ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

POR EL

Dr. RICARDO BALTZER,

PROFESOR EN LA UNIVERSIDAD DE GIESSEN, MIEMBRO EN EJERCICIO DE LA SOCIEDAD DE BUENAS LETRAS DE LEIPZIG.

TRADUCIDOS DIRECTAMENTE DEL ALEMAN, CON AUTORIZACION DEL AUTOR,

POR

E. JIMENEZ y M. MERELO.

DOCTORES EN CIENCIAS.

PARTE TERCERA.—ÁLGEBRA

MADRID:

IMPRENTA DE SEGUNDO MARTINEZ

Travesía de San Mateo, 12.

1880.

PARTE TERCERA.

ÁLGEBRA.

(Traduccion de la 6.ª edicion alemana 1879.)

ES PROPIEDAD.

PRÓLOGO DE LA TRADUCCION.

Echegaray, mejor conocido, tal vez, por Ricardo Baltzer que por la mayoría de los españoles ilustrados, en su prólogo á nuestra traduccion de la *Aritmética universal* del ilustre profesor de la Universidad de Giessen, dice al pié de la letra:

«De nuevo me invitan mis buenos amigos, los señores Jimenez y Merelo, á escribir el prólogo de esta, su segunda traduccion de las obras del distinguido matemático Ricardo Baltzer, como me invitaron con igual objeto, hace tiempo, para la que por entónces hicieron de la *Aritmética vulgar* del mismo autor; y ahora como en aquella ocasion cumplo un deber ineludible de amistad y de cortesía, escribiendo unos cuantos párrafos que ningun mérito pueden añadir al del libro del geómetra aleman, ni á la concienzuda é inteligente traduccion que de la *Aritmética universal* ofrecen al público ambos matemáticos españoles.

»Por otra parte ¡qué mayor mérito que el de ocuparse de Ciencias exactas en España, donde tal ocupacion rara vez da honra y nunca da provecho! ¡qué mayor elogio pudiera yo hacer que el que en sí lleva la tenacidad laudable, aunque inverosímil, de mis amigos, al continuar la emprendida tarea, y al publicar una segunda parte, aquí donde, si alguien por caso raro se atreve con la primera, es seguro que jamás de ella pasa ni á segundas partes llega! ¡qué mayor gloria que vencer la apatía ó el desden del público, obligando á ocuparse á unos cuantos, aunque sean pocos, de estas áridas materias que sólo tratan de la cantidad, del órden y de cosas de este linaje!

»Excuso, pues, encarecimientos que pudieran creerse inspirados por la amistad; excuso, asimismo, un análisis detallado del libro, que fuera inútil para el que se proponga leerlo, y que ningun interés podria ofrecer para el que no haya de pasar de la portada; y voy á cumplir brevemente mi compromiso.»

Hace seguidamente un sucinto análisis de las materias que la obra contiene y despues continúa de este modo:

«En la obra domina, al ménos así creemos adivinarlo, un pensamiento fecundo, sobre el cual, para dar por terminadas estas breves líneas, hemos de llamar la atencion de nuestros lectores.

»Dícese comunmente que la Ciencia es un encadenamiento de verdades; una especie de andamiaje, mediante el cual se va elevando el edificio científico; una escala en la que para llegar á los últimos escalones hay que pasar forzosamente por los primeros; y que de este modo los teoremas se ordenan en varias séries lineales que entre sí se cruzan y enlazan. Esto es cierto, esta es la Ciencia en su orígen; pero no es el bello ideal de la Ciencia. Ciencia, en que para llegar á un teorema necesito pasar ántes, forzosamente, por una cadena de doscientos teoremas, es Ciencia que dista mucho de su más alto grado de perfeccion. Demostrada quedará toda verdad matemática, á la cual se llegue partiendo de axiomas, combinando verdades ya probadas, y subiendo de una en otra; pero si la série es muy larga, si necesito alejarme mucho de lo que es evidente por sí, es decir, del axioma, signo cierto será esta laboriosa demostracion de que no nos hemos elevado todavía á los grandes principios. Por el contrario, á medida que, para llegar á un teorema, la série de los anteriores se vaya acortando y los eslabones vayan disminuyendo en número, la Ciencia será más perfecta; y las verdades más claras y patentes, como que estarán más cerca del orígen que es el axioma; y el artificio de la demostracion más natural y sencillo; y los principios más fecundos y más comprensivos; y la unidad de la Ciencia más alta y más rica en su contenido.

»En suma: la perfeccion suprema sería aquella en que la forma del artificio científico fuese la que sigue: los axiomas en el centro, los teoremas en la circunferencia, y todo dispuesto de tal suerte que para llegar á *un teorema* bastase combinar lógicamente los axiomas centrales sin pasar por ninguno de los demás teoremas: un centro de axiomas, rádios de demostracion, circunferencia de verdades; esta es la construccion más perfecta del saber humano, y cuanto más se acercan á ella las ciencias más perfectas son.

»Así nos agrada que en tan corto número de páginas como la *Aritmética universal* contiene, se traten teorías que pasan por elevadas y trascendentales, deduciéndolas rápida é inmediatamente de los primeros principios.»

Definido en las anteriores líneas con profunda inteligencia, recto criterio y envidiable claridad, el carácter distintivo, no ya de una sola parte, sino de la obra entera de Ricardo Baltzer, dejaríamos la pluma de la mano, si nuestra relativa pequeñez nos dispensára de manifestarnos agradecidos á los dos maestros con cuya amistad y benevolencia nos honramos. Copiadas quedan las frases del uno; pocas hemos de añadir para llamar justamente la atencion de nuestros lectores sobre este libro, escrito por el otro.

Desde luego merece notarse el deslinde entre la *Aritmética* y el *Álgebra*, dos ramas esencialmente diversas de la Matemática y confundidas, sin embargo, en todos los tratados que por mano de nuestra estudiosa juventud circulan en España. No es el *Álgebra* un monton de teorías diversas, en las que se considera la cantidad con atributos opuestos; ni lo es tampoco el lenguaje simbólico que no constituye propio carácter; ni es su objeto la investigacion de las leyes generales de la cantidad ya necesariamente calificada. El *Álgebra,* segun Baltzer, es la *Teoría de las funciones algebráicas*, caso particular de la *Teoría de las funciones* ó del *Análisis*, como fué tambien llamado el *Cálculo infinitesimal* desde su creacion por Leibniz y Newton. En el *Álgebra*, por lo tanto, la cantidad y la funcion que la representa ó expresa, se suponen esencialmente contínuas; y contínuas asimismo se consideran sus correspondientes variaciones. Y, como en el general concepto de funcion va incluso precisamente el de continuidad, y la idea de *ecuacion* es necesaria para definir la funcion particular, denominada *algebráica*; se dice de otro modo, en conformidad con lo ántes enunciado, que el objeto del *Álgebra* es la *Resolucion de las ecuaciones.*

Autores hay (*) que, para evidenciar el acuerdo y la correspondencia entre la *funcion* y la *línea*, y separar claramente lo *algebráico* de lo *aritmético*, estudian las propiedades de las funciones algebráicas, y los modos de satisfacer á la exigencia de que éstas se anulen (resolucion de ecuaciones), geométricamente.

Despréndese de lo dicho que el lector, al abordar el estudio del *Álgebra* inmediatamente despues de haber aprendido en la *Aritmética* las leyes de la cantidad numérica ó discreta, debe adquirir, ante todo, la nocion de continuidad: de esa gran categoría matemática, como dice Echegaray tambien, que es el fundamento de todas las grandes leyes de la Ciencia moderna; investigando para ello cómo, bajo el predominio de la discrecion todavía, se rellenan los huecos existentes en las séries numéricas. Este tránsito entre lo discreto y lo contínuo está perfectamente explicado en el *capítulo primero* del presente libro, que lleva por epígrafe *Las proporciones*. Defínense en él los números (razones) racionales é irracionales; la consiguiente

(*) Drobisch *(Grundzüge der L. von den hör. num. Gleich. nach ihren anal. und geom. Eigenschaften).*

limitacion de estos últimos entre dos racionales cuya diferencia es arbitrariamente pequeña; y se demuestra sencillamente el teorema, enunciado de un modo general y concreto, que se llama de los *límites*. Considérase primeramente la *funcion* como mera expresion de dependencia, en el *capítulo segundo*; se ponen así, de manifiesto, los valores correspondientes entre la funcion y sus argumentos, en la esfera de la discrecion todavía, para comparar distintamente sus incrementos mútuos; y se da despues clara y completa idea de la funcion contínua, y de la *fluxion* ó ley de variacion en el curso de la funcion misma; terminando por la clasificacion de las funciones. Consagrado está el *capítulo tercero* á la exposicion teórica y práctica del *Método analítico*, ó sea, del procedimiento general para plantear ó poner en ecuacion los problemas matemáticos, y algebráica y geométricamente resolverlos. Los tres capítulos mencionados componen la *Introduccion*.

Los capítulos restantes pudieran distribuirse en dos secciones: una, de carácter particular, hasta cierto punto; y la otra, de carácter general. Comprende la primera las ecuaciones lineales, cuadráticas, cúbicas y bicuadráticas; y trata de la resolucion de las ecuaciones numéricas, de cualquier grado y especie, por el método de Newton. Objeto de la segunda es la investigacion de las propiedades elementales de las funciones algebráicas, como antecedentes indispensables para demostrar los famosos y conocidos teoremas de Descartes, Sturm, Cauchy y Gauss. Háblase en aquélla, con la amplitud posible, de los *sistemas de ecuaciones*, de la *eliminacion*, ó sea, de los medios para componer el *sistema resolvente*; indicándose el procedimiento general para encontrar las soluciones de un sistema, constituido por dos ecuaciones cuyos primeros miembros sean funciones enteras de dos incógnitas, que se aplica, por vía de ejemplo, á dos funciones trinómicas, cuya *resultante* se determina. En ésta, en la consagrada á la analisis algebráica, despues de estudiar los caractéres propios de las ecuaciones que contienen ó admiten raizes reales ó raizes no reales, define el autor en su lato sentido la *norma* de una funcion irracional: la cual sirve inmediatamente para formar una ecuacion cuyas raizes sean potencias de las raizes de otra ecuacion dada; y mediatamente, para aislar las raizes, ó, en general, los módulos de las raizes, sin excepcion, de una ecuacion numérica, como se realiza por el método de Gräffe, ya por fortuna conocido en España (*). Y concluye por la teoría de la eliminacion, sin decirlo así expresamente, como de costumbre, determinando la *resultante* de dos funciones enteras, cualesquiera, y el *máximo comun divisor* de las mismas.

Observaciones minuciosas acerca del modo excepcional como presenta Baltzer las teorías comprendidas en este libro, podríamos hacer tantas que no cupiesen dentro de los límites de un prólogo, por grande que éste fuera. Nuestros lectores las harán mejor que nosotros; y con nosotros convendrán en que el estudio detenido de esta obra, aunque sorprende y por esto parece difícil en un principio, los obliga á discurrir ó adivinar cómo tan copiosa y profunda doctrina ha logrado su autor ordenarla y explicarla bien en tan pocas palabras.

E. Jimenez.

(*) Traducido y ampliado por nuestro compañero D. Miguel Merino.—Véase pág. 174.

PRÓLOGO DEL AUTOR.

Esta *Parte tercera* de los ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS comienza por una *Introduccion*, en que se estudian las proporciones y se explican las ideas fundamentales acerca de las funciones y el método analítico. Trata el *libro primero* de las ecuaciones, de la determinacion de varias incógnitas mediante un sistema de ecuaciones; y, particularmente, de las funciones y ecuaciones cuadráticas. La resolucion de las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y la de las ecuaciones numéricas, trascendentes y algebráicas de grados superiores, constituyen el objeto del *libro segundo*. Y en el *tercero* y último se exponen las leyes elementales de la *Análisis algebráica*, ó sea, de la *Teoría de las funciones* del mismo nombre.

Todas estas materias (segun ya advertimos en el prólogo de la *Parte segunda*) se hallan, en general, agrupadas conforme á un criterio científico; mas escritas, sin embargo, con tal independencia, que los profesores que adopten esta obra para sus discípulos puedan ordenarlas con entera libertad, acomodándose á las condiciones de la enseñanza. Por la primera vez deben explicarse solamente los primeros párrafos de los capítulos, prescindiendo de su ulterior desenvolvimiento hasta que luego se presenten ocasiones oportunas para hacerlo. Al estudio del *Algebra* debe preceder el de la *Aritmética universal*; pero esto no impide que puedan intercalarse ciertos capítulos de la una entre los de la otra. Así, por ejemplo, despues de las cuatro operaciones fundamentales, podrá explicarse la introduccion del Algebra y las ecuaciones de primer grado; en seguida, la raiz cuadrada, con las ecuaciones cuadráticas y los sistemas de ecuaciones; detrás, las potencias, las raizes, los logaritmos y las progresiones geométricas, con las ecuaciones trascendentes; luego, la combinatoria, etc. El método de un libro para enseñar debe mostrar áun exteriormente el enlace científico de los asuntos que pudieran separarse en las lecciones; mas evitando, hasta donde sea posible, que el procedimiento analítico de la exposicion oral quede limitado ó restringido por el plan sintético del libro.

Los teoremas, las denominaciones y las notaciones ó símbolos, van acompañados de su historia en breves palabras.

ÍNDICE.

INTRODUCCION.

Las proporciones, las funciones y el método analitico.

LIBRO PRIMERO.

Las ecuaciones en general, y las funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas en particular.

LIBRO SEGUNDO.

Las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, las numéricas, y las indeterminadas.

LIBRO TERCERO.

Teoria de las funciones algebráicas.

PARTE TERCERA.

ÁLGEBRA.

INTRODUCCION.

LAS PROPORCIONES, LAS FUNCIONES Y EL MÉTODO ANALÍTICO.

I. Las proporciones.

(HEIS.-31 Y 33.)

1. La razon $A:B$ de las cantidades homogéneas A y B (ARIT. UNIV. X) será *mayor*, *igual* ó *menor* que 1, segun que A sea *mayor*, *igual* ó *menor* que B. Comparando A con los múltiplos de B, ó con los múltiplos de una parte alícuota de B tan pequeña como queramos, podrá ocurrir: que A sea igual á un múltiplo de B, ó igual á un múltiplo de una parte alícuota de B; ó que se halle comprendida entre dos múltiplos consecutivos de una parte alícuota de B. Estos tres casos, designando l, m y n números enteros, se expresan como sigue:

$$A=lB,\ A=\frac{m}{n}B \text{ y } \frac{m}{n}B<A<\frac{m+1}{n}B.$$

La razon $A : B$, por consecuencia, ó será exactamente expresada por el entero l, ó por el quebrado $\frac{m}{n}$; ó estará limitada por los dos quebrados $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, con un error que no llega á $\frac{1}{n}$ y puede hacerse tan pequeño como queramos, creciendo n suficientemente. En este último caso, en el de la limitacion, la razon de las cantidades se dice *irracional* (ARIT. UNIV., 82), y éstas se llaman *inconmensurables;* denominándose *conmensurables* las cantidades, cuando su razon es *racional.*

Cuando, para hallar la razon de dos rectas, se lleva la menor sobre la mayor cuantas veces sea posible, el resto del mismo modo sobre la menor, el segundo resto sobre el primero etc., etc., y resulta que ningun resto está contenido exactamente en el anterior, se deduce que las rectas son inconmensurables (ARIT. UNIV. 49). Véase: EUCLIDES X, 2. Ejemplos: LEGENDRE *Geom.* III, probl. 19. Compárese con EUCL. X, 117. KUNZE *Planim.* I, probl. 170. BRETSCHNEIDER *Arch. de Grunert*, 3, p. 440.

2. Si una limitacion de la razon de un par de cantidades es al mismo tiempo limitacion de la razon de otro par de cantidades, las dos razones son iguales (*).

DEMOSTRACION.—Dado un número cual quiera n, siempre es posible encontrar otro número, m, que satisfaga á la limitacion:

$$\frac{m}{n} < A : B < \frac{m+1}{n}.$$

(*) EUCL. V. def. 5.

Y si al mismo tiempo se verifica esta otra

$$\frac{m}{n} < C : D < \frac{m+1}{n},$$

resulta que

$$A : B - C : D < \frac{m+1}{n} - C : D < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$$

ó sea:

$$A : B - C : D < \frac{1}{n}.$$

Ahora bien: si la diferencia de las dos razones $A : B$ y $C : D$ no fuese *nula*, no podría ser menor que el quebrado $\frac{1}{n}$ que es arbitrariamente diminuto. Luego $A : B - C : D = 0$; y, por lo tanto, $A : B = C : D$.

En la comparacion mediante la limitacion se funda el *Método de exhaustion* usado por Arquímedes. Klügel, *Math.* W. 2, p. 152.

3. La razon de dos cantidades puede hallarse *mediatamente*, multiplicando la razon de la primera cantidad con otra cantidad auxiliar, apropiada, por la razon de esta cantidad auxiliar con la segunda de las dos cantidades propuestas. Eucl. VI, def. 5. Este teorema se expresa con signos del modo siguiente:

$$A : B = (A : M)(M : B).$$

Su demostracion es sencillísima. En efecto, multiplicando el segundo miembro, cociente de $A : B$, por el divisor B, debe resultar el dividendo. Y así es:

$$(A : M)\,(M : B)\,B = (A : M)\,M = A.$$ (ARIT. UNIV. X.)

Del mismo modo:

$$A : B = (A : M)\,(M : N)\,(N : B).$$ Etc., etc.

Las razones $A : B$ y $B : A$ son *recíprocas*, porque su producto $(A : B)\,(B : A)$ es $A : A = 1$.) (ARITMÉTICA UNIV. 39).

4. Varias cantidades son entre sí como sus razones respectivas con la misma cantidad auxiliar *(unidad)*. Así:

$$A : B : C = (A : M) : (B : M) : (C : M)$$

Esto es:

$$A : B = (A : M) : (B : M)$$
$$A : C = (A : M) : (C : M);$$ etc., etc.

En efecto, $(A : M) : (B : M) = A : B;$ puesto que (3) $(A : B)\,(B : M) = A : M$.

Si, en particular, la cantidad primera contiene p partes (unidades), la segunda q, y la tercera r, dichas cantidades estarán entre sí como los números p, q y r, respectivamente. Y á la inversa: cuando las cantidades sean entre sí como los números p, q y r respectivamente, la primera podrá representarse por pM, la segunda por qM, y la tercera por rM, siendo M indeterminada.

Los números $A : M$, $B : M$, $C : M$ pueden ser todos multiplicados ó divididos por un mismo número sin que se alteren sus razones mútuas. (Aritmética univ. 35). Cuando todos ó algunos sean quebrados, se multiplican por su denominador comun; y cuando se dividen, se dividen siempre por su máximo comun divisor.

5. *Proporcion* (ἀναλογία, *proportionalitas*) es una igualdad de razones. Por ejemplo: $A : B = C : D$ (*). Las cantidades que ocupan iguales lugares, como las A y C, y las B y D, se llaman *homólogas*. El producto de las cantidades intermedias es igual al de las cantidades extremas: entendiéndose por cantidad su razon con la unidad. Euclides V, def. 8.ª, y VII, 19.

Si $A : B = C : D$, será $B\,C = A\,D$.

Demostracion.—El cociente $A\,D : B\,C$ significa lo mismo y vale tanto como el producto $(A : B)\,(D : C)$, en el supuesto de que A, B... sean números, como así se expresa en el enunciado del teorema. Pero $D : C = B : A$: luego $A\,D : B\,C = (A : B)(B : A) = 1$.

6. Los cocientes resultantes de dividir en una proporcion cada cantidad por su homóloga son iguales. Dada la proporcion

$$A : B : C = F : G : H$$

serán

$$A : F = B : G = C : H$$

(*) El signo = puede en este caso ser sustituido por el de Oughtred : : (1631).

y recíprocamente. En el supuesto siempre de que las cantidades F, G y H sean de igual especie que las A, B y C, ó que representen números (razones con la unidad de las mismas F, G y H).

Demostracion.—Segun (3), $A:F=(A:B)(B:F)$; mas, segun la hipótesis, $A:B=F:G$, y por consecuencia, $A:F=(B:F)(F:G)=B:G$; etc. Cuando las cantidades A, B, C... son entre sí como las diferencias $A-B$, $B-C$, $C-D$... las razones $B:A$, $C:B$, $D:C$... son iguales: lo cual significa que las cantidades A, B, C... forman una progresion geométrica. Pues, segun la hipótesis, y el teorema que acabamos de demostrar, $A:A-B=B:B-C$, y por consecuencia (5) $(A-B)B=A(B-C)$ y al fin: $B:A=C:B$. Etc.

7. La razon de los polinomios

$$Ax+By+Cz:Ap+Bq+Cr$$

permanece invariable, cuando las cantidades A, B y C son sustituidas por otras F, G y H que se hallan entre sí respectivamente como las primeras.

Demostracion.—De la proporcion $F:G:H=A:B:C$ se deducen (6) las igualdades $F:A=G:B=H:C$. Multiplicando, pues, en los polinomios dados, las cantidades A, B y C por $F:A$, $G:B$ y $H:C$ respectivamente, resultan las F, G y H; sin que se haya alterado la razon de aquéllos por haber sido multiplicados sus términos por un mismo número.

Ejemplos.—De la proporcion

$$A:B:C=F:G:H$$

se desprenden las siguientes:

$$A \pm B : C = F \pm G : H$$

$$A \pm B \pm C : A = F \pm G \pm H : F. \text{ Etc., etc.}$$

Si $Ax + By + Cz = 0$, tambien $Fx + Gy + Hz = 0$.

8. De dos proporciones puede deducirse otra nueva, multiplicando los términos de las primeras ordenadamente. Así, de las proporciones

$$A : B : C = F : G : H$$

$$L : M : N = P : Q : R$$

se deduce la proporcion

$$AL : BM : CN = FP : GQ : HR.$$

Demostracion. $AL : BM = (A : B)\,(L : M)$ segun ya vimos (5); mas $A : B = F : G$ y $L : M = P : Q$, segun la hipótesis. Luego

$$AL : BM = (F : G)\,(P : Q) = FP : GQ. \text{ Etc.}$$

Recíprocamente: de la proporcion

$$AL : BM : CN = p : q : r$$

se deduce esta otra:

$$A : B : C = \frac{p}{L} : \frac{q}{M} : \frac{r}{N}.$$

9. Generalmente se distinguen *tres medios* en-

tre dos cantidades (*): el *aritmético*, el *geométrico* y el *armónico*.

El *medio aritmético* entre dos cantidades es la semisuma de éstas. Así, designando por x el medio aritmético entre A y B, será:

$$x=\frac{1}{2}(A+B) \text{ y } A-x=x-B.$$

En los antiguos libros de Cálculo se llamaba *medio aritmético* de dos cantidades á la diferencia de éstas, y *proporcion aritmética*, á la igualdad de dos diferencias.

La proporcion aritmética $A-x=x-B$ se llama *contínua (continua)*; porque la tercera cantidad es igual á la segunda.

El *medio geométrico* de dos cantidades es la raíz cuadrada de su producto. Designando, pues, por y el medio geométrico entre A y B, será (5)

$$y=\sqrt{AB} \text{ y } A:y=y:B.$$

La igualdad de razones $A:y=y:B$ se denomina *proporcion geométrica*, y lleva además el calificativo de contínua; porque la tercera cantidad es igual á la segunda. Por lo cual, en vez de medio geométrico, suele tambien decirse *medio geométrico proporcional*.

El *medio armónico* entre dos cantidades es otra cantidad, cuya recíproca es el medio aritmético de las recíprocas de las dos cantidades propuestas; entendiéndose por recíproca de una cantidad la razon

(*) Segun los antiguos matemáticos griegos. NICOMACO, *Arithm.* II, 21; PAPPUS, *Coll. Math.* III, 5.

de la unidad con la misma (5). Designando, pues, por z el medio armónico entre las cantidades A y B, y por x é y, como ántes, su medio aritmético y su medio geométrico, tendremos:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=\frac{A+B}{2AB}$$

$$A-z:z-B=A:B \quad x:y=y:z.$$

Asimismo, bajo el nonbre de medio aritmético entre n cantidades se comprende la n^a parte de su suma; bajo el de medio geométrico, la n^a raíz de su producto, y bajo el de medio armónico entre varias cantidades, la cantidad cuya recíproca es el medio aritmético de las recíprocas de aquéllas. *Armónica*, en general, se denomina la série de términos cuyos recíprocos forman una progresion aritmética (ARIT. UNIV. 159) por el motivo de su aplicacion á la teoría de los tonos en la música. *Geométrica* se llamó la proporcion por el uso que de ella hizo EUCLIDES en sus *Elementos*.

10. El medio geométrico entre dos cantidades es menor que el aritmético, y la diferencia entre el uno y el otro es menor que el cuadrado de la diferencia entre las dos cantidades dadas, dividido por el óctuplo de la menor (*).

En efecto:

$$\frac{1}{2}(A+B)-\sqrt{AB}=\frac{1}{2}(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2$$

$$=\frac{(A-B)^2}{2(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2}<\frac{(A-B)^2}{8B}$$

(*) LENTHERIC, *Ann. de Gerg.*, 21, p. 84. El medio geométrico entre n cantidades es menor que el aritmético. *Journ. de* LIOUVILLE, 4, p. 493.

En general, el producto de las partes ó miembros de una suma es máximo cuando dichas partes son iguales; puesto que el producto de partes desiguales puede ser aumentado, reemplazando dos partes desiguales por dos iguales, esto es: cada una de aquéllas, por el medio aritmético de ambas.

Por el contrario, la suma de los factores de un producto es mínima cuando los factores son iguales; pues, si la suma de los factores iguales llegase á valer tanto ó más que la suma de los factores desiguales, el producto de los primeros sería mayor que el de los segundos: contra la hipótesis de ser uno sólo el producto dado.

II. Funciones de variables.

11. Una cantidad se dice *dependiente* de otra cuando, mediante una variacion en la segunda, se produce una variacion en la primera. Las cantidades, de cuyos valores depende el de otra cantidad, se llaman *variables (argumentos)*; y la cantidad dependiente toma el nombre de *funcion* (*) de aquellas variables. Así, por ejemplo, el precio de un género es una funcion de su cantidad; el volúmen de un cuerpo es una funcion de su temperatura y de su presion; la potencia, la raíz y el loga-

(*) Leibniz llamó funcion á los elementos de todas especies correspondientes á un punto de una curva, tales como su abscisa, su ordenada, su tangente, su normal, etc., etc. (*Acta Erud.*, 1692. *De línea*, etc., 1694. *Nova calculi*, etc. Carta á Huygens de 29 de Junio de 1694.) Juan Bernoulli empleó el nombre de funcion en su actual sentido. (*Opp.*, II, p. 241.) La notacion $f(x)$ aparece usada primeramente por Clairaut (*Mèm. de l'Acad. de Paris*, 1733, p. 269).

ritmo de un número, son funciones de este número; una fórmula es funcion de las indeterminadas (cantidades literales, letras) que existen en ella.

Cuando la funcion depende de una variable, á cada valor dado de la variable corresponde un valor determinado (único ó múltiple) de la funcion; y á diferentes valores de la variable corresponden, en general, diferentes valores de la funcion. Si la funcion depende de varias variables, á cada conjunto de valores de todas estas variables corresponde un valor determinado de la funcion; y á un valor de una de las variables corresponde un conjunto infinito de valores de la funcion.

Una funcion cualquiera de la variable x, tal como una fórmula en que exista la indeterminada x, se designará (*) por una letra (signo de funcion) seguida de un paréntesis en el cual esté incluido el valor correspondiente de la variable. Así: $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ significan diferentes fórmulas dependientes de x, ó sean los valores de la funcion f, de la funcion g y de la funcion h, correspondientes al valor x de la variable. Del mismo modo: una funcion de las variables x é y se designará por $F(x, y)$; etc., etc. Los símbolos $f(0)$, $f(1)$... representan, pues, los valores de $f(x)$ que corresponden á los valores $x=0, 1$... de la variable, respectivamente; la notacion $F(0, 1)$ significa el valor de $F(x, y)$ que corresponde al sistema de valores, $x=0$, $y=1$, de las variables. Et cætera, etc.

Los valores sucesivos que toma una funcion

(*) Vieta empleó las vocales para designar las variables y las funciones; la notacion que hoy se usa se debe á Descartes.

para un conjunto de valores de la variable, ó, dicho de otro modo, el curso ó camino que recorre una funcion, correspondiente á un curso ó camino dado de la variable, se expresa con claridad en una tabla, como sigue:

$$f(x) = \frac{3+4x}{7-2x^2}$$

x	$f(x)$
$-\infty$	0
-3	0,82
-2	5
$-\sqrt{3,5}$	∞
-1	$-0,2$
$-0,75$	0
0	0,43
1	1,4
$\sqrt{3,5}$	∞
2	-11
3	$-1,36$
∞	0

Para representar gráficamente el contenido de la tabla anterior, se construyen sobre una recta cualquiera, con una medida arbitraria, los valores (reales) de la variable como *abscisas*, esto es, como segmentos de dicha recta contados desde un mismo punto (arbitrariamente elegido) que es el *origen* ó *punto-cero;* y los corespondientes valores de la funcion como *ordenadas*, esto es, como perpendiculares á las abscisas en los puntos finales de estas mismas. La línea, en la cual se hallan los otros extremos de las ordenadas, está determinada por el enlace ó dependencia dada entre la funcion y la variable.

Los valores de la variable y de la funcion que no sean reales no pueden ser representados por abscisas y ordenadas. A valores complejos de la variable corresponden, en general, valores complejos de la funcion. Para representarlos, se usan dos superficies planas: los puntos de la una para representar los valores de la variable, y los de la otra para representar los valores correspondientes de la funcion. (ARIT. UNIV. 85.)

12. La funcion se dice *proporcional* á la variable (ó á la m^a potencia de la misma) cuando los valores correspondientes de la funcion son entre sí como los valores respectivos de la variable (ó las potencias m^{as} de estos valores). Si la variable se hace p veces tan grande, la funcion se hará tambien p veces (ó p^m veces) tan grande. Designando por a el cociente de un valor de la funcion y del correspondiente de la variable, será $f(x) = ax$ ó $= ax^m$ (6).

EJEMPLOS.—La masa de un cuerpo es proporcional á su peso; el precio de una mercancía es proporcional á su peso, cuando el precio del objeto vendible no se eleva con su tamaño; el área del círculo es proporcional al cuadrado del rádio; el volúmen de la esfera es proporcional al cubo del rádio; el camino recorrido por un cuerpo que desciende libremente es proporcional al cuadrado del tiempo. Et cætera, etc.

13. La funcion se dice *inversamente* (*indirectamente*) *proporcional* á la variable (ó á la m^a potencia de esta misma) cuando los valores de la funcion son entre sí como los valores recíprocos de los correspondientes de la variable (ó de las potencias m^{as} de estos mismos). Si la variable, pues, se hace p veces

tan grande, la funcion se hará la p^a parte (ó la p^m parte). Designando por a el producto de un valor de la funcion por el correspondiente valor de la variable, será $f(x) = \frac{a}{x}$ ó $= \frac{a}{x^m}$

Ejemplos.—Para una obra, ó labor dada, el tiempo que se tarda en hacerla es inversamente proporcional á la fuerza que se emplea. La curvatura de un círculo es inversamente proporcional al rádio. La brillantez de una superficie pequeñísima, iluminada, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde dicha superficie al foco luminoso. El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de dicho cuerpo al centro de atraccion.

Si la funcion es directa ó inversamente proporcional á la variable, ó á una potencia de ésta, conocido un valor de la variable y el correspondiente de la funcion, podrá calcularse otro valor de la funcion correspondiente á otro valor cualquiera de la variable, mediante la *Regla de tres*. (Aritm. vulg. VI.)

14. Si á los valores a y x de la variable corresponden respectivamente los valores b é y de la funcion, $x-a$ é $y-b$ serán las *diferencias (incrementos)* correspondientes de la variable y de la funcion. Si á la diferencia suficientemente pequeña $x-a$ de la variable corresponde la diferencia arbitrariamente pequeña $y-b$ de la funcion, ésta se dice *continua* para el valor a de la variable Pero, si esta condicion no se satisface en el lugar

considerado, ó sea, para $x=a$, se dice que en dicho punto es la funcion *discontinua*, ó que en el mismo se rompe la continuidad.

I. Si la funcion es real, contínua y finita, y pasa desde el valor (positivo ó negativo) b al valor b_1, al mismo tiempo que la variable recorre el intervalo, real tambien, desde a hasta a_1, con tal que la diferencia a_1-a sea suficientemente pequeña, los valores b y b_1 tendrán el mismo signo.

II. Si la funcion real, contínua y finita, pasa desde el valor positivo b al negativo b_1, mientras la variable recorre el intervalo real desde a hasta a_1, entre estos dos valores a y a_1 existe un valor real tambien, a_0, de la variable, por el cual recibe la funcion el valor 0. En efecto, la série de valores a, $a+\delta$, $a+\delta+\delta'$,..... de la variable, para los cuales, siendo δ, δ'..... suficientemente pequeños, toma (I) la funcion valores positivos, puede prolongarse hasta llegar á un valor, a_0, de la variable, para el cual adquiera la funcion un valor que no sea positivo. Mas este valor de la funcion no puede ser negativo; porque, si lo fuera, lo sería tambien otro valor anterior y suficientemente próximo: contra la hipótesis. Luego el valor que la funcion recibe, en semejante caso, sólo puede ser *cero*.

III. Si en la hipótesis precedente admitimos ademas que $b_1=b$, entre los valores a y a_1 de la variable existe otro, real tambien, a', por el cual recibe la funcion un valor *extremo*, esto es, un *máximo* ó un *mínimo*: ó sea, un valor mayor ó menor que los valores anteriores y posteriores, suficientemente próximos, de la misma. Puesto que la funcion no puede continuar subiendo ó bajanda desde el valor b hasta llegar al valor $b_1 = b$.

15.—I. Cuando la diferencia $b_1 - b$ de la funcion pueda ser expresada mediante la diferencia correspondiente $a_1 - a$ de la variable, y por potencias de esta diferencia (Problema del *Cálculo diferencial*), la funcion será contínua en el valor a de la variable; y la diferencia de la funcion será proporcional á la diferencia correspondiente de la variable, con un error arbitrariamente pequeño, si la diferencia de la variable disminuye suficientemente.

En efecto, segun la hipótesis:

$$b_1 - b = p(a_1 - a) + q(a_1 - a)^2 + \dots = (p + \delta)(a_1 - a)$$
$$b_2 - b = p(a_2 - a) + q(a_2 - a)^2 + \dots = (p + \delta')(a_2 - a)$$

Y de estas igualdades, que expresan aquellas hipótesis, se deduce que, siendo las diferencias $a_1 - a$ y $a_2 - a$ suficientemente pequeñas, serán tan pequeñas como queramos, ó sea, menores que toda cantidad, por diminuta que se la suponga, las diferencias $b_1 - b$, $b_2 - b$ y

$$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} - \frac{b_2 - b}{a_2 - a} = \delta - \delta'.$$

Tal es el fundamento de la *Regula falsorum* (*El-chataayn*. — Véase: Drobisch, *De* Widmanni *Compendio*, pág. 29; *Falsarum positionum*, en Leonardo, lib. abaci, fól. 141; *Regula aurea*, en Cardan, *Ars. magna*, cap. 30) de los sucesores de Diofanto, y de la regla de interpolacion para las tablas que contienen los valores de ciertas funciones (Aritm. univ. 111).

II. Dentro de un intervalo real, los valores $p+\delta$ y p, siendo suficientemente pequeña la diferencia de la variable, tienen el mismo signo (14-I). Luego las diferencias correspondientes b_1-b y a_1-a tendrán el mismo signo, ó signos diferentes, segun que p sea positivo ó negativo (puesto que $p=(b_1-b):(a_1-a)$ para el caso que consideramos). Y esto quiere decir que, segun sea p positivo ó negativo, el valor de la funcion comenzará desde b á subir ó á bajar, mientras el de la variable crece desde a.

Si p es nulo, la funcion permanece sin variar al pasar por a el valor de la variable, ó, en otros términos: al valor a de la variable corresponde un valor de la funcion que, ó es máximo (cuando el curso ascendente de la funcion se convierte en descendente al pasar la variable por el valor a); ó es mínimo (en el punto que el descenso de la funcion se cambia en ascenso); ó ni máximo ni mínimo.

El coeficiente determinativo p, se denomina *Fluxion* (segun Newton), *Cociente diferencial* (segun Leibniz) y *Derivada* (segun Lagrange).

16. Una funcion de una variable se llama *entera (integra)* y del *grado m°*, cuando es un polinomio cuyos términos contienen potencias de la variable con exponentes enteros y positivos, siendo el mayor de éstos m. Por ejemplo:

$$ax+b$$

$$ax^2+bx+c$$

$$ax^3+bx^2+cx+d;\ \text{etc., etc.}$$

son funciones enteras de x de los grados 1.°, 2.°, 3.° respectivamente (ó *lineales*, *cuadráticas*, *cúbicas*), siempre que los coeficientes a, b, c, d sean *constantes*, ó sea, independientes de x, aunque, por lo demás, arbitrarios. Por ser $(a+x)^2-x^2=a^2+2ax$, es $(a+x)^2-x^2$ una funcion de x, realmente de primer grado.

Una funcion entera de x, siendo x finita, es asimismo finita, y contínua en todo su desenvolvimiento (14). La funcion entera A se dice *divisible* por la funcion entera B, y B *divisor* de A, cuando el cociente $A:B$ es una funcion entera, ó es constante. Así a^m-x^m es divisible por $x-a$.

Un polinomio que sea al mismo tiempo funcion entera de x y funcion entera de y, se llamará funcion entera de x é y; y del grado m, cuando sea m el mayor número de estas dos variables, contenidas como factores en los términos de dicho polinomio. Por ejemplo:

$ax+by+c$ es una funcion lineal de x é y.

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ es una funcion cuadrática de x é y. Etc., etc.

17. Si B es una funcion entera, y A una constante, ó una funcion entera no divisible por B, el cociente $A:B$ se denominará funcion *fraccionaria*. Esta funcion fraccionaria es infinita para determinados y finitos valores de la variable, que convierten en 0 á la funcion B; siendo, por lo demás, contínua en su desenvolvimiento (14).

Las funciones enteras y fraccionarias llevan el nombre genérico de *racionales*.

Una funcion fraccionaria será *pura*, ó *espuria*, segun que el grado del divisor sobrepuje, ó no, al grado del dividendo. Una funcion fraccionaria, espuria, puede resolverse, mediante la division, en una funcion entera, que tambien puede reducirse á una constante, y en una funcion fraccionaria, pura. (Arit. univ. XII).

De las funciones enteras A y B, por divisiones sucesivas, se desprende la série de igualdades (Arit. univ. 49):

$$A = BP + C$$

$$B = CQ + D$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L = MU + N$$

En las cuales forman los grados de las funciones enteras A, B, C, D..... una série decreciente, y los cocientes P, Q..... son funciones enteras. Para obtener coeficientes enteros se multiplican los dividendos por factores positivos convenientes.

Toda funcion entera que esté contenida en A y en B (16) es un divisor de C, D..... Si la funcion N divide á M, la funcion N será el *máximo comun divisor* de A y de B, y sus coeficientes estarán compuestos *racionalmente* de los coeficientes de A y de B. Si N es independiente de la variable, la funcion fraccionaria $A : B$ será *irreducible*. Sobre el modo de formular el máximo comun divisor de dos funciones enteras, y sobre las condiciones para la existencia del mismo, hablamos más adelante en el Capítulo X.

18. Si varias indeterminadas se hallan enlazadas por una ecuacion, la multitud infinita de los valores de una de ellas se halla en cierto sentido limitada ó subordinada, al paso que los infinitos valores de las restantes indeterminadas no están sometidos á limitacion de ninguna especie. Cada una de las indeterminadas puede considerarse como incógnita, y expresarse, mediante la ecuacion propuesta, por las indeterminadas restantes, de un modo único ó múltiple; ó, en otro lenguaje: cada una de las indeterminadas es funcion determinada de las restantes (variables). Esta funcion se dice *implícitamente* dada en la ecuacion, hasta que su valor se exprese *explícitamente*, mediante la ecuacion misma, por las indeterminadas que representen el papel de variables.

Cuando U sea una funcion entera, dada, del grado m respecto de x, y del grado n respecto de y (16), y sea dada tambien la ecuacion $U=0$, la y será una funcion *algebráica* de x, determinada de n modos (*biformis*, *triformis*..... Cap. X) por el valor x de la variable (prescindiendo de los valores singulares de la misma).

A un valor racional de x corresponden, en general, valores irracionales de y; á una escursion de la variable, n escusiones ó ramas de la funcion (11).

Si es $n=1$, y será funcion racional de x, entera ó fraccionaria. Si $n>1$ y U un binomio, y toma el nombre de funcion algebráica *irracional* de x. Las funciones racionales son uniformes. La funcion irracional $a+\sqrt{x}$ es biforme, y ademas al valor $x=0$ corresponde un punto comun de las dos ramas de la funcion *(punto de entronque)*. La funcion irracional $\sqrt{a-bx}+\sqrt[3]{c-dx}$ es sextiforme; siendo triforme para $x=a:b$, y biforme para $x=c:d$.

Cuando y no sea funcion algebráica de x, y esté enlazada con x mediante una ecuacion, y será funcion *trascendente* (*) de x.

Por ejemplo: a^x, $cosx$, $logx$, $arc\,cosx$, son funciones trascendentes de x: las dos primeras, uniformes; las dos últimas, infinitiformes. Las funciones enteras de grado infinito no son, en general, algebráicas; pero son racionales cuando son recurrentes (ARIT. UNIV. 44). Acerca de otros criterios consúltese á HEINE, J. DE CRELLE, 48, pág. 267.

19. Cuando la dependencia ó enlace entre las variables de una funcion es tal que, multiplicando cada una de ellas por el factor t, el valor de la funcion resulta multiplicado por t^m, segun expresa la igualdad

$$f(tx, ty.....)=t^m f(x, y),$$

la funcion se llama *homogénea de m dimensiones* (**). Por ejemplo:

$$ax^2+2bxy+cy^2, \sqrt{xy}, \sqrt{x-y}, logx-logy, \frac{ax+by}{x^2-y^2}$$

(*) Estas distinciones datan del siglo XVII. Las denominaciones se deben principalmente á LEIBNIZ. *Acta Erud.*, 1682, 1684, pág. 234. EULER, Introd. I, cap. I. ABEL, J. de Crelle, I, página 67.

(**) EULER, Introd. I, cap. V.

son funciones homogéneas de 2, 1, $\frac{1}{2}$, 0 y —1 dimensiones.

Una funcion entera, homogénea, de 1, 2, 3... dimensiones, cada uno de cuyos términos comprende 1, 2, 3... variables, se denomina *forma* de 1.°, 2.°, 3.°... *grado* (lineal, cuadrática, cúbica.....) y ademas *binaria*, *ternaria*..... segun el número de sus variables. (*) Así: $ax^2+2bxy+cy^2$ es una forma cuadrática, binaria, de las variables x é y. Cada término de una forma de grado m°, con n variables, contiene una combinacion de m factores variables, iguales ó desiguales; y, por consecuencia, la forma general de grado m°, con n variables, contiene

$$\binom{n+m-1}{m}=\binom{m+n-1}{n-1}$$

términos. (Arit. univ. 137.)

Los términos de una funcion entera, no homogénea, de grado m°, pueden clasificarse en formas de los grados 0, 1, 2... m. Designando estas formas respectivamente por f_0, f_1..... y por t una nueva variable, la funcion entera, no homogénea, $f_0+f_1+\ldots+f_m$ se presenta como el valor de la forma

$$t^m f_0+t^{m-1}f_1+t^{m-2}f_2+\ldots+tf_{m-1}+f_m:$$

(*) Gauss. *Disq. arithm.*, 153, 266.

el cual valor toma esta forma cuando $t = 1$. De donde se desprende que una funcion entera, no homogénea, de grado m^o, con n variables, representa un valor particular de una forma con $n+1$ variables y tiene, por tanto, en general:

$$\binom{n+m}{m} = \binom{m+n}{n} \text{ términos.}$$

20. Una funcion de varias variables se llama *simétrica*, ó *alternativa* (*), segun que por el cambio de los valores de las variables, dos á dos, conserve el mismo valor, ó adquiera valores igualmente opuestos. Por ejemplo:

$$x + y,\quad x^2 + y^2 + axy,\quad (x-y)^2,\quad \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)},$$
$$\cos(x-y),\quad xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$$

son funciones simétricas de x, y, z; puesto que no varían cuando en ellas se cambia x por y, ó x por z, ó y por z. Y, por el contrario:

$$x - y,\ (x-y)^3,\ \operatorname{sen}(x-y),\ (x-y)(x-z)(y-z)$$

son funciones alternativas de x, y, z; porque

(*) La denominacion de *funcion simétrica*, llamada ántes *functio invariabilis* (LAGRANGE y GAUSS, *Disq. arithm.*, 347) fué introducida por LACROIX (Adiciones á los *Elem. d'Algèbre* de CLAIRAUT, 5.ª ed., 1797, I, pág. 298.—*Comp. d'Algèbre*, I). Las *funciones alternativas* recibieron su nombre de CAUCHY (1812, *Journ. de l'École Polyt.* art. XVII) que dividió las funciones simétricas en permanentes y alternativas.

adquieren el valor igualmente opuesto, cuando se cambia x por y, ó x por z, ó y por z. Las determinantes son funciones alternativas de sus elementos. (Arit. univ. XXVI.) El cuadrado de una funcion alternativa es una funcion simétrica.

Si una funcion simétrica de x, y, z tiene el término $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$, tiene tambien los términos $a_k x^\alpha y^\gamma z^\beta$ y $a_k x^\beta y^\alpha z^\gamma$, con el mismo coeficiente que el primer término: del cual se deducen los otros, cambiando de dos en dos, unas en otras, las variables x, y, z, ó los exponentes α, β, γ. Cuando una funcion entera simétrica, con n variables x, y, z..... es de grado m^o respecto de cada una de estas variables, pueden sus términos deducirse de la fórmula $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$....., sustituyendo α, β, γ..... por n números iguales ó desiguales de la série 0, 1, 2... m, de todas las maneras posibles. Por consecuencia, la funcion comprende tantos coeficientes distintos como combinaciones $\alpha\beta\gamma$... puedan hacerse, esto es:

$$\binom{m+1+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}.$$

III. El método analítico.

21. El procedimiento más general para resolver los problemas matemáticos consiste en suponer conocidas las mismas cantidades que buscamos, ó bien, en contestar préviamente con indeterminadas á las exigencias ó preguntas del problema, como si éste ya estuviera resuelto. Estas indeterminadas

son las *incógnitas* del problema; mediante ellas serán expresados los *datos* (las cantidades conocidas) y las fórmulas que para esto se encuentren (funciones de las incógnitas) se igualarán á los valores que *deben* tener, segun el enunciado de la cuestion propuesta; y últimamente, de las ecuaciones así establecidas se deducen por el cálculo, hasta donde sea posible, los valores de las incógnitas.

Este procedimiento indirecto, que con insignificantes modificaciones se adopta tambien para descubrir construcciones geométricas, se conoce desde la antigüedad con el nombre de *Análisis* ó *Método analítico.* (*)

EJEMPLO 1.º—En una reunion de 90 personas hay 4 hombres más que mujeres, y 10 niños más

---

(*) Sobre el método analítico, como le llamó su descubridor EUDOXIO (Escuela Platoniana, 370 ántes de J. C.), han tratado: EUCLIDES *(Elem.* 13 al principio, y *Data)*; PAPPUS *(Coll. malth.* 7); VIETA *(Isagoge in artem analyticam)*; NEWTON *(Arithm. univ.*, edicion Gravesande, pág. 64) y otros. (Véase KLÜGEL *math. W.*, I, página 86). KEIMER á BOSSUT, *Gesch. d. Math.*, 1804, I, pág. 116. Entre los antiguos, DIOFANTO principalmente enseñó á calcular segun el método analítico. Al comenzar la Edad moderna aparece la distincion entre *ars minor seu ars rei et zensus* (la incógnita se llamaba *res, cosa,* y su cuadrado *zensus*. *(Aritmética univ.*, VI) y *ars magna, quam vulgo cossam vocant sive regulas algebraicas* (CARDAN, *Ars magna*, cap. I). El cálculo literal se constituyó para extender las investigaciones en esta rama de la ciencia llamada *Cossa* y *Álgebra*. Desde NEWTON y LEIBNIZ se aplicó el nombre de *Análisis* al Cálculo diferencial é integral inventado por los mismos; hoy bajo el nombre de *Análisis* entendemos la Teoría de las funciones, y con el nombre de *Análisis algebráica*, ó de *Álgebra*, designamos la Teoría de las funciones algebráicas.

que adultos. ¿Cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños hay en la reunion?

A la pregunta contestamos provisionalmente que hay x mujeres; é inmediatamente decimos que hay $x+4$ hombres, y entre las unas y los otros $2x+4$ adultos; y, por lo tanto, $2x+14$ niños. Las x mujeres, los $x+4$ hombres y los $2x+14$ niños componen $4x+18$ personas, y esta fórmula se iguala con 90, que es el valor que debe tener, segun lo enunciado en el problema propuesto. De la ecuacion ó condicion

$$4x+18=90$$

se deduce que $4x=72$ y $x=18$. Y de aquí que en la reunion hay 18 mujeres, 22 hombres y 50 niños.

Ejemplo 2.º—Vendiendo un género por m pesetas, se gana el p por ciento. ¿Cuál será el tanto por ciento de ganancia si el género se vende por n pesetas?

Ganar x por ciento vale tanto como recibir $100+x$ pesetas por 100 pesetas, ó bien, 1 peseta por la $(100+x)^{a}$ parte de 100 pesetas, y por consecuencia, n pesetas por $\frac{100n}{100+x}$ pesetas que costó el género vendido. Pero este género se vende por m pesetas con el p por ciento de ganancia: lo cual significa, segun lo ántes expresado, que se compró por $\frac{100m}{100+p}$ pesetas. Y como lo que costó, en el uno y el otro supuesto, ha de ser siempre lo mismo, tendremos la condicion

$$\frac{100n}{100+x}=\frac{100m}{100+p}$$

De esta condicion se deduce:

$$\frac{100+x}{n}=\frac{100+p}{m}$$

$$100+x=(100+p)\frac{n}{m} \text{ y } x=(100+p)\frac{n}{m}-100$$

Es decir, que el género vendido por n pesetas, dará el $(100+p)\frac{n}{m}-100$ por ciento de ganancia, ó no producirá ganancia ni pérdida, ó producirá el $100-(100+p)\frac{n}{m}$ por ciento de pérdida, segun que $(100+p)\frac{n}{m}-100$ sea positivo, nulo ó negativo.

Ejemplo 3.º—Del punto A sale un correo que anda 7 kilómetros en 5 horas; del punto B, situado á 8 kilómetros detrás de A, sale, 8 horas despues de haber salido el primero, otro correo que anda 5 kilómetros en 3 horas. ¿Cuándo y dónde será alcanzado el primer correo por el segundo?

Comenzamos por contestar que el primer correo llevaba x horas de camino, y había andado, por consecuencia, $\frac{7}{5}x$ kilómetros cuando fué alcanzado. El segundo correo, por lo tanto, tuvo que andar durante $x-8$ horas y que recorrer $\frac{5}{3}(x-8)$ kilómetros hasta encontrarse con el otro. La diferencia entre las distancias recorridas por cada uno debe ser igual á la que separa los dos puntos de donde salieron. Esta condicion se expresa como sigue:

$$\frac{5}{3}(x-8)-\frac{7}{5}x=8$$

y de ella resulta:

$$\frac{4x}{15} - \frac{40}{3} = 8, \quad \frac{4x}{15} = \frac{64}{3}, \quad x = 80.$$

El primer correo llevaba, pues, 80 horas de camino y había recorrido 112 kilómetros, cuando fué alcanzado por el segundo.

EJEMPLO 4.°—El capital a pesetas es pagadero á los k meses, el capital b á los l meses, y el capital c á los m meses. ¿Despues de cuántos meses podrá pagarse la suma $a + b + c$?

Despues de x meses. Suponiendo que 1 peseta en 1 mes produzca 1 unidad de interés, $a + b + c$ pesetas, en x meses, producirán $(a + b + c)\, x$ unidades de interés, miéntras que a pesetas en k meses, y b pesetas en l meses, y c pesetas en m meses, producirán $ak + bl + cm$ unidades de interés. Mas el interés primero debe ser igual á este último, luego

$$(a + b + c)\, x = ak + bl + cm.$$

Y de esta ecuacion se desprende

$$x = \frac{ak + bl + cm}{a + b + c}$$

EJEMPLO 5.°—Los caños A y B llenan un pilon de agua en 70 minutos; los caños A y C llenan el mismo pilon en 84 minutos; y los caños B y C lo llenan en 140 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el pilon un solo caño, y cuánto tardarán en llenarlo los tres caños juntos?

Los caños A, B, C llenan el pilon en x, y, z minutos respectivamente, y en 1 minuto llenarán $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ del pilon. Por consecuencia:

A y B, en 70 minutos, llenarán $70\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ del pilon

A y C, en 84 minutos, » $84\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ »

B y C, en 140 minutos, » $140\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ »

Pero estas tres cantidades deben ser iguales, cada una de por sí, á la capacidad 1 del pilon. Expresándolo así por ecuaciones, tendremos:

$$70\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad * = \frac{1}{70}$$
$$84\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)=1 \qquad \frac{1}{x}+*+\frac{1}{z}=\frac{1}{84}$$
$$140\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1 \qquad *+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{140}$$

De las cuales resulta:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{70}+\frac{1}{84}-\frac{1}{140}=\frac{2}{105},\ x=105.$$

Ademas:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{70}-\frac{1}{105}=\frac{1}{210},\ y=210$$
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{140}-\frac{1}{210}=\frac{1}{420},\ z=420$$

Es decir, que los caños A, B y C llenan el pilon en 105, 210 y 420 minutos respectivamente.

Los tres caños juntos, en 1 minuto, llenarán la parte de pilon representada por la suma $\frac{1}{105}+\frac{1}{210}+\frac{1}{420}$

Luego en llenar la capacidad 1 del pilon tardarán

$$\frac{1}{\frac{1}{105}+\frac{1}{210}+\frac{1}{420}} = 60 \text{ minutos}.$$

Ejemplo 6.°—Los compañeros A y B pusieron c pesetas en una sociedad, el primero por m meses, y el segundo por n meses, y entre capital é intereses sacaron p y q pesetas respectivamente. ¿Cuál fué la parte del capital c que puso cada uno?

Si A puso x pesetas por m meses, le corresponden mx unidades de interés (Ejemplo 4.°). Ganó $p-x$ pesetas y, por lo tanto, 1 unidad de interés vale $\frac{p-x}{mx}$ pesetas.

El compañero B puso $c-x$ pesetas por n meses y adquirió así el derecho á $n(c-x)$ unidades de interés; y 1 unidad de este interés, dada su ganancia $q-(c-x)$ pesetas, vale $\frac{q-(c-x)}{n(c-x)}$ pesetas. Pero las unidades de interés deben valer lo mismo: luego

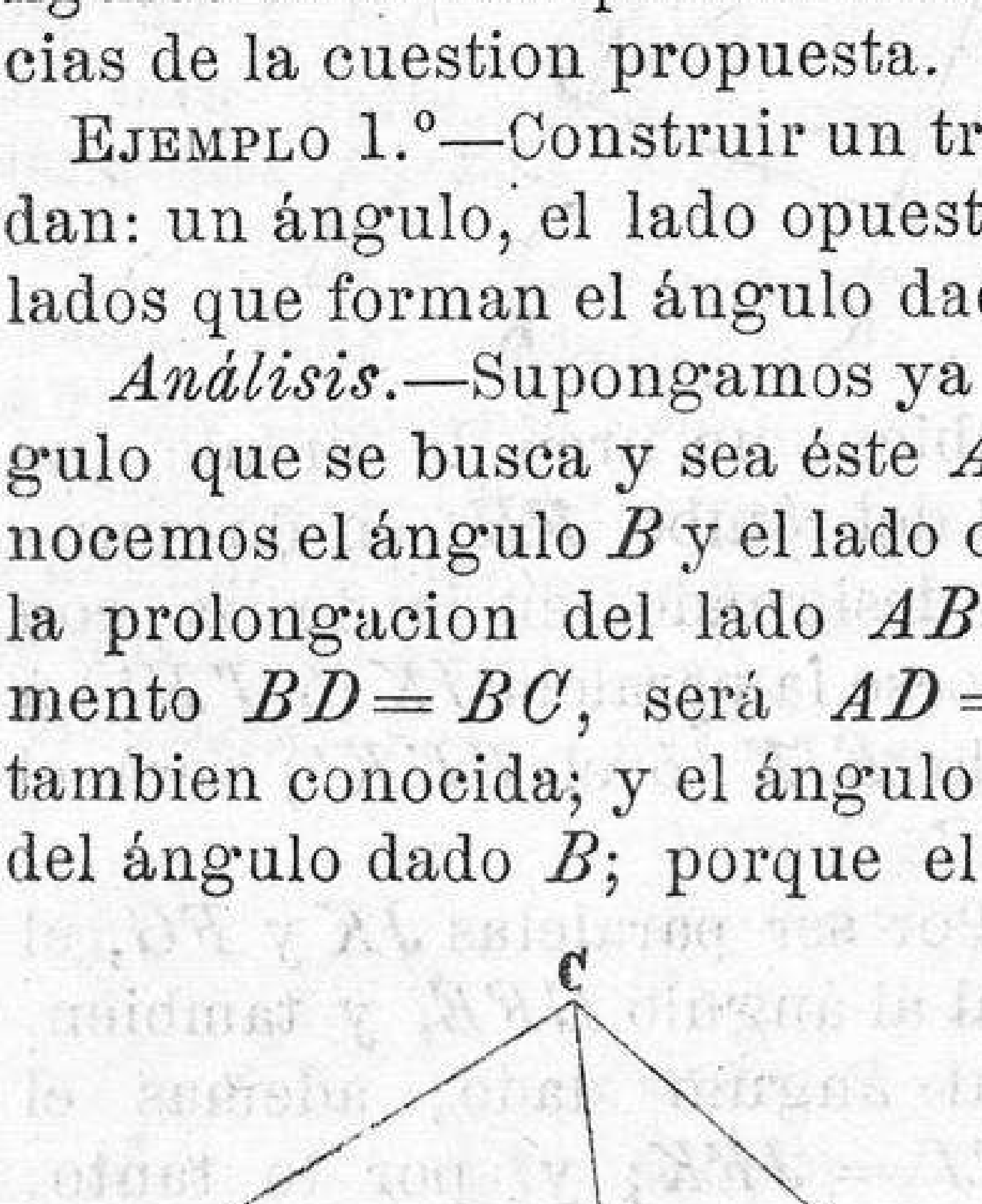
$$\frac{q-(c-x)}{n(c-x)}=\frac{p-x}{mx}.$$

El desarrollo de esta condicion exige que se resuelva una ecuacion cuadrática.

22. Construcciones, segun el método analítico. Se construye arbitrariamente la figura que se busca; y valiéndose de los elementos de la figura arbitraria se construyen aquellos que deben tener una magnitud ó una posicion dada. Mediante esta construccion y líneas auxiliares convenientes, se obtienen figuras auxiliares que son determinadas, segun leyes geométricas, por los datos del problema. Constrúyense despues, en cuanto sea posible, por medio de los datos, las figuras auxiliares; y por éstas de nuevo la figura demandada. Así se patentizan las condiciones á que deben sujetarse los datos para que el problema sea soluble, y cuántas figuras diferentes pueden satisfacer á las exigencias de la cuestion propuesta.

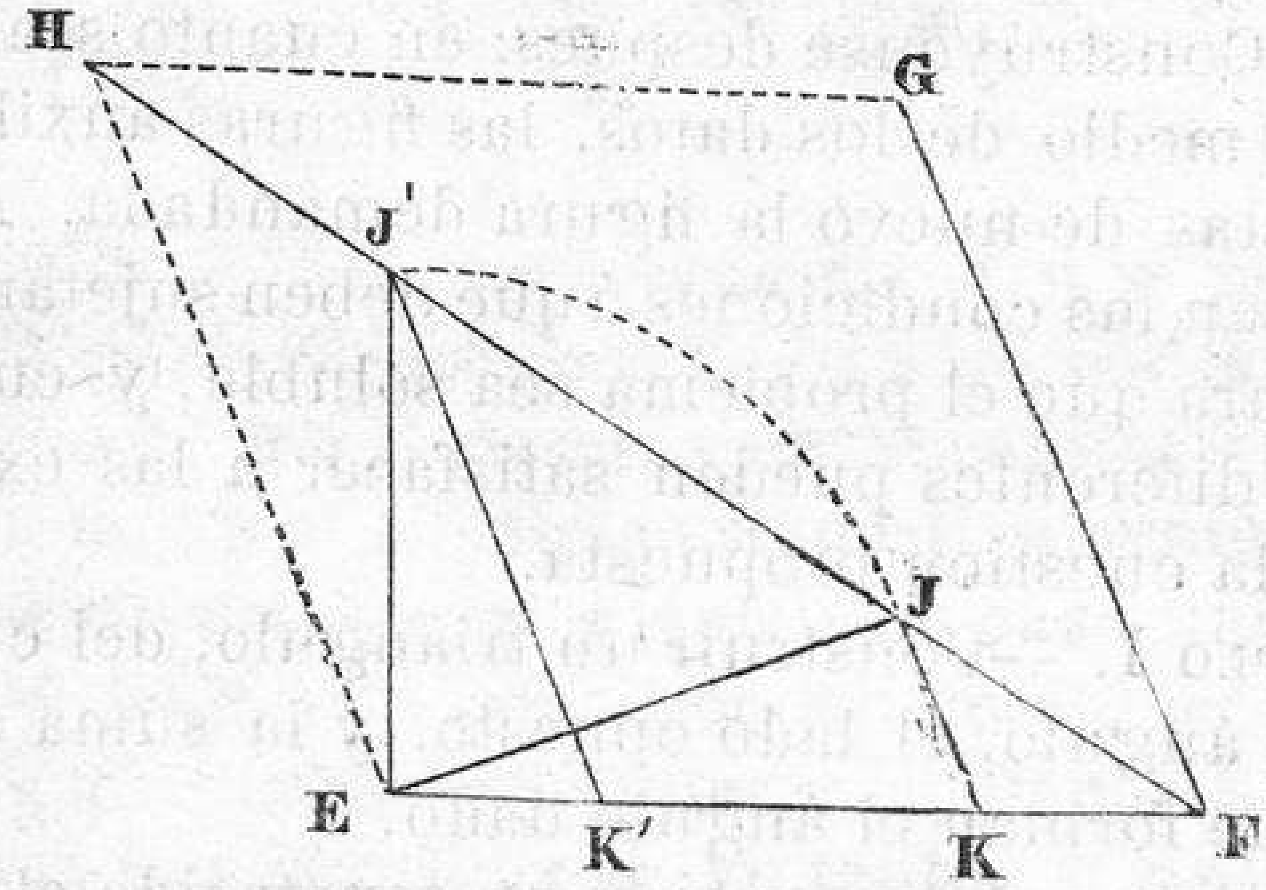
Ejemplo 1.º—Construir un triángulo, del cual se dan: un ángulo, el lado opuesto, y la suma de los lados que forman el ángulo dado.

Análisis.—Supongamos ya construido el triángulo que se busca y sea éste ABC: en el cual conocemos el ángulo B y el lado opuesto AC. Si sobre la prolongacion del lado AB tomamos un segmento $BD = BC$, será $AD = AB + BC$, suma tambien conocida; y el ángulo CDA será la mitad del ángulo dado B; porque el triángulo DCB es isósceles por construccion, y aquel ángulo B es externo á este triángulo. Ahora bien, en el triángulo auxiliar ADC conocemos el ángulo D, el lado opuesto CA, y el lado adyacente AD; y podemos, por



consecuencia, construir este triángulo auxiliar, y por su mediacion, el que buscamos.

Construccion.—Trácese la recta EF igual á la suma dada, y en su extremo F el ángulo GFE igual al ángulo dado; y complétese el rombo $EFGH$, en el cual será el ángulo $HFE = \frac{1}{2} GFE$. Alrededor de E como centro, descríbase, con un rádio igual



al lado conocido tambien, un arco de círculo que cortará á la diagonal del rombo FH, en dos puntos, por lo general, designados en la figura con las letras J y J'. Trácese la paralela JK (ó $J'K'$) á la FG, y el triángulo EJK (ó el $EJ'K'$) será el que buscábamos.

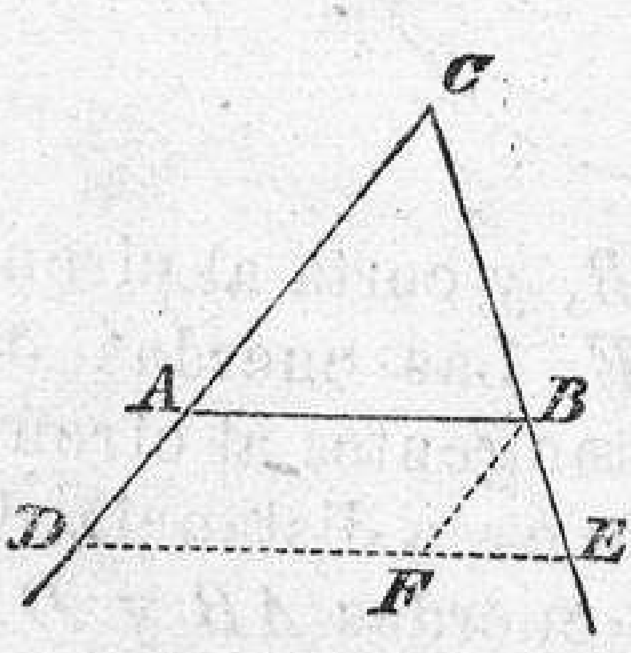
Demostracion.—Por ser paralelas JK y FG, el ángulo JKE es igual al ángulo GFE, y tambien, en consecuencia, al ángulo dado; ademas el ángulo $KJF = GFJ = JFK$; y, por lo tanto, $KJ = KF$; y de resultas: $EK + KF = EF =$ la suma dada. Y, finalmente, EJ es igual al lado conocido. Lo mismo se demuestra que el triángulo $EJ'K'$ satisface á las condiciones del problema.

Determinacion.—El problema es soluble cuando la diagonal FH sea alcanzada por el círculo trazado alrededor de E; y así sucederá siempre que el lado dado no sea menor que la normal á la diagonal FH desde el punto E: normal que es precisamente la mitad de la otra diagonal EG, del rombo.

Las dos soluciones encontradas para el problema no son en el fondo diferentes: lo cual vale tanto como decir que los dos triángulos EJK y $EJ'K'$ son congruentes (iguales ó superponibles). Para demostrar esto, recordaremos desde luego que dichos dos triángulos tienen dos lados, EJ y EJ', iguales. En el rombo $EFGH$, por otra parte, son tambien congruentes los triángulos EFJ y EHJ'; y en consecuencia, $KEJ = J'EH = EJ'K'$. Luego los triángulos en cuestion tienen un lado y los dos ángulos adyacentes respectivamente iguales.

Ejemplo 2.º—Construir un triángulo, conociendo un ángulo, el lado opuesto, y la razon de los lados que forman el ángulo dado.

Análisis.—Sea ABC el triángulo que buscamos; C el ángulo dado; AB el lado opuesto, tambien dado; y $BC : CA$ la razon dada. Si por un punto cualquiera D de la recta CA se traza una paralela á la AB que corte en E al lado CB, tendremos: $EC : CD = BC : CA$ de magnitud conocida. Si por el punto B trazamos una paralela á CA que corte en F á la

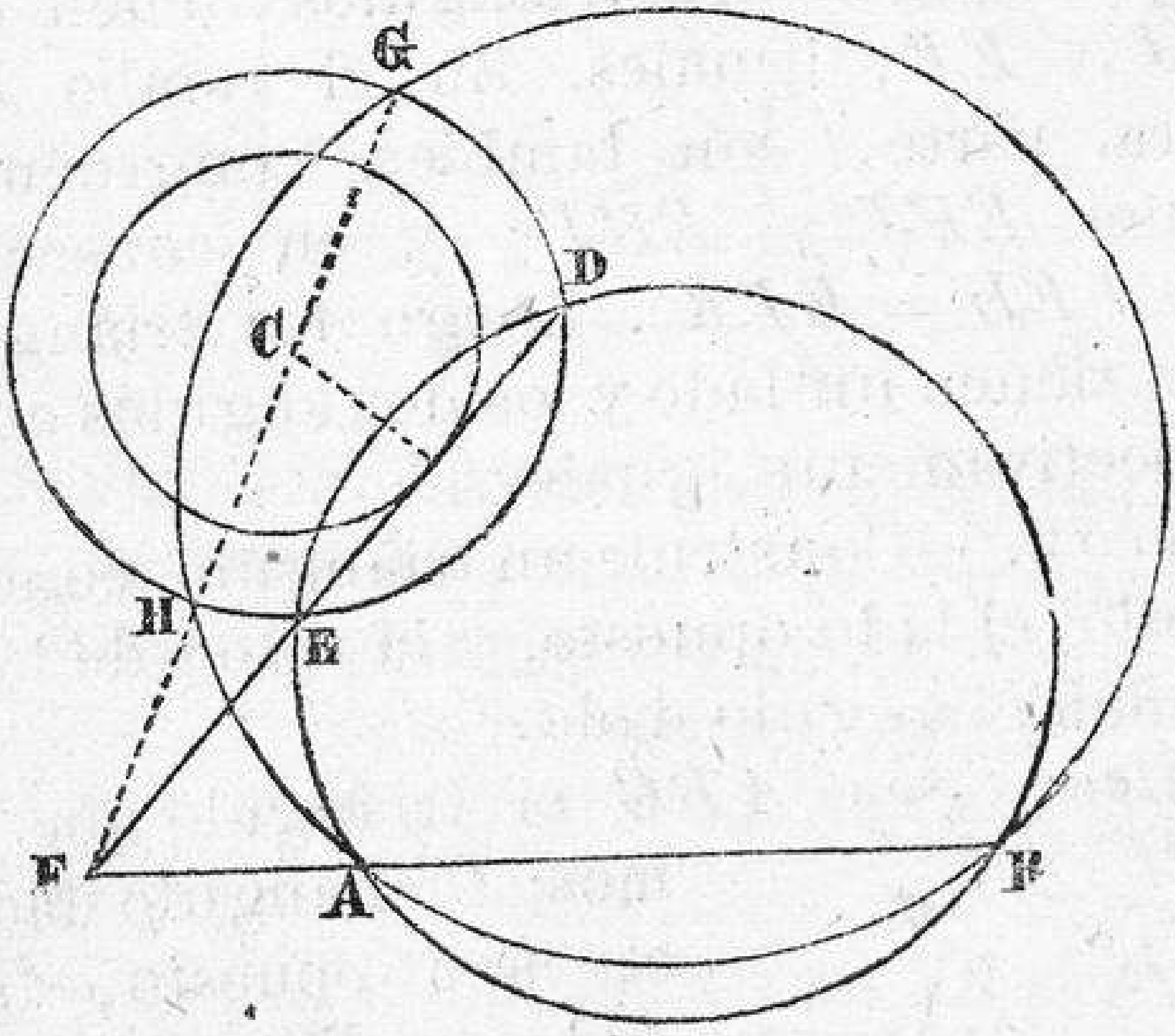


recta *DE*, será $DF = AB$ tambien de magnitud conocida. Con los datos del problema, por consecuencia, podremos construir la figura auxiliar *CDEF* y por ella construir el triángulo pedido.

Este problema es de fácil solucion, cualesquiera que sean los datos.

Ejemplo 3.º—Dados dos puntos, un círculo y una cuerda del mismo, describir otro círculo que pase por los dos puntos dados y corte del círculo dado un arco cuya cuerda sea igual á la cuerda dada.

Análisis.—Sea *ABDE* el círculo pedido que pasa



por los dos puntos dados *A* y *B*, y corta al círculo dado *(C)*, segun el arco *DE*. Las cuerdas del círculo *(C)*, iguales á *DE*, son tangentes al círculo concéntrico con *(C)*, cuyo rádio es la distancia del centro *C* á la cuerda *DE*. Las cuerdas *AB* y *DE*, prolongadas, se cortan en un punto *F*, de tal modo que $FA.FB = FD.FE$. Si, pues, por el mismo punto F trazamos una recta cualquiera que corte al círculo (C) en los puntos G y H, tambien será $FD.FE = FG.FH$; y, por lo tanto,

$$FA.FB = FG.FH:$$

lo cual prueba que el punto H cae sobre el círculo ABG. Luego mediante el círculo auxiliar ABG puede hallarse el punto F, y mediante una tangente determinada del círculo menor cuyo centro es C, el círculo que buscamos ABD.

Construccion.—Por los dos puntos dados A y B y un punto cualquiera G del círculo dado (C), descríbase el círculo ABG que cortará al (C) en otro punto más, H. Las rectas AB y GH se cortan en F. En el círculo (C) trazo una cuerda de la longitud dada, y el círculo concéntrico, tangente á esta cuerda. Por el punto F las tangentes á este círculo concéntrico, que cortarán al círculo (C) en los puntos D y E, D' y E'; y el círculo ABD ó el ABD' será el pedido.

Demostracion.—La cuerda DE del círculo (C) tiene la longitud pedida; porque es tangente al círculo concéntrico. El punto E cae sobre el círculo ABD; porque se verifica la igualdad $FA.FB = FG.FH$, en el círculo $ABGH$; la $FG.FH = FD.FE$ en el círculo (C); y, por consecuencia, tambien esta otra: $FA.FB = FD.FE$. Lo mismo para $D'E'$.

Determinacion.—Este problema, siempre que CF sea mayor que el rádio del círculo auxiliar concéntrico, admite dos soluciones diversas, que dejarán de serlo cuando la cuerda dada sea un diámetro; en cuyo caso el círculo concéntrico se reduce á su centro. Cuando, en particular, $AC=BC$, las cuerdas AB y GH, y DE y DE' serán paralelas; mas no sufrirán por eso modificacion esencial las soluciones del problema.

LIBRO PRIMERO.

LAS ECUACIONES, EN GENERAL; Y LAS FUNCIONES Y ECUACIONES, CUADRÁTICAS, EN PARTICULAR.

IV. Las ecuaciones.

(HEIS.-60 y 64).

23. Llámase *identidad*, *ecuacion idéntica* (*), la igualdad cuyos miembros son iguales incondicionalmente, esto es: para valores cualesquiera de las indeterminadas contenidas en ellos. Por ejemplo, las igualdades

$$a+b=b+a$$
$$a-b+(b-c)+(c-a)=0$$
$$(a+b)c=ac+bc$$
$$(a-b)c+(b-c)a+(c-a)b=0$$

se verifican, sean cualesquiera los valores de las indeterminadas a, b, c; y son, por lo tanto, identidades.

(*) *Identitas* de *idem*, traduccion latina de ταυτότης. La expresion de *ecuacion analítica* que se encuentra en algunos libros empleada para sustituir á la de identidad, no parece admisible despues de lo que acerca del *Método analítico* hemos observado.

Toda igualdad de fórmulas, cuya exactitud se demuestre en la Aritmética, es una identidad.

La igualdad no será idéntica cuando uno de sus miembros, para ciertos valores de las indeterminadas, adquiera un valor diferente del que tenga el otro miembro. La ecuacion $a+bx+cx^2+dx^3+\ldots=0$ será exacta, ó se verificará para cualquier valor de x, en el solo caso de ser idéntica, esto es: sólo cuando sean $a=0$, $b=0$, $c=0\ldots\ldots$ Pues, en el caso contrario, cuando a fuese diferente de cero, el polinomio $a+bx+cx^2+\ldots\ldots$ para $x=0$, sería diferente de cero. Ademas, para que

$$bx+cx^2+dx^3+\ldots.=x(b+cx+dx^2+\ldots..)$$

desaparezca ó se anule, para todo valor de x, es necesario que $b+cx+dx^2+\ldots\ldots$ se anule para todo valor de x, y para esto debe ser $b=0$. Etc., etc.

24. La *ecuacion* (*æquatio*), en su rigoroso sentido, no es, en general, idéntica; y se *establece* la igualdad entre sus miembros para determinar la *incógnita* contenida en ellos. Así, la ecuacion $4x+3=23$ no es idéntica; porque $4x+3$ es, en general, diferente de 23. La indeterminacion de x desaparece mediante la ecuacion, idéntica en el solo caso de ser $x=5$.

Todo valor de la incógnita que satisface á la ecuacion, ó que hace á la ecuacion idéntica (que la verifica) se llama *raiz de la ecuacion*.

Tambien las raizes de los números son raizes de ecuaciones. Así, $\sqrt[n]{a}$ es una raiz de la ecuacion $x^n=a$, para la incógnita x.

Resolver una ecuacion respecto de la incógnita vale tanto como hallar las raizes de dicha ecuacion.

Si debe verificarse $ax + b = 0$, será $ax = -b$, y $x = -b : a$, esto es: la ecuacion $ax + b = 0$, para la incógnita x, tiene la raiz $-b : a$.

Sabemos (Arit. univ. 40) que un producto sólo puede anularse cuando uno de sus factores sea cero. Por consecuencia, la ecuacion

$$(ax + b)(cx - d) = 0$$

para la incógnita x, puede ser satisfecha tanto por la ecuacion $ax + b = 0$ como por la ecuacion $cx - d = 0$: lo cual manifiesta que las raizes de la ecuacion propuesta son $-b : a$ y $d : c$; y, por lo tanto, que la incógnita x es determinada de dos maneras, mediante dicha ecuacion.

Una *identidad* es *apodíctica* (demostrativa); un miembro de ella es igual al otro para valores cualesquiera de las indeterminadas. Una *ecuacion* es *hipotética* (problemática); uno de sus miembros es igual al otro cuando la incógnita recibe un valor determinado.

25. De una ecuacion dada, sea ó no idéntica, pueden deducirse otras ecuaciones *equivalentes* (congruentes), de la misma significacion, ejecutando con sus dos miembros las mismas operaciones aritméticas.

I. Puede trasladarse ó trasportarse un término de un miembro al otro miembro, con el signo cambiado; ó bien, dicho término puede sumarse con los dos miembros, ó sustraerse de los mismos. Así, de la ecuacion $ax + b = c - dx$ se deduce esta otra: $ax + dx = c - b$.

En particular, una ecuacion puede *reducirse á* *cero*, trasportando todos los términos de un miembro al otro. Tambien pueden cambiarse los signos de todos los términos. Por ejemplo, las ecuaciones

$$a - \frac{x}{b} = \frac{x}{c} - d$$

$$a - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} + d = 0$$

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - a - d = 0$$

son equivalentes (congruentes) y pueden mútuamente sustituirse. Si una de ellas es idéntica, lo son todas; una raiz de una de ellas es tambien raiz de las otras.

II. Todos los términos de una ecuacion pueden ser multiplicados ó divididos por un mismo número (á excepcion del 0 y el ∞). Si existen en la ecuacion términos fraccionarios, mediante la multiplicacion por su mínimo comun denominador, puede hallarse otra ecuacion que sustituya á la propuesta. Son, pues, equivalentes (congruentes) las ecuaciones

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \text{ y } ax^2 + bx + c = 0$$

con tal que a no sea 0.

Lo son tambien

$$\frac{x}{b-x} + \frac{x}{c} + a = 0$$

y

$$cx + (b-x)x + ac(b-x) = 0;$$

porque el multiplicador $c(b-x)$, mediante el cual se deduce esta última ecuacion de la primera, es cero para $x=b$, y este valor de x no satisface á la ecuacion propuesta.

Lo son asimismo

$$\frac{1}{x}-\frac{1-x}{x(1+x)}+3=0 \quad \text{y} \quad 3+5x=0;$$

porque el multiplicador $1+x$ es cero para $x=-1$: valor de x que no satisface á la ecuacion dada.

No son congruentes las ecuaciones

$$ax^3+bx^2+cx=0 \quad \text{y} \quad ax^2+bx+c=0;$$

porque $x=0$ satisface á una de ellas, pero no á la otra.

III. Los dos miembros de una ecuacion pueden ser elevados á la misma potencia (potenciados por un mismo número); todo número puede ser elevado á las potencias cuyos exponentes sean cada uno de los dos miembros de una ecuacion (potenciado por cada uno de los miembros de una ecuacion); de los dos miembros puede ser extraida la misma raiz, ó tomado el mismo logaritmo; y las ecuaciones resultantes, en general, serán congruentes. Lo son, por ejemplo:

$$\sqrt[n]{a+bx}=c \quad \text{y} \quad a+bx=c^n$$

$$log.\ nat.\ (a+bx)=c \quad \text{y} \quad a+bx=e^c$$

con tal que la raiz y el logaritmo no reciban mayor significacion de la contenida en c

$$(a+bx)^m=c \quad \text{y} \quad a+bx=\sqrt[m]{c}$$

$$a^{b+cx}=d \quad \text{y} \quad b+cx=log\,d : log\,a.$$

Por el contrario, las ecuaciones

$$(a+bx)^m=(c+dx)^m \quad \text{y} \quad e^{a+bx}=e^{c+dx}$$

tienen mayor extension que la ecuacion

$$a+bx=c+dx. \text{ Etc., etc.}$$

Las trasformaciones (I) de una ecuacion fueron llamadas, segun el lenguaje de los matemáticos árabes (*), *Álgebra* y *Almocabala (restitutio et oppositio)*. De aquí procede el uso de la palabra *Álgebra* en su sentido lato para designar la Aritmética universal (el Cálculo literal), y en su propio y vulgar concepto para designar la Teoría de las ecuaciones no idénticas, y más exactamente la de las funciones y ecuaciones algebráicas.

26. Para determinar la especie de una ecuacion dada, debe ésta ordenarse respecto de una indeterminada (la incógnita). Si en la ecuacion sólo existen funciones racionales (17) de la indeterminada, es preciso (25):

Reducir la ecuacion á cero.

Quitar los divisores en que entre la indeterminada.

Desarrollar los paréntesis en los que la indeterminada figure.

Reunir los términos que contengan la indeterminada en sus potencias 0, 1, 2, respectivamente.

La ecuacion propuesta será idéntica (23) cuando despues de ordenada, su otro miembro tenga tambien el valor cero.

La ecuacion no será idéntica, y se denominará

(*) Nesselmann, *Historia del Álgebra*, págs. 40 y sig. Aún hoy llaman en España *algebristas* á los cirujanos.

ecuacion del grado m^o respecto de la incógnita, si en la ecuacion ordenada figura la incógnita con el exponente m, pero no con otro exponente mayor que m; siendo, por lo tanto, uno de sus miembros cero; y el otro, una funcion entera del grado m, respecto de la incógnita (16). Las ecuaciones del 2.º, 3.º y 4.º grado respecto de una incógnita, llevan el nombre de *cuadráticas*, *cúbicas* y *bicuadráticas*, respectivamente. Una ecuacion ordenada se llama *pura* (*pura*, binómica) si contiene un solo término incógnito (una potencia de la incógnita); en los demas casos se apellida *impura* ó *mixta* (*affecta*, trinómica, polinómica).

La ecuacion $ax^4 + bx^2 + c = 0$ es de 2.º grado para la incógnita x^2. La ecuacion

$$a + b\sqrt[3]{x} + c\sqrt[3]{x^2} + dx = 0$$

es de 3.^{er} grado para la incógnita $\sqrt[3]{x}$.

Una ecuacion pura se resuelve, aislando el término incógnito en un miembro, y quitando á la incógnita su coeficiente mediante la division. Dada, por ejemplo, la ecuacion pura $ax^m + b = 0$, será

$$ax^m = -b, \quad x^m = -\frac{b}{a}, \quad x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}.$$

La resolucion de la ecuacion $a(x-b)(x+c) = 0$ respecto de x, pide la de las dos ecuaciones $x - b = 0$ y $x + c = 0$ (24).

La ecuacion $a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ respecto de x, contiene una raiz nula, ó una raiz infinita, segun que a_0, ó a_m se anule. Puesto que la ecuacion dada es satisfecha por el valor $x=0$, si es $a_0=0$.

Por otra parte:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots = x^m \left(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \dots \right)$$

El polinomio incluso en el paréntesis difiere de a_m, creciendo x suficientemente, en una cantidad tan pequeña como queramos, y es arbitrariamente pequeño en el supuesto de ser $a_m = 0$.

27. Si la ecuacion dada contiene radicales incógnitos (funciones algebráicas irracionales de la incógnita) (18), todavía podrá ordenarse segun potencias de la incógnita con exponentes enteros. Esta trasformacion, cuando no existen potencias diferentes de la raiz, se efectúa por la elevacion á potencias, despues de haber aislado un radical en uno de los miembros de la ecuacion.

Sea la ecuacion

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = a \quad \text{ó} \quad \sqrt[4]{x^3} = a - \sqrt{x}.$$

Elevándola al cuadrado, y recordando que la 4.ª raiz es 4-forme, tendremos:

$$\pm x\sqrt{x} = a^2 - 2a\sqrt{x} + x, \text{ ó sea } (\pm x + 2a)\sqrt{x} = a^2 + x.$$

Cuadrando de nuevo se obtiene la ecuacion

$$x^3 - (1 \pm 4a)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0.$$

En toda fórmula algebráica que deba anularse, es preciso tener en cuenta su multiplicidad de valores. Puede demostrarse que el producto de los valores conjugados de una fórmula algebráica, la norma de dicha fórmula es racional (ARIT. UNIVERSAL 85. Véase adelante el cap. X). Por ejemplo, la fórmula $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ tiene 8 valores, que son, dos á dos, igualmente opuestos. El producto de los 4 valores diferentes

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$
$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})$$

es igual á

$$2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2.$$

Cuando p, q y r son funciones racionales de una incógnita, la ecuacion

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=0$$

es congruente con la ecuacion

$$2pq+2pr+2qr-p^2-q^2-r^2=0.$$

28. En general, una ecuacion no idéntica puede considerarse como la condicion para que una funcion determinada de la incógnita sea nula (*).

Una ecuacion no idéntica se llama *algebráica* ó *trascendente*, segun que la funcion de la incógnita, que es igual á cero, sea algebráica ó trascendente (18). Toda ecuacion algebráica puede considerarse como la condicion ó la exigencia de que desaparezca una funcion *entera* y determinada de la incógnita (27).

(*) Este concepto se debe principalmente á DESCARTES, *Geom.*, III.—Anteriormente se acostumbraba á aislar el término conocido (*homogeneum comparationis*, segun VIETA).

V. Sistemas de ecuaciones con varias incógnitas; y, en particular, de ecuaciones lineales.

(Heis.—65 y 68.)

29. Por la exigencia de que varias indeterminadas deben satisfacer á una ecuacion (no idéntica) queda en cierto modo limitada la infinita multitud de los valores de una de ellas, y la de las restantes sin límite ninguno. Cada una de las indeterminadas puede considerarse como incógnita que se determina mediante la ecuacion (24). Una ecuacion con varias incógnitas se dice *indeterminada (indeterminata)* porque sirve para determinar una de aquéllas de diferentes maneras, segun los valores arbitrarios que se atribuyan á las otras incógnitas. Un sistema de valores de todas las incógnitas ($x=a$, $y=b$.....), que satisface á la ecuacion, se denomina una *solucion* (*solutio*) de la ecuacion indeterminada.

Una ecuacion indeterminada se apellida *algebráica*, cuando lo es respecto de cada una de las incógnitas; y *trascendente*, cuando es trascendente respecto de una incógnita. Toda ecuacion algebráica, indeterminada, puede considerarse como la exigencia de que debe anularse una funcion entera de las incógnitas (28); su grado está definido por el mayor número de factores incógnitos que contenga uno de sus términos (26 y 16). Las ecuaciones indeterminadas de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° grado, llevan el nombre de *lineales*, *cuadráticas*, *cúbicas* y *bicuadráticas*, respectivamente.

30. Cuando las funciones A, B..... contienen las mismas incógnitas, una solucion de la ecuacion indeterminada $A=0$ no es, en general, una solucion tambien de $B=0$. Toda solucion comun de las ecuaciones $A=0$ y $B=0$, se llama *solucion del sistema* de las ecuaciones $A=0$ y $B=0$. Dos sistemas son *congruentes* (equivalentes) siempre que toda solucion del uno lo sea tambien del otro.

Toda solucion del sistema, $A=0$, $B=0$, es tambien solucion de la ecuacion *compuesta* $rA+sB=0$, sean cualesquiera los multiplicadores r y s. Toda solucion del sistema, $A=0$, $rA+sB=0$, lo es de $sB=0$, esto es, de $B=0$, si s no es 0. El sistema compuesto, $rA+sB=0$, $r'A+s'B=0$, es congruente con el sistema simple $A=0$, $B=0$, siempre que $rs'-r's$ no sea cero; porque toda solucion del sistema compuesto es solucion tambien, tanto de la ecuacion $s'(rA+sB)-s(r'A+s'B)=(rs'-r's)A=0$, como de $(rs'-r's)B=0$.

Puede suceder que una ecuacion, compuesta de las incógnitas, no contenga una de ellas, ó algunas; que no contenga ninguna, y que sea una identidad.

31. *Eliminar* (segun Euler, ó *exterminar*, segun Newton) una incógnita de dos ecuaciones es componer con éstas (30), mediante multiplicadores apropiados, otra ecuacion que no contenga dicha incógnita.

Si las dos ecuaciones son de *primer grado* respecto de la incógnita que se procura eliminar, se multiplica la primera ecuacion por el coeficiente que tenga la incógnita en la segunda ecuacion, y la segunda ecuacion por el coeficiente negativo que tenga la incógnita en la primera; sumándose despues las dos ecuaciones así multiplicadas para obtener la que se busca. Cuando los coeficientes tengan un divisor comun, serán los multiplicadores los cocientes por este divisor comun de los coeficientes referidos. Para eliminar y de las ecuaciones

$$6x+5y-7=0$$
$$-9x+2y+3=0$$

se multiplica la primera por 2, la segunda por -5, y se halla despues, sumando, la ecuacion $57x-29=0$. Para eliminar la x se multiplica la primera por 3 y la segunda por 2, y se halla la siguiente: $19y-15=0$. Para eliminar x de las dos ecuaciones

$$ax+B=0$$
$$cx+D=0$$

se multiplica la primera por c, la segunda por $-a$, y sumando luégo se halla $Bc-aD=0$, que expresa la condicion para que la segunda de las ecuaciones propuestas sea congruente con la primera.

Del sistema $x+y=a$, $x-y=b$, se deduce por adicion $2x=a+b$, y por sustraccion $2y=a-b$. El sistema compuesto es congruente con el dado y produce la solucion $x=\frac{1}{2}(a+b)$, $y=\frac{1}{2}(a-b)$.

Del sistema $x:y=a$, $xy=b$ se desprende por multiplicacion $x^2=ab$, que puede sustituir á la segunda de las ecuaciones dadas. Del sistema

$$x^2-y^2=a,\ x+y=b,$$

se deduce por division la ecuacion $x-y=a:b$ que sólo en parte puede reemplazar á la primera. Tambien satisfacen al sistema dado infinitos valores, igualmente opuestos, de x é y.

32. Si una ecuacion, compuesta de las m ecuaciones de un sistema dado, fuese una identidad, toda solucion, comun á $m-1$ ecuaciones de entre las dadas, sería tambien una solucion de la m^a ecuacion restante. Si, por ejemplo, fuese una identidad $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$, para todos los valores de las incógnitas se verificaría la condicion

$$C=-\frac{\alpha}{\gamma}A-\frac{\beta}{\gamma}B$$

Lo cual quiere decir que al lado de las ecuaciones $A=0$ y $B=0$, la ecuacion $C=0$ es supérflua; y, por lo tanto, que las ecuaciones del sistema $A=0$, $B=0$, $C=0$ *no son independientes* entre sí.

Mas, cuando en la ecuacion compuesta sean ceros los coeficientes solamente de todas las incógnitas, al sistema dado no le satisfacen valores finitos, sino valores *infinitos* de las mismas. Del sistema, por ejemplo:

$$x+y=a, \quad mx+my=b$$

se deduce la ecuacion compuesta $0x+0y=ma-b$. Con la condicion $ma-b=0$, esta ecuacion compuesta es idéntica, y la segunda de las ecuaciones dadas es supérflua. Si $ma-b$ no fuese cero, haciendo $x=u:t$, $y=v:t$, del sistema

$$u+v=at, \quad mu+mv=bt$$

se deduce $0=(ma-b)t$, esto es: $t=0$ y $u+v=0$. Lo cual prueba que el sistema dado es satisfecho por valores infinitos de x y de y, que son igualmente opuestos.

El sistema

$$-x+2y-3z=18$$
$$2x+3y+5z=24$$
$$x+5y+2z=43$$

bajo la condicion de que x, y, z sean finitas, es *imposible*; porque de las dos primeras ecuaciones se halla por adicion esta otra, $x+5y+2z=42$, que está en contradiccion con la tercera. Haciendo, como ántes, x, y, z iguales á quebrados con el denominador t, los segundos miembros de las ecuaciones propuestas resultarán, despues de la sustitucion de x, y, z por sus respectivos valores, multiplicados por t; y como $t=0$, por ser infinitos los valores expresados, conclúyese que éstos satisfacen al sistema dado; son entre sí como los números $-19:1:7$, y corresponden á este otro sistema:

$$-x+2y-3z=0$$
$$2x+3y+5z=0$$
$$x+5y+2z=0$$

del cual es una ecuacion supérflua.

El sistema

$$\begin{array}{rrrl} * & cy & -bz & =f \\ -cx & * & +az & =g \\ bx & -ay & * & =h \end{array}$$

bajo la condicion de que sean finitas x, y, z, es sólo posible cuando $af+bg+ch=0$. Pero con esta condicion, como es fácil ver, una de las tres ecuaciones se deduce de las otras dos, y el sistema, por consecuencia, es *indeterminado*.

33. Mediante n ecuaciones independientes entre sí, pueden ser determinadas otras tantas incógnitas de las mismas. La solucion del sistema propuesto será expresada uniforme ó multiformemente por raizes de ecuaciones, despues de las eliminaciones necesarias.

De 2 ecuaciones para las incógnitas x é y se deduce, por la eliminacion de y, otra ecuacion para x por la cual queda x determinada. De este modo la indeterminacion de las ecuaciones propuestas desaparece, y la incógnita y puede ser por cualquiera de ellas determinada. Si se dan 3 ecuaciones para las incógnitas x, y, z, se elimina z de 2 pares de ellas, y se encuentran así 2 ecuaciones para x é y. Et cætera, etc.

En general, es preciso componer un sistema *resolvente* del sistema dado, que sea congruente con éste. La primera ecuacion del sistema resolvente tiene una sola incógnita y la determina; la segun- ecuacion, ademas de la primera incógnita, contiene otra sola, y sirve para determinar esta segunda incógnita mediante la primera; la tercera ecuacion, ademas de las dos primeras incógnitas, contiene otra sola, y sirve para determinar esta tercera incógnita mediante las dos primeras. Etc., etc.

Si las ecuaciones con n incógnitas son independientes entre sí, el sistema que comprenda n ecuaciones será *determinado;* el que se componga de $n—k$ ecuaciones, será *k veces indeterminado*; y el de más de n ecuaciones, *imposible* (excluyendo tambien soluciones imaginarias ó complejas).

34. Para resolver un *sistema lineal*, esto es, un sistema de ecuaciones lineales, cuando el número

de las ecuaciones es igual al de las incógnitas, se forman, por la eliminacion de incógnitas, sistemas con ménos incógnitas, hasta llegar á una ecuacion con una incógnita. El valor de esta incógnita se pone en una ecuacion del sistema, inmediatamente anterior, para calcular el de otra incógnita; los valores hallados de las dos incógnitas nos servirán para calcular el de una tercera incógnita. Etc., etc.

Ejemplo 1.°:

$$\begin{array}{rcl|c|c}
5x-3y+2z & = & 4 & + & \\
x+4y-\ z & = & 3\frac{1}{6} & 2 & + \\
2x-3y+\ z & = & \frac{1}{2} & & + \\
\hline
7x+5y & = & 10\frac{1}{3} & - & \\
3x+\ y & = & 3\frac{2}{3} & 5 & \\
\hline
8x & = & 8,\ x=1 & & \\
y & = & \frac{2}{3} & & \\
z & = & \frac{1}{2} & &
\end{array}$$

Se elimina z de las dos primeras ecuaciones y de las dos últimas, y se obtiene así un sistema de dos ecuaciones para x é y. Para hacer la primera eliminacion, se multiplica por 2 la segunda ecuacion, y así multiplicada se suma con la primera; y para efectuar la segunda eliminacion, se suman, tales como están, las ecuaciones segunda y tercera. Del sistema compuesto se halla una ecuacion para x, mediante la eliminacion de la y entre las dos ecuaciones que constituyen dicho sistema. Despues de hallado el valor de x, se encuentra $y=3\frac{2}{3}-3x$; y finalmente: $z=\frac{1}{2}-2x+3y$.

Ejemplo 2.º:

$$
\begin{array}{lllll|l}
5u - 4x & \cdot & \cdot & = & 4 & -3 \\
3u + 4x + 5y & & \cdot & = & 27 & 5 \\
\cdot & 2x + 3y + 4z & & = & 14 & + \\
\cdot & \cdot & 3y - 4z & = & 7 & + \\
\hline
\cdot & 32x + 25y & \cdot & = & 123 & - \\
\cdot & 2x + 6y & \cdot & = & 21 & 16 \\
\hline
\cdot & \cdot & 71y \cdot & = & 213, & y=3 \\
\cdot & 2x & \cdot & = & 3, & x=\frac{3}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot \; 4z & = & 2, & z=\frac{1}{2} \\
5u & \cdot & \cdot & = & 10, & u=2
\end{array}
$$

En ciertos casos particulares, puede simplificarse el sistema propuesto, sustituyendo las incógnitas en él contenidas por funciones adecuadas: la suma, los valores recíprocos, etc., etc. de las mismas, que se consideran naturalmente como nuevas incógnitas. Calculadas estas nuevas incógnitas mediante el sistema simplificado, por el sistema de las sustituciones efectuadas se hallan las incógnitas del propuesto.

35. *Un sistema general de n ecuaciones lineales con n incógnitas*, contiene n^2 coeficientes de las incógnitas y n términos conocidos. Designando por i, k números cualesquiera de la série 1, 2, ... n; por x_1, x_2 ..... x_n las incógnitas; y por a_{ik} y u_i, el coeficiente de x_k en la ecuacion i^a, y el término dado de

esta misma ecuacion respectivamente, el sistema propuesto puede escribirse de este modo:

$$\begin{array}{l}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots.\; a_{1n}\,x_n = u_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots.\; a_{2n}\,x_n = u_2\,. \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = u_n
\end{array}$$

Para resolverlo se forma la determinante (ARITMÉTICA UNIV., XXVI) de grado n° de los coeficientes, á saber:

$$R = \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{array} \right|$$

y las determinantes del grado $(n-1)^{\circ}$, ó adjuntas (141) respectivas de los elementos de aquélla,

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{array}$$

Si la determinante R no es cero, se multiplican las ecuaciones dadas respectivamente por las adjuntas de los elementos de la columna k^a, y se suman despues ordenadamente. La suma de los segundos miembros será evidentemente

$$u_1\alpha_{1k} + u_2\alpha_{2k} + \ldots. + u_n\alpha_{nk};$$

y el coeficiente de una incógnita cualquiera, x_i tendrá por expresion la suma

$$a_{1i}\alpha_{1k} + a_{2i}\alpha_{2k} + \ldots. + a_{ni}\alpha_{nk}$$

que será R, ó *cero,* segun que los índices i y k sean iguales, ó desiguales. Lo cual prueba que desaparecen de la suma en cuestion los coeficientes de todas las incógnitas, á excepcion del coeficiente de la incógnita x_k, que es R; resultando, por último, la ecuacion con una incógnita

$$Rx_k = u_1 \alpha_{1k} + u_2 \alpha_{2k} + \ldots + u_n \alpha_{nk}$$

Y en esta ecuacion vemos que su segundo miembro, ó sea la expresion hallada para Rx_k, es la determinante del sistema de los coeficientes de las ecuaciones dadas, sustituyendo en él por u_1, u_2, u_n los correspondientes á la columna k^a.

36. I.—El sistema lineal homogéneo (35)

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \ldots\ u_n = 0,$$

al cual está subordinado un sistema lineal no homogéneo (19), tiene la solucion

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots\ x_n = 0$$

siempre que no sea cero la determinante $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$. Pues, segun ántes dijimos, al hallar el valor de Rx_k, para la incógnita x_1, y lo mismo puede decirse para todas, se halla la determinante de grado n:

$$\begin{vmatrix} u_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot \\ u_2 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot \\ u_3 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix} = Rx_1$$

despues de agregadas á la primera las columnas siguientes (146). En la expresion hallada para la incógnita x_1 son nulos los elementos de la primera columna, y, por consecuencia, $Rx_1 = 0$. Mas por hipótesis, no es $R=0$; luego deberá ser $x_1=0$. Y lo propio sucede con x_2, x_3 ..... etc., etc.

II. Cuando R es cero, y entre las subdeterminantes de grado $(n-1)$ hay *una* que no es cero, el sistema propuesto es *una vez* indeterminado. Desarrollando, en efecto, la determinante, segun los elementos de la primera columna, se halla (I) para x_1 la expresion

$$bu_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n = Rx_1 = 0.$$

Si b no es cero, al lado de las ecuaciones

$$u_2 = 0, \ldots\ u_n = 0,$$

es supérflua la ecuacion $u_1 = 0$.

Desarrollando la otra determinante, segun los elementos de su primera fila, se encuentra la expresion

$$ba_{11}x_1 + \beta_2 a_{12} + \ldots + \beta_n a_{1n} = 0;$$

y la solucion entónces del sistema será (7) para todas las x,

$$1 : x_2 : \ldots : x_n = b : \beta_2 : \ldots\ \beta_n.$$

Puesto que

$$b(a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots) = ba_{r1}x_1 + \beta_2 a_{r2} + \ldots$$

es cero, para $r=1, 2, \ldots n$. Acerca de las adjuntas b, b_2..... de una columna, y las adjuntas b, β_2..... de una fila (véase ARIT. UNIV. (148)).

III. Cuando las subdeterminantes del grado $(n-1)^0$ sean todas nulas, y entre las subdeterminantes del grado $(n-2)^0$ haya una que no sea nula, el sistema será 2 veces indeterminado. Porque para todas las x_1, x_2..... la subdeterminante de grado $(n-1)$, á saber:

$$\begin{vmatrix} u_i & a_{i3} & a_{i4} & . & . \\ u_3 & a_{33} & a_{34} & . & . \\ u_4 & a_{43} & a_{44} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2 & a_{i3} & a_{i4} & . & . \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 & a_{33} & a_{34} & . & . \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2 & a_{43} & a_{44} & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$=R_1x_1+R_2x_2$, es igual á cero; por ser nulas las subdeterminantes R_1 y R_2.

Desarrollando la primera determinante, segun los elementos de la primera columna, se halla:

$$cu_i+c_3u_3+.....+c_nu_n=0 \quad (i=1,\ 2).$$

Y esta ecuacion prueba que, cuando c no es cero, al lado de las ecuaciones $u_3=0$, $u_4=0$,.... $u_n=0$, las dos ecuaciones $u_1=0$ y $u_2=0$ son supérfluas (32).

Mediante el desarrollo de la segunda determinante, segun los elementos de la primera fila, se encuentra esta otra:

$$c(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2)+\gamma_3a_{i3}+.....+\gamma_na_{in}=0$$

y la solucion del sistema entónces, para todas las x_1 y x_2, será:

$$1:x_3:....:x_n=c:\gamma_3:.....:\gamma_n.$$

Puesto que

$$c(a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+a_{r3}x_3+..)=c(a_{r1}x_1+a_{r2}x_2)+\gamma_3 a_{r3}+..$$

es igual á cero: no solamente para $r=3, 4..... n$, sino tambien para $r=1, 2$. Y así podríamos hacer ulteriores y semejantes consideraciones.

VI. Las ecuaciones cuadráticas.

37. Una ecuacion cuadrática, con una incógnita (26), comprende generalmente 3 términos: uno con la incógnita elevada á la segunda potencia; otro con la incógnita elevada á la primera potencia; y el tercero sin incógnita. La forma general, pues, de una ecuacion cuadrática, con la incógnita x, es la siguiente:

$$ax^2+bx+c=0,$$

en la cual representan los coeficientes a, b, c, números cualesquiera, independientes de x.

En el caso particular $c=0$, desaparece tambien $ax^2+bx=x(ax+b)$; tanto porque desaparezca ó se anule el factor x, como porque se anule el otro factor $ax+b$; ó en otros términos: tanto por ser $x=0$, como por ser $x=-b:a$. Lo cual significa que la ecuacion $ax^2+bx=0$, tiene las dos raizes, 0 y $-b:a$.

En el caso particular $b=0$, la ecuacion cuadrática es pura (26). Trasponiendo, dividiendo y extrayendo la raiz se obtienen:

$$ax^2=-c,\quad x^2=-\frac{c}{a},\quad x=\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

La raiz cuadrada puede tomarse tanto positiva como negativamente (ARIT. UNIV. 83). Luego la ecuacion cuadrática pura $ax^2+c=0$ tiene dos raizes (reales ó imaginarias), igualmente opuestas: ó iguales y de signo contrario, segun se dice generalmente.

38. La fórmula ax^2+bx+c (funcion cuadrática de x) (16) mediante su multiplicacion por un factor apropiado, puede ser representada por dos términos: solamente de los cuales sea el primero un cuadrado positivo, dependiente de x; y el segundo, independiente de x (*). Así, por ejemplo, la funcion $3x^2+4x-7$ por su multiplicacion por 3 se cambia esta otra: $(3x+2)^2-25$, añadiendo y quitando 2^2.
$-3x^2+5x-7$, multiplicándola por -3.4 se convierte en la siguiente: $(6x-5)^2+59$; despues de haber sumado y sustraido 5^2.
ax^2+bx+c, mediante su multiplicacion por $4a$, y sumando y restando luego b^2, se trasforma en

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac.$$

Dedúcese de esto último que la ecuacion cuadrática general

$$ax^2+bx+c=0$$

es congruente con esta otra

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0.$$

(*) Este paso esencial para resolver las ecuaciones cuadráticas, se halla en EUCLIDES, *Elem.*, II, 6.

De la cual se desprenden sucesivamente:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac,\quad 2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Esta segunda expresion de x, que se usa cuando a es pequeño, se deduce de la primera teniendo presente que

$$(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})$$
$$=-b^2+(b^2-4ac)=-4ac.$$

La raiz cuadrada es biforme; y ademas real ó imaginaria, segun que el radicando sea positivo ó negativo (84). Por consecuencia: la ecuacion cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene tambien dos raizes que, suponiendo reales los coeficientes a, b y c, son:

reales diferentes,	cuando	sea	b^2-4ac	positivo;
reales iguales	»	»	»	cero;
complejas conjugadas		»	»	negativo.

Si fuese $a=0$, una raiz sería $-c:b$, y la otra tomaría un valor infinitamente grande (26).

La fórmula b^2-4ac, cuyo valor sirve para decidir acerca de la naturaleza de las raizes, es llamada por los modernos la *discriminante* de la ecuacion cuadrática considerada.

Cuando a y c son opuestos, es $4ac$ negativo; $-4ac$ positivo; tambien positivo b^2-4ac; y la ecuacion, por consecuencia, tiene entónces raizes reales diferentes.

Dignos son de tomarse en cuenta la suma y el producto de las raizes de la ecuacion cuadrática $ax^2+bx+c=0$, á saber:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

y

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Estas expresiones enseñan, en efecto, á calcular la suma y el producto de las raizes de una ecuacion cuadrática, más los signos correspondientes á las mismas, sin necesidad de conocerlas individualmente.

39. Las raizes de una ecuacion cuadrática pueden ser expresadas tambien goniométricamente. En efecto, siendo a, b y c números reales y positivos, la ecuacion

$ax^2+bx-c=0$, tiene las raizes reales $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$;

y la ecuacion

$ax^2+bx+c=0$, tiene las raizes reales $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

ó las raizes complejas $\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Para todos los casos, debemos calcular $\sqrt{c:a}=r$, y con esto tendremos tambien $ac=a^2r^2$.

Establezcamos, para el primero, la igualdad $b=2ar\cot\omega$. Mediante esta igualdad, se hallan las raizes

$$r(-\cot\omega\pm\sqrt{\cot^2\omega+1})=r\frac{-\cos\pm1}{\operatorname{sen}\omega}$$

ó, lo que es igual: $r\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$, y$-r\cot\frac{1}{2}\omega$; conocido el valor de $\operatorname{tang}\omega=2ar:b$.

Establezcamos, para el segundo caso, la igualdad $b=\dfrac{2ar}{\operatorname{sen}\omega}$. Mediante ella se encuentran las raizes

$$r\left(-\frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\pm\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\omega}-1}\right)=r\frac{-1\pm\cos\omega}{\operatorname{sen}\omega}$$

O sean los valores de $-r\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ y de $-r\cot\frac{1}{2}\omega$; conocido el de $\operatorname{sen}\omega=2ar:b$.

Establezcamos, para el tercer caso, la igualdad $b=2ar\cos\omega$. Mediante ella se encontrarán las raizes $r(-\cos\omega\pm i\operatorname{sen}\omega)$; ya conocido el valor de $\cos\omega=b:2ar$.

Las raizes de la ecuacion $ax^2-bx\pm c=0$, y las de la ecuacion $ax^2+bx\pm c=0$ son igualmente opuestas.

Más sencillamente pueden, segun GAUSS, calcularse los logaritmos de las raizes reales de una ecuacion cuadrática, por los logaritmos de los coeficientes de la misma, haciendo uso de las tablas logarítmicas convenientes. (VEGA'S *Sammlung mathematischer Tafeln von* HÜLSSE, 1840.)

40. La funcion cuadrática ax^2+bx+c es dos veces nula para los valores α y β de su incógnita x,

que son las raizes de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$; y puede ser así expresada, cualquiera que sea x, por el producto $a(x-\alpha)(x-\beta)$, en cuyo caso serán: $\alpha+\beta=-b:a$, y $\beta\alpha=c:a$.

DEMOSTRACION.–Segun la hipótesis, $a\alpha^2+b\alpha+c=0$; y, por consecuencia:

$$ax^2+bx+c=ax^2+bx+c-(a\alpha^2+b\alpha+c)$$
$$=a(x^2-\alpha^2)+b(x-\alpha)=(x-\alpha)(ax+a\alpha+b)$$

Lo cual quiere decir que la funcion ax^2+bx+c es divisible por $x-\alpha$; del mismo modo se probaría que tambien es divisible por $x-\beta$. Designando, pues, por q el cociente

$$(ax^2+bx+c):(x-\alpha)(x-\beta),$$

la identidad (23)

$$ax^2+bx+c=q(x-\alpha)(x-\beta)=qx^2-(\alpha+\beta)qx+\alpha\beta q,$$

exige que sean:

$$q=a, \quad (\alpha+\beta)q=-b, \quad \alpha\beta q=c.$$

Cuando la funcion cuadrática se anula para más de dos valores de x, será *identicamete nula*; ó nula para todo valor de x; y entónces a, b y c serán nulos. Pues, en la hipótesis de que x fuese diferente de α y de β, el producto $a(x-\alpha)(x-\beta)$ sólo podria anularse haciendo $a=0$. Del mismo modo se concluiría despues que $bx+c$ seria 0, para más de un valor de x, solamente en el caso de ser $b=0$ y $c=0$.

Cuando x sea real y no esté comprendido entre los valores reales α y β, el producto $a(x-\alpha)(x-\beta)$ tiene el mismo signo que a. Etc.

41. La funcion cuadrática ax^2+bx+c, cuando

la variable toma el valor $x = \frac{-b}{2a}$, adquiere el valor extremo $\frac{4ac - b^2}{4a}$: el cual será *un mínimo* ó *un máximo*, segun que a sea positivo ó negativo (14). En efecto, la funcion mencionada puede representarse (38) tambien como sigue:

$$\frac{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{b^2 - 4ac - (2ax + b)^2}{-4a}$$

En estas dos expresiones, el cuadrado $(2ax + b)^2$ que, siendo x real, no es negativo, se anula por el valor $x = -b : 2a$; y, en este supuesto, la primera expresion adquiere su mínimo valor cuando a sea positivo; y la segunda, su máximo valor cuando a sea negativo.

Observacion.—Por las mismas consideraciones, la funcion fraccionaria

$$x + \frac{a}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a}$$

suponiendo x positiva, alcanza su mínimo valor $2\sqrt{a}$, cuando sea $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$, ó bien $x = \sqrt{a}$.

Para hallar los valores de la variable x, que hacen máxima ó mínima la funcion fraccionaria

$$y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 3}$$

se buscarán los valores de y para los cuales tenga raizes reales la ecuacion en x

$$yx^2 - (3y + 1)x - 3y + 4 = 0.$$

Mas esta ecuacion tendrá raizes reales siempre que (38 y 40) no sea negativa la diferencia

$$(3y+1)^2-4y(4-3y)=21y^2-10y+1$$
$$=21\left(y-\tfrac{1}{3}\right)\left(y-\tfrac{1}{7}\right)$$

Y esta diferencia no será negativa, y, por lo tanto, x permanecerá real, mientras que y disminuya desde ∞ hasta $\frac{1}{3}$, y crezca desde $-\infty$ hasta $\frac{1}{7}$, En estos dos límites, $y=\frac{1}{3}$ é $y=\frac{1}{7}$, adquiere x el valor $\dfrac{3y+1}{2y}$: el cual se convierte en 3, ó en 5, respectivamente. Luego la funcion fraccionaria propuesta adquiere para $x=3$ un valor mínimo $y=\frac{1}{3}$, recibiendo para $x=5$ el valor máximo $y=\frac{1}{7}$.

42. Una forma cuadrática de n variables (19) comprende, en general, $\frac{1}{2}n(n+1)$ términos, en los que figuran los cuadrados de las variables y los productos binarios de las mismas; pero tambien puede ser expresada siempre por no más de n cuadrados variables, con ciertos coeficientes, positivos ó negativos (38).

Demostracion.—Si entre los términos de la forma propuesta, u, se halla un cuadrado de una variable, x, de tal modo que la mencionada forma tenga por expresion $u=ax^2+2px+v$: en la cual p represente una forma lineal de las variables restantes (fuera de la x) y v una forma cuadrática de estas mismas, se obtendrá fácilmente la forma

$$au=(ax+p)^2-(p^2-av)$$

en la que se manifiesta u expresada por un cuadrado y una forma cuadrática de $n-1$ variables.

Si entre los términos de la forma dada, u, no existe ningun cuadrado, y esta forma, por lo tanto, tiene por expresion

$$u = 2bxy + 2px + 2qy + v,$$

donde p y q representan formas lineales de las variables restantes (ménos la x y la y) y v, una forma cuadrática de las mismas, tendremos:

$$2bu = 4(bx+q)(by+p) - (4pq - 2bv)$$
$$= (bx+q+by+p)^2 - (bx+q-by-p)^2 - (4pq-2bv)$$

Y esta expresion patentiza que u se halla expresada mediante 2 cuadrados y una forma cuadrática de $n-2$ variables.

Pero una forma cuadrática binaria puede ser representada por 2 cuadrados á lo sumo: luego una ternaria lo será, á lo sumo, por 3 cuadrados; etc., etc.

43. La forma cuadrática binaria

$$u = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

es representable por un solo cuadrado cuando su determinante $b^2 - ac$ es cero. Pues, en efecto:

$$au = (ax+by)^2 - (b^2 - ac)y^2.$$

La forma cuadrática ternaria

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$

es representable por ménos de 3 cuadrados, cuando su determinante

$$-abc+af^2+bg^2+ch^2-2fgh$$

se anula.

Demostracion.—Si en particular a, b, c, fgh son nulos, y consiguientemente $h=0$, por ejemplo, tendremos:

$$2u=4z(gx+fy)=(gx+fy+z)^2-(gx+fy-z)^2$$

donde aparece u representada por 2 cuadrados. Cuando entre los coeficientes a, b y c, el a, por ejemplo, no es cero, tendremos:

$$au=(ax+hy+gz)^2+py^2+2qyz+rz^2$$

siendo en esta expresion $p=ab-h^2$, $q=af-gh$, y $r=ac-g^2$. Por consecuencia: en los casos particulares $p=0$ y $q=0$, ó $q=0$ y $r=0$, la forma u es representable por 2 cuadrados; mas, en el caso $p=0$, $q=0$, y $r=0$, lo es por 1 cuadrado solamente. Pero, si una de las dos cantidades p ó r, la p, por ejemplo, no es nula, y $q^2-pr=0$, queda

$$apu=p(ax+hy+gz)^2+(py+qz)^2$$

Esta expresion demuestra, por último, que u será representable por 2 cuadrados, siempre que desaparezca ó se anule

$$q^2-pr=a(-abc+af^2+bg^2+ch^2-2fgh)$$

y como ántes hemos supuesto que a no es cero, deberá serlo el otro factor.

El binomio $pm^2 + n^2$ puede ser sustituido por el producto de los factores lineales

$$(n + m\sqrt{-p})(n - m\sqrt{-p}).$$

44. Un *sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas*, en el que una de las ecuaciones sea *cuadrática* y la otra *lineal*, tiene 2 soluciones (31) que pueden calcularse mediante las raizes de una ecuacion cuadrática auxiliar. El procedimiento general para el indicado cálculo es el siguiente: de la ecuacion lineal se despeja una incógnita, y su valor, expresado por la otra incógnita, se sustituye en la ecuacion cuadrática; de la ecuacion cuadrática resultante se hallan 2 valores para la segunda incógnita que, sustituidos en la ecuacion lineal, nos dan los valores correspondientes de la primera incógnita: con lo cual se obtienen 2 grupos de valores de las incógnitas, que satisfacen al sistema propuesto.

En casos particulares existen tambien procedimientos particulares que conducen al mismo resultado.

EJEMPLO 1.º $\quad x + y = a, \quad xy = b.$

Cuadrando la primera ecuacion y restando de ella el cuádruplo de la segunda, se halla, en vez de ésta, la siguiente:

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b \quad \text{ó} \quad x - y = \sqrt{a^2 - 4b}.$$

Sumando y restando ahora las ecuaciones

$$x + y = a \quad \text{y} \quad x - y = \sqrt{a^2 - 4b},$$

y designando por c la raiz cuadrada positiva, se obtienen las soluciones:

$$\begin{array}{c||c|c} x & \frac{1}{2}(a+c) & \frac{1}{2}(a-c) \\ y & \frac{1}{2}(a-c) & \frac{1}{2}(a+c) \end{array}$$

EJEMPLO 2.° $ax+by=f,\quad cx^2+dy^2=g.$

$$y=\frac{f-ax}{b},\quad cx^2+\frac{d}{b^2}(f-ax)^2=g.$$

Ordenando y resolviendo esta última ecuacion se hallan:

$$x=\frac{adf+b\sqrt{(a^2d+b^2c)g-cdf^2}}{a^2d+b^2c}$$

é

$$y=\frac{f-ax}{b}$$

Y representando por R la raiz cuadrada positiva, las soluciones del sistema propuesto:

$$\begin{array}{c||c|c} x & \dfrac{adf+bR}{a^2d+b^2c} & \dfrac{adf-bR}{a^2d+b^2c} \\ y & \dfrac{bcf-aR}{a^2d+b^2c} & \dfrac{bcf+aR}{a^2d+b^2c} \end{array}$$

45. Si F y G representan funciones enteras de x é y, de los grados m y n respectivamente, y no son ambas divisibles por una misma funcion entera de x é y, las soluciones del sistema $F=0$ y $G=0$, se hallan, en general, del modo siguiente. Se or-

denan F y G segun las potencias decrecientes de una incógnita, de la x, por ejemplo; y se forman (32), mediante multiplicadores apropiados r y s, ecuaciones compuestas $rF+sG=0$, que sean cada vez de grado menor respecto de x, hasta llegar á una, $H=0$, que no contenga la x; y sirva, por lo tanto, para determinar la otra incógnita y. Una de las ecuaciones compuestas expresadas, la de ínfimo grado para x, sirve para determinar los valores de esta incógnita, que corresponden á cada uno de los valores de la y (*). Cuando sea satisfecha la condicion $H=0$, las ecuaciones $F=0$ y $G=0$ tienen, para x, una solucion comun, por lo ménos; y, por consecuencia, bajo la condicion $H=0$, las funciones F y G, respecto de x, son divisibles por una funcion entera de x, cuyos coeficientes son expresados racionalmente por los coeficientes de dichas funciones F y G.

Sean, por ejemplo, las funciones

$$F=ax^2+bx+c \quad \text{y} \quad G=a'x^2+b'x+c',$$

en las que los coeficientes a, a'... dependenden de y.

Del sistema $F=0$ y $G=0$, se deduce el sistema compuesto $aG-a'F=0$ y $c'F-cG=0$; ó bien, escribiéndolo en forma de determinantes,

$$\begin{vmatrix} a & bx+c \\ a' & b'x+c' \end{vmatrix}=0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} ax+b & c \\ a'x+b' & c' \end{vmatrix}=0$$

(*) Euler, *Introd.*, II, c. 19. *Mém. de Berlin,* 1764, pág. 96; y Bezout, *Mém. de Paris,* 1764, pág. 298. Véase el tratado del autor sobre las determinantes, § 11; y su Memoria *Ueber die Auflösungen eines Systems von Gleichungen.* Dresden, 1868.

ó sea, de otro modo (138):

$$(ab)x + (ac) = 0 \quad \text{y} \quad (ac)x + (bc) = 0.$$

De este sistema compuesto se deduce el resolvente

$$\begin{vmatrix} (ab) & (ac) \\ (ac) & (bc) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad (ab)x + (ac) = 0$$

cuya primera ecuacion (la *resultante)* sirve para determinar la y; y la otra ecuacion, de primer grado en x, vale para determinar los valores de esta incógnita correspondientes á los de y.

El sistema general anterior $F = 0$ y $G = 0$, como demostraremos más adelante (X), tiene mn soluciones: lo cual significa que el sistema dado es satisfecho por mn valores de y con otros tantos valores correspondientes de x. Si la ecuacion últimamente deducida para y desciende á un grado menor que mn, para valores particulares de los coeficientes, podemos asegurar que ella comprende un número correspondiente de raizes infinitas (26). Para evitar la desaparicion ó pérdida de estas raizes, basta tomar, en vez de las funciones dadas $F(x, y)$ y $G(x, y)$, las funciones homogéneas (20)

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \quad \text{y} \quad t^n G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$$

Y entónces para $t = 0$, se obtendrán las soluciones infinitas; y para $t = 1$, las soluciones finitas del sistema (*).

(*) Un método general para la más exacta distincion de las soluciones infinitas de un sistema binario, se encuentra en la Memoria ya citada del autor.

Si P, Q, R y S son funciones dadas de las incógnitas, el sistema $PQ=0$ y $RS=0$ es completamente satisfecho por los sistemas

$$\left.\begin{matrix} P=0 \\ R=0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} P=0 \\ S=0 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} Q=0 \\ R=0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} Q=0 \\ S=0 \end{matrix}$$

puesto que un producto se anula solamente cuando uno de sus factores es 0. Cuando $R=P$, el sistema dado es tambien satisfecho por la ecuacion $P=0$.

Si P y Q son funciones homogéneas de las mismas dimensiones, del sistema $P=a$ y $Q=b$, se forma la ecuacion $bP-aQ=0$ para calcular las razones de las incógnitas.

En ciertos casos, se simplifica el sistema propuesto, haciendo uso de la suma, la diferencia, el producto, ú otras funciones de las incógnitas, que sustituyan á éstas.

Ejemplo 1.º—El sistema

$$x^2(y^2-1)-2xy(y^2-1)+y^4-2y^2+1=0$$

$$x^2(y^2-3y+2)-y^4-3y^3+7y^2+15y-18=0$$

es congruente con el sistema

$$(y-1)(y+1)(x-y+1)(x-y-1)=0$$
$$(y-1)(y-2)(x+y+3)(x-y-3)=0$$

y subordinado al sistema homogéneo

$$(y-t)(y+t)(x-y+t)(x-y-t)=0$$
$$(y-t)(y-2t)(x+y+3t)(x-y-3t)=0$$

Por lo tanto, será resuelto por la ecuacion $y - t = 0$, y los sistemas:

$y + t = 0$	$y + t = 0$	$y + t = 0$
$y - 2t = 0$	$x + y + 3t = 0$	$x - y - 3t = 0$

....

De donde se desprende que las soluciones del sistema propuesto, ademas de la expresada por $y=1$, serán éstas:

t	x	y	
0	x	0	
	x	x	solucion doble.
1	-2	-1	id. id.
	2	-1	
	1	2	
	3	2	
	-1	-2	

En la primera solucion corresponde á un valor infinitamente grande de x un valor finito de y.

Ejemplo 2.°—El sistema

$$x^3 - y^3 - 3y(x - y) = 0$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0$$

es congruente con este otro:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3y) = 0$$
$$(x - y)(3x + y) = 0$$

al cual satisfacen, en primer lugar, la ecuacion $x - y = 0$; y, en segundo, el sistema

$$x^2 + xy + y^2 - 3y = 0 \text{ y } 3x + y = 0.$$

Mediante la sustitucion del valor de $y = -3x$ se halla la ecuacion $7x^2 + 9x = 0$, que da para x los valores 0 y $-\frac{9}{7}$; y para y los correspondientes 0 y $\frac{27}{7}$. La solucion 0, 0 está contenida en la ecuacion $x - y = 0$.

Ejemplo 3.°—Del sistema

$$x^2 + y^2 = xy, \quad x + y = xy$$

se deduce la ecuacion

$$(x+y)^2 = 3xy \quad \text{ó} \quad (x+y)^2 - 3(x+y) = 0$$

que puede reemplazar á la primera del sistema dado. Con lo cual hallamos los sistemas resolventes:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ xy &= 0 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ xy &= 3 \end{aligned}$$

que arrojan las soluciones:

$$\begin{array}{c||c|c|c} 2x & 0 & 3 + i\sqrt{3} & 3 - i\sqrt{3} \\ 2y & 0 & 3 - i\sqrt{3} & 3 + i\sqrt{3} \end{array}$$

La solucion 0, 0 es doble.

Ejemplo 4.°—Del sistema

$$\begin{aligned} x^3y - xy^3 + 3xy + x + y &= 0 \\ x^2 - y^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo x é y por $x : t$ é $y : t$, se obtiene el homogéneo, más general:

$$\begin{aligned} x^3y - xy^3 + 3t^2xy + t^3(x+y) &= 0 \\ x^2 - y^2 + 3t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sustrayendo de la primera ecuacion la segunda multiplicada por xy, en vez de la primera se halla la siguiente:

$$t^3(x+y)=0.$$

Y, por consecuencia, los sistemas:

$$\begin{array}{r|r} t^3=0 & x+y=0 \\ x^2-y^2=0 & x^2-y^2+3t^2=0 \end{array}$$

que son satisfechos solamente en el caso de ser $t=0$. Esto prueba que al sistema dado le satisfacen solamente valores infinitos de x y de y, que, ó son iguales (solucion *triple*), ó igualmente opuestos (solucion *quíntuple*).

Ejemplo 5.º—El sistema

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{3}{4}$$

$$2x^3+6xy^2=\frac{9}{64}(x^2-y^2)^3$$

está subordinado al sistema homogéneo

$$8tx=3x^2-3y^2$$

$$2t^3x(x^2+3y^2)=\frac{9}{64}(x^2-y^2)^3$$

Por la sustitucion de $3y^2=3x^2-8tx$ en la segunda ecuacion, se halla esta otra $t^3x^3(x-3t)=0$; y las soluciones del sistema propuesto serán en consecuencia:

t	x	y	
0	x	$\pm x$	solucion triple
1	0	0	id. cuádruple
	3	± 1	

EJEMPLO 6.° El sistema

$$x+y=a, \quad x^5+y^5=b$$

está subordinado al sistema homogéneo

$$x+y=at, \quad x^5+y^5=bt^5.$$

Haciendo $xy=v$, por la segunda ecuacion se obtiene (ARIT. UNIV. 28) la siguiente:

$$(a^5-b)\,t^5-5a^3t^3v+5atv^2=0.$$

Y resulta desde luego que el sistema propuesto es satisfecho por el sistema $t=0$, $x+y=0$, esto es: por valores infinitos igualmente opuestos de las incógnitas.

Haciendo ahora $t=1$, del sistema

$$x+y=a, \quad xy=v$$

se deducen los valores

$$2x=a+\sqrt{a^2-4v}\,, \quad 2y=a-\sqrt{a^2-4v}\,;$$

y de la ecuacion cuadrática auxiliar en v estos otros:

$$\frac{a^2}{2}-v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}} \text{ y } a^2-4v=-a^2+2\sqrt{\frac{a^5+4b}{5a}}.$$

Designando por c el valor positivo de la última raiz cuadrática, y por d y d' respectivamente las raizes cuadráticas positivas de $-a^2+2c$ y de $-a^2-2c$, se obtienen, por fin, las soluciones:

$2x$	$a+d$	$a-d$	$a+d'$	$a-d'$
$2y$	$a-d$	$a+d$	$a-d'$	$a+d'$

EJEMPLO 7.° El sistema

$$ax + by = 2(x^2 - y^2)$$

$$-\frac{a}{x+y} + \frac{b}{x-y} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

es subordinado del sistema homogéneo

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0$$

$$-at(x-y)xy + bt(x+y)xy - x^4 + y^4 = 0.$$

Añadiendo á la segunda ecuacion la primera multiplicada por $(x-y)y$, se obtiene para segunda ecuacion esta otra:

$$(bty - x^2 + y^2)(x^2 + 2xy - y^2) = 0,$$

ó sea

$$(bty - x^2 + y^2)(x + cy)(x + c'y) = 0,$$

en la cual: $c = 1 + \sqrt{2}$, $c^2 - 1 = 2c'$ y $c' = 1 - \sqrt{2}$.

Del primer sistema

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0 \text{ y } bty - x^2 + y^2 = 0,$$

se deduce $t(ax - by) = 0$. Á $t = 0$ corresponde $y = \pm x$; á $t = 1$ y $ax - by = 0$ corresponden $x = 0$, $y = 0$ y

$$x = b\frac{ab}{b^2 - a^2}, \quad y = a\frac{ab}{b^2 - a^2}.$$

Del otro sistema

$$ax + by - 2x^2 + 2y^2 = 0, \; x + cy = 0$$

se deduce $4cy^2-(b-ac)y=0$; etc., etc. Luego las soluciones del sistema propuesto serán:

t	x	y	
0	x	$\pm x$	
1	0	0	(triple)
	$b\dfrac{ab}{b^2-a^2}$	$a\dfrac{ab}{b^2-a^2}$	
	$\dfrac{ac-b}{4}$	$\dfrac{b-ac}{4c}$	
	$\dfrac{ac'-b}{4}$	$\dfrac{b-ac'}{4c'}$	

Ejemplo 8.º Cuando u y u' representan formas cuadráticas ternarias (42), á saber: $u=ax^2+\ldots..$, $u'=a'x^2+\ldots..$, existen 3 multiplicadores λ_1, λ_2 y λ_3 de tal suerte que las formas deducidas $u+\lambda_1 u'$, $u+\lambda_2 u'$ y $u+\lambda_3 u'$ resultan productos de factores lineales, p_1q_1, p_2q_2 y p_3q_3. En efecto, la determinante de la forma $u+\lambda u'$ es una funcion cúbica de λ que se anula para 3 valores determinados de dicha λ. El sistema $u=0$ y $u'=0$ puede ser reemplazado por el sistema $p_1q_1=0$, y $p_2q_2=0$, cuyas soluciones satisfacen tambien á la ecuacion $p_3q_3=0$. (Véase Jacobi. *Journal de Crelle* 14, p. 286.)

LIBRO SEGUNDO.

LAS ECUACIONES CÚBICAS Y BICUADRÁTICAS, LAS NUMÉRICAS, Y LAS INDETERMINADAS.

VII. Las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas.

(HEIS.–95, 98, 69 y 105.)

46. Si los términos de la ecuacion del grado m^o

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots = 0,$$

se multiplican respectivamente por los de la progresion geométrica $\frac{1}{v}$, 1, v, v^2....., se obtiene otra ecuacion del mismo grado, cuyas raizes tienen con las de la primera la razon v. Pues, sustituyendo en esta ecuacion la incógnita x por el cociente $y : v$, despues de multiplicar por v^{m-1}, resulta la ecuacion trasformada

$$\frac{a}{v} y^m + by^{m-1} + cvy^{m-2} + \ldots\ldots = 0.$$

Si en esta última se deséa que el coeficiente de la más alta potencia de la incógnita sea 1, estableceremos la condicion $v = a$; si se deséa que el segundo coeficiente sea igual al primero, establecemos la condicion $v = a : b$. Etc. etc.

47. Si en la ecuacion

$$y^m + by^{m-1} + acy^{m-2} + \ldots\ldots = 0.$$

ponemos $y = z - b : m$, se halla otra ecuacion en z del mismo grado, que ya no contiene la potencia z^{m-1}. Efectivamente: sustituyendo y por $z + y$, la ecuacion dada se convierte en esta otra.

$$\begin{array}{c|c|c}
z^m + m\lambda & z^{m-1} + \binom{m}{2}\lambda^2 & z^{m-2} + \ldots = 0 \\
+ b & + (m-1)b\lambda & + \ldots \\
 & + ac & + \ldots \\
 & & + \ldots
\end{array}$$

La cual es de grado m respecto de z y perderá la potencia z^{m-1}, ó la potencia z^{m-2}..., segun que el valor de λ se determine por la ecuacion

$$m\lambda + b = 0,$$

ó por la ecuacion

$$\binom{m}{2}\lambda^2 + (m-1)b\lambda + ac = 0.$$

Etc. etc.

Las trasformaciones numéricas de la funcion $ax^m + bx^{m-1} + \ldots\ldots$ que hemos indicado, se efectúan sencillamente: multiplicando desde luego el valor de $ax + b$ por el valor de x y añadiendo c al producto; multiplicando luego el valor hallado de $ax^2 + bx + c$ por x y añadiendo d al producto; et cætera, etc.

EJEMPLO. — Haciendo $x=\frac{1}{3}y$, de la ecuacion $3x^3-6x^2+5x-4=0$, se deduce primeramente $(y-6)\frac{1}{3}y+5$; y últimamente, la ecuacion en y del mismo grado

$$y^3-6y^2+15y-36=0.$$

Haciendo en esta ecuacion $y=z+2$, se obtiene primeramente, segun el procedimiento explicado, $(z+2-6)(z+2)+15$; y últimamente, la ecuacion en z que sigue:

$$z^3+3z-22=0,$$

en la cual $z=3x-2$.

El cálculo de los coeficientes de la última ecuacion en z, que se deduce de la anterior en y, se dispone como al lado se expresa.

$$\begin{array}{rrrr} & -6 & & \\ 1 & 2 & & \\ \hline 1 & -4 & 15 & \\ & 2 & -8 & \\ \hline 1 & -2 & 7 & -36 \\ & 2 & -4 & 14 \\ \hline 1 & 0 & 3 & -22 \end{array}$$

NOTA. Despues de haber igualado con y la expresion $ax+\lambda$, ó la $ax^2+\lambda x+\mu$, ó la $ax^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$, se encuentra una ecuacion para y del grado m^o, que, disponiendo convenientemente de λ, μ, ν, conserva solamente m, $m-1$, $m-2$ términos; y otra ecuacion que sirve para determinar de un modo único la x mediante de la y.

48. Despues del procedimiento explicado (47) para quitar á una ecuacion su segundo término, la resolucion de la *cúbica* puede siempre reducirse á la de la forma particular

$$x^3+3ax+2b=0.$$

Esta ecuacion, haciendo $x = t + u$, se transforma en la siguiente:

$$t^3 + 3t^2u + 3tu^2 + u^3 + 3a(t+u) + 2b$$
$$= t^3 + u^3 + 3(tu + a)(t + u) + 2b = 0$$

la cual, como $t + u$ no puede ser cero, es satisfecha por las ecuaciones para t y u,

$$t^3 + u^3 + 2b = 0 \quad \text{y} \quad tu + a = 0.$$

Del sistema que de estas ecuaciones se deriva:

$$t^3 + u^3 = -2b \quad \text{y} \quad t^3u^3 = -a^3$$

se deducen (44) los valores

$$t^3 = -b + \sqrt{b^2 + a^3}$$

$$u^3 = -b - \sqrt{b^2 + a^3}$$

En el supuesto de que la *discriminante* $b^2 + a^3$ sea *positiva*, designando por t y por u respectivamente las raizes cúbicas reales de $-b + \sqrt{b^2 + a^3}$ y de $-b - \sqrt{b^2 + a^3}$; y las raizes cúbicas propias de 1 (Arit. univ. 101), por

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \alpha^2 = -\tfrac{1}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

obtendremos los binomios

$$t + u$$
$$\alpha t + \alpha^2 u = -\tfrac{1}{2}(t + u) + i \cdot \tfrac{1}{2}(t - u)\sqrt{3}$$
$$\alpha^2 t + \alpha u = -\tfrac{1}{2}(t + u) - i \cdot \tfrac{1}{2}(t - u)\sqrt{3}$$

que son las raizes de la ecuacion cúbica dada: real la primera, y las otras dos, complejas conjugadas (*). Acerca de la racionalidad de estas raizes por ensayos directos puede discernirse solamente.

Los binomios

$$t + \alpha u \qquad \alpha t + u \qquad \alpha t + \alpha u$$

$$t + \alpha^2 u \qquad \alpha^2 t + u \qquad \alpha^2 t + \alpha^2 u$$

no satisfacen á la ecuacion propuesta; porque los productos de sus términos, αtu ó $\alpha^2 tu$, no satisfacen á la condicion $tu = -a$, esto es, no igualan al valor real $-a$. Y en efecto debe suceder así: pues no hay inconveniente en demostrar, como se hizo en otro sitio (40), que la ecuacion cúbica no tiene más de 3 raizes.

Cuando $b^2 + a^3$ sea *nula*, será $u = t$; y entónces la ecuacion tendrá tres raizes reales, á saber: $2t, -t, -t$; de las cuales son dos iguales entre sí. Efectivamente: la ecuacion, en que se verifica la condicion arriba expresada, es

$$x^3 - 3c^2x - 2c^3 = (x - 2c)(x + c)^2$$

49. Cuando $b^2 + a^3$ sea *negativa*, la ecuacion tendrá 3 raizes reales, diferentes, que se presentan, sin embargo, en las fórmulas anteriores, como sumas de las raizes cúbicas de números complejos conjugados. Para resolver la ecuacion apropiada á este caso (con el coeficiente de x negativo)

(*) La fórmula para las raizes de la ecuacion cúbica fué hallada por SCIPION FERRO (1505), é inmediatamente despues por TARTAGLIA; pero fué publicado el descubrimiento con su demostracion correspondiente por CARDAN 1545 (*Ars magna*, capítulo XI); y por esto lleva el nombre de *fórmula cardánica*. Véase KLÜGEL *math. W.* I, página 34.

$x^3 - 3ax + 2b = 0$, en la hipótesis $b^2 < a^3$, establezcamos la igualdad (Arit. univ. 192):

$$-b \pm \sqrt{b^2 - a^3} = -b \pm i\sqrt{a^3 - b^2}$$
$$= \rho\,(cos\omega \pm i\; sen\omega)$$

de la cual inmediatamente se desprenden:

$$\rho^2 = a^3 \quad \text{y} \quad cos\omega = \frac{-b}{\rho} = \frac{-b}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Sustituyendo estos valores de a^3 y de $-b$ en las fórmulas á que ántes aludimos, ó sea, en las sumas de las raizes cúbicas que representan las raizes de la ecuacion ahora propuesta (*), estas raizes se ven expresadas como sigue:

$$2a^{\frac{1}{2}} cos\,\tfrac{1}{3}\omega \qquad 2a^{\frac{1}{2}} cos\left(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{2}{3}\pi\right) \qquad 2a^{\frac{1}{2}} cos\left(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

Por los valores que toma la funcion cúbica $f(x) = x^3 - 3ax + 2b$, para valores reales de x, se conoce en este caso *(casus irreducibilis)* que la ecuacion cúbica correspondiente tiene raizes reales (**).

En efecto, haciendo $x = a^{\frac{1}{2}}y$, será $f(x) = a^{\frac{3}{2}}g(y)$ donde

$$g(y) = y^3 - 3y + \frac{2b}{a^{\frac{3}{2}}} = y^3 - 3y + 2 - c$$

(*) La triseccion del ángulo ω (el cálculo de $cos\,\frac{1}{3}\omega$ mediante $cos\omega$) se redujo por Bombelli, 1579, á la resolucion de una ecuacion cúbica. El procedimiento inverso se encuentra en Vieta, en Girard, y bajo forma de construccion, en Descartes, *Geometría III*. Véase: Klügel *math. W.* I, p. 38, 44, 53.

(**) Stainville 1812 *Corresp. s. l'Ec. polyt.* 3, p. 58, y *Melonges d'anal.* p. 197.

en atencion á que es $\frac{2b}{a^{\frac{3}{2}}} < 2$. Pero $g(2)$ es positivo, $g(1)$ negativo, $g(0)$ positivo, $g(-1)$ positivo, $g(-2)$ negativo; siendo, en general, la funcion $g(y)$, para valores reales y finitos de y, tambien real, finita y contínua; luego (14) $g(y)$ será cero al pasar y desde el valor 2 al 1, desde el 1 hasta el 0, y desde el -1 hasta el -2. Y esto significa que la ecuacion $g(y) = 0$ tiene 3 raizes reales, á las cuales corresponden 3 raizes reales de la ecuacion $f(x) = 0$.

Si la ecuacion $x^3 + 3ax + 2b$ tiene la raiz real 2α, tendremos:

$$x^3 + 3ax + 2b = (x - 2\alpha)(x^2 + 2\alpha x + \beta)$$

de donde se desprenden, efectuando el producto del segundo miembro, las igualdades

$$2b = -2\alpha\beta \quad \text{y} \quad 3a = \beta - 4\alpha^2.$$

De la última se desprende esta otra:

$$\tfrac{3}{4}a + \tfrac{3}{4}\beta = \beta - \alpha^2 = \tfrac{3}{4}\gamma, \text{ si } \gamma = a + \beta:$$

luego, sustituyendo, hallarémos:

$$b^2 + a^3 = \beta^2(\beta - \tfrac{3}{4}\gamma) + (\gamma - \beta)^3$$

$$= \gamma(\gamma^2 - 3\beta\gamma + \tfrac{9}{4}\beta^2) = \gamma(\gamma - \tfrac{3}{2}\beta)^2.$$

Esto prueba que $b^2 + a^3$ tiene el mismo signo que γ ó que $\beta - \alpha^2$, del cual depende el que sean, ó no, tambien reales las otras dos raizes. Véase Liebrecht *Arch. de Grunert* 1876 t. 59, p. 217.

OBSERVACION.—Cuando a es positivo, la ecuacion trinómica

$$x^m - x - a = 0$$

tiene una raiz positiva, comprendida entre 1 y $1 + a$, que es la mayor de sus raizes reales; porque $1^m - 1 - a$ es negativo, y $(1+a)^m - 1 - 2a$ es positivo. Para obtener valores que se aproximen á dicha raiz (*) se calculan sucesivamente:

$$b_1 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a_1}},\ b_2 = \sqrt[m]{a + b_1},\ b_3 = \sqrt[m]{a + b_2} \ldots$$

los cuales forman una série creciente; puesto que $b_1 > \sqrt[m]{a}$, $b_2 > b_1$, $b_3 > b_2 \ldots$. Para demostrar ahora que ninguna de estas cantidades puede superar á la mayor raiz de la ecuacion propuesta, basta saber que

$$b_k^m - b_{k-1} - a = 0, \quad \text{y} \quad b_k^m - b_k - a < 0.$$

50. La resolucion de una ecuacion general, *bicuadrática*, puede reducirse á la resolucion de la ecuacion bicuadrática particular

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c = 0$$

por el medio que ya explicamos (47). Las raizes de esta ecuacion, á su vez, podrán ser expresadas mediante las raizes de una ecuacion cúbica, deter-

---

(*) BOLYAI *Tentamen in elem. math. Maros Vasarhely* 1832, tomo I, p. 413.

minada, que es la verdadera *resolvente* (*). Estableciendo, pues, las condiciones:

$$t+u+v=\alpha,\quad tu+tv+uv=\beta,\quad tuv=\gamma,$$

la ecuacion (24)

$$(y-t)(y-u)(y-v)=y^3-\alpha y^2+\beta y-\gamma=0,$$

para la incógnita y, tiene las tres raizes t, u y v. Haciendo ahora

$$x=\sqrt{t}+\sqrt{u}+\sqrt{v}$$

tendremos:

$$x^2=\alpha+2\sqrt{tu}+2\sqrt{tv}+2\sqrt{uv}$$

$$\tfrac{1}{4}(x^2-\alpha)^2=\beta+2x\sqrt{\gamma}$$

$$x^4-2\alpha x^2-8x\sqrt{\gamma}+\alpha^2-4\beta=0.$$

Esta ecuacion bicuadrática para x (*biforme* por causa del radical $\sqrt{\gamma}$) tiene la raiz *octiforme*, $\sqrt{t}+\sqrt{u}+\sqrt{v}$, siempre que t, u y v representen las raizes de la ecuacion cúbica resolvente $y^3-\alpha y^2+\beta y-\gamma=0$.

La ecuacion bicuadrática que tratamos de re-

(*) Este descubrimiento, hecho por Ludovico Ferrari, fué publicado por Cardan 1545 (*Ars magna* c. 39) y por Bombelli 1572. V. Klügel *math. W.* I, p. 38 II, p. 401. La ecuacion cúbica que sirve para resolver la bicuadrática fué llamada *resolvente* por Euler, y *reducida* por Clairaut y otros. De la ecuacion bicuadrática completa, con 5 términos, puede tambien deducirse la ecuacion cúbica resolvente, con 3 términos (Aronhold *J. de Crelle* 52, p. 95). Sylvester *Phil. Mag.* 1851, II, página 395. Heilermann *Zeitschrift* 21, p. 364. Fiedler *Elem. Geom. und Alg.* p. 163 Darboux *J. de Liouville* 1873 p. 220). Pero en la ecuacion reducida que resulta es la determinacion ménos sencilla que en la de Ferrari admitida en el texto.

solver coincide con la bicuadrática últimamente escrita, cuyas raizes son conocidas, bajo las condiciones:

$$4a = -2\alpha, \quad 8b = -8\sqrt{\gamma} \quad \text{y} \quad 4c = \alpha^2 - 4\beta$$

ó sean

$$\alpha = -2a, \quad \beta = a^2 - c \quad \text{y} \quad \gamma = b^2.$$

Por las cuales la resolvente de la ecuacion bicuadrática, propuesta, toma la forma

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2 = 0.$$

Conocidas las raizes t, u y v de la resolvente, se hallarán las de la ecuacion dada, eligiendo entre los valores de la fórmula $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$ los 4 que satisfagan á la condicion $\sqrt{t}\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{\gamma} = -b$.

Esta solucion, que estriba en la formacion de una ecuacion con raizes dadas, es de EULER (1738) *Comm. Petrop.* 6, p. 218). FERRARI habia establecido la igualdad

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c$$
$$= (x^2 + 2r)^2 - 4[x\sqrt{r-a} - \sqrt{r^2 - c}]^2$$

bajo la condicion $\sqrt{r-a}\sqrt{r^2-c} = b$. La misma fórmula puede convertirse en el producto $(x^2 + 2x\sqrt{\alpha} + \beta)(x^2 - 2x\sqrt{\alpha} + \beta')$ (DESCARTES *Geometria* III). Tambien puede expresarse la fórmula

$$a^3(ax^4 + 4bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

por la diferencia de dos cuadrados, á saber:

$$(a^2x^2+2abx+A)^2-(Bx+C)^2$$

Et cætera, etc.

51. La resolvente hallada tiene, por lo ménos, una raiz real *positiva* v; puesto que la funcion cúbica correspondiente $y^3+2ay^2+(a^2-c)y-b^2$, para $y=0$, tiene un valor negativo; y para un valor positivo, suficientemente grande de y, tiene un valor positivo (49). Por consecuencia, $\sqrt{v}$ será real, y su signo, determinado por el del producto $\sqrt{t}\sqrt{u}$.

El producto tu de las otras dos raizes de la resolvente es positivo; porque $tuv=b^2$ es positivo. Ahora bien, si t y u son reales y ambas positivas, la ecuacion bicuadrática que tratamos de resolver tendrá 4 raizes reales. Cuando t y u sean negativas, dicha ecuacion tendrá 2 pares de raizes complejas; pues, segun lo supuesto, $t=-g^2$, $u=-h^2$, y el binomio $\sqrt{t}+\sqrt{u}$ tendrá los valores

$$ig+ih,\quad -ig-ih,\quad ig-ih,\quad -ig+ih.$$

Los productos de los términos de cada uno de los dos binomios primeros son negativos, y los referentes á los dos segundos binomios positivos; lo cual se expresa sencillamente diciendo que en los dos primeros casos el producto $\sqrt{t}\,\sqrt{u}$ es negativo, y en los dos últimos, positivo.

Mas cuando t y u sean complejos conjugados, la ecuacion bicuadrática tendrá un par de raizes complejas y 2 raizes reales. En efecto, conforme con la hipótesis, podemos establecer las igualdades

$$t = 2p + 2iq, \quad u = 2p - 2iq, \quad r^2 = p^2 + q^2$$

de las cuales se deducen (ARIT. UNIV. 85)

$$\sqrt{t} = \sqrt{r+p} + i\sqrt{r-p}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{r+p} - i\sqrt{r-p}.$$

Y de aquí los valores correspondientes:

$\sqrt{t}+\sqrt{u}$	$2\sqrt{r+p}$	$-2\sqrt{r+p}$	$2i\sqrt{r-p}$	$-2i\sqrt{r-p}$
$\sqrt{t}\sqrt{u}$	$2r$	$2r$	$-2r$	$-2r.$

En el caso particular $t = u$, serán nulos 2 valores de $\sqrt{t} + \sqrt{u}$, y la ecuacion bicuadrática tendrá 2 veces la raiz $\sqrt{v} = b : t$. En el caso de que $t = u = v$, dicha ecuacion tendrá 3 veces la raiz $\sqrt{v} = b : t$, y 1 vez la raiz $3\sqrt{v}$. Cuando sean nulas 2 raizes de la resolvente, en cuyo caso serán nulos su último término y el coeficiente del penúltimo, esto es, $b = 0$ y $c = a^2$, la ecuacion dada tendrá 2 veces las raizes $\pm\sqrt{-2a}$. Y, por último, cuando sean nulas las 3 raizes de la resolvente, la ecuacion que estamos discutiendo tendrá 4 veces la raiz 0.

La imposibilidad de expresar por raizes de ecuaciones puras, ó por raizes de ecuaciones de grados inferiores, las raizes de una ecuacion general, de grado superior al 4.º, fué prevista por GAUSS 1799 (*Demonst. nova* 9) y demostrada por ABEL 1825 (*J. de Crelle* 1 p. 65). Véase: WANZEL en el *Alg. sup.* de SERRET 516; SCHEIBNER en la *Berichte der Leipzig. Ges. der W.* 1863 p. 63. HERMITE encontró que la ecuacion general de 5.º grado puede resolverse con el auxilio de funciones trascendentes (*Compt. rend.* 1858

p. 508 y p. 715). Véase: KRONECKER (*Monatsbericht der Berliner Acad.* 1861 Jun. 27. BRIOSCHI (*Atti Ist. Lomb.* 23 Noviembre 1858.).

52. Si entre los coeficientes de la ecuacion del grado $2n$

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots\ldots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

son los $n+1$ primeros, hasta el a_n, arbitrarios, cualesquiera; pero los siguientes se hallan ligados con los anteriores por las condiciones:

$$a_{n+1} = a_{n-1}\varepsilon,\ a_{n+2} = a_{n-2}\varepsilon^2, \ldots a_{n+k} = a_{n-k}\varepsilon^k, \ldots$$

las raizes de tal ecuacion se corresponden por parejas. El producto de cada dos raizes correspondientes es ε; y su suma es una raiz de una ecuacion resolvente, determinada, del grado n^0. En el caso particular $\varepsilon = 1$, la ecuacion propuesta toma el nombre de *recíproca* (*).

Dividiéndola por x^n, se halla la siguiente:

$$a_n + a_{n-1}\left(x + \frac{\varepsilon}{x}\right) + \ldots\ldots + a_0\left(x^n + \frac{\varepsilon^n}{x^n}\right) = 0$$

que permanece inalterable, aunque sea x sustituida

(*) Segun EULER (*Comm. Petrop.* 1738, t. 6, p. 223) y MACLAURIN *Tract.* 8). La formacion de la resolvente coincidió con el desarrollo dado por J. BERNOULLI de $\cos kx$ en funcion de las potencias de $\cos x$ (*Mém. de París* 1702. *Opp.* 2, n. 97); y fué tambien hallado por MOIVRE (*Misc. anal.* III, 4). La expresion de $x^k + y^k$, mediante $x + y$ y xy, que es para este asunto necesaria, como caso particular de una expresion más general, e debe á LAGRANGE (*Mém. de Berlin* 1768. *Nouvelle méth.* 1.)

por $\varepsilon : x$. De esto resulta que, si α es una raiz de esta ecuacion, tambien $\varepsilon : \alpha$ será raiz de la misma.

Haciendo $x + \frac{\varepsilon}{x} = u$ obtendremos (Arit. universal 28) las igualdades:

$$x^2 + \frac{\varepsilon^2}{x^2} = u^2 - 2\varepsilon$$

$$x^3 + \frac{\varepsilon^3}{x^3} = u^3 - 3u\varepsilon$$

$$x^4 + \frac{\varepsilon^4}{x^4} = u^4 - 4u^2\varepsilon + 2\varepsilon^2$$

. . . .

Mediante las cuales se forma la resolvente en u del grado n^o:

$$a_n + a_{n-1}u + a_{n-2}(u^2 - 2\varepsilon) + a_{n-3}(u^3 - 3u\varepsilon) + \ldots = 0$$

Resolviendo la ecuacion cuadrática que se desprende de la hipótesis sentada arriba,

$$x^2 - ux + \varepsilon = 0,$$

se hallarán para cada raiz de la resolvente, un par de raizes de la ecuacion dada.

53. Si entre los coeficientes de la ecuacion del grado $(2n+1)^0$,

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n-1} = 0$$

son arbitrarios los $n+1$ primeros; pero los siguientes están ligados con los anteriores mediante las relaciones:

$$a_{n+1} = a_n\varepsilon,\ a_{n+2} = a_{n-1}\varepsilon^3, \ldots a_{n+1+k} = a_{n-k}\varepsilon^{2k+1}, \ldots$$

una raiz de dicha ecuacion tendrá el valor $-\varepsilon$, y las otras raizes estarán apareadas de tal modo que el producto de cada par sea ε^2.

En efecto: el polinomio

$$a_0(x^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + \varepsilon^{2n-1})$$
$$+ a_2x^2(x^{2n-3} + \varepsilon^{2n-3}) + \ldots..$$

es divisible (ARIT. UNIV. 45) por $x + \varepsilon$. El cociente resultante es

$$\begin{array}{l|l|l|l} a_0x^{2n} - a_0\varepsilon & x^{2n-1} + a_0\varepsilon^2 & x^{2n-2} - \ldots - a_0\varepsilon & \varepsilon^{2n-2}x + a_0\varepsilon^{2n} \\ \quad + a_1 & \quad - a_1\varepsilon & \quad + \ldots + a_1 & \\ & \quad + a_2 & \quad - \ldots & \\ & & \quad + \ldots & \end{array}$$

Igualando á cero, tanto el divisor $x + \varepsilon$ como el cociente escrito, se halla $-\varepsilon$ como raiz de la ecuacion propuesta; y tambien para raizes de la misma las de una ecuacion particular del grado $2n^o$, cuyos coeficientes satisfacen á las condiciones anteriormente (52) establecidas.

54. La funcion fraccionaria, con numeradores positivos,

$$y = \frac{a^2}{\alpha - x} + \frac{b^2}{\beta - x} + \frac{c^2}{\gamma - x} + 1 \qquad (\alpha < \beta < \gamma)$$

adquiere el valor 1 cuando se hace x infinito, y el valor ∞ cuando $x = \alpha, \beta, \gamma$; creciendo, por lo demas, contínuamente, si x crece del mismo modo. Mientras x pasa desde $-\infty$ hasta α, permanece $\alpha - x$ positivo, y la funcion aumenta desde 1 hasta ∞. Mientras x pasa desde α hasta β, es $\alpha - x$ negativo, $\beta - x$ positivo, y la funcion oscila desde $-\infty$ hasta $+\infty$. En tanto que pasa x desde β hasta γ, es $\beta - x$ negativo, $\gamma - x$ positivo, y la funcion crece tambien desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Y, últimamente, durante x pasa desde γ hasta ∞, es $\gamma - x$ negativo, y la funcion recorre desde $-\infty$ hasta 1.

Por esto la ecuacion correspondiente á la funcion estudiada, $y = 0$, se singulariza por tener raizes *reales* exclusivamente, comprendidas cada una entre α, β, γ, ∞ (*).

VIII. Resolucion de ecuaciones numéricas, trascendentes y algebráicas.

55. La clase más sencilla de ecuaciones trascendentes es la que comprende: las *exponenciales*, en que aparecen exponentes incógnitos de dignandos conocidos ó incógnitos; las *logarítmicas*, en que existen logaritmos de números incógnitos; y las *goniométricas*, en que figuran funciones de ángulos (arcos) desconocidos.

Cuando la ecuacion exponencial es binómica y contiene dignandos conocidos, puede fácilmente reducirse á una ecuacion algebráica. Puesto que de la ecuacion

$$a^p b^q : c^r d^s = 1$$

(*) Jacobi *J. de Crelle* 12, p. 23, *Dinamik* p. 199.

se desprende (Aritmética universal 19) esta otra:

$$ploga + qlogb - rlogc - slogd = log1$$

La cual es algebráica, siempre que a, b, c, d sean conocidos, y p, q, r, s, funciones algebráicas de una ó varias incógnitas. En ella hay que notar que $log1$ es infinitiforme (Arit. univ. xxxi.)

Recíprocamente: la ecuacion $p\,log\,t + q\,log\,u = r\,log\,v$ es equivalente á la ecuacion $t^p u^q = v^r$ que es algebráica, si p, q, r son conocidos y t, u, v funciones algebráicas de una ó varias incógnitas.

La ecuacion exponencial

$$a + bp^{\beta x} + cp^{\gamma x} + \ldots = 0$$

por la sustitucion $p^x = y$, se reduce á la siguiente:

$$a + by^{\beta} + cy^{\gamma} + \ldots = 0$$

La ecuacion $x^{a+blogx} = c$, ó $(a + blogx)\,logx = logc$, por la sustitucion $logx = y$, se se reduce á la ecuacion

$$ay + by^2 = logc \cdot (*)$$

56. Las ecuaciones goniométricas se convierten en algebráicas, siempre que, despues del oportuno desarrollo, contengan solamente una funcion de un ángulo incógnito, y potencias de la misma con exponentes conocidos. Así, por ejemplo, la ecuacion $a\,sen\,x + b\cos x = c$ puede convertirse en algebráica, haciendo $sen\,x = y$, $cosx = \sqrt{1 - y^2}$ El mismo objeto se consigue más fácilmente poniendo

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\,sen\,\alpha$$

(*) Heis, 61, 65, 69, 73.

con lo cual quedan α y r determinadas por las ecuaciones

$$cot\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad r = \frac{a}{cos\,\alpha}.$$

Por este último procedimiento, la ecuacion dada se trasforma en la siguiente:

$$r sen x \cos\alpha + r sen\alpha \cos x = c$$

$$sen(x+\alpha) = \frac{c}{r}$$

de la que se deducen dos valores suplementarios para $x+\alpha$.

Para reducir la ecuacion $sen x = a\,sen(\alpha - x)$, se establecen las condiciones

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\alpha - x = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

y se desarrolla la ecuacion resultante

$$sen\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = a\,sen\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Obtiénese de este modo la ecuacion

$$tang\,\frac{1}{2}\beta = \frac{a-1}{a+1}\,tang\,\frac{1}{2}\alpha$$

que arroja para $\frac{1}{2}\beta$ dos valores, diferentes entre sí por 180°: los cuales añadidos á $\frac{1}{2}\alpha$, dan las raizes de la ecuacion propuesta.

Para resolver el sistema (*)

$$x\,sen\,(\alpha - y) = a$$

$$x\,sen\,(\beta - y) = b$$

(*) Gauss, *Theorie motus*, 78.

respecto de x é y, sumaremos y restaremos las dos ecuaciones, como sigue:

$$sen(\alpha - y) + sen(\beta - y)$$
$$= 2sen\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y)cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a+b}{x}$$
$$sen(\alpha - y) - sen(\beta - y)$$
$$= 2cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y)sen\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{x}$$

Y dividiendo ahora estas dos ecuaciones, resulta:

$$tang\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) = \frac{a+b}{a-b}\,tang\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

de la cual se deduce el valor de y, que nos sirve para calcular el de x.

57. Ecuaciones trascendentes, que no pueden reducirse á ecuaciones algebráicas, son, por ejemplo, las que siguen: $a^x + b^x = c$, $a^x = bx + c$, $x^x = a$, $ax + b\log x + cx\log x = 0$, $\cos x = x$, $\cot x = x$, $tang\, x = x$, $x - a\,sen\, x = b$; y otras análogas. Haremos notar solamente, para terminar este párrafo, que en las ecuaciones goniométricas expresadas representa el número x el *arco de un ángulo*, esto es, la razon del arco comprendido al rádio, ó el arco mismo, cuando el rádio es la unidad de medida. Suponiendo, pues, que el ángulo central tenga y grados, y el arco x rádios, será

$$x = \frac{y\pi}{180},\ \log x = \log y + 8{,}2419 - 10$$

Y, si el ángulo en el centro se da en minutos:

$$x = \frac{y\pi}{180 \,.\, 60}, \; log\, x = log\, y + 6{,}4637 - 10$$

Los números $log(\pi : 180)$ y $log(\pi : 180 \,.\, 60)$ se designan en las tablas por $log\, 1^{\circ}$ y $log\, 1'$ respectivamente.

58. Las raizes reales de las ecuaciones de cualquier especie, pero que sean *numéricas (numerales)*, esto es, que no contengan coeficientes indeterminados, pueden siempre limitarse con la aproximacion apetecible. Para descubrir los valores reales de x, que anulan la funcion dada $f(x)$, se calcula el principio de una tabla donde se hallen, al lado de cada valor real de x, los correspondientes de $f(x)$. Si en esta tabla, á un valor $f(a)$ sigue otro valor $f(b)$, de signo opuesto, y la funcion $f(x)$ es contínua sin retroceso, esto es, siempre creciente ó decreciente, para los valores de x entre a y b, la ecuacion $f(x) = 0$ tendrá una raiz (y una sola, simple ó múltiple) comprendida entre a y b (14). Para limitar más estrechamente esta raiz, se rellena la tabla comenzada, calculando los valores de $f(x)$ correspondientes á los de x comprendidos entre a y b. Esta operacion se facilita sobremanera y se reduce á lo más preciso, mediante la *regula falsorum*, como ya probaron los algebristas de los siglos XV y XVI.—Véase EULER *Introd.* I, *cap.* 22. Pues la diferencia que se busca de la variable (entre x y la raiz) es tanto más próximamente proporcional á la diferencia exigida de la funcion (entre $f(x)$ y 0) cuanto menor sea esta diferencia (15).

EJEMPLO 1. Para resolver la ecuacion $10^{x} = x^{10}$ se toman logarítmos de los dos miembros (base 10) y se obtiene esta otra: $x = 10\, log x$ ó $10\, log(x) - x = y = 0$. Se calculan los valores de y para los de $x = 0, 1, 2$, que figuran en la tabla adjunta:

x	y
0	$-\infty$
1	-1
2	1,01

en la que se ve que y debe anularse para un valor de x, comprendido entre 1 y 2, y tambien, que á la diferencia 1 de x corresponde la diferencia 2,01 de y: luego, segun la regla, á la diferencia 1 de y corresponderá la diferencia

$$\frac{1 \cdot 1}{2{,}01} = 0{,}4$$

próximamente de x.

Ahora se calculan nuevos valores de y por los cuales se colige que y se anula para un valor de x comprendido entre 1,4 y 1,3; y tambien que á la variacion 0,221 de y corresponde la 0,1 de x.

x	y
1,4	0,061
1,3	$-0{,}160$

Aplicando la regla, encontraremos que á la variacion 0,061 de y corresponde la variacion

$$\frac{0{,}1 \cdot 0{,}061}{0{,}221} = 0{,}028$$

de x; que da para nuevo valor de esta variable $1{,}372 = 1{,}4 - 0{,}028$. Partiendo de este nuevo valor de x, calculamos nuevos valores de y, como se ve en la tabla adjunta. Por ellos conocemos que y se anula para un valor de x comprendido entre 1,372 y 1,371; y tambien que á la variacion 0,0021 de y cor-

x	y
1,372	0,0015
1,371	$-0{,}0006$

responde la 0,001 de *x*: de lo cual se deduce que para la variacion 0,0006 de *y* deberá ser la de *x*

$$\frac{0{,}001 \,.\, 0{,}0006}{0{,}0021} = 0{,}0003$$

que se añade al valor menor de x, obteniéndose el nuevo, corregido, $x = 1{,}3713$: que puede mirarse ya como la raiz buscada. Con tablas más ámplias de logaritmos, y el mismo procedimiento, lograríamos obtener mayor aproximacion. Esta se acelera á medida que nos acercamos al valor exacto: mediante una operacion pueden entónces calcularse, para las cifras exactas ya obtenidas de la raiz, un conjunto de otras tantas sucesivas inmediatas.

EJEMPLO 2.° La ecuacion $5^x + 6^x = 7x^2$ tiene una raiz comprendida entre 0 y — 1: porque la funcion $5^x + 6^x - 7x^2$, para $x = 0$, recibe el valor 2; y para $x = -1$, el valor $-6\frac{19}{30}$. Estableciendo, pues, la ecuacion deducida de la propuesta

$$log(5^x + 6^x) - log\, x^2 - log 7 = y$$

se obtiene el siguiente sistema:

x	y
— 0,3	0,2803
— 0,4	— 0,0434
— 0,387	— 0,0050
— 0,3853	— 0,0002

Para que la funcion *y* se anule debe la variable *x* variar desde — 0,4 hácia — 0,3 en la cantidad $\frac{0{,}1 \,.\, 434}{3237} = 0{,}013$; y después, desde $-0{,}4$ hácia $-0{,}387$ en $\frac{0.013 \,.\, 50}{384} = 0{,}0017$: con lo cual se halla una raiz de la ecuacion dada, comprendida entre — 0,3853 y — 0,3852.

EJEMPLO 3.º Para resolver la ecuacion $\cos x = x$ estableceremos esta otra: $\log x - \log \cos x = z$. Valiéndonos del ángulo y (57) hallamos el sistema:

y	z
45^0	0,0456
40^0	— 0,0403
42^0 20′	— 0,0003
42′ 21′	0,0000

Para que z se anule debe variar el ángulo y desde 45^0 hácia 40^0, en $\frac{5^0 . 403}{859} = 2^0,33$; et cætera. Del último valor de y se deduce el valor de x.

EJEMPLO 4.º Si un establecimiento benéfico calcula los intereses capitalizables al p por 100 anual, y paga 100 pesetas por una renta de 6 pesetas en 35 años, tendremos (ARIT. UNIV. 119) la ecuacion $\frac{6}{p}(1 - 1,0p^{-35}) = 1$; de la cual se deriva esta otra: $\log 6 + \log (1 - 1,0p^{-35}) - \log p = y$, que nos sirve para calcular el siguiente sistema:

p	y
4	0,0492
5	— 0,0076
4,87	— 0,0005
4,86	0,0001

Para que y se anule debe variar p desde 5 hácia 4 en la cantidad $\frac{76}{586} = 0,13$; y despues, debe variar desde 4,86 hácia 4,87, en $\frac{0,01}{6} = 0,002$.

Y esto prueba que la raiz buscada tiene el valor 4,862.

De este lugar es tambien la resolucion, segun GAUSS, de las ecuaciones trinómicas. *(Beiträge sur Theorie der alg. Gleich.* 1849.—*Abhandl. d. Gott. Ges. d. Wiss. IV.*

59. Para resolver las ecuaciones algebráicas, en vez del método general explicado, existe otro, mu-

cho más sencillo, debido á NEWTON (*Carta á Oldemburgo de* 13 *de Junio de* 1876, y más explícitamente al principio de su *Methodus fluxionum.*)

En lugar de una raiz que pase de 10, puede buscarse su 10.ª 100.ª..... parte (46): y así, despues de las unidades de la raiz, sólo nos quedará por determinar una fraccion pura, mediante transformaciones convenientes de la ecuacion dada.

EJEMPLO 1.º El valor de la funcion $y=x^3-2x-5$ cambia de signo (el negativo en positivo) mientras x sube desde el 2 hasta el 3. De donde se colige que la ecuacion $y=0$ tiene una raiz real $x=2+p$, siendo p una fraccion pura, ó aproximacion, que debemos calcular. Mediante la sustitucion $x=2+p$ y segun el procedimiento explicado (47), se halla la primera transformada de la funcion propuesta, á saber:

$$y=-1+10p+6p^2+p^3$$

cuyos primeros términos sobrepujan á los restantes. Para calcular el valor de p, para el cual se hace $y=0$, estableceremos, como primer tanteo, la ecuacion $-1+10p=0$, de donde

$$p=0{,}1\ldots \text{ y } 6p^2+\ldots=0{,}06\ldots$$

De suerte que, siendo inciertas las centésimas del dividendo, podemos desde luego escribir:

$$p=1{,}0\ldots:10=0{,}1+q$$

Con este valor de p, y por el mismo procedimiento ántes citado, se halla la segunda transformada en y:

$$y=0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$$

Del tanteo ó ensayo, actual, $0{,}061 + 11{,}23q = 0$, se desprenden $q = -0{,}005\ldots$ y $6{,}3q^2 + \ldots = 0{,}0001\ldots$ De modo que, siendo inciertas las diez milésimas del dividendo, podemos establecer el nuevo valor de

$$q = -0{,}061\ldots : 11{,}23 = -0{,}0054 + r$$

Para obtener más pronto la transformada tercera en r, no emplearemos el método (47) conocido, sino que desarrollaremos las potencias de q, segun las potencias ascendentes de r; y así obtendremos aproximadamente:

$$\begin{array}{rlrl} y = & 0{,}061 & & \\ & -0{,}060\,642 & +&11{,}23r \\ & +0{,}000\,183\,708 & -&0{,}0680r \;* \\ & -0{,}000\,000\,157 & +&0{,}0001r \;* \\ \hline & 0{,}000\,541\,551 & +&11{,}1261r \;* \end{array}$$

El tanteo $0{,}000\,541\,551 + 11{,}1621r = 0$ produce el valor $r = -0{,}000\,048\,516$. De todo lo cual resulta finalmente:

$$\begin{array}{rl} x = & 2{,}1 \\ & -0{,}005\,4 \\ & -0{,}000\,048\,516 \\ \hline & 2{,}094\,551\,484 \end{array}$$

Ejemplo 2.° La funcion $y = x^5 - 6x - 10$ pasa del valor negativo al positivo, cuando x sube desde 1 hasta 2; y esto prueba que la ecuacion $y = 0$ tiene la raiz $x = 2 + p$. Con esta sustitucion se obtiene la primera transformada en p:

$$y = 10 + 74p + 80p^2 + 40p^3 + 10p^4 + p^5$$

Con el ensayo $10+74p=0$ se alcanza una aproximacion menor que la conveniente; puesto que de él se deduce $p=-0{,}13$ y $80p^2+\ldots=1{,}3\ldots$; de modo que es preciso recurrir al tanteo

$$10+74p+80p^2=0$$

que ya nos dá el valor más aproximado $p=-0{,}16\ldots$ y á su lado $40p^3+\ldots=-0{,}16\ldots$ Mediante la sustitucion consiguiente $p=-0{,}16+q$ se halla la transformada segunda, aproximada:

$$\begin{array}{rllll}
y = & 10 & & & \\
 & -\ 11{,}84 & +\ 74q & & \\
 & +\ 2{,}048 & -\ 25{,}6q & +\ 80q^2 & \\
 & -\ 0{,}163\,84 & +\ 3{,}072q & -\ 19{,}2q^2 & * \\
 & +\ 0{,}006\,5536 & -\ 0{,}1638q & +\ 1{,}5q^2 & * \\
 & -\ 0{,}000\,1048 & +\ 0{,}0033q & * & * \\
\hline
 & 0{,}050\,6088 & +\ 51{,}3114q & +\ 62{,}3q^2 & *
\end{array}$$

El nuevo tanteo $0{,}050\ldots+51,\ldots q=0$ da

$$q=-0{,}001\ldots \text{ y } 62{,}3q^2+\ldots=0{,}00006\ldots;$$

y, segun él, podemos establecer el valor aproximado de

$$q=-0{,}0506:51{,}3=-0{,}000\,986+r$$

mediante el cual se obtiene la tercera transformada

$$\begin{array}{rll}
y = & 0{,}050\,6088 & \\
 & -\ 0{,}050\,5930 & +\ 51{,}3r \\
 & +\ 0{,}000\,0604 & -\ 0{,}1r \\
\hline
 & 0{,}000\,0762 & +\ 51{,}2r
\end{array}$$

De ésta resulta $r = -0{,}000\,001\,49$. Luego:

$$\begin{array}{rl} x = & \ 2 \\ & -\ 0{,}16 \\ & -\ 0{,}000\,986 \\ & -\ 0{,}000\,001\,49 \\ \hline & \ 1{,}839\,012\,51 \end{array}$$

Ejemplo 3.° La funcion $y = x^3 - 7x + 7$ se anula dos veces al pasar x desde 1 hasta 2. Por la sustitucion $x = 1{,}5 + p$ obtenemos la primera transformada

$$y = -0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 + p^3$$

y el primer tanteo $-0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 = 0$, nos da para p los dos valores $p = 0{,}2$ y $p = -0{,}14$.

I. Por la sustitucion $p = 0{,}2 + q$, correspondiente al primero, se halla la transformada

$$y = 0{,}013 + 1{,}67q + 5{,}1q^2 + q^3$$

de la cual se deduce, poniendo $0{,}013 + 1{,}67q = 0$, $q = -0{,}013 : 1{,}67 = -0{,}008 + r$; por ser $5{,}1q^2 + \ldots = 0{,}0003 \ldots$

De la transformada siguiente

$$y = -0{,}000\,034\,112 + 1{,}588\,592r + 5{,}076r^2 + r^3$$

se concluye:

$$r = 0{,}000\,034\,11 : 1{,}5886 = 0{,}000\,021\,48$$

$$x = 1{,}692\,021\,48$$

II. Por la sustitucion $p = -0{,}14 + q$ se obtiene la transformada

$$y = -0{,}004\,544 - 1{,}4512q + 4{,}08q^2 + q^3$$

El tanteo $-0{,}004\,544 - 1{,}4512q = 0$, produce el valor $q = -0{,}0045 : 1{,}45 = -0{,}0031$; porque $4{,}08q^2 + \ldots = 0{,}00003 \ldots$ y, por consecuencia:

$$x = 1{,}\,3569$$

Ejemplo 4.° La funcion $y = 6x^3 - 141x + 263$ desaparece dos veces cuando x pasa desde 2 hasta 3. Por la sustitucion $x = 2{,}8 + p$ se halla la transformada

$$y = -0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 + 6p^3.$$

y del tanteo consiguiente

$$-0{,}088 + 0{,}12p + 50{,}4p^2 = 0$$

se deducen los dos valores de $p = 0{,}03$ y $-0{,}05$.

I. Por la sustitucion $p = 0{,}3 + q$, se forma la transformada

$$y = -0{,}038\,878 + 3{,}1602q + 50{,}94q^2 + 6q^3$$

El tanteo $-0{,}038878 + 3{,}1602q = 0$ da solamente para q el valor aproximado $q = 0{,}01 + r$, en atencion á que $50{,}94q^2 + \ldots = 0{,}005 \ldots$

De la nueva transformada

$$y = -0{,}002\,176 + 4{,}1808r + 51{,}12r^2 + 6r^3$$

se deduce $r = -0{,}0005$; por ser

$$51{,}12r^2 + \ldots = 0{,}00001 \ldots$$

La transformada siguiente:

$$y = -0{,}00007281925 + 4{,}2319245s + 51{,}129s^2 + 6s^3$$

da: $s = 0{,}00001721$; por ser $51s^2 + \ldots = 0{,}000000005\ldots$

Y, en suma:

$$x = 2{,}800\,51721$$

II. Por la sustitucion $p = -0{,}05 + q$ se obtiene

$$y = 0{,}031\,25 - 4{,}875q + 49{,}5q^2 + 6q^3$$

De la cual resulta $q = 0{,}007 + r$; por ser $49{,}5q^2 + \ldots = 0{,}002$.

La transformada siguiente:

$$y = -0{,}000\,447\,442 - 4{,}181\,118r + 49{,}626r^2 + 6r^3$$

da $r = -0{,}000\,107$; puesto que $49{,}6r^2 + \ldots = 0{,}000\,0005\ldots$

Y en conclusion: $x = 2{,}756\,893$.

Nota. Este método de Newton fué expuesto por Euler, Lagrange y otros, bajo una forma, más sencilla en apariencia, que da para las correcciones p, q ... una fórmula general; mas precisamente contra dicha forma, en la práctica embarazosa, son justas las objecciones que Lagrange hiciera contra el método primitivo. (*Mém. de Berlin* 1767, p. 311. Traité des equat. Note V.) (Véase el artículo del autor de esta obra en la *Leibziger Bericht* 1866, p. 358).

La *rápida* aproximacion que por el método de Newton se logra, no se obtiene en igual manera por el de Horner (*Philos. Trans.* 1819, p. 308) ni por otros semejantes. (Odstrcil *Programm Teschen* 1878.)

Si tenemos la ecuacion $x^2 + Ax = B$, siendo x el número decimal positivo $a, b\, c \ldots$, se obtienen:

a de $B : A$, con el resto positivo $B - (a + A)a$

b de $B - (a + A)a : (2a + A)$

y así sucesivamente. Puesto que

$$(a + b)^2 + A\,(a + b) = B;$$

y, por lo tanto:

$$b^2 + b\,(2a + A) = B - (a + A)\,a.$$

Dada la ecuacion $x^3 + Ax^2 + Bx = C$, se encuentran:

a de $C : B$

b de $C - (a^2 + aA + B)a : (3a^2 + 2aA + B)$

y así sucesivamente. Puesto que

$$(a + b)^3 + A(a + b)^2 + B(a + b) = C;$$

y, en consecuencia:

$$\begin{aligned} b^3 + b^2(3a + A) + b(3a^2 + 2aA + B) \\ = C - (a^2 + aA + B)\,a \end{aligned}$$

Et cætera.

Las raizes reales de una ecuacion en x fueron determinadas *gráficamente* (desde Arquímedes) como las abscisas de los puntos comunes de dos curvas susceptibles de construccion. Así, por ejemplo, la ecuacion

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = 0$$

puede considerarse como la resultante del sistema

$$y = x^3 \text{ y } 0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (a_3 + a_4 x + a_5 x^2) y$$
$$+ (a_6 + a_7 x + a_8 x^2) y^2 + \ldots$$

La línea $y = x^3$ se dibuja para todos los casos. La ecuacion de la otra línea es de segundo grado para x. Véase: NEWTON *Enumeratio* VII.

IX. Resolucion particular de las ecuaciones indeterminadas.

60. Una ecuacion indeterminada, ó un sistema indeterminado de ecuaciones, admite infinitas soluciones (V). Cuando, en particular, los coeficientes de las ecuaciones son números enteros (racionales), ocurre la cuestion de averiguar los valores enteros (racionales) de las incógnitas que satisfacen á las ecuaciones propuestas. *(Problema diofántico.)* La contestacion á la pregunta indicada es el objeto de la *Análisis indeterminada (analyse indeterminée)* que tan estrecha relacion guarda con la Aritmética superior. (*Teoría de los números.*)

61. Si a y b son dos números enteros y primos entre sí, existen infinitos sistemas de números enteros, x é y, que satisfacen á la ecuacion lineal $ax + by = c$. Formemos, en efecto, los restos (modelo b) de los números c, $c - a$, $c - 2a$, ... Estos b restos son diferentes entre sí (ARIT. UNIV. 65) y menores que b; y, por consecuencia, uno de ellos debe ser 0. Si, pues, $c - ax$ da el resto 0 respecto del módulo b, el cociente $(c - ax) : b$ será un número entero y; quedando así verificada la ecuacion

propuesta. Pero, si x é y la verifican, la satisfacen tambien los números comprendidos en las fórmulas $x+bz$ é $y-az$; puesto que

$$a(x+bz)+b(y-az)=ax+by=c$$

Si a y b no son primos entre sí, y designamos por δ su máximo comun divisor, no existirán ningunos números enteros, x é y, que satisfagan á la ecuacion $ax+by=c$, fuera del caso en que c sea tambien divisible por δ. Entónces, cuando x é y la satisfagan, la verificarán asimismo los contenidos en las fórmulas $x+\frac{b}{\delta}z$ é $y-\frac{a}{\delta}z$; y existirán δ valores de x, incongruentes (mód. b), y otros tantos de y, incongruentes (mód. a).

62. Para resolver en números enteros la ecuacion $ax+by=c$, siempre que a sea primo con b, y $a<b$, se procede con el método siguiente:

De la ecuacion propuesta se deduce la $ax=c-by$ y de ésta, por division

$$y=d-ey+\frac{c_1-a_1y}{a}$$

siendo d y c_1 el entero del cociente y el resto de $c:a$; y e y a_1 el entero del cociente y el resto de $b:a$. Como, segun la hipótesis, c_1-a_1y debe ser divisible por a, harémos $c_1-a_1y=ap$, ó bien, $a_1y=c_1-ap$; y de esta ecuacion, por division como ántes, hallarémos:

$$y=d_1-e_1p+\frac{c_2-a_2p}{a_1}$$

en la cual debe ser $c_2 - a_2 p$ divisible por a_1; et cætera, etc. La série de restos a_1, a_2..... desciende hasta 1 (ARIT. UNIV. 49); y, por consecuencia, la série de las sustituciones necesarias tiene tambien un término. Mediante un valor particular de la última indeterminada se expresarán todas las indeterminadas precedentes. El número de divisiones será el menor posible, si se hace uso de los restos mínimos (positivos ó negativos, segun los casos.)

EJEMPLO 1.°

$7x = 1000 - 24y$	$x = 143 - 3y - \frac{3y+1}{7}$
$3y = -1 + 7p$	$y = 2p + \frac{p-1}{3}$
	$p = 1 + 3q.$

En particular, si $p = 1$, serán $y = 2$, $x = 136$; y, en general (61):

$$x = 136 - 24q\,, \quad y = 2 + 7q$$

donde q representa cualquiera número entero (positivo ó negativo.)

EJEMPLO 2.°—Para dividir el número 243 en dos partes, una de las cuales sea divisible por 24, y la otra por 65, haremos la primera parte $= 24x$, y la segunda $= 65y$. De la ecuacion consiguiente $24x + 65y = 243$ se desprenden:

$24x = 243 - 65y$	$x = 10 - 3y + \frac{7y+3}{24}$
$7y = 3(-1 + 8p)$	$y = 3\left(p + \frac{p-1}{7}\right)$
	$p = 1 + 7q$

Para $q=0$ se obtienen: $p=1$, $y=3$, $x=2$; y, en general:

$$y=3+24q\,,\quad x=2-65q.$$

Este problema sólo tiene una solucion en números enteros positivos. Con él se resuelve asimismo el de descomponer el quebrado $\frac{243}{24\,.\,65}$ en la suma de otros dos quebrados cuyos denominadores sean 65 y 24 respectivamente.

Ejemplo 3.º—Encontrar los números congruentes con 14 (mód. 27) y con 25 (mód. 37); ó sea, los números que, divididos por 27 y por 37, dejan los restos 14 y 25 respectivamente. La ecuacion que expresa estas condiciones será $27x+14=37y+25$; de la cual se deducen:

$27x=11+37y$	$x=y+\frac{10y+11}{27}$
$10y=-11+27p$	$y=-1+3p-\frac{3p+1}{10}$
$3p=-1+10q$	$p=3q+\frac{q-1}{3}$
	$q=1+3r$

Para $r=0$ se obtienen: $q=1$, $p=3$, $y=7$ $x=10$; y, en general:

$$y=7+27r\,,\quad x=10+37r$$

Los números buscados son:

$$37(7+27r)+25=27(10+37r)+14=284+999r$$

63. La série de ecuaciones necesaria para resolver la ecuacion $ax - by = c$, á saber:

$$\begin{aligned} ax &= by + c & x &= ey + p \\ a_1 y &= ap - c & y &= e_1 p + q \\ a_2 p &= a_1 q + c & p &= e_2 q + r \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

tiene su fundamento en esta otra série de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b &= ae + a_1 \\ a &= a_1 e_1 + a_2 \\ a_1 &= a_2 e_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

mediante las cuales se desarrolla el quebrado $a : b$ en una fraccion contínua, cuyos términos llevan por numeradores la unidad positiva ó negativa. Así, por ejemplo, si el resto a_3 fuese la unidad, podríamos hacer $r = 0$, y obtener para q, p, y, x los valores particulares q', p', y', x', expresados por las igualdades siguientes:

$$\frac{q'}{p'} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{p'}{y'} = \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}$$

De las que se desprende que la última reducida, $\frac{\lambda}{\mu}$, de la fraccion contínua

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2} \dot{+} \frac{1}{a_2}$$

es un valor particular de $\frac{y}{x}$. En efecto, segun esta hipótesis (ARIT. UNIV. 176)

$$a\mu - \lambda b = \varepsilon,\ \varepsilon^2 = 1$$
$$a\ .\ \varepsilon c\mu - b\ .\ \varepsilon c\lambda = c$$

Luego la ecuacion propuesta es satisfecha por los valores (*)

$$x = \varepsilon c\mu + bz,\quad y = \varepsilon c\lambda + az$$

Cuando a es primo con b, y existen s números menores que b y primos con este mismo número b, se sabe que $a^s - 1$ es divisible por b (ARIT. UNIV. 67.) Pero de la identidad

$$aa^{s-1} - b\ \frac{a^s - 1}{b} = 1$$

se deduce esta otra

$$aca^{s-1} - bc\ \frac{a^s - 1}{b} = c$$

(*) La resolucion de la ecuacion $ax \pm by = c$ en números enteros, uno de los problemas más elementales de los llamados *diofánticos*, si bien no se encuentra en los escritos llegados á nosotros del autor que les dió nombre, fué dada por vez primera en Occidente por BACHET (problémes plaisans, 1624). Con la de BACHET coincide sustancialmente la resolucion de EULER (*Comm. Petrop.* 7, p. 46) que hemos trascrito en el texto (62) y reune las ventajas de la sencillez y la brevedad. La resolucion mediante la fraccion contínua (63) se debe á LAGRANGE (Mém. de Berlin 1767, p. 175.) Véase la edicion francesa en Lyon 1795 del *Algebra* de EULER, y las *Disq. arithm.* de Gauss 27 y siguientes. La aplicacion del teorema de FERMAT pertenece á BINET 1831. (J. de l'école polyt. Cap. 20, p. 289.)

Luego se verificará la ecuacion $ax - by = c$, siempre que, en general,

$$x = ca^{s-1} + bz, \quad y = c\frac{a^s - 1}{b} + az$$

64. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} au &= b + cx \\ a_1u &= b_1 + c_1y \\ a_2u &= b_2 + c_2z \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

será soluble en números enteros, en el solo caso de que a y c, a_1 y c_1, a_2 y c_2, ... sean primos entre sí. En el supuesto de que el número u satisfaga al sistema dado; que d sea el mínimo comun dividendo de los números c, c_1, c_2 ...; y que v represente un número arbitrario; el número $u + dv$ tambien satisfará al sistema dado. En efecto, por hipótesis $au - b$ debe ser divisible por c; $a_1u - b_1$ debe ser divisible por c_1, etc., etc. Luego tambien $au + adv - b$ será divisible por c; $a_1u + a_1dv - b_1$ lo será por c_1, etc.; etc.

De la primera ecuacion se deduce $u = \alpha + cp$. Sustituyendo este valor de u en la segunda ecuacion, se obtiene esta otra:

$$ca_1p = b_1 - \alpha a_1 + c_1y$$

de la cual (61) se desprenden

$$p = \beta + \frac{c_1}{\delta_1}q \quad \text{y} \quad u = \alpha_1 + c\frac{c_1}{\delta_1}q$$

siendo δ_1 el máximo comun divisor de c y c_1. Sustituyendo este nuevo valor de u en la tercera ecuacion, hallamos ésta:

$$c\frac{c_1}{\delta_1}a_2 q = b_2 - \alpha_1 a_2 + c_2 z$$

y, en consecuencia:

$$q = \beta_1 + \frac{c_2}{\delta_2}r \quad \text{y} \quad u = \alpha_2 + c\frac{c_1}{\delta_1}\frac{c_2}{\delta_2}r$$

designando δ_2 el máximo comun divisor de $c\dfrac{c_1}{\delta_1}$ y de c_2. Et cætera.

Ejemplo 1.° Determinar el número u de tal modo que $121u$ dé el resto 41, respecto del módulo 504; que $9u$ deje el resto -1, segun el módulo 35; y que $27u$ produzca el resto 11 respecto del módulo 16. Descomponiendo los dos primeros módulos en sus factores, tenemos desde luego: $504 = 8 . 9 . 7$ y $35 = 7 . 5$; de donde resulta que $121u - 41$ debe ser divisible por 8, 9 y 7; que $9u + 1$ debe serlo por 7 y por 5; y, finalmente, que $27u - 11$ debe serlo por 16.

Debiendo ser $121u - 41 = 8(15u - 5) + u - 1$ divisible por 8, deberá ser $u - 1$ divisible por 8,

Debiendo ser $121u - 41 = 9(13u - 5) + 4(u + 1)$ divisible por 9, lo será $u + 1$.

Debiendo ser $121u - 41 = 7(17u - 6) + 2u + 1$ divisible por 7, lo será $2u + 1$.

Debiendo ser $9u + 1 = 7u + 2u + 1$ divisible por 7, lo será $2u + 1$.

Debiendo ser $9u + 1 = 5.2u - (u - 1)$ divisible por 5, lo será $u - 1$.

Debiendo ser $27u - 11 = 16u + 11(u - 1)$ divisible por 16 lo será $u - 1$.

Por consecuencia: $u - 1$ debe ser divisible por 8, 5 y 16, ó sea, por 80; $u+1$, por 9; y $2u+1$, por 7. Las ecuaciones que expresan estas condiciones son:

$$u = 1 + 80x$$
$$u = -1 + 9y$$
$$2u = -1 + 7z$$

La primera no tiene necesidad de ser resuelta. La segunda da:

$$9y = 2 + 80x \qquad y = 9x - \frac{x-2}{9}$$

$$x = 2 + 9p \qquad u = 161 + 720p$$

Sustituyendo, de la tercera se deducen:

$$7z = 323 + 1440p \qquad z = 46 + 206p - \frac{2p-1}{7}$$

$$2p = 1 + 7q \qquad p = 3q + \frac{q+1}{2}$$

$$q = -1 + 2r$$

Suponiendo que $r = 0$, es $q = -1$, $p = -3$, $u = -1999$: luego, en general:

$$u = -1999 + 5040p$$

donde 5040 es el mínimo comun dividendo de los módulos.

Ejemplo 2.º Las ecuaciones que expresan que el número u da el resto 5 ó -4 (mód. 9), el resto

9 ó — 1 (mód. 10), y es ademas divisible por 11, son las siguientes:

$$u = -4 + 9x$$
$$u = -1 + 10y$$
$$u = 11z$$

De las cuales se desprenden:

$$9x = 3 + 10y, \; x = y + \frac{y+3}{9}$$
$$y = -3 + 9p$$

Si $p = 0$, es $y = -3$, $u = -31$; y, en general:

$$u = -31 + 90p$$

Esta sustitucion da:

$$11z = -31 + 90p, \; z = -3 + 8p + 2\frac{p+1}{11}$$
$$p = -1 = 11q$$

Si $q = 0$, será $p = -1$, $u = -121$; y, en general:

$$u = -121 + 990q$$

65. Para resolver en números enteros un sistema de m ecuaciones lineales con $m + 1$ incógnitas, se eliminan $m - 1$ incógnitas, y así llegamos á una ecuacion con dos incógnitas. Los valores de estas incógnitas, resultantes de la expresada ecuacion, se sustituyen en una de las ecuaciones deducidas, que, además de las dos incógnitas, obtenidas, contenga otra. Los valores de las tres incógnitas que se hallen resolviendo tal ecuacion, se sustituyen nuevamente; etc., etc.

Ejemplo 1.º De las ecuaciones

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920$$

se halla por la eliminación de z:

$$5y = 500 - 6x, \quad y = 100 - x - \frac{x}{5}$$

$$x = 5p, \qquad y = 100 - 6p$$

Mediante esta sustitucion, de la primera de las ecuaciones dadas se deduce

$$7z = 15\,(4 + p), \quad z = 15\frac{p+4}{7}$$

$$p = -4 + 7q.$$

Luego al sistema propuesto le satisfacen los valores:

$$x = -20 + 35q, \; y = 124 - 42q, \; z = 15q$$

que son positivos cuando $q = 1, 2$.

Ejemplo 2.º De las ecuaciones

$$4u + 13x + 5y - 2z = 2559$$
$$-5u + 8x + 7y + 3z = 1595$$
$$-7u + 11x - 3y + 5z = 2157$$

se deducen las siguientes:

$$\begin{array}{r} 97x + 53y + 2z = 19175 \\ 135x + 23y + 6z = 26541 \\ \hline 39x + 34y \qquad = 7746 \end{array}$$

Poniendo $x = 2p$, $y = 3q$, la última ecuacion da

$$13p = 1291 - 17q,\ p = 99 - q - 4\frac{q-1}{13}$$
$$q = 1 + 13r$$

Si $r = 0$, es $q = 1$, $p = 98$; y, en general:

$$x = 196 - 34r,\ y = 3 + 39r$$

Sustituyendo estos valores de x é y en la primera de las ecuaciones deducidas, hallamos:

$$2z = 4 + 1231r,\ r = 2s$$

y, por consecuencia:

$$x = 196 - 68s,\ y = 3 + 78s,\ z = 2 + 1231s$$

Y con esta sustitucion nos da la prímera de las ecuaciones propuestas:

$$4u - 2956s = 0,\quad u = 739s$$

El sistema resuelto tiene soluciones positivas para $s = 1, 2$.

66. Una ecuacion lineal con m incógnitas es resoluble en números enteros, sólo cuando los coeficientes de las incógnitas sean primos entre sí. Los valores de cada una de las incógnitas serán expresados mediante $m - 1$ indeterminadas.

Ejemplo 1.° $5x + 7y + 8z = 50$.

$$5x = 50 - 7y - 8z;\quad x = 10 - y - z - \frac{2y + 3z}{5}$$

$$2y = -3z + 5p,\qquad y = -z + 2p - \frac{z-p}{2}$$

$$z = p + 2q,\quad y = p - 3q,\quad x = 10 - 3p + q$$

Si x, y, z son positivos, lo serán tambien $x+3z=10+7q$ y $x+3y=10-8q$; el número q se hallará comprendido entre $-\frac{10}{7}$ y $+\frac{10}{8}$ y tendrá, en consecuencia, los valores $-1, 0, 1$. Cuando $q=1$ y $p>3$, será x negativo. Luego se encuentran soluciones positivas de la ecuacion dada, cuando:

$$q=-1 \qquad p=0$$
$$q=0 \qquad p=1,\ 2,\ 3.$$

EJEMPLO 2.º $15x+6y+20z=171$.

$$6y=171-15x-20z,$$

$$y=28-2x-3z-\frac{3x+2z-3}{6}$$

$$2z=3-3x+6p \qquad z=3\left(p-\frac{x-1}{2}\right)$$

$$x=1+2q,\ z=3p-3q,\ y=26+5q-10p$$

La ecuacion propuesta tendrá soluciones positivas siempre que $x=1+2q$ é $y+\frac{10}{3}z=26-5q$ sean positivos; y que, por lo tanto, q se halle comprendido entre $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{26}{5}$, y reciba los valores enteros $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Pero, si $q>3$, la z ó la y son negativas: luego las soluciones positivas existirán para los valores correspondientes de q y de p:

q	0	0	1	1	2	3
p	1	2	2	3	3	4

67. Para hallar los valores enteros de x por los cuales reciba la funcion fraccionaria

$$y = \frac{cx^2 + dx + e}{ax + b}$$

valores tambien enteros, se efectúa la division parcial

$$a^2y = \frac{a^2cx^2 + a^2dx + a^2e}{ax + b}$$

$$= acx + ad - bc + \frac{a^2e + b^2c - abd}{ax + b}$$

Y de este cociente se desprende la igualdad

$$(a^2y - acx - ad + bc)(ax + b) = a^2e + b^2c - abd$$

La cual patentiza que, si $a^2e + b^2c - abd$ fuese divisible por números de la forma $ax + b$, lo sería tambien por números de la forma

$$a^2y - acx - ad + bc;$$

y que, por lo tanto, habrémos de buscar entre los divisores de $a^2e + b^2c - abd$ aquellos que sean de la forma $ax + b$; ó, entre los números de esta forma, los que se hallen contenidos en $a^2e + b^2c - abd$.

Ejemplo 1.° $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 29}{x - 3}$

Efectuada la division, se halla la igualdad

$$(y + x + 1)(x - 3) = 26$$

Luego:

$x-3$	1	2	13	26	-1	-2	-13	-26
$y+x+1$	26	13	2	1	-26	-13	-2	-1
x	4	5	16	29	2	1	-10	-23
y	21	7	-15	-29	-29	-15	7	21

Ejemplo 2.° $y = \dfrac{2x+18}{5x-3}$

Efectuada la division, se halla:

$$(5y-2)(5x-3) = 96.$$

Luego:

$5x-3$	2	12	32	-3	-8	-48
$5y-2$	48	8	3	-32	-12	-2
x	1	3	7	0	-1	-9
y	10	2	1	-6	-2	0

Ejemplo 3.° $y = \dfrac{3x^2+1}{2x+1}$

Efectuada la division, hallamos:

$$(4y-6x+3)\ (2x+1) = 7$$

Por lo tanto:

$2x+1$	1	7	-1	-7
$4y-6x+3$	7	1	-7	-1
x	0	3	-1	-4
y	1	4	-4	-7

68. Para resolver en números enteros la ecuacion (*)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

estableceremos esta otra:

$$t^2 + u^2 = (t + v)^2$$

de la cual inmediatamente se deducen:

$$t = \frac{u^2 - v^2}{2v} \quad \text{y} \quad t + v = \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

Luego, si u y v son números racionales, los números

$$\frac{u^2 - v^2}{2v}, \; u, \; \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

son valores racionales de x, y, z, que satisfacen á la ecuacion dada.

Tambien la satisfacen dichos valores, multiplicados por $2v$: de lo cual se desprende que, si u y v son enteros, los números

$$u^2 - v^2, \; 2uv, \; u^2 + v^2$$

son asimismo enteros que verifican la ecuacion propuesta.

(*) La ecuacion *pitagórica* cuya resolucion dió Euclides en el Cap. X 29. Lema 1 de sus Elem. (Véase *Arch. de Grunert*, t. 56). Que la ecuacion $x^n + y^n = z^n$, para $n > 2$, no es soluble en números enteros; ó, lo que es igual, que la suma de dos potencias n^{as} no puede ser otra potencia n^a, ya lo notó Fermat (Observ. ad Dioph. Arithm. II, 8); pero todavía nos falta una demostracion general de la ley que Fermat vislumbrara.

Cuando u y v tengan el máximo comun divisor m, los números $u^2 - v^2$, $2uv$ y $u^2 + v^2$ tendrán el máximo comun divisor m^2.

Cuando u y v sean impares, lo serán tambien u^2 y v^2; par será $u^2 + v^2$; el número $u^2 - v^2$, divisible por 8; y, por consecuencia, los valores de x, y, z divisibles por 2.

Síguese de lo dicho que, para obtener valores de x, y, z que no tengan divisor comun, deben elegirse para u y v valores primos entre sí, que no sean ambos impares. Por ejemplo:

v	1	1	1 . .	2	2	2 . .	3	3	3 . .
u	2	4	6 . .	3	5	7 . .	4	8	10 . .
x	3	15	35 . .	5	21	45 . .	7	55	91 . .
y	4	8	12 . .	12	20	28 . .	24	48	60 . .
z	5	17	37 . .	13	29	53 . .	25	73	109 . .

De cualquier manera que se elijan los números u y v, uno de los números x ó y será divisible por 3; uno de los mismos, divisible por 4; y uno de los x, y, z, divisible por 5: por lo cual será el producto xyz divisible por 60 (*).

Demostracion. Todos los números son congruentes, segun el módulo 3, con los números 0, y ± 1; y sus cuadrados, con 0 y 1: luego, si ni u ni v son divisibles por 3, la diferencia de sus cuadrados $u^2 - v^2$ lo será. Si uno de los números u ó v es

(*) Frénicle *sur les triangles rectangles en nombres* 1676 prop. 26—30 (Anc. *Mém. de París* t. V) Ann. de Gerg. 20 p. 212. *J. de Crelle* 5 p. 386.

par, el producto $2uv$ será divisible por 4. Si los dos números u y v son impares, los números x, y, z serán divisibles por 2, y $\frac{1}{2}x$ divisible por 4.

Respecto del módulo 5, son congruentes todos los números con los restos 0, ± 1, ± 2; y sus cuadrados, con $0, 1, -1$. Luego, si ni u ni v son divisibles por 5, lo será $u^2 - v^2$, ó $u^2 + v^2$.

69. La fórmula $a + bx + cx^2$, para valores racionales de x, no puede ser incondicionalmente un cuadrado (*); pero, bajo las particulares condiciones de que sea a ó c un cuadrado; ó de que dicha fórmula pueda ser representada por un producto pq; ó por un binomio $p^2 + qr$, designando p, q y r funciones lineales de x; pueden hallarse valores racionales de x, apropiados para que tal fórmula sea un cuadrado, del modo siguiente:

Si $a = \alpha^2$, harémos $\alpha^2 + bx + cx^2 = (\alpha + ux)^2$; y, por consecuencia:

$$x = \frac{2\alpha u - b}{c - u^2}, \quad \alpha + ux = \frac{\alpha(c + u^2) - bu}{c - u^2}$$

Si $c = \gamma^2$, estableceremos la ecuacion $a + bx + \gamma^2 x^2 = (u + \gamma x)^2$; y, por consecuencia:

$$x = \frac{a - u^2}{2\gamma u - b}, \quad u + \gamma x = \frac{\gamma(a + u^2) - bu}{2\gamma u - b}$$

Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado, la fórmula

(*) EULER *Introd.* I § 50 y *Álgebra* II, 2.

$a + bx + cx^2$ puede ser representada por la diferencia de dos cuadrados; y, de consiguiente, por el producto de dos funciones de primer grado en x. Haciendo, pues,

$$(f + gx)(m + nx) = u^2 (f + gx)^2$$

hallarémos:

$$x = \frac{fu^2 - m}{n - gu^2}, \quad u(f + gx) = \frac{(fn - gm)u}{n - gu^2}$$

Por último: si $a + bx + cx^2 = p^2 + qr$, estableceremos la ecuacion

$$p^2 + qr = (p + qu)^2$$

y la x se calculará mediante la ecuacion de primer grado

$$r = 2pu + qu^2.$$

Pues ya ántes supusimos que p, q y r habian de ser funciones de primer grado en x.

70. Segun Euler (*Introd.* II, 519) la ecuacion trascendente $x^y = y^x$ puede reducirse, haciendo $y = ux$. Por esta sustitucion, en efecto, la ecuacion dada se transforma en esta otra: $(x^u)^x = (ux)^x$; de la cual se deducen los números reales $x^u = ux$ y $x^{u-1} = u$; y de éstos, que

$$x = u^{\frac{1}{u-1}} \text{ é } y = uu^{\frac{1}{u-1}}$$

satisfacen á la primera. Para resolverla en números racionales, hagamos $u - 1 = \frac{1}{v}$; y, así obtendremos los nuevos valores:

$$x = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v} \quad \text{é} \quad y = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

v	1	2	3	...
x	2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	...
y	4	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$	...

LIBRO TERCERO.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES ALGEBRÁICAS.

X. Teoremas elementales.

71. Si el valor $f(x)$ de una funcion *entera*, de grado n^{o}, corresponde al valor x de la variable, la diferencia $f(x)-f(t)$ es divisible por la diferencia correspondiente $x-t$. Y el cociente es una funcion entera del grado $(n-1)^{o}$ (*).

DEMOSTRACION. De los dos valores de la funcion dada,

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

$$f(t)=a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1 t+a_0$$

se halla por sustraccion:

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=a_n\frac{x^n-t^n}{x-t}+a_{n-1}\frac{x^{n-1}-t^{n-1}}{x-t}+\ldots$$

Y como x^k-t^k es divisible (ARIT. UNIV. 45) por

(*) Esta extension ó generalizacion del teorema sobre la divisibilidad de x^k-t^k *por* $x-t$ data del principio del siglo XVII. DESCARTES *Geom.* III.

$x - t$, la proposicion enunciada es cierta. El cociente

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n x^{n-1} + a_n t \left| x^{n-2} + a_n t^2 \right| x^{n-3} + \dots$$
$$\qquad\qquad + a_{n-1} \quad\quad + a_{n-1} t \qquad\quad + \dots$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{n-2} \qquad\quad + \dots$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots$$

es una funcion ***simétrica*** (20) de x y t que puede ordenarse: ya, segun las potencias ascendentes de t, como sigue:

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1$$
$$+ (a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_3 x + a_2) t$$
$$+ (a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \dots + a_4 x + a_3) t^2 + \dots;$$

ya tambien, segun las potencias descendentes de x, como se expresa abreviadamente por el polinomio

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$$

cuyos coeficientes, sujetos á las condiciones

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} + b_{n-1} t$$
$$b_{n-3} = a_{n-2} + b_{n-2} t$$
$$\dots\dots\dots$$

se calculan sencillamente. De la identidad

$$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \dots)(x - t) + f(t)$$

se deduce que, para $x = 0$, es $f(t) = a_0 + b_0 t$.

EJEMPLOS.—Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a(x^3 + x^2t + xt^2 + t^3) + b(x^2 + xt + t^2)$$
$$+ c(x + t) + d$$
$$= ax^3 + bx^2 + cx + d + (ax^2 + bx + c)t$$
$$+ (ax + b)t^2 + at^3$$

Supuesta $f(x) = 6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16$, $f(x) - f(4)$ es divisible por $x - 4$. Los coeficientes del cociente, como en este caso particular es $b_5 = 6$, $b_4 = -19 + 6 . 4$ etc., se calculan segun expresa el siguiente schema:

6	— 19	13	— 20	48	0	— 16
	24	20	132	448	1984	7936
6	5	33	112	496	1984	7920

Y dicho cociente será, por consecuencia:

$$\frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984$$

Y, puesto que $f(4) = -16 + 1984 . 4$, tambien:

$$\frac{f(x)}{x - 4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984 + \frac{7920}{x - 4}.$$

72. Para expresar la funcion entera $f(x)$ en la proximidad del valor $f(t)$, ó sea, para desarrollar dicha funcion segun las potencias ascendentes de $x - t$, se hace $x = t + y$ y se ordenan los términos de las potencias de este binomio. Es más sencillo,

sin embargo, calcular en cada caso que ocurra la série de cocientes:

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=f_1(x), \qquad \frac{f_1(x)-f_1(t)}{x-t}=f_2(x), \ldots$$

mediante el procedimiento explicado ántes; y así se obtienen:

$$f(x)=f(t)+(x-t)f_1(x); \; f_1(x)=f_1(t)+(x-t)f_2(x)\ldots$$

y, por consecuencia:

$$f(x)=f(t)+(x-t)f_1(t)+(x-t)^2 f_2(x); \text{etc.} \ldots$$

Ejemplo. Para desarrollar la funcion

$$f(x)=x^4-2x^3+5x^2-3x+12$$

segun las potencias ascendentes de $(x-2)$, se dispone el cálculo como sigue:

1	-2	5	-3	12	
	2	0	10	14	
1	0	5	7	$26=f(2)$	$x^3+5x+7=f_1(x)$
	2	4	18		
1	2	9	$25=f_1(2)$		$x^2+2x+9=f_2(x)$
	2	8			
1	4	$17=f_2(2)$			$x+4=f_3(x)$
	2				
1	$6=f_3(2)$				

$$f(x)=26+25(x-2)+17(x-2)^2+6(x-2)^3+(x-2)^4$$

Observacion. Este desarrollo vale para conocer si $f(x)-f(t)$ es divisible por una potencia de $(x-t)$. Pues, si $f_1(t)=0$, será $f(x)-f(t)$ divisible por $(x-t)^2$; si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son nulos, $f(x)-f(t)$ será divisible por $(x-t)^3$; etc., etc.

Así, por ejemplo, desarrollando

$$f(x)=x^5+8x^4+21x^3+14x^2-20x-24$$

segun las potencias ascendentes de $(x+2)$ hallamos:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 8 & 21 & 14 & -20 & -24 \\
 & -2 & -12 & -18 & 8 & 24 \\
\hline
1 & 6 & 9 & -4 & -12 & 0 \\
 & -2 & -8 & -2 & 12 & \\
\hline
1 & 4 & 1 & -6 & 0 & \\
 & -2 & -4 & 6 & & \\
\hline
1 & 2 & -3 & 0 & &
\end{array}$$

Y este cálculo demuestra que

$$f(x)=(x+2)^3\,(x^2+2x-3).$$

73. Si la funcion de grado n^o

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

se anula para $x=\alpha$, será divisible por una potencia de $(x-\alpha)$ cualquiera que sea x (72). Si esta potencia es la λ^a, y la funcion $f(x)$, por consecuencia, puede representarse por el producto de $(x-\alpha)^\lambda$ por una funcion entera $g(x)$, se dice que $f(x)$, para $x=\alpha$, es *nula* λ *veces*; y α toma el nombre de *raiz* λ*-ple de la ecuacion* $f(x) = 0$.

Si la misma funcion $f(x)$ es ademas nula μ veces para $x = \beta$, la funcion entera $g(x)$, para $x = \beta$, deberá ser nula μ veces, y divisible, en consecuencia, por $(x - \beta)^{\mu}$. Y entónces la funcion dada $f(x)$ podrá ser expresada mediante el producto de $(x - \alpha)^{\lambda}(x - \beta)^{\mu}$ por una funcion entera $h(x)$. Y así sucesivamente.

Cuando la funcion de n° grado sea nula para n valores dados de su variable: λ veces para $x = \alpha$; μ veces para $x = \beta, \ldots$ dicha funcion será divisible por el producto de los n factores $x - \alpha$, $x - \beta, \ldots$ Para cociente de esta division se halla el coeficiente de índice más alto, a_n, que en la funcion figura (40).

Si la funcion de n° grado es nula para más de n valores dados de su variable, sus coeficientes serán nulos: dicha funcion será *idénticamente nula*, ó sea, nula para cualquiera valor de x (*). En efecto, si entre los factores del producto

$$f(x) = a_n (x - \alpha)^{\lambda} (x - \beta)^{\mu} \ldots$$

no son nulos desde el segundo en adelante, lo cual exige que x tenga un valor diferente de $\alpha, \beta, \ldots$, será $a_n = 0$ la condicion necesaria para que la funcion $f(x)$ se anule. Pues, si la funcion de $(n-1)$° gra-

(*) CAUCHY *Anal. algebr.* c. IV. 1.—Una aplicacion de esta ley hicimos ya. ARIT. UNIV 196.

do, $a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ se anula para más de $n-1$ valores dados de su variable, será $a_{n-1} = 0$. Y lo mismo podríamos demostrar, respecto de todos los coeficientes de la funcion $f(x)$.

Despréndese de lo dicho que una funcion de n^o grado será determinada hasta su máximo coeficiente a_n, mediante n valores de su variable que la anulen; ó bien, que semejante funcion es representable de un solo modo por el producto de n funciones determinadas de primer grado, no siempre todas entre sí diferentes, por un factor cualquiera a_n, independiente de su variable.

Y de aquí que una ecuacion no idéntica, de n^o grado, $f(x) = 0$, no tiene *más* de n raizes. Que tiene *tantas* realmente es más difícil de conocer, y lo demostraremos luego (85).

OBSERVACION. Si los coeficientes a_n, a_{n-1}, ... son reales, y t y t' números complejos conjugados, tambien serán $f(t)$ y $f(t')$ funciones complejas conjugadas que se anularán simultáneamente; y el producto $(x-t)(x-t')$, norma de $x-t$ (AR. UN. 85), será un divisor real de segundo grado de la funcion $f(x)$.

Una funcion de x de n^o grado es determinada uniformemente (de un solo modo) por sus valores y_0, y_1, y_2 ... y_n que corresponden á los de su variable x_0, x_1, x_2 ... x_n. NEWTON (*Princ.* III *lemma* 5 despues de la *prop.* 40) estableció la igualdad

$$y = y_0 + A_0(x-x_0) + A_1(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ A_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$

y calculó los coeficientes A_0, A_1 ... mediante el sistema:

$$y_1 = y_0 + A_0 (x_1 - x_0)$$

$$y_2 = y_0 + A_0 (x_2 - x_0) + A_1 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

. . . .

Las diferencias

$$y_2 - y_1 = A_0 (x_2 - x_1) + A_1 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$= B_0 (x_2 - x_1)$$

. . . .

producen el sistema:

$$y_1 - y_0 = A_0 (x_1 - x_0)$$

$$y_2 - y_1 = B_0 (x_2 - x_1), \quad B_0 - A_0 = A_1 (x_2 - x_0)$$

$$y_3 - y_2 = C_0 (x_3 - x_2), \quad C_0 - B_0 = B_1 (x_3 - x_1),$$
$$B_1 - A_1 = A_2 (x_3 - x_0)$$

. . . .

Este mismo resultado produce inmediatamente la *fórmula de interpolacion de* LAGRANGE 1795 *(J. de l'éc. polyt. Cah.* 7—8, p. 417.)

$$y = y_0 \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \dots$$
$$+ y_n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Cuando dos funciones de x, del grado n^o,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots \quad \text{y} \quad b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

coincidan para $n+1$ valores de x, serán congruentes. Puesto que la funcion del grado n^o, que por sustraccion se obtiene,

$$(a_n - b_n)\, x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})\, x^{n-1} + \ldots$$

es nula para los mismos valores: lo cual exige que sus coeficientes $a_n - b_n$, $a_{n-1} - b_{n-1}$, ... sean nulos, ó bien, que $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$. etc., etc.

74. De la identidad (73)

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$$

se deduce que la ecuacion $f(x) = 0$ tiene las raizes $\alpha_1 \ldots \alpha_n$; y que la unidad y las sumas de los productos de dichas raizes tomadas 1 á 1 (unarios), 2 á 2 (binarios), 3 á 3 (ternarios) ... y multiplicadas por -1, son entre sí respectivamente como los coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ (*).

Demostracion. El producto

$$(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\,\ldots\,(x-\alpha_n)$$

adquiere, despues de efectuado, la forma:

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

cuando por C_k se designa la suma de los productos de cada k cantidades entre las $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots -\alpha_n$ (Arit. univ. 151). Luego, á consecuencia de la iden-

(*) Este teorema fué descubierto por Cardan en los casos más sencillos (hasta la ecuacion de 4.° grado); y en su general comprension, por Vieta, al fin de su escrito *de emendatione æquationum*.

tidad supuesta, tendremos (23) : $a_n C_k = a_{n-k}$; y, por lo tanto :

$$1 : C_1 : C_2 : \ldots = a_n : a_{n-1} : a_{n-2} : \ldots$$

Ejemplo. Designando por ρ una raiz propia n^a de la unidad, las restantes raizes n^{as} de 1 serán (Arit. univ. 101) ρ^2, ρ^3, ... ρ^n. Luego:

$$x^n - 1 = (x - \rho)\,(x - \rho^2)\ \ldots\ (x - \rho^n)$$

$$\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n = 0,\ (-1)^n \rho\rho^2 \ldots \rho^n = -1$$

Es decir que la suma de las raizes n^{as} de 1 es igual á 0; y el producto de las mismas es igual á $(-1)^{n-1}$.

Las cantidades C_1, C_2... expresadas racionalmente por los coeficientes a_n, a_{n-1}... son funciones simétricas de las cantidades $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, ... (20). Y de aquí que se tratára de ver si toda funcion entera simétrica de estas mismas cantidades podría ser expresada racionalmente por aquellos coeficientes. Newton halló la suma de sus potencias k^{as} de un modo recurrente (Arit. univ. p. 192. Véase Euler *Opusc. var. arg.* II, p. 108. *Mém. de Berlin* 1748, p. 234, y otros.) Expresiones particulares independientes para las sumas de las 2.as, 3.as y 4.as potencias aparecen ántes en Girard 1629. (Klügel *math.* W. I, página 56.)

75. La funcion $x^n - 1$ es nula para $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$ siempre que m sea par (Arit. univ. 194). Este valor es *n-forme*; y, de consiguiente, dicha funcion admite n divisores *diferentes*, de primer grado (73),

que se deducen de la expresion $x - e^{i\frac{m\pi}{n}}$, haciendo en ella $m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ Pero evidentemente:

$$\left(x - e^{i\frac{m\pi}{n}}\right)\left(x - e^{-i\frac{m\pi}{n}}\right) = x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1.$$

Luego la funcion propuesta tiene tambien divisores de segundo grado que se derivan de la expresion $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$, haciendo en ella $m = 2$, 4, 6... Á estos divisores se agrega el divisor de primer grado, $x - 1$ $(m = 0)$; y, cuando n sea par, el divisor, de primer grado tambien, $x + 1 (m = n)$.

La funcion $x^n + 1$ se anula para $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$, cuando m es impar; sus divisores de segundo grado surgen de la expresion $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$, haciendo en ella $m = 1, 3, 5\ldots$ Y á estos se agrega, si n es impar, el divisor lineal $x + 1$ $(m = n)$.

La funcion $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ tiene los divisores $x^n - e_{i\alpha}$ y $x^n - e_{-i\alpha}$. Pero $x^n - e^{i\alpha}$ es divisible por

$$x - e^{i\frac{\alpha + m\pi}{n}}\text{; y } x^n - e^{-i\alpha} \text{ lo es por } x^n - e^{-i\frac{\alpha+m\pi}{n}},$$

cuando m representa un número par. Los n divisores diferentes, de segundo grado, de la funcion dada, surgen de la expresion $x^2 - 2x\cos\frac{\alpha + m\pi}{n} + 1$, haciendo en ella $m = 0, 2, 4\ldots$

La fórmula $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ representa el cuadrado del lado de un triángulo cuyos otros dos lados tienen las

longitudes x y 1, y forman el ángulo que corresponde al arco φ. Por consecuencia, los divisores cuadráticos de las funciones

$$x^n - 1, \quad x^n + 1, \quad x^{2n} - 2x^n \cos\alpha + 1$$

pueden ser construidos, dividiendo el círculo, ó un arco de círculo, en n partes iguales; y así, geométricamente, fueron por vez primera construidos por COTES (*Harmonia mensurarum* p. 114 *Op. posth* 1722) los divisores de $x^n - 1$ y de $x^n + 1$: y los de $x^{2n} - 2x^n \cos\alpha + 1$, por MOIVRE 1730 (*Misc. anal.* p. 22.)

76. Una *funcion fraccionaria* irreducible (17) será *nula* cuando su numerador sea nulo; é *infinita* cuando sea nulo su denominador; y será, por lo tanto, determinada (73) mediante los valores de sus variables para los cuales sea nula, y se haga infinita, hasta un factor independiente de las variables.

Si, para $x = \alpha$, es λ veces nulo el denominador de la funcion fraccionaria, y ésta, por lo tanto, λ veces infinita, puede deducirse de ella una *fraccion parcial* pura, cuyo denominador sea $(x - \alpha)^\lambda$, y cuyo numerador sea independiente de x, ó una funcion entera de x que no llegue al grado λ. Para conseguirlo se desarrollan (72) el numerador y el denominador de la funcion dada, segun las potencias crecientes de $x - \alpha$, y se dividen despues el primero por el segundo hasta obtener los λ primeros términos del cociente que forman el numerador buscado. Queda, pues, otra fraccion cuyo numerador es el resto de la division efectuada y cuyo denominador es el divisor, que se escribe tal y como se ha indicado, siempre que la funcion fraccionaria dada no pueda, ó no deba, ser descompuesta en más de 2 fracciones parciales. Cuando no se tome en cuenta el resto, bastarán los desarrollos hasta la potencia $(\lambda-1)^a$

Por ejemplo, la funcion fraccionaria

$$\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2}$$

es 3 veces infinita para $x=-2$; 1 vez para $x=-1$; 2 veces para $x=0$; y se compone, por lo tanto, de 3 fracciones parciales cuyos denominadores respectivos son $(x+2)^3$, $x+1$ y x^2; sin que vayan acompañadas de funcion entera, por ser pura la fraccionaria dada.

Los desarrollos segun las potencias de $x+2=y$ dan:

$$\frac{-3+2y}{y^3(-4+8y-5y^2\ldots)}=\frac{\frac{3}{4}+y+\frac{17}{16}y^2+\ldots}{y^3}$$

y, por consecuencia, la fraccion parcial:

$$\frac{\frac{17}{16}x^2+\frac{21}{4}x+7}{(x+2)^3}.$$

De los desarrollos, segun las potencias de $x+1=y$, sólo aprovechan los primeros términos $(y=0)$. La fraccion parcial, cuyo denominador es $x+1$, tiene por numerador

$\frac{2x+1}{(x+2)^3x^2}$ que, para $x+1=0$, vale -1.

Los desarrollos segun las potencias ascendentes de x dan

$$\frac{1+2x}{x^2(8+20x\ldots)}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{16}x}{x^2}+\ldots$$

y así se obtiene la fraccion parcial

$$\frac{-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}}{x^2}.$$

Y como la funcion fraccionaria dada no puede contener fracciones parciales con denominadores diferentes de los expresados, será idénticamente:

$$\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2}=\frac{\frac{17}{16}x^2+\frac{21}{4}x+9}{(x+2)^3}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}}{x^2}$$

La descomposicion de una funcion fraccionaria en fracciones parciales es el fundamento de la descomposicion de las integrales de diferenciales racionales que hallaron Leibniz y J. Bernoulli *(Acta Erud.* 1702-3). Los numeradores de las fracciones parcíales se determinarán en forma lineal mediante las condiciones necesarias para que

$$\frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{(x+2)^3}+\frac{b_0}{x+1}+\frac{c_1x+c_0}{x^2}-\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2}=0$$

sea una identidad, ó se verifique cualquiera que sea x (23). Este procedimiento, correspondiente al método analítico, aplicado por Euler *Introd.* I, 39, que presta tambien auxilio en otros desarrollos justificados, y fué empleado por Descartes en el problema de las normales *(Geom.* II), lleva el nombre de *Método de los coeficientes indetermina-*

dos. Fórmulas generales para los numeradores de las fracciones parciales fueron halladas mediante el Cálculo diferencial, por EULER 1755 *Cálc. dif.* II-40, y por JACOBI 1835 *de fract. simpl.* p. 9. Véase: EULER *Acta Petrop.* 1780 I, p. 32; y las consideraciones de BERLIN y HILL en el *J. de Crelle* 3 p. 150.

77. Cuando una funcion fraccionaria es infinita para un valor complejo de la variable y para su conjugado, comprende dos fracciones parciales, complejas conjugadas, cuya suma es real y puede calcularse directamente. En efecto, la funcion fraccionaria

$$\frac{f(x)}{(x^2+4x+5)^3 g(x)} = \frac{f(x)}{[(x+2)^2+1]^3 g(x)}$$

que es 3 veces infinita para $x = -2 \pm i$, mediante la sustitucion $x+2=y$, puede ser expresada por esta otra:

$$\frac{\varphi(y)}{(y^2+1)^3 \chi(y)}.$$

Multiplíquense por $\chi(-y)$ los dos términos de de esta fraccion. (HILL *loc. cit.*) Entónces la funcion entera $\chi(y)\chi(-y)$ contiene solamente potencias pares de y, puesto que permanece invariable en el cambio de y por $-y$; y puede representarse por $\psi(y^2)$; mientras que los términos de $\varphi(y)\chi(-y)$ se distribuyen en $yF(y^2)+G(y^2)$. Y esto prueba que la funcion fraccionaria consta de los términos

$$\frac{F(y^2):\psi(y^2)}{(y^2+1)^3}y + \frac{G(y^2):\psi(y^2)}{(y^2+1)^3}$$

de los cuales pueden deducirse, como ántes lo hicimos, las fracciones parciales

$$\frac{a_5y^4+a_3y^2+a_1}{(y^3+1)^3}y+\frac{a_4y^4+a_2y^2+a_0}{(y^2+1)^3}=\frac{a_5y^5+a_4y^4+..}{(y^2+1)^3}$$

Ejemplo. $\dfrac{x^2+1}{(x^2+4x+5)^3(x^2+2)}$, cuando $x+2=y$, se convierte en

$$\frac{y^2-4y+5}{(y^2+1)^3(y^2-4y+6)}=\frac{-4y+(y^4-5y^2+30)}{(y^2+1)^3(y^4-4y^2+36)};$$

Y despues de desarrollada ésta, segun las potencias ascendentes de $y^2+1=z$, se obtiene:

$$-4y\frac{1:(41-6z+z^2)}{z^3}+\frac{(36-7z+z^2):(41-6z+z^2)}{z^3}$$

Y, por consecuencia, la fraccion parcial, cuyo denominador es z^3, tiene por numerador la expresion

$$-4y\left(\frac{1}{41}+\frac{6}{41^2}z-\frac{5}{41^3}z^2\right)+\frac{36}{41}-\frac{71}{41^2}z-\frac{221}{41^3}z^2$$

que es una funcion de 5.° grado en x. La fraccion parcial, cuyo denominador es x^2+2, tiene por numerador el valor que adquiere, para $x^2+2=0$, la expresion

$$\frac{(x^2+1)(x^2-4x+5)^3}{(x^4-6x^2+25)^3}, \text{ esto es: } \frac{-20x+261}{41^3}.$$

OBSERVACION.—Cuando las funciones de x, enteras, f y g, de los grados m^{o} y n^{o} respectivamente, no tienen un divisor comun, la fraccion pura $\frac{h}{fg}$ puede tambien descomponerse en las fracciones parciales $\frac{q}{f}+\frac{p}{g}$, sin el auxilio de las raizes de la ecuacion $fg=0$, expresando el numerador h por $pf+qg$. (Véase 90.)

Puede tomarse el multiplicador p de tal modo que $h-pf$ sea divisible por g.

El desarrollo independiente de la funcion fraccionaria, segun las potencias ascendentes de x, se encuentra mediante los correspondientes desarrollos de sus fracciones parciales. EULER *Int.* I cap. 13.

78. I.—Designando $g(x)$ y $h(x)$ funciones enteras, con coeficientes *enteros*, si en la funcion $g(x)h(x)$ son todos los coeficientes divisibles por el número primo p, lo serán tambien, ó todos los coeficientes de $g(x)$, ó todos los de $h(x)$.

En efecto, hagamos

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots \text{ y } h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$$

Ahora bien: si p divide á b_0, $b_1\dots b_{i-1}$, pero no á b_i; y divide tambien á c_0, $c_1\dots c_{k-1}$, pero no á c_k; evidentemente no estará contenido tampoco en b_ic_k. Luego en $g(x)h(x)$ existe un coeficiente, el de x^{i+k}, á saber:

$$\dots+b_{i-1}c_{k+1}+b_ic_k+b_{i+1}c_{k-1}+\dots$$

que no es divisible por p: contra la hipótesis. Y, por lo tanto, todos los coeficientes de $g(x)$, ó todos los de $h(x)$, son divisibles por p.

II.—Si $G(x)$ y $H(x)$ son funciones enteras, en las que sea la unidad el más alto coeficiente, y los restantes racionales; y los coeficientes de la funcion $G(x)H(x)$, fuera del más alto que es 1, son enteros; los coeficientes de cada una de las funciones $G(x)$ y $H(x)$, aparte del más elevado por supuesto, serán asimismo enteros (*).

En efecto, las funciones $G(x)$ y $H(x)$, si contienen coeficientes fraccionarios, pueden ser expresados por la q^a y la r^a parte de funciones enteras, con coeficientes enteros, $g(x)$ y $h(x)$; con lo cual quedará $G(x)H(x)$ expresada por $g(x)h(x):qr$. Pero esta funcion tiene coeficientes enteros, segun la hipótesis; y esto quiere decir que todo número primo, contenido en qr, lo está tambien en todos los coeficientes de $g(x)h(x)$; y, por consecuencia (I), en en todos los de $g(x)$, ó los de $h(x)$. Luego, dividiendo sucesivamente por todos los números primos, contenidos en qr, la funcion $g(x)$, ó la funcion $h(x)$, obtendremos como resultado las funciones $G(x)$ y $H(x)$, con coeficientes enteros.

III.—Si la funcion entera $f(x)$, con coeficientes enteros, de los que el más alto 1, es divisible por otra funcion entera, cuyo más alto coeficiente es tambien 1, los coeficientes restantes en esta última funcion no son fraccionarios (II), sino *enteros* ó *irracionales*.

En particular, las raizes de la ecuacion consiguiente $f(x)=0$ son enteras ó irracionales.

(*) Gauss *Disq. arithm.* 42.—Eisenstein *J. de Crelle* 39 p. 168.

En efecto: si los coeficientes a_{n-1}, a_{n-2} ... son enteros y r y s números primos relativos, la funcion particular

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$= \frac{1}{s^{n-1}}\left(\frac{r^n}{s} + a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2}s + \ldots\right)$$

no puede ser cero; en atencion á que r^n es primo con s. (ARIT. UNIV. 99.)

Una funcion entera, con coeficientes enteros, de los que el más elevado es a_n, puede ser expresada por el producto de a_n^{n-1} por una funcion entera con coeficientes enteros, de los que el más elevado sea 1 (46).

Toda funcion entera, con coeficientes enteros, que no sea divisible por una funcion del mismo género, se llama *irreducible*. Una ecuacion con coeficientes enteros será irreducible, cuando ninguna de sus raizes satisfaga á otra ecuacion del mismo género, pero de menor grado. ABEL *J. de Crelle* 4, página 132.

79. I.—Si la funcion entera $f(x)$, con coeficientes enteros de los que el más elevado es 1, admite el divisor del mismo género $x+a$, las funciones particulares

$$\ldots,\quad f(-1),\quad f(0),\quad f(1), \ldots$$

serán divisibles por

$$\ldots,\quad -1+a,\quad a,\quad 1+a, \ldots$$

respectivamente. Y, si alguna de estas divisiones no procede, ó no se realiza, no será $x+a$ divisor de la funcion dada. *(Regla de* Newton, *Arit. universal* 37, *ed. Lugd.*)

Admitiendo, pues, la identidad

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=(a+x)(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots)$$

deben verificarse tambien:

$$c_0=ab_0,\quad c_1=ab_1+b_0,\quad c_2=ab_2+b_1,\ldots$$

$$\frac{c_0}{a}=b_0,\quad \frac{c_1-b_0}{a}=b_1,\quad \frac{c_2-b_1}{a}=b_2,\ldots$$

Y, si alguna de estas divisiones no se realiza, $a+x$ no es divisor de $c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots$ *(Regla de* Bezout *Elem. d'Alg.*)

Ejemplo. $f(x)=x^5-34x^3+29x^2+212x-300$
$f(-1)=-450, f(0)=-300, f(1)=-92$

Por estos resultados vemos que el divisor $x+3$ no está excluido; pues 3 es divisor de -300; 2 lo es de -450; y 4 de -92. Tambien se halla:

$$\frac{-300}{3}=-100,\quad \frac{212+100}{3}=104;\ldots$$

Efectuada la division por $x+3$ (71), segun se expresa á continuacion:

1	0	-34	29	212	-300
	-3	9	75	-312	300
1	-3	-25	104	-100	0

encontramos el cociente

$$x^4-3x^3-25x^2+104x-100$$

del cual no puede excluirse el divisor $x-2$. Efectuando esta division tenemos:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -3 & -25 & 104 & -100 \\ & 2 & -2 & -54 & 100 \\ \hline 1 & -1 & -27 & 50 & 0 \end{array}$$

Y este cociente $x^3-x^2-27x+50$ tiene el mismo divisor $x-2$. Efectuando la division:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -27 & 50 \\ & 2 & 2 & -50 \\ \hline 1 & +1 & -25 & 0 \end{array}$$

obtenemos el cociente x^2+x-25. Y, por consecuencia: $f(x)=(x+3)(x-2)^2(x^2+x-25)$.

II.—Si $f(x)$ tiene el divisor de segundo grado, con coeficientes enteros, x^2+ax+b, las funciones particulares

$$\ldots, f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2) \ldots$$

son divisibles respectivamente por los términos de la progresion aritmética

$$\ldots, 4-2a+b, 1-a+b, b, 1+a+b, 4+2a+b, \ldots$$

Si se colocan, pues, en una fila los divisores de $f(-2)$ disminuidos en 4; en otra fila los de (-1) disminuidos en 1; en otra los de $f(0)$; en otra los de $f(1)$ disminuidos en 1; en otra los de $f(2)$ disminuidos en 4, etc., etc.; deberemos obtener una progresion aritmética de primer órden, cuyos términos se hallan en las filas sucesivas; y, si así no sucede, la funcion $f(x)$ no admite ningun divisor de segundo grado, con coeficientes enteros.

Si $f(x, y)$ es una funcion homogénea entera, con coeficientes enteros; y $x^2 + ax + b$, por ejemplo, es divisor de $f(x, 1)$, la forma $x^2 + axy + by^2$ estará contenida en $f(x, y)$. Si la funcion homogénea entera, con coeficientes enteros, $f(x, y, z)$ es divisible por la funcion del mismo género $g(x, y, z)$, las funciones $g(0, y, z)$, $g(x, 0, z)$ y $g(x, y, 0)$ serán divisores de $f(0, y, z)$, $f(x, 0, z)$ y $f(x, y, 0)$. Y mediante los divisores de estas últimas funciones pueden conocerse las formas posibles de la funcion $g(x, y, z)$. NEWTON *loc. cit.* CLAIRAUT (*Elem. d'Alg. III*).

80. Dada la funcion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

puede desarrollarse la diferencia $f(x + u) - f(x)$ de la funcion, segun las potencias ascendentes de la diferencia u de la variable (15).

En efecto, segun el teorema del binomio (ARITMÉTICA UNIVERSAL XXIII) tenemos:

$$(x - \alpha + u)^k = (x - \alpha)^k + k(x - \alpha)^{k-1} u + \ldots.$$

$$a(x - \alpha + u)^k - a(x - \alpha)^k = ka(x - \alpha)^{k-1} u + \ldots$$

Y esto prueba que la funcion $a(x - \alpha)^k$ tiene la *fluxion* $ka(x - \alpha)^{k-1}$.

Aplicando igual procedimiento á todos los términos de la funcion entera dada, $f(x)$, se halla su fluxion que designamos por $f'(x)$, á saber:

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

que es una funcion del grado $(n-1)^0$. Por el mismo procedimiento se halla la fluxion de $f'(x)$, que se llama fluxion 2.ª de $f(x)$ y designamos por $f''(x)$, á saber:

$$f''(x)=n(n-1)a_n x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}$$
$$+\ldots+2a_2$$

que es una funcion del grado $(n-2)^0$, y divisible por 2; etc., etc. La 3.ª fluxion de $f(x)$ es del grado $(n-3)^0$ y divisible por $3!$; la n^a fluxion es $n!a_n$, independiente de x y divisible por $n!$.

Si la funcion $f(x)$ puede ser expresada en la proximidad de $f(\alpha)$ por una *série de* TAYLOR, esto es, segun las potencias ascendentes de $x-\alpha$ (72), de tal modo que

$$f(x)=C_0+C_1(x-\alpha)+C_2(x-\alpha)^2+C_3(x-\alpha)^3+\ldots.$$

segun el mismo método explicado ántes hallaremos:

$$f'(x)=C_1+2C_2(x-\alpha)+3C_3(x-\alpha)^2+\ldots.$$
$$f''(x)=2C_2+2.3C_3(x-\alpha)+\ldots.$$
$$f'''(x)=2.3C_3+\ldots.$$

y, por consecuencia: $f(\alpha)=C_0$; $f'(\alpha)=C_1$; $f''(\alpha)=2C_2$; $f'''(\alpha)=2.3C_3$; etc.: de donde se deducen los coeficientes del desarrollo admitido (*), á saber:

$$C_0=f(\alpha),\ C_1=f'(\alpha), C_2=\frac{f''(\alpha)}{2},\ C_3=\frac{f'''(\alpha)}{3!},\ldots.$$

(*) TAYLOR *Meth. incrementorum* 1715 prop. 7. Véase STIRLING *Lineæ* 3.ᶦ *ordinis* 1717 prop. 3; y MACLAURIN *Fluxions* 1742 art. 751. Uno y otro se refieren á TAYLOR.

81. I.—Cuando para $x = \alpha$, la funcion entera $f(x)$ y sus fluxiones hasta la $(\lambda - 1)^a$ son nulas, pero la λ^a no es ya nula, dicha funcion y sus fluxiones hasta la $(\lambda - 1)^a$ son divisibles por potencias de $x - \alpha$, á saber: la funcion, por la potencia λ^a; la 1.ª fluxion, por la potencia $(\lambda - 1)^a$; la 2.ª, por la potencia $(\lambda - 2)^a$; la $(\lambda - 1)^a$ por la 1.ª Lo cual significa que, para $x = \alpha$, es la funcion λ veces nula; la 1.ª fluxion lo es $(\lambda - 1)$ veces; etc.: ó, en otros términos, que α es una raiz λ^e de la ecuacion $f(x) = 0$; una raiz $(\lambda - 1)^e$ de la ecuacion $f'(x) = 0$; etc. etc. (*).

Todas las leyes expresadas son consecuencia inmediata de la *série de* TAYLOR, mediante la cual se representa desarrollada la funcion $f(x)$. Y del mismo fundamento (80), y de la hipótesis

$$f(x) = (x - \alpha)^\lambda \varphi(x)$$

se deduce:

$$f(x+u) - f(x) = [(x - \alpha + u)^\lambda - (x - \alpha)^\lambda]\varphi(x+u) + (x - \alpha)^\lambda[\varphi(x+u) - \varphi(x)]$$

$$f'(x) = \lambda(x - \alpha)^{\lambda - 1}\varphi(x) + (x - \alpha)^\lambda \varphi'(x)$$

es decir: la divisibilidad de $f'(x)$ por $(x - \alpha)^{\lambda - 1}$, y la descomposicion en fracciones parciales:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x - \alpha} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

(*) Caractéres distintivos de las raizes múltiples de una ecuacion fueron ya publicados por HUDDE 1657 ántes del descubrimiento del Cálculo diferencial. *Epist.* I reg. 10 Geom. de DESCARTES ed. de SCHOOTEN 1659. Véase: EULER *Cálc. diff.* II c. 9.

II.—Cuando, para los valores α, β,.. de la variable, se hace varias veces nula la funcion entera $f(x)$, tambien se anulará la fluxion $f'(x)$; y la una y la otra serán divisibles por una funcion entera de x, con coeficientes que, en general, serán irracionales. El *máximo* comun divisor de la funcion entera con coeficientes racionales, $f(x)$, y de su fluxion $f'(x)$, será una funcion entera $g(x)$, con coeficientes *racionales* (17). Si, para $x=\alpha, \beta, \ldots$, la funcion $f(x)$, es λ veces, μ veces,... nula, tanto $g(x)$ como $f'(x)$ serán $(\lambda-1)$ veces, $(\mu-1)$ veces .. nulas. Y, por consiguiente, el cociente $f(x):g(x)$ será una funcion entera (p), con coeficientes racionales, que se anulará una vez, cuando $f(x)$ se anule una ó varias veces.

Si además representa $h(x)$ el máximo comun divisor de $g(x)$ y de su fluxion $g'(x)$, el cociente $g(x):h(x)$ será una funcion entera (q), con coeficientes racionales, que se anulará una vez, cuando $f(x)$ se anule dos ó más veces; etc.

Finalmente: si $p:q$ es una funcion entera, con coeficientes racionales, que se anula una vez, cuando $f(x)$ se anula una vez tambien; $q:r$ otra funcion entera, con coeficientes racionales, que se anula una vez cuando $f(x)$ se anule dos veces; etc., etc., tendremos:

$$f(x)=\frac{p}{q}\left(\frac{q}{r}\right)^2\ldots$$

III.—Síguese de lo dicho que toda funcion entera que se anule varias veces, para un valor de la variable, es *reducible*. Si la funcion entera $f(x)$ y su fluxion $f'(x)$ no son á un tiempo divisibles por una funcion entera, todas las raizes de la ecuacion $f(x) = 0$ serán entre sí diferentes.

82. Cuando la variable, dentro de un intervalo real, crezca ó suba desde x, la funcion entera $f(x)$ comenzará á crecer ó á menguar, á subir ó á bajar, segun que su fluxion $f'(x)$ sea positiva ó negativa. Siempre que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos diferentes, y no cambie el signo de $f'(x)$, mientras x recorre el intervalo real desde a hasta b, dentro de este intervalo existe un valor de la variable, y no más que uno, para el cual se anula la funcion (15).

Si, para $x = \alpha$, la funcion entera f y todas sus fluxiones son positivas, lo mismo sucederá para valores mayores de x; y por esto es α un *límite superior de las raizes reales* de la ecuacion $f = 0$. (Newton *Arith. univ.* p. 194 *ed. Lugd.*)

Ejemplo :

f	$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$
f'	$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$
$\frac{1}{2}f''$	$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$
$\frac{1}{6}f'''$	$10x^2 - 8x - 10$
$\frac{1}{24}f''''$	$5x - 2$

Para $x = 1$ es positiva la última de estas funciones, pero no las anteriores; para $x = 2$ son tambien positivas las anteriores y comienzan á crecer desde que x sube del valor 2: luego la ecuacion $f = 0$ no tiene raiz real ninguna que pase del límite 2.

Haciendo $x = -y$, siempre que $(-1)^5 f(-y)$ sea positivo para todos los valores de $y > \alpha$, la funcion f no cambiará de signo para $x = -y < -\alpha$. De las funciones resultantes por los supuestos ahora admitidos, á saber:

$$\begin{array}{l} y^5 + 2y^4 - 10y^3 - 30y^2 + 63y + 120 \\ 5y^4 + 8y^3 - 30y^2 - 60y + 63 \\ 10y^3 + 12y^2 - 30y - 30 \\ 10y^2 + 8y - 30 \\ 5y + 2 \end{array}$$

para $y = 1$, son positivas las dos últimas; para $y = 2$, las tres últimas; mas para $y = 3$ son todas positivas. De lo cual se deduce que -3 es un límite inferior de las raizes reales de la ecuaion $f(x) = 0$.

Si $y^5 f(1 : y)$ es positiva para todos los valores de $y > \alpha$, no podrá f cambiar de signo para $x = 1 : y < 1 : \alpha$.

83. Si, dada una série de *números reales*, se determinan los *signos* de los cocientes de cada número por el inmediato anterior, y entre los cocientes hallados existen v negativos, se dice que la série dada contiene v cambios *(variations)*. Tantos cambios, pues, se asignan á la funcion entera $f(x)$, cuantos haya en la série de sus coeficientes.

I.—Si α es un número positivo, y las funciones enteras, $(x - \alpha) f(x)$, $f(x)$ y $(x + \alpha) f(x)$ tienen respectivamente los cambios u, v, y w, la diferencia $u - v$ será un número positivo impar; y la diferencia $v - w$ será cero, ó un número positivo par.

Demostracion. Supongamos que en la funcion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.$ existe el primer cambio en el coeficiente a_p, el segundo en el a_q y el último en el a_t; formando los índices p, q,.. una série decreciente. Entónces claro es que los coeficientes de x^{p+1}, x^{q+1} y x^{t+1}, en la funcion $(x-\alpha)$ $f(x)$, tendrán signos idénticos con a_p, a_q y a_t; y, por consecuencia, en dicha funcion $(x-\alpha)f(x)$ habrá, por lo ménos, 1 cambio hasta el coeficiente de x^{p+1}; hasta el coeficiente de x^{q+1} habrá 2 cambios, por lo ménos; hasta el coeficiente de x^{t+1}, tantos cambios, por lo ménos, como haya en la $f(x)$. Mas, segun la hipótesis, a_0 tiene el mismo signo que a_t: luego en la funcion $(x-\alpha)$ $f(x)$, hasta su último término $-\alpha a_0$, existirá un cambio más, por lo ménos, que en $f(x)$.

Por el contrario, en $(x+\alpha)$ $f(x)$ habrá, hasta el coeficiente de x^{p+1}, todo lo más 1 cambio; hasta el coeficiente de x^{q+1}, á lo más 2 cambios; y hasta el coeficiente de x^{t+1} tantos, á lo sumo, como haya en $f(x)$. Y solamente en el caso de que no haya un cambio en el coeficiente de x^{t+1} lo habrá en la funcion $(x+\alpha)f(x)$ hasta su último término.

Luego: $u-v-1$ y $v-w$ no son negativas. Si los coeficientes extremos a_n y a_0 tienen el mismo signo, v y w son pares y u impar; cuando a_n y a_0 tengan signos diferentes, v y w serán impares y u par. Y, por consecuencia, siempre la diferencia $u-v$ será impar, y la diferencia $v-w$ par.

II.—Si la ecuacion $f(x)=0$ tiene las raizes positivas α,... α_k, la funcion
$f(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_k)\varphi(x)$ tendrá k cambios, por lo ménos (I). Y recíprocamente:

Regla de Descartes (*).—Si en $f(x)$ hay v cambios, la ecuacion $f(x)=0$ no tendrá más de v raizes positivas. Si en $f(-x)$ hay v' cambios, la ecuacion $f(x)=0$ no podrá tener más de v' raizes negativas (que son positivas de la ecuacion $f(-x)=0$). Y de resultas, la ecuacion $f(x)=0$ no podrá tener más de $v+v'$ raizes reales.

EJEMPLO. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ tiene 1 cambio; $f(-x)$ no tiene ninguno; y, por consecuencia, la ecuacion $f(x)=0$ tiene, á lo sumo, 1 raiz positiva, y ninguna negativa. En efecto, la discriminante de la ecuacion propuesta, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2+1^3=7\frac{1}{4}$, es positiva.

III.—Si entre los coeficientes de $f(x)$ ninguno es cero, en $f(x)$ existirán $n-v$ permanencias de signos (no-cambios), á las cuales corresponden los cambios ó variaciones existentes en $f(-x)$; y, por lo tanto, $v+v'=n$.

Si en $f(x)$ hay $2k$ coeficientes seguidos nulos (lo cual significa que en $f(x)$ faltan $2k$ términos consecutivos) el hueco ó laguna que tales términos dejan será limitada por dos términos: uno de los cuales contendrá una potencia par de x, y el otro una potencia impar; y los signos de estos dos términos, por lo tanto, constituirán un cambio, bien en $f(x)$,

---

(*) Esta regla, cuyo descubrimiento se atribuyó á HARRIOT por WALLIS, LEIBNIZ y otros, aunque no se halló entre sus escritos póstumos (KLÜGEL, math. W. I p. 50 y sig., II p. 435) fué publicada incompleta y sin demostrar por DESCARTES (Geometría III). Su rectificacion y demostracion se deben á GAUSS, 1828, *J. de Crelle,* 3, p. 1. Véase el Álgebra de CHOQUET y MAYER, 392 y sig.

bien en $f(-x)$. Mas, en lugar de este sólo cambio, se obtendrán en las dos funciones $f(x)$, y $f(-x)$, si se rellena el hueco con $2k$ términos de coeficientes arbitrarios, $2k+1$ cambios. Luego $2k$ es el número complementario de $v+v'$ respecto de n, ó bien, será $v+v'=n-2k$.

Si en $f(x)$ faltan $2k+1$ términos consecutivos, los dos términos que limitarán la laguna que aquéllos dejan, comprenderán dos potencias pares, ó dos potencias impares de x; y sus signos, por lo tanto, constituirán un cambio, ya en $f(x)$, ya en $f(-x)$, ó en ninguna de estas dos funciones. Mas, si rellenamos la laguna producida por la falta de los $2k+1$ términos consecutivos con otros tantos, de coeficientes arbitrarios, entre las dos funciones $f(x)$ y $f(-x)$ contaremos $2k+2$ cambios. Luego al número $v+v'$ le faltará $2k$, ó $2k+2$, para valer n, segun que los términos, límites de la laguna, tengan signos diferentes, ó signos iguales: siendo $v+v'=n-2k$, en el primer caso; y $v+v'=n-2k-2$, en el segundo.

84. De la funcion entera u de la variable x, y de su fluxion u_1 se deduce, por divisiones sucesivas, la série finita de igualdades (17):

$$\begin{array}{lcl} u = u_1 p_1 + u_2 & \text{ó} & v = v_1 q_1 - v_2 \\ u_1 = u_2 p_2 + u_3 & & v_1 = v_2 q_2 - v_3 \\ u_2 = u_3 p_3 + u_4 & & v_2 = v_3 q_3 - v_4 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

La primera de estas séries expresa las ecuaciones que se obtienen para hallar el máximo comun divisor de las funciones u y u_1. Pero, si, hallado el primer resto u_2, le cambiamos el signo y le tomamos así modificado como divisor de u_1; y hacemos lo propio con el resto u_3 de esta segunda division, y con todos los sucesivos, obtendremos la segunda série: lo cual significa que esta segunda série se obtiene sustituyendo

$$\begin{array}{llllllll} u & u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 & u_5 & -u_6 & -u_7 \ldots \\ & p_1 & -p_2 & p_3 & -p_4 & p_5 & -p_6 & p_7 \ldots \end{array}$$

por

$$\begin{array}{lllllll} v & v_1 & v_2 & v_3 & . & . & . \\ & q_1 & q_2 & q_3 & . & . & . \end{array}$$

respectivamente. La série de las funciones v, v_1, v_2, ... v_r lleva el nombre de *Série de* STURM.

Así, por ejemplo, dividiendo la funcion x^3-2x-4 por su derivada $3x^2-2$ (para lo cual se multiplica aquélla por 3) se obtiene el resto $-4x-12$, ó bien $x+3$ (despues de cambiado su signo y de ser dividido por 4). Dividendo $3x^2-2$ por $x+3$ se obtiene el resto -25 (despues de cambiado el signo). Luego las funciones

$$x^3-2x-4,\ \ 3x^2-2,\ \ x+3,\ \ -25$$

constituyen una *série de* STURM.

Si el término final, v_r, de la série, es independiente de x, las funciones v y v_1 no tendrán divisor comun, dependiente de x. Si v_r está contenida en

v_{r-1}, aquélla será el máximo comun divisor de v y v_1. Para un valor real, dado, x, la série de STURM contiene un conjunto determinado de variaciones de signos (83) que depende de x y varía solamente cuando x traspasa de un valor que anule su primer término v.

I.—Si x adquiere un valor δ, para el cual no se anula el primer término v, ó no es $v(\delta)=0$, pero se anula otro, intermedio, v_i, el número ó conjunto de cambios en la série de STURM permanece invariable.

DEMOSTRACION. En el supuesto $v_i(\delta)=0$, no puede ser cero el término anterior $v_{i-1}(\delta)=-v_{i+1}(\delta)$; porque, si lo fuera, lo sería tambien $v(\delta)$, contra la hipótesis.

Pero sabemos (14) que $\varphi(\delta+h)$ tiene el mismo signo que $\varphi(\delta)$ siempre que h sea suficientemente pequeño; y, por consecuencia, tanto para $x=\delta-h$, como para $x=\delta+h$, tendrán v_{i-1} y v_{i+1} signos diferentes. Luego, en el uno y el otro caso, tendrá la série de STURM el mismo número de variaciones.

II.—Si x *creciendo* llega al valor α, por el cual se anula el primer término v de la série de STURM, esta série *perderá* un cambio de signo.

DEMOSTRACION. En la hipótesis $v=(x-\alpha)^\lambda g(x)$, tenemos (81):

$$\frac{v_1}{v}=\frac{\lambda}{x-\alpha}+\frac{g'(x)}{g(x)}$$

que toma para $x=\alpha-h$ el signo negativo, y para $x=\alpha+h$ el positivo, siendo h suficientemente pequeño. Luego la série consabida, cuando $x = \alpha - h$, comienza con una variacion; y, cuando $x = \alpha + h$, comienza por una permanencia de signo.

III.—Si creciendo x pasa por k valores que anulen el primer término, v, de la série de Sturm, esta série perderá k cambios de signo. Recíprocamente: *Teorema de* STURM (*). Cuando la série de Sturm, correspondiente á una funcion entera dada, para un valor dado de la variable, presente k cambios de signo ménos que para otro valor dado, más pequeño, de la misma, entre estos dos límites (valores dados) existen k valores diferentes de la repetida variable, por los cuales se anula la funcion propuesta (una ó varias veces).

La série de Sturm

$$x^3 - 2x - 4,\ 3x^2 - 2,\ x + 3,\ -25$$

para $x = -\infty,\ 0,\ +\infty$ presenta 2, 2, 1 cambios de signo respectivamente. Luego la ecuacion $x^3 - 2x - 4 = 0$ no tiene más de una raiz real, que es la raiz positiva 2. Y, en efecto, la discriminante de dicha ecuacion es $4 - \frac{8}{27}$ (positiva).

85. Cuando el valor (complejo) x de la variable varíe de tal modo que su punto M, sobre el plano de representacion (ARIT. UNIV. 85), recorra, yendo y viniendo, una línea dada, el punto N que representa el valor correspondiente de una funcion uniforme $f(x)$, recorrerá del mismo modo la línea cor-

(*) Comunicado por STURM á la Academia de París en 1829 *Bulletin du Férussac* XI, p. 419. CHOQUET *et* MAYER Algèbre 427 y sig. V. el Tratado del Autor sobre las determinantes, 4.ª edicion, p. 165.

respondiente; y, si M recorre por una vez una línea cerrada, tambien será cerrada la línea correspondiente, recorrida por N.

La superficie limitada por una línea cerrada, que no se corta á sí misma, se llama *celda* (Planim. 77). El perímetro de la celda será recorrido de modo que caiga ésta siempre á la orilla *izquierda* de aquél; contándose como positivos los ángulos descritos por el giro hácia la izquierda tambien.

Cuando el punto M recorra, yendo y viniendo, una línea, sin tocar en el punto fijo S, ó recorra una línea cerrada, cuya celda deje fuera á dicho punto S, el lado SM describirá ángulos cuya suma es cero. Pero, si M recorre una línea cerrada cuya celda contenga al punto S, el lado SM describirá ángulos cuyos arcos dan por suma 2π.

Designando por A, B, C,... los puntos representativos de los valores α, β, γ... de la variable, para los cuales se anula una funcion entera dada λ, μ, ν... veces respectivamente, ó sean, los puntos representativos de la raiz λ-ple α, de la μ-ple β, de la ν-ple γ... de la ecuacion $f(x)=0$, claro es que los puntos representativos de los valores correspondientes $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$..... coincidirán con el punto orígen O.

I.—Si el punto M recorre una celda que no contenga ninguno de los puntos A, B, C...., el módulo ON del punto correspondiente N describirá ángulos cuya suma es nula.

Demostracion. Supongamos descompuesta la celda dada en celdillas suficientemente pequeñas. Si M, próximo suficientemente al punto representativo del valor t, recorre la celdilla en que se halla este punto contenido, el punto N, á una proximidad arbitraria del punto T, correspondiente á $f(t)$, describirá una línea cerrada l. El punto O que, en la hipótesis de no ser $f(t)$ nula, distará del T una cantidad finita, se hallará enteramente fuera de la línea l. Y, por consecuencia, ON describirá ángulos cuya suma es nula.

Si M recorre sucesivamente todas las celdillas parciales, ON describirá ángulos cuya suma es nula. Así recorre M, yendo y viniendo, todos los caminos interiores, y da la vuelta una vez á la celda dada. Pero, cuando M recorre de ida y vuelta una línea, describe ON ángulos cuya suma es nula. Luego tambien, cuando M recorra la celda dada, describirá ON ángulos cuya suma es nula.

II.—Cuando el punto M recorra una celda, en que se halla contenido el punto A, pero ninguno de los puntos restantes B, C, ..., el módulo ON del punto N describirá ángulos cuyos arcos dan la suma $2\pi\lambda$.

Demostracion. Separemos de la celda dada una celdilla parcial, suficientemente pequeña, que contenga al punto A; la otra parte de la celda dada quedará convertida así, mediante un camino interno, en una celda en que ya no se hallan ninguno de los puntos A, B, C, . . . Ahora bien, cuando M, suficientemente próximo al punto A, recorra la primera celdilla parcial, el lado AM describirá ángulos, cuyos arcos dan de suma 2π; y N describirá una línea cerrada á una proximidad arbitraria del punto O. Mas, segun la hipótesis, es $f(x) = (x-\alpha)^\lambda g(x)$, y esta funcion puede ser expresada, con un error arbitrariamente pequeño, por $(x-\alpha)^{\lambda} g(\alpha)$; el arco de este último número sobrepuja al arco de $g(\alpha)$ en el arco de $(x-\alpha)^{\lambda}$, esto es, en el arco λ-ple de $(x-\alpha)$. Luego ON describirá ángulos que valdrán λ veces tanto como los descritos por AM, y cuyos arcos, por consecuencia, dan de suma $2\pi\lambda$.

Cuando M recorra la otra celda parcial, ON describirá ángulos cuya suma es nula (I). Cuando M recorra sucesivamente ambas celdas parciales, ó bien, la celda dada una vez y, todos los caminos interiores de ida y vuelta, ON describirá ángulos cuyos arcos dan la suma $2\pi\lambda$. Etc.

III.—Cuando el punto M recorra una celda que contenga los puntos A y B, pero en la que no se hallen los puntos restantes C....; imaginando un camino interior que haya de recorrerse de ida y vuelta, hallaremos que ON describirá ángulos cuyos arcos tienen por suma $2\pi(\lambda+\mu)$, etc. Recíprocamente:

Teorema de CAUCHY (*). Cuando sobre el plano de representacion, el punto M de la variable x recorra por una vez el perímetro de una celda dada; y el punto correspondiente N, representativo de la funcion entera $f(x)$, sin tocar en el punto O, se mueva de tal modo que el lado ON describa ángulos cuyos arcos den por suma $2\pi k$, la celda dada

(*) CAUCHY comunicó este teorema á la Academia de Turin en 1831, y fué publicado en el *J. de l'Ecole polyt. cah.* 25 p. 176 en 1837. Entre tanto demostraba más sencillamente STURM el mismo teorema (1836) en el *J. de Liouv.* 1 p. 290. Véase la demostracion de STURM y LIOUVILLE. *J. de Liouv.* 1 p. 278; la de MOIGNO. *J. de Liouv.* 5 p. 75; la de SERRET *Algèbre super.* I p. 117.

(dividida ó entera) contendrá k puntos de la variable, que anulan la funcion, y representan, por consecuencia, las raizes (diferentes ó no diferentes) de la ecuacion $f(x) = 0$.

Designando por E el punto de 1, y por φ el arco del ángulo EON, esto es, el arco de $f(x) = T + iU$, será $tang\,\varphi = U : T$. Cuando φ, subiendo (bajando) pase por los valores π, 2π, $3\pi \ldots$, $tang\,\varphi$ pasará, subiendo, por 0, desde el campo negativo al positivo (bajando desde el positivo al negativo); y, por consecuencia, el lado ON no podrá describir ángulos cuyos arcos tengan de suma $2\pi k$ sin que $U : T$ se anule varias veces, verificándose esto $2k$ veces más subiendo que bajando. Luego (segun Cauchy) podremos tambien contar cuántas más veces se anula $U : T$ subiendo que bajando, mientras el punto de la variable recorre la celda dada, para determinar así el conjunto de las raizes de la ecuacion $f(x) = 0$, contenidas en la misma.

IV.—*Teorema de Gauss.*—Toda funcion entera $f(x)$, del grado n^o, es n veces nula para ciertos valores separados ó unidos de su variable x. La ecuacion $f(x) = 0$, del grado n^o, tiene n raizes: en general, diferentes; y, para coeficientes particulares, no todas diferentes entre sí.

Demostracion.—La funcion

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots \right)$$

en el supuesto de que x sea suficientemente grande, puede ser expresada por $a_n x^n$, y el arco de $f(x)$ por el arco de $a_n x^n$, con un error arbitrariamente pequeño: de suerte que los ángulos descritos por ON valdrán n veces tanto como los descritos por OM. Luego, cuando M recorra por una vez un círculo, suficientemente grande, cuyo centro sea O, el módulo ON describirá ángulos cuyos arcos dan la suma $2\pi n$; y, por consecuencia, la superficie del círculo recorrido por M comprende n raizes de la ecuacion $f(x) = 0$.

Este teorema fundamental de la Análisis algebráica, que era conocido ántes en ciertos casos particulares, procuraron demostrarlo D'Alembert, Euler, y Lagrange (*Mém. de Berlin* 1746 p. 182; 1749 p. 223;1772 p. 222).

Gauss dió la primera demostracion seguida de una crítica acerca de todos los ensayos anteriores (*Demonstratio nova theorematis, omnem functionem, etc. Helmstadt* 1799). Otras dos demostraciones publicó Gauss despues, en 1815 y 1816, en el tercer tomo de las *Gottinger Commentationen;* y un nuevo trabajo sobre la demostracion primeramente recordada (1849) en el cuarto tomo de las *Gott. Abhandlungen* (Obras—tomo 3). Despues de haber patentizado Legendre (*Theorie des nombres.* 119) la sucesiva disminucion de $f(x)$, fundó Cauchy 1821 su primera demostracion en la hipótesis de que existia un *mínimo* para el módulo de $f(x)$, probando luégo que tal mínimo no es diferente de cero. (*Anal. alg.* c. X. Véase: Sturm en el lugar ántes citado y en el *Algebra* de Choquet *et* Mayer §. 378); y su segunda demostracion, sobre el teorema por él mismo establecido (III).

86. Siempre que $f(t + iu) = T + iU$, contendrá T solamente potencias pares de u, y U solamente potencias impares; y, por consecuencia, T y $U : u$ serán funciones enteras de t y u^2.

Las raizes *no reales* de la ecuacion $f(x) = 0$ se obtienen, mediante las soluciones del sistema $T=0$ y $U:u=0$, para las incógnitas t y u^2: las cuales se componen ó constan de un valor *positivo* u^2 y del correspondiente valor (real) t. Pueden obtenerse aproximadamente por un método análogo al de NEWTON (59).

GAUSS (1849) trazó un círculo, fuera del cual no existen puntos representativos de las raizes de una ecuacion dada. Sea, pues,

$$f(x)=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\dots$$

y designemos por r, a, b, ... los módulos y por ρ, α, β, ... los arcos, correspondientes á x, A, B, ... respectivamente. Entónces serán:

$$T=r^n\cos n\rho+ar^{n-1}\cos\rho_1+br^{n-2}\cos\rho_2+\dots$$
$$U=r^n\operatorname{sen} n\rho+ar^{n-1}\operatorname{sen}\rho_1+br^{n-2}\operatorname{sen}\rho_2+\dots$$
$$\rho_1=\alpha+(n-1)\rho,\quad \rho_2=\beta+(n-2)\rho,\ \dots$$

Ahora bien, por ser $\cos^2 n\rho+\operatorname{sen}^2 n\rho=1$, entre los valores de $\cos n\rho$, $-\cos n\rho$, $\operatorname{sen} n\rho$ y $-\operatorname{sen} n\rho$, habrá uno, no menor que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, esto es: mayor ó igual á $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Haciendo, pues, $\cos n\rho \geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$, la funcion T, que puede evidentemente escribirse en esta forma:

$$\begin{aligned} r^n\left(\cos n\rho-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)&+ar^{n-1}(1+\cos\rho_1)+br^{n-2}(1+\cos\rho_2)+\dots\\ +r^n\sqrt{\tfrac{1}{2}}\quad&-ar^{n-1}\qquad\qquad\qquad -br^{n-2}-\dots\end{aligned}$$

en su primera fila contiene términos positivos exclusivamente; y su segunda fila es, para $r=0$, negativa; para $r=\infty$, positiva; y nula, por consecuencia, para $r=R$; mas no para más valores de r, en atencion á que sólo existe en dicha fila un cambio de signo (83). Luego, si $r>R$, será T positiva y $T+iU$ no será cero. Y del mismo modo, si $r>R$, bajo las condiciones

$$-\cos n\rho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}},\quad \operatorname{sen} n\rho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ ó } -\operatorname{sen} n\rho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

se encuentra que $-T$, U ó $-U$ son positivas; y, por consecuencia, etc. etc.

87. Si $x^n=y$, $\rho^n=1$, serán x, $x\rho$, ... $x\rho^{n-1}$ los valores conjugados de la raiz n^a de y. Por manera que

$$u=a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}$$

es una funcion *irracional* u-forme de y, cuyos valores conjugados se obtienen sustituyendo x por $x\rho$, $x\rho^2$, ... $x\rho^{n-1}$. Estos valores conjugados son las raizes de una ecuacion del grado n^o con coeficientes racionales. Para obtener esta ecuacion, formemos las siguientes:

$$ux=a_{n-1}y+a_0x+a_1x^2+\ldots.$$

$$ux^2=a_{n-2}y+a_{n-1}yx+a_0x^2+\ldots.$$

etc. Y del sistema con u ecuaciones

$$a_0-u+a_1x+a_2x^2+\ldots=0$$

$$a_{n-1}y+(a_0-u)x+a_1x^2+\ldots=0$$

$$a_{n-2}y+a_{n-1}yx+(a_0-u)x^2+\ldots=0$$

Et cætera, etc., se forma la determinante

$$\chi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & .. \\ a_{n-1}y & a_0 - u & a_1 & .. \\ a_{n-2}y & a_{n-1}y & a_0 - u & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{vmatrix} = 0$$

La cual, igualada con cero, es la ecuacion del grado n^o para la incógnita u, cuyas raizes u_1, u_2, ... u_n son los valores conjugados de u. En la determinante $\chi(u)$ tiene u^n el coeficiente $(-1)^n$, y u^0 el coeficiente $\chi(0)$; mas si se divide $\chi(0)$ por el coeficiente de u^n se obtiene (74) el producto de las raizes de $\chi(u) = 0$ multiplicado por $(-1)^n$, es decir:

$$(-1)^n u_1 \dots u_n = \chi(0) : (-1)^n$$

Luego la funcion racional de y representada por $\chi(0)$ es el producto de los valores conjugados de u, y se llama por esto la *Norma de la irracional* u, designándose por Nu (27).

EJEMPLOS:

Si $x^3 = y$ la fórmula $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tiene la norma

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 y & a_0 & a_1 \\ a_1 y & a_2 y & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 - 3\, a_0 a_1 a_2 y + a_1^3 y + a_2^2 y^2$$

Si $\beta^4 = 1$, la fórmula $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3$ tiene la norma

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_0^4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 4a_0 a_2 a_3^2 - a_3^4 \\ -2a_0^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_3^2 \\ +4a_0 a_1^2 a_2 - 4a_1 a_2^2 a_3 \\ -a_1^4 \quad + a_2^4 \end{array}$$

$$= [(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2](a_0 - a_1 + a_2 - a_3)$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$$

La norma de $a + b\sqrt[12]{x} + c\sqrt[9]{x} + d\sqrt[8]{x}$ es divisible por la norma de $a + b\sqrt[72]{x^6} + c\sqrt[72]{x^8} + d\sqrt[72]{x^9}$ (Véase MEIER HIRSCH *Aufg. aus der Theorie der alg. Gleichungen*, 1809, § 96 y siguientes).

II.—Cuando u sea una funcion de varios radicales, se forma primeramente la norma de la misma respecto de uno de ellos, la cual será una funcion de los radicales restantes; y así sucesivamente. La norma de u será el producto de todos los valores conjugados de u.

La fórmula $\sqrt[\lambda]{p} + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r}$ tiene $\lambda\mu\nu$ valores conjugados, cuyo producto es una funcion entera de p, q y r.

La fórmula $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \ldots$ tiene $nnn\ldots$ valores conjugados, cuyo producto es la potencia n^a de una funcion entera de $p, q, r\ldots$, y la norma de la fórmula dada. Si designamos por y_h un valor de la fórmula $\sqrt[r]{q}+\sqrt[n]{r}+\ldots$, y por β una raiz propia n^a de 1, los productos $y_k\beta$, $y_k\beta^2$, ... $y_k\beta^{n-1}$ serán otros valores de la misma fórmula. Y, si por x representamos un valor de la n^a potencia de p, la norma de la fórmula $x+\sqrt[n]{q}+\sqrt[n]{r}+\ldots$ será el producto

$$(x+y_1\beta)(x+y_1\beta^2)\ldots.$$
$$(x+y_2\beta)(x+y_2\beta^2)\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

El cual es una funcion entera, no sólo de q, r,... sino tambien de x^n ó de p; en atencion á que (74).

$$(x+y_k\beta)(x+y_k\beta^2)\ldots(x+y_k\beta^n)=x^n-(-y_k)^n$$

Estas normas fueron estudiadas por Möbius (*J. de Crelle* 3 p. 17) y por Forstemann (*J. de Crelle* 8 páginas 317 y 14 p. 236).

El problema de deducir de una ecuacion, que contenga funciones irracionales de la incógnita, otra ecuacion, de la misma amplitud y sentido, con términos racionales, fué propuesto por Fermat á los matemáticos de su tiempo. (*Cartesii apist.* t. 3 p. 304). Descartes (*lugar citado*) indicó un ensayo de solucion que no tuvo éxito. Fermat (*Opp.* página 60) y Newton (*Arith. univ.* p. 64 *ed. Lug.*) advirtieron la posible resolucion del problema, reduciéndola á un sistema de ecuaciones no lineales. Que el producto de todos los valores conjugados de una fórmula algebráica es racional, lo demostró Euler primeramente (*Mem. de Berlin* 1748 p. 234), y en otra Memoria posterior 1764 (*Nov. Comm. Petrop.* 9, p. 70). Lambert, fundándose en el procedimiento de EULER, resolvió (*Beitrage II*, p. 202) el siguiente problema: deducir de una ecuacion dada otra ecuacion, cuyas raizes sean las potencias n^a de las raizes de la primera. V. MEIER HIRSCH (*lugar citado*) y SCHÖNEMANN (*J. de Crelle* 19 p. 234).

88. Supuestas las ecuaciones $x^n = y$, $\rho^n = 1$, la fórmula

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

tiene la norma $f(x\rho) f(x\rho^2) \ldots f(x\rho^{n-1}) f(x)$: la cual es una funcion del mismo grado respecto de la incógnita y. Para $n = 2$ la norma $f(-x) f(x)$ será una funcion de x^2; para $\rho^3 = 1$, la norma $f(x\rho) f(x\rho^2) f(x)$ será una funcion de x^3 etc. Si f es nula su norma lo es tambien: y á cada raiz de la ecuacion $f = 0$ para x, corresponde una raiz de la ecuacion $Nf = 0$ para y, que es la n^a potencia de la raiz primera. De estos principios generales se deriva el procedimiento para deducir de la ecuacion

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots = 0$$

la ecuacion

$$f_1(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots = 0$$

cuyas raizes son los *cuadrados* de las raizes de la primera: caso, el más sencillo entre los de su especie, que puede presentarse. De acuerdo con ellos, en efecto, se obtiene la funcion trasformada $f_1(x)$, multiplicando la propuesta $f(x)$, por $f(-x)$, ó por $-f(-x)$; y reemplazando luégo el cuadrado x^2 por

x. De este modo se hallan entre los coeficientes de la funcion trasformada y los de la primitiva las siguientes relaciones:

$$b_m = a_m^2$$

$$b_{m-1} = -a_{m-1}^2 + 2a_m a_{m-2}$$

$$b_{m-2} = +a_{m-2}^2 - 2a_{m-1} a_{m-3} + 2a_m a_{m-4}$$

$$b_{m-3} = -a_{m-3}^2 + 2a_{m-2} a_{m-4} - 2a_{m-1} a_{m-5} + 2a_m a_{m-6}$$

La regla que de estas relaciones se desprende para formar los coeficientes de $f_1(x)$, mediante los de $f(x)$, subsiste áun cuando la funcion $f(x)$ no sea completa, con tal de considerar como nulos los coeficientes de las potencias de la incógnita que falten.

De $f_1(x)$ se deduce, por el mismo procedimiento, $f_2(x)$, que igualada con cero nos dará la ecuacion $f_2(x) = 0$, cuyas raizes son los cuadrados de las raizes de la ecuacion $f_1(x) = 0$, y, por consecuencia, los bi-cuadrados de las raizes de la ecuacion primitiva $f(x) = 0$.

Una de estas ecuaciones deducidas, cuyas raizes sean potencias suficientemente elevadas de las raizes de la ecuacion dada, sirve para determinar los módulos de estas últimas raizes por órden de sus tamaños, á saber: primero, el módulo mayor; despues el inmediatamente menor, y así hasta el ínfimo; segun el excelente método, ideado por GRAFFE (*Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, Zürich*

1837) y completado por ENCKE (*) (*Astron. Jarhbuch* 1841 y *J. de Crelle*, 22, p. 193). Véase sobre este asunto: DAN. BERNOULLI *de seriebus recurr.* 1730; *Comm. Petrop.* t. 3; KLUGEL *math.* W. 4, p. 341 y siguientes; JACOBI *J. de Crelle*, 13, p. 349.

89. I—Admitiendo que $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n$ y que los valores deducidos para x de la ecuacion $g(x)=0$ sean $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$, la funcion algebráica n-forme (de n términos á lo sumo):

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$$

será una raiz de una ecuacion determinada del grado n^o, cuyos coeficientes son funciones enteras de los coeficientes a y b. Para obtener esta ecuacion, respecto de la incógnita f, se forman las n siguientes:

$$\begin{aligned} a_0-f+a_1x+a_2x^2+\ldots &= 0 \\ (a_0-f)\,x+a_1x^2+\ldots &= 0 \\ (a_0-f)x^2+\ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

á las que se agregan las m identidades

$$\begin{aligned} b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots &= 0 \\ b_0x+b_1x^2+\ldots &= 0 \\ b_0x^2+\ldots &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

(*) Traducido al castellano, y explicado aún más, por Don Miguel Merino (*Resolucion general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe*. Madrid 1879. (*N. del T.*)

La determinante del grado $(n+m)^{\circ}$ del sistema constituido por las unas y las otras, á saber:

$$\varphi(f) = \begin{vmatrix} a_0 - f & a_1 & a_2 & . & . & . \\ * & a_0 - f & a_1 & a_2 & . & . \\ * & * & a_0 - f & a_1 & a_2 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \\ * & b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

es nula: y la ecuacion consiguiente $\varphi(f) = 0$ es del grado n° respecto de f y tiene por raizes $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, ... $f(\beta_n)$: por lo cual es la que buscamos.

II. En la determinante anterior $\varphi(f)$ la potencia f^n tiene el coeficiente $(-1)^n b_n^m$; y ya sabemos (74) que, dividiendo por este coeficiente el valor particular $\varphi(0)$, se obtiene para cociente el producto por $(-1)^n$ de las raizes de la ecuacion $\varphi(f) = 0$; de lo que resulta:

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots . f(\beta_n) = \varphi(0)$$

Estableciendo ahora la identidad

$$f(x) = a_m(x - \alpha_1) \ldots . (x - \alpha_m)$$

se hallan tambien las siguientes:

$$f(\beta_1) = a_m(\beta_1 - \alpha_1) \ldots . (\beta_1 - \alpha_m)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(\beta_n) = a_m(\beta_n - \alpha_1) \ldots . (\beta_n - \alpha_m)$$

Pero:

$$b_n(\beta_1 - x)(\beta_2 - x) \ldots . (\beta_n - x) = (-1)^n g(x)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= b_n^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n) \\ &= (-1)^{mn} a_m^n g(\alpha_1) g(\alpha_2) g(\alpha_m) \\ &= a_m^n b_n^m D(\alpha_1 \ldots \alpha_m \mid \beta_1 \ldots \beta_n)\end{aligned}$$

Representando $D(\ldots \mid \ldots)$ el producto de las mn diferencias que se obtienen sustrayendo todas las α de todas las β.

III.—El producto de los valores conjugados $f(\beta_1) \ldots . f(\beta_n)$ por b_n^m; ó el de los valores conjugados $g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)$ por $(-1)^{mn} a_m^n$; ó el de todas las diferencias $\beta - \alpha$ por $a_m^n b_n^m$, es $\varphi(0)$. Y esta funcion es una forma del grado n^o de los coeficientes a, y una forma del grado m^o para los coeficientes b, que se llama la *Resultante* de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respecto de la variable x (*).

Si, por ejemplo, los coeficientes a_m, a_{m-1}, a_{m-2} ... y los b_n, b_{n-1}, b_{n-2} ... son formas de y, z, de 0, 1, 2 ... dimensiones; y, por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son formas de x, y, z, aquélla de m dimensiones, y ésta de n, su resultante $\varphi(0)$ será una forma de y, z, de

(*) EULER (*Mém. de Berlin* 1748, p. 234). Véanse: SALMON (*Higher plane curves*, p. 295; y el Tratado del autor sobre las Determinantes, §. 11).

mn dimensiones. En efecto, sustituyendo y, z por yt, zt, los coeficientes

$$a_m,\ a_{m-1},\ a_{m-2}\ldots,\ b_n,\ b_{n-1},\ b_{n-2},\ \ldots$$

se convierten respectivamente (19) en los siguientes:

$$a_m,\ a_{m-1}t,\ a_{m-2}t^2,\ \ldots\ b_n,\ b_{n-1}t,\ b_{n-2}t^2,\ \ldots$$

Al mismo tiempo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ se convierten respectivamente en

$$\alpha_1 t,\ \alpha_2 t,\ \ldots\ \beta_1 t,\ \beta_2 t,\ \ldots$$

(74 y 46). Luego el producto de todas las mn diferencias $\beta - \alpha$ contiene el multiplicador t^{mn}, ó bien: $\varphi(0)$ se convierte en $t^{mn}\varphi(0)$; y la ecuacion $\varphi(0) = 0$ es para la incógnita $y : z$ del grado mn^o.

Si la resultante $\varphi(0)$ desaparece, se anulará tambien una, por lo ménos, de las diferencias $\beta - \alpha$; y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tendrán entónces un comun divisor $h(x)$, cuyos coeficientes, en virtud del sistema $f(x) = 0$, $xf(x) = 0$, ... y $g(x) = 0$, $xg(x) = 0$, ..., son funciones enteras de los coeficientes a y b. Calculados todos los valores de y, por los que $\varphi(0)$ se anula, de la ecuacion $h(x) = 0$ se deducirán los correspondientes de x que satisfacen simultáneamente á las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ (45).

90. Para formular el máximo comun divisor de las funciones enteras,

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$
$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

de las funciones f, xf, x^2f, g, xg, x^2g, x^3g se forma primeramente la determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Despues, de las funciones f, xf, g, xg, x^2g se forma la determinante

$$S = \begin{vmatrix} a_0 + a_1x & a_2 & a_3 & a_4 & \\ a_0x & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1x & b_2 & b_3 & & \\ b_0x & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = S_0 + S_1x$$

Luego, del sistema f, g, xg se forma la determinante

$$T = \begin{vmatrix} a_0 + a_1x + a_2x^2 & a_3 & a_4 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 & b_3 & \\ b_0x + b_1x^2 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = T_0 + T_1x + T_2x^2$$

Y así sucesivamente cuando f y g sean de grados superiores. Si á las primeras columnas de estos sistemas se agregan las siguientes, multiplicadas por potencias correspondientes de x, las determinantes permanecerán invariables. Desarrollando las determinantes de los sistemas así trasformados, segun los elementos de las primeras columnas, encontramos:

$$R = Pf + Qg$$
$$S = P_1 f + Q_1 g$$
$$T = P_2 f + Q_2 g$$

Expresiones que manifiestan que todo divisor comun de f y g está contenido en R, S y T.

Si R no es nula, las funciones f y g no tendrán divisor comun, dependiente de x. Si $R=0$, y S no es nula para todos los valores de x, las funciones f y g tendrán el máximo comun divisor de primer grado S. Cuando $R = 0$, y $S = 0$, para todas las x; pero T no lo es para todos los valores de x, las funciones f y g tendrán el máximo comun divisor de segundo grado T; etc. Toda solucion del sistema $R = 0$, $S = 0$ (ó del sistema $R = 0$, $T = 0$, cuando $S = 0$ sea una identidad) es solucion tambien del sistema $f = 0$, $g = 0$.

Observacion. De dos funciones dadas f y g, la primera del grado m^{o} y la segunda del grado n^{o}, respecto de x, que no tengan divisor comun, puede ser compuesta una funcion dada φ, del grado $(m+n-1)^{o}$ ó de grado inferior, con auxilio de multiplicadores determinados, p y q, de los grados

$(n-1)^o$ y $(m-1)^o$ respectivamente. En efecto, del sistema de $1+n+m$ filas

$$
\begin{aligned}
\varphi &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \\
f &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
xf &= \quad\quad a_0 x + a_1 x^2 + \cdots \\
x^2 f &= \quad\quad\quad\quad a_0 x^2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots \\
xg &= \quad\quad b_0 x + b_1 x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

se deduce para todas las x la determinante

$$
\begin{vmatrix}
\varphi & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\
f & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot\cdot \\
xf & & a_0 & a_1 & \cdot\cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\
g & b_0 & b_1 & b_2 & \\
xg & & b_0 & b_1 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot
\end{vmatrix} = 0
$$

La cual, desarrollada segun los elementos de la primera columna, nos da:

$$R\varphi - pf - qg = 0, \text{ y } R\varphi = pf + qg$$

BALTZER - ÁLGEBRA