion de las superficies.................. 40 103
Líneas de máxima pendiente de las superficies...... 42 108

Problemas de las superficies y sus normales.

Hallar la inclinacion ó pendiente de la normal, cuya proyeccion es dada............................ 43 112
Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas, determinar la de un punto comprendido entre ellas y cuya proyeccion es dada...................... id. 113
Dadas dos curvas de nivel con sus cotas respectivas, y la cota que corresponde á un punto de la normal, cuya proyeccion es dada, hallar la proyeccion de dicho punto.................................. id. 114
Dada una superficie por las proyecciones y las cotas de sus curvas horizontales, hallar la proyeccion de una curva de cota intermedia dada................ id. 115
Dadas las proyecciones de dos puntos situados en una superficie representada por curvas de nivel, hallar la longitud é inclinacion de la recta que une en el espacio los puntos cuyas proyecciones son dadas.. 44 116
Dadas dos curvas y un punto de una de ellas, determinar una recta de pendiente dada, que vaya desde un punto de una de las curvas á otro punto de la otra.................................... id. 117
Dado un punto de una superficie, trazar desde él, en la misma superficie, una línea de pendiente dada. id. 118

Intersecciones.—Perfiles.

Hallar la interseccion de una superficie y un plano.. 46 120
Hallar la interseccion de una recta con una superficie. id. 121
Hallar la interseccion de una curva y una superficie irregular.................................... id. 122
Hallar la interseccion de una superficie y un plano vertical...................................... 47 123
Perfiles.. id. 124
Dado un perfil y su traza determinar las proyecciones que sobre ella corresponden á los puntos de cota entera del perfil............................ 48 127
Dadas las proyecciones acotadas de varios puntos,

que pertenecen á una superficie, trazar las curvas de nivel que la representan........................ 49 129

Planos tangentes.

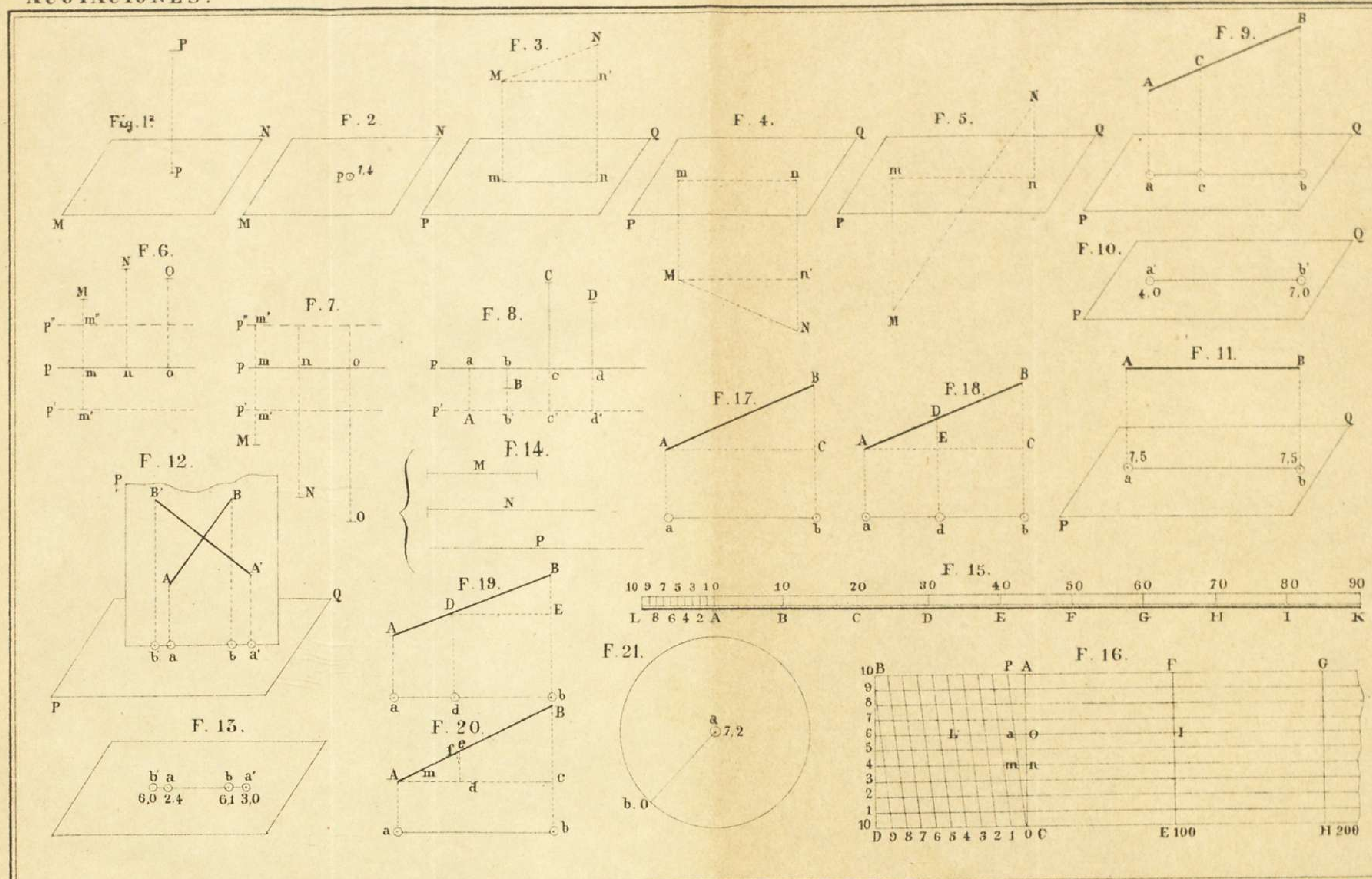
Problemas.—Trazar un plano tangente á una superficie dada desde un punto de ella.................. id. 130
Por una recta dada tirar un plano tangente á una superficie.................................... 50 131

Aplicacion de la Teoría de las curvas de nivel á la representacion del terreno.

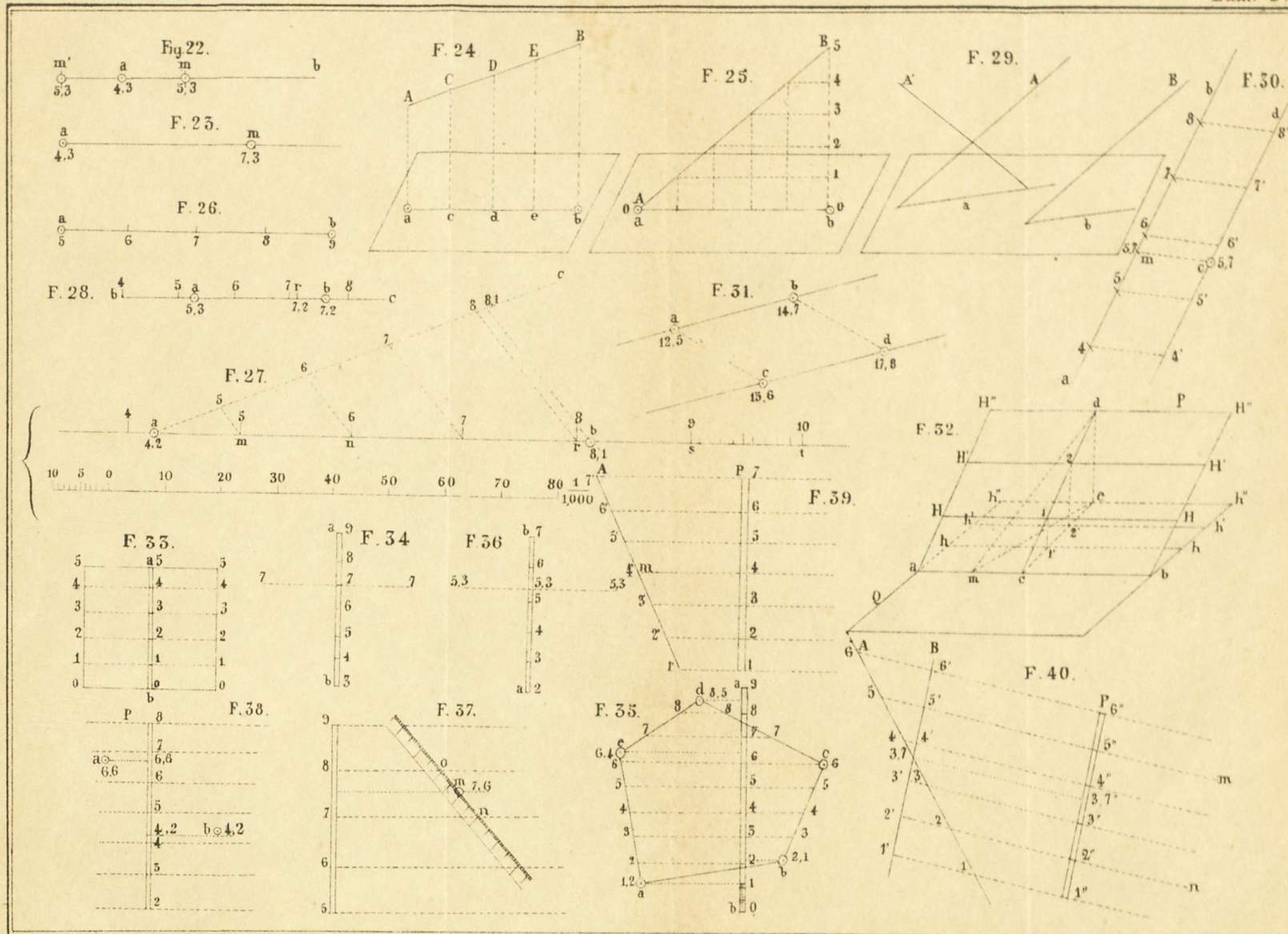
Formas principales que presentan las distintas partes del terreno.................................... 51 132
Cimas.................. .... id. 133
Divisorias... .... id. 134
Talwegs....................................... 52 135
Gargantas ó depresiones......................... id. 137
Líneas que deben acotarse para representar un terreno................. .... 53 138

ERRATAS MÁS IMPORTANTES

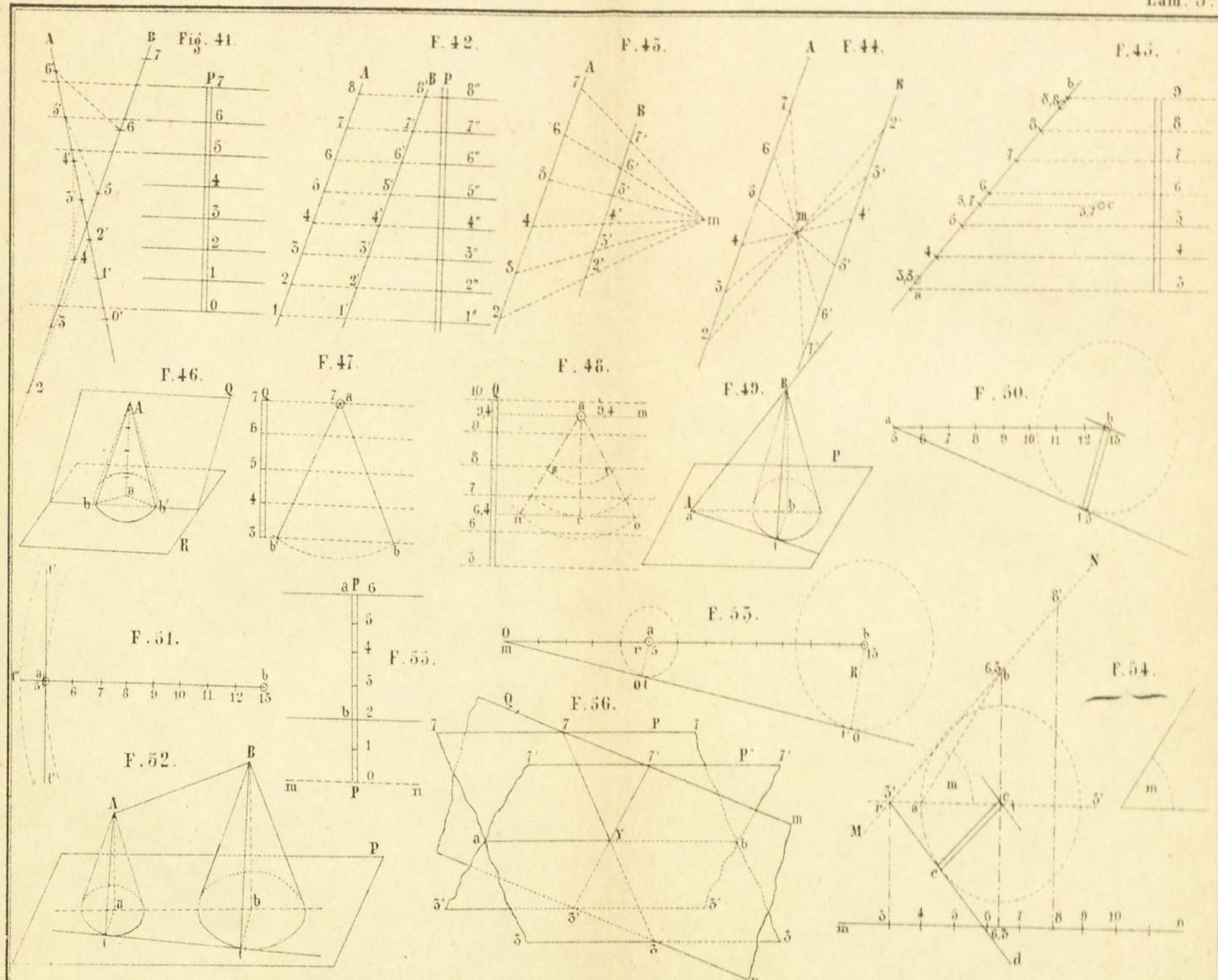
Páginas.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
21	24	(m. 4)	(m. 4')
23	32	A y *b*	A y *b'*
27	13	lado	dado
40	15	*a'' d''*	*a'' d'*
49	16	(Fig. 113)	(Fig. 103)
50	12	(125)	(126)
56	7	ó una	y una



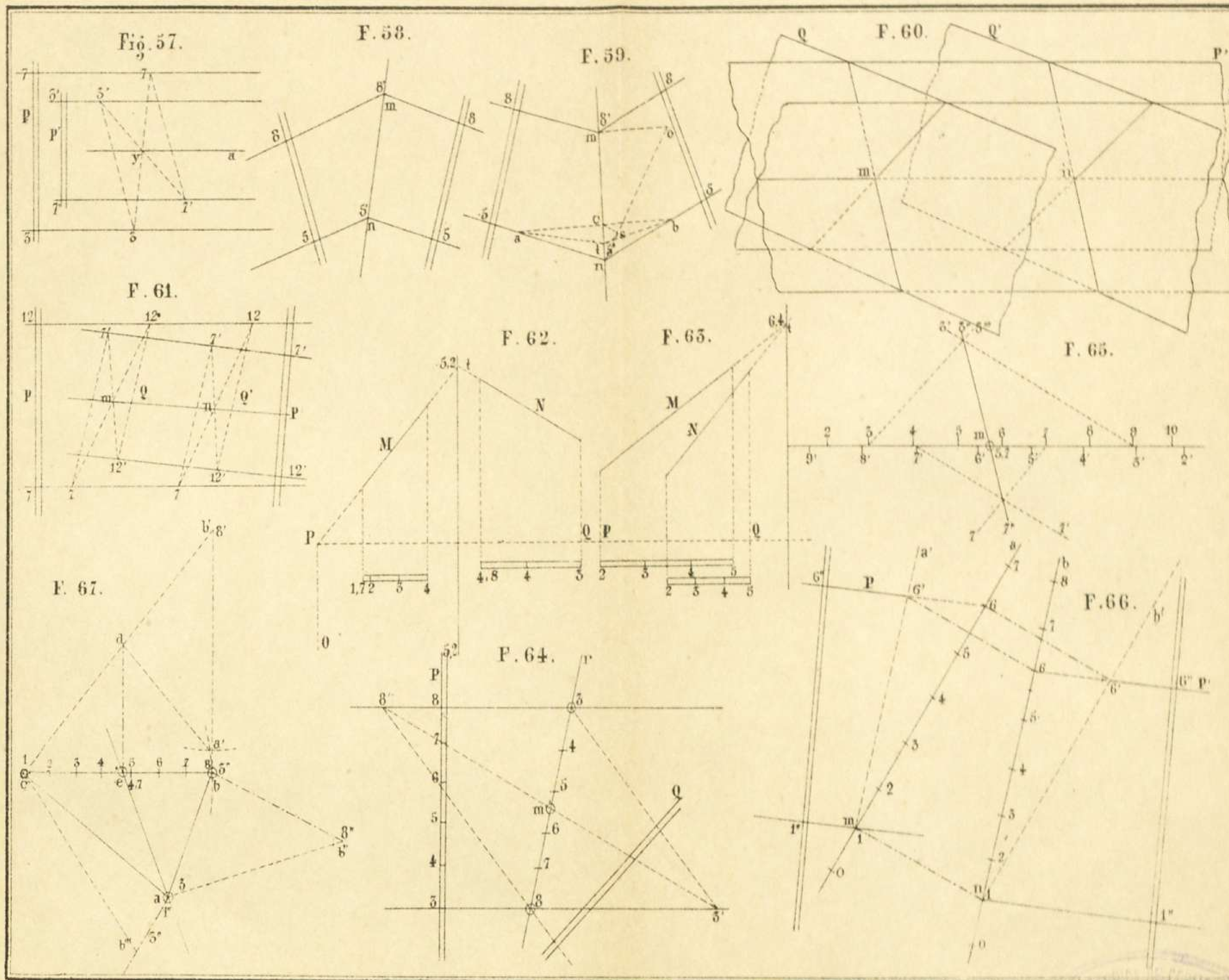
J. Giol y Soldevilla d°
Lit. Fernandez Salvador 8.
F. Peñuelas g°



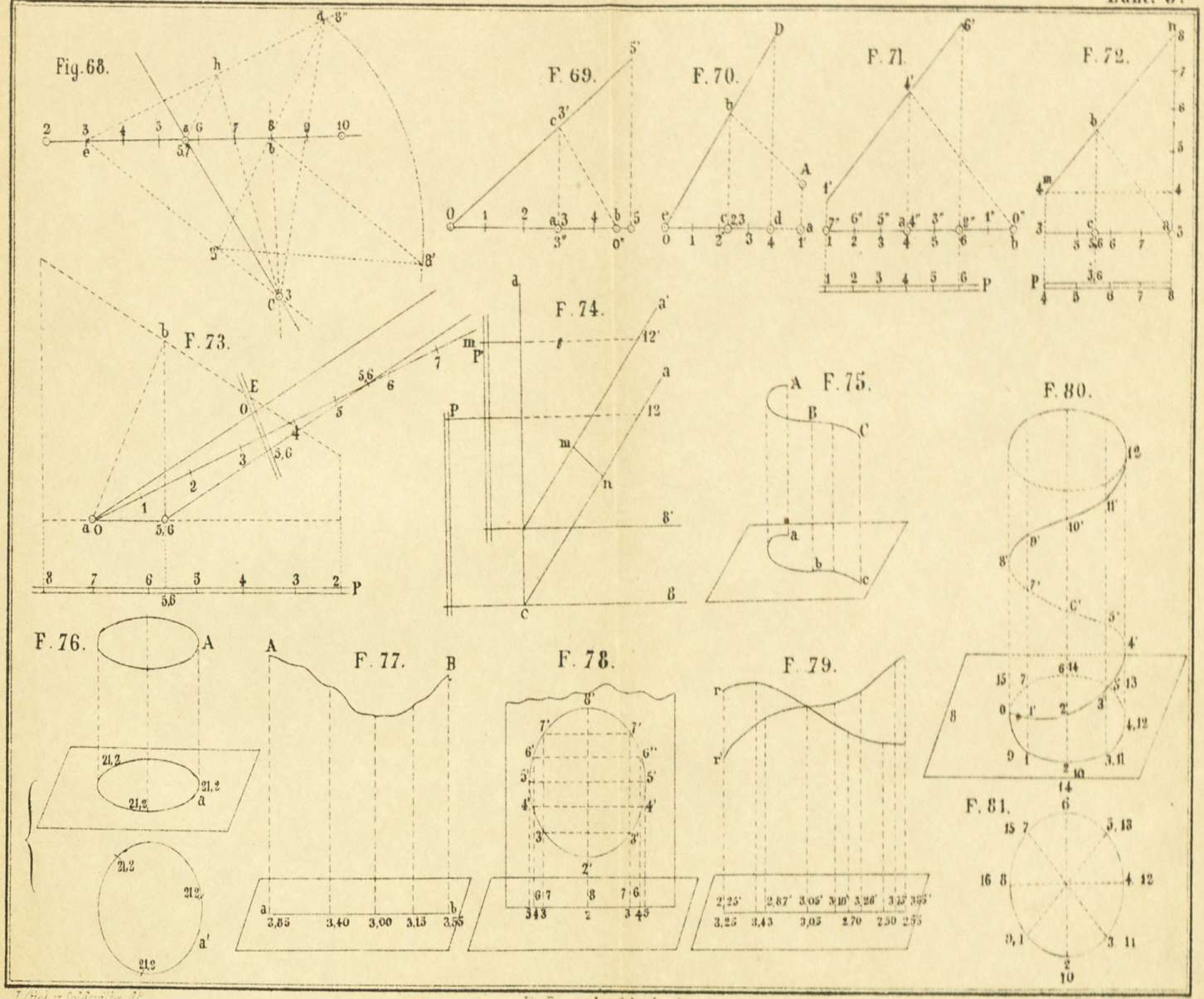
J. Giol y Soldevilla d.ᵉ Lit. Fernandez Salvador. F. ... g.



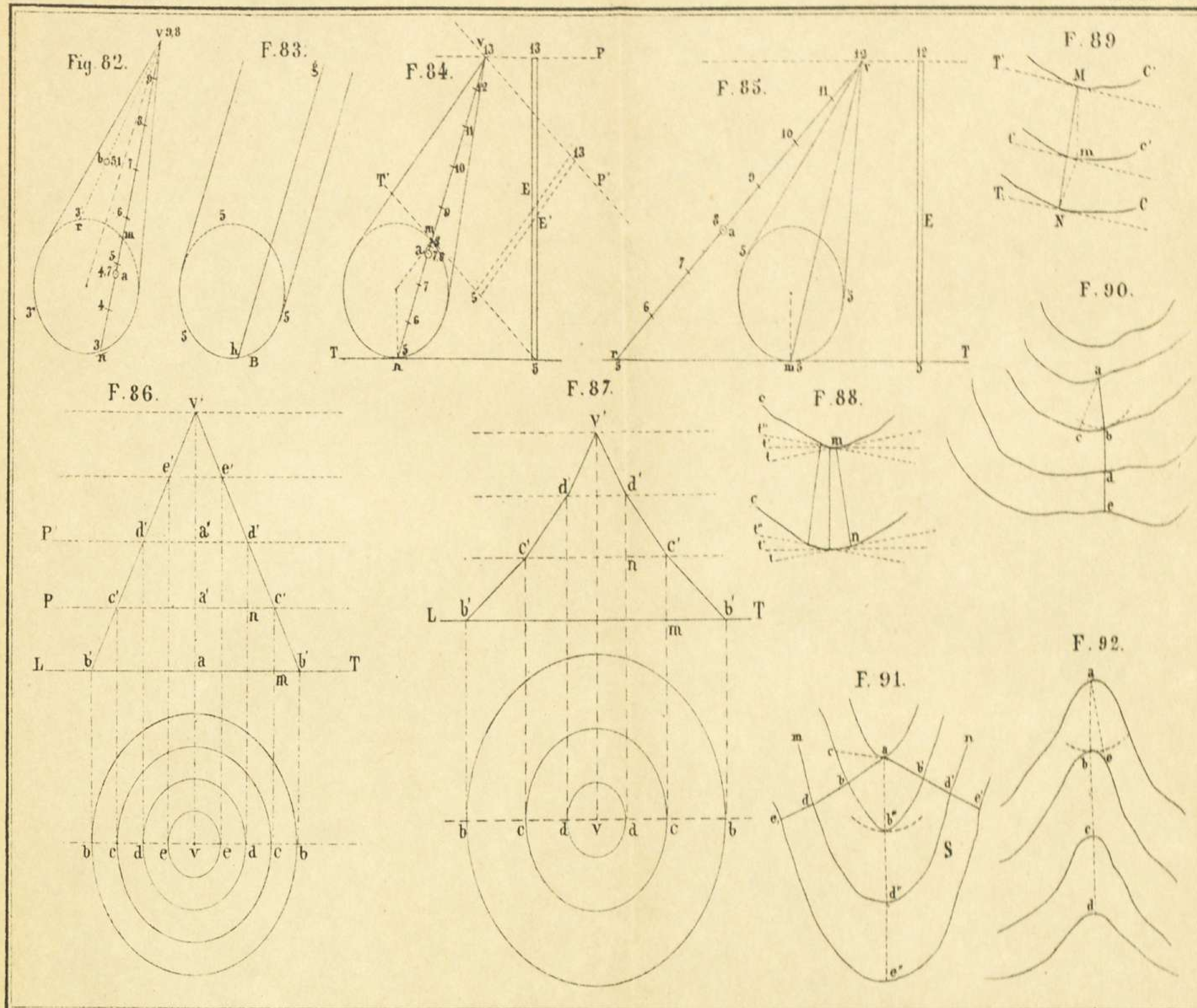
J. Gol y Soldevilla dib. Lit. Fernandez Salvador B.



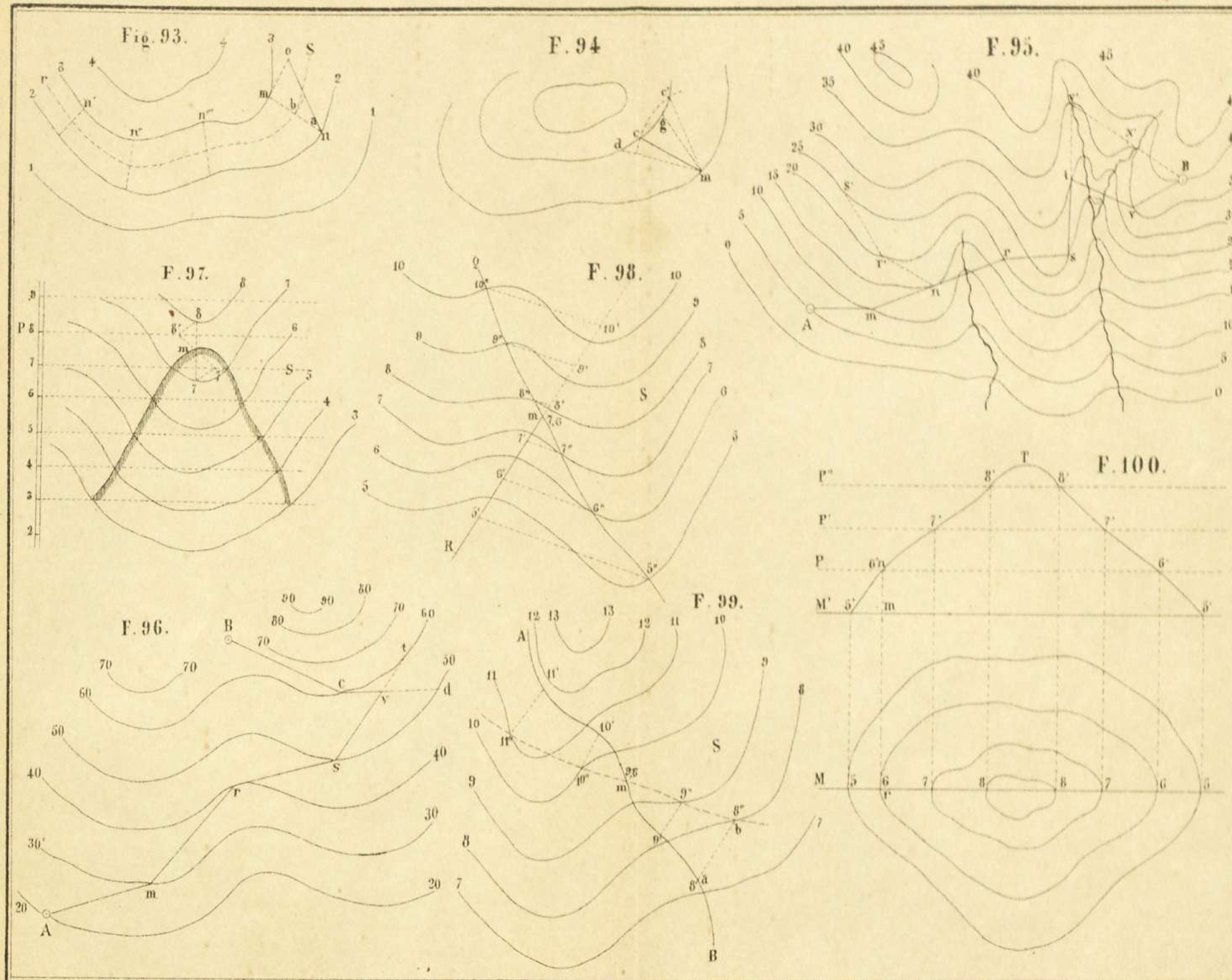
Lit. Fernandez, Salvador, 5.



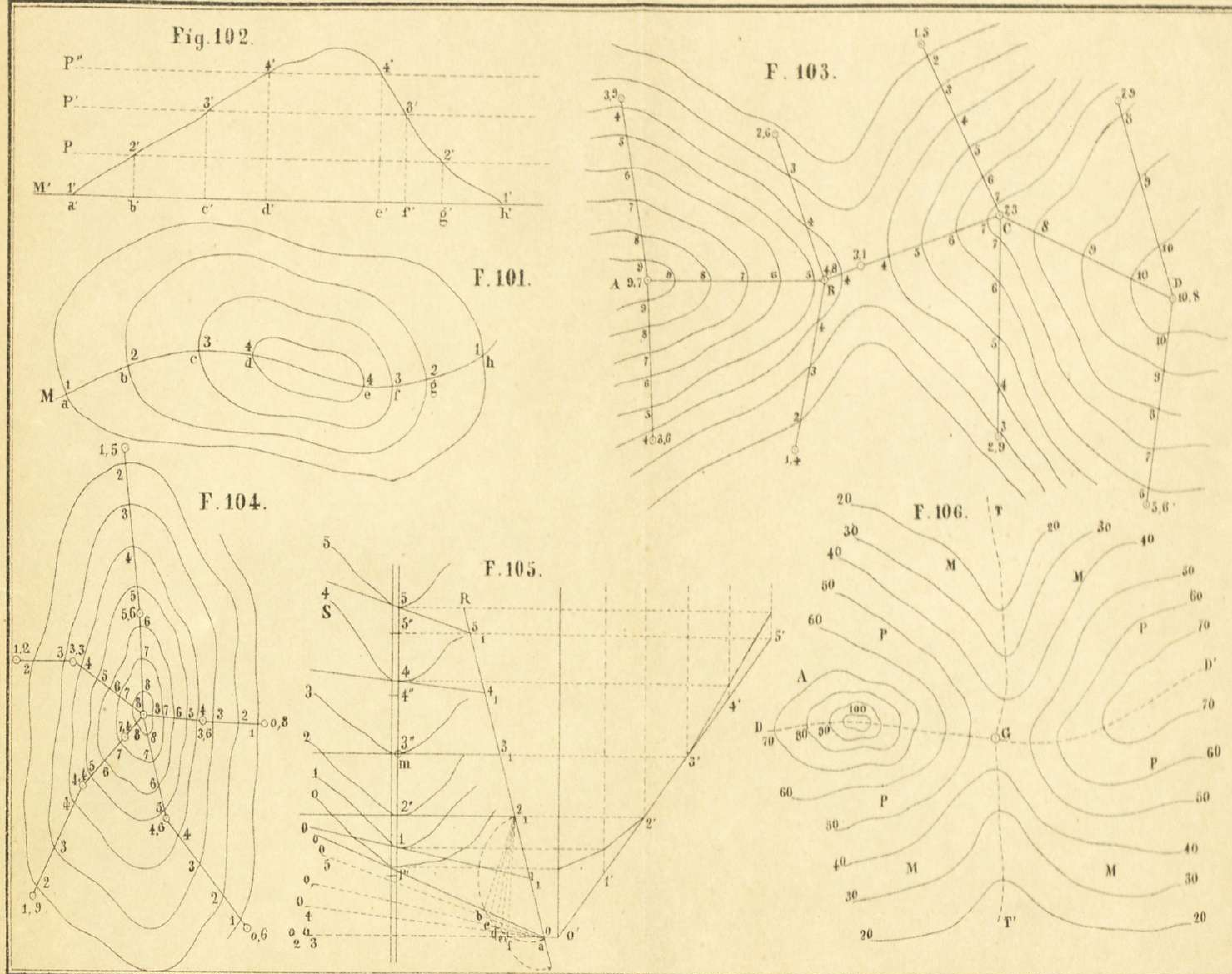
Lit. Fernandez, Salvador, 8.



Lit. Fernandez, Salvador, 8.



J. Gost y Soldevilla, dº. Lit. Fernandez, Salvador, 8. P. Peñuelas, gº.



J. Giol y Soldevilla dº   Lit. Fernandez, Salvador 6.   F. Peñuelas gº