M.E.C.D. 2017

Observatorio de San Fernando
BIBLIOTECA

Núm. del Invent. 788

Secci

Carpe

Estar

Observatorio de Marina
BIBLIOTECA

Núm. 210

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

ELEMENS
DE LA
GEOMETRIE
DE
L'INFINI.

SUITE DES MEMOIRES
de l'Académie Royale des Sciences. (1725)

Par M. de Fontenelle

OBSERVATORIO DE MARINA
DE
SAN FERNANDO.

Del Observatorio.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCXXVII.

M.E.C.D. 2017

R.L OBSERVATORIO ASTRONÓMICO DE S. FERNANDO.

M.E.C.D. 2017

PRÉFACE.

LEs premiers Géometres n'avoient encore fait que très-peu de chemin, lorſqu'ils s'apperçurent que le Côté d'un Quarré, & ſa Diagonale étoient incommenſurables, c'eſt-à-dire, que quelque grandeur que l'on pût prendre pour être la meſure exacte de l'une de ces deux Lignes, elle ne pouvoit jamais être la meſure exacte de l'autre. Delà naiſſoient les Nombres incommenſurables, ou irrationels, qui ſe trouvoient en une quantité ſans comparaiſon plus grande que les Nombres rationels, & ordinaires; & parce qu'on voyoit bien qu'ils étoient d'une nature particuliere, mais abſolument inconnue, les Anciens les évitoient avec beaucoup d'art dans la ſolution des Problemes, & ne les y admettoient point. Cependant on les reçoit aujourd'hui ſans difficulté, & les ſolutions qu'ils fourniſſent ſont parfaitement légitimes. Ce n'eſt pas qu'on les connoiſſe mieux, mais on s'eſt familiariſé avec eux à force d'en rencontrer, ils ont vaincu par leur foule; & par leur opiniâtreté à ſe préſenter preſque par-tout.

BIBLIOTECA
DEL
REAL MONASTERIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PREFACE.

Je crois avoir prouvé dans ce Livre, que les Nombres irrationels ne le ſont que parce que l'Infini entre néceſſairement dans leur nature, mais comme la maniere dont il y entre n'eſt nullement apparente, & qu'elle n'avoit point été apperçue, c'étoit l'Infini que l'on rencontroit dès la naiſſance de la Géométrie, ſi déguiſé, & ſi enveloppé, qu'on n'en avoit aucun ſoupçon.

Les Anciens ont vu que dans l'angle de contingence formé par la circonférence d'un Cercle, & par ſa Tangente, il ne pouvoit paſſer aucune ligne droite qui le diviſât. C'eſt là un angle infiniment petit, & l'Infini commence à s'y découvrir un peu, au lieu qu'il ne ſe découvroit nullement dans les Incommenſurables. Auſſi l'angle de contingence étoit une merveille incomprehenſible, & l'on n'eût pas pu expliquer comment aucune ligne droite n'y pouvant paſſer, il y paſſoit tant de circonférences circulaires qu'on vouloit, toujours plus grandes que la premiere. Archimede n'a trouvé le rapport approché du Diametre du Cercle à la Circonférence, qu'en prenant l'idée du Cercle confondu avec un Polygone d'une infinité de côtés; & ce rare génie perçoit déja dans l'abîme de l'Infini.

En dernier lieu les Anciens ſont venus à connoître l'Hyperbole, & ſes Aſymptotes, & quelques autres Courbes Aſymptotiques, c'eſt-à-dire, des Lignes qui prolongées à l'Infini, & s'approchant toujours l'une de l'autre, ne peuvent jamais ſe rencontrer, &

M.E.C.D. 2017

de plus des Eſpaces actuellement Infinis. Voilà l'Infini plus déclaré, à meſure que la Géométrie avançoit davantage, & le voilà accompagné de nouvelles merveilles.

On en demeura là, ou plutôt on vint à oublier, & à ignorer tout pendant la longue barbarie qui régna en Europe. Au renouvellement des Sciences, ceux qui eurent le courage de vouloir être Géometres, étudierent les Géometres Grecs qui reſtoient, les traductions qu'on en fit, les Commentaires. C'étoit être aſſez habile que de les entendre & de les ſuivre, embarraſſés & épineux, comme ils ſont, & l'on ne crut pas d'abord qu'il fût poſſible d'aller par d'autres routes, & moins encore d'aller plus loin. Un peu de préjugé ne pouvoit manquer de ſe mêler au reſpect légitime qu'on leur devoit. Ce qu'ils avoient admis de l'Infini, on n'eut pas de peine à l'admettre, préſenté par les Maîtres: mais on l'admettoit en quelque maniere par force, parce qu'on y étoit conduit par des guides révérés, auſſi-bien que par la ſuite néceſſaire des démonſtrations, & quand on y étoit arrivé, on s'arrêtoit avec une eſpece d'effroi, & de ſainte horreur. On n'eût pas eu l'audace de faire un pas de plus. On regardoit l'Infini comme un Myſtere qu'il falloit reſpecter, & qu'il n'étoit pas permis d'approfondir. Il eſt vrai que cette timidité étoit fort excuſable par l'extreme diſproportion que l'Eſprit humain ſent toujours entre lui, & un ſi grand objet.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

PREFACE.

Bonaventure Cavalerius, Religieux Italien de l'Ordre des Jéſuates, eſt le premier qui dans ſa *Géométrie des Indiviſibles*, imprimée à Bologne en 1635, Ouvrage original, & très-ingénieux, ait fondé volontairement, & par choix tout un Syſteme Géométrique ſur les idées de l'Infini. Il conſidere les Plans comme formés par des ſommes infinies de Lignes, qu'il appelle des quantités Indiviſibles, les Solides par des ſommes infinies de Plans pareillement Indiviſibles, & les rapports de ces ſommes infinies ou de Lignes, ou de Plans ſont néceſſairement les mêmes que ceux des Plans ou des Solides, fondement de toute ſa nouvelle Théorie. Ce n'eſt pas qu'effrayé lui-même de l'Infini, ou craignant d'effrayer ſes Lecteurs, il ne le diſſimule autant qu'il peut, il le maſque le plus ſouvent ſous le nom d'*Indéfini*, terme plus doux en apparence, mais qui bien entendu ou ne ſignifie que la même choſe, ou ne ſignifie rien. Il voit que ſon ſyſteme le jette indiſpenſablement dans des Infinis plus grands les uns que les autres, difficulté à laquelle on ne croit pas, dit-il, *que les armes mêmes d'Achille puiſſent réſiſter*. Auſſi ſe repoſe-t-il ſur le fait évidemment conſtant, & il traite l'objection de *Nœud Gordien*, *qu'il laiſſe à quelque Alexandre*.

Du reſte, il ne propoſe ſes vues qu'avec la modeſtie & les ménagemens néceſſaires à la Vérité, qui a le malheur d'être nouvelle, il ſemble demander pardon aux Géometres d'avoir mis leur Science

M.E.C.D. 2017

dans un plus grand jour, & d'en avoir augmenté l'étendue. Il fait valoir l'accord parfait de ſes concluſions avec celles qui étoient déja reçues de tout le monde, & par conſéquent tout ce que les mêmes principes lui ont produit de nouveau, doit être également vrai. On s'en perſuade encore par un certain ordre naturel, par une liaiſon facile qui ſe trouve entre les Propoſitions anciennes & les nouvelles : car telle eſt la nature des Vérités qu'elles ſont toujours prêtes à recevoir parmi elles d'autres Vérités, & leur laiſſent, pour ainſi dire, des places qu'elles n'ont qu'à venir prendre.

La Géométrie de Cavalerius ſubit le ſort des nouveautés les plus dignes de l'approbation du Public, & même les plus deſtinées à l'emporter avec le temps : de grands Géometres l'attaquerent, de grands Géometres l'adopterent, ou la défendirent ; mais enfin, c'eſt là la premiere fois que l'Infini ait paru dans la Géométrie en forme ſyſtématique, & dominant ſur toute une grande & vaſte Théorie, quoiqu'encore extrememement enveloppé.

M. de Roberval, dans une lettre écrite à Torricelli, aſſûre que cinq ans avant que le Livre de Cavalerius parût, il avoit trouvé la même Méthode des Indiviſibles, qu'il appelle la *Science de l'Infini*, promettant cependant de n'employer guere une expreſſion ſi hardie. C'*étoit*, dit-il, *en obſervant de près la marche d'Archimede, qu'il étoit arrivé à cette ſublime, & merveilleuſe Science ; il la cachoit par une vanité de*

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

jeune homme, qui vouloit ſe reſerver un Secret de reſoudre avec facilité les Queſtions les plus difficiles, & s'attirer par-là de l'admiration, ce qui lui avoit réuſſi; mais il lui étoit arrivé le malheur, que tandis qu'il s'amuſoit à ſe parer de quelques grains d'or tirés d'une Mine inconnue, un autre étoit venu, qui avoit découvert la Mine à tout le monde. Il ne vouloit pourtant pas *tomber dans le ridicule de revendiquer les Indiviſibles, il reconnoiſſoit nettement que l'acte public de la priſe de poſſeſſion décidoit abſolument pour Cavalerius*, tant la fortuné a de pouvoir ſur tout ce qui s'appelle Gloire, & tant il eſt néceſſaire de ſe ſoumettre à ce pouvoir, tout illégitime qu'il pourroit paroître. Le Traité des Indiviſibles qu'avoit fait M. de Roberval, a été imprimé après ſa mort avec différens Ouvrages d'autres Académiciens en 1693.

Je ne prends que les principaux points de cette petite Hiſtoire de l'Infini. Le plus grand effet, & en même-temps la plus forte preuve du mérite de la *Géométrie des Indiviſibles*, fut de tourner de ce côté-là les vues de M. Wallis, grand Géometre Anglois, & de lui donner lieu de faire ſon *Arithmétique des Infinis*, qui parut en 1655. L'Anglois plus hardi que l'Italien, ſoit par le génie de ſa Nation, ſoit parce qu'il venoit après l'Italien, dont la Méthode commençoit à s'établir, produit dans tout ſon Ouvrage, ſans marquer aucune crainte, ſans uſer de précautions, des Séries ou Suites infinies de Nombres, & détermine les rapports de leurs ſommes, d'où dé-

M.E.C.D. 2017

pendent non-ſeulement des rapports de Plans, & de Solides que Cavalerius avoit donnés, mais encore des Quadratures & des Rectifications de Courbes, qui n'entroient pas dans la Théorie de Cavalerius. Wallis dit *qu'il commence où Cavalerius avoit fini*; & il eſt certain qu'il va beaucoup plus loin, & qu'il pouvoit même, ainſi qu'il en avertit, aller encore au-delà. A meſure que l'audace de manier l'Infini croiſſoit, la Géométrie reculoit de plus en plus ſes anciennes limites.

Dans l'eſpace de quelque quarante années, à compter, ſi l'on veut, depuis Cavalerius, toutes les ſpéculations de Géométrie devenant toujours plus élevées, aboutiſſoient à quelque choſe de commun, dont peut-être on ne s'appercevoit pas encore. Deſcartes par ſa fameuſe Regle des Tangentes, Fermat par celle des *Maxima & Minima*, Paſcal par la conſidération des Elémens des Courbes, Barrou par ſon petit Triangle différentiel, dont l'uſage ne finira jamais, Mercator par ſon Art de former des Suites infinies d'une autre eſpece que celles de Wallis, tous ces grands hommes, chacun en ſuivant ſa route particuliere, ſe trouvoient conduits ou à l'Infini, ou ſur le bord de l'Infini. Il perçoit de toutes parts, il pourſuivoit par-tout les Géometres, & ne leur laiſſoit pas la liberté d'échapper.

Il y a un ordre qui regle nos progrès. Chaque connoiſſance ne ſe développe, qu'après qu'un certain nombre de connoiſſances précédentes ſe ſont dé-

BIBLIOTECA
DEL
REAL MONASTERIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

veloppées, & quand ſon tour pour éclorre eſt venu. Cet Infini, qu'on ne pouvoit plus ſe diſpenſer de recevoir, ſur-tout l'Infiniment petit, plus néceſſaire encore que ſon oppoſé, on ne ſavoit point l'employer dans un Calcul Algébrique, ſans quoi il avoit très-peu d'uſage, & quelle apparence qu'on l'y pût jamais employer? Auroit-on traité l'Infini comme les grandeurs finies? Sa nature n'y apportoit-elle pas un obſtacle invincible? Cependant le terme étoit arrivé, où la Géométrie devoit enfanter le Calcul de l'Infini. M. Neuton trouva le premier ce merveilleux Calcul, M. Leibnits le publia le premier. Que M. Leibnits ſoit inventeur auſſi-bien que M. Neuton, c'eſt une queſtion dont nous avons rapporté l'Hiſtoire en 1716 *, & nous ne la répeterons pas ici. Dès que le Calcul diffentiel eut paru, Mrs Bernoulli, M. le Marquis de l'Hôpital, M. Varignon, tous les grands Géometres entrerent avec ardeur dans les routes qui venoient d'être ouvertes, & y marcherent à pas de Géant, l'Infini éleva tout à une ſublimité, & en même-temps amena tout à une facilité, dont on n'eût pas oſé auparavant concevoir l'eſpérance, & c'eſt là l'Epoque d'une révolution preſque totale arrivée dans la Géométrie.

* P. 109. *& ſuiv.*

Cette révolution, quelque heureuſe qu'elle fût, a pourtant été accompagnée de quelques troubles. Il y a eu un Géometre, qui voulant bien recevoir les Infiniment petits du premier ordre, rejettoit abſolument ceux du ſecond, & de tous les ordres inférieurs,

M.E.C.D. 2017

inférieurs, toujours infiniment plus petits les uns que les autres.

Dans l'Académie même des Sciences il s'eſt élevé quelques conteſtations ſur ce Syſteme, & nous n'en avons pas caché l'Hiſtoire au Public *.

Il y a plus. M. Leibnits, comme nous l'avons avoué dans ſon Eloge, paroît avoir un peu chancelé. Il ſemble qu'il ſe fût relâché juſqu'au point de réduire les Infinis de différens ordres à n'être que des *Incomparables*, dans le ſens qu'un grain de Sable ſeroit incomparable au Globe de la Terre, ou ce Globe à un Globe dont la diſtance du Soleil à Sirius ſeroit le rayon, ce qui ruineroit l'exactitude géométrique des Calculs, & de quel poids ne doit pas être l'autorité de l'Inventeur contre l'invention?

Malgré tout cela l'Infini a triomphé, & s'eſt emparé de toutes les hautes ſpéculations des Géometres. Les Infinis ou Infiniment petits de tous les ordres ſont aujourd'hui également établis, il n'y a plus deux partis dans l'Académie, & ſi M. Leibnits a chancelé, on ſe fie plus aux lumieres qu'on tient de lui, qu'à ſon autorité même.

Il faut convenir cependant que toute cette matiere eſt environnée de ténebres aſſez épaiſſes, & delà vient que quelques-uns de ceux qui embraſſent les idées de l'Infini, ne les prennent pourtant que pour des idées de pure ſuppoſition ſans réalité, dont on ne ſe ſert que pour arriver à des ſolutions difficiles, qu'on abandonne dès qu'on y eſt arrivé, & qui

* *V. l'Hiſt. de l'Acad. des Sc. an.* 1701 *p.* 87 *& ſuiv. 2de Edit.*

M.E.C.D. 2017

reſſemblent à des Echaffaudages qu'on abat, auſſi-tôt que l'Edifice eſt conſtruit. C'eſt là une façon de penſer mitigée, qui raſſure un peu contre la frayeur que l'Infini cauſe toujours.

Pour diſſiper cette frayeur, du moins en partie, je puis faire ſouvenir les Géometres d'un Infini, qu'ils reçoivent tous ſans exception, d'où s'enſuivent néceſſairement toutes les idées du Syſteme moderne, & cela ſans aucune des reſtrictions, ſans aucun des adouciſſemens qu'on peut imaginer.

Tous les Géometres, anciens & modernes, conviennent que l'eſpace Aſymptotique de l'Hyperbole eſt infini, & ils employent tous ce même terme. Que veulent-ils qu'il ſignifie? Certainement ils n'entendent pas que cet eſpace eſt étendu à l'infini, car ils démontrent que d'autres eſpaces Aſymptotiques pareillement étendus à l'infini, ne ſont que finis; & il eſt à remarquer que lorſqu'ils démontrent que ces derniers eſpaces ne ſont que finis, ils n'en peuvent le plus ſouvent déterminer la grandeur finie, & que pour cela ils ne les traitent pas même d'indéfinis. Il faut donc que l'eſpace Hyperbolique ſoit infini, parce qu'il eſt plus grand que tout eſpace fini, quel qu'il ſoit, plus grand, par exemple, que l'aire d'un Cercle dont le Soleil ſeroit le centre, & le demi-diametre la diſtance du Soleil à Saturne ou à l'Etoile de Sirius, &c. Aſſurément cette vérité démontrée en cent façons, & reconnue de tout le monde, eſt bien contraire à ce qu'on jugeroit par les ſens en

M.E.C.D. 2017

voyant une Hyperbole tracée ſur le papier, où il ſemble qu'au bout d'un très-petit eſpace elle ſe confond déja avec ſon Aſymptote.

L'eſpace Hyperbolique eſt auſſi réellement infini, ou plus grand que tout eſpace fini, qu'un eſpace Parabolique déterminé eſt les deux tiers de ſon parallélogramme circonſcrit, où ſeroit la différence de ces deux manieres d'être? Il ſeroit trop puérile de dire que l'un de ces eſpaces peut être actuellement tracé, & que l'autre ne le peut. La Géométrie eſt toute intellectuelle, indépendante de la deſcription actuelle & de l'exiſtence des Figures dont elle découvre les propriétés. Tout ce qu'elle conçoit néceſſaire eſt réel de la réalité qu'elle ſuppoſe dans ſon objet. L'Infini qu'elle démontre eſt donc auſſi réel que le Fini, & l'idée qu'elle en a n'eſt point plus que toutes les autres, une idée de ſuppoſition, qui ne ſoit que commode, & qui doive diſparoître dès qu'on en a fait uſage.

Si l'on conçoit l'eſpace Hyperbolique diviſé en parties finies égales, chacune pourra être priſe pour l'Unité, il y en aura un nombre infini, & leur ſomme ſera égale à cet Infini, qui eſt l'eſpace. Or une ſomme quelconque de nombres quelconques, ne peut être qu'un nombre. L'Infini eſt donc un nombre, & doit être traité comme tel, ce qui prouve encore ſa réalité, puiſqu'il a toute celle des nombres.

Le parallélogramme circonſcrit à l'eſpace Aſymp-

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

totique Hyperbolique, c'eſt-à-dire, le paralléſogramme dont un des côtés ſera la premiere & plus grande Ordonnée de l'Hyperbole, & l'autre l'Aſymptote, ou Axe infini, ſera viſiblement plus grand & beaucoup plus grand que l'eſpace Aſymptotique. Voilà donc un Infini plus grand qu'un autre, & cet Infini je le puis doubler, tripler, &c. en concevant la premiere Ordonnée de l'Hyperbole deux fois, trois fois, &c. plus grande; les Infinis peuvent donc avoir entre eux tous les rapports des nombres.

Si enfin je conçois que la premiere Ordonnée de l'Hyperbole ſoit devenue égale à l'Aſymptote, le parallélogramme circonſcrit eſt un quarré infiniment plus grand que l'eſpace Aſymptotique infini, ce qui fait voir & la néceſſité & la réalité des différens ordres d'Infini, car dès qu'on en tient deux, on voit aſſez qu'il n'y a plus de bornes.

Ces différens Ordres, dont l'ordre du Fini eſt le premier & le plus bas, ſont véritablement *incomparables*, c'eſt-à-dire, qu'une grandeur de l'un n'eſt rien par rapport à une grandeur de l'ordre ſupérieur, non dans le ſens qu'un grain de ſable ne ſeroit rien par rapport à un Globe dont la diſtance du Soleil à Sirius ſeroit le rayon, mais dans un ſens infiniment plus rigoureux; car ce grain de ſable & ce Globe ſont du même ordre, puiſque ce Globe n'eſt certainement pas infini, ou plus grand que toute grandeur finie.

M.E.C.D. 2017

Je ne vois pas qu'on puiſſe rompre en aucun endroit cette chaîne de conſéquences qui naiſſent ſi ſimplement & ſi naturellement de la propriété inconteſtable de l'eſpace Hyperbolique, elles naîtroient de même de pluſieurs autres vérités démontrées en Géométrie ; & par conſéquent ne pas recevoir l'Infini, tel qu'on vient de le repréſenter, & avec toutes ſes ſuites néceſſaires, c'eſt rejetter des démonſtrations géométriques, & qui en rejette une les doit rejetter toutes.

Mais ſi la certitude eſt entiere, il ſemble que l'évidence ne le ſoit pas ; par exemple, un Infini moindre qu'un autre a beau être démontré, il paroît toujours enfermer une contradiction. Cet Infini moindre eſt néceſſairement limité par rapport au plus grand, & dès qu'il eſt limité, il n'eſt plus infini: mais il faut prendre garde que cette contradiction apparente vient de l'idée d'un autre Infini que celui qu'on a poſé.

Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur ſans bornes en tous ſens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeller cet Infini *Métaphyſique* : mais l'Infini *Géométrique*, c'eſt-à-dire, celui que la Géométrie conſidere, & dont elle a beſoin dans ſes recherches, eſt fort différent, c'eſt ſeulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non pas plus grande que toute grandeur. Il eſt viſible que cette définition permet qu'il y ait des

M.E.C.D. 2017

Infinis plus petits ou plus grands que d'autres Infinis, & que celle de l'Infini Métaphyſique ne le permettroit pas. On n'eſt donc pas en droit de tirer de l'Infini Métaphyſique des objections contre le Géométrique, qui n'eſt comptable que de ce qu'il renferme dans ſon idée, & nullement de ce qui n'appartient qu'à l'autre.

Je puis dire encore plus : l'Infini Métaphyſique ne peut s'appliquer ni aux nombres, ni à l'étendue, il y devient un pur Etre de raiſon, dont la fauſſe idée ne ſert qu'à nous troubler & à nous égarer.

L'Infini géométrique étant bien entendu, ſes principes bien inébranlables, les conſéquences bien liées, la plupart des recherches un peu élevées ne laiſſent pas de nous jetter encore dans des abîmes d'une obſcurité profonde, ou tout au moins dans des Pays où le jour eſt extrememement foible. L'Aſymptotiſme des Courbes toujours fort étonnant, quoique fort ordinaire, les eſpaces Aſymptotiques que d'aſſez légeres différences rendent finis ou infinis, leurs Solides que des eſpaces infinis donnent finis, & que des eſpaces finis donnent infinis, des ſommes de Suites infinies, qui d'infinies qu'elles étoient deviennent finies par la ſeule élévation des Suites au quarré, une infinité d'autres merveilles incompréhenſibles par elles-mêmes, naiſſent à chaque moment ſous les pas des Géometres, & il ſemble que la Géométrie, qui ſe pique d'avoir la clarté en

M.E.C.D. 2017

partage, devroit être exempte de merveilles. Quelquefois même des Méthodes, quoique fines & ingénieuſes, ne donnent aucune idée nette. Je n'ai point vu, par exemple, de Géometre qui entendît préciſément ce que c'eſt dans la Regle des Infléxions & des Rebrouſſemens, qu'une différence ſeconde devenue égale à l'Infini. J'en puis dire autant de la Courbure infinie, que l'on démontre telle ſans ſavoir aucunement en quoi elle conſiſte. Ajouterai-je qu'il ſemble quelquefois que les Géometres ſe faſſent honneur de leurs concluſions ſurprenantes, & qu'ils ſeroient fâchés qu'elles fuſſent plus vrai-ſemblables? Quoiqu'il en ſoit, il eſt arrivé dans la haute Géométrie une choſe biſarre, la certitude a nui à la clarté. On tient toujours le fil du Calcul, guide infaillible, il n'importe où l'on arrive, il y falloit arriver, quelques ténebres qu'on y trouve. De plus, la gloire a toujours été attachée aux grandes recherches, aux ſolutions des Problemes difficiles, & non à l'éclairciſſement des idées.

J'ai cru que cet éclairciſſement, négligé par les habiles Géometres, pourroit être utile à la Géométrie; on n'en marchera pas plus ſûrement, mais on verra plus clair autour de ſoi, avec le fil qu'on avoit dans des Labyrinthes ſombres, on aura un flambeau, dont la lueur ne ſauroit être ſi petite, qu'elle ne ſoit toujours de quelque uſage, & même ſi cette petite lueur que je préſente n'eſt pas fauſſe, rien

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

n'empêchera qu'on ne l'augmente beaucoup.

J'avoue qu'on peut me reprocher qu'au lieu d'éclaircir l'Infini, j'y porte une obſcurité nouvelle, un Paradoxe inoui, qui eſt expoſé dans la Sect. III, & qui enſuite ſe retrouve ſouvent dans tout l'Ouvrage: mais ſi ce Paradoxe eſt vrai, s'il ſuit néceſſairement de la nature de l'Infini, je la fais mieux connoître, j'en fais mieux connoître les propriétés, qui, quoiqu'obſcures, ſont la ſource de tout ce que le Calcul nous donne de plus étonnant; on arrivera aux plus grandes merveilles bien préparé, & ſans cette eſpece de ſurpriſe, qui dans le fonds n'eſt point honorable à une vraie Science. C'eſt toujours un degré de lumiere, que de voir ſûrement à quel principe, fût-il peu connu, tiennent certains effets. Ainſi quand les Phyſiciens ont demandé comment ſe fait la génération perpetuelle des Plantes & des Animaux, qui ſont des Corps d'une organiſation ſi admirable & ſi conſtante, ceux qui ont dit que ces Corps ſont déja tout formés de la main du ſouverain Etre dans les Graines ou dans les Œufs, & qu'ils ne font que ſe développer; ont apporté dans la Phyſique une connoiſſance nouvelle & utile, toute accompagnée qu'elle eſt de difficultés embarraſſantes; elles ne font pas abandonner le principe, & on ſe contente d'admirer. Je remarquerai en paſſant que dans cet exemple même la principale difficulté vient de l'Infini.

Ceux qui ont le plus traité l'Infini géométrique, ne

M.E.C.D. 2017

ne l'ont fait juſqu'à préſent qu'avec un reſte de timidité, qui les a empêchés de l'approfondir autant qu'ils le pouvoient. Il m'a ſemblé qu'au point où l'on en étoit venu, cette timidité n'étoit plus guere de ſaiſon, & que ma témérité ſeroit excuſable, ſi je tâchois d'avancer encore de quelque pas, pourvu que je ſuiviſſe exactement les routes déja ouvertes. Il s'eſt offert à moi une infinité de nouveaux Infinis ignorés, & cependant importans, & en général l'Infini s'étend beaucoup plus qu'il ne faiſoit ſur toute la Géométrie, ne fût-ce que par cette ſeule raiſon, que c'eſt lui qui fait les Incommenſurables, dont le nombre eſt infiniment plus grand que celui des Commenſurables. On rapporte qu'il y a dans les Pays-Bas de grandes étendues de terre qui ont été couvertes par la Mer, & dont il ne reſte que quelques pointes de Clochers éparſes çà & là, qui ſortent de l'eau. C'eſt ainſi à peu-près que l'Océan de l'Infini a abîmé tous les nombres, & toutes les grandeurs, dont il ne reſte que les Commenſurables que nous puiſſions connoître parfaitement. M. Huguens, qui étoit du moins autant homme d'eſprit que grand Géometre, a dit en quelque endroit de ſon *Coſmotheoros*, qu'*il ſoupçonnoit que tout notre Calcul ne rouloit que ſur les petits commencemens des Suites des Nombres*. M. Wallis a cru auſſi que tous nos Signes radicaux ne ſuffiroient pas pour exprimer certains nombres qu'il entrevoyoit, plus ſinguliers & plus Incommenſurables que les Incom-

M.E.C.D. 2017

menſurables ordinaires. Il y a bien de l'apparence qu'il entreroit de l'Infini dans ces nombres de M. Wallis.

Quand une Science, telle que la Géométrie, ne fait que de naître, on ne peut guere attraper que des Vérités diſperſées qui ne ſe tiennent point, & on les prouve chacune à part comme l'on peut, & preſque toujours avec beaucoup d'embarras. Mais quand un certain nombre de ces Vérités défunies ont été trouvées, on voit en quoi elles s'accordent, & les principes généraux commencent à ſe montrer, non pas encore les plus généraux ou les premiers, il faut un plus grand nombre de Vérités pour les forcer à paroître. Pluſieurs petites Branches que l'on tient d'abord ſéparément, menent à la groſſe Branche qui les produit, & pluſieurs groſſes Branches menent enfin au Tronc. Une des grandes difficultés que j'aie éprouvées dans la compoſition de cet Ouvrage a été de ſaiſir le Tronc, & pluſieurs groſſes Branches m'ont paru l'être qui ne l'étoient pas. Je ne ſuis pas ſûr de ne m'y être pas encore trompé, mais enfin quand j'ai eu pris l'Infini pour le Tronc, il ne m'a plus été poſſible d'en trouver d'autre, & je l'ai vu diſtribuer de toutes parts, & répandre ſes rameaux avec une régularité & une ſymmétrie, qui n'a pas peu ſervi à ma perſuaſion particuliere.

Un avantage d'avoir ſaiſi les premiers Principes, feroit que l'ordre ſe mettroit par-tout preſque de

M.E.C.D: 2017

lui-même, cet ordre qui embellit tout, qui fortifie les Vérités par leur liaiſon, que ceux à qui on parle ont droit d'exiger, & qu'on ne peut leur refuſer ſans une eſpece d'injuſtice, ſur-tout ſi on ſacrifie leur commodité à la gloire de paroître plus profond. De plus les démonſtrations qui ne ſont pas tirées des premiers principes, ne vont guere au but que par de longs & fatiguans circuits. On ne ſait preſque plus d'où l'on eſt parti, on ne ſait par où l'on a paſſé. Mais ſi on a pu remonter à la vraie nature des choſes, les démonſtrations en naiſſent preſque immédiatement, & en foule : il arrive rarement qu'il y ait bien loin des concluſions aux principes, & que l'on ne puiſſe pas embraſſer d'un coup d'œil tout le chemin qu'on a fait. Enfin ce qui n'eſt pas pris dans ces premieres ſources, manque aſſez ſouvent d'une certaine clarté. On ſe ſert des Rayons des Développées pour meſurer la courbure des Courbes ; mais parce que ces Rayons ne ſont qu'un indice de la courbure, & non pas ce qui la fait, quand on trouve une courbure infinie, on ne peut en prendre ſelon cette Théorie aucune idée nette. Le Vrai eſt ſimple & clair, & quand notre maniere d'y arriver eſt embarraſſée & obſcure, on peut dire qu'elle mene au Vrai, & n'eſt pas vraie.

Le Calcul n'eſt guere en Géométrie que ce qu'eſt l'expérience en Phyſique, & toutes les Vérités produites ſeulement par le Calcul, on les pourroit traiter de Vérités d'expérience. Les Sciences doivent

M.E.C.D. 2017

aller juſqu'aux premieres cauſes, ſur-tout la Géométrie, où l'on ne peut ſoupçonner comme dans la Phyſique des principes qui nous ſoient inconnus. Car il n'y a dans la Géométrie, pour ainſi dire, que ce que nous y avons mis, ce ne ſont que les idées les plus claires que l'Eſprit humain puiſſe former ſur la Grandeur comparées enſemble, & combinées d'une infinité de façons différentes, au lieu que la Nature pourroit bien avoir employé dans la ſtructure de l'Univers quelque Méchanique qui nous échape abſolument. Que ſi cependant la Géométrie a toujours quelque obſcurité eſſentielle, qu'on ne puiſſe diſſiper, & ce ſera uniquement, à ce que je crois, du côté de l'Infini, c'eſt que de ce côté-là la Géométrie tient à la Phyſique, à la nature intime des Corps que nous connoiſſons peu, & peut-être auſſi à une Métaphyſique trop élevée, dont il ne nous eſt permis que d'appercevoir quelques rayons.

Si l'on fait l'honneur à ce Livre de l'attaquer, & que ce ſoit par des endroits qui me ſont communs avec les Géometres partiſans de l'Infini, je me repoſerai de ma défenſe ſur leur autorité, & ne me mêlerai point de ſoutenir leur ſentiment, qu'ils ſoutiendroient mieux que moi. Si on m'attaque par des endroits qui me ſoient particuliers, je demande en grace qu'on ne les ait point jugés du premier coup d'œil, qu'on ne les prenne qu'accompagnés de tout ce qui les appuie ou les favoriſe; en un

M.E.C.D. 2017

mot qu'on rompe abſolument la liaiſon qu'ils m'ont paru avoir avec les principes reçus, & je reconnoîtrai mon erreur ſans chercher de vains ſubterfuges. J'en dis autant de toute autre eſpece de fautes où je ſerai tombé ſans m'en appercevoir, ce qui n'eſt que trop poſſible dans un aſſez grand Ouvrage, que j'ai toujours craint qui ne fût au-deſſus de mes forces, & que j'ai ſupprimé long-temps par cette raiſon.

M.E.C.D. 2017

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Du 22. Fevrier 1725.

MEſſieurs de MAIRAN & NICOLE, qui avoient été nommés pour examiner les *Elemens de la Géométrie de l'Infini*, par M. DE FONTENELLE Sécretaire perpétuel de l'Académie, en ayant fait leur rapport; la Compagnie a jugé que la plupart des idées contenues dans cet Ouvrage étoient nouvelles, ſoit par le fond, ſoit par la forme que l'Auteur leur donnoit, que l'application qu'il en faiſoit à la recherche des propriétés des Suites infinies de grandeurs quelconques, à la nature des Courbes, à leurs Aſymptotes, à leurs Eſpaces, & aux Solides qui reſultent de leurs révolutions autour d'un axe, aux forces Centrales, & à quelques autres queſtions Phyſico-mathématiques, étoit ſolide & ingénieuſe, que les Incommenſurables, & les quantités Imaginaires, étoient expliquées d'une maniere toute nouvelle, & comme faiſant partie d'un plan général, qui préſentoit à l'Eſprit un ſpectacle magnifique, & qu'enfin un Ouvrage ſi capable d'intéreſſer les plus grands Géometres par les ſpéculations ſublimes qu'il contient, & en même-temps ſi propre à éclairer ceux qui aſpirent à le devenir, ne pouvoit qu'être utile au Public, & faire honneur à l'Académie. En foi de quoi j'ai ſigné le preſent Certificat au lieu du Sécretaire. A Paris ce 26e Fevrier 1727. DE REAUMUR, *Directeur de l'Académie Royale des Sciences.*

M.E.C.D. 2017

TABLE.

PREMIERE PARTIE.

SYSTEME GENERAL DE L'INFINI.

SECTION. I. *DE la Grandeur, & de ſes Rapports ; des Proportions, & des Progreſſions.* 1

SECT. II. *De la Grandeur infiniment grande.* 29

SECT. III. *De la Suite naturelle infinie élevée à ſes Puiſſances, & comparée à la Progreſſion géométrique correſpondante.* 58

SECT. IV. *De la Grandeur infiniment petite.* 116

SECT. V. *Des Grandeurs Incommenſurables.* 147

SECT. VI. *Des Grandeurs Poſitives & Négatives, Réelles & Imaginaires.* 168

SECT. VII. *Sur les Suites infinies de Grandeurs quelconques.* 184

SECT. VIII. *Application des Théories précédentes aux Lignes droites.* 245

SECT. IX. *Idée générale des Lignes Courbes.* 255

SECT. X. *Des Variations & des Changemens des Courbes.* 270

SECT. XI. *Regles générales pour déterminer par le Calcul Différentiel tout ce qui appartient au cours d'une Courbe rapporté à un Axe.* 311

SECT. XII. *Regle générale pour déterminer, par le Calcul Différentiel, la Courbure des Courbes.* 353

M.E.C.D. 2017

SECONDE PARTIE.

DIFFERENTES APPLICATIONS OU REMARQUES.

SECT. I. *DE l'exactitude du Calcul de l'Infini.* 393

SECT. II. *Application de la Théorie des Infinis radicaux, & de celle des ſommes des Suites aux Eſpaces Hyperboliques.* 399

SECT. III. *Sur les Rencontres des différentes Courbes, ou des différentes Branches d'une même Courbe.* 408

SECT. IV. *Sur les Figures iſopérimetres.* 423

SECT. V. *De la formation des Lignes par des Points, des Plans par des Lignes, & des Solides par des Plans.* 449

SECT. VI. *Sur les Eſpaces Aſymptotiques en général, & les Solides qui en ſont produits.* 457

SECT. VII. *Sur la Communication ou non-Communication des Rapports entre l'Infini & le Fini.* 492

SECT. VIII. *Sur les forces des Corps en général.* 516

REFLEXION SUR LES SOMMES DES SUITES, *qui a été faite trop tard pour être inſérée dans le corps du Livre.* 546

M.E.C.D. 2017

Quod numerare nefas, numerat

ÉLÉMENS DE LA GÉOMÉTRIE DE L'INFINI.

PREMIERE PARTIE.

SISTEME GENERAL DE L'INFINI.

SECTION PREMIERE.

De la Grandeur, & de ſes Rapports; des Proportions, & des Progreſſions.

I. A GRANDEUR eſt ce qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution, ou, ce qui eſt le même, de plus & de moins. Tels ſont les Nombres, les Lignes, les Surfaces, les Solides, les Temps, &c. Il eſt clair qu'un Nombre peut, ſans ceſſer d'être nombre, être plus grand ou plus petit. De même une ligne, &c.

Ce que c'eſt que la Grandeur.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

2. Donc o n'eſt point grandeur, car il n'eſt ſuſceptible ni d'augmentation ni de diminution. Un rien ne peut être un plus grand ou un moindre rien.

Deux manieres dont ſe forme la Grandeur.

3. Il eſt naturel de concevoir les Grandeurs comme formées par une augmentation ſucceſſive : & pour cela ce qu'il y a de principal à conſidérer, c'eſt leur origine. Je puis les prendre à un point, dans un état, où elles n'exiſtent pas encore, & d'où elles partent pour devenir grandeurs, ou bien je puis les prendre comme formées de quelque grandeur de même eſpéce, ſi petite que je voudrai, & qui croîtra toujours : il n'y a que ces deux manieres poſſibles. Ainſi s'il s'agit, par exemple, des élévations du Soleil ſur l'Horiſon, je puis commencer par les prendre au point où le Soleil eſt préciſément à l'Horiſon, & où ſon élévation eſt nulle, & compter de là 1. degré, 2. degrés, ou ſeulement 1. Minute, 2. Minutes, &c. ou des Secondes, &c. mais je puis auſſi commencer par prendre 1. degré ou une Minute, &c. d'élévation, & de-là compter le reſte.

Selon la 1re maniere, la numération commence par o, & ſelon la 2de par 1. Selon la 1re, o eſt un *Terme* d'où partent les grandeurs croiſſantes, & ſelon la 2de, 1 eſt un *Element* dont elles ſont formées. Elles ſont d'autant plus grandes qu'elles ſont plus éloignées de o ſelon la 1re, & qu'elles ſont formées de 1 plus répeté ſelon la 2e. En un mot, on a ſuivi ou l'idée de *diſtance* plus ou moins grande à un Terme commun, ou l'idée de *répétition* plus ou moins grande d'un Elément commun.

4. Zero ne peut être que Terme, & jamais Elément, car il faut qu'un Elément ſoit grandeur, & il ne l'eſt pas (2).

5. Donc ſi Zero commence une formation de grandeurs, cette formation eſt faite ſelon l'idée de diſtance, & non ſelon celle d'Elément.

6. Un Elément doit être moindre que les grandeurs qui en ſont formées, & le même pour elles toutes. S'il y avoit dans la Nature une grandeur qui fût réellement la moindre grandeur poſſible de toutes celles d'une eſpece, par exemple,

M.E.C.D. 2017

une élévation du Soleil ſur l'Horiſon, moindre que toutes les autres, ce ſeroit celle-là qu'il faudroit prendre pour Elément des élévations; mais comme une telle grandeur n'exiſte point, on ne peut avoir un Elément que par une détermination arbitraire, par exemple, 1. degré d'élévation, ou 1. Minute, &c. cet élémént une fois fixé ne doit plus changer.

Unité numérique & géométrique.

7. Soit que l'on prenne pour élément des élévations du Soleil ou 1. degré, ou 1. Minute, ou 1. Seconde, &c. C'eſt toujours 1. appliqué à différentes grandeurs réelles, & qui les déſigne. Ainſi 1. eſt une grandeur purement intelligible & abſtraite, au lieu que 1. degré, ou 1. Minute &c. eſt une grandeur exiſtante & réelle. 1. dans le 1er ſens s'appelle l'*unité numérique*, & dans le 2^d^ ſens, où il eſt appliqué à quelque grandeur réelle, c'eſt l'*unité géométrique*..

8. L'unité géométrique eſt diviſible, 1. degré contient 60 Minutes, 1. Minute 60. Secondes, &c. Mais l'unité numérique eſt indiviſible, car quelque grandeur réelle que je veuille déſigner, je ne la puis déſigner par un nombre moindre que 1. Et ſi je dis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. j'entends $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ de quelque grandeur réelle ou unité géométrique, comme d'un degré, d'une minute, d'une toiſe, &c. alors c'eſt le demi-degré, ou la demi-minute, &c. qui devient l'unité numérique.

9. L'unité numérique eſt l'Elément commun de tous les nombres, 2. 3. 4. &c. ils ne ſont tous que 1. répété un certain nombre de fois.

10. Les nombres naturels étant pris ſelon l'idée de diſtance préciſément, ils ſont 0, 1, 2, 3, &c. & ſelon l'idée d'élément, ils ne ſont que 1, 2, 3, &c. De la 1re maniere ils ſe forment par addition, 0. $0+1=1$. $0+2=2$, &c. & de la 2de ils ſe forment par multiplication, 1. $1\times 2=2$. $1\times 3=3$, &c. Donc tout nombre eſt égal à la diſtance où il eſt de 0, & tout nombre eſt égal au nombre de fois que 1. à dû être repété pour le former.

11. Zero ne peut abſolument être élément (4.) mais 1. peut être terme auſſi-bien qu'élément, car rien n'empêche que l'on ne prenne les nombres croiſſans comme diſtans de 1,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

& que l'on ne diſe $1 + 1 = 2$. $1 + 2 = 3$, &c. Mais ce qui marque bien que 1. n'eſt pas ſi naturellement terme que 0, c'eſt que les nombres ne ſont pas égaux à leurs diſtances à 1, comme ils le ſont à leurs diſtances à 0 (10.)

12. Tout 0 eſt le même 0, & tout 1 eſt le même 1 numérique, mais non pas géométrique (7.)

13. Puiſque l'unité numérique eſt indiviſible (8) & le moindre nombre poſſible, elle n'a point d'élément; car il ſeroit moindre qu'elle, ou ce qui revient à la même choſe, elle n'a d'élément qu'elle-même. Et en effet $1 \times 1 = 1$. Cela doit être encore, parce que tout nombre a étant $= 1 \times a$ (10) il faut auſſi que a étant 1, 1×1 ſoit $= 1$.

14. Donc 1 eſt toujours 1, à quelque puiſſance qu'on l'éleve, & par conſéquent auſſi, quelque racine qu'on en tire.

15. Puiſque 1. multiplié par lui-même tant qu'on voudra ne change point, c'eſt la même choſe que s'il n'étoit point multiplié, & une multiplication qui ne produit aucun effet peut n'être point comptée. Donc il eſt également vrai, & que 1. n'eſt formé d'aucune multiplication, & qu'il eſt formé d'autant de multiplications par lui-même qu'on voudra, ce qui lui eſt particulier.

16. Il n'y a point de nombre qui, auſſi-bien que 0, & même que 1. (11.) ne puiſſe être un Terme d'où l'on comptera d'autres nombres plus grands: mais il ne ſera qu'un Terme *particulier*, & il n'y en a point qui, auſſi-bien que 1, ne puiſſe être élément, mais élément *particulier* de nombres plus grands. Ainſi tout nombre a eſt tel que l'on en peut toujours faire un plus grand qui ſera $a + m$, ou $a \times m$, m étant un nombre quelconque entier.

17. Tout nombre a pouvant être Terme à l'égard d'un plus grand qui ſera $a + m$, il n'eſt pas vrai de même qu'il puiſſe être élément à l'égard de tout nombre plus grand. Ainſi 2. & 3. ſont tels que $2 + m = 3$, m étant $= 1$: mais jamais $2 \times m$ ne peut être $= 3$, m étant un nombre entier. Il en eſt de même de tous les nombres dont le grand n'eſt pas un multiple exact du petit. Cela enferme deux cas. 1°. S'ils

M.E.C.D. 2017

ſont premiers entr'eux comme 2 & 3, ils ne peuvent, n'étant pas exprimés ſelon l'idée de diſtance, ou par a & $a+m$, s'exprimer que par a & b. 2°. S'ils ne ſont pas premiers entr'eux, & que l'un ſoit ſimplement un multiple non exact de l'autre, il eſt aiſé de voir qu'ils s'exprimeront par am & bm, a & b étant deux membres premiers entr'eux, & m le même de part & d'autre. Tels ſont $10 = 2 \times 5$ & $15 = 3 \times 5$.

18. Donc en général deux nombres ne peuvent s'exprimer que par a & $a+m$, ou a & $a \times m$, ou a & b, ou am, & bm.

Rapports. Rapport arithmétique & géométrique.

19. Un Rapport eſt la comparaiſon de deux choſes, ou plutôt le fondement de la comparaiſon qu'on en fait; donc il faut qu'elles ſoient deux, car ſi elles n'étoient préciſément & de tous points que la même, il n'y auroit nulle comparaiſon à en faire. Donc tout leur rapport ne vient préciſément que de ce qui fait qu'elles ſont deux. Or deux grandeurs préciſément priſes comme telles, & ſans nulle autre circonſtance étrangere, ne peuvent être deux, que parce que l'une eſt plus petite, & l'autre plus grande; donc c'eſt de-là uniquement que vient leur rapport, & il ne conſiſte qu'en ce qui rend l'une plus petite, & l'autre plus grande, ou, la plus petite étant poſée, en ce qui rend l'autre plus grande.

20. Donc, ſi deux nombres ou grandeurs ſont exprimés par a & $a+m$, ou par a & am, tout leur rapport conſiſte dans m, qui ſeule les rend deux. Or m eſt la diſtance de $a+m$ à a, a étant pris pour Terme à l'égard de $a+m$, & m eſt le nombre de fois que a, Elément de am, eſt repété dans am. Donc le rapport de a & de $a+m$ eſt pris ſelon l'idée de diſtance, & le rapport de a & de am ſelon l'idée d'élément. Le 1er s'appelle rapport *arithmétique* ou *différence*, & le 2^d^ rapport *géométrique*.

21. Dans l'expreſſion générale du rapport arithmétique de a & de $a+m$, a peut être $= 0$, parce que a eſt conſidéré comme un Terme à l'égard de $a+m$, & que 0 eſt le Terme commun des grandeurs. Les deux grandeurs a & $a+m$ deviendront donc alors 0 & $0+m=m$, & même tout le

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

rapport arithmétique de a & de $a+m$ se réduit nécessairement à celui de o & de m ; car en retranchant de a & de $a+m$, a qui leur est commun, & qui par conséquent ne les rend point deux, & ne fait rien à leur rapport, on a $a-a=o$, & m.

22. Donc a & m étant deux nombres indéterminés, dont chacun peut avoir une infinité de valeurs différentes, le rapport arithmétique de deux nombres quelconques se réduit toujours à celui de o, & de leur différence m.

23. Donc quand on prendra m pour un nombre déterminé, il y a un rapport primitif & original de o & de m, qui a, pour ainsi dire, une infinité de copies dans les rapports de a & de $a+m$.

24. Dans l'expression du rapport géométrique de a & de am, a ne peut être $=o$ (4), mais il peut être $=1$, & même quelque grandeur que soit a, le rapport de a & de am se réduit à celui de 1 & de m, car a & am ayant a qui leur est commun & inutile à leur rapport, si on le leur ôte à tous deux par la division, ce qu'il faut faire, puisque leur rapport est formé par multiplication (10), on a $\frac{a}{a}=1$, & $\frac{am}{a}=m$.

25. Donc les rapports géométriques du nombre infini de grandeurs représentées par a & am, ne sont que les copies du rapport primitif & original de 1 & de m.

26 Quand deux grandeurs ne peuvent être exprimées que par a & b, à cause que a & b sont premiers entr'eux (17), cela n'empêche pas qu'elles n'aient une différence m, $=b-a$, en quoi consiste leur rapport arithmétique, & elles peuvent toujours être exprimées par a & $a+m$. Mais elles n'ont point de m pour exprimer leur rapport géométrique, & elles n'ont rien de commun que 1, élément de toutes les grandeurs, car elles sont $1\times a=a$, & $1\times b=b$. Donc leur rapport géométrique consiste dans a & dans b pris en leur entier, & c'est un rapport irréductible & original. Ces grandeurs sont deux par toute leur nature & par toute leur expression, & leur rapport géométrique ne peut être que $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$.

M.E.C.D. 2017

27. Si deux grandeurs ſont exprimées par am, & bm ſelon l'art. 17. il eſt viſible qu'elles ne ſont, ſelon le rapport géométrique que a & b, & qu'il ſuffit de les conſidérer ſous cette derniere expreſſion.

28. En ſuppoſant toujours $a < b$, on peut concevoir que comme an eſt formé de a, multiplié par m, ainſi b eſt formé de a, multiplié par $\frac{b}{a}$, car $a \times \frac{b}{a} = b$. Ainſi en prenant m pour un nombre quelconque, ſoit entier, ſoit fractionnaire, & $= \frac{b}{a}$ expreſſion d'un rapport géométrique irréductible, m ſera un multiplicateur, qui d'un nombre quelconque en fera toujours un plus grand quelconque.

29. Donc deux grandeurs ayant un rapport arithmétique ſe peuvent toujours exprimer par a & $a + m$, & ſi elles ont un rapport géométrique par a & am, & en réuniſſant les deux ſignes $+$ & $\times$, les deux grandeurs quelconques s'exprimeront par a & $a \overset{+}{\times} m$, m étant dans l'arithmétique une différence, & dans le géométrique un multiplicateur, en quoi conſiſte de part & d'autre tout le rapport.

30. Deux grandeurs différentes de a & de $a \overset{+}{\times} m$ ne peuvent avoir entr'elles le même rapport quelconque que a & $a \overset{+}{\times} m$, ou faire avec a & $a \overset{+}{\times} m$ une proportion, ſoit *arithmétique*, ſoit *géométrique*, à moins qu'elles ne ſoient deux entr'elles préciſément de la même maniere dont a & $a \overset{+}{\times} m$ ſont deux (20). Donc il faut qu'elles conſervent l'm de $a \overset{+}{\times} m$, donc ces deux nouvelles grandeurs ſont b, & $b \overset{+}{\times} m$.

31. Si deux grandeurs ne peuvent être exprimées ſelon le rapport géométrique que par a & b, comme elles ſont deux, ou différentes par toute leur expreſſion, deux autres grandeurs ne ſauroient avoir le même rapport géométrique, qu'elles ne ſoient encore a & b, & en même temps pour être

BIBLIOTECA DEL
M.E.C.D. 2017

différentes de a & de b, il faut qu'elles le ſoient par quelque choſe qui leur ſoit commun à toutes deux, & par conſéquent ne change rien au rapport de a & de b. Donc les deux nouvelles grandeurs ſont $a \times m$, & $b \times m$, ce qui n'empêche pas que, ſelon le rapport arithmétique, elles ne puiſſent être exprimées par a & $a + m$ (17).

Expreſſion générale de la proportion arithmétique, & de la géométrique.

32. Donc toute proportion s'exprime ainſi :

$a. a \underset{\times}{+} m. b. b \underset{\times}{+} m.$ ou $a. b. a \underset{\times}{+} m. b \underset{\times}{+} m.$

Chacune de ces expreſſions contient deux proportions, l'une arithmétique, l'autre géométrique.

33. Quoique dans les deux proportions de chaque eſpéce, les grandeurs puiſſent être les mêmes, par exemple, $a = 2$, $b = 3$, $m = 4$, de part & d'autre, les deux proportions ne feront pas la même, car le rapport égal qui doit être entre les 2. premieres grandeurs d'une proportion, & les 2. dernieres, ne ſera pas le même de part & d'autre. Ainſi dans $a. a + m. b. b + m$, ce rapport égal ſera 4, & dans $a. b. a + m. b + m$, il ſera 1. De même dans $a. am. b. bm$ le rapport ou multiplicateur égal ſera 4, & dans $a. b. am. bm$, il ſera $\frac{3}{2}$ (28). Alors cette derniere proportion ſera $a. a \times \frac{b}{a}. m. m \times \frac{b}{a}$, c'eſt-à-dire, $2. 2 \times \frac{3}{2}. 4. 4 \times \frac{3}{2}$, où 2. 3. 4. 6. & elle ſera réduite à la même forme que $a. am. b. bm$, ſelon l'art. 28.

34. La premiere proportion quelconque de l'art. 32. deviendra la 2de, ſi on met ſeulement les deux termes moyens à la place l'un de l'autre. Donc ce déplacement de termes n'empêche pas qu'il n'y ait encore proportion, quoique le rapport égal qui conſtitue la proportion, ne ſoit plus le même (33).

35. Au lieu de commencer par les plus petits termes dans les deux comparaiſons que l'on fait, ou dans les deux rapports, on peut commencer par les plus grands, & dire : $a \underset{\times}{+} m. a. b \underset{\times}{+} m. b.$ ou $b. a. b \underset{\times}{+} m. a \underset{\times}{+} m$, & il eſt clair

que

M.E.C.D. 2017

que ce déplacement de termes, & celui de l'art. précédent ſont tous les déplacemens poſſibles, qui laiſſeront ſubſiſter une proportion.

36. En toute proportion il n'y a que 3 grandeurs différentes, a, b, & m, répétées chacune une fois.

37. De quelque maniere que les 4 termes d'une proportion quelconque ſoient rangés, pourvû qu'ils le ſoient de maniere qu'il y ait proportion; a, b, & m ſe trouvent toujours dans les deux termes extremes & dans les deux moyens, & ne s'y trouvent qu'une fois chacun. Donc la ſomme des extremes, & celle des moyens dans la proportion arithmétique, & le produit des extremes & celui des moyens dans la géométrique, ſont toujours des quantités égales.

Des principes qui viennent d'être établis, on tireroit aiſément toute la Théorie des Proportions à priori, *au lieu que ſouvent les démonſtrations qu'on donne en cette matiere ſont fondées ſur l'égalité des extremes & des moyens, qui n'eſt qu'une propriété, & non l'eſſence de la proportion. Il ſuffit d'avoir fait appercevoir le chemin qu'on pourroit prendre, nous ne le ſuivrons pas plus loin.*

38. Dans la proportion ſoit arithmétique, ſoit géométrique, les deux rapports égaux ſont celui du 1er terme au 2^d^, & du 3me au 4me, mais non celui du 2^d^ au 3me. Que s'il étoit égal aux deux autres, la proportion ſeroit *continue*, & s'appelleroit *progreſſion*, & pourroit comprendre enſuite tant de termes qu'on voudroit. *Expreſſion générale de la Progreſſion arithmétique & de la géométrique.*

Donc deux grandeurs étant exprimées par a & par $a \overset{+}{\times} m$, une 3me qui auroit même rapport à la 2de, que la 2de à la 1re ſeroit $a \overset{+}{\times} m \overset{+}{\times} m$, & on aura de même une 4me grandeur, & toujours ainſi de ſuite. Donc la progreſſion arithmétique ſera

$$\div a.\ a + m.\ a + 2m.\ a + 3m, \text{ \&c.}$$

Et la géométrique

$$\div\div a.\ am.\ am^2.\ am^3, \text{ \&c.}$$

Si les deux 1res grandeurs étoient exprimées par a & par b,

M.E.C.D. 2017

il ſeroit aiſé de réduire b à l'expreſſion $a \overset{+}{\times} m$, puiſqu'on peut prendre $m = b - a$ (26) ou $m \frac{b}{a}$ (28).

29. Donc en toute progreſſion il n'y a que deux grandeurs différentes, a & m, répétées.

40. De ce qu'il n'y a que ces deux grandeurs, & de ce que la progreſſion arithmétique ſe forme par l'addition continuelle de m au terme précédent, & la géométrique par la multiplication continuelle de m par le terme précédent, il ſuit que les Coëfficiens de m dans l'arithmétique, & les Expoſans de m dans la géométrique ſont les mêmes, & de plus ſont les termes de la Suite naturelle 1, 2, 3, &c.

Comparaiſon des deux Progreſſions.

41. Donc a & m étant donnés, ſi l'on en veut faire une progreſſion arithmétique, il n'y a qu'à multiplier m par tous les nombres naturels de ſuite, & ajouter toujours a, & ſi l'on veut faire une progreſſion géométrique, il n'y a qu'à élever m de ſuite aux puiſſances déſignées par ces nombres, & multiplier toujours par a.

42. Dans la progreſſion arithmétique a peut être $= 0$, & alors elle eſt $\div$ 0. $1m$. $2m$. $3m$, &c. & même afin que m ſoit dans le 1 ^{er} terme auſſi-bien que dans tous les autres, & qu'en même-temps il ſoit $= 0$, on peut concevoir que la progreſſion eſt $\div$ $0m$. $1m$. $2m$, &c.

43. Si a a une autre valeur que 0, 0 peut encore être le 1 ^{er} terme de la progreſſion, pourvû que a ſoit $= m$. Car alors elle eſt $\div$ $1m$. $2m$. $3m$, &c. & par conſéquent 0 en peut être le 1 ^{er} terme (42).

44. Et même il le doit être, ſi l'on veut que la progreſſion commence d'auſſi loin qu'elle le peut.

45. Donc toute progreſſion arithmétique, dont le 1 ^{er} terme différent de 0 eſt égal à la différence, peut commencer par 0, & le doit pour commencer d'auſſi loin qu'elle le peut. Telle eſt la Suite naturelle des nombres.

46. Dans la progreſſion géométrique a peut être $= 1$, & alors elle eſt $\div\div$ $1 . m^1 . m^2 . m^3$, &c. c'eſt-à-dire, que tous

M.E.C.D. 2017

ſes termes ne ſont que *m* élevé de ſuite à toutes ſes puiſſances excepté le 1er terme 1.

47. Donc toutes les puiſſances conſécutives de quelque grandeur que ce ſoit, ſont en progreſſion géométrique.

48. Donc 1 peut toujours être le 1er terme de ces différentes progreſſions, & doit l'être, afin qu'elles commencent d'auſſi loin qu'elles le peuvent.

49. Et même pour faire que ce 1er terme ſoit auſſi exprimé par *m*, il n'y a qu'à conſidérer que les expoſans de *m* ſont en progreſſion arithmétique naturelle (40), dont par conſéquent le 1er terme eſt o (45), & que par conſéquent dans la progreſſion ∴ 1. m^1. m^2, &c. m° doit être immédiatement avant m^1, & par conſéquent = 1. Donc le 1er terme 1 ſera exprimé par m°, comme dans la progreſſion arithmétique ∴ o. 1*m*. 2*m*, &c. le 1er terme o pour être exprimé par o*m* (42).

En effet m^3 eſt *m* multipliée deux fois par elle-même, m^2 eſt *m* multipliée une fois par elle-même, m^1 eſt *m* qui n'eſt plus multipliée par elle-même, mais qu'on laiſſe telle qu'elle étoit, & qui par conſéquent n'eſt que *m* multipliée par 1 qui ne multiplie point. Donc m° eſt encore d'un degré au-deſſous, par conſéquent eſt une grandeur qui n'eſt abſolument formée par aucune multiplication. Or la ſeule grandeur à laquelle cette idée convienne eſt 1 (15).

50. Donc toute grandeur élevée à la puiſſance o eſt 1.

51. Donc 1° eſt auſſi = 1, & en effet les puiſſances de 1 ne le changent point (14).

52. Si *a* eſt une autre grandeur que 1, 1 peut encore être le 1er terme de la progreſſion géométrique, pourvû que *a* ſoit = *m*. Car alors la progreſſion eſt ∴ m^1, m^2, &c. & par conſéquent le 1er terme peut être m° = 1 (49).

53. Si *m* = 1, la progreſſion géométrique eſt toute compoſée de grandeurs égales, & n'eſt plus progreſſion, ou bien ç'en eſt une qui l'eſt le moins qu'il ſe puiſſe. C'eſt la même choſe que ſi dans une progreſſion arithmétique *m* étoit = o.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Maniere de trouver les termes quelconques d'une Progreſſion arithmétique ou géométrique.

54 On voit par la formation des deux progreſſions $a.\ a \overset{+}{\times} m$ (38) que leur 3me terme eſt $a + 2m = a + \overline{m \times 3 - 1}$, ou $am^2 = a \times m^{3-1}$, que le 10me eſt $a + \overline{m \times 10 - 1}$, ou $a \times m^{10-1}$, & en général le n^{me} $a + \overline{m \times n - 1}$, ou am^{n-1}. Ce qui donne tout d'un coup un terme quelconque de la progreſſion, quand on ſait le quantieme il eſt.

Par exemple, ſi on demande le 10me terme de la progreſſion géométrique, dont 2 & 3 ſont les deux 1ers termes, & où par conſéquent $m = \frac{3}{2}$, ce 10me terme eſt $\frac{3}{2}$ élevé à la puiſſance $n - 1$, c'eſt-à-dire, à la 9me, & multiplié par $2 = a$. Donc c'eſt $\frac{2 \times 3^9}{2^9} = \frac{3^9}{2^8} = \frac{19683}{256} = 76\ \frac{237}{256}$.

On voit par cet exemple que ſi, outre que la progreſſion ſera géométrique, ſes deux 1ers termes ſont des nombres premiers entre eux, le n^{me} ſera $\frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$.

55. Si on a le 1er terme d'une progreſſion quelconque, & un autre b qui ne ſoit pas le 2^d, on aura toute la progreſſion, pourvû qu'on ſache le quantieme eſt b, ou, ce qui eſt le même, que l'on connoiſſe le nombre total des termes n. Car ce n^{me} terme eſt $a + \overline{m \times n - 1}$, ou am^{n-1} (54), & m eſt alors un nombre inconnu. Donc dans la progreſſion arithmétique $b = a + \overline{m \times n - 1}$, & par conſéquent $\frac{b-a}{n-1} = m$, & dans la géométrique $b = am^{n-1}$, & par conſéquent $\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}}$ ou $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} = m$. Or quand on a a & m, on a toute la progreſſion quelconque (39), & il ne faut plus que donner à $\frac{b-a}{n-1} = m$ des Coëfficiens, ou à $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} = m$ des Expoſans

M.E.C.D. 2017

qui ſoient la ſuite naturelle des nombres (41). Donc la progreſſion arithmétique ſera

$\div a.\ a + \frac{b-a}{n-1}.\ a + \frac{2b-2a}{n-1}.\ a + \frac{3b-3a}{n-1}$, &c.

ou $\div a.\ \frac{na+1b-2a}{n-1}.\ \frac{na+2b-3a}{n-1}.\ \frac{na+3b-4a}{n-n}$, &c.

Où l'on voit que ſi, par exemple, $n = 4$, c'eſt-à-dire, ſi b doit être le 4me terme, $\frac{na+3b-4a}{n-1}$ eſt $= b$. Car $na - 4a = 0$. Donc il ne reſte que $\frac{3b}{n-1}$. Or ici $3 = n - 1$. Donc $\frac{3b}{n-1} = b$.

Pareillement la progreſſion géométrique ſera

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a.\ a \times \frac{\overset{1}{b^{n-1}}}{\underset{1}{a^{n-1}}}.\ a \times \frac{\overset{2}{b^{n-1}}}{\underset{2}{a^{n-1}}}.\ a \times \frac{\overset{3}{b^{n-1}}}{\underset{3}{a^{n-1}}}.\ a \times \frac{\overset{4}{b^{n-1}}}{\underset{4}{a^{n-1}}}$, &c.

ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} a.\ a^{\frac{n-2}{n-1}} \times b^{\frac{1}{n-1}}.\ a^{\frac{n-3}{n-1}} \times b^{\frac{2}{n-1}}.\ a^{\frac{n-4}{n-1}} \times b^{\frac{3}{n-1}}$, &c.

Où l'on voit que ſi $n = 4$, le 4me terme $a^{\frac{n-4}{n-1}} \times b^{\frac{3}{n-1}}$ eſt $= b$. Car $n - 4 = 0$. Donc $a^{\frac{n-4}{n-1}} = a^{\frac{0}{n-1}}$. Or l'expoſant $\frac{0}{n-1}$ eſt $= 0$. Donc $a^{\frac{0}{n-1}} = a^0 = 1$ (50). Donc il ne reſte dans ce terme que $b^{\frac{3}{n-1}}$. Or ici $3 = n - 1$. Donc $b^{\frac{3}{n-1}} = b$.

On voit aſſez qu'il en ira de même de toute autre valeur qu'on donnera à n dans l'une & dans l'autre progreſſion.

56. Si on veut que b entre dans le premier terme de ces progreſſions comme dans tous les autres, il eſt clair par l'analogie perpétuelle de leurs termes que dans l'arithmétique ce premier terme ſera $\frac{na+0b-1a}{n-1} = \frac{na-1a}{n-1} = a$, & dans la géométrique $a^{\frac{n-1}{n-1}} \times b^{\frac{0}{n-1}} = a \times 1 = a$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

57. On a donné dans l'article 55. à $\frac{b-a}{n-1}$ ou à $\frac{b^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$ des Coëfficiens ou des Expoſans qui ſont la Suite naturelle des nombres, & c'eſt ainſi qu'on a formé toutes les autres fractions des deux progreſſions. De-là il ſuit que dans la progreſſion arithmétique tous les termes ajoutés à a, & dans la géométrique tous les expoſans de a, & tous ceux de b ſont en progreſſion arithmétique : car ces grandeurs, fractionnaires les unes & les autres, ayant toujours le même dénominateur, ont leurs numérateurs en cette progreſſion. Seulement il eſt bon de remarquer que dans la progreſſion géométrique les expoſans de a ſont en progreſſion arithmétique décroiſſante, & ceux de b en progreſſion arithmétique croiſſante, & que ces deux progreſſions arithmétiques ne ſont que la même renverſée.

Moyens proportionnels en nombre quelconque, appartenans à l'une ou à l'autre Progreſſion.

58. Remplir, comme on a fait dans l'article 55. une progreſſion quelconque dont on a le 1er terme, & un autre quelconque b en connoiſſant n, nombre total des termes, ou introduire entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, c'eſt la même choſe, à cela près que dans la 1re opération le nombre total des termes eſt n, & dans la 2^de^ $n + 2$; car outre le nombre n de moyens proportionnels, il y a encore les deux extremes a & b. Donc il ne faudra que mettre par-tout au lieu de $n - 1$, $n - 1 + 2 = n + 1$, & tout ſe réduira aux articles 55, 56 & 57.

Par exemple, ſi on cherche 7 moyens arithmétiques entre 3 & 5, l'm ou différence de 3 & de 5 étant 2, celle de la progreſſion ſera $\frac{2}{8} = \frac{b-a}{n+1}$, & la progreſſion ſera

$\div 3.$ ou (56) $3 + \frac{0}{8}. 3 + \frac{2}{8}. 3 + \frac{4}{8}. 3 + \frac{6}{8}. 3 + \frac{8}{8}. 3 + \frac{10}{8}. 3 + \frac{12}{8}. 3 + \frac{14}{8}. 3 + \frac{16}{8} = 5.$

Si entre les mêmes extremes on cherche 8 moyens arithmétiques, la progreſſion ſera

$\div 3 + \frac{0}{9}. 3 + \frac{2}{9}. 3 + \frac{4}{9}. 3 + \frac{6}{9}. 3 + \frac{8}{9}. 3 + \frac{10}{9}.$

M.E.C.D. 2017

$3 + \frac{12}{9} \cdot 3 + \frac{14}{9} \cdot 3 + \frac{16}{9} \cdot 3 + \frac{18}{9} = 5.$

Pareillement si on cherche 7 moyens géométriques entre 3 & 5, leur *m* étant $\frac{5}{3}$, celle de la progression sera

$\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} = \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, & la progression sera

$\div 3$ ou (56) $3^{\frac{8}{8}} \times 5^{\frac{0}{8}} \cdot 3^{\frac{7}{8}} \times 5^{\frac{1}{8}} \cdot 3^{\frac{6}{8}} \times 5^{\frac{2}{8}} \cdot 3^{\frac{5}{8}} \times 5^{\frac{3}{8}} \cdot$
$3^{\frac{4}{8}} \times 5^{\frac{4}{8}} \cdot 3^{\frac{3}{8}} \times 5^{\frac{5}{8}} \cdot 3^{\frac{2}{8}} \times 5^{\frac{6}{8}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \times 5^{\frac{7}{8}} \cdot 3^{\frac{0}{8}} \times 5^{\frac{8}{8}} = 5.$

Si on cherche entre les mêmes extremes 8 moyens géométriques, la progression sera

$\div 3^{\frac{9}{9}} \times 5^{\frac{0}{9}} \cdot 3^{\frac{8}{9}} \times 5^{\frac{1}{9}} \cdot 3^{\frac{7}{9}} \times 5^{\frac{2}{9}} \cdot 3^{\frac{6}{9}} \times 5^{\frac{3}{9}} \cdot 3^{\frac{5}{9}} \times 5^{\frac{4}{9}} \cdot$
$3^{\frac{4}{9}} \times 5^{\frac{5}{9}} \cdot 3^{\frac{3}{9}} \times 5^{\frac{6}{9}} \cdot 3^{\frac{2}{9}} \times 5^{\frac{7}{9}} \cdot 3^{\frac{1}{9}} \times 5^{\frac{8}{9}} \cdot 3^{\frac{0}{9}} \times 5^{\frac{9}{9}} = 5.$

59. Il entre dans les progressions de ces exemples des fractions qui se peuvent réduire à de moindres termes. Elles sont toutes réductibles dans la 1re progression arithmétique, & elle devient. *Moyens proportionnels réductibles ou irréductibles.*

$\div 3 + \frac{0}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{2}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{4}{4} \cdot 3 + \frac{5}{4} \cdot 3 + \frac{6}{4} \cdot$
$3 + \frac{7}{4} \cdot 3 + \frac{8}{4} \cdot$

Celle-ci a encore des fractions réductibles qui sont $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} = 1$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{8}{4} = 2$. Si ces fractions peuvent être en progression arithmétique, les termes dans lesquels elle entroient, étant toujours ajoutés au 1er terme seront encore en cette progression (41), & par conséquent il y aura entre les mêmes extremes une nouvelle progression arithmétique composée d'un moindre nombre de termes, puisquelle n'aura que quelques-uns de ceux qu'avoit la premiere. Or telles sont ces fractions, car sans changer leur valeur, elles deviendront $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} = 1 = \frac{2}{2}$, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$, où l'on voit que leur dénominateur 2 étant le même, leurs numérateurs 1, 2, 3, 4, sont en progression arithmétique. Et comme le 1er terme $3 + \frac{0}{4}$ est $= 3 + \frac{0}{2}$, & qu'en général le numérateur de sa fraction étant toujours o, le dénominateur est tel nombre

M.E.C.D. 2017

que l'on veut, la nouvelle progreſſion ſera $\div 3 + \frac{0}{2} . 3 + \frac{1}{2} . 3 + \frac{2}{2} . 3 + \frac{3}{2} . 3 + \frac{4}{2} = 5$. Et il n'y a plus que 3 moyens proportionnels au lieu de 7 qu'il y avoit, & 5 termes en tout au lieu de 9.

Et comme dans cette nouvelle progreſſion $\frac{0}{2}$, $\frac{2}{2}$ & $\frac{4}{2}$ ſont encore réductibles, de maniere que leur dénominateur ſera le même, & leurs numérateurs en progreſſion arithmétique, car $\frac{0}{2} = \frac{0}{1}$, $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$, $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$, il ſe fera la nouvelle progreſſion $\div 3 + \frac{0}{1}, 3 + \frac{1}{1} 3 + \frac{2}{1}$ ou 3. 4. 5.

Quant aux fractions irréductibles de la premiere progreſſion, qui ſont $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, il eſt bien vrai qu'elles ſont en progreſſion arithmétique entr'elles : mais elles n'y peuvent être ni avec $\frac{0}{4}$, ni avec $\frac{8}{4}$, fractions extremes, & par conſéquent les termes affectés des fractions $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ ne peuvent être moyens arithmétiques entre $3 + \frac{0}{4} = 3$, & $3 + \frac{8}{4} = 5$ ſelon une progreſſion compoſée de moins de 9 termes.

On voit donc, non par cet exemple particulier ſeulement, mais par la nature générale de la choſe, que ſi les termes d'une progreſſion arithmétique compriſe entre deux extremes déterminés *a* & *b*, ſont tous affectés de fractions réductibles qui ſoient encore après la réduction en progreſſion arithmétique, la progreſſion demeure la même, & conſerve le même nombre de termes; que s'il n'y a que quelques termes dont les fractions ſoient réductibles, il faut afin qu'il y ait encore une progreſſion compriſe entre *a* & *b*, 1° que *a* & *b*, ou, pour parler plus exactement, *b* ſoit du nombre des termes dont les fractions ſont réductibles, car *a* en eſt toujours, 2° que toutes les fractions étant réduites, ſoient en progreſſion arithmétique. Moyennant ces deux conditions il y aura une nouvelle progreſſion compriſe entre les mêmes extremes *a* & *b*, & compoſée d'un moindre nombre de termes.

Ce doit être le même raiſonnement à l'égard des fractions qui ſont les expoſans des termes de la progreſſion géométrique, car les expoſans de *a* pris de ſuite, & de même ceux de *b* ſont en progreſſion arithmétique (57. Donc les termes moyens de la progreſſion géométrique affectés de fractions

ou

M.E.C.D. 2017

ou expoſans réductibles pourront encore être moyens entre les mêmes extrêmes ſelon une progreſſion compoſée d'un moindre nombre de termes, pourvû que les expoſans de ceux qui compoſent la nouvelle progreſſion, ſoient une progreſſion arithmétique.

Ainſi dans la 1re progreſſion géométrique de l'art. 58. $3^{\frac{6}{8}} \times 5^{\frac{2}{8}} = 3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}} . 3^{\frac{4}{8}} \times 5^{\frac{4}{8}} = 3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}} . 3^{\frac{2}{8}} \times 5^{\frac{6}{8}}$ $= 3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}$ ſont des termes moyens dont les expoſans étoient réductibles, mais de plus ceux de 3 & ceux de 5 ſont entr'eux une progreſſion arithmétique, & enfin les deux extrêmes $3^{\frac{8}{8}} \times 5^{\frac{0}{8}}$ & $3^{\frac{0}{8}} \times 5^{\frac{8}{8}}$ étant réduits à $3^{\frac{4}{4}} \times 5^{\frac{0}{4}}$, & à $3^{\frac{0}{4}} \times 5^{\frac{4}{4}}$, la progreſſion arithmétique des expoſans ſubſiſte toujours; d'où il ſuit que $3^{\frac{3}{4}} \times 5^{\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}}$, $3^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{4}}$ ſont trois termes qui peuvent être moyens geométriques entre $3 = 3^{\frac{4}{4}} \times 5^{\frac{0}{4}}$ & $5 = 3^{\frac{0}{4}} \times 5^{\frac{4}{4}}$ dans une progreſſion compoſée ſeulement de 5 termes, au lieu que la premiére ou ils entroient l'étoit de 9.

Il eſt clair que dans cette nouvelle progreſſion $3^{\frac{2}{4}} \times 5^{\frac{2}{4}}$ a encore un expoſant réductible; que de plus les deux extrêmes ont auſſi les leurs réductibles; que les expoſans de ces 3 termes ſeront une progreſſion arithmétique, & que les 3 termes ſeront $3^{\frac{2}{2}} \times 5^{\frac{0}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{0}{2}} \times 5^{\frac{2}{2}}$, ou $3 . 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} . 5$.

60. Tout moyen proportionnel unique entre a & b a $\frac{1}{2}$ pour Coëfficient s'il eſt arithmétique, & pour Expoſant s'il eſt géométrique. Car alors $n = 1$, & $n + 1 = 2$. Donc le moyen proportionnel arithmétique entre a & b eſt $a + \frac{b - a}{2}$ $= a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$, & le geométrique eſt

M.E.C.D. 2017

$a \times \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$, ou $\sqrt{ab}$. Donc dans un nombre quelconque de moyens proportionnels quelconque entre a & b, il ne se pourra trouver de terme qui soit le même que ce moyen proportionnel unique, à moins qu'il n'y en ait un affecté d'une fraction réductible à $\frac{1}{2}$. Or si n est un nombre pair, $n + 1$ sera impair, & par conséquent nulle fraction ne pourra se réduire à $\frac{1}{2}$. Donc si le nombre de moyens proportionnels quelconques entre a & b est pair, il n'y en aura aucun qui soit le même que le moyen proportionnel unique entre a & b, & au contraire il y en aura un qui sera le terme du milieu, si n est impair. On en voit des exemples dans les deux progressions tant arithmétiques que géométriques de l'art. 58.

61. Un nombre quelconque de moyens proportionnels quelconques étant introduits entre a & b, il n'y en a aucuns qui puissent être moyens entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes, que ceux dont les fractions sont reductibles avec certaines conditions (59). Donc si toutes les fractions sont absolument irréductibles, il n'y aura aucuns termes moyens qui puissent l'être entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes. Or si $n + 1$ dénominateur perpetuel de toutes les fractions, est un nombre premier, toutes les fractions seront irréductibles. Donc en ce cas-là aucun des termes moyens entre a & b ne pourra l'être entre les mêmes extrêmes selon une progression composée d'un moindre nombre de termes. Par exemple, si on prend 12 moyens proportionnels quelconques entre a & b, on sera sûr, parce que $n + 1 = 13$ est un nombre premier, qu'aucun de ces 12 termes moyens ne sera moyen entre a & b selon une progression, qui n'auroit que 11 termes moyens, ou 13 en tout, ou 12 en tout, ou 11, ou, 10, &c.

62. Donc à chaque fois qu'on introduit entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, tel que

M.E.C.D. 2017

$n+1$ soit nombre premier, on a des termes moyens différens de tous ceux qui, étant en moindre nombre, seroient moyens aussi entre a & b. C'est-à-dire, que la Suite des nombres premiers étant 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. si on introduit successivement entre a & b, 2 moyens proportionnels quelconques, ou 4, ou 6, ou 10, ou 12, ou 16, &c. on aura toujours des termes moyens différens, & non seulement tous différens dans les différentes opérations, mais encore différens de ceux qu'on auroit eus, en introduisant entre a & b ou 1, ou 3, ou 5, ou 7, ou 8, ou 9, ou 11, ou 13, ou 14, ou 15, &c. termes moyens.

63. Quand on a introduit entre a & b un nombre n de moyens proportionnels quelconques, on a vû par les raisonnemens & par les opérations des art. 55, 57 & 58, que tout se réduisoit à diviser le rapport arithmétique $b-a$ ou le geométrique $\frac{b}{a}$ de a & de b en un nombre $n+1$ de parties, dont la 1re étoit $\frac{b-a}{n+1}$, ou $\frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, la 2de $\frac{2b-2a}{n+1}$ ou $\frac{b^{\frac{2}{n+1}}}{a^{\frac{2}{n+1}}}$ &c. & que toutes ces parties ajoûtées à a, ou multipliées par a, formoient la progression cherchée. Or toutes ces parties $\frac{b-a}{n+1}$, $\frac{2b-2a}{n+1}$, &c. ont le même rapport arithmétique, & toutes les $\frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$, $\frac{b^{\frac{2}{n+1}}}{a^{\frac{2}{n+1}}}$, &c. ont le même rapport géométrique. Donc le rapport arithmétique $b-a$, & geométrique $\frac{b}{a}$ ont été divisés l'un & l'autre en parties égales, dont le nombre est $=n+1$, l'un en parties arithmétiquement égales, & l'autre en parties géométriquement égales.

Comparaison des divisions du même intervalle par une Progression arithmétique, & une géométrique correspondante.

64. Des grandeurs croissantes, comme on les suppose ici, ne peuvent avoir le même rapport arithmétique, ou la même

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

différence qu'elles n'aient toujours un moindre rapport géométrique : car cette différence conſtante qu'on leur ajoûte toujours, eſt toujours moindre par rapport à elles à meſure qu'elles croiſſent, & par conſéquent elles approchent toujours davantage de l'égalité ſelon le rapport géométrique, ou, ce qui revient au même, ont un moindre rapport géométrique. Cela ſe voit dans la Suite naturelle des nombres. Au contraire des grandeurs croiſſantes ne peuvent avoir le même rapport géométrique qu'elles n'aient toujours un plus grand rapport arithmétique ou une plus grande différence, ce qui eſt clair. Donc le rapport arithmétique de a & de b diviſé en parties arithmétiquement égales (63) l'eſt en même temps en parties géométriquement inégales & décroiſſantes, & le rapport géométrique de a & de b diviſé en parties géométriquement égales (63) l'eſt en même temps en parties arithmétiquement inégales & croiſſantes.

65. Si on introduit entre a & b le moyen arithmétique $\frac{a+b}{2}$ & le géométrique $\sqrt{ab}$ on a toujours $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, car le rapport arithmétique de a & de b étant diviſé en deux parties arithmétiquement égales par $\frac{a+b}{2}$, & en deux parties arithmétiquement inégales & croiſſantes par $\sqrt{ab}$ (64), $\sqrt{ab}$ a une moindre différence à a que $\frac{a+b}{2}$, & une plus grande différence à b, & par conſéquent eſt moindre que $\frac{a+b}{2}$.

66. Et comme une progreſſion ſoit arithmétique, ſoit géométrique de 3 termes, repreſente toutes celles qui auroient un plus grand nombre de termes, & que viſiblement le même raiſonnement y aura lieu, il ſuit qu'une progreſſion arithmétique & une géométrique compoſées d'un même nombre quelconque de termes, étant compriſes entre les mêmes extrêmes, chaque terme moyen de la géométrique ſera plus petit que ſon correſpondant dans l'arithmétique.

Somme de la progreſſion

67. Donc la ſomme de la progreſſion géométrique eſt moindre que celle de l'aritmétique.

M.E.C.D. 2017

68. Toute progreſſion géométrique étant ∴ *a. am. am²*. *am³*, &c. (38), les différences de ſes termes ſont *am* — *a*. *am²* — *am* = *am* — *a* × *m*. *am³* — *am²* = *am* — *a* × *m²*, &c. où l'on voit que c'eſt toujours la même grandeur *am* — *a*, différence des deux 1ers termes, qui eſt multipliée de ſuite par toutes les puiſſances de *m*, comme *a* l'étoit dans la progreſſion ∴ *a. am*, &c. Donc les différences des termes d'une progreſſion géométrique ſont auſſi en progreſſion géométrique, & en même progreſſion que les termes dont elles ſont différences, puiſque les deux progreſſions ont le même multiplicateur perpetuel *m*.

géométrique, moindre que celle de l'arithmétique.

69. Puiſque les différences des termes d'une progreſſion géométrique font une ſeconde progreſſion géométrique qui a le même multiplicateur *m* que la premiére (68), les différences de ces différences feront une troiſiéme progreſſion qui aura encore le même multiplicateur *m*, & toujours ainſi de ſuite tant qu'il y aura des différences de différences; car la progreſſion des premiéres différences ayant néceſſairement un terme de moins que la progreſſion des termes dont elles ſont différences, la progreſſion des ſecondes différences encore un terme de moins, & toujours ainſi de ſuite, il viendra à la fin une progreſſion de trois termes ſeulement, après laquelle il n'y en pourra plus avoir.

70. Comme on ne peut introduire entre *a* & *b* un terme moyen qui ſoit arithmétiquement plus éloigné de *a* & de *b* en même temps que celui qui eſt préciſément au milieu, ou le moyen arithmétique: de même on ne peut introduire entre *a* & *b* aucun terme moyen qui ſoit plus grand par rapport à *a*, & en même temps plus petit par rapport à *b*, que le moyen géométrique; car il eſt plus grand que l'un dans la même raiſon qu'il eſt plus petit que l'autre, & par conſéquent tout autre terme *x*, s'il eſt plus grand par rapport à *a*, ne ſera pas ſi petit par rapport à *b*, & s'il eſt plus petit par rapport à *b*, ne ſera pas ſi grand par rapport à *a*. Et comme une progreſſion de 3 termes les repreſente toutes, il s'enſuit que dans

M.E.C.D. 2017

une progreſſion géométrique quelconque chaque terme moyen eſt plus grand par rapport à celui qui le précede, & en même temps plus petit par rapport à celui qui le ſuit, que chaque terme moyen ne le ſeroit dans toute autre Suite compriſe entre les mêmes extremes, compoſée du même nombre de termes, & qui ne ſeroit point une progreſſion géométrique.

71. Les différences des termes d'une progreſſion géométrique ſont auſſi en progreſſion, & en même progreſſion(68). Donc chacune de ces différences eſt plus grande par rapport à celle qui la precéde, & plus petite par rapport à celle qui la ſuit, que ne ſeroient les différences des termes de toute autre Suite. Donc la progreſſion géométrique eſt celle de toutes les Suites dont les termes ont les différences les plus inégales, au lieu que l'arithmétique eſt la ſeule de toutes les Suites qui les a toutes égales.

On voit aſſez que la plus grande inégalité poſſible des différences des termes d'une progreſſion géométrique doit s'entendre du *tout pris enſemble*; c'eſt-à-dire, que ſi quelqu'autre Suite a quelques termes qui aient des différences plus inégales, elle en aura d'autres qui auront des différences moins inégales.

72. Donc la différence $b - a$, ou l'intervalle arithmétique qui eſt entre a & b, étant diviſé également par la progreſſion arithmétique, l'eſt le plus inégalement qu'il ſe puiſſe dans ſon tout par la géométrique: & il eſt bon de remarquer que comme pour une progreſſion on ne ſauroit prendre moins de 3 grandeurs, ici on ne ſauroit prendre moins de 3 parties de l'intervalle ſuppoſé, & que par conſéquent on doit concevoir entre a & b, 2 termes moyens pour le moins. Si pour ſe faire une image ſenſible, on ſe repréſente cet intervalle comme une ligne où ſoient marqués les points de diviſion réſultans des deux propreſſions, & les nombres correſpondans à ces points, la ligne diviſée également par la progreſſion arithmétique, le ſera le plus inégalement qu'il ſe puiſſe par la géométrique, ou, ce qui revient au même, les points de diviſion également diſtans dans l'arithmétique, le feront

M.E.C.D. 2017

le plus inégalement qu'il ſe puiſſe dans la géométrique, les points de diviſion de l'une & de l'autre progreſſion ne ſe rencontreront jamais, ils ſeront dans la géométrique plus ſerrés vers l'origine, & plus écartés vers l'extrémité; de ſorte que ſi l'on conçoit la ligne diviſée par le milieu, la progreſſion arithmétique aura de part & d'autre un nombre égal de points de diviſion, ou de termes; & la géométrique un plus grand nombre du côté de a que de b, & par conſéquent un plus grand nombre de *petits* termes, les petits étant ceux qui ſont moindres que le moyen arithmétique, ce qui revient à ce que la ſomme de la progreſſion géométrique eſt moindre (67).

Diviſion de l'intervalle commun, la plus inégale qu'il ſe puiſſe par la progreſſion géométrique.

73. Donc la progreſſion arithmétique & la géométrique ſont entre toutes les Suites poſſibles celles qui ſont les plus oppoſées par rapport à la diviſion de l'intervalle commun.

74. Toute progreſſion géométrique en enferme une arithmétique, qui eſt celle des expoſans de m, & ſi la progreſſion géométrique n'eſt formée, comme elle peut l'être, que des puiſſances de m, m^0, m^1, m^2, &c. Cette progreſſion ſera en même temps l'arithmétique des expoſans de m, & la géométrique des puiſſances de m; de ſorte que le rapport arithmétique égal des expoſans, repreſentera perpetuellement le géométrique égal des puiſſances. De là il ſuit qu'à tous les changemens qui pourront arriver aux expoſans, il répondra des changemens analogues dans les puiſſances; c'eſt-à-dire, que ſi, par exemple, on double, on triple, &c. les expoſans, on quarrera, on cubera, &c. les puiſſances; que ſi on diviſe les expoſans par 2, par 3, &c. on tirera la $\sqrt[2]{}$, ou $\sqrt[3]{}$ &c. des puiſſances.

75. Si l'on conçoit une progreſſion géométrique qui ne ſoit formée que de m^1 toujours répeté, & qui par conſéquent ne ſera progreſſion que le moins qu'il ſe puiſſe, l'expoſant 1 conſtant repreſentera le rapport géométrique conſtant des grandeurs: mais ſi on diviſe de ſuite tous les expoſans 1 par 1, 2, 3, &c. on aura la Suite $m^{\frac{1}{1}}, m^{\frac{1}{2}}, m^{\frac{1}{3}}$, où le rapport arithmétique des expoſans $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. repréſentera encore

M.E.C.D. 2017

le rapport géométrique des grandeurs m^1, $m^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{3}}$, &c. Et puiſque 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ont un rapport arithmétique inégal & décroiſſant, m^1, $m^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{3}}$, &c. en auront un géométrique pareil, & par conſéquent approcheront toujours de plus en plus de l'égalité.

76. Si on éleve $m^{\frac{1}{2}}$, ou $m^{\frac{1}{3}}$, ou en général $m^{\frac{1}{n}}$, à toutes ſes puiſſances de ſuite, ce qui donnera $m^{\frac{1}{n}}$, $m^{\frac{2}{n}}$, $m^{\frac{3}{n}}$, &c. il eſt viſible que les expoſans redeviennent en progreſſion arithmétique : auſſi la progreſſion $m^{\frac{1}{n}}$, $m^{\frac{2}{n}}$, $m^{\frac{3}{n}}$, &c. eſt-elle géométrique.

Somme de la progreſſion arithmétique quelconque.

77. Pour avoir la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique qui en a 10, par exemple, il n'y a qu'à conſidérer que les ſommes du 1er & du 10me, du 2^d & du 9me, &c. ſont égales; que toutes ces ſommes enſemble ſont la ſomme de la progreſſion; que le nombre de ces ſommes eſt égal à la moitié du nombre des termes de la progreſſion; & que par conſéquent une de ces ſommes quelconque, comme celle du 1er & du 10me terme, multipliée par la moitié du nombre des termes eſt égale à la ſomme de la progreſſion. Le nombre des termes étant n, le dernier terme eſt $a + \overline{m \times n - 1}$ (54). Donc la ſomme du 1er & du dernier eſt $2a + \overline{m \times n - 1}$, & celle de toute la progreſſion eſt $2a + \overline{m \times n - 1} \times \frac{n}{2}$

Dans la progreſſion naturelle où $a = 1 = m$, la ſomme eſt $\overline{2 + n - 1} \times \frac{n}{2} = \overline{n + 1} \times \frac{n}{2} = \frac{nn + n}{2}$. Par exemple, celle des 10 premiers nombres eſt $\frac{100 + 10}{2} = 55$.

Somme de la géométrique.

78. On ſait, & il ſeroit aiſé de le prouver par tout ce qui a été dit, que dans une progreſſion géométrique, la ſomme de tous les *antécédens* eſt à celle de tous les *conſéquens* comme un

M.E.C.D. 2017

un antécédent quelconque à ſon conſéquent. Or dans une progreſſion, tous les termes étant alternativement antécédens & conſéquens, horſmis le premier qui n'eſt qu'antécédent, & le dernier qui n'eſt que conſéquent, la ſomme de tous les antécédens dans $\div\div$ $a.\ am.\ am^2.\ am^3$, &c. am^{n-1}, ſera la ſomme totale inconnue de tous les termes, que j'appelle $\int$, moins le dernier terme, c'eſt-à-dire, $\int - am^{n-1}$. De même la ſomme des conſéquens ſera $\int - a$. Donc $\int - a\,m^{n-1}$. $\int - a :: a.\ am :: 1.\ m$. Donc $\int m - am^n = \int - a$. Donc $\int m - \int = a\,m^n - a$. Donc $\int = \frac{am^n - a}{m-1}$.

Par exemple, ſi $a = 2$, $m = 3$, $n = 4$, ce qui donne la progreſſion $\div\div$ 2. 6. 18. 54. La ſomme $\frac{am^n - a}{m-1}$ eſt $\frac{2\times 3^4 - 2}{2} = \frac{2\times 81 - 2}{2} = \frac{160}{2} = 80$.

Si a & n demeurant les mêmes, $m = \frac{1}{3}$, ce qui donne la progreſſion décroiſſante $\div\div$ 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$, la ſomme eſt $\frac{2\times\frac{1}{3^4} - 2}{\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{2}{81} - 2}{-\frac{1}{3}} = \frac{2 - 162}{81}$ diviſé par $-\frac{2}{3} = \frac{-160\times 3}{-81\times 2} = \frac{480}{162} = 2\frac{26}{27}$.

Si m eſt une fraction dont on tire quelque racine comme dans les deux progreſſions géométriques de l'art. 58. dont je prends la 1re, où $m = \frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$, & $n = 9$, la ſomme ſera $\frac{3\times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} - 3$ diviſé par $\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} - 1$. Or $\frac{3\times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} = 3 - \frac{1}{8} \times 5^{\frac{9}{8}} = \frac{5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. Donc $\frac{3\times 5^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{9}{8}}} - 3 = \frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. D'un

M.E.C.D. 2017

autre côté le diviſeur $\frac{5^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} - 1 = \frac{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}}$. Donc la ſomme eſt $\frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{3^{\frac{1}{8}}} \times \frac{3^{\frac{1}{8}}}{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}} = \frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}}$.

5^9 étant $= 1953125$ dont la $\sqrt[8]{}$ eſt un peu plus de 6, & 3^9 étant $= 19683$ dont la $\sqrt[8]{}$ eſt un peu plus de 3, il ſuit que $5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}$ eſt à peu près 3, & cette grandeur ayant un diviſeur, il ſemble qu'elle doive encore devenir moindre. Cependant dans cette progreſſion la ſomme des deux extrêmes 3 & 5 eſt 8, & elle eſt encore beaucoup augmentée par celle des 7. moyens proportionnels. Mais auſſi $5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}$ eſt une fraction, quoiqu'elle n'en ait pas la forme, & par conſéquent elle augmente la grandeur qu'elle diviſe. Car $5^{\frac{1}{8}}$ eſt plus grand que $1 = 1^{\frac{1}{8}}$, & moindre que 2 dont la puiſſance 8me eſt 256. $3^{\frac{1}{8}}$ eſt auſſi plus grand que 1, & à plus forte raiſon moindre que 2. Donc quand de $5^{\frac{1}{8}}$ on retranche $3^{\frac{1}{8}}$, on en retranche plus que 1, & puiſque $5^{\frac{1}{8}}$ & $3^{\frac{1}{8}}$ ſont l'un & l'autre moindres que 2, le reſte que donne la ſouſtraction ou $5^{\frac{1}{8}} - 3^{\frac{1}{8}}$ eſt moindre que 1, & par conſéquent une fraction, mais cette fraction eſt inconnue, du moins exactement.

On la peut appeller $\frac{1}{x}$ & la ſomme de cette progreſſion ſera $\frac{5^{\frac{9}{8}} - 3^{\frac{9}{8}}}{x}$.

Rapport de ces ſommes.

79. Pour avoir par le calcul le rapport de la ſomme A d'une progreſſion arithmétique à la ſomme G d'une géométrique, ou plutôt les deux ſommes enſemble, les deux progreſſions ayant les mêmes extremes a & b, & le même nombre n de termes, il faut conſidérer que dans $\frac{2a + m \times n - 1}{2}$

M.E.C.D. 2017

$\times \frac{n}{2}$ Formule de A (77) & dans $\frac{am^n - a}{m-1}$ Formule de G (78) m étant différent de part & d'autre, il doit être réduit à la même expreſſion, ce qui ſe fera en prenant dans A, $m = \frac{b-a}{n-1}$, & dans G, $m = \frac{\sqrt[n-1]{b}}{\sqrt[n-1]{a}}$ (55).

On a donc d'une part $2a + \frac{b-a}{n-1} \times n - 1 \times \frac{n}{2} = \overline{a+b} \times \frac{n}{2} = \frac{an+bn}{2}$. Et de l'autre $\frac{am^n - a}{m-1} = \frac{\sqrt[n]{b^n-1} - \sqrt[n]{a^n-1}}{\sqrt[1]{b^n-1} - \sqrt[1]{a^n-1}}$.

Donc $A.G :: \frac{an+bn}{2}. \frac{\sqrt[n]{b^n-1} - \sqrt[n]{a^n-1}}{\sqrt[1]{b^n-1} - \sqrt[1]{a^n-1}}$.

$:: \frac{\overline{an+bn} \times \sqrt[1]{b^n-1} - \sqrt[1]{a^n-1}}{2}. \sqrt[n]{b^n-1} - \sqrt[n]{a^n-1}$.

Par exemple, ſi $a = 1$, $b = 8$, & $n = 4$, on a $\frac{\overline{an+bn} \times \sqrt[1]{b^n-1} - \sqrt[1]{a^n-1}}{2} = \frac{36 \times 8^{\frac{1}{3}} - 1}{2} = 18$, & $\sqrt[n]{b^n-1} - \sqrt[n]{a^n-1} = 8^{\frac{4}{3}} - 1$. Or 8 étant $= 2^3$, on a $8^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$, dont enſuite il faut retrancher 1. Donc $A.G. :: 18. 15$, qui ſont en effet les ſommes des 2. progreſſions.

80. Si n demeurant le même, b devient plus grand par rapport à a, A devient plus grande par rapport à G. Car $A = \frac{an+bn}{2}$ augmente par l'augmentation de b, ſans qu'il lui arrive d'ailleurs aucune diminution, & $G = \frac{\sqrt[n]{b^n-1} - \sqrt[n]{a^n-1}}{\sqrt[1]{b^n-1} - \sqrt[1]{a^n-1}}$

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

eſt telle que ſon numérateur augmente par l'augmentation de b, & ſon dénominateur auſſi, & par conſéquent G ne fait que ſe maintenir à peu-près comme elle étoit, & n'augmente pas à proportion de A. Donc plus b ſera grand, n demeurant le même, plus A l'emportera ſur G.

81. Si a & b demeurant les mêmes, n augmente, A augmente abſolument, & dans G la grandeur $b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}$ en approche toujours plus d'être $b - a$, & $b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}$ d'être $b^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}$, & alors la différence de $b^{\frac{1}{n}}$ à $a^{\frac{1}{n}}$ eſt très-petite, d'où il ſuit que G eſt fort grande. Donc l'augmentation de b par rapport à a, augmente plus le rapport de A à G, que l'augmentation de n.

M.E.C.D.-2017

SECTION II.

De la Grandeur infiniment grande.

Ce que c'eſt que l'Infini.

82. CE qui par ſon eſſence eſt ſuſceptible de plus & de moins, ne perd rien de ſon eſſence en recevant ce plus ou ce moins dont il étoit ſuſceptible. Or la grandeur eſt par ſon eſſence ſuſceptible de plus & de moins (1.) Donc elle ne perd rien de ſon eſſence en recevant ce plus ou ce moins, donc elle eſt encore grandeur, donc encore également ſuſceptible de plus & de moins, donc elle en eſt toujours ſuſceptible; donc elle l'eſt ſans fin, ou à l'infini.

Examinons la grandeur entant que ſuſceptible d'augmentation.

83. Puiſque la grandeur eſt ſuſceptible d'augmentation ſans fin, on la peut concevoir ou ſuppoſer augmentée une infinité de fois, c'eſt-à-dire qu'elle ſera devenue infinie. Et en effet, il eſt impoſſible que la grandeur ſuſceptible d'augmentation ſans fin ſoit dans le même cas que ſi elle n'en étoit pas ſuſceptible ſans fin. Or ſi elle ne l'étoit pas, elle demeureroit toujours finie; donc étant ſuſceptible d'augmentation ſans fin, elle peut ne demeurer pas toujours finie, ou, ce qui eſt le même, devenir infinie.

84. Pour mieux concevoir l'Infini, je conſidere la Suite naturelle des nombres, dont l'origine eſt o ou 1.

Chaque terme croît toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation eſt ſans fin, & que quelque grand que ſoit le nombre où je ſerai arrivé, je n'en ſuis pas plus proche de la fin de la Suite, ce qui eſt un caractere qui ne peut convenir à une Suite dont le nombre des termes ſeroit fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini.

En vain diroit-on que le nombre des termes qui la compoſent eſt toujours actuellement fini; mais que je le puis toujours augmenter. Il eſt bien vrai que le nombre des termes

M.E.C.D. 2017

que je puis actuellement parcourir ou arranger ſelon leur ordre, eſt toujours fini ; mais le nombre des termes dont la Suite eſt compoſée en elle-même, eſt autre choſe. Les termes dont elle eſt compoſée en elle-même, exiſtent tous également, & ſi je la conçois pouſſée ſeulement juſqu'à 100, je ne donne pas à ces 100. termes une exiſtence dont ſoient privés tous ceux qui ſont par de-là. Donc tous les termes de la Suite, quoiqu'ils ne puiſſent pas être tous embraſſés ou conſiderés enſemble par mon eſprit, ſont également réels. Or le nombre en eſt infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini exiſte auſſi réellement que les nombres finis.

85. Dans la ſuite naturelle chaque terme eſt égal au nombre des termes qui ſont depuis 1. juſqu'à lui incluſivement. Donc puiſque le nombre de tous ſes termes eſt infini (84), elle a un dernier terme qui eſt ce même infini.

On l'exprime par ce caractere ∞.

Il ne faut point que le mot de *dernier terme* effraie en cette matiere. C'eſt un dernier terme fini que la Suite naturelle n'a point : mais n'en avoir point de dernier fini, ou en avoir un dernier infini, c'eſt la même choſe ; car ce qui fait qu'elle n'a pas un dernier terme fini, c'eſt que quand elle a un terme fini quelconque, ſon cours n'eſt, ni ne peut être terminé, puiſqu'elle n'a encore qu'un nombre fini de termes ; mais quand elle a un terme infini, elle a un nombre infini de termes, & l'on peut concevoir ſon cours comme terminé.

86. ∞ eſt un nombre inexprimable, car il s'en faut bien que ce caractere ∞ nous en donne une idée claire. Mais en même temps ∞ eſt en quelque ſorte un nombre déterminé, ou diſtingué de tout autre, puiſqu'il l'eſt non ſeulement de tout nombre fini ; mais en cas qu'il y ait d'autres Infinis poſſibles, de tout Infini qui ne ſeroit pas le dernier terme de la Suite naturelle, ou ſeroit le dernier d'une autre Suite infinie. Ainſi ∞ ſera toujours pris ici pour un Infini fixe & conſtant, dernier terme de la Suite naturel.

Il eſt inconcevable comment la Suite naturelle paſſe du Fini à l'Infini, c'eſt-à-dire, comment après avoir eu des

M.E.C.D. 2017

termes finis, elle vient à en avoir un infini. Cependant cela doit être, ou bien il faut abſolument abandonner toute idée de l'Infini, & n'en prononcer jamais le nom, ce qui feroit périr la plus grande & la plus noble partie des Mathématiques. Je ſuppoſe donc que c'eſt là un fait certain, quoiqu'incompréhenſible, & je prends la grandeur qui doit être infinie, non comme étant dans ce paſſage obſcur du Fini à l'infini; mais comme l'ayant franchi entierement, & ayant paſſé par les degrés néceſſaires, quels qu'ils ſoient, ſi ce n'eſt que je puiſſe quelquefois entrevoir quelque lumiere ſur la nature de ces degrés.

Comment l'Infini peut être augmenté ou diminué.

87. L'idée naturelle de la grandeur infinie eſt, qu'elle ne puiſſe être plus grande ou augmentée, & en effet ∞ dernier terme de la Suite naturelle étant 1. qui a reçu des augmentations ſans fin, il n'en peut recevoir d'avantage. D'un autre côté la grandeur infinie étant toujours grandeur, en doit conſerver l'eſſence, & être ſuſceptible d'augmentation (1) & même ſans fin (82). Ces deux idées ſi contraires en apparence, ſe concilient parfaitement, & on le va voir en les examinant toutes deux l'une après l'autre.

∞ ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avoient augmenté juſques-là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvoit recevoir d'augmentation. Donc $\infty + 1$ n'eſt que ∞, ou $\infty + 1 = \infty$.

88. Et ſi 1 n'augmente pas ∞, $1 + 1$ ou 2, ou 3, &c. ne l'augmente pas non plus. Donc en général a étant un nombre fini, $\infty + a = \infty$.

89. Et ſi a n'augmente pas ∞, il ne le diminue pas non plus quand il en eſt retranché. Donc $\infty \pm a = \infty$.

90. Mais par la raiſon des contraires, & encore plus par la nature même de la choſe, je puis dire $\infty + \infty$ ou 2∞, ou 3∞, &c. Car il faut que l'infini, puiſqu'il eſt grandeur, ſoit capable d'augmentation, & je vois qu'il le ſera ſans fin, puiſqu'il pourra être multiplié par tous les nombres naturels de ſuite, dont le nombre eſt infini. Voilà donc les deux idées de l'art. 87. conciliées.

M.E.C.D. 2017

91. On voit par-là que ∞ qui eſt 1, devenu infini par une augmentation ſans fin, ou une grandeur finie qui eſt ſortie de l'*ordre* du fini, & a paſſé dans celui de l'infini, ne peut plus être augmentée par tout ce qui eſt de l'ordre du fini dont elle n'eſt plus, mais ſeulement par ce qui eſt de l'ordre de l'infini dont elle a commencé d'être, & il eſt clair qu'il en ira de la diminution comme de l'augmentation.

92. $a \pm 0 = a$, comme $\infty \pm a = \infty$, & par conſéquent a, quoique grandeur, eſt auſſi peu grandeur par rapport à ∞, que 0 par rapport à a. Donc aucune grandeur finie n'eſt grandeur par rapport à ∞, & toute grandeur qui l'eſt par rapport à ∞, ne peut être qu'infinie.

Que toutes les parties déterminables de l'Infini ſont des Infinis.

93. La moitié d'une grandeur, ſon tiers, enfin toute aliquote, & plus généralement toute partie déterminable, eſt grandeur par rapport à ſon Tout; donc toute partie déterminable de l'Infini eſt infinie (92). Donc $\frac{\infty}{n}$, n étant un nombre fini quelconque, eſt une grandeur infinie. A plus forte raiſon $n\infty$, ou l'Infini multiplié par une grandeur finie, eſt une grandeur infinie, comme on l'a déja vû dans l'art. 90.

94. Puiſque ∞ n'a aucune aliquote dans toute la ſuite naturelle des nombres finis (93), il eſt nombre premier.

95. $\frac{\infty}{n}.\infty :: 1.n.$ ou $n\infty.\infty :: n.1$. Donc deux grandeurs infinies peuvent avoir les mêmes rapports que des grandeurs finies.

En effet les rapports de deux grandeurs finies ne ſont pas finis, parce qu'elles ſont finies, mais parce qu'elles ſont grandeurs l'une à l'égard de l'autre.

96. La ſomme de deux Infinis ne peut être qu'infinie,

$$n\infty + \infty = \overline{n+1}\times\infty.\ \infty + \frac{\infty}{n} = \frac{\overline{n+1}\times\infty}{n}.$$

97. Leur différence peut être $= 0$, car ils peuvent être égaux.

98. Si on leur ſuppoſe une différence finie, elle ſera encore nulle par rapport à eux (89), & ils ſeront égaux.

99.

M.E.C.D. 2017

99. Réciproquement ſi deux Infinis ſont égaux, leur différence eſt nulle, ou finie.

100. Donc ſi deux Infinis ſont inégaux, leur différence n'eſt ni nulle, ni finie, donc infinie. $n\infty - \infty = \overline{n-1} \times \infty$. $- \frac{n}{\infty} = \frac{\overline{n-1} \times \infty}{n}$.

101. Le produit de deux Infinis eſt infiniment plus grand qu'aucun des deux, car il contient celui des deux qu'on voudra prendre pour le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond: or il y en a une infinité, dont le produit contient le premier Infini une infinité de fois; donc il eſt infiniment plus grand, & c'eſt la même choſe à l'égard du ſecond Infini.

102. La diviſion d'un Infini par un Infini doit donner un quotient infiniment moindre qu'aucun des deux: car ſi la multiplication d'un Infini par un Infini donne un produit infiniment plus grand, la diviſion qui fait un effet contraire doit donner un quotient infiniment plus petit. Ainſi $\frac{\infty}{\infty} = 1$, ou $\frac{\infty}{n\infty} = \frac{1}{n}$, ou ∞ diviſé par $\frac{\infty}{n}$ eſt $= n$.

103. Il ſuit & de tout ce qui a été dit, & de la nature de la choſe, que ∞ étant grandeur, eſt ſuſceptible d'augmentation, pourvû que les grandeurs que l'on concevra l'augmenter, ſoient grandeurs par rapport à lui, c'eſt-à-dire infinies. Ainſi l'on peut concevoir cette nouvelle Suite ∞. 2∞. 3∞, &c. qui ſera une progreſſion arithmétique dont la différence ſera $= \infty$, & comme la différence de 1 à ∞ : ou $\infty - 1$ eſt $= \infty$, cette progreſſion pourra commencer par 1, & on aura $\div$ 1. ∞. 2∞. 3∞, &c.

L'Infini devenu infiniment plus grand, & toujours de ſuite à l'infini.

104. Puiſque dans cette nouvelle progreſſion les coëfficiens de ∞ croiſſent toujours ſelon la Suite des nombres naturels, elle ſe terminera enfin par $\infty \times \infty = \infty^2$.

105. $\infty^2 = \infty \times \infty$ eſt infiniment plus grand que ∞ (101). Donc comme la Suite naturelle 1. 2, &c. ſe terminoit à ∞ infiniment plus grand que les termes de ſon origine,

M.E.C.D. 2017

de même la progreſſion ∞. 2∞, &c. ſe termine à ∞^2 infiniment plus grand que les termes qui ſont à ſon origine.

106. On peut concevoir une 3me progreſſion arithmétique qui ſera ∞^2. $2\infty^2$. $3\infty^2$, &c. $\infty \times \infty^2 = \infty^3$, ſur laquelle on fera les mêmes raiſonnemens, & toujours ainſi de ſuite, de ſorte que le dernier terme de chacune de ces progreſſions ſera toujours infiniment grand par rapport à ceux qui étoient vers l'origine; & en raſſemblant tous ces derniers termes, on aura la progreſſion géométrique $\div\div$ ∞. ∞^2. ∞^3. ∞^4, &c. toute formée des puiſſances conſécutives de ∞, & telle que chaque terme ſera toujours infiniment grand par rapport à celui qui le précede.

107. Il faut toujours raiſonner de chaque terme de la progreſſion géométrique par rapport à celui qui le précede comme on a fait de l'Infini ou de ∞ par rapport au Fini. Donc $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$. Et en général $\infty^{n+1} \pm \infty^n = \infty^{n+1}$.

108. Donc autant qu'il y a de puiſſances poſſibles de ∞, autant il y a d'*ordres* ou *genres* d'Infinis qui s'élevent toujours les uns au-deſſus des autres. ∞ eſt du 1er ordre ou genre, ∞^2 du 2^d, &c.

109. 1 peut être le 1er terme de la progreſſion géométrique (47 & 48), & elle ſera $\div\div$ 1. ∞. ∞^2. ∞^3, &c. ou (49) ∞^0. ∞^1. ∞^2, &c.

110. Donc $\infty^0 = 1$. Et en effet le raiſonnement par lequel on a prouvé dans l'art. 49 que $m^0 = 1$, prouve auſſi que $\infty^0 = 1$, car il eſt abſolument indépendant de la grandeur de *m*.

111. La progreſſion $\div\div$ ∞^0. ∞^1. ∞^2, &c. peut & doit aller juſqu'à ∞^{∞}, puiſque les expoſans de ſes termes ſont la Suite naturelle des nombres. Donc il y a un nombre d'ordres d'Infinis $= \infty$.

112. Si la progreſſion eſt $\div\div$ 1. ∞. ∞^2, &c. (109) le Fini eſt un des ordres qui y entrent, & il eſt clair qu'il y

M.E.C.D. 2017

doit entrer. 1 repréſente toutes les grandeurs finies, quelles qu'elles ſoient, qui ne ſont point grandeurs par rapport aux infinies. ∞ repréſente toutes les grandeurs ſimplement infinies, telles que $n\infty$, ou $\frac{\infty}{n}$, ∞^2 celles qui ſont des produits des grandeurs ſimplement infinies par de pareilles grandeurs, & toujours ainſi de ſuite; par exemple, $\infty \times n\infty$, plus grand que ∞^2, & $\infty \times \frac{\infty}{n}$ moindre que ∞^2 ſont également de l'ordre de ∞^2, quoiqu'inégaux en grandeur dans cet ordre. De même $\infty^2 \times n\infty$, ou $\infty \times \frac{\infty}{n}$ ſont de l'ordre de ∞^3, &c.

113. Ces ordres ainſi établis, une grandeur quelconque a des rapports finis à tout ce qui eſt de ſon ordre, & elle ne peut recevoir des augmentations ou des diminutions que par ce qui eſt de ſon ordre. Si on la conçoit élevée à un ordre ſupérieur, il faut la prendre comme ayant franchi ce paſſage immenſe, & alors tout ce qui eſt d'un ordre inférieur n'eſt plus grandeur par rapport à elle, & diſparoît devant elle, comme elle-même n'eſt point grandeur par rapport à toutes celles des ordres ſupérieurs, & diſparoîtroit devant elles. Tout cela n'eſt que ce qui a été dit du Fini & du ſimple Infini, appliqué à tous les ordres en général, dont le Fini & le ſimple Infini n'étoient que les deux premiers.

114. Ce que font dans le Fini les puiſſances ou plus généralement les multiplications, en élevant la grandeur à différentes *dimenſions*, elles le font dans l'Infini, en l'élevant à différens ordres; deſorte que les dimenſions du Fini répondent aux ordres de l'Infini. Ainſi comme a^4 ou $abcd$ eſt une grandeur de 4 dimenſions, ∞^4 ou $\infty^3 \times n\infty$, ou $\times \frac{\infty}{n}$, ou $\infty^2 \times n^2\infty^2$ ou $\times \frac{\infty^2}{n^2}$, &c. eſt un Infini du 4me ordre.

115. Si deux Infinis ou du même ordre ou de différens ordres ſont multipliés l'un par l'autre, le produit eſt d'un ordre dont l'expoſant eſt la ſomme des expoſans des ordres des

M.E.C.D. 2017

deux Infinis : par exemple, $\infty \times \infty = \infty^{1+1} = \infty^2 . \infty^2 \times \infty^3 = \infty^{2+3} = \infty^5$.

116. Si deux Infinis du même ou de différens ordres ſont diviſés l'un par l'autre, le quotient eſt de l'ordre dont l'expoſant eſt la différence des expoſans des ordres des deux Infinis. $\frac{\infty}{\infty} = \infty^{1-1} = \infty^0 = 1$ (110). $\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty^{3-2} = \infty^1$.

Propriétés qui paſſent du Fini dans l'Infini, ou s'apperçoivent dans le Fini par le moyen de l'Infini.

117. Dans le Fini plus un nombre eſt grand, plus il eſt petit par rapport à ſon quarré, plus ſon quarré eſt petit par rapport à ſon cube, & toujours ainſi de ſuite des autres puiſſances. Et l'on voit ici qu'un nombre infini n'eſt pas grandeur par rapport à ſon quarré, que le quarré ne l'eſt pas par rapport au cube, &c. Donc le rapport des puiſſances ſupérieures aux inférieures ayant toujours été croiſſant dans le Fini à meſure qne les nombres étoient plus grands, il devient enfin infini dans l'Infini, c'eſt-à-dire, lorſque les nombres ſont infinis. Cela conduit naturellement à cette réflexion, Que les propriétés qui vont toujours croiſſant dans le Fini, doivent dans l'Infini recevoir tout l'accroiſſement dont elles ſont capables, ou, ce qui eſt le même, arriver au Terme où elles ont tendu, & dont elles ſe ſont toujours approchées pendant un chemin infini.

Cette réflexion ſuppoſe trois choſes. 1° Que la propriété prenne naiſſance dans le Fini. 2° Qu'elle s'y ſoutienne auſſi long-temps que l'on peut, pour ainſi dire, la ſuivre de l'œil. 3° Qu'elle ſoit capable d'un certain accompliſſement dans l'Infini. Moyennant ces trois conditions, la réflexion devient un Principe.

118. Donc ſi une propiété a pris naiſſance dans le Fini, ſi elle s'y conſerve auſſi long-temps qu'on l'y peut ſuivre, & ſi elle eſt capable d'un certain accompliſſement dans l'Infini, il eſt certain qu'elle l'y reçoit.

119. Si on voit dans l'Infini une propriété, & qu'en même temps on en voie la naiſſance dans le Fini, il eſt certain

M.E.C.D. 2017

qu'elle ſe conſerve dans tout le cours du Fini où l'on ne peut la ſuivre de vûe, & que dans tout ce cours elle approchoit de plus en plus de l'état où elle eſt dans l'Infini.

120. Par la raiſon des contraires, les propriétés qui vont décroiſſant dans le Fini auſſi long temps qu'on les peut ſuivre, & peuvent s'anéantir dans l'Infini, s'y anéantiſſent ſûrement. Ainſi parce que le rapport géométrique des termes de la Suite naturelle décroît toujours, & qu'il eſt poſſible qu'il ſoit nul dans l'Infini, puiſque deux Infinis peuvent être égaux, la Suite naturelle infinie ſe termine par deux Infinis égaux.

121. Si on voit qu'une propriété eſt nulle dans l'Infini, & en même temps qu'elle a commencé à décroître dans le Fini, il eſt ſûr qu'elle a décrû dans le cours du Fini où l'on n'a pû la ſuivre, & qu'elle a toujours approché de plus en plus de ſon anéantiſſement.

122. Comme ces concluſions ſuppoſent toujours une propriété dont on voit la naiſſance dans le Fini, & la fin ou poſſible ou actuelle dans l'Infini, il ne ſuit point de là qu'une propriété qui ſe maintient conſtante & ſans altération dans le Fini, doive ſe maintenir dans l'Infini : car tout ce qu'on en voit dans le Fini, & qui eſt ſuppoſé conſtant, peut n'être que ſa naiſſance, & en ce cas-là on ne voit qu'une de ſes extrémités, ce qui ne ſuffit pas. Donc il eſt ſeulement poſſible, & non pas abſolument néceſſaire qu'une propriété qui ſe maintient toujours dans le Fini, ſe maintienne auſſi dans l'Infini.

123. Mais par la même raiſon, ſi on voit une propriété dans le Fini, ne fût-ce qu'à ſa premiére & plus petite naiſſance, qu'on la retrouve la même dans l'Infini, il eſt ſûr qu'elle a été conſtante dans tout le cours intermédiaire, pourvû que ce cours ait été *uniforme* ; c'eſt-à-dire, que les autres propriétés qui y étoient croiſſantes ou décroiſſantes l'aient toujours été. Moyennant cette condition, les deux extrémités ſeules aſſûreront de tout l'entre-deux.

Pour prévenir la penſée où l'on pourroit tomber, que toute cette Théorie abſtraite de l'Infini eſt peu utile, je vais apporter

M.E.C.D. 2017

quelques exemples des uſages que peut avoir le peu que nous en avons vû juſqu'ici.

EXEMPLE. I.

124. Si l'on cherche la ſomme de la Suite naturelle pouſſée juſqu'à ∞, on voit par la Formule générale $\frac{nn+n}{2}$ (77) que cette ſomme eſt $\frac{\infty^2+\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$ (107); c'eſt-à-dire, que la ſomme de la Suite naturelle infinie eſt la moitie du quarré du nombre infini qui la termine. Et quoique ce nombre infini nous ſoit inconnu, il eſt certain qu'on prend par-là une idée de cette ſomme qu'on n'auroit pas eue autrement.

EXEMPLE II.

125. Si je ne prends la ſomme que de la moitié des termes de la Suite naturelle, le nombre n de ſes termes étant alors $= \frac{\infty}{2}$, la ſomme ſera $\frac{\infty^2+2\infty}{8} = \frac{\infty^2}{8}$. Et elle ſera à celle de la Suite entiere terminée par ∞ :: $\frac{\infty^2}{8} . \frac{\infty^2}{2}$ (107) :: 2. 8 :: 1. 4. Donc dans la Suite naturelle infinie la ſomme du nombre infini des termes eſt quadruple de la ſomme de la moitié infinie de ce nombre total des termes. Cela me fait appercevoir que cette propriété pourroit avoir pris naiſſance dans la même Suite finie, & je vois en effet que 10, ſomme des 4 premiers termes, n'eſt pas quadruple de 3, ſomme des 2 premiers, mais que 21, ſomme des 6 premiers, approche plus d'être quadruple de 6, ſomme des 3 premiers, que 10 n'approchoit d'être quadruple de 3, & quelques autres *inductions* m'aſſûreront de reſte que cette propriété eſt croiſſante dans le Fini; & comme je la vois accomplie dans l'Infini, j'en conclus ſûrement (119) qu'elle eſt croiſſante dans tout le cour du Fini, & que plus on prend un grand nombre de termes de la Suite naturelle, plus leur ſomme approche d'être quadruple de la ſomme d'un nombre de termes une fois moindre.

M.E.C.D. 2017

Si je prends la ſomme d'un nombre de termes de la Suite naturelle $= \frac{\infty}{3}$, elle ſera $\frac{\infty^2 + 3\infty}{18} = \frac{\infty^2}{18}$, & elle ſera à $\frac{\infty^2}{2}$, ſomme du nombre total des termes :: 1. 9.

De même, ſi je prends la ſomme d'un nombre de termes de la Suite naturelle $= \frac{\infty}{4}$, elle ſera à $\frac{\infty^2}{2}$ :: 1. 16.

Et en général il eſt clair par la Formule $\frac{nn+n}{2}$ que ſi le nombre des termes que je prends, eſt $\frac{\infty}{m}$, m étant un nombre fini quelconque, la ſomme en ſera $\frac{\infty^2}{2m^2}$ qui ſera à $\frac{\infty}{2}$, ſomme du nombre total des termes :: 1. m^2.

D'où je conclus que dans le Fini, plus le nombre n des termes de la Suite naturelle ſera grand, plus la ſomme approchera d'être à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{2}$ :: 4. 1. à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{3}$ :: 9. 1. à celle d'un nombre de termes $= \frac{n}{4}$ :: 16. 1. &c. Et c'eſt par l'Infini qu'on eſt arrivé à cette connoiſſance du Fini.

EXEMPLE III.

126. Je ſuppoſe qu'on ſait ce que c'eſt que les nombres Figurés, qui ſont les Unités, les Nombres Naturels, les Triangulaires, les Pyramidaux, les Triangulo-pyramidaux, &c. à l'infini. Il eſt démontré qu'un nombre Naturel quelconque étant n, le n^{me}

Triangulaire eſt ..... $\frac{nn+n}{1\times 2}$.

Pyramidal ..... $\frac{n^3+3n^2+2n}{1\times 2\times 3}$.

Triang. pyr. ..... $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1\times 2\times 3\times 4}$.

&c.

De-là il ſuit que le dernier des Naturels étant ∞,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

le dernier des Triangulaires eſt ..... $\frac{\infty^2}{2}$.

des Pyramidaux ..... $\frac{\infty^3}{6}$.

des Triang. pyramidaux... $\frac{\infty^4}{24}$.

D'où l'on voit que ceux des ordres ſuivans ſeront $\frac{\infty^5}{120}$, $\frac{\infty^6}{720}$, &c. le numérateur étant toujours ∞ élevé à la puiſſance ou à l'ordre immédiatement ſupérieur, & le dénominateur le produit continuel des nombres naturels juſqu'au nombre incluſivement qui eſt l'expoſant de ∞.

On peut s'aſſûrer par-là que les différens ordres d'Infini ſont très-réels, puiſque des Suites de nombres y conduiſent néceſſairement. Et ſi l'on ſe contentoit d'appercevoir que les derniers termes de ces différentes Suites de Nombres Figurés doivent être infinis, la connoiſſance ſeroit ſans comparaiſon plus imparfaite.

127. On peut élever au quarré tous les termes de la progreſſion $\div$ 1. ∞. ∞^2. ∞^3, &c. ∞^{∞}, ce qui donnera la nouvelle progreſſion $\div$ 2^2 = 1. ∞^2. $\infty^{2\times2}$. $\infty^{2\times3}$ &c. $\infty^{2\infty}$. De même en élevant au cube la premiere progreſſion, on aura $\div$ 1. ∞^3. ∞^6. ∞^9, &c. $\infty^{3\infty}$, & ainſi de ſuite pour toutes les autres puiſſances, & enfin pour la puiſſance = ∞, ou aura $\div$ 1^{∞}. ∞^{∞}. $\infty^{2\infty}$. $\infty^{3\infty}$, &c. $\infty^{\infty\times\infty}$ = ∞^{∞^2}, c'eſt-à-dire, ∞ multiplié par lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans ∞^2.

128. On peut encore élever au quarré, au cube, &c. & enfin à ∞ la progreſſion $\div$ 1^{∞}. ∞^{∞}. $\infty^{2\infty}$, &c. ∞^{∞^2}, ce qui donnera pour dernier terme dans la derniere élévation, $\infty^{\infty^2\times\infty}$ = ∞^{∞^3}. Il eſt viſible que ces élevations n'ont

M.E.C.D. 2017

n'ont point de fin, qu'on iroit juſqu'à une progreſſion dont le dernier terme ſeroit $\infty^{\infty^{\infty}}$, & que là même on recommenceroit encore à faire des élévations ſans fin.

129. $1^{\infty} = 1$. Car (127) $\div\div 1^{\infty} . \infty^{\infty} . \infty^{2\infty}$. Donc $\infty^{2\infty} = 1^{\infty} \times \infty^{2\infty}$. Donc $1^{\infty} = 1$. Donc 1 conſerve juſque dans l'Infini ſa propriété de ne point augmenter par aucune élévation à une puiſſance.

130. Donc $\infty^{0} = 1$ (110) $= 1^{\infty}$.

131. Donc auſſi $1^{0} = 1^{\infty}$. Et il eſt remarquable que 0 & ∞ appliqués de la même maniere faſſent le même effet, mais la raiſon en eſt claire. C'eſt qu'une grandeur qui n'eſt abſolument multipliée par rien, ou la même grandeur multipliée de façon qu'elle ne puiſſe augmenter, c'eſt la même choſe, & elle ne peut changer d'état. Or 1 eſt la ſeule grandeur, qui multipliée par elle-même ne change point.

132. Il eſt clair par tout ce qui a été dit, que ſi on éleve tous les termes de la Suite naturelle infinie au quarré, au cube, &c. le dernier terme de la Suite quarrée ſera ∞^{2}, de la Suite cubée ∞^{3}, &c. toujours d'un ordre ſupérieur.

Formation de nouveaux Infinis, qui ne ſont que radicaux.

133. Que ∞ ſoit diviſé en un nombre fini *n* de parties qui ſeront infinies (93), ou que le rapport arithmétique de 1 & de ∞, ou leur différence $= \infty$ ſoit diviſée en ce nombre *n* de parties, c'eſt la même choſe, & ces parties ſeront infinies; & parce qu'elles ſont infinies, leurs parties en nombre fini, le ſeront auſſi, quoique toujours moindres, ou, ce qui revient au même, leurs rapports arithmétiques ou différences ſeront encore infinies. Ainſi $\frac{\infty}{3}$ & $\frac{\infty}{4}$ étant deux Infinis qui ſont parties de ∞, leur différence $= \frac{\infty}{12}$ eſt infinie. Par la même raiſon le rapport géométrique de ∞ à 1 étant diviſé en un nombre fini *n* de parties, elles ſeront infinies, & comme ce ſeront des rapports géométriques, ces rapports ſeront donc infinis, ou, ce qui eſt la même choſe, les grandeurs

M.E.C.D. 2017

entre lesquelles seront ces rapports, seront infinies les unes par rapport aux autres. Donc si on introduit entre 1 & ∞ un nombre n fini de moyens géométriques, ce qui donnera (58) $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $\infty^{\frac{1}{n+1}}$. $\infty^{\frac{2}{n+1}}$. $\infty^{\frac{3}{n+1}}$, &c. jusqu'à $\infty^{\frac{n+1}{n+1}}$ $= \infty$, on aura une progression dont chaque terme sera infini par rapport à celui qui le précédera.

Par exemple, si $n = 1$, on aura $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $\infty^{\frac{1}{2}}$ ou $\sqrt{\infty}$. ∞.
Si $n = 2$. $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $\infty^{\frac{1}{3}}$. $\infty^{\frac{2}{3}}$. ∞.

134. Donc voilà de nouvelles progressions, dont les termes toujours infiniment grands par rapport à ceux qui les précedent, sont toujours par conséquent d'ordres supérieurs, comme ceux de $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. ∞ . ∞^2, ou de $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. ∞ . ∞^2 . ∞^3, & de toutes les progressions pareilles. Mais il y a cette différence essentielle, qu'au lieu que dans ces dernieres progressions, c'est le rapport infini de ∞ à 1, doublé ou triplé, &c. qui a été divisé en un nombre fini n de parties, qui ont fait autant d'ordres *potentiels*, c'est dans les progressions $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $\infty^{\frac{1}{n+1}}$. $\infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. le rapport simplement infini de ∞ à 1 qui est divisé, & qui ne produit que des ordres *radicaux*.

135. Quoique ∞ soit infiniment grand par rapport à $\infty^{\frac{1}{2}}$ sa moitié géometrique, & qu'il ne le soit pas par rapport à $\frac{\infty}{2}$ sa moitié arithmétique, cela n'empêche pas que la correspondance du rapport arithmétique & du géométrique ne soit toujours parfaite; car comme ∞ a une différence infinie à $\frac{\infty}{2}$, ainsi ∞ a un rapport géometrique infini à $\infty^{\frac{1}{2}}$, & comme pour égaler $\frac{\infty}{2}$ à ∞, il ne faut que le doubler, ainsi pour égaler $\infty^{\frac{1}{2}}$ à ∞, il ne faut que le doubler ou le quarrer, ce qui est sa maniere particuliere d'être doublé. Donc comme les parties $\frac{\infty}{2}$, $\frac{\infty}{3}$, &c. du rapport

M.E.C.D. 2017

arithmétique de ∞ & de 1 ſont du même ordre que ∞, & plus généralement parce que toutes les parties déterminables d'un Tout quelconque, ou qui ſont en nombre fini, ſont du même ordre que ce Tout, il faut que les $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. ſoient du même ordre que ∞. Mais ces Infinis radicaux ne peuvent être du même ordre que ∞, qu'entant qu'ils ſont quelques parties déterminées du rapport géométrique $\frac{\infty}{1}$, ou de l'ordre potentiel qui eſt entre 1 & ∞, donc ils ſont du même ordre potentiel que ∞, ou du même ordre par rapport à 1, ou au fini, ce qui n'empêche pas qu'ils ne ſoient entr'eux de différens ordres radicaux infiniment élevés les uns au-deſſus des autres, comme les $\frac{\infty}{2}$, $\frac{\infty}{3}$, &c. ont entr'eux des différences infinies.

136. Puiſque dans la progreſſion radicale

$\dot{\dot{\dot{

radicaux ſont conſécutifs dans une progreſſion qui a un certain nombre de termes, le rapport infini du plus grand au plus petit n'eſt pas ſi grand que celui de deux autres infinis radicaux conſécutifs dans une autre progreſſion qui a un moindre nombre de termes. Ainſi le rapport de $\infty^{\frac{2}{4}}$ à $\infty^{\frac{1}{4}}$ n'eſt pas ſi grand que celui de $\infty^{\frac{2}{3}}$ à $\infty^{\frac{1}{3}}$.

139. Après tout ce qui vient d'être établi, il eſt aiſé de comparer enſemble deux Infinis radicaux dont les expoſans ont le même dénominateur, comme $\infty^{\frac{3}{7}}$ & $\infty^{\frac{5}{7}}$: car on voit tout d'un coup qu'ils appartiennent à une progreſſion qui a introduit entre 1 & ∞ ſix moyens géométriques, & que dans cette progreſſion ils different de deux ordres radicaux.

140. Et comme pour la comparaiſon de deux Infinis radicaux il faut qu'ils appartiennent à la même progreſſion, & que quand ils y appartiennent, leurs expoſans ont le même dénominateur; il s'enſuit que ſi leurs expoſans ont différens dénominateurs, il faut leur en donner un qui ſoit le même ſans changer leur valeur. Auſſi pour comparer $\infty^{\frac{1}{3}}$ & $\infty^{\frac{1}{4}}$, il faut les changer en $\infty^{\frac{4}{12}}$ & $\infty^{\frac{3}{12}}$, moyennant quoi on voit qu'ils appartiennent à une progreſſion qui a introduit 11 moyens géométriques entre 1 & ∞, & que dans cette progreſſion ils different d'un ordre radical.

141. Quand les numérateurs des expoſans ſeroient différens auſſi-bien que les dénominateurs, comme dans $\infty^{\frac{1}{4}}$ & $\infty^{\frac{2}{3}}$, cela ne changeroit rien à cette maniere de comparer les Infinis radicaux. On auroit dans cet exemple $\infty^{\frac{3}{12}}$ & $\infty^{\frac{8}{12}}$, après quoi la comparaiſon eſt aiſée.

142. Comme on a introduit entre 1 & ∞ un nombre quelconque n fini de moyens géométriques (133) on en peut introduire ce même nombre entre 1 & ∞^2, ce qui

M.E.C.D. 2017

donnera (58) $\div\div 1.\infty^{\frac{2\times 1}{n+1}}.\infty^{\frac{2\times 2}{n+1}}.\infty^{\frac{2\times 3}{n+1}}.\infty^{\frac{2\times 4}{n+1}}$ &c.

$\infty^{\frac{2\times \overline{n+1}}{n+1}} = \infty^2$. Où l'on voit que le numérateur des expoſans eſt toujours un produit de deux nombres, dont 2 expoſant du dernier terme ∞^2 eſt toujours l'un, & les autres ſont la Suite naturelle des nombres.

Si, par exemple, $n = 6$, on aura

$$\div\div 1.\infty^{\frac{2\times 1}{7}}.\infty^{\frac{2\times 2}{7}}.\infty^{\frac{2\times 3}{7}}.\infty^{\frac{2\times 4}{7}}.\infty^{\frac{2\times 5}{7}}.$$
$$\infty^{\frac{2\times 6}{7}}.\infty^{\frac{2\times 7}{7}}.$$

ou $\div\div 1.\infty^{\frac{2}{7}}.\infty^{\frac{4}{7}}.\infty^{\frac{6}{7}}.\infty^{\frac{8}{7}}.\infty^{\frac{10}{7}}.\infty^{\frac{12}{7}}.\infty^{\frac{14}{7}} = \infty^2$.

Puiſque dans cette progreſſion c'eſt le rapport géométrique de ∞^2 à 1 qui a été diviſé en un nombre $n+1$ de parties égales, au lieu que dans celle de l'art. 135, c'étoit le rapport de ∞ à 1; & puiſque le rapport de ∞^2 à 1 eſt infiniment plus grand que celui de ∞ à 1, les diviſions infinies produites par cette 2de progreſſion ſont infiniment plus grandes que les infinies produites par la 1re; & comme la 1re n'en pouvoit produire que d'infinies tant que n étoit fini, la 2de dans cette même ſuppoſition n'en peut produire que d'infinies, & infiniment plus grandes.

Et en effet, puiſque 2 eſt un coëfficient conſtant dans les numérateurs des expoſans, tous les termes de la 2de progreſſion ſont les quarrés de ceux de la 1re, qui étoient

$\div\div 1.\infty^{\frac{1}{n+1}}.\infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. Or n étant fini $\infty^{\frac{1}{n+1}}$; $\infty^{\frac{2}{n+1}}$, &c. étoient des grandeurs infinies. Donc leurs quarrés ſont infiniment plus grands.

143. Donc le rapport de deux termes infinis conſécutifs eſt infiniment plus grand dans la 2de progreſſion que dans la 1re, & en général deux termes infinis qui dans la 2^de^

BIBLIOTECA DEL ESTUDIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

progreſſion different d'un certain nombre d'ordres radicaux, different infiniment plus que deux autres termes infinis qui différeroient de ce même nombre d'ordres radicaux dans la 1re.

144. La 2de progreſſion a des termes qui lui ſont communs avec la 1re, ce ſont tous ceux dont l'expoſant a un numérateur moindre que le dénominateur. Ainſi $\infty^{\frac{2}{7}}, \infty^{\frac{4}{7}}, \infty^{\frac{6}{7}}$ auroient auſſi appartenu à une progreſſion qui auroit introduit 6 moyens géométriques entre 1 & ∞, mais ils n'y auroient pas été conſécutifs, comme ils le ſont dans la 2de progreſſion. Il eſt aiſé de le voir, & comme il y auroit eu un autre terme dans chacun de leurs intervalles, le rapport de deux termes conſécutifs de la 2de progreſſion eſt doublé de celui de deux termes conſécutifs de la 1re, ce qui revient aux quarrés de l'art. 142.

145. Les termes de la 2de progreſſion qui ont le numérateur de leur expoſant plus grand que le dénominateur, par exemple, $\infty^{\frac{8}{7}}, \infty^{\frac{10}{7}}$, &c. ſont particuliers à cette progreſſion, c'eſt-à-dire, n'ont pû entrer dans la 1re. J'appelle *purs* Infinis radicaux les termes qui ſont communs aux deux progreſſions, parce que leur expoſant eſt une pure fraction, & j'appelle Infinis radicaux *mixtes*, ceux qui ſont particuliers à la 2de progreſſion, parce que leur expoſant eſt une fraction qui contient un entier plus une pure fraction.

146. Tous les termes de la 2de progreſſion ont un expoſant dont le numérateur eſt un multiple exact de 2, ou pair, & enfin le dernier a un expoſant dont le numérateur eſt double du dénominateur. Il eſt clair qu'il en ira de même de toute progreſſion pareille compriſe entre 1 & ∞^2.

147. Les purs Infinis radicaux de la 2de progreſſion lui étant communs avec la 1re (144), il ſuffit de les conſidérer dans cette 1re, ou plutôt en général, tous les purs Infinis radicaux doivent être conſidérés dans une progreſſion compriſe entre 1 & ∞, & on a déja vû tout ce qui leur appartient. Mais les Infinis radicaux mixtes étant particuliers à la

M.E.C.D. 2017

2de, y doivent être considérés, & ne le peuvent être dans l'autre ; ou en général, tous ceux dont l'exposant est une fraction qui contient 1 plus une pure fraction, appartiennent uniquement à une progression de cette espece. Ainsi $\infty^{\frac{16}{9}}$ est un des termes d'une progression qui auroit introduit 8 moyens géométriques entre 1 & ∞^2, & qui seroit

$$\therefore 1 . \infty^{\frac{2\times1}{9}} . \infty^{\frac{2\times2}{9}} . \infty^{\frac{2\times3}{9}} , \&c. \infty^{\frac{2\times9}{9}} = \infty^2 .$$

148. Il est aisé de trouver cette progression dont $\infty^{\frac{16}{9}}$ est un des termes ; parce que 16, numérateur de l'exposant, est multiple exact de 2, ou pair, & que dans les progressions que nous considérons présentement, tous les numérateurs des exposans sont pairs (142). Mais il semble que si on avoit eu $\infty^{\frac{15}{9}}$ qui se rapporte aussi-bien que $\infty^{\frac{16}{9}}$ à une progression comprise entre 1 & ∞^2 (145), il y auroit eu quelque difficulté à déterminer en particulier la progression dont il seroit un des termes. Cependant cela seroit fort aisé : car puisque ces progressions ont toujours des termes dont les exposans ont des numérateurs pairs, il n'y auroit eu qu'à donner à $\infty^{\frac{15}{9}}$ un numérateur pair sans changer la valeur de l'exposant, & on auroit eu $\infty^{\frac{2\times15}{2\times9}} = \infty^{\frac{30}{18}} = \infty^{\frac{15}{9}}$. De-là il suit que $\infty^{\frac{30}{18}} = \infty^{\frac{15}{9}}$ est un des termes d'une progression qui introduit 17 moyens proportionnels entre 1 & ∞^2, & qui a pour dernier terme $\infty^{\frac{36}{18}} = \infty^2$ (147).

149. Si l'on veut comparer $\infty^{\frac{15}{9}}$ & $\infty^{\frac{16}{9}}$, il faut après avoir changé $\infty^{\frac{15}{9}}$ en $\infty^{\frac{30}{18}}$, changer aussi $\infty^{\frac{16}{9}}$ en $\infty^{\frac{32}{18}}$: & l'on voit, parce que les numérateurs de leurs exposans sont $30 = 2\times15$, & $32 = 2\times16$, qu'ils sont consécutifs dans une progression, qui a introduit 17 moyens géométriques entre 1 & ∞^2, & qu'ils ne different que d'un ordre radical.

150. De tout cela s'ensuit clairement & sans autre preuve

M.E.C.D. 2017

la Méthode de comparer deux Infinis radicaux compris entre 1 & ∞^2, ſoit que l'un ſoit pur radical, & l'autre mixte, ſoit qu'ils ſoient tous deux mixtes.

Si leurs expoſans ont des dénominateurs différens, il faut les réduire à avoir le même, afin que les deux Infinis puiſſent appartenir à la même progreſſion.

Après cela, ſi les numérateurs des expoſans ſont tous deux pairs, il n'y a plus rien à faire, & l'on voit tout d'un coup de combien d'ordres radicaux different les deux Infinis dans la progreſſion qui a été déterminée par le dénominateur commun.

Si les deux numérateurs ne ſont pas pairs, il faut les réduire à l'être, & comme par-là le dénominateur commun change, les deux Infinis viennent à appartenir à une nouvelle progreſſion dans laquelle il eſt aiſé de les comparer.

Par exemple, pour comparer $\infty^{\frac{1}{2}}$ & $\infty^{\frac{5}{4}}$, il faut les changer en $\infty^{\frac{4}{8}}$ & $\infty^{\frac{10}{8}}$, & comme les deux numérateurs des expoſans ſont pairs, & que $4 = 2 \times 2$, & $10 = 2 \times 5$, on voit qu'ils appartiennent à une progreſſion qui introduit entre 1 & ∞^2, 7 moyens géométriques, & qu'ils y ont entr'eux $\infty^{\frac{2\times3}{8}}$, $\infty^{\frac{2\times4}{8}}$, & par conſéquent qu'ils y different de 3 ordres radicaux.

Pour comparer $\infty^{\frac{1}{3}}$ & $\infty^{\frac{1}{4}}$, on a d'abord $\infty^{\frac{4}{12}}$ & $\infty^{\frac{15}{12}}$: mais parce que 15 n'eſt pas pair, il faut changer $\infty^{\frac{15}{12}}$ en $\infty^{\frac{30}{24}}$, & par conſéquent $\infty^{\frac{4}{12}} = \infty^{\frac{1}{3}}$ en $\infty^{\frac{8}{24}}$, & alors ils appartiennent tous deux à une progreſſion qui introduit entre 1 & ∞^2, 23 moyens proportionnels: & parce que $8 = 2 \times 4$, & $30 = 2 \times 15$, ils different dans cette progreſſion d'autant d'ordres radicaux que 4 & 15 different d'unités, c'eſt-àdire, de 11 ordres.

151. Si on introduit entre 1 & ∞^3 un nombre n fini de moyens géométriques, on aura

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1.$

M.E.C.D. 2017

$\therdots$ 1. $\infty^{\frac{3\times1}{n+1}}$. $\infty^{\frac{3\times2}{n+1}}$. $\infty^{\frac{3\times3}{n+1}}$. $\infty^{\frac{3\times4}{n+1}}$, &c. jusqu'à $\infty^{\frac{3\times\overline{n+1}}{n+1}} = \infty^3$ dernier terme.

Le rapport de ∞^3 à 1 étant infiniment plus grand que celui de ∞^2 à 1, cette 3me progression produira des divisions infiniment plus grandes que celles de la 2de, ou de l'art. 142, qui étoient infiniment plus grandes que celles de la 1re, ou de l'art. 133, & l'on voit que tous les termes de cette 3me progression sont les cubes de ceux de la 1re, ou ont un rapport triplé.

152. De plus, il peut y avoir dans cette 3me progression de purs Infinis radicaux, des mixtes qui peuvent aussi lui être communs avec la 2de, parce que leurs exposans feront une fraction qui contiendra 1 plus une pure fraction; & enfin il y a nécessairement des mixtes particuliers à cette 3me progression, parce que leurs exposans sont une fraction qui contient 2 plus une pure fraction. Ainsi si $n = 6$, quand on aura $\infty^{\frac{3\times5}{7}} = \infty^{\frac{15}{7}}$, on aura un de ces Infinis radicaux particuliers à cette progression.

153. Il est visible qu'en introduisant de même un nombre n fini de moyens géométriques entre 1 & ∞^4, il y aura les mêmes raisonnemens à faire sur l'augmentation infinie des divisions, ou du rapport des termes, & que de plus on aura de nouveaux Infinis radicaux mixtes particuliers à cette 4me progression, dont les exposans feront une fraction qui contiendra 3, plus une pure fraction, & toujours ainsi de suite.

154. Donc en général un exposant étant $\frac{m}{n}$, où m & n sont des nombres finis, & $m > n$, tout $\infty^{\frac{m}{n}}$ est un Infini radical mixte qui appartient à une progression dont le dernier terme est ∞ élevé à une puissance qui a autant d'unités que n est contenu de fois dans m, plus une, ou, ce qui revient

M.E.C.D. 2017

au même, tout $\infty^{\frac{m}{n}}$ eſt au deſſus de ∞ élevé à la puiſſance qui a autant d'unités que n eſt contenu de fois dans m, & ce $\infty^{\frac{m}{n}}$ entre dans l'ordre potentiel ſuivant. Ainſi $\infty^{\frac{10}{3}}$ eſt au deſſus de ∞^3, & entre ∞^3 & ∞^4, ou, ce qui eſt le même, il entre dans l'ordre potentiel qui eſt entre ∞^2 & ∞^4.

155. La Méthode qui a été donnée dans l'art. 150, pour la comparaiſon des Infinis radicaux qui ne paſſent pas ∞^2, s'applique d'elle-même aux Infinis radicaux quelconques, ou qui ſeront au deſſus de tel ordre potentiel qu'on voudra, pourvû qu'on faſſe attention que comme dans les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^2, 2 eſt un coëfficient perpétuel dans les numérateurs des expoſans, de même dans les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^3, c'eſt 3, 4 pour les progreſſions compriſes entre 1 & ∞^4, & ainſi de ſuite. Du reſte les opérations ſont les mêmes.

Par exemple, on veut comparer $\infty^{\frac{1}{2}}$ & $\infty^{\frac{10}{3}}$ qui appartiennent à une progreſſion dont le dernier terme eſt ∞^4 (153), & par conſéquent le coëfficient perpétuel des numérateurs des expoſans eſt 4. En réduiſant les expoſans de $\infty^{\frac{1}{2}}$ & de $\infty^{\frac{10}{3}}$ au même dénominateur, on a $\infty^{\frac{3}{6}}$ & $\infty^{\frac{20}{6}}$. Mais comme 3 n'eſt pas un multiple de 4, comme 20 en eſt un, il faut changer ces deux Infinis en $\infty^{\frac{12}{24}}$ & en $\infty^{\frac{80}{24}}$, d'où l'on voit qu'ils appartiennent à une même progreſſion qui introduit 23 moyens proportionnels entre 1 & $\infty^4 = \infty^{\frac{96}{24}}$, & qu'ils different de 17 ordres radicaux, parce que $12 = 4 \times 3$, & $80 = 4 \times 20$.

Il ſeroit inutile de répéter, que plus le nombre n de moyens proportionnels qu'on introduit entre les mêmes extrêmes eſt grand, plus les rapports égaux, quoi-qu'infinis, ſont petits.

Rapports des Infinis radicaux au Fini.

156. Mais il n'eſt pas ſi important de ſavoir comparer les Infinis radicaux entr'eux, que de les pouvoir comparer, ou rapporter au Fini, qui eſt toujours, ou le principal objet, ou du moins la baſe de nos recherches.

M.E.C.D. 2017

Il ſuit de tout ce qui a été dit, que tout Infini radical pur, tel que $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$, n & m étant finis, & $n < m$, appartient à quelque progreſſion géométrique qui auroit diviſé le rapport infini de ∞ à 1 en un nombre fini de parties égales, & par conſéquent infinies, & du même ordre que leur Tout qui eſt de l'ordre de ∞. Donc $\infty^{\frac{1}{n}}$ fût-il le 1er terme moyen de cette progreſſion ou celui qui ſuit immédiatement 1, il a un rapport infini à 1, & ce rapport eſt de l'ordre de ∞, ou du 1er ordre potentiel. Donc tout Infini radical pur eſt par rapport à 1, ou au Fini du 1er ordre potentiel.

157. Tout $\infty^{\frac{m}{n}}$, Infini radical mixte, eſt au deſſus de quelque Infini potentiel, & entre dans l'ordre potentiel ſuivant (154). Or de cet ordre potentiel où il entre, il en détermine une certaine partie où il ſe place, & cette partie eſt néceſſairement d'une dénomination finie, & par conſéquent elle eſt infinie, & du même ordre que ſon Tout qui eſt ce dernier ordre potentiel. Donc $\infty^{\frac{m}{n}}$ eſt par rapport à 1 de ce dernier ordre potentiel. Ainſi $\infty^{\frac{10}{3}}$ qui eſt au deſſus de ∞^3, & entre ∞^3 & ∞^4, eſt du 4me ordre potentiel par rapport à 1, ou au Fini.

158. Donc en général un Infini radical quelconque eſt par rapport au Fini du même ordre potentiel que l'Infini potentiel le plus élevé, au deſſous duquel il eſt immédiatement. Il eſt clair que l'expoſant de l'Infini radical détermine tout d'un coup quel eſt l'Infini potentiel le plus élevé, au deſſous duquel il eſt immédiatement.

159. Donc quand on a deux Infinis radicaux qui different entr'eux d'un certain nombre d'ordres radicaux, mais tous compris dans le même potentiel, comme $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. ſi on compare ces deux Infinis radicaux au Fini,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ils ſont du même ordre potentiel, les différences de leurs ordres radicaux diſparoiſſent, & elles ne ſont à compter que quand on compare les Infinis radicaux entr'eux.

160. Il ſuit auſſi de-là, qu'une grandeur qui par une certaine ſuppoſition ou conſéquence devroit être de l'ordre de ∞, & qui ne ſe trouveroit que $= \infty^{\frac{1}{2}}$, ou $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. devroit être conſidérée de deux manieres. Par rapport au Fini, elle ſeroit toujours de l'ordre dont on auroit ſuppoſé ou conclu qu'elle auroit dû être. Mais en elle-même, elle ſeroit infiniment moindre que ſi elle avoit été $= \infty$, & non pas un Infini radical. Il en ſeroit de même d'une grandeur qui auroit dû être ∞^2, & ne ſeroit que $\infty^{\frac{2}{3}}$, &c.

Quelles ſont les parties infinitiemes d'un Tout infini.

161. Un Tout infini ne peut avoir une infinité de parties infinies de ſon ordre : car lorſqu'il n'eſt diviſé qu'en un nombre fini de parties, elles ſont infinies, & de ſon ordre; mais d'autant moindres qu'elles ſont en plus grand nombre; d'où il ſuit, que quand elles ſont en nombre infini, elles doivent être infiniment moindres qu'elles n'étoient, & n'être plus de l'ordre du Tout. Mais pour le démontrer plus à la rigueur, ſoit ſuppoſé ∞ formé de parties infinies en nombre infini, égales, ou inégales. Si elles ſont égales, une partie quelconque, & ſi elles ſont inégales, une certaine partie moyenne, multipliée par un nombre infini ſera $= \infty$. Or cette partie eſt infinie par la ſuppoſition, donc le produit où elle entrera ſera un Infini d'un ordre ſupérieur à ∞, ce qui eſt contradictoire. Donc un Tout infini ne peut avoir une infinité de parties infinies de ſon ordre.

162. Donc toute partie *infinitieme* eſt d'un ordre inférieur à ſon Tout. Par exemple, toute partie infinitieme de ∞ eſt finie, toute partie infinitieme de ∞^2 eſt de l'ordre de ∞, &c.

163. Un Infini d'un ordre quelconque diviſé d'abord en 10 parties, par exemple, qui ſeront infinies de ſon ordre, peut enſuite être diviſé en une infinité de parties finies. Donc il aura des parties infinies, & des parties finies : mais il n'aura

M.E.C.D. 2017

des parties infinies qu'en nombre fini, & il en aura de finies en nombre infini, ou, ce qui revient au même, s'il eſt diviſé en une infinité de parties, parmi leſquelles il y en ait de ſon ordre, elles ne ſeront qu'en nombre fini, & celles de l'ordre inférieur ſeront en nombre infini.

164. Si un Infini eſt diviſé en une infinité de parties égales, elles ne peuvent être toutes que de l'ordre inférieur.

165. Si on diviſe en un nombre ∞ de parties égales le rapport arithmétique de 1 & de ∞, elles ſeront donc toutes finies ; & en effet chacune d'elles eſt 1, différence conſtante de la Suite naturelle, qui introduit entre 1 & ∞ un nombre ∞ de moyens arithmétiques. Cela ſe trouveroit de même par la Formule de l'art. 55.

De même ſi on diviſe en une infinité de parties égales le rapport géométrique $\frac{\infty}{1}$, ce qui introduira entre 1 & ∞ une infinité de moyens géométriques, toutes ces parties ſeront donc finies, & comme ces parties ſont des rapports géométriques, ces rapports ſeront donc tous finis ; c'eſt-à-dire, que dans la progreſſion géométrique qui ſe formera, aucun terme ne ſera infiniment grand par rapport au précédent, & n'aura à ce précédent qu'un rapport fini, tel que ceux que les nombres finis ont les uns aux autres.

166. Dans cette progreſſion géométrique a étant $= 1$, $b = \infty$, $n = \infty$, on aura (55) $m = \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{1}$ *Quelle eſt la racine infinitieme de l'Infini.*

$= \infty^{\frac{1}{\infty}}$, & par conſéquent $\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$. $\infty^{\frac{3}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$. Or tous les rapports de cette progreſſion étant finis (165) $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ ne ſera donc pas infiniment grand par rapport à 1, mais du même ordre que 1, ou fini, ſeulement il ſera plus grand, puiſqu'il le ſuit dans une

M.E.C.D. 2017

progreſſion croiſſante. Cet $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt la $\sqrt[\infty]{}$ de ∞, donc la racine infinitieme de ∞ eſt finie & plus grande que 1, au lieu que toutes les autres $\sqrt{}$ de ∞ qui ont un expoſant fini ſont infinies.

167. Mais ce $\infty^{\frac{1}{\infty}} > 1$ eſt < 2, car en comparant les termes de cette progreſſion géométrique qui eſt la correſpondante de la Suite naturelle, aux termes correſpondans de cette Suite, on a (66) $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ ſecond terme de la progreſſion géométrique, moindre que 2 ſecond de l'arithmétique.

168. De même $\infty^{\frac{2}{\infty}} < 3$. $\infty^{\frac{3}{\infty}} < 4$, &c.

169. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$ étant le quarré de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, dont le quarré eſt moindre que 3, eſt donc moindre que $\sqrt{3}$. Or $\sqrt{3}$ eſt < 2. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ qui eſt plus au-deſſous de 2 que $\sqrt{3}$, eſt beaucoup au-deſſous de 2.

170. Puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une grandeur finie, ∞ par l'extraction de la racine infinitieme ne deſcend que d'un ordre, au lieu que par l'élévation à la puiſſance infinie, il monte d'une infinité d'ordres, ou, ce qui eſt la même choſe, toutes ſes racines en nombre infini tant d'un expoſant fini que d'un expoſant infini ſont entre ∞ & 1, au lieu que toutes ſes puiſſances s'étendent depuis ∞ juſqu'à ∞^{∞}. On voit la naiſſance de cela dans le Fini, où les 10 premieres puiſſances de 2, par exemple, vont depuis 2 juſqu'à 1024, au lieu que ſes 10 premieres racines, & même toutes ſes racines ſont entre 1 & 2.

De quel ordre ſont les ſommes des Suites infinies, qui ont des termes de différens ordres.

171. Maintenant je conſidere les Suites qui ont des termes en nombre $= \infty$, les uns finis, les autres infinis du même ordre ∞, ou plus généralement, car ce ſera toujours la même choſe, des termes de deux ordres conſécutifs que j'appelle n & $n+1$.

M.E.C.D. 2017

Si une Suite infinie n'avoit des termes que de l'ordre n, il y auroit toujours quelque terme moyen x, qui multiplié par ∞, nombre des termes, donneroit le produit $x \times \infty$ égal à la ſomme totale de la Suite. Or ſi x eſt ſuppoſé fini, & par conſéquent tous les autres termes de la Suite, $x\infty$ ſera un Infini du 1er ordre, & par conſéquent auſſi la ſomme de la Suite, ou, ce qui eſt le même, la ſomme ſera de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes. De même ſi x eſt de l'ordre de ∞, la ſomme ſera de l'ordre de ∞^2, &c.

Donc auſſi ſi la Suite a une infinité de termes de l'ordre n, & une infinité de l'ordre $n+1$, ce qui eſt fort poſſible, puiſqu'elle en peut avoir, par exemple, de l'ordre n un nombre $= \frac{\infty}{2}$, ou $= \frac{\infty}{3}$, &c. & de l'ordre $n+1$ un nombre $= \frac{\infty}{2}$, ou $= \frac{2\infty}{3}$, &c. les termes de l'ordre n feront une ſomme de l'ordre $n+1$, & ceux de l'ordre $n+1$ une ſomme de l'ordre $n+2$, donc la ſomme totale ſera de l'ordre $n+2$, c'eſt-à-dire, de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes les plus élevés.

172. Si la Suite a un nombre fini de termes de l'ordre n, & un infini de l'ordre $n+1$, ceux de l'ordre n ne peuvent faire qu'une ſomme de ce même ordre, & ceux de l'ordre $n+1$ en font une de l'ordre $n+2$. Donc la ſomme totale eſt de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes les plus élevés.

Il faut remarquer qu'en ce cas tous les termes de l'ordre n ne faiſant qu'une ſomme de l'ordre n, cette ſomme n'eſt donc qu'un terme de l'ordre n qui diſparoît devant les termes de l'ordre $n+1$, & que par conſéquent tous ces termes de l'ordre n ſont *inutiles* à la ſomme totale, qui n'eſt formée que de ceux de l'ordre $n+1$. Dans le cas de l'art. précédent, tous les termes étoient utiles à la ſomme, parce que ceux de l'ordre n en nombre infini faiſoient une ſomme de l'ordre $n+1$, ou un terme de cet ordre qui ſe joignoit à ſes *homogenes* de l'ordre $n+1$.

M.E.C.D. 2017

173. Si la Suite a un nombre infini de termes de l'ordre n, & un nombre ſeulement fini de l'ordre $n+1$, tous les termes de l'ordre n font une ſomme de l'ordre $n+1$, qui ſe joint à ſes homogenes de l'ordre $n+1$; mais comme ils ſont en nombre fini, & qu'elle n'augmente leur nombre que d'un terme, la ſomme totale n'eſt que de l'ordre $n+1$, quoi-que tous les termes lui ſoient utiles.

174. Soit maintenant une Suite compoſée de termes de trois différens ordres conſécutifs, n, $n+1$, & $n+2$.

Si le nombre des termes de chacun de ces trois ordres eſt infini, il eſt clair qu'ils ſeront tous utiles à la ſomme, & qu'elle ſera de l'ordre $n+3$.

175. Si le nombre des termes de l'ordre n eſt fini, & celui des termes des deux autres ordres infini, ou même ſi le nombre des termes tant de l'ordre n que de l'ordre $n+1$ eſt fini, & celui des termes du ſeul ordre $n+2$ infini, tous les termes qui ne ſont qu'en nombre fini dans leur ordre ſeront inutiles à la ſomme, & elle ſera de l'ordre $n+3$.

176. Si le nombre des termes de l'ordre n eſt infini, & celui des deux autres ordres fini, ou même ſi le nombre des termes des ordres n, & $n+1$ eſt infini, & celui ſeulement des termes de l'ordre $n+2$ fini, la ſomme n'eſt que de l'ordre $n+2$: mais dans le 1er cas les termes des deux 1ers ordres ſont inutiles à la ſomme, & dans le 2^d^ cas ils y ſont utiles.

177. Il eſt aiſé de voir qu'il en ira toujours de même, quel que ſoit le nombre des ordres conſécutifs des différens termes, & qu'en général la ſomme ne ſera que de l'ordre des termes les plus élevés, s'il n'y en a qu'un nombre fini, ou de l'ordre immédiatement ſupérieur, s'il y en a un nombre infini.

178. Réciproquement, ſi la ſomme n'eſt que de l'ordre des termes les plus élevés, il n'y en a dans la ſuite qu'un nombre fini, & ſi la ſomme eſt de l'ordre immédiatement ſupérieur, il y a un nombre infini de ces termes.

179. Les termes de l'ordre le plus élevé ne pouvant jamais

M.E.C.D. 2017

jamais être inutiles à la ſomme, il n'y a que ceux de quelque ordre inférieur qui le puiſſent être, & ils le ſont quand ils ne ſont qu'en nombre fini, ou lorſqu'étant en nombre infini, les termes de l'ordre ſuivant ne ſont qu'en nombre fini, & que cet ordre ſuivant n'eſt pas le dernier ou le plus élevé.

180. Plus dans une Suite infinie le nombre des différens ordres des termes ſera grand, plus il pourra y avoir d'ordres qui n'aient des termes qu'en nombre fini, & par conſéquent inutiles à la ſomme (179). Et enfin ſi le nombre des différens ordres étoit infini, ce qui réduiroit, ſinon tous les ordres, du moins une infinité d'ordres à n'avoir qu'un nombre de termes fini, les termes de cette infinité d'ordres ſeroient tous inutiles à la ſomme, & ſi le nombre des ordres étoit égal au nombre des termes, ou, ce qui eſt le même, ſi chaque terme étoit d'un ordre différent, tous les termes horſmis le dernier ou plus élevé ſeroient inutiles à la Somme. Telle eſt la $\div$ 1. ∞. ∞^2. ∞^3, &c. ∞^{∞}, dont la ſomme n'eſt que ∞^{∞}. Et on le voit encore en y appliquant la Formule $\frac{sm^n - s}{m-1}$ (78) car elle donne $\frac{1 \times \infty^{\infty} - 1}{\infty - 1} = \infty^{\infty - 1} = \infty^{\infty}$.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

SECTION III.

De la Suite naturelle infinie élevée à ſes Puiſſances, & comparée à la Progreſſion géométrique correſpondante.

LA Suite naturelle des Nombres n'eſt appellée de ce nom, que parce que c'eſt la premiere, & quelquefois la ſeule qui s'offre à l'eſprit des hommes, & qu'elle eſt toujours enveloppée dans toutes les autres, quelque recherchées & quelque compliquées qu'elles ſoient. Ainſi il importe de la connoître & de l'approfondir le plus qu'il ſe puiſſe, car peut-être ne l'a-t'elle pas encore été tout-à-fait, quoi-que bien expoſée à la vûe de tout le monde.

Conſidération de la Suite naturelle des nombres, appellée A. *Qu'elle a une infinité de termes infinis, & une autre infinité beaucoup moindre de termes finis.*

181. J'appelle A la Suite naturelle infinie des Nombres. Il ſemble que ∞, dernier terme de A, en devroit être le ſeul terme infini précédé immédiatement d'un terme fini. Car (84 & 85) on n'a conçû que A avoit un dernier terme infini ou ∞, que parce que le nombre de ſes termes finis étant ∞, ce même ∞ devoit auſſi exprimer ſon dernier terme. Donc ∞ qui n'eſt l'expreſſion d'un nombre infini que de termes finis, & qui eſt en même temps le dernier terme de A, en doit être le ſeul Infini. Et en effet, dès qu'on eſt arrivé à l'Infini, A n'eſt-elle pas-terminée, du moins dans ſon ordre? N'a-t'on pas parcouru une infinité de termes finis, quand on eſt arrivé au premier Infini?

Mais il s'en faut beaucoup que tout cela ne ſoit vrai, & il arrive ſouvent en ces matieres, qu'une idée légitime qu'on a priſe, enferme plus qu'on ne penſoit, & mene plus loin.

La ſomme de A eſt $\frac{\infty^2}{2}$ (124) donc A a une infinité de termes de l'ordre de ∞ (178). Donc il eſt déja démontré *à poſteriori* qu'elle a une infinité de termes infinis.

182. Mais on peut démontrer *à priori*, & plus clairement

M.E.C.D. 2017

cette même vérité, qui ſe trouvera avoir encore plus d'étendue.

Puiſque *A* eſt une progreſſion arithmétique, dont le dernier terme eſt ∞, ſon terme du milieu eſt $\frac{\infty}{2}$, Infini, après lequel il ne peut y avoir que des Infinis plus grands. De même le terme de ſon 1er quart eſt $\frac{\infty}{4}$, encore infini, celui de ſa premiere 100me partie eſt $\frac{\infty}{100}$ encore infini; de ſorte que de l'intervalle infini, qui eſt entre 1 & ∞, diviſé en 100 parties, il y en a déja 99 qui ne peuvent avoir que des termes infinis, & il ne reſte que la 1re qui puiſſe en avoir de finis. Il eſt viſible que cette premiere 100me partie ſera infinie, puiſqu'elle ſera une partie finie d'un intervalle infini, & par conſéquent elle contiendra encore une infinité de termes. Enfin *n* étant un nombre fini quelconque, & ſi grand qu'on voudra, & l'intervalle entre 1 & ∞ étant diviſé en ce nombre *n* de parties, on trouvera toujours qu'il n'y aura que la 1re *n*^me^ partie qui puiſſe avoir des termes finis, & la difficulté ne ſera plus que de ſavoir comment *A* peut encore avoir une infinité de termes finis, car cette infinité doit toujours ſubſiſter, puiſqu'elle eſt née de la premiere ſuppoſition qui a donné ∞.

183. Avant que d'éclaircir cette difficulté, & même afin de l'éclaircir, il faut connoître, autant qu'on le peut, la nature de ce nombre prodigieux d'Infinis contenus dans *A*. Ils ſont tous moindres que ∞, & je les diſtingue tous par ce caractere $\propto$, qui repréſente un Infini indéterminé & variable du même ordre que ∞, qui eſt un Infini fixe.

Comme ils naiſſent de la diviſion qu'on a faite de l'intervalle qui eſt entre 1 & ∞ en un nombre fini *n* de parties, les $\propto$ qui ſont à la tête de chaque diviſion ſont des $\frac{\infty}{n}$, $\frac{2\infty}{n}$, $\frac{3\infty}{n}$, &c. juſqu'au dernier qui eſt $\frac{n-1\times\infty}{n}$, & enfin vient $\frac{n\infty}{n}$ $=\infty$ dernier terme de *A*. Tous ces $\propto$ ont un rapport

M.E.C.D. 2017

exprimable à ∞, en vertu de la diviſion qu'on a faite. Mais dans les intervalles infinis qui ſont entre $\frac{\infty}{n}$ & $\frac{2\infty}{n}$, ou entre $\frac{2\infty}{n}$ & $\frac{3\infty}{n}$, &c. & dont chacun contient un nombre d'Infinis $= \frac{\infty}{n}$, ces Infinis intermédiaires n'ont point en vertu de cette diviſion un rapport exprimable ou déterminable à ∞. Et comme n n'eſt qu'une expreſſion générale & indéterminée d'un nombre fini, il faut regarder les $\propto$ en général comme n'ayant à ∞ qu'un rapport indéterminable, à moins que par quelque ſuppoſition particuliere on ne vienne à le déterminer.

184. La nature générale de ce rapport, tant arithmétique que géométrique, ſe détermine cependant très-aiſément. Dans le nombre infini des $\propto$ il n'y en peut avoir qu'un nombre fini à l'extrémité de A, qui ſoient à une diſtance finie de ∞, & dont par conſéquent la différence à ∞ ſoit finie. En ce cas elle eſt nulle (98) & A finit par un nombre fini d'Infinis égaux, ou, ſi l'on veut, preſque égaux. Tous les autres $\propto$ ſont à une diſtance infinie de ∞, ou ont une différence infinie à ∞. Cette différence eſt donc un $\propto$. Cela revient à l'art. 100.

185. Mais en même temps le rapport géométrique de ∞ aux $\propto$ n'eſt pas infini, ou ∞ n'eſt pas infiniment plus grand que les $\propto$, même que ceux auxquels il a une différence infinie. Car ſoit le moindre $\propto$ poſſible $= \frac{\infty}{n}$, n étant fini & ſi grand qu'on voudra, ∞ eſt à $\frac{\infty}{n}$ :: n. 1.

186. Les $\propto$ ſont donc d'une nature toute différente des Infinis radicaux purs, tels que $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$, quoique compris dans le même intervalle. ∞ n'eſt point du tout diminué par la ſouſtraction de $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou de $\infty^{\frac{n}{m}}$ (136). Et au contraire par la ſouſtraction de $\propto$ il perd une infinité des unités qui le formoient, pourvû que ce $\propto$ ne ſoit pas

M.E.C.D. 2017

tout-à-fait à l'extrémité de *A*. Hors de-là $\infty - \propto = \propto$, ces deux $\propto$ étant preſque toujours différens, au lieu que ∞ $- \infty^{\frac{1}{n}}$ ou $- \infty^{\frac{n}{m}} = \infty . \infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$ n'eſt point grandeur par rapport à ∞, au lieu que $\propto$ en eſt une.

187. On peut par-là ſe confirmer en paſſant, combien, ainſi qu'on l'a déja vû, la progreſſion arithmétique & la géométrique correſpondante ſont oppoſées : car les $\infty^{\frac{1}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$ & les $\propto$ ſont des Infinis nés de deux diviſions d'un même intervalle infini en un nombre fini de parties, mais l'une de ces diviſions étoit géométrique, l'autre arithmétique.

188. Puiſque ∞ n'a qu'un rapport fini aux $\propto$ (185) $\frac{\infty}{\propto}$ eſt un entier fini, plus une fraction le plus ſouvent, & $\frac{\propto}{\infty}$ eſt une fraction finie moindre que 1.

189. Les $\propto$ ont entr'eux des différences finies ou infinies ſelon les lieux où ils ſont pris.

190. Ils n'ont entr'eux que des rapports finis, puiſqu'ils n'en ont que de tels à ∞, le plus grand de tous les termes de *A*. Donc $\frac{\propto}{\propto}$ eſt un Fini.

191. Pour revenir à la difficulté de l'article 182, il faut concevoir *A* diviſée en un nombre $\propto$ de parties, au lieu qu'elle l'étoit en un nombre fini *n*. Chaque diviſion contiendra un nombre $\frac{\infty}{\propto}$ de termes, nombre fini (188), & cela doit être, puiſqu'il y a une infinité de diviſions. Les termes qui ſeront à la tête de chaque diviſion, ſeront ſelon l'art. 183 $\frac{\infty}{\propto} . \frac{2\infty}{\propto} . \frac{3\infty}{\propto}$, &c. le dénominateur $\propto$ étant toujours le même, & ces termes ſeront toujours finis. Mais comme dans ces expreſſions les Coëfficiens 1, 2, 3, &c. du numérateur ∞ ſont toujours croiſſans, il en viendra enfin un qui

M.E.C.D. 2017

ſera $\propto$, & on aura $\frac{\propto\infty}{\propto}$, terme infini, puiſque $\frac{\propto}{\propto}$ eſt fini (190).

Cet $\frac{\propto\infty}{\propto}$ ſera une partie déterminée de ∞, ſelon le rapport fini qu'auront entr'eux les deux $\propto$, l'un du numérateur, l'autre du dénominateur, le 1er étant ſuppoſé toujours moindre que le 2^d^.

Juſqu'à cet $\frac{\propto\infty}{\propto}$ tous les termes de A auront été finis, & pour en trouver un nombre infini, je n'ai qu'à concevoir que le $\propto$ du numérateur, qui doit alors être le 1er de tous les $\propto$, étoit à une diſtance infinie de 1, premier terme de A, ce qui eſt fort naturel & fort poſſible, puiſqu'un $\propto$ eſt un terme infini. Je dis ſeulement que cela eſt *naturel* & *poſſible*, & non pas *néceſſaire*, parce qu'on verra dans la ſuite qu'il ne l'eſt pas abſolument. Si $\propto$ du numérateur de $\frac{\propto\infty}{\propto}$, premier terme infini de A, a été à une diſtance infinie de 1, il y a eu donc avant lui une infinité de termes finis qui étoient les $\frac{1\infty}{\propto}$, $\frac{2\infty}{\propto}$, $\frac{3\infty}{\propto}$, ou ∞ avoit toujours un Coëfficient fini.

Donc le prodigieux nombre d'Infinis qu'on a trouvés dans A par l'art. 182, n'empêche pas qu'il ne puiſſe y avoir une infinité de termes finis, ce qui eſt la difficulté qu'on avoit à lever.

192. Si à la ſuppoſition de l'art. précédent, par laquelle dans $\frac{\propto\infty}{\propto}$ le $\propto$ du numérateur eſt le 1er des $\propto$, on ajoute que le $\propto$ du dénominateur en ſoit le dernier, il faudra concevoir celui du numérateur toujours croiſſant, & celui du dénominateur conſtant, moyennant quoi on verra que $\frac{\propto\infty}{\propto}$ eſt toujours infini, & moindre que ∞, juſqu'à ce qu'enfin le $\propto$ du numérateur étant parvenu à être égal à celui du dénominateur, on ait $\frac{\propto\infty}{\propto}=\infty$.

M.E.C.D. 2017

193. Donc *A* a une infinité de termes finis, & une infinité d'Infinis; mais la 1re infinité prodigieusement moindre que la 2de, quoi-que du même ordre. Le rapport de 1 à 1000, &c. où l'on mettra tel nombre fini de zero qu'on voudra, n'exprimeroit pas le rapport de ces deux infinités, car selon l'art. 182 $\frac{\infty}{1000\ \&c.}$ seroit encore un nombre infini. Ce rapport, quoique fini, est indéterminable.

194. Tous les termes de *A* sont utiles à sa somme, puisqu'ayant des termes de deux ordres, elle en a une infinité dans chacun (171 & 172).

195. Une Suite composée d'un nombre ∞ de termes, tous $= \infty$, auroit sa somme $= \infty^2$, qui ne seroit que double de la somme de *A*, ce qui fait encore voir très-facilement combien les Infinis de *A* qui précedent ∞, tous moindres que lui, & très-lentement croissans, doivent être en une prodigieuse quantité.

196. Concevons maintenant que tous les termes de *A* sont élevés au quarré, ce qui donne A^2, 1, 4, 9, 16, &c. ∞^2. Il est visible que A^2 a autant de termes que *A*.

Considération de la Suite naturelle quarrée, ou de A^2.

Je représente les deux Suites aux yeux, pour mieux faire voir leur correspondance.

	Termes finis.		B		
A.	1. 2. 3. 4, &c.	*n*	*nn*	Infinis.	∞.
A^2.	1. 4. 9. 16, &c.	*nn*	C	Infinis.	∞^2.

La ligne *BC* marque dans *A* la séparation des termes finis d'avec les Infinis, desorte qu'à la gauche de *BC* ils sont tous Finis, & à sa droite Infinis, & en même temps elle marque dans A^2, qu'au moins à sa droite ils seront tous Infinis, car les Infinis de *A* ne peuvent qu'augmenter dans A^2 par l'élévation au quarré.

Soit *nn* le plus grand quarré fini, qui soit dans *A*, & posé par conséquent à la gauche de *BC*, & tout auprès: il sera aussi dans A^2, puisqu'il est le quarré de *n*, un des termes de *A*.

M.E.C.D. 2017

Mais il ſera dans A^2 ſous n ſa racine, & n eſt dans A, fort éloigné de nn, & d'autant plus que n eſt plus grand. Mais nn eſt le plus grand quarré fini poſſible, & dans A^2 il y a encore loin de nn à la ligne BC. Donc dans A^2 il n'y a plus de termes finis après nn, ou bien il y a dans cette Suite un vuide depuis nn juſqu'à la ligne BC; de ſorte que tous les termes Finis qui ſont dans A depuis n juſqu'à la ligne BC, n'ont point de correſpondans ou de quarrés dans A^2, ce qui eſt manifeſtement impoſſible. Donc après nn, il vient dans A^2 des Infinis, & A^2 en a plutôt que A.

197. Cette concluſion n'eſt point étonnante: car puiſque A^2 s'éleve juſqu'à ∞^2, infiniment plus grand que ∞ où A ſe termine, & qu'elle n'a qu'un cours de la même étendue, il eſt très-naturel, & même abſolument néceſſaire que A^2 arrive à un ſimple Infini plutôt que A. Mais ſi cela eſt, les Infinis qui ſeront dans A^2 depuis nn juſqu'à la ligne BC ſeront donc des quarrés de termes finis correſpondans qui étoient dans A depuis n juſqu'à la ligne BC: or comment des quarrés de termes finis peuvent-ils être infinis? Le fini multiplié par le fini, & quelque nombre fini de fois qu'il le ſoit, ne peut être que fini. C'eſt une vérité reçûe de tous les Géometres, c'eſt la Regle invariable d'une infinité de calculs.

J'avoue que du premier coup d'œil cette difficulté eſt accablante, & elle m'auroit fait abandonner tout ce Siſteme de l'Infini, ſi je n'avois vû un grand nombre de fortes raiſons qui la diminuoient, car je n'oſe preſque dire qu'elles la levoient entierement, & qui m'engageoient à admettre l'étrange Paradoxe de termes finis devenus infinis par l'élévation au quarré.

1°. Ce Paradoxe n'eſt pas plus terrible que celui d'un Infini plus grand, & même infiniment plus grand, qu'un autre Infini, contre lequel on peut faire des objections apparemment invincibles. Mais il eſt vrai qu'il eſt établi, & que l'on reçoit avec moins de peine, & même ſans peine, ce que l'on voit que tous les autres reçoivent. L'autorité a ſon effet, même en Géométrie, ſans que l'on s'en apperçoive.

2°.

M.E.C.D. 2017

2°. Les Finis que je ſuppoſe qui deviennent Infinis, ne le deviennent que dans le paſſage obſcur & incompréhenſible, & cependant conſtant, du Fini à l'Infini. C'eſt là que ſe font des changemens que nous ne connoiſſons, à la vérité, que par les effets, c'eſt-à-dire, par les réſultats des Calculs: mais quoiqu'on ne ſache pas comment ils ſe font, il eſt pourtant bon de ſavoir que c'eſt là où ils ſe font, & de pouvoir juger, du moins *à poſteriori*, quels ils ont dû être. Cela pourra fournir des principes, qui enſuite feront connoître les changemens *à priori*.

3°. Il y a bien de la différence entre le Fini *fixe*, pour ainſi dire, & le Fini *en mouvement*, ou, comme diſent nos habiles Voiſins, *en fluxion*, pour devenir Infini. Tous les Finis ne ſont, dès que nous les pouvons déterminer, qu'au commencement de la Suite *A*, quelque grands qu'ils ſoient; & à cauſe qu'elle eſt d'une étendue infinie, ils ne ſont pas plus avancés vers ſon extrémité que 1, premier terme de *A*. Ils ſont fixes, parce qu'ils ne ſont encore en aucun mouvement pour devenir Infinis, ou du moins dans un ſi petit mouvement, qu'il n'eſt à compter pour rien par rapport à celui qu'ils ont encore à faire. Mais quand ils ont déja fait une partie infinie de ce mouvement, là commencent les degrés inconnus par leſquels ils doivent paſſer & s'élever à l'Infini, là ils deviennent d'une nature moyenne, qui les rend propres à ſe changer en Infinis par des changemens legers qui n'auroient pas ſuffi auparavant. Tous les Calculs n'operent que ſur des Finis fixes, & jamais ſur les Finis en mouvement: & de-là vient la Regle invariable, que le Fini multiplié par le Fini n'eſt que Fini. Il eſt bien ſûr qu'un Calcul ne tombera jamais dans le cas de l'exception: mais il peut être permis à la Théorie d'aller plus loin, & de l'appercevoir, ſuppoſé qu'il ſoit fondé.

4°. Comme nous n'opérons que ſur des Finis qui ſont tout à l'origine des Suites, de même quand nous opérons ſur des Infinis, ce n'eſt que ſur ceux qui ſont tout à l'extrémité, & qui ont pris la nature entiere & complete d'Infini; deſorte

M.E.C.D. 2017

que nous ne saisissons que les deux bouts des Suites, encore n'y a-t'il que le premier bien saisi & bien connu, l'autre n'est guère qu'entrevû, & supposé. Tout l'entre-deux infini nous échappe, & il doit cependant y arriver tout ce que l'Infini a de plus merveilleux.

5°. Si l'on admet le Paradoxe, il y a des Finis de A qui deviennent Infinis dans A^2, & ils ne pourront être que de l'ordre de ∞, & assez petits dans cet ordre. Ils feront le degré & la nuance des Finis de A^2 aux infinis du 2^d ordre ou aux ∞^2 : or ces degrés & ces nuances sont nécessaires dans les Suites, & tous les Géometres en conviennent. Si tout ce qui est Fini dans A, demeure Fini dans A^2, tout ce qui étoit Infini dans A, deviendra dans A^2 infini du 2^d ordre, & A^2 sautera brusquement du Fini à ∞^2, sans passer par ∞, ce qui n'a absolument aucun exemple dans des Suites, dont la gradation soit aussi lente que celle de A^2.

6°. Si on n'admet pas le Paradoxe, je démontrerai invinciblement le contraire de quelques vérités constantes & reçues, & il y aura démonstration contre démonstration. On en verra des exemples, quand l'ordre de cet Ouvrage les amenera.

7°. Le Paradoxe admis ne conduit jamais à aucune conclusion fausse. Au contraire, il se lie nécessairement aux vérités déja connues, & en produit beaucoup de nouvelles. C'est de quoi l'on sera pleinement convaincu dans la suite. S'il est faux, il est donc parfaitement équivalent à quelque chose de vrai, & en remplit bien heureusement la place.

En attendant ce vrai, que je ne connois pas, je vais prendre ce Paradoxe pour une vérité démontrée dans l'art. précédent, me réservant toutefois, & je le dis avec la derniere sincérité, à le rejetter absolument, dès qu'on me fera voir que sans l'employer on peut faire un Sisteme lié de l'Infini en Géométrie, ou qu'il y a quelque autre idée à lui substituer, qui fasse le même effet sans avoir la même difficulté, ou une équivalente.

198. J'appelle *Finis indéterminables*, les termes finis de A

M.E.C.D. 2017

qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré : car comme ils ſont dans le paſſage que fait A^2 du Fini à l'Infini, ils ne peuvent jamais être connus ni déterminés, comme les termes qui ſont à l'origine de A ou de A^2.

199. Un terme quelconque de A^2 étant nn, nn exprime auſſi le quantieme, il eſt dans A, & ſa racine n le quantieme, il eſt dans A^2. Ainſi 16 eſt le 16me terme de A, & eſt le 4me de A^2. 100 eſt le 100me de A, & le 10me de A^2. Donc ſi nn eſt le 1er terme infini de A^2, & par conſéquent ſi n eſt le 1er terme fini indéterminable de A qui ſoit devenu infini dans A^2, nn n'eſt qu'à une diſtance finie de 1, premier terme de A^2; car ſa racine n, qui eſt finie, exprime ſon quantieme dans A^2, & ce quantieme n'eſt donc que fini. Donc le 1er terme infini de A^2 n'eſt qu'à une diſtance finie de 1 ſon 1er terme.

200. Mais n étant ici un Fini indéterminable, cette diſtance finie eſt indéterminable, & plus grande que toutes celles qui peuvent être déterminées ou connues.

201. Donc A^2 n'a qu'un nombre fini, mais indéterminable en grandeur, de termes finis.

202. Et puiſque A avoit un nombre infini de termes finis, il y a donc une infinité de ſes Finis qui deviennent Infinis dans A^2.

203. Donc A formée d'une infinité de Finis, & d'une infinité beaucoup plus grande d'Infinis (193) a ſes Finis de deux eſpeces, les uns Finis déterminables & connus, mais en nombre ſeulement fini indéterminable, les autres Finis indéterminables en nombre infini.

204. Il eſt aiſé de voir que la ſource des changemens qui arrivent à A^2 par rapport à A, eſt que A^2 vers ſon origine ne prend que des termes qui ſont dans A, mais qu'elle en prend peu, & en ſaute toujours de plus en plus. A^2 dès ſes deux 1ers termes, qui ſont 1 & 4, ſaute deux termes de A, entre 4 & 9 elle en ſaute quatre, entre 9 & 16 ſix, & toujours ainſi ſelon la Suite des Pairs; & enfin comme on vient de voir, elle en a ſauté un nombre infini, lorſqu'elle n'eſt encore

M.E.C.D. 2017

arrivée qu'à une distance finie de son origine, ou n'a eu qu'un cours fini.

205. Quoique A^2 fasse de plus grands pas que A, elle ne les fait que proportionnés à ceux de A, & comme ceux-ci, qui ne sont que la différence constante 1, sont d'une grande lenteur pour aller de 1 à ∞, A^2 dont on sait que les différences sont la Suite des nombres impairs 3, 5, 7, &c. ne peut pas aller de 1 à ∞^2 en faisant des pas infinis, c'est-à-dire, sauter de 1 à ∞^2 sans passer par ∞. Donc A^2 a des termes de l'ordre de ∞, & elle en doit avoir de cet ordre, lorsque A n'en a encore que de correspondans finis; ce sont les Finis indéterminables de A, qui devenus infinis dans A^2, sont les termes de l'ordre de ∞ par lesquels A^2 passe du Fini à ∞^2, & ils sont en nombre infini (202).

106. Mais il y a encore plus : la gradation lente de A^2, fondée sur celle de A, ne permet pas que tous les Infinis de A deviennent dans A^2 des Infinis de l'ordre de ∞^2. D'ailleurs, puisqu'il y a des Finis si grands, qu'étant quarrés ils sortent de leur ordre, & deviennent infinis, l'analogie demande qu'il y ait des Infinis si petits, qu'étant quarrés ils ne sortent point de leur ordre, & si cela peut être, cela est. Or $\infty^{\frac{1}{2}}$ est tel, qu'étant quarré il ne sort point de l'ordre potentiel de ∞ dont il étoit, donc ou $\infty^{\frac{1}{2}}$, s'il est dans A, & des Infinis d'une grandeur approchante, ou si $\infty^{\frac{1}{2}}$ n'est pas dans A, ces Infinis seuls d'une grandeur approchante seront tels, qu'étant quarrés ils ne sortiront point de l'ordre de ∞, & ils se joindront dans A^2 aux Finis indéterminables devenus de cet ordre, & moindres qu'eux.

207. En un mot, l'élévation au quarré doit agir de la même maniere sur les Finis & sur les Infinis de A. Elle éleve à l'ordre supérieur un nombre infini de Finis, & n'en laisse qu'un nombre fini indéterminable dans leur premier ordre. Donc elle éleve à ∞^2 un nombre infini des ∞, & en laisse un nombre fini indéterminable dans l'ordre des ∞, & cela

M.E.C.D. 2017

ajoute à l'art. précedent que le nombre des ∞ de A, qui ne ſortent point de cet ordre dans A^2, ne ſoit que fini.

208. Donc le nombre infini des Finis indéterminables de A, devenus de l'ordre de ∞ dans A^2, n'eſt augmenté que d'un nombre fini par le nombre des Infinis de A qui demeurent de l'ordre de ∞ dans A^2.

209. Donc le nombre infini des Finis de A étant beaucoup moindre que celui de ſes Infinis (193), & tous les Finis de A n'étant pas devenus infinis dans A^2, & le nombre infini de ceux qui le ſont devenus n'étant augmenté que d'un nombre fini (208), il ſuit que le nombre des termes de l'ordre de ∞^2 dans A^2 eſt plus grand, non ſeulement que le nombre des termes finis qui eſt fini, mais que le nombre des termes de l'ordre de ∞, qui eſt infini.

210. Donc A^2 eſt formée 1° de termes Finis en nombre fini, 2° de termes de l'ordre de ∞ en nombre infini, 3° de termes de l'ordre de ∞^2 en nombre infini beaucoup plus grand.

211. Donc la ſomme de A^2 eſt un Infini du 3me ordre, & tous les termes Finis y ſont inutiles (175).

212. Le nombre des ∞^2 de A^2 eſt moindre que le nombre des ∞ de A (206). D'un autre côté tous les Finis de A^2 ſont inutiles à ſa ſomme; ce qui fait le même effet par rapport à la ſomme, que ſi A^2 étoit compoſée d'un moindre nombre de termes que A. Enfin il faut faire encore une obſervation. Ce qui fait que la ſomme de A n'eſt qu'une partie de ∞^2, & non pas ∞^2 entier, c'eſt que tous ſes termes ne ſont pas chacun $= \infty$, mais tous inégaux depuis 1 juſqu'à ∞. D'ailleurs ils ſont les moins inégaux dans leur total qu'il ſe puiſſe (72). Donc s'ils étoient plus inégaux, comme ils le ſeroient effectivement dans une progreſſion géométrique correſpondante où ils ſeroient les plus inégaux qu'il ſe puiſſe (72), leur ſomme ſeroit moindre (67); & ſi dans une Suite quelconque compriſe, comme A, entre 1 & ∞, ils étoient plus inégaux que dans A, & que leur ſomme fût de l'ordre de ∞^2, il faudroit du moins que cette ſomme fût une moindre

M.E.C.D. 2017

partie de ∞^2 que n'eſt celle de A, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$, &c. puiſque celle de A en eſt $\frac{1}{2}$. Or le même raiſonnement ſubſiſte à l'égard de A^2 comparé à A. Les termes de A^2 étant viſiblement plus inégaux dans leur total que ceux de A, la ſomme de A^2 qui eſt de l'ordre de ∞ doit être une moindre partie de ∞^3, que celle de A n'eſt de ∞^2. Donc par les trois raiſons énoncées dans cet article, la ſomme de A étant $= \frac{\infty^2}{2}$ ou $\frac{1}{2}$ de ∞^2, la ſomme de A^2 ſera une moindre partie de ∞^3, c'eſt-à-dire, par ex. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c.

213. A^2 tend & arrive à l'égalité, car les termes de A y tendent & y arrivent, & par conſéquent auſſi ceux de A^2, qui en ſont les quarrés.

Conſidération de A³.

214. Soit maintenant A^3, ou A élevée au cube, qui eſt 1. 8. 27. 64, &c. ∞^3.

Puiſqu'il y a dans A des Finis indéterminables, & en nombre infini, qui par l'élévation au quarré deviennent Infinis, il eſt évident que non ſeulement ils ne ceſſeront pas de l'être par l'élévation au cube; mais que ſi on cube A, d'autres Finis indéterminables qui n'avoient pas été aſſez grands pour devenir infinis par l'élévation au quarré, le deviendront par l'élévation au cube. De même d'autres Finis indéterminables encore moindres qui n'étoient pas devenus infinis par l'élévation au cube, le deviendront par l'élévation au quarré-quarré, & toujours ainſi de ſuite. Donc ce ſera la propriété ou le caractere général des Finis indéterminables de devenir infinis par l'élévation à quelque puiſſance finie.

215. Dans A^3 les premiers Finis indéterminables qui par l'élévation au cube ſeront devenus infinis, ne ſeront que de l'ordre de ∞. Donc A^3 aura des termes finis à ſon origine, enſuite des ∞, & à ſon extrémité des ∞^3, & comme elle ne peut aller de ∞ à ∞^3 ſans paſſer par ∞^2, elle aura donc des termes des 4 ordres, des Finis, des ∞, des ∞^2, & des ∞^3.

216. Il eſt très-aiſé de voir que le nombre des Finis de A^3 ne ſera que fini, & moindre que celui des Finis de A^2,

M.E.C.D. 2017

mais toujours Fini indéterminable. Le nombre total des Infinis de A^3 sera donc plus grand que celui des Infinis de A^2 : mais il ne sera plus grand que de la quantité dont le nombre des Finis de A^3 surpasse le nombre des Finis de A^3 : or cette quantité ne peut être que finie, ces deux nombres étant finis ; donc le nombre total des Infinis de A^3 ne surpassera que d'une quantité finie celui des Infinis de A^2.

217. La différence finie du nombre total des Infinis de A^3 & de A^2 étant nulle par rapport à ces deux nombres infinis, & par conséquent ces deux nombres pouvant être pris pour égaux, d'un autre côté le nombre total des Infinis de A^3 étant composé d'Infinis de 3 ordres différens (215) au lieu que le nombre des Infinis de A^2 n'est composé que d'Infinis de 2 ordres, il suit que dans A^3 le nombre des Infinis de chaque ordre sera moindre que n'étoit le nombre des Infinis de chaque ordre dans A^2.

218. Donc le nombre des ∞ dans A^3 sera moindre que dans A^2, mais de plus il ne sera que fini. Car si A^2 qui éleve A à la puissance immédiatement supérieure, fait l'effet de changer en ∞ un nombre des Finis de A, tel que le nombre de ces Finis devenus ∞, est infini par rapport au nombre des Finis qui demeurent Finis, à plus forte raison A^3 qui fait de plus grands pas que A^2 doit-elle changer en ∞^2 une infinité des ∞ de A^2, & n'en laisser qu'un nombre fini dans l'ordre de ∞. Donc A^3 n'aura qu'un nombre fini de ∞, & un infini de ∞^2.

219. Le nombre infini des ∞^2 de A^3 sera encore augmenté par des ∞^2 de A^2 qui demeureront de l'ordre de ∞^2 dans A^3 : mais ils ne seront qu'en nombre fini par la même raison que les ∞ de A qui sont demeurés de l'ordre de ∞ dans A^2 n'ont été qu'en nombre fini (207).

220. De-là il suit aussi que le nombre des ∞^3 de A^3 est infini.

221. Donc A^3 est composée 1° de Finis en nombre fini. 2° De ∞ en nombre fini. 3° De ∞^2 en nombre infini. 4° De ∞^3 en nombre infini.

M.E.C.D. 2017

222. A qui a des termes de 2 ordres, a le nombre des termes de l'ordre du Fini beaucoup moindre que celui des termes de l'ordre de ∞ (193). Et par conſéquent le nombre des termes de ces différens ordres eſt croiſſant, à compter de l'origine de A. De même A^2 qui a des termes de 3 ordres, a le nombre des termes de ſes différens ordres croiſſant depuis l'origine (210). Donc pour conſerver l'analogie qui doit être entre A, A^2 & A^3, il faut que dans A^3, qui a des termes de 4 ordres, le nombre des termes de chaque ordre ſoit auſſi croiſſant ; c'eſt-à-dire, que le nombre des termes finis étant fini, celui des ∞ ſoit un Fini plus grand, & que celui des ∞^2 étant infini, celui des ∞^3 ſoit un Infini plus grand.

223. A^3 a une ſomme de l'ordre de ∞^4, à laquelle tous les Finis & tous les ∞ ſont inutiles. Ses ∞^2 qui y ſont utiles ſont en moindre nombre que les ∞^3 (222), & enfin les termes de A^3 ſont plus inégaux que ceux de A^2. Donc en ſuivant le raiſonnement de l'art. 212, la ſomme de A^3 ſera une moindre partie de ∞^4, que la ſomme de A^2 n'étoit de ∞^3.

224. A^3 tend & arrive à l'égalité auſſi-bien que A^2, & par la même raiſon (213).

225. On voit par tout ce qui a été dit, que quand on change A en A^2, il n'y a qu'un nombre fini des termes finis de A qui ne s'élevent point d'ordre, quoiqu'ils s'élevent de grandeur, & qui demeurent *immobiles* quant à l'ordre, & qu'il y a un nombre infini de ces mêmes termes finis qui ſont *mobiles*, ou qui s'élevent d'ordre. En même temps, ou dans le même changement de A en A^2, il n'y a qu'un nombre fini des ∞ de A qui demeurent immobiles, & tous les autres ∞ en nombre infini ſont mobiles. De même quand A^2 ſe change en A^3, du nombre infini des ∞ de A^2 ; car les Finis de A^2 n'étant qu'en nombre fini, ils ne peuvent donner lieu à cette comparaiſon qui demande un nombre infini de termes d'un même ordre, de ce nombre infini, dis-je, des ∞ de A^2, il n'y en a qu'un nombre fini d'immobiles, ou qui demeurent des ∞, & tous les autres en nombre infini

M.E.C.D. 2017

Infini deviennent des ∞^2, ou ſont mobiles, & pareillement du nombre infini des ∞^2 de A^2 il n'y en a qu'un nombre fini d'immobiles, & tous les autres ſont mobiles. Or il eſt à remarquer qu'un ordre étant compoſé d'une infinité de termes, les immobiles, qui ſont toujours en nombre fini, ſont toujours à l'origine de l'ordre, & les mobiles en nombre infini, toujours vers l'extrémité & juſqu'à l'extrémité.

Cela répond à une difficulté qu'on auroit lieu de faire dans le Siſteme commun de l'Infini, pourquoi le Fini élevé à quelque puiſſance finie que ce ſoit, demeure-t'il toujours dans ſon ordre, au lieu que l'Infini pareillement élevé, s'éleve toujours d'ordre? Car le Fini n'étant à l'égard de ∞ que ce qu'eſt ∞ à l'égard de ∞^2, il eſt contre cette analogie, que ∞, dès qu'il eſt quarré, s'éleve d'ordre, tandis que le Fini quarré demeure dans le ſien. La réponſe eſt, que le fait ſuppoſé n'eſt pas vrai, & que c'eſt parfaitement la même choſe pour le Fini & pour l'Infini. Dès que le Fini eſt à une certaine diſtance finie, mais indéterminable, de l'origine de ſon ordre, il s'éleve d'ordre étant quarré, & juſque là il ne s'en éleve point; de même ∞ étant quarré ne s'éleve point d'ordre, tant qu'il n'eſt qu'à une certaine diſtance finie indéterminable de l'origine de ſon ordre, & paſſé cela il s'éleve. Mais ce qui nous jette dans l'erreur ſur la comparaiſon du Fini & de l'Infini à cet égard, c'eſt que nous ne connoiſſons le Fini qu'à l'origine de ſon ordre, nous n'operons ſur lui qu'en le prenant à ſa naiſſance; & au contraire l'Infini à l'origine de ſon ordre nous eſt abſolument inconnu, & le peu de connoiſſance que nous en avons, roule ſur un Infini plein, pour ainſi dire, & qui a franchi un paſſage immenſe pour être devenu ce qu'il eſt. De là vient que nous ne connoiſſons que des Finis, qui élevés à une puiſſance finie, ne s'élevent point d'ordre, & des Infinis au contraire qui s'en élevent.

Conſidération de A^4.

226. Si l'on prend A^4, 1. 16. 81. 256, &c. ∞^4. Il eſt aiſé de voir par l'application de tout ce qui a été dit, 1°. que A^4 aura des Finis en nombre fini, des ∞ en nombre fini,

M.E.C.D. 2017

de ∞^2 en nombre fini, des ∞^3 en nombre infini, & des ∞^4 en nombre infini.

2°. Que le nombre des termes de ces cinq différens ordres ſera croiſſant depuis l'origine.

3°. Que A^4 aura une ſomme de l'ordre de ∞^5, à laquelle les Finis, les ∞, & les ∞^2 ſeront inutiles.

4°. Que le ∞^5 qui exprimera cette ſomme, ſera dans ſon ordre un moindre Infini que n'étoit dans le ſien le ∞^4 qui exprimoit la ſomme de A^3.

Conſidération de A^n *en général.*

227. En général n étant un Expoſant fini toujours croiſſant, dont la 1re valeur eſt 1, A^n ſera toujours telle qu'elle aura un nombre d'ordres $= n + 1$; le nombre des ordres, qui auront un nombre de termes infinis, toujours $= 2$, ce qui donnera le nombre des ordres où le nombre des termes ſera fini; le nombre des termes des différens ordres croiſſant depuis l'origine; le nombre des termes de chaque ordre toujours moindre, à meſure que n ſera plus grand; une ſomme de l'orde de ∞^{n+1} à laquelle les deux derniers ordres ſeuls ſeront utiles; & toujours un moindre ∞^{n+1} qui exprimera cette ſomme, ou, ce qui eſt le même, ∞^{n+1} diviſé par un plus grand nombre.

Conſidération de A^∞.

228. Si enfin l'expoſant $n = \infty$, on a $A^\infty . 1^\infty . 2^\infty . 3^\infty$, &c. ∞^∞. Suite qu'il faut conſidérer plus particulierement, parce qu'elle contient les puiſſances infinies de tous les nombres de A, & qu'il eſt important de connoître les rapports que ces nombres élevés à ∞ ont ſoit au Fini, ſoit entr'eux.

2^∞, 2d terme de A^∞, ſeroit le dernier terme de la progreſſion géométrique infinie, $2^1, 2^2, 2^3$, &c. 2^∞, que j'appelle P. Si l'on compare P à A^2, on a d'un côté $2^1 . 2^2 . 2^3 . 2^4 . 2^5 . 2^6$, &c. & de l'autre $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$, &c. & l'on voit que $2^1 > 1^2, 2^2, = 2^2, 2^3 < 3^2, 2^4 = 4^2, 2^5 > 5^2, 2^6 > 6^2$, &c. & que depuis $2^5 = 3^2$, tous les termes de P

M.E.C.D. 2017

ſont plus grands que les correſpondans de A^2, & fort croiſſans par rapport à eux. Donc ſi A^2 n'a qu'un nombre fini de termes finis, à plus forte raiſon P n'en a-t'elle qu'un nombre fini, & même elle n'en a qu'un nombre fini beaucoup moindre. Donc P après un nombre de termes fini, mais indéterminable, arrive à l'Infini. Donc 2 n'ayant qu'un expoſant x, fini indéterminable, eſt infini, ou 2^x eſt de l'ordre de ∞.

229. Il ſuit de la que non-ſeulement 2^∞, dernier terme de P, eſt plus grand que ∞^2, dernier terme de A^2; mais qu'il doit être d'un grand nombre d'ordres au-deſſus de ∞^2, puiſqu'après qu'on a eu dans P, 2^x, il reſte encore un nombre infini d'expoſans à donner à 2, avant qu'il ſoit 2^∞.

230. Pour le voir plus en détail, & plus ſûrement, je compare P aux A^n qui ſuivent A^2, & pour plus de facilité du calcul, aux ſeules A^n où n eſt un nombre pair.

Le 16me terme de A^4, qui eſt 16^4, eſt égal au 16me de P qui eſt 2^{16} : car $16^4 = 2^{4\times4} = 2^{16}$, & après cela le 17me terme de P eſt plus grand que le 17me de A^4, & toujours ainſi de ſuite. Donc $2^\infty > \infty^4$.

De même en comparant P à A^6, on a pour le 1er terme de P, plus grand que le correſpondant de A^6, après lequel tous les termes de P ſont plus grands, le 30me terme de P qui eſt de $2^{30} > 30^6$ ſon correſpondant : car tirant de part & d'autre le $\sqrt[6]{}$, on a $2^5 > 30^1$. Donc $2^\infty > \infty^6$.

Si l'on prend A^8, le 44me terme de P qui eſt 2^{44} eſt plus grand que 44^8 : car en tirant de part & d'autre la $\sqrt[4]{}$, on a $2^{11} = 2048$, plus grand que $44^2 = 1936$. Donc $2^\infty > \infty^8$.

Il réſulte de ces quatre comparaiſons que le 1er terme de P, plus grand que le correſpondant de A^n, & après lequel P croît toujours plus que A^n, eſt le 5me ſi P eſt comparée à A^2 le 17me ſi P eſt comparée à A^4, le 30me ſi P eſt comparée à A^6, le 44me ſi P eſt comparée à A^8.

M.E.C.D. 2017

Or en conſidérant ces 4 nombres, 5, 17, 30, 44, on les trouve très-réguliers, puiſque leurs différences ſont la progreſſion arithmétique naturelle 12, 13, 14, & cette extreme régularité pourroit ſuffire pour perſuader qu'elle ſe ſoutiendra toujours, mais de plus on le trouvera par le calcul pour les A^n ſuivantes. Donc la progreſſion arithmétique des différences, qui a commencé par 12, 13, 14, continue par 15, 16, 17, &c. & les termes dont ces nombres ſont les différences, & qui étoient 5, 17, 30, 44, continueront par être 59, 75, 92, &c. c'eſt-à-dire, que P à ſon 59me terme commencera à croître toujours au-deſſus de A^{10}, à ſon 75me au-deſſus de A^{12}, à ſon 92me au-deſſus de A^{14}, &c. Donc $2^{\infty} > \infty^{14}$, &c.

231. A^n où n eſt pair, étant exprimée en général, il eſt aiſé de trouver en général le quantieme terme ſera dans P celui où elle commencera à croître au-deſſus de A^n.

La Suite de ces quantiemes eſt, 5, 17, 30, 44, 59, &c. & celle de leurs différences, 12, 13, 14, 15, &c. progreſſion arithmétique, dont la différence eſt 1, le 1er terme 12, le nombre des termes correſpondant à une A^n quelconque, $\frac{n-2}{2}$. Car le nombre des termes de la ſuite des quantiemes pour A^n eſt toujours $\frac{n}{2}$; ſi $A^n = A^2$, $\frac{2}{2} = 1$, & 5, premier terme de la Suite des quantiemes eſt celui qui déſigne à quel terme P croît pour toujours au-deſſus de A^2. Si $A^n = A^4$, $\frac{n}{2} = 2$, & 17, ſecond terme de la Suite des quantiemes, déſigne le terme où P croît au-deſſus de A^4, &c. Donc $\frac{n}{2}$ eſt toujours le nombre des termes de la Suite des quantiemes, dont le dernier eſt celui dont on a beſoin pour l'A^n propoſée. Donc le nombre des termes de la Suite des

M.E.C.D. 2017

différences des quantiemes eſt $\frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$. Donc la ſomme d'un nombre quelconque de termes de cette Suite des différences eſt $\frac{42n+nn-88}{8}$.

Cette ſomme eſt égale au dernier terme correſpondant de la ſuite des quantiemes, moins 5, premier terme de cette Suite. Donc $\frac{42n+nn-88}{8} + 5 = \frac{42n+nn-48}{8}$ eſt le dernier terme de la Suite des quantiemes, ou celui que l'on cherche pour l'A^n propoſée. Ainſi ſi $n = 10$, on a $\frac{472}{8} = 59$; c'eſt-à-dire, que ſi on compare P à A^{10}, P commence pour toujours à ſurpaſſer A^{10} à ſon 59me terme.

232. par cette expreſſion $\frac{42n+nn-48}{8}$, on voit que tant que n eſt Fini déterminable, P commence à ſurpaſſer A^n à un terme qui n'eſt qu'à une diſtance finie déterminable de l'origine de P, & que par conſéquent P ſurpaſſe A^n durant un cours infini. Donc $2^\infty > \infty^n$ & même plus élevé de pluſieurs ordres, quelque grand nombre fini déterminable que ſoit n.

233. Mais lorſque n eſt devenu un Fini indéterminable x qui par l'élévation au quarré eſt infini; c'eſt-à-dire, quand on compare P à A^x, $\frac{42n+nn-48}{8}$ devient $\frac{42x+xx-48}{8} = \frac{xx}{8} = \frac{\infty}{8}$, xx étant alors un Infini, donc P commence à ſurpaſſer A^x à un terme dont le quantieme eſt exprimé par $\frac{\infty}{8}$. Or ce terme eſt bien éloigné d'être le ∞^{me} ou dernier. Donc 2^∞ eſt beaucoup au-deſſus de ∞^x, dernier terme de A^x. quelque grand nombre fini indéterminable que ſoit x.

234. Donc enfin 2^∞ ne ſauroit être égal qu'à ∞^∞; c'eſt-à-dire, à ∞ élevé à quelque puiſſance infinie, moindre

M.E.C.D. 2017

que ∞, mais dont le rapport à ∞ eſt abſolument inconnu.

Que 2^{∞} eſt d'une infinité d'ordres au deſſus de ∞.

235. Donc $2^{\infty} = \infty^{\infty}$ eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de ∞.

136. *P* a donc des termes d'un nombre infini d'ordres, mais non pas $= \infty$. Et en effet il eſt impoſſible qu'elle ait ce nombre de différens ordres $= \infty$, puiſque le nombre de ſes termes n'eſt que $= \infty$, & qu'elle ne change pas d'ordre à chaque terme : car elle en a d'abord un nombre fini indéterminable dans le ſeul ordre du Fini. Enſuite elle en a dans l'ordre de ∞, de ∞^2 &c. mais toujours un moindre nombre, ce qui eſt viſible par la grandeur des pas qu'elle fait.

237. Quand une Suite a pluſieurs termes dans un même ordre, j'appelle cela y *ſéjourner* ; ſi elle a des termes conſécutifs dans des ordres conſécutifs, elle *paſſe* par ces ordres ; ſi elle a des termes conſécutifs dans des ordres non conſécutifs, elle *ſaute* quelques ordres.

Il s'agit de ſavoir ſi *P* ayant ſéjourné à ſon origine, paſſe ou ſaute à ſon extrémité, & pour le déterminer il faut obſerver qu'une Suite croiſſante ayant une gradation réguliére, ſi elle doit ſéjourner pluſieurs fois & paſſer, elle ſéjourne avant que de paſſer, & ſéjourne toujours moins ; & que ſi elle doit paſſer & ſauter, elle paſſe avant que de ſauter ; & que ſi elle doit après cela faire pluſieurs ſauts, elle les fait toujours plus grands, ou croiſſants. Donc ſi *P* arrivé à ſes deux derniers termes ne fait que paſſer, elle n'a point ſauté précédemment. Or ſon dernier terme étant 2^{∞}, le pénultieme qui en eſt $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{2^{\infty}}{2} = 2^{\infty - 1}$, où il faut remarquer que $- 1$ ne diſparoît point dans cet expoſant devant ∞ : car on auroit $\frac{2^{\infty}}{2} = 2^{\infty}$, ce qui eſt abſurde. Donc l'expoſant $\infty - 1$ ſignifie que le terme qui en eſt affecté, eſt de l'ordre immédiatement inférieur à celui qui eſt affecté de ∞. Donc $2^{\infty - 1}$ & 2^{∞} ſont de deux ordres conſécutifs, & *P* à ſon extrémité ne fait que paſſer ſans ſauter jamais.

M.E.C.D. 2017

238. Donc 2^{∞} eſt ſeul de ſon ordre dans P, & il fait ſeul la ſomme de P.

239. Il eſt clair que tout ce qui a été dit de P, ou de $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 2^1.2^2$, &c. 2^{∞} s'applique de ſoi-même à la $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 3^1.3^2.3^3$, &c. 3^{∞} ; mais qu'à cauſe que cette 2de progreſſion eſt beaucoup plus croiſſante que la 1re, 3^{∞} ſera beaucoup au deſſus de 2^{∞}.

Pour le voir plus préciſément, ſoit la $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1^{\infty}.2^{\infty}.4^{\infty}$, puiſque 2^{∞} eſt d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de 1 (235), 4^{∞} eſt de ce même nombre d'ordres au-deſſus de 2^{∞}. Donc 3^{∞} qui partage en deux parties, quoiqu'inégales, l'intervalle qui eſt entre 2^{∞} & 4^{∞}, ne peut être que d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de 2^{∞}, & d'un autre nombre infini moindre d'ordres au-deſſous de 4^{∞}.

240. Donc $3^{\infty} \pm 2^{\infty} = 3^{\infty}$, & $4^{\infty} \pm 3^{\infty} = 4^{\infty}$.

Que 3^{∞} eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de 2^{∞}, pareillement 4^{∞} au-deſſus de 2^{∞}, &c.

241. On prouvera aiſément la même choſe pour tous les autres nombres par le moyen de la progreſſion double, 2, 4, 8, 16, &c. élevée à ∞ : car tous les autres nombres, tels que 3, 5, 6, 7, &c. élevés à ∞, ne pourront que ſe placer dans ſes intervalles infinis & égaux. Mais il s'y placera toujours un plus grand nombre de ces nombres intermédiaires, & comme ce nombre croiſſant ne ſera que fini, tant que les termes de la progreſſion double qu'on affectera de l'expoſant ∞ ne ſeront que finis en eux-mêmes, on aura toujours, quelque nombre fini déterminable que ſoit n, $\overline{n+1}^{\infty}$ élevé d'un nombre infini d'ordres au-deſſus de n^{∞}, mais toujours d'un moindre nombre d'ordres à meſure que n ſera plus grand. Cela vient viſiblement de ce que le rapport géométrique des nombres naturels n eſt toujours décroiſſant, & par conſéquent auſſi celui de leurs puiſſances quelconques.

242. Si entre deux nombres finis conſécutifs de la Suite naturelle on introduit un nombre moyen quelconque, & qu'on les éleve tous trois à ∞, ce moyen ſera d'une infinité d'ordres au-deſſus de l'un des extremes, & d'une autre infinité au-deſſous de l'autre, quelque peu diſtant qu'il ſoit de

M.E.C.D. 2017

l'un ou de l'autre. Ainſi ſi entre 1 & 2 on introduit $1 + \frac{1}{100}$, $\overline{\overline{1 + \frac{1}{100}}}^{\infty}$ ſera d'une infinité d'ordres au-deſſus de $1^{\infty} = 1$, & d'une autre infinité au-deſſous de 2^{∞}. Car $\overline{\overline{1 + \frac{1}{100}}}^{\infty} = \frac{\overline{\overline{101}}^{\infty}}{\overline{\overline{100}}^{\infty}}$, qui eſt à $1^{\infty} = 1 = \frac{\overline{\overline{100}}^{\infty}}{\overline{\overline{100}}^{\infty}}$ :: 101. 100.

Or $n + 1$ eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de n^{∞} (241). A plus forte raiſon l'autre partie de la propoſition eſt-elle vraie.

Pour faire que le nombre moyen élevé à ∞ fût du même ordre que n^{∞} ou $\overline{\overline{n + 1}}^{\infty}$, il faudroit qu'il eût été pris infiniment proche de l'un ou de l'autre, ce qu'il eſt impoſſible dans le Fini.

243. Voilà tout ce qui étoit néceſſaire pour être en état de raiſonner ſur la Suite A^{∞}, qui eſt $1^{\infty}, 2^{\infty}, 3^{\infty}$, &c. ∞^{∞}.

Elle ſaute donc de ſon 1er terme au 2^d^ une infinité d'ordres, du 2^d^ au 3me une autre infinité moindre, & toujours ainſi tant que n, nombre naturel quelconque eſt Fini (239, 240 & 241). Mais comme elle a ſauté un nombre infini d'ordres, que par conſéquent elle ne contient point, que le nombre total des ordres, tant de ceux qu'elle contient que de ceux qu'elle ne contient point, eſt $= \infty$, & qu'elle a un nombre de termes $= \infty$, il faut néceſſairement qu'elle vienne à ſéjourner dans des ordres, & y faſſe autant de ſéjours & auſſi longs qu'il eſt beſoin, pour avoir, malgré l'infinité d'ordres ſautés, un nombre de termes $= \infty$. D'un autre côté, ayant commencé par ſauter, elle ne peut ſéjourner ſans avoir paſſé (237). Donc elle ſaute, paſſe, & ſéjourne, fait des ſauts toujours décroiſſans, paſſe par moins d'ordres qu'il n'y en a où elle ſéjourne, & enfin fait des ſéjours toujours croiſſans.

244. Il faut qu'à ſon extrémité elle faſſe ou une infinité de ſéjours finis, ou un nombre fini de Finis, & un dernier Infini : car elle n'en peut faire une infinité d'Infinis, puiſque par-là le nombre de ſes termes ſeroit de l'ordre de ∞^2. Mais

je

M.E.C.D. 2017

je dis qu'elle en fait une infinité de Finis, car dans les A^n où n eſt fini, le nombre des termes de chaque ordre étant toujours moindre à meſure que n eſt plus grand (227), & par conſéquent le nombre des termes du dernier ordre toujours moindre, & ce nombre ayant commencé par être infini, il faut qu'enfin il devienne fini dans A^∞, ou, ce qui eſt le même, que le dernier ſéjour de A^∞ ne ſoit que fini, ce qui ne l'empêche pas d'être plus grand que tous les précédens (227).

245. Donc la ſomme de A^∞ eſt ſon dernier terme ∞^∞ multiplié par quelque nombre fini inconnu, ou $x\,\infty^\infty$.

246. Il eſt aiſé de voir en quoi A^∞ convient avec les A^n où n étoit fini, ou en différe, & pourquoi.

Les A^n ayant toujours réduit le nombre des termes finis de leur origine à être moindre, A^∞ le réduit à n'être que 1, terme inébranlable.

A^∞ tend & arrive à l'égalité auſſi-bien que les A^n & par la même raiſon.

Mais il étoit impoſſible que A^∞ eût un nombre d'ordres $=\infty+1$, puiſqu'elle n'en peut avoir qu'un nombre $=\infty$, & qu'elle n'en a effectivement qu'un nombre beaucoup moindre à cauſe des ordres ſautés à ſon origine; de-là naiſſent ſes différences avec les A^n.

Elle ſaute, paſſe, & ſéjourne, au lieu que les A^n ne font que ſéjourner.

Mais dès qu'elle ſéjourne, elle doit reprendre ſon analogie avec les A^n, & faire des ſéjours croiſſans, & elle n'en doit faire un dernier que fini, parce que les A^n font leur dernier ſéjour infini décroiſſant.

Cela fait que le dernier ordre ſeul de A^∞ eſt utile à ſa ſomme, au lieu que les deux derniers des A^n ſont utiles à la leur.

M.E.C.D. 2017

Les ſommes des A^n ayant toujours été décroiſſantes dans l'Infini immédiatement ſupérieur à leur dernier terme, la ſomme de A^∞ n'eſt que ſon dernier terme infini infiniment multiplié.

247. De-là on doit conjecturer qu'il y a eu entre les A^n où n étoit Fini déterminable, & A^∞, quelque Suite A^x, x étant Fini indéterminable, qui n'a eu qu'un nombre d'ordres égal à ſon expoſant, qui a paſſé d'abord par les ordres, & enſuite a ſéjourné, & ſéjourné infiniment dans ſon dernier ordre ſeul, & dont par conſéquent la ſomme a été ſon dernier terme infiniment multiplié, qu'immédiatement après elle eſt venue une Suite qui n'a fait qu'un ſaut d'un ſeul ordre, enſuite a paſſé, &c. & dont la ſomme a été ſon dernier terme multiplié par un moindre nombre, ce qui enfin a amené par degrés A^∞.

Conſidération de $A^{\frac{1}{2}}$.

248. Après avoir examiné la Suite A, élevée à la puiſſance quelconque n, & en avoir tiré toutes les connoiſſances que nous avons pû, voyons maintenant la même A dont on tire la $\sqrt[n]{}$ quelconque, ou $A^{\frac{1}{n}}$, qui ſera $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{1}{4}}$, &c. $A^{\frac{1}{\infty}}$, ſelon les différentes valeurs ſucceſſives de n.

Il eſt clair d'abord en général que l'extraction de la $\sqrt[n]{}$ étant préciſément le contraire de l'élevation à la puiſſance n, on doit trouver dans A, devenue $A^{\frac{1}{n}}$, le contraire de ce qu'on a trouvé dans A devenue A^n. Donc tout ce qui en paſſant de A dans A^n étoit élevé, eſt abaiſſé en paſſant de A dans $A^{\frac{1}{n}}$.

249. Soit $A^{\frac{1}{2}}$; qui eſt $1^{\frac{1}{2}} = 1.\ 2^{\frac{1}{2}}.\ 3^{\frac{1}{2}}.\ 4^{\frac{1}{2}} = 2.\ 5^{\frac{1}{2}}\ 6^{\frac{1}{2}}\ 7^{\frac{1}{2}}\ 8^{\frac{1}{2}}\ 9^{\frac{1}{2}} = 3$, &c. $\infty^{\frac{1}{2}}$.

Il n'y a dans A aucun nombre fini déterminable, qui ne ſoit la $\sqrt[2]{}$ de quelque nombre fini déterminable de A, or $A^{\frac{1}{2}}$

M.E.C.D. 2017

contient le $\sqrt[2]{}$ de tous les nombres de A, donc elle contient tous les Finis déterminables de A. Mais de plus entre deux nombres consécutifs de A, tels que 1 & 2, 2 & 3, &c. $A^{\frac{1}{2}}$ introduit de nouveaux nombres qui n'étoient point dans A. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ a plus de nombres finis déterminables que A.

250. $A^{\frac{1}{2}}$ introduit deux nombres nouveaux entre 1 & 2, 4 entre 2 & 3, 6 entre 3 & 4, & toujours ainsi selon la suite des Pairs, d'où il suit qu'outre les Finis déterminables de A, $A^{\frac{1}{2}}$ prend autant de termes nouveaux que A^2 en sautoit dans A (204), & par conséquent comme A^2 sautoit dans A un nombre de termes infini par rapport au nombre des termes qu'elle y prenoit, $A^{\frac{1}{2}}$ prend un nombre de termes finis nouveaux qui est infini par rapport au nombre des Finis déterminables de A qu'elle prend. Et comme le nombre des Finis déterminables de A n'est que fini, le nombre des Finis déterminables de $A^{\frac{1}{2}}$ est infini.

251. Si $A^{\frac{1}{2}}$ continuoit toujours ainsi, c'est-à-dire, si elle prenoit tous les termes des A finis & infinis, & qu'elle introduisît entr'eux des termes nouveaux en nombre toujours croissant, le nombre total de ses termes ne pourroit être qu'infiniment plus grand que celui des termes de A. Mais $A^{\frac{1}{2}}$ se termine par $\infty^{\frac{1}{2}}$ & par conséquent ne prend aucun terme de A plus grand que $\infty^{\frac{1}{2}}$, ou qu'un Infini fort approchant, si $\infty^{\frac{1}{2}}$ n'est pas dans A. $A^{\frac{1}{2}}$ prend donc tous les termes de A depuis 1 jusqu'à $\infty^{\frac{1}{2}}$, en introduisant toujours entr'eux des termes nouveaux. Et comme le nombre des termes nouveaux introduits entre deux termes consécutifs de A est toujours croissant selon la Suite des Pairs pendant le cours infini de $A^{\frac{1}{2}}$, il suit que le nombre de ces termes introduits entre les deux derniers termes que $A^{\frac{1}{2}}$ prend dans A

M.E.C.D. 2017

eſt infini. Donc $\infty^{\frac{1}{2}}$ étant néceſſairement précédé dans A d'un autre Infini moindre, & $A^{\frac{1}{2}}$ les prenant tous deux, elle introduit entr'eux un nombre infini d'Infinis. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ ſe termine par un nombre infini d'Infinis.

Cette démonſtration demande ſeulement qne dans $A, \infty^{\frac{1}{2}}$ ſoit précédé d'un Infini; mais comme il eſt viſible qu'il l'eſt de beaucoup d'autres, & que la Suite des Pairs ſe termine par plus d'un Infini, le nombre infini des Infinis de $A^{\frac{1}{2}}$ en eſt d'autant plus grand.

252. Le nombre des Finis déterminables de $A^{\frac{1}{2}}$ par où elle commence eſt donc infini (250), & le nombre des Infinis par où elle ſe termine infini auſſi. Mais tous les Finis indéterminables de A qui ſont en nombre infini demeurent Finis dans $A^{\frac{1}{2}}$, puiſque l'extraction de leur $\sqrt[2]{}$ ne peut pas les rendre infinis, & de plus $A^{\frac{1}{2}}$ ne peut introduire entr'eux qu'un nombre infini de termes nouveaux. Donc voilà le nombre infini des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ beaucoup augmenté.

253. De plus, puiſqu'il y a dans A des Infinis ſi petits, que l'élevation à la puiſſance 2 ne les éleve pas d'ordre dans A^2 (206), il faut que par la raiſon contraire l'extraction de la $\sqrt[2]{}$ les abaiſſe d'ordre dans $A^{\frac{1}{2}}$, ou les faſſe devenir Finis. Mais comme ils ne ſont qu'en nombre fini (207), ils n'augmenteront que finiment l'infinité des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$.

254. La préſomption eſt donc grande que le nombre infini des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ ſera plus grand que le nombre infini de ſes Infinis, ou, ce qui eſt le même, que le nombre des termes des deux différens ordres dont $A^{\frac{1}{2}}$ eſt formée, ſera décroiſſant de l'origine vers l'extrémité. Mais on le voit ſûrement par l'analogie d'oppoſition qui doit être entre $A^{\frac{1}{2}}$ & A

M.E.C.D. 2017

ou A^2, dans lesquelles le nombre des termes des différens ordres est croissant (193 & 210.)

255. Puisque $A^{\frac{1}{2}}$ est comprise entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, deux extremes infiniment moins éloignés que 1 & ∞, extremes de A, & que $A^{\frac{x}{2}}$ introduit toujours des termes nouveaux entre deux consécutifs de A qu'elle prend, & toujours un nombre croissant de ces termes, les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ pris dans leur total ont de moindres rapports, ou sont moins inégaux que ceux de A, & de plus c'est vers l'extrémité de $A^{\frac{1}{2}}$ qu'ils ont de moindres rapports. Donc $A^{\frac{1}{2}}$ tend & arrive à l'égalité. On le prouvera aussi par le même raisonnement qui l'a prouvé de A^2 & de A^n en général.

256. Puisque le nombre des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$ est infini, ils sont tous utiles à sa somme, & tous les termes $A^{\frac{1}{2}}$, excepté le 1er, étant plus grands que 1, la somme est plus grande que celle de la Suite infinie des Unités qui est $= \infty$, & elle doit être de quelque ordre au-dessus de ∞, puisqu'il y entre une infinité d'Infinis. D'un autre coté la somme de $A^{\frac{1}{2}}$ est moindre que celle de A qui est de l'ordre de ∞^2, & moindre de quelque ordre, puisqu'elle n'a pas d'Infinis plus élevés que $\infty^{\frac{1}{2}}$. Donc elle est de quelque ordre moyen entre ∞ & ∞^2, c'est-à-dire, qu'elle est quelque Infini radical qui est de l'ordre de ∞^2 incomplet, comme $\infty^{\frac{3}{2}}$, ou $\infty^{\frac{5}{4}}$, &c.

257. Comme dans $A\,\infty^{\frac{1}{2}}$ est précédé par $\infty^{\frac{1}{2}} - 1$, & qu'entre ces deux Infinis $A^{\frac{1}{2}}$ en a introduit une infinité de nouveaux qui ne peuvent être que de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, il y a dans $A^{\frac{1}{2}}$ un nombre $\propto$ de termes de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, mais non pas égaux à $\infty^{\frac{1}{2}}$, d'où il suit que leur somme est

M.E.C.D. 2017

$\propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$ diviſé par quelque nombre fini d'autant plus grand que l'inégalité des Infinis de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$ ſera plus grande, car c'eſt cette inégalité qui empêche leur ſomme d'être $= \propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$. Après cela les Infinis de $A^{\frac{1}{2}}$ qui précédent $\infty^{\frac{1}{2}} - 1$ n'étant pas en nombre infiniment plus grand que ceux de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, & étant même d'ordres inférieurs, & plus inégaux entr'eux, ils ne peuvent élever d'ordre la ſomme des $\infty^{\frac{1}{2}}$, mais ſeulement l'augmenter. Les Finis en nombre infini ne peuvent que l'augmenter encore d'un terme infini d'autant moindre que leur inégalité, plus grande que celle des Infinis, eſt plus grande. Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt fixée à être de l'ordre de $\propto \times \infty^{\frac{1}{2}}$. Et comme $\propto$ eſt de l'ordre de ∞, elle eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

258. Selon le raiſonnement de l'art. 212, mais renverſé, tous les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ étant utiles à ſa ſomme (256), & d'ailleurs étant tous moins inégaux que ceux de A (255) la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ doit être une plus grande partie de ſon Tout ou de $\infty^{\frac{3}{2}}$ que la ſomme de A n'eſt du ſien, ou de ∞^{2}. Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt, par ex. $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$, ou $\frac{3\infty^{\frac{3}{2}}}{4}$, &c.

Conſidération de $A^{\frac{1}{3}}$, *& en général de* $A^{\frac{1}{n}}$, *& de* $A^{\frac{1}{\infty}}$.

259. $A^{\frac{1}{3}}$ eſt $1^{\frac{1}{3}} = 1, 2^{\frac{1}{3}}. 3^{\frac{1}{3}}. 4^{\frac{1}{3}}. 5^{\frac{1}{3}}. 6^{\frac{1}{3}}. 7^{\frac{1}{3}}. 8^{\frac{1}{3}} = 2$, &c. $\infty^{\frac{1}{3}}$. Et il eſt aiſé de voir que $A^{\frac{1}{3}}$ eſt compriſe entre deux extremes moins éloignés que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, & que par conſéquent tous les termes moyens ſont plus petits que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle prend dans A tous les termes qui étoient entre 1 & $\infty^{\frac{1}{3}}$; & par conſéquent un moindre nombre de termes que n'en prenoit $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle introduit entre deux

M.E.C.D. 2017

termes conſécutifs de A un plus grand nombre de termes nouveaux que n'en introduiſoit $A^{\frac{1}{2}}$, & un nombre toujours croiſſant, qu'elle a un nombre infini de Finis plus grand que celui des Finis de $A^{\frac{1}{2}}$, & un nombre infini d'Infinis moindre, que ſes termes pris dans le total ſont moins inégaux que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, qu'elle tend & arrive à l'égalité, que ſa ſomme eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{4}{3}}$, moindre que $\infty^{\frac{3}{2}}$, & une plus grande partie de $\infty^{\frac{4}{3}}$, que la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ n'étoit de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

260. Il en ira toujours de même de $A^{\frac{1}{4}}$, $A^{\frac{1}{5}}$, & en général de $A^{\frac{1}{n}}$, deſorte que la derniére $A^{\frac{1}{n}}$ n'aura plus que des nombres finis, ou égaux, ou très-approchans d'être égaux, & une ſomme de l'ordre de ∞, & même égale à ce ∞, puiſqu'elle n'en ſera plus du tout une partie. En effet la derniére $A^{\frac{1}{n}}$ eſt $A^{\frac{1}{\infty}}$ qui eſt $1^{\frac{1}{\infty}} = 1.2^{\frac{1}{\infty}}.3^{\frac{1}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & il eſt aiſé de prouver en détail qu'elle a toutes les propriétés annoncées.

Quelque nombre que ſoit n, fini ou infini, $2^n > n$. Donc $2 > n^{\frac{1}{n}}$. Donc tout nombre n par l'extraction de ſa $\sqrt[n]{}$ tombe au-deſſous de 2, ou entre 2 & 1; car il ne peut tomber plus bas que 1 (8). Donc n étant fini, il reſte encore après la $\sqrt[n]{}$ une infinité de $\sqrt{}$ à tirer juſqu'à la $\sqrt[\infty]{}$. Donc tout nombre fini a une infinité de $\sqrt{}$ entre 2 & 1, & comme chacune l'abaiſſe toujours ou l'approche toujours de 1, il en eſt donc infiniment approché par la $\sqrt[\infty]{}$, & vient à ſe confondre avec 1. Donc n étant fini, $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$. Donc tous les nombres finis de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ſont les plus petits qu'il ſe puiſſe & égaux.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE E. VERGARA

M.E.C.D. 2017

261. Cette démonſtration n'eſt que trop forte, car il n'y a point de nombre n, excepté 2, qui attende ſa $\sqrt[n]{}$ pour tomber au-deſſous de 2. 3, par exemple, y tombe avant ſa $\sqrt[3]{}$ & dès ſa $\sqrt[2]{}$, 4 dès ſa $\sqrt[3]{}$, &c. 100 dès ſa $\sqrt[7]{}$ très-éloignée la $\sqrt[100]{}$, 1000 dès ſa $\sqrt[9]{}$, &c.

En général ſi un nombre eſt une puiſſance de 2, comme $512 = 2^9$, il eſt viſible que ſa $\sqrt[9]{}$ étant 2, toutes ſes autres $\sqrt{}$ ſont au-deſſous de 2. & ſi le nombre n'eſt pas une puiſſance de 2, il ne peut avoir de ſes $\sqrt{}$ au-deſſus de 2 qu'autant que la plus grande puiſſance de 2 qui eſt au-deſſous de lui a de dimenſions. Ainſi parce que la plus grande puiſſance de 2 qui ſoit au-deſſous de 1000 eſt 512, 1000 ne peut avoir que ſes $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, &c. juſqu'à $\sqrt[9]{}$ au-deſſus de 2, & toutes les autres ſont au-deſſous, & il eſt bien éloigné d'attendre pour cela ſa $\sqrt[1009]{}$. Et comme du nombre infini des puiſſances de 2 il n'y en a qu'un nombre fini de finies (228), il n'y a point de nombre fini, quelque grand qu'il ſoit, qui ait au-deſſous de ſoi une puiſſance de 2 ſi grande qu'elle ne ſoit plus finie, & par conſéquent il ne peut avoir qu'un nombre fini de ſes $\sqrt{}$ au-deſſus de 2, & il en a un nombre infini entre 2 & 1.

262. Puiſque n étant fini ou infini, $2 > n^{\frac{1}{n}}$ (260), on a $2 > \infty^{\frac{1}{\infty}}$, dernier terme de $A^{\frac{1}{\infty}}$, comme on l'a déja trouvé dans l'art. 167. Donc tous les termes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ſont finis, puiſque ſon plus grand terme l'eſt, auſſi-bien que le premier & le plus petit.

263. $n^{\frac{1}{\infty}}$ étant $= 1$ tant que n eſt fini (260), cela n'eſt plus vrai quand $n = \infty$. Car on a déja vûque $\infty^{\frac{1}{\infty}} > 1$

M.E.C.D. 2017

> 1 (166). On peut conſidérer de plus, que quoique la $\sqrt[\infty]{}$ d'un grand nombre fini le confonde avec 1, auſſi-bien que la $\sqrt[\infty]{}$ d'un petit nombre le confond avec 1, la $\sqrt[\infty]{}$ du grand nombre ne le confond pas ſi abſolument & ſi pleinement avec 1. Ainſi quoique $100^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $100^{\frac{1}{\infty}}$ n'eſt pas ſi abſolument 1 que $2^{\frac{1}{\infty}}$. Car ſi cela étoit, on auroit abſolument $100^{\frac{1}{\infty}} = 2^{\frac{1}{\infty}}$, ou $100 = 2$, ce qui ſeroit abſurde. $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$ n'eſt donc pas une égalité abſolue, mais ſeulement telle que la différence de $n^{\frac{1}{\infty}}$ à 1 n'eſt pas à compter, tant que n eſt fini. Mais quand $n = \infty$, cette différence ſera à compter, parce que ſi la $\sqrt[\infty]{}$ d'un plus grand nombre le confond toujours moins abſolument avec 1, la $\sqrt[\infty]{}$ de ∞ ne l'y confondra plus du tout. Cela ſera encore beaucoup plus éclairci dans la ſuite. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ tombe entre 1 & 2 ſans ſe confondre avec 1, & il y a quelque différence finie dont $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ ſurpaſſe 1.

264. Donc les deux extremes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ étant 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ < 2 & > 1, les termes moyens qui ſont en nombre infini ne peuvent être qu'infiniment approchans d'être tous égaux chacun à ſon antécédent ou à ſon conſéquent, & les plus égaux de tous ſont vers l'extrémité ſelon la propriété de toutes les $A^{\frac{1}{\infty}}$ (255 & 259), deſorte que $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & ſon antécédent ſeront abſolument égaux; ce qui confirme que les termes qui ſont à l'origine de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ou les $\sqrt[\infty]{}$ des nombres finis

M.E.C.D. 2017

ne ſont pas abſolument = 1, car elles ſeroient abſolument égales entr'elles.

265. $A^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une Suite croiſſante comme toutes les $A^{\frac{1}{n}}$, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}} > 1$: mais c'eſt une ſuite auſſi peu croiſſante qu'il ſoit poſſible, & en effet toutes les $A^{\frac{1}{n}}$ précédentes l'étoient toujours de moins en moins.

266. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ n'eſt pas dans A, mais ſeulement $2 > \infty^{\frac{1}{\infty}}$, & par conſéquent $A^{\frac{1}{\infty}}$ introduit ſon infinité de termes moyens entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, dont le ſecond n'eſt pas dans A, mais ſeulement 2, nombre approchant. Mais quand $A^{\frac{1}{\infty}}$ auroit introduit ſon infinité de termes entre 1 & 2, ce ſeroit toujours la même choſe, quant à la nature de la Suite, à ſa maniere d'être croiſſante, & à l'égalité de ſes termes. Donc il n'eſt pas néceſſaire en général, que les $A^{\frac{1}{n}}$ n'introduiſent des termes moyens qu'entre des termes qui ſoient préciſément dans A, il ſuffit qu'elles les introduiſent entre des termes approchans. Cela n'eſt néceſſaire dans les $A^{\frac{1}{n}}$ que quand n eſt fini, & de plus vers l'origine de ces Suites; de-ſorte que, comme nous l'avons dit, $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. derniers termes de $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, &c. pourroient n'être pas dans A, mais ſeulement des termes approchans, ce qui ne change rien à la nature de ces Suites.

267. Tous les termes de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne ſont preſque que des Unités, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le plus grand de tous, & infiniment diſtant de 1 dans $A^{\frac{1}{\infty}}$, eſt moindre que 2, & ne ſurpaſſe 1

M.E.C.D. 2017

qued'une différence finie. Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne peut ſurpaſſer celle de la Suite infinie des Unités que d'une différence finie. Or la ſomme de la Suite des Unités eſt $= \infty$, donc celle de $A^{\frac{1}{\infty}}$ eſt ∞ plus un nombre fini x, c'eſt-à-dire ∞ entier, & ſans diviſeur.

268. Donc en diſpoſant ſelon leur ordre les ſommes de toutes les $A^{\frac{1}{n}}$, elles ſont compriſes pour l'ordre entre $\infty^{\frac{1}{2}}$ & ∞; d'où il ſuit qu'elles vont toujours en s'abaiſſant, & tendant à l'égalité, & y arrivent.

269. Puiſque n étant un nombre fini, $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & que $n^0 = 1$ (50), $n^{\frac{1}{\infty}}$ eſt $= n^0$, c'eſt-à-dire, qu'élever un nombre à la moindre puiſſance poſſible, ou en tirer la plus grande $\surd$ poſſible, c'eſt également le rendre le moindre nombre poſſible ou 1.

270. Quand on voit d'un même coup d'œil toutes les A^n qui en partant de A, où le nombre des Finis eſt infini, deviennent ſucceſſivement & par une infinité de degrés A^∞, où il ne reſte que 1 de nombre fini, il eſt impoſſible de ne pas conclurre que le changement des Finis en Infinis a commencé dès A^2, ſur-tout parce qu'il eſt très-certain que le nombre des Finis a diminué dès A^2. De même, & par la raiſon contraire, quand on voit toutes les $A^{\frac{1}{n}}$ qui partant de A, où le nombre des Infinis eſt infini, deviennent enfin $A^{\frac{1}{\infty}}$, où il n'y a plus aucun Infini, mais ſeulement des Unités, il eſt impoſſible de ne pas conclurre que le changement des Infinis en Finis a commencé dès $A^{\frac{1}{2}}$: car ſi tous les Finis & Infinis de A étoient fixes dans leur état, & immuables, le changement de A en A^∞ ou en $A^{\frac{1}{\infty}}$ ne ſeroit plus ſucceſſif

M.E.C.D. 2017

& gradué, comme on voit très-certainement qu'il l'eſt. C'eſt de là que naît toute la Théorie ſi paradoxe des *Finis indéterminables*, qui eſt auſſi celle des *Infinis indéterminables*. Les uns & les autres ſont des nombres de A, placés dans le paſſage incompréhenſible du Fini à l'Infini, & qui ſont, pour ainſi dire, les nuances d'un ordre à l'autre. Ils exiſtent, quoiqu'on ne puiſſe ni les déterminer, ni les comprendre, & il eſt important de connoître qu'ils exiſtent, parce que c'eſt de leurs changemens que dépendent ſouvent les différens ordres des ſommes des Suites.

Conſidération de $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{\frac{3}{4}}$, *&c. & de* $A^{\frac{n-1}{n}}$ *en général.*

271. Soit A élevée à $A^{\frac{2}{3}}$, ce qui donne $A^{\frac{2}{3}}$, qui eſt $1^{\frac{2}{3}} = 1 . 2^{\frac{2}{3}} . 3^{\frac{2}{3}}$, &c. $8^{\frac{2}{3}} = 4$, &c. $\infty^{\frac{2}{3}}$.

Ou ſoit $A^{\frac{3}{4}}$, qui eſt $1^{\frac{3}{4}} = 1 . 2^{\frac{3}{4}} . 3^{\frac{3}{4}}$, &c. $16^{\frac{3}{4}} = 8$, &c. $\infty^{\frac{3}{4}}$.

Et en général $A^{\frac{n-1}{n}}$. On peut conſidérer ces Suites, ou comme partant de $A^{\frac{1}{2}}$, la premiere & la moindre de toutes, déja connue, auquel cas n aura toutes les valeurs poſſibles depuis 2, ou comme étant les $A^{\frac{1}{n}}$ déja connues, que l'on éleve à la puiſſance $n - 1$, auquel cas la plus petite valeur de n ſera 3, car ſi n étoit $= 2$, la puiſſance $n - 1 = 1$ ne donneroit rien de nouveau, & l'on aura pour la premiere de ces Suites $A^{\frac{2}{3}}$ qui ſera $A^{\frac{1}{3}}$ élevée au quarré, pour la ſeconde $A^{\frac{3}{4}}$, qui ſera $A^{\frac{1}{4}}$ élevée au cube, &c. la 1re maniere de les conſidérer ſera la plus commode.

Les $A^{\frac{n-1}{n}}$ étant ſucceſſivement $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, $A^{\frac{3}{4}}$, $A^{\frac{4}{5}}$, &c. où l'on voit que l'expoſant $\frac{n-1}{n}$ approche toujours d'autant plus d'être $= 1$ que n eſt plus grand, la derniere $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſera $A^1 = A$, & il eſt bon de remarquer qu'alors dans

M.E.C.D. 2017

l'expoſant $\frac{n-1}{n} = \frac{\infty - 1}{\infty}$ le — 1 du numérateur diſparoît devant ∞, quoiqu'il ſoit dans un expoſant, ainſi que dans l'art. 237, & qu'apparemment il n'y a point de Regle abſolument générale de Calcul pour négliger 1 ou ne le pas négliger devant l'Infini, mais qu'il faut ſe régler ſur la nature & les circonſtances du ſujet dont il s'agit.

272. L'expoſant des $A^{\frac{n-1}{n}}$ croiſſant donc toujours depuis $\frac{1}{2}$ juſqu'à 1, les $A^{\frac{n-1}{n}}$ croiſſent toujours auſſi, c'eſt-à-dire, ont toujours chacune de plus grands termes que les correſpondans dans la précédente, & en effet leurs derniers termes ſont $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{2}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, &c. ∞. Infinis toujours croiſſans. Les $A^{\frac{n-1}{n}}$ vont donc toujours s'élevant depuis $A^{\frac{1}{2}}$ juſqu'à A.

273. $A^{\frac{1}{2}}$ a un nombre infini de termes finis & un infini d'infinis, mais moindre (254). A a un nombre infini de finis, & un infini d'infinis beaucoup plus grand. Donc toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ moyennes ont un nombre infini de termes finis, & un infini d'infinis, mais le nombre des finis eſt toujours décroiſſant à meſure qu'elles s'élevent de $A^{\frac{1}{2}}$ vers A, & le nombre des infinis eſt croiſſant.

274. Puiſque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ont un nombre infini d'Infinis, leur ſomme eſt de l'ordre de $\infty \times \infty^{\frac{n-1}{n}} = \infty^{\frac{n-1}{n}+1} = \infty^{\frac{2n-1}{n}}$. Et en effet la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$, où $n = 2$, eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{4-1}{2}} = \infty^{\frac{3}{2}}$ (257), & la ſomme de A, où $n = \infty$, eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{2\infty}{\infty}} = \infty^2$. Donc

M.E.C.D. 2017

la ſomme de $A^{\frac{2}{3}}$, où $n=3$, eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{3}}$, celle de $A^{\frac{3}{4}}$ de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{4}}$, &c.

275. La ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ étant la moindre de toutes, & celle de A la plus grande, toutes les ſommes des $A^{\frac{n-1}{n}}$ moyennes ſont compriſes entre l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$ & celui de $\infty^{2}=\infty^{\frac{4}{2}}$. Donc elles n'ont toutes à partager entr'elles qu'un intervalle $=\infty^{\frac{1}{2}}$.

276. Comme elles ſont en nombre infini, elles ne peuvent partager cet intervalle en un nombre infini de parties infinies, mais ſeulement en un nombre infini de finies, ou en un nombre fini d'infinies, & un infini de finies. Or les premieres $A^{\frac{n-1}{n}}$, telles que $A^{\frac{1}{2}}$ & $A^{\frac{2}{3}}$, ou $A^{\frac{2}{3}}$ & $A^{\frac{3}{4}}$, &c. ont des ſommes $\infty^{\frac{3}{2}}$ & $\infty^{\frac{5}{3}}$, ou $\infty^{\frac{5}{3}}$ & $\infty^{\frac{7}{4}}$ (274) &c. qui different de quelques ordres radicaux d'Infini, & par conſéquent infiniment. Donc il y a depuis $A^{\frac{1}{2}}$ un nombre ſeulement fini, mais indéterminable, de $A^{\frac{n-1}{n}}$, dont les ſommes s'élevent les unes au deſſus des autres de quelques ordres radicaux, & enſuite il y en a un nombre infini du même ordre qui eſt celui de ∞^{2}.

277. Puiſque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ont un nombre infini de Finis, tous leurs termes ſont utiles à leurs ſommes, & elles doivent être cenſées avoir toutes, à l'égard de ces ſommes, un nombre de termes égal. D'ailleurs la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt une plus grande partie de l'Infini qui déſigne ſon ordre, que la ſomme de A n'eſt de l'Infini qui déſigne le ſien, & cela parce que les termes de $A^{\frac{1}{2}}$ pris dans leur total, ſont moins inégaux entr'eux que ceux de A (258). Donc les $A^{\frac{n-1}{n}}$ qui ſuivent

M.E.C.D. 2017

$A^{\frac{1}{2}}$, & tendent à devenir A, ayant toujours leurs termes plus approchans d'être auſſi inégaux que ceux de A, & par conſéquent toujours plus inégaux entr'eux que ceux de $A^{\frac{1}{2}}$, leurs ſommes ſeront toujours de moindres parties de l'Infini qui deſignera leur ordre.

278. Et comme la ſomme de A eſt $\frac{1}{2}$ de ſon Infini, & que la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt une partie du ſien plus grande que $\frac{1}{2}$, les ſommes des $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſeront des parties de leur Infini, toujours décroiſſantes depuis un nombre plus grand que $\frac{1}{2}$, depuis $\frac{2}{3}$, par exemple, ou $\frac{3}{4}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{2}$. Et comme elles ſont en nombre infini, il n'eſt pas poſſible qu'elles ne viennent à être égales, non ſeulement quant à l'ordre (276), mais encore quant à la grandeur, même après qu'elles n'auront été encore qu'en nombre fini.

On tireroit toutes les mêmes concluſions, en conſidérant les $A^{\frac{1}{n}}$ déja connues, comme élevées à $n - 1$.

279. Il eſt aiſé de voir que les $A^{\frac{n}{n-1}}$, qui ſont $A^{\frac{2}{1}}$, $= A^2$, $A^{\frac{3}{2}}$, ou $1^{\frac{3}{2}} = 1$, $2^{\frac{3}{2}}$, $3^{\frac{3}{2}}$, $4^{\frac{3}{2}} = 8$, &c. $\infty^{\frac{3}{2}}$. $A^{\frac{4}{3}}$, ou $1^{\frac{4}{3}} = 1$, $2^{\frac{4}{3}}$, $3^{\frac{4}{3}}$, &c. $8^{\frac{4}{3}} = 16$, &c. $\infty^{\frac{4}{3}}$. $A^{\frac{5}{4}}$, &c. ſont le contraire de $A^{\frac{n-1}{n}}$. *Conſidération des* $A^{\frac{1}{n}}$.

Au lieu que les $A^{\frac{n-1}{n}}$ s'élevent depuis $A^{\frac{1}{2}}$ qui en eſt la 1re juſqu'à A, les $A^{\frac{n}{n-1}}$ deſcendent depuis A^2 qui en eſt la 1re juſqu'à A.

La 1re $A^{\frac{n-1}{n}}$ a un nombre infini de termes Finis, & un infini d'Infinis moindre, & dans les $A^{\frac{n-1}{n}}$ ſuivantes le nombre des Finis eſt toujours décroiſſant, & celui des Infinis

M.E.C.D. 2017

croiſſant, juſqu'à ce qu'enfin dans A le nombre infini des Finis ſoit beaucoup moindre que celui des Infinis. Tout au contraire dans la 1re des $A^{\frac{n}{n-1}}$ le nombre des Finis n'eſt que fini, & celui des Infinis infini, & dans les $A^{\frac{n}{n-1}}$ ſuivantes, le nombre des Finis eſt croiſſant, & celui des Infinis décroiſſant, juſqu'à ce qu'enfin dans A le nombre des Finis ſoit infini auſſi-bien que celui des Infinis, quoique beaucoup moindre.

Au contraire des $A^{\frac{n-1}{n}}$ les $A^{\frac{n}{n-1}}$ décroiſſent, auſſi-bien que leurs expoſans qui décroiſſent depuis 2 juſqu'à 1, c'eſt-à-dire, que les termes d'une $A^{\frac{n}{n-1}}$ ſont toujours moindres que leurs correſpondans dans la précédente.

280. Puiſque la ſomme de A^2 eſt de l'ordre de ∞^3, & celle de A de l'ordre de ∞^2, les ſommes de toutes les $A^{\frac{n}{n-1}}$ moyennes ſont compriſes dans l'ordre potentiel qui eſt entre ∞^3 & ∞^2, & par conſéquent elles ſont de l'ordre de ∞^3 incomplet, & ſe terminent à celui de ∞^2 complet. Ainſi puiſque toutes les $A^{\frac{n}{n-1}}$ ont une infinité d'Infinis, la ſomme de $A^{\frac{3}{2}}$ eſt de l'ordre de $\infty \times \infty^{\frac{3}{2}} = \infty^{\frac{5}{2}}$, qui eſt ∞^3 incomplet; celle de $A^{\frac{4}{3}}$ eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{7}{3}}$, &c. Mais comme ces ſommes ſont en nombre infini, qu'elles n'ont à partager entr'elles que l'intervalle $= \infty$ qui eſt entre ∞^3 & ∞^2, & que les premieres different entr'elles de quelques ordres radicaux d'Infini, il s'enſuit qu'il n'y a que ces premieres en nombre fini indéterminable qui aient de pareilles différences, & que toutes les autres en nombre infini ſont de l'ordre de ∞^2 complet, & par conſéquent qu'elles ont tendu & ſont arrivées à l'égalité d'ordre. En effet $\frac{n}{n-1}$ tend autant à l'égalité, & y tend par la même raiſon que $\frac{n-1}{n}$.

281.

M.E.C.D. 2017

281. tant que les $A^{\frac{n}{n-1}}$ n'ont qu'un nombre fini de Finis comme la 1re A^2, ce qui doit être dans un nombre fini indéterminable de $A^{\frac{n}{n-1}}$, ou, ce qui revient au même, tant que n eſt fini déterminable, tous leurs Finis ſont inutiles aux ſommes: mais après cela elles viennent à avoir une infinité de Finis, & par conſéquent elles doivent être cenſées, à l'égard des ſommes, avoir un plus grand nombre de termes. De plus elles partent de A^2 qui a des termes plus inégaux entr'eux que ceux de A, & elles tendent à devenir A, d'où il ſuit que les termes de chacune ſont toujours d'autant moins inégaux qu'elles approchent plus de A. Donc leurs ſommes ſont toujours une plus grande partie de l'Infini qui déſigne leur ordre. Et comme la ſomme de A^2 eſt une partie de ∞^3 moindre. que $\frac{1}{2}$ (212), les ſommes des $A^{\frac{n}{n-1}}$ ſont toujours de plus grandes parties de leur Infini, & ſont croiſſantes à cet égard depuis $\frac{1}{3}$, par exemple, ou $\frac{1}{4}$, &c. juſqu'à $\frac{1}{2}$ qui eſt le coëfficient de l'Infini de la ſomme de A. Donc toutes les $A^{\frac{n}{n-1}}$ auſſi-bien que les $A^{\frac{n-1}{n}}$ tendent & arrivent à des ſommes égales tant en grandeur qu'en ordre.

Conſidération de A^a.

282. Si l'on éleve chaque terme de A à la puiſſance de *ſon nom*, ce qui donnera la Suite $1^1 = 1. 2^2 = 4. 3^3 = 27. 4^4 = 256$, &c. $\overset{\infty}{\infty}$, que j'appelle $\overset{a}{A}$; il eſt clair d'abord que ſi A^2 n'a qu'un nombre fini de termes Finis, $\overset{a}{A}$ en a encore beaucoup moins, & un nombre infini d'Infinis.

283. Puiſque $\overset{a}{A}$ ſe termine par $\overset{\infty}{\infty}$, elle a une infinité de différens ordres d'Infini: mais elle n'en a pas un nombre $= \infty$, puiſqu'elle ſéjourne d'abord dans l'ordre du Fini. Enſuite elle peut faire de moindres ſéjours dans les premiers ordres d'Infini: mais ne fît-elle qu'y paſſer, il faut abſolument qu'elle vienne à ſauter des ordres vers ſa fin. Donc ſon

M.E.C.D. 2017

dernier terme ∞^{∞} fait seul sa somme. On voit par-là que $\dot{A}$ est le contraire de A^{∞} trouvée dans les art. 228, 243, 244, &c. & comprise entre les mêmes extremes.

Considération de $A^{\frac{1}{a}}$.

284. Si de chaque terme de A on tire la $\surd$ de son nom, ce qui donne $A^{\frac{1}{a}}$, $1^{\frac{1}{1}} = 1$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, on voit que tous ses termes sont finis, puisque les deux extremes le sont. De plus on a toujours $2 > n^{\frac{1}{n}}$, quelque nombre que soit n (260). Donc tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$, qui ne sont que des $n^{\frac{1}{n}}$, sont moindres que 2, & il est clair qu'ils sont tous plus grands que 1.

Il faut observer maintenant que n ayant successivement tous les nombres naturels pour valeur, $2^{n} > n$ est de plus d'autant plus grand par rapport à n, que n est plus grand, sous cette condition que n ait de plus grandes valeurs que 1 & que 2. Car quand $n = 1$, 2^{1} est double de 1, & quand $n = 2$, 2^{2} est encore double de 2, ce qui fait le même rapport de 2^{n} à n pour ces deux valeurs de n: mais passé cela, le rapport de 2^{n} à n est toujours d'autant plus grand que n est plus grand, ce qu'il est aisé de voir. Donc le rapport de 2 à $n^{\frac{1}{n}}$, quoique différent de celui de 2^{n} à n, est aussi croissant sous cette même condition, & par conséquent dans $A^{\frac{1}{a}}$, passé les deux 1ers termes, où $n = 1$, & $n = 2$, tous les termes depuis le 3me, qui est $3^{\frac{1}{3}}$, sont toujours plus petits par rapport à 2, ou absolument plus petits, & décroissans: & comme c'est à ce 3me terme qu'il se fait un changement, ils ont dû jusques-là être ou égaux ou croissans, or il est visible qu'ils ne sont pas égaux, donc ils sont croissans. Donc $A^{\frac{1}{a}}$ est croissante jusqu'à son 3me terme, & de-là toujours décroissante.

M.E.C.D. 2017

On le peut voir en détail. Il eſt clair d'abord que $2^{\frac{1}{2}} > 1$.

$3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$. Car $3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}}$, & $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}}$, or élevant de part & d'autre à la puiſſance 6, on a $3^2 > 2^3$, puiſque $3^2 = 9$. & $2^3 = 8$.

Mais $4^{\frac{1}{4}} < 3^{\frac{1}{3}}$. Car $4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{12}}$, & $3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}}$, or élevant de part & d'autre à la puiſſance 12, on a $4^3 = 64 < 81 = 3^4$. On le peut voir tout d'un coup, car $4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$.

De même $5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{4}{20}} < 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{5}{20}}$, puiſque $5^4 = 625$, & $4^5 = 1024$.

$6^{\frac{1}{6}} = 6^{\frac{5}{30}} < 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{6}{30}}$, puiſque $6^5 = 7776$, & $5^6 = 15625$, & ainſi des autres.

285. Tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$ étant décroiſſans depuis $3^{\frac{1}{3}}$, il ſuit que non-ſeulement $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt plus petit que 2, mais qu'il l'eſt plus que $3^{\frac{1}{3}} < 2$, comme on l'a déja trouvé (169). De-là ſuit $3^{\frac{2}{3}} > \infty^{\frac{2}{\infty}} . 3^{\frac{3}{3}} = 3 > \infty^{\frac{3}{\infty}}$, & en general $3^{\frac{n}{3}} > \infty^{\frac{n}{\infty}}$. Donc $3^{\frac{\infty}{3}} > \infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$.

286. Puiſqu'entre $3^{\frac{1}{3}} < 2$, & $\infty^{\frac{1}{\infty}} < 2$ & > 1, il y a une infinité de termes toujours décroiſſans, il faut qu'ils ſoient tous preſqu'égaux, & ne ſoient guere que des Unités, ce que l'on verra plus diſtinctement dans la ſuite.

287. Non-ſeulement les termes de $A^{\frac{1}{a}}$ ſont preſque égaux, mais ils approchent toujours de plus en plus d'être entierement égaux. Car deux termes conſécutifs de $A^{\frac{1}{a}}$ étant $n^{\frac{1}{n}}$ & $\overline{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$, ils approchent d'autant plus de l'égalité

M.E.C.D. 2017

& par eux-mêmes, & par leurs expoſans, que n eſt plus grand. Donc enfin $A^{\frac{1}{a}}$ arrive à deux termes entierement égaux.

288. Tous les termes de $A^{\frac{1}{a}}$, horſmis le 1er, ſont plus grands que 1, ce qui eſt viſible d'abord dans ſes trois 1ers termes où elle eſt croiſſante, & enſuite dans tous les autres où elle eſt décroiſſante, puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le moindre de tous, eſt > 1. Son 2^d^ & ſon 3me terme ont des différences finies à 1, & tous les autres du cours décroiſſant ont chacun une différence finie à 1, puiſque telle eſt la différence de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, le moindre de tous, à 1 (263). Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt plus grande d'une différence infinie que celle de la ſomme des Unités, qui eſt $= \infty$. D'un autre côté chaque terme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt moindre que 2. Donc la ſomme de $A^{\frac{1}{a}}$ eſt un Infini moyen entre ∞ & 2∞.

Il eſt aiſé de voir en quoi $A^{\frac{1}{a}}$, compriſes entre les mêmes extremes que $A^{\frac{1}{\infty}}$, lui eſt contraire, comme A^{a} l'étoit à A^{∞} (283).

Conſidération de $A^{\frac{a}{n}}$.

289. Si de A^{a} on tire la $\sqrt[n]{\ }$, n ayant ſucceſſivement toutes les valeurs, ce qui donnera $A^{\frac{a}{1}} = A^{a}$, $A^{\frac{a}{2}}$ qui eſt $1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{2}} = 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{4}{2}} = 16 \cdot 5^{\frac{5}{2}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{2}} \cdot A^{\frac{a}{3}}$, $1^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{4}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{3}} \cdot A^{\frac{a}{4}}$, $1^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{4}{4}} = 4 \cdot 5^{\frac{5}{4}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{4}}$, &c. on voit d'abord que chacune de ces Suites $A^{\frac{a}{n}}$ a des termes toujours croiſſans, mais que d'une Suite à l'autre ils ſont toujours moindres, puiſque n eſt toujours croiſſant.

M.E.C.D. 2017

290. Elles ont toutes vers leur origine un terme égal au terme correſpondant de la Suite naturelle A ; par exemple, $A^{\frac{a}{2}}$ a ſon 2^d^ terme $2^{\frac{2}{2}}$ égal au 2^d^ de A, $A^{\frac{a}{3}}$ a ſon 3me terme égal au 3me de A, &c. ce qui arrive néceſſairement, lorſque dans l'expoſant $\frac{a}{n}$, $a = n$. Et comme dans $A^{\frac{a}{2}}$ on a $a = n$ dès le 2^d^ terme, dans $A^{\frac{a}{3}}$ au 3me, & toujours ainſi de ſuite, le terme de $A^{\frac{a}{n}}$ égal au correſpondant de A, avance toujours d'une place à meſure que n croît d'une unité, & le nombre qui exprime la quantieme eſt cette place, eſt n.

D'un autre côté il eſt viſible que dans les $A^{\frac{a}{n}}$ tous les termes, horſmis le 1er, qui précedent le terme égal au correſpondant dans A, ſont moindres que leurs correſpondans dans A, & tous les termes qui le ſuivent, plus grands. Donc plus n eſt petit, plus les $A^{\frac{a}{n}}$ ont un grand nombre de termes plus grands que leurs correſpondans dans A : & au contraire plus n eſt grand, plus les $A^{\frac{a}{n}}$ ont un grand nombre de termes plus petits que leurs correſpondans dans A.

291. Il faut encore ajouter que plus n eſt petit, moins les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus petits que leurs correſpondans dans A ſont petits, & plus les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus grands que leurs correſpondans dans A ſont grands. Au contraire plus n eſt grand, plus les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus petits que leurs correſpondans dans A ſont petits; & moins les termes de $A^{\frac{a}{n}}$ plus grands que leurs correſpondans dans A ſont grands. Il eſt aiſé de le voir.

292. De tout cela il ſuit que quand $n = \infty$, ce qui

M.E.C.D. 2017

donne $A^{\frac{a}{\infty}}$, $1^{\frac{1}{\infty}} = 1.2^{\frac{2}{\infty}}.3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, le terme égal à un terme correſpondant dans A, qui a toujours avancé d'une place à meſure que n croiſſoit (290), eſt enfin venu à la derniere place dans $A^{\frac{a}{\infty}}$, que ce terme eſt ∞, & que tous les termes de $A^{\frac{a}{\infty}}$ moyens entre 1 & ∞ ſont moindres que leurs correſpondans dans A, & que de plus n étant alors le plus grand qu'il puiſſe être, tous ces termes ſont les plus petits qu'il ſoit poſſible par rapport à ces correſpondans ſelon les conditions des $A^{\frac{a}{n}}$ (291). En effet ces termes moyens commençant par être $2^{\frac{2}{\infty}} = 4^{\frac{1}{\infty}} = 1$ $3^{\frac{3}{\infty}} = 27^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $4^{\frac{4}{\infty}} = 256^{\frac{1}{\infty}} = 1$, & toujours ainſi de ſuite tant que les nombres n ſont finis (260), on voit que tous ces termes de $A^{\frac{a}{\infty}}$ deſcendent le plus bas que des nombres puiſſent tomber par des extractions de $\surd$.

293. $A^{\frac{a}{n}}$ n'a donc que des termes preſque abſolument égaux à 1, tant que n eſt fini, c'eſt-à-dire, qu'elle en a un nombre fini indéterminable, ou qu'elle ſéjourne dans le ſeul nombre 1 pendant une étendue finie indéterminable de ſon cours. Mais il eſt viſible qu'elle ſéjourne beaucoup moins dans 1 que ne faiſoit $A^{\frac{1}{\infty}}$; après cela elle ſéjourne dans 2, mais moins que dans 1; dans 3, moins que dans 2, &c. Il faut donc que la Suite vers ſon extrémité faſſe des ſauts, non d'ordres, mais de nombres conſécutifs de A, pour réparer les longs ſéjours qu'elle a faits dans d'autres nombres conſécutifs; & avant que de ſauter, il faut qu'elle paſſe. De-là il ſuit qu'elle fera ſes ſéjours ou ſes paſſages dans le Fini, & ſes ſauts dans l'Infini, & qu'elle aura beaucoup plus de termes Finis que d'Infinis. Or je dis qu'elle n'en aura qu'un nombre fini d'Infinis,

M.E.C.D. 2017

car il faut que tous ſes termes ſoient les plus petits qu'il ſoit poſſible par rapport aux correſpondans dans A (291), or de cette maniere cela eſt ainſi.

En effet $A^{\frac{a}{\infty}}$ doit être le contraire de $\overset{a}{A} = A^{\frac{a}{1}}$ Or dans $\overset{a}{A}$ le nombre des Finis eſt fini, & celui des Infinis infini (282).

294. La 1re des $A^{\frac{a}{n}}$, qui eſt $A^{\frac{a}{2}}$, a ſon 4me terme $4^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{256}$ égal au 4me terme de A^2, qui eſt 16, & enſuite tous ſes termes beaucoup plus grands que leurs correſpondans dans A, ce qu'il eſt aiſé de voir. Donc ſi A^2 n'a qu'un nombre fini de termes Finis, à plus forte raiſon $A^{\frac{a}{2}}$ n'en a-t-elle auſſi qu'un nombre fini. Donc le nombre de ſes Infinis eſt infini.

295. Puiſque dans $A^{\frac{a}{2}}$ le nombre des Finis n'eſt que fini, & le nombre des Infinis infini, & que dans $A^{\frac{a}{\infty}}$ la derniére des $A^{\frac{a}{n}}$, c'eſt le contraire (293), dans toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ moyennes, à meſure que n croît, le nombre des Finis augmente, & celui des Infinis diminue.

296. Mais comme d'une $A^{\frac{a}{n}}$ à la ſuivante, le nombre des Finis n'augmente qu'à proportion de l'augmentation de n, qui ne croît que d'une unité, le nombre des Finis n'augmente que finiment, tant que n eſt Fini déterminable, & par conſéquent dans toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ où n eſt un Fini déterminable, le nombre des Finis n'eſt que fini, mais croiſſant.

297. $\infty^{\frac{\infty}{2}}$, dernier terme de $A^{\frac{a}{2}}$, étant preſque de l'ordre de ∞^{∞}, & $A^{\frac{a}{2}}$ ſéjournant dans l'ordre du Fini, où

M.E.C.D. 2017

elle a beaucoup plus de termes qu'il ne manque d'ordres $\infty^{\frac{\infty}{2}}$ pour être égal à ∞^{∞}, il faut néceſſairement que $A^{\frac{a}{2}}$ ſaute quelques ordres d'Infini, & comme elle a commencé par ſéjourner dans ſon premier ordre, il faut qu'enſuite elle paſſe par les ordres, & n'en ſaute qu'à ſon extrémité. Donc $\infty^{\frac{\infty}{2}}$ eſt ſeul de ſon ordre, & il fait ſeul la ſomme.

298. Il en va de même de toutes les $A^{\frac{a}{n}}$ ſuivantes, tant que n eſt fini.

299. Au contraire dans $A^{\frac{a}{\infty}}$ tous les termes ſont utiles à la ſomme. Elle n'eſt que de l'ordre de ∞, puiſqu'il n'y a qu'un nombre fini d'Infinis de cet ordre, mais elle eſt plus grande que ∞, ſomme des Unités, & plus grande d'une différence infinie.

Conſidération des $A^{\frac{n}{a}}$.

300. Si on éleve $A^{\frac{1}{a}}$ à la puiſſance n qui aura ſucceſſivement toutes ſes valeurs, ce qui donne $A^{\frac{1}{a}}$, $A^{\frac{2}{a}}$, $1^{\frac{2}{1}}$. $2^{\frac{2}{2}} = 2.3^{\frac{2}{3}}$, $4^{\frac{2}{4}} = 2.5^{\frac{2}{5}}$, &c. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$. $A^{\frac{3}{a}}$, $1^{\frac{3}{1}}$. $2^{\frac{3}{2}}$. $3^{\frac{3}{3}} = 3.4^{\frac{3}{4}}$, &c. $\infty^{\frac{3}{\infty}}$. $A^{\frac{4}{a}}$, $1^{\frac{4}{1}}$. $2^{\frac{4}{2}} = 4.3^{\frac{4}{3}}.4^{\frac{4}{4}} = 4$, &c. $\infty^{\frac{4}{\infty}}$, &c. on voit d'abord que ces Suites $A^{\frac{n}{a}}$ ont comme les $A^{\frac{a}{n}}$ un terme égal au terme correſpondant dans A, lorſque $n = a$, & que ce terme avance toujours d'une place à meſure que n croît d'une unité, mais qu'au contraire des $A^{\frac{a}{n}}$, tous les termes des $A^{\frac{n}{a}}$ juſqu'à ce terme égal ſont plus grands que leurs correſpondans dans A, & tous enſuite plus petits. La raiſon en eſt claire.

301. Donc dans la derniere des $A^{\frac{n}{a}}$, qui eſt $A^{\frac{\infty}{a}}$, le terme égal eſt à la derniere place, & tous les termes qui le précedent,

M.E.C.D. 2017

précédent, hormis 1, le 1er de la Suite, ſont plus grands que leurs correſpondans dans A. En effet $A^{\frac{\infty}{a}}$ eſt $1^{\frac{\infty}{1}} = 1$. $2^{\frac{\infty}{2}}$, $3^{\frac{\infty}{3}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, ou $2^{\frac{\infty}{2}}$ eſt non-ſeulement plus grand que 2, ſon correſpondant dans A, mais infiniment plus grand, de même $3^{\frac{\infty}{3}}$ infiniment plus grand que 3, &c.

302. Comme les $A^{\frac{n}{a}}$ ne ſont que des puiſſances de $A^{\frac{1}{a}}$, & que dans $A^{\frac{1}{a}}$ le 3me terme eſt le plus grand de tous, & qu'elles ſont croiſſantes juſqu'à lui, & de-là décroiſſantes (284), il ſuit qu'il en va de même dans toutes les $A^{\frac{n}{a}}$. Donc tant que le 3me terme de $A^{\frac{n}{a}}$ eſt fini, elles n'ont que des termes finis.

303. Le troiſieme terme de toutes les $A^{\frac{n}{a}}$ eſt $3^{\frac{n}{3}}$, qui dans $A^{\frac{1}{a}}$ eſt $3^{\frac{1}{3}}$, & dans $A^{\frac{\infty}{a}}$, $3^{\frac{\infty}{3}}$, c'eſt-à-dire, que $3^{\frac{1}{3}}$ eſt élevé ſucceſſivement dans les $A^{\frac{n}{a}}$ à toutes les puiſſances depuis la puiſſance 1 juſqu'à la puiſſance ∞. Or tant que n eſt fini, $3^{\frac{n}{3}}$ eſt une puiſſance finie de $3^{\frac{1}{3}}$, ou un nombre fini; donc tant que n eſt fini, les $A^{\frac{n}{a}}$ n'ont que des termes finis.

304. Donc les ſommes des $A^{\frac{n}{a}}$ ne ſont alors que de l'ordre de ∞, mais croiſſantes dans cet ordre.

305. Puiſque n étant fini, tous les termes des $A^{\frac{n}{a}}$ ſont finis, les derniers de chaque $A^{\frac{n}{a}}$ diſpoſés de ſuite, qui ſont

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. ſont donc finis, & en général les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ ſont des nombres finis tant que n eſt fini.

306. Lorſque n eſt devenu quelque nombre Fini indéterminable x tel que le 3me terme de $A^{\frac{x}{a}}$, qui eſt alors $3^{\frac{x}{3}}$, ſoit infini pour la premiere fois, tous les termes ſuivans moindres que lui ſont encore finis, & quand dans les $A^{\frac{n}{a}}$ ſuivantes quelques-uns de ces Finis deviennent Infinis, ce ſont les plus proches du 3me terme, le 4me d'abord, enſuite le 5me, &c. deſorte que c'eſt à l'extrémité de ces Suites qu'il ſubſiſte plus long-temps des termes finis. Et comme dans la derniere de ces Suites, qui eſt $A^{\frac{\infty}{a}}$, tous les termes ſont infinis, il faut que depuis la 1re $A^{\frac{x}{a}}$, où le 3me terme a commencé à être infini, il y ait infiniment plus de Suites qui aient des termes finis à leur extrémité, qu'il n'y en a qui ont tous leurs termes infinis, ou, ce qui revient au même, le nombre des Suites qui ont des termes finis à leur extrémité eſt infini, & le nombre de celles qui n'ont que des termes infinis, n'eſt que fini.

307. Donc les derniers termes de toutes les $A^{\frac{n}{a}}$ étant $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$, qui font la Suite des puiſſances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, il y a un nombre infini de ces puiſſances, qui ſont finies, & un nombre ſeulement fini d'infinies, ce qui eſt le contraire de la Suite des puiſſances de 2, de 3, &c. (228, 239, &c.) Et cela même fait voir l'analogie qui eſt entre la Suite des puiſſances de 1 & de 2, & celle des puiſſances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, nombre moyen entre 1 & 2. Car toutes les puiſſances de 1 en nombre infini ſont finies,

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$ a un nombre infini de puiſſances finies, & un nombre fini d'infinies, 2 a un nombre fini de puiſſances finies, & un infini d'infinies. D'où l'on peut même conjecturer qu'entre $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & 2 il y a quelque nombre qui a un nombre infini de puiſſances finies, & un nombre infini égal d'infinies. Tou-

jours il réſulte des puiſſances de 1, de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & de 2, qu'une très-petite différence entre deux nombres fait une grande différence d'ordres entre leurs puiſſances ∞, comme il a été dit.

308. Dans $A^{\frac{\infty}{a}}$ le 2^d^ terme $2^{\frac{\infty}{2}}$ eſt infiniment plus grand que le 1er terme 1, & d'une infinité d'ordres au-deſſus. Car $2^{\frac{\infty}{2}}$ eſt $2^{\frac{1}{2}}$ élevé à ∞; or $2^{\frac{1}{2}}$ eſt le moyen géométrique entre 1 & 2, & par conſéquent $2^{\frac{\infty}{2}}$ partage également le rapport de 1 à 2^{∞}. Or 2^{∞} eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de 1 (235), donc $2^{\frac{\infty}{2}}$ eſt de la moitié de ce nombre infini d'ordres au-deſſus de 1. $3^{\frac{\infty}{3}}$, 3me terme de $A^{\frac{\infty}{a}}$, eſt encore infiniment grand par rapport à $2^{\frac{\infty}{2}}$, mais moins au deſſus de $2^{\frac{\infty}{2}}$ que $2^{\frac{\infty}{2}}$ n'étoit au-deſſus de 1. Car, 1°. $3^{\frac{1}{3}}$ & $2^{\frac{1}{2}}$ ſont deux nombres moyens entre 1 & 2, d'où il ſuit qu'étant élevés à ∞ $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ (242) eſt infiniment plus grand, & d'autant plus qu'ils ſont pris tous deux dans le plus grand de tous les intervalles géométriques de A, qui eſt celui de 1 à 2. 2°. $3^{\frac{1}{3}}$ n'eſt pas ſi grand par rapport à $2^{\frac{1}{2}}$, que $2^{\frac{1}{2}}$ par rapport à 1, d'où il ſuit que $3^{\frac{\infty}{3}}$ n'eſt pas ſi élevé au-deſſus de $2^{\frac{\infty}{2}}$, que $2^{\frac{\infty}{2}}$ au-deſſus de 1. Donc dans le cours croiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$ qui n'eſt compoſé que de 3 termes,

M.E.C.D. 2017

chaque terme diſparoît devant ſon conſéquent, & le rapport des termes eſt décroiſſant.

309. De même dans le cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, qui eſt compoſé d'une infinité de termes, leur rapport eſt décroiſſant, puiſque $A^{\frac{1}{a}}$ doit avoir des rapports décroiſſans, ou tendre à l'égalité auſſi-bien que $A^{\frac{\infty}{a}}$ (287). $3^{\frac{\infty}{3}}$ 1er terme du cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$ étant infiniment plus grand que $2^{\frac{\infty}{2}}$ qui eſt d'une infinité d'ordres au-deſſus de 1 (308), il eſt donc d'une infinité d'ordres au-deſſus de 1, & au-deſſus de ∞, dernier terme de $A^{\frac{\infty}{a}}$ Mais ce nombre infini d'ordres dont $3^{\frac{\infty}{3}}$ ſurpaſſe ∞, eſt beaucoup moindre que ∞, & doit être diſtribué dans tout le cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, qui a un nombre de termes $= \infty - 3 = \infty$. Donc la Suite ſéjournera dans quelques ordres d'Infini, & les rapports de ſes termes étant décroiſſans, ce ſera vers ſon extrémité qu'elle ſéjournera, & à ſon extrémité même qu'elle fera ſon plus long ſéjour, qui ſera dans l'ordre de ∞. Et quand même ce ſéjour ſeroit infini, ce qui éleveroit à l'ordre de ∞^2 la ſomme des termes de ce dernier ordre, elle diſparoîtroit devant des Infinis ſupérieurs, qui diſparoîtront devant d'autres Infinis ſupérieurs & précédens, & toute la ſomme du cours décroiſſant de $A^{\frac{\infty}{a}}$, auſſi-bien que celle du cours croiſſant (308), ne ſera que $3^{\frac{\infty}{3}}$, 3me terme de la Suite.

Conſidération de la progreſſion géometrique G correſpondante à A.

310. Soit maintenant entre 1 & ∞, termes extremes de A, la progreſſion géométrique G, compoſée du même nombre de termes, & qui eſt $\therefore 1 . \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c.

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ On ſçait déja qu'il n'y a aucun de ſes termes qui ſoit infiniment grand par rapport à ſon antécédent (165),

& que *G*, qui eſt la Suite des puiſſances de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ n'a qu'un nombre fini d'Infinis à ſon extrémité, & un nombre infini de Finis depuis ſon origine (307). On peut voir auſſi d'une autre maniere cette derniere vérité. *G* partage le plus inégalement qu'il ſe puiſſe, l'intervalle entre 1 & ∞ que *A* partage également (71), donc *G* n'introduit pas dans cet intervalle une infinité tant de Finis que d'Infinis, car elle le partageroit comme fait *A*. Elle n'y introduit pas non plus un nombre fini de Finis, & un infini d'Infinis; car alors elle auroit au moins quelques termes moyens plus grands & infiniment plus grands que leurs correſpondans dans *A*, ce qui eſt impoſſible (*66*). Donc elle introduit dans cet intervalle une infinité de Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis, ce qui eſt la ſeule maniere poſſible de le partager le plus inégalement par rapport à celle dont *A* le partage.

311. On ſait que dans toute Suite croiſſante le dernier terme moins le premier eſt la ſomme des différences de tous les termes de la Suite, donc dans *A* & dans *G* $\infty - 1$, où ∞ eſt la ſomme des différences de *A* & de *G*, & à cauſe de l'oppoſition de ces deux progreſſions, il doit être cette ſomme des deux manieres les plus oppoſées qu'il ſe puiſſe, où étant la ſomme d'une infinité de différences finies égales, ce qu'il eſt certainement dans *A*, ou étant la ſomme de différences croiſſantes, les unes finies en nombre infini, les autres infinies en nombre ſeulement fini, ce qu'il doit donc être dans *G*. Or les différences finies ne ſeront qu'entre des termes Finis du côté de l'origine, & les infinies entre des Infinis à l'extrémité. Donc, &c.

312. La ſomme des différences de *A* & de *G* étant la même, il faut que puiſqu'il entre des Finis dans l'une & dans l'autre, & des Infinis dans celle des différences de *G* ſeulement, il y ait en récompenſe dans celle-ci des Finis beaucoup

M.E.C.D. 2017

plus petits que dans celle des différences de *A*. Et comme les plus petits Finis de la progreſſion des différences de *G* ſont à ſon origine, & que toutes les différences de *A* ſont des Unités, il faut que les premieres différences de *G* ſoient beaucoup plus petites que 1. En effet on a toujours trouvé $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ beaucoup moindre que 2, & par conſéquent $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ de bien peu plus grand que 1. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, premiere différence de *G*, eſt une fraction, dont 1 étant le numérateur, le dénominateur doit être un fort grand nombre, mais inconnu, qu'on peut appeller x, & la fraction ſera $\frac{1}{x}$.

313. La ſomme de *G* ne peut donc être qu'un Infini de l'ordre de ∞, & tous les Finis y ſeront utiles. En effet ſelon la Formule $\frac{a m^n - a}{m-1}$, a étant ici $= 1$, $m = \infty^{\frac{1}{\infty}}$, $n = \infty$, on a pour la ſomme de *G* $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \infty$ diviſé par $\frac{1}{x}$ (312) $= x\infty$, x étant un grand nombre fini.

Rapport des ſommes de A & de G.

314. Donc la ſomme de *A* eſt à celle de *G* :: $\frac{\infty^2}{2}$. $x\infty$ :: ∞. $2x$.

315. On voit par-là la confirmation de ce qui a été dit dans l'art. 81, que l'augmentation de *b* par rapport à *a*, augmente plus le rapport de la ſomme de la progreſſion arithmétique à la ſomme de la progreſſion géométrique, que ne fait l'augmentation de *n*. Car ici *n* étant $= \infty$ auſſi-bien que *b*, ſi *n* augmentoit infiniment le rapport de la ſomme de *A* à celle de *G*, auſſi-bien que *b* l'a augmenté infiniment, la ſomme de *A* ſeroit de deux ordres au-deſſus de celle de *G*, or elle n'eſt que d'un ordre au-deſſus.

316. Il eſt bon d'approfondir davantage cette matiere, dont la connoiſſance confirmera des choſes qui ont été dites, & ſervira pour d'autres qui viendront.

En général les ſommes des deux progreſſions correſpon-

M.E.C.D. 2017

dantes, l'une arithmétique, l'autre géométrique, ſont $\frac{a^n + b^n}{2}$

& $\frac{b^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$ (79)

Si b eſt infini par rapport à a, n étant fini, ces deux ſommes ſe réduiſent à $\frac{b^n}{2}$ & $\frac{b^{\frac{n}{n-1}}}{b^{\frac{1}{n-1}}} = b$. Donc elles ſont

$:: \frac{b^n}{2} . b :: n . 2$.

Si alors $n = 3$, ce qui eſt ſa moindre valeur poſſible, & $a = 1$, comme on l'a toujours ſuppoſé, on a pour la progreſſion $A \div 1 . \frac{\infty}{2} . \infty$, dont la ſomme eſt $\frac{3\infty}{2}$, & pour G on a $\div\div 1 . \infty^{\frac{1}{2}} . \infty$, dont la ſomme eſt ∞. Or ces deux ſommes ſont $:: 3 . 2 :: n . 2$.

Si $n = 4$, on a $A \div 1 . \frac{\infty}{3} . \frac{2\infty}{3} . \frac{3\infty}{3}$, dont la ſomme eſt 2∞, & $G \div\div 1 . \infty^{\frac{1}{3}} . \infty^{\frac{2}{3}} . \infty^{\frac{3}{3}}$, dont la ſomme eſt ∞, & ces deux ſommes ſont $:: 2 . 1 :: n = 4 . 2$.

Il en ira de même de toutes les valeurs ſucceſſives de n fini. Dans toutes les A, tous les termes ſeront utiles à la ſomme, horſmis le premier, & dans toutes les G le dernier terme ſeul fera la ſomme, ce qui confirme toute la Théorie des Infinis radicaux, car s'ils ne diſparoiſſoient pas, comme il a été dit, devant les Infinis potentiels, le rapport $\frac{n}{2}$ des deux ſommes ſeroit faux, quoique démontré par le calcul.

317. Il n'eſt pas poſſible que ſi n continue de croître juſqu'à devenir infini, le rapport des ſommes de A & de G ne devienne infini, lorſque n ſera $= \infty$, mais il ne devient pas celui de ∞ à 2, comme on pourroit le conjecturer d'abord.

La raiſon en eſt que tant que n eſt fini, la grandeur $a^{\frac{1}{n-1}} = 1$ diſparoît devant $b^{\frac{1}{n-1}}$ dans le dénominateur de la ſomme

M.E.C.D. 2017

de G, car alors $b^{\frac{1}{n-1}}$ eſt quelque Infini radical, mais dès que n eſt le plus petit $\propto$ poſſible, on a pour la ſomme de G $\frac{\infty^{\frac{\infty}{\propto-1}}-1}{\infty^{\frac{1}{\propto-1}}-1} = \frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\propto}}-1}$, où 1 ne diſparoît plus devant $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ qui eſt fini, & plus grand que $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. Car ſi l'on conçoit que dans $\infty^{\frac{1}{n}}$, n augmente toujours, $\infty^{\frac{1}{n}}$ ne ſera infini que tant que n ſera fini, & qu'on aura $\infty^{\frac{1}{2}}$, ou $\infty^{\frac{1}{3}}$ &c. & tous les $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ ſeront finis. Le rapport de la ſomme de A à celle de G, qui étoit le rapport déterminé de n à 2, tant que n étoit fini, change donc quand $n = \propto$.

$\infty^{\frac{1}{\propto}}$ eſt donc un nombre fini, toujours décroiſſant à meſure que n eſt un plus grand $\propto$, & la ſomme de G en eſt toujours d'autant plus grande, ce qui doit être, & n'empêche pas qu'elle ne ſoit toujours moins grande, & même infiniment moins grande que celle des correſpondantes A.

Quand $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ en décroiſſant toujours devient $= 2$, on a pour la ſomme de $G \frac{\infty}{2-1} = \infty$, mais après cela $\infty^{\frac{1}{\propto}}$ continuant à décroître pour devenir $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ preſque égal à 1, les ſommes des G ſont ∞ diviſé par des fractions, ou multiplié par les dénominateurs de ces fractions, & par conſéquent ces ſommes ſont encore croiſſantes, ce qui donne enfin $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}-1} = x\,\infty$.

318 Le rapport de la ſomme de A à celle de G ayant été celui de n à 2, tant que n a été fini, deſorte que ſi cela eût continué, le rapport de la ſomme de la Suite naturelle à la ſomme de la progreſſion géométrique correſpondante eût été

M.E.C.D. 2017

été celui de ∞ à 2 (317), & ce dernier rapport n'étant que celui de ∞ à $2x$ (314), moindre que celui de ∞ à 2, il s'enſuit que le rapport de la ſomme de A à celle de G a été d'abord en croiſſant comme n, qu'enſuite il a crû moins que n, que dans un certain endroit, ou pour une A & une G correſpondante, il a été le plus grand qu'il pût être, & qu'alors il a été celui de ∞ à 2, ſi cela a été poſſible. Or cela l'a été, quand la ſomme de A a été en général $\frac{\infty^2}{2m}$, & celle de G $\frac{\infty}{m}$, c'eſt-à-dire, quand la ſomme de A a été une certaine partie m de $\frac{\infty^2}{2}$, ſomme de la Suite naturelle, & quand en même-temps dans la ſomme $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\propto}}-1}$, $\infty^{\frac{1}{\propto}} - 1$ a été $= m$. Or m étant un nombre indéterminé, il a une infinité de valeurs qui donneroient ce rapport de ∞ à 2, & il arriveroit une infinité de fois que les ſommes de A & de G auroient ce rapport : mais certainement cela n'arrive qu'une fois, & il faut déterminer quelle eſt alors la valeur de m.

Quand cela arrive, le rapport des ſommes de A & de G eſt le plus grand qu'il ſe puiſſe, & par conſéquent la ſomme de la progreſſion arithmétique, qui eſt $\frac{\infty^2}{2m}$, eſt la plus approchante qu'il ſe puiſſe de la ſomme de la Suite naturelle, ou, ce qui eſt le même, m eſt le moindre nombre poſſible. Or il ne peut être moindre que 2, donc alors on a $\frac{\infty^2}{4}$, & $\frac{\infty}{2}$, ce qui donne pour les deux ſommes le rapport de ∞ à 2.

319. Quand la ſomme de A eſt $= \frac{\infty^2}{4}$, elle eſt la ſomme de la progreſſion arithmétique des Pairs ou des impairs, qui eſt $\frac{\infty^2}{4}$. Donc le nombre des termes eſt alors $n = \frac{\infty}{2}$, & c'eſt quand n a cette valeur, ou qu'il eſt à la moitié de toutes ſes valeurs ſucceſſives, que l'on a pour les deux ſommes de A

M.E.C.D. 2017

& de G le rapport de ∞ à 2, qui eſt leur plus grand rapport poſſible.

320. On voit que la Suite naturelle A & la correſpondante G ſont d'une nature toute oppoſée, non-ſeulement en ce que l'une eſt une progreſſion arithmétique, & l'autre une géométrique, mais en ce que 1° A a une infinité tant de termes Finis que d'Infinis, & G une infinité de Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis, 2°. tous les Finis de G, horſmis 1, ſont des $\sqrt[\infty]{}$ de ∞^{n} abſolument inconnues, & par-là même les Infinis de G ſont encore plus inconnus que ceux de A.

321. Les numérateurs des expoſans des termes de G étant la Suite des nombres naturels, il y a de ces numérateurs de trois eſpeces, des Finis déterminables n, des indéterminables x, & des $\propto$. On a donc outre les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$, une infinité tant de $\infty^{\frac{x}{\infty}}$ que de $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, qui ſont des nombres finis, & il n'y a qu'un nombre fini de $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$ qui ſoient Infinis. On verra encore mieux par le raiſonnement ſuivant, comment cela ſe fait. ∞ élevé à une puiſſance dont l'expoſant ſoit une fraction pure, comme toutes celles dont il s'agit ici, eſt élevé autant de fois qu'il y a d'unités dans le numérateur de la fraction, & abaiſſé autant de fois qu'il y a d'unités dans le dénominateur : car le numérateur exprime une puiſſance parfaite, & le dénominateur une $\sqrt{}$. Si ∞ eſt finiment élevé par le numérateur de ſon expoſant, & finiment abaiſſé par le dénominateur, ou, ce qui eſt le même, ſi le nombre des unités tant du numérateur que du dénominateur, n'eſt que fini, quelque différens que ſoient ces deux nombres entr'eux, ∞ n'a point reçu de changement quant à l'ordre, & il reſte dans celui dont il étoit. De-là vient que tous les $\infty^{\frac{1}{2}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c. ſont des Infinis. Mais ſi ∞ eſt finiment élevé par le

M.E.C.D. 2017

numérateur de ſon expoſant, & infiniment abaiſſé par le dénominateur, il ſort de ſon ordre, & tombe dans celui du Fini, donc tous les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ & les $\infty^{\frac{x}{\infty}}$ ſont des nombres finis, & même tous les $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, tant que $\propto$ a une différence infinie à ∞, & que par conſéquent il a une infinité d'unités moins que ∞. Or il y a une infinité de $\propto$ qui ont une différence infinie à ∞, & il n'y en a qu'un nombre fini qui aient à ∞ une différence finie (184). Donc, &c.

M.E.C.D. 2017

SECTION IV.

De la Grandeur infiniment petite.

Ce que c'eſt que l'Infiniment petit.

322 TOUTE grandeur *a* infiniment moins grande que *b*, eſt infiniment petite par rapport à elle. Ainſi 1 ou tout nombre fini eſt infiniment petit par rapport à ∞, ∞ l'eſt par rapport à ∞^2, &c. $\infty^{\frac{1}{3}}$ par rapport à $\infty^{\frac{1}{2}}$, &c. Mais ce ne ſont pas là les grandeurs que l'on appelle proprement ou abſolument *infiniment petites*. Ce ne ſont que celles qui le ſont par rapport au Fini, & il faut que nous en prouvions l'exiſtence.

323. La preuve de l'art. 82 porte également ſur la poſſibilité de la diminution infinie de la grandeur finie, & ſur la poſſibilité de ſon augmentation infinie, & tout ce qui a été dit enſuite ſur l'augmentation, s'applique de ſoi-même à la diminution. Donc puiſque la grandeur infiniment grande eſt la grandeur finie que l'on a conçue comme infiniment augmentée, l'infiniment petite doit être la même grandeur finie que l'on concevra comme infiniment diminuée.

324. 1 étant pris pour repréſenter en général la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le diviſe eſt grand, plus je le diminue, deſorte que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ſont des grandeurs toujours décroiſſantes. Donc à la fin $\frac{1}{\infty}$ ſera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui eſt la même choſe, l'Infiniment petit eſt une partie du Fini réſultante d'une diviſion pouſſée à l'infini, ou une partie *infinitieme* du Fini, comme 1 eſt une partie infinitieme de ∞.

325. Donc l'Infiniment petit eſt eſſentiellement une fraction, mais infiniment petite, ou, ce qui revient au même, une fraction dont le numérateur eſt fini, & le dénominateur infini. Et l'Infini eſt un entier infiniment grand, dont le Fini n'eſt qu'une partie infinitieme.

326. Donc $\frac{1}{\infty} \therefore 1 . \infty$.

M.E.C.D. 2017

327. Et puiſque 1, quoiqu'infiniment petit par rapport à ∞, eſt grandeur en lui-même, $\frac{1}{\infty}$, quoiqu'infiniment petit par rapport à 1, eſt auſſi grandeur en lui-même.

Que l'Infiniment petit ou $\frac{1}{\infty}$ eſt grandeur.

328. Donc $\frac{1}{\infty}$ peut être encore infiniment diviſé, ce qui donnera $\frac{1}{\infty^2}$, partie infinitieme de $\frac{1}{\infty}$, ou infiniment petit de l'infiniment petit $\frac{1}{\infty}$, & l'on aura encore $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{\infty^2}$. 1. ∞^2.

Ordres à l'Infini d'Infiniment petits.

329. Et comme cela n'a point de fin, on aura 1. $\frac{1}{\infty}$. $\frac{1}{\infty^2}$. $\frac{1}{\infty^3}$. $\frac{1}{\infty^4}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$, c'eſt-à-dire, autant d'ordres d'Infiniment petits qui s'abaiſſeront à l'infini au-deſſous de 1, que l'on a vû d'ordres d'Infinis qui s'élevoient à l'infini au-deſſus de 1.

330. Toutes ces grandeurs $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, &c. quoique toujours infiniment plus petites, ſeront toujours grandeurs (327 & 328), & même $\frac{1}{\infty^\infty}$, quoiqu'une infinité de fois infiniment plus petite que 1.

331. Il eſt viſible que la Suite $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$ eſt la Suite des puiſſances de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent progreſſion géométrique.

332. Dans le Fini les élevations aux puiſſances augmentent de grandeur les nombres entiers, & diminuent les fractions. Dans l'Infini ces mêmes élevations doivent augmenter ou diminuer les grandeurs de grandeur & d'ordre en même-temps. Mais dans l'Infiniment grand, elles augmentent les grandeurs de grandeur & d'ordre, parce que les grandeurs infinies ſont des entiers, & dans l'Infiniment petit elles diminuent les grandeurs de grandeur & d'ordre, parce que les Infiniment petits ſont des fractions (325.)

333. Donc auſſi, pour ſuivre cette analogie, puiſque les extractions de racines diminuent de grandeur les entiers dans

M.E.C.D. 2017

le Fini, & augmentent de grandeur les fractions, & que dans l'infiniment grand elles diminuent les grandeurs de grandeur & d'ordre, il faut que dans l'infiniment petit elles augmentent les grandeurs de grandeur & d'ordre. Mais ces ordres ne ſont que radicaux.

334. Tout cela ſe conclurra encore de ce que l'on aura toujours $\frac{1}{\infty^{n}} . \frac{1}{\infty^{m}} :: \infty^{m} . \infty^{n}$. m & n étant des nombres quelconques entiers ou rompus. Ainſi les rapports de tous les Infinis, ſoit potentiels, ſoit radicaux, ayant été traités, il ſeroit inutile de s'arrêter à ceux des Infiniment petits quelconques, qui ne ſont que la même choſe renverſée.

335. De tout ce qui a été dit, il ſuit que

1°. $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$, ou $a \pm \frac{1}{\infty} = a$.

2°. $\frac{1}{\infty^{n}} \pm \frac{1}{\infty^{n+1}} = \frac{1}{\infty^{n}}$.

3°. $\frac{1}{\frac{1}{\infty^{n+1}}} \pm \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty^{n+1}}}$.

Comment different $\frac{1}{\infty}$ & 0.

336. Si l'on change la Suite naturelle des nombres entiers en une Suite de fractions, qui auront toutes 1 pour numérateur, & pour dénominateurs les nombres naturels, ce qui donnera la progreſſion *harmonique* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. on voit que cette Suite toujours décroiſſante aboutira à $\frac{1}{\infty}$, qui pourra être pris pour zero, non pour zero *abſolu*, car $\frac{1}{\infty}$ eſt toujours grandeur en lui-même, mais pour zero *relatif*, c'eſt-à-dire, par rapport à toute grandeur finie, quelque petite qu'elle ſoit.

337. En prenant 0 pour abſolu, on ne peut dire ni $\frac{0}{1}$, ni $\frac{1}{0}$, car le pur rien & la grandeur n'ont nul rapport géométrique, ni même $\frac{0}{0} = 1$, car il n'eſt point vrai, exactement parlant, que le pur rien ſoit une fois dans le pur rien. Mais en prenant 0 pour relatif, ou $0 = \frac{1}{\infty}$, on peut dire $\frac{0}{1}$, ce qui eſt le rapport géométrique de $\frac{1}{\infty}$ à 1, ou d'une partie

M.E.C.D. 2017

infiniment petite à ſon Tout. On peut dire $\frac{1}{0}$, ce qui eſt le rapport de 1 à $\frac{1}{\infty}$, ou d'un Tout à ſa partie infiniment petite, & enfin $\frac{0}{0}$, ce qui eſt le rapport d'un Infiniment petit à lui-même, ou 1.

338. Donc 0 étant pris pour relatif, $\frac{0}{1} = \frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{0} = \infty$. Et en effet $\frac{0}{1}$ eſt $\frac{1}{\infty}$ diviſé par 1, ou $\frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{0}$ eſt 1 diviſé par $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt $\frac{\infty}{1} = \infty$.

339. On peut exprimer $\frac{0}{1}$ ſimplement par 0, & alors ce 0, puiſqu'il eſt relatif, & $= \frac{1}{\infty}$, eſt eſſentiellement une fraction, quoiqu'il n'en ait pas la forme, & $\frac{1}{0}$, qui ne peut être exprimé autrement, en faiſant entrer 0 dans l'expreſſion, eſt un entier $= \infty$, quoiqu'il ait la forme d'une fraction.

340. 0 abſolu, & 0 relatif $= \frac{1}{\infty}$ peuvent par une eſpece d'accident venir à faire le même effet, quoiqu'ils ſoient en eux-mêmes eſſentiellement différens. Ainſi dans a^0 l'expoſant 0 étant abſolu, $a^0 = 1$, & d'un autre côté $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$ (260).

341. A plus forte raiſon 0 abſolu & 0 relatif $= \frac{1}{\infty}$ feront-ils des effets différens, comme ils en font dans $\infty^0 = 1$ (110), & dans $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ grandeur finie plus grande que 1 (166). ∞^0 eſt une grandeur qui n'a été, ni n'a pû être abſolument formée par aucune multiplication, & par conſéquent 1, & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt l'Infini dont on tire une racine infiniment petite par rapport à lui, mais non pas nulle.

342. Si l'on veut ſavoir ce que ce ſeroit que $\sqrt[0]{a}$, il faut conſidérer que $\sqrt[0]{a}$ ne peut être que la derniere d'une Suite infinie de $\sqrt{}$ décroiſſantes de a, qui ſeroient par conſéquent $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c. Or la Suite de ces expoſans aboutit

M.E.C.D. 2017

à $\frac{1}{\infty}$ (336) qui eſt un o relatif. Donc dans l'expreſſion $\sqrt[\circ]{a}$, o ne peut être que relatif. Donc $\sqrt[\circ]{a} = a^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

343. Dans le calcul $\sqrt[n]{a}$ eſt toujours $= a^{\frac{1}{n}}$, & de-là il ſemble qu'il devroit s'enſuivre $\sqrt[\circ]{a} = a^{\frac{1}{\circ}}$. Mais ce qui fait que cela ne s'enſuit pas, c'eſt que dans $a^{\frac{1}{n}}$, $\frac{1}{n}$ eſt toujours une fraction, or $\frac{1}{\circ}$ n'en eſt pas une (339), & au contraire o relatif en eſt une.

344. Par la même raiſon $a^{\frac{1}{\circ}} = a^{\infty}$.

345. La ſuite infinie de toutes les $\sqrt{}$ conſécutives de $\frac{1}{\infty}$, qui eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, &c. eſt croiſſante (333), & elle aboutit à $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$. Or $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt une grandeur finie plus grande que 1, & moindre que 2. Donc $\frac{1}{\frac{1}{\infty}}$ eſt une fraction finie, & toute la Suite des $\sqrt[\infty]{}$ eſt compriſe dans le ſeul ordre potentiel qui eſt entre $\frac{1}{\infty}$ & 1, comme celle des $\sqrt{\infty}$ eſt compriſe dans l'ordre correſpondant qui eſt entre 1 & ∞.

Quelles ſont les parties infinitiemes d'un Tout fini.

346. Tout ce qui a été dit depuis l'art. 161 juſqu'au 165 ſur la diviſion d'un Tout infini, ou en général d'un Tout quelconque en un nombre infini de parties égales ou inégales, s'applique ici de ſoi-même à la diviſion d'un Tout fini. Ainſi ſi un Tout fini eſt diviſé en une infinité de parties égales, elles ſont toutes infiniment petites & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; ſi les unes ſont finies, & les autres infiniment petites, il n'y en a qu'un nombre fini de finies, & une infinité d'infiniment petites. Il en iroit de même d'un Tout qui ſeroit $\frac{1}{\infty}$ ou $\frac{1}{\infty^2}$, &c.

347.

M.E.C.D. 2017

347. Le rapport arithmétique de 1 à $\frac{1}{\infty}$ étant 1, puiſque $1 - \frac{1}{\infty} = 1$ (335), ſi on diviſe ce rapport en une infinité de parties égales, on aura donc une progreſſion arithmétique compriſe entre $\frac{1}{\infty}$ & 1, dont toutes les différences ſeront infiniment petites, & qui ſera $\div \frac{1}{\infty} . \frac{2}{\infty} . \frac{3}{\infty}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, c'eſt-à-dire, que ce ſeront tous les termes de la Suite naturelle diviſés chacun par ∞, ou dont on prendra la partie infinitieme. Donc tant que les termes de la Suite naturelle ſeront finis, ceux de la nouvelle progreſſion ſeront infiniment petits; & quand les termes de la Suite naturelle ſeront infinis, ceux de la nouvelle progreſſion ſeront finis. *Conſidération de la progreſſion arithmétique compriſe entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.*

348. Il y aura donc dans cette nouvelle progreſſion une infinité de termes finis, qui n'auront chacun à celui qui le ſuivra, qu'une différence infiniment petite & $= \frac{1}{\infty}$, & comme cette différence ne ſera pas à compter par rapport à eux, ils ſeront égaux à cet égard, & ne le ſeront pourtant pas à la rigueur, puiſqu'ils ſeront termes d'une grogreſſion toujours croiſſante. C'eſt ainſi que des grandeurs peuvent être égales en un ſens, & inégales en un autre, ſelon ce qui avoit été entrevû dans l'art. 263. Cela ſe trouve toujours en général, quand elles ſont croiſſantes ou décroiſſantes, & que leurs différences, qui ſont leurs accroiſſemens ou décroiſſemens, ſont d'un ordre inférieur à elles.

349. Les termes de la Suite naturelle étant des n finis déterminables, des x finis indéterminables, & des $\propto$, tous les $\frac{n}{\infty}$ & $\frac{x}{\infty}$ de la $\div \frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}$, &c. ſeront infiniment petits, & tous les $\frac{\propto}{\infty}$ finis & des fractions moindres que 1 (188) juſqu'à ce qu'enfin la progreſſion ſe termine par 1. Et en effet ſelon la formule $2a + \overline{m \times n - 1} \times \frac{n}{2}$ (77), la ſomme de cette progreſſion eſt $\frac{2}{\infty} + \overline{\frac{1}{\infty} \times \infty \times \frac{\infty}{2}} = \frac{2}{\infty} + 1$

M.E.C.D. 2017

$\times \frac{\infty}{2} = \frac{\infty}{2}$, ce qui marque bien que cette progreſſion a une infinité de termes finis, & moindres que 1, puiſque la Suite infinie des Unités a une ſomme $= \infty$.

350. Il faut donc concevoir que comme dans cette progreſſion une infinité de termes finis ſont égaux & croiſſans, parce qu'ils croiſſent infiniment peu, ainſi les termes de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}}, 2^{\frac{1}{\infty}}, 3^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ de l'art. 260, & ceux de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}}, 2^{\frac{2}{\infty}}, 3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ de l'art. 292. ſont égaux & croiſſans tant qu'ils n'ont que des différences infiniment petites par rapport à eux, ce qui leve toute la difficulté de l'art. 263, & explique pleinement l'art. 286.

351. Donc $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$ ne l'eſt pas exactement & à la rigueur, mais ſeulement parce que ſa différence à 1 eſt infiniment petite, & plus a eſt grand, plus cette différence infiniment petite eſt grande, de ſorte que quand $a = \infty$, cette différence doit devenir finie, & en effet on a toujours trouvé que $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$ étoit une grandeur finie.

Conſidération de la progreſſion géométrique compriſe entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.

352. Le rapport géométrique de 1 à $\frac{1}{\infty}$ étant $= \infty$, ſi on le diviſe en une infinité de parties égales, on aura la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}^{\frac{0}{\infty}}, \frac{\infty}{\infty}^{\frac{1}{\infty}}, \frac{\infty}{\infty}^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $\frac{\infty}{\infty}^{\frac{\infty}{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = 1$, dans laquelle tous les rapports ſont égaux & finis, c'eſt-à-dire, qu'aucun terme ne ſera infiniment grand, ou petit, par rapport à ſon antécédent, ou à ſon conſéquent. Il eſt viſible que cette progreſſion eſt la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} = \infty$ de l'art. 310, correſpondante à la Suite naturelle, mais dont chaque terme eſt diviſé par ∞, enſorte que chaque terme de cette nouvelle progreſſion eſt la partie infinitieme de ſon correſpondant dans la premiere. Or la partie infinitieme d'un nombre fini eſt un $\frac{1}{\infty}$,

M.E.C.D. 2017

& la partie infinitieme d'un infini eſt un nombre fini ; & d'un autre côté la premiere progreſſion a un nombre infini de termes finis, & un nombre ſeulement fini d'infinis (310), donc la nouvelle a une infinité de termes infiniment petits, & un nombre ſeulement fini de finis. En effet puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt fini, $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$ eſt un $\frac{1}{\infty}$, de même $\frac{\infty}{\infty^{\frac{2}{\infty}}}$, &c.

353. Si l'on prend la ſomme de cette progreſſion, où $a = \frac{1}{\infty}$, $m = \infty^{\frac{1}{\infty}}$, $n = \infty$, on a $\frac{\frac{1}{\infty} \times \infty^{\frac{\infty}{\infty}} - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} =$

$\frac{\frac{\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1} = 1 \times x$ (312) grandeur finie, ce qui fait voir qu'il n'y a dans la progreſſion qu'un nombre fini de termes finis.

354. Les différences de cette progreſſion étant auſſi en progreſſion, & en même progreſſion, il y en a une infinité d'infiniment petites, & un nombre fini de finies. Et en effet leur ſomme eſt $1 - \frac{1}{\infty} = 1$.

355. En général de ce que les différences des termes d'une progreſſion géométrique ſont en même progreſſion, il ſuit que les différences ſont d'autant d'ordres différens que les termes, & en nombre pareillement fini ou infini dans chaque ordre. Car la progreſſion des différences a le même multiplicateur perpétuel que la progreſſion primitive (68), & c'eſt uniquement de la grandeur de ce multiplicateur que dépend celle des pas d'une progreſſion; ou, ce qui eſt le même, c'eſt en vertu de la grandeur de ce multiplicateur qu'elle s'éleve à des ordres ſupérieurs à ceux de ſon origine, & y ſéjourne plus ou moins, d'où il ſuit que dans la progreſſion primitive & dans celle des différences, tout ſera le même à cet égard.

Cela n'emporte pas que dans la progreſſion primitive, & dans celle des différences, les ordres différens ſoient les

M.E.C.D. 2017

mêmes dans chacune, car les différences peuvent être d'un ordre inférieur aux termes de la progreſſion primitive, par exemple infiniment petites, les termes étant finis : mais il y aura autant d'ordres différens dans une progreſſion que dans l'autre, & les mêmes ſéjours ; & s'il n'y a qu'un ordre dans la primitive, il n'y en aura qu'un, mais inférieur dans celle des différences. Ainſi dans la progreſſion des puiſſances de $2^{\frac{1}{\infty}}$, qui eſt $\div 2^{\frac{0}{\infty}} = 1. 2^{\frac{1}{\infty}}. 2^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $2^{\frac{\infty}{\infty}} = 2$, & qui n'a que des termes finis, la progreſſion des différences n'a que des termes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

356. De-là même ſuit encore ce qu'on a dit tant de fois, que $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$ eſt une grandeur finie : car ſi elle n'étoit pas finie, elle ſeroit infiniment petite, or elle ne l'eſt pas. C'eſt la différence des deux 1ers termes de la $\div 1. \infty^{\frac{1}{\infty}}. \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, qui n'a des termes que de l'ordre du Fini & de ∞. Donc la progreſſion des différences n'a des termes que de deux ordres. Certainement elle en a à ſon extrémité qui ſont de l'ordre de ∞, car l'intervalle qui eſt entre 1 & ∞ eſt diviſé le plus inégalement qu'il ſe puiſſe (72), donc elle n'a des termes que de l'ordre de ∞ & de celui du Fini. Donc $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ moins ſon 1er terme 1, ou $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, n'eſt pas un Infiniment petit, mais une grandeur finie.

357. Mais je dis en même-temps que cette grandeur finie, qui eſt une fraction, eſt ſi petite, qu'élevée au quarré, elle devient infiniment petite, c'eſt-à-dire, que $1 - 2\infty^{\frac{1}{\infty}} + \infty^{\frac{2}{\infty}} = \frac{1}{\infty}$, ou, ce qui eſt le même, $2\infty^{\frac{1}{\infty}} - \infty^{\frac{2}{\infty}} = 1 - \frac{1}{\infty}$.

$2\infty^{\frac{1}{\infty}} - \infty^{\frac{2}{\infty}}$ eſt la différence du double de $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ à ſon quarré : or tout nombre compris entre 1 & 2, comme

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, eſt tel que ſon double eſt plus grand que ſon quarré, cette différence allant toujours en décroiſſant juſqu'à 2, qui a ſon double & ſon quarré égaux.

Soit en général ce nombre moyen entre 1 & 2, $1 + \frac{1}{x}$, la différence de ſon double & de ſon quarré eſt $1 - \frac{1}{xx}$. Or ſi on détermine $1 + \frac{1}{x}$ à être $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, la différence $1 - \frac{1}{xx}$ devient $1 - \frac{1}{\infty}$, ce que je prouve ainſi.

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt tel, qu'élevé à la puiſſance ∞, il eſt $= \infty$, donc auſſi $1 + \frac{1}{x}$, ou $\frac{x+1}{x}$. Donc $\frac{\overline{x+1}^{\infty}}{x^{\infty}} = \infty$. Pour cela il faut néceſſairement que $\overline{x+1}^{\infty}$ ne ſoit que d'un ordre au deſſus de x^{∞}. Mais tant que dans $1 + \frac{1}{x}$, x ſera un Fini déterminable, $\overline{x+1}^{\infty}$ ſera d'une infinité d'ordres au-deſſus de x^{∞}; & au contraire ſi x étoit $= \infty$, $\overline{x+1}^{\infty}$ & x^{∞} ſeroient du même ordre (241 & 242), ce qui approche infiniment plus de ce qu'il faudroit. Donc afin que $x + 1$ & x^{∞} ne different que d'un ordre préciſément, il faut que x ſoit le plus grand Fini indéterminable poſſible. Or les plus grands Finis de cette eſpece ſont ceux qui dès l'élévation au quarré deviennent infinis. Donc tel eſt x dans $1 + \frac{1}{x} = \infty^{\frac{1}{\infty}}$. Donc la différence $1 - \frac{1}{xx} = 1\frac{1}{\infty}$. Donc, &c.

358. Donc il y a des grandeurs finies *indéterminables en petiteſſe*, comme il y en a de finies indéterminables en grandeur, c'eſt-à-dire, que comme celles-ci élevées à une puiſſance finie montent d'ordre, les autres baiſſent, & la ſeule analogie d'oppoſition auroit ſuffi pour le faire conjecturer.

359. Il ſuit & de cette analogie & de la nature même de la choſe, que le Fini indéterminable en petiteſſe, étant multiplié par l'Infini, peut demeurer Fini, comme le Fini

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

indéterminable en grandeur, multiplié par le Fini, devient Infini, pourvû que le Fini qui le multiplie ſoit d'une certaine grandeur. En effet le Fini indéterminable en petiteſſe étant moyen entre 1 & $\frac{1}{\infty}$, & $\frac{1}{\infty} \times \infty$ n'étant que 1, le Fini indéterminable en petiteſſe, multiplié par ∞, peut bien n'être qu'un nombre Fini plus grand que 1.

360. Quand on a pris $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{x}$, cet x eſt viſiblement le même que celui qui entre dans $1 + \frac{1}{x} = \infty^{\frac{1}{\infty}}$ (357). Donc dans la ſomme de la $\div 1 . \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, qui eſt $x\infty$ (313), x eſt un Fini indéterminable en grandeur, & la ſomme eſt plus grande dans l'ordre de ∞ que ſi x étoit un nombre Fini déterminable quelconque, mais elle ne va pas juſqu'à être de l'ordre de ∞^2. Il faudroit pour cela qu'elle fût $x^2\infty$.

Conſidération de toutes les Suites A, A^n, *&c. changées en* $\frac{1}{A}$. $\frac{1}{A^n}$, *&c.*

361. Quand on a une Suite quelconque compoſée de nombres entiers, les uns finis, & les autres infinis, on la peut changer en une Suite de fractions, dont les dénominateurs ſeront tous les termes de la Suite des entiers, & 1 le numérateur perpétuel & conſtant; & alors tous les termes qui dans la 1re Suite étoient finis, demeureront finis dans la 2de, & ceux qui dans la 1re étoient infinis, deviendront infiniment petits dans la 2de. Ce ſera encore la même choſe, ſi tous les numérateurs ſont inégaux, mais finis. On en a déja vû un exemple dans l'art. 336. Donc en réduiſant toutes les Suites de la Section précédente en fractions qui aient toujours pour numérateur 1, ou un nombre fini quelconque, ou enfin toujours des nombres finis différens pour différentes Suites, ou différens pour une même, on ſaura tout d'un coup ſi ces nouvelles Suites auront un nombre fini ou infini de termes finis ou infiniment petits, & par conſéquent ſi leurs ſommes ſeront finies ou infinies, puiſqu'on ſait ſi les Suites primitives ont un nombre fini ou infini de termes finis ou infinis.

362. Donc ſi la Suite naturelle A devient $\frac{1}{A}$, c'eſt-à-dire,

M.E.C.D. 2017

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c, $\frac{1}{\infty}$, la ſomme en eſt infinie, car A a un nombre infini de termes finis qui demeurent Finis dans $\frac{1}{A}$. De plus les Infinis de A, qui ſont en nombre infini, & plus grand que celui des Finis, deviennent dans $\frac{1}{A}$ des infiniment petits en nombre infini, dont la ſomme eſt finie, & par conſéquent ſe joint aux termes finis de $\frac{1}{A}$, & eſt utile à la ſomme totale. Cette ſomme totale infinie eſt beaucoup moindre que ∞, ſomme des Unités, puiſque chaque terme fini de $\frac{1}{A}$ eſt moindre, & toujours moindre que 1, & que $\frac{1}{A}$ a une infinité d'infiniment petits.

363. Puiſque A^2 n'a qu'un nombre fini de termes finis, & tous les autres infinis (210), la Suite $\frac{1}{A^2}$, ou $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, &c. $\frac{1}{\infty^2}$, ne peut avoir qu'une ſomme finie.

Il eſt démontré ſelon d'autres méthodes que $\frac{1}{A}$ a une ſomme infinie, & $\frac{1}{A^2}$ une ſomme finie, d'où il ſuit néceſſairement qu'une infinité de termes qui étoient finis dans $\frac{1}{A}$ ont ceſſé de l'être dans $\frac{1}{A^2}$, & y ſont devenus infiniment petits, c'eſt-à-dire, qu'une infinité de $\frac{1}{x}$ finis ſont devenus infiniment petits, étant $\frac{1}{x^2}$, ou que x fini eſt devenu infini, étant x^2, ce qui prouve invinciblement *à poſteriori* tout le Paradoxe des Finis indéterminables. Car ſi on prétend que tous les Finis de A ſont demeurés finis dans A^2, donc il y a une infinité de termes finis dans $\frac{1}{A^2}$, auſſi-bien que dans $\frac{1}{A}$, donc elles ont toutes deux une ſomme infinie, quoique celle de $\frac{1}{A^2}$ ſoit la moindre. Donc le contraire d'une vérité conſtante & reçue ſeroit démontré.

364. Puiſque A a un nombre infini tant de ∞ que de ∞^2 (210), $\frac{1}{A^2}$ a un nombre infini tant de $\frac{1}{\infty}$ que de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent tous ſes infiniment petits ſont utiles à ſa ſomme.

365. Il eſt aiſé de voir que toutes les $\frac{1}{A^n}$, n étant > 1,

M.E.C.D. 2017

n'auront que des ſommes finies, & toujours décroiſſantes juſqu'à celle de $\frac{1}{A^{\infty}}$, qui eſt la Suite $\frac{1}{1^{\infty}}$, $\frac{1}{2^{\infty}}$, $\frac{1}{3^{\infty}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\infty}}$, dont la ſomme n'eſt que le 1er terme $\frac{1}{1^{\infty}} = 1$, puiſque 2^{∞} étant infiniment grand par rapport à 1, & infiniment petit par rapport à 3^{∞}, & 3^{∞} infiniment petit par rapport à 4^{∞}, &c. (239 & 240), $\frac{1}{2^{\infty}}$ diſparoît devant 1, $\frac{1}{3^{\infty}}$ devant $\frac{1}{2^{\infty}}$, &c.

Un plus grand détail de ce qui regarde les Suites moyennes entre $\frac{1}{A^2}$ & $\frac{1}{A^{\infty}}$ ſe préſentera de ſoi-même.

366. Toutes les Suites $A^{\frac{1}{n}}$ depuis $A^{\frac{1}{1}} = A$, ou depuis $A^{\frac{1}{2}}$ juſqu'à $A^{\frac{1}{\infty}}$, ayant une infinité croiſſante de termes finis (250, 254, 259, 260), les Suites $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ qui ſont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, &c. ont des ſommes infinies; & comme les termes de $\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$ ſont plus grands que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, ceux de $\frac{1}{A^{\frac{1}{4}}}$ plus grands que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}$, &c. ces ſommes infinies des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ ſont croiſſantes, tant parce que le nombre de leurs termes finis eſt toujours plus grand, que parce que leurs termes ſont toujours plus grands. La premiere de ces Suites, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{1}{1}}} = \frac{1}{A}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, a une ſomme infinie beaucoup moindre que ∞ (362).

M.E.C.D. 2017

(362). La derniere Suite $\frac{1}{A^{\frac{1}{\infty}}}$ eſt $= A^{\frac{1}{\infty}}$, parce que tous les termes des $A^{\frac{1}{\infty}}$ ſont $= 1$, horſmis le dernier (267), & la ſomme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ eſt $= \infty$ (267). Donc toutes les ſommes infinies croiſſantes des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ ſont compriſes entre un Infini beaucoup moindre que ∞, & ∞.

367. Puiſque toutes les $A^{\frac{n-1}{n}}$, dont la premiere eſt $A^{\frac{1}{2}}$, & la derniere A (271), ont un nombre infini décroiſſant de termes finis (273), les $\frac{1}{A^{\frac{n-1}{n}}}$ qui ſont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{4}}}$, &c. auront des ſommes infinies, mais décroiſſantes, tant parce que le nombre de leurs termes finis eſt décroiſſant, que parce que les termes de $\frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}$ ſont plus petits que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, ceux de $\frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ plus petits que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{2}{3}}}$, &c. La premiere de ces Suites, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, a une ſomme plus grande que celle de $\frac{1}{A}$ (366), & la derniere, qui eſt $\frac{1}{A}$, a une ſomme beaucoup moindre que ∞. Donc le nombre infini des ſommes infinies décroiſſantes des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n-1}}}$ eſt compris entre deux Infinis moindres que ∞.

M.E.C.D. 2017

368. Puiſque les $A^{\frac{n}{n-1}}$, dont la premiere eſt $A^{\frac{2}{1}} = A^2$, & la derniere A, n'ont, tant que n eſt fini déterminable, qu'un nombre fini de termes finis, mais croiſſant (281), toutes les $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ où n ſera Fini déterminable, qui ſont $\frac{1}{1^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{4}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{5}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{5}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, &c. auront des ſommes finies, mais croiſſantes, tant parce que le nombre des termes finis eſt croiſſant, que parce que les termes de $\frac{1}{A^{\frac{4}{3}}}$ ſont plus grands que leurs correſpondans dans $\frac{1}{A^{\frac{3}{2}}}$, & ainſi de ſuite. Et comme $\frac{1}{A^2}$ n'a qu'une ſomme finie (363), & que $\frac{1}{A}$ en a une infinie beaucoup moindre que ∞, toutes les ſommes des $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ moyennes ſeront compriſes entre ces deux termes.

369. On trouvera de même que $\frac{1}{A^a}$ (282) qui eſt $\frac{1}{1^1}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^3}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$, n'a qu'une ſomme finie.

370. Selon l'article 296, les $\frac{1}{A^{\frac{a}{n}}}$, qui ſont $\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{2}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{3}}}$, ou $\frac{1}{1^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{2}{4}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{3}{4}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{4}}}$, &c. auront des ſommes finies, tant que n ſera fini. Et comme la premiere de ces Suites, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{a}{1}}} = \frac{1}{A^a}$, n'a qu'une ſomme finie (369), & que la

M.E.C.D. 2017

derniere, qui eſt $\frac{1}{A^{\frac{a}{\infty}}}$, a une ſomme infinie, puiſque $A^{\frac{a}{\infty}}$ a une infinité de termes finis (293), toutes les ſommes des $\frac{1}{A^{\frac{a}{n}}}$ ſeront croiſſantes depuis le Fini juſqu'à un Infini, & cet Infini ſera moindre que ∞, puiſque les termes de $\frac{1}{A^{\frac{a}{\infty}}}$ ſont pour la plus grande partie moindres que des Unités, & que cette Suite a des Infiniment petits.

371. Selon l'art. 284, $\frac{1}{A^{\frac{1}{a}}}$, qui eſt $\frac{1}{1^{\frac{1}{1}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}}$ aura une ſomme infinie, mais moindre que celle des Unités, puiſque tous ſes termes ſont des fractions moindres que 1. $\frac{1}{A^{\frac{\infty}{a}}}$, qui eſt ſelon l'art. 301, $\frac{1}{1^{\frac{\infty}{1}}}$, $\frac{1}{2^{\frac{\infty}{2}}}$, $\frac{1}{3^{\frac{\infty}{3}}}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, n'aura qu'une ſomme finie, qui ſera d'abord formée du 1er terme $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{1^1} = 1$, devant lequel diſparoîtront les termes ſuivans, qui ſont des infiniment petits d'ordres differens.

Mais comme cette Suite au contraire de ſa génératrice $A^{\frac{\infty}{a}}$ eſt croiſſante depuis ſon 3me terme, elle aura à ſon extrémité ſes plus grands infiniment petits, & comme elle en peut avoir au moins dans ſon dernier ordre un nombre infini (309), ils feront en ce cas une ſomme finie qui s'ajoutera à 1 pour faire la ſomme totale, qui ne ſera formée que de termes pris aux deux extrémités de la Suite. Que ſi elle n'a pas dans ſon dernier ordre un nombre infini d'Infiniment petits, toute ſa ſomme ne ſera que 1. Donc les $\frac{1}{A^{\frac{n}{a}}}$ moyennes entre $\frac{1}{A^{\frac{1}{a}}}$ & $\frac{1}{A^{\frac{\infty}{a}}}$, auront des ſommes décroiſſantes depuis un Infini

M.E.C.D. 2017

moindre que ∞, juſqu'à un très-petit nombre fini. Ces ſommes ſeront infinies, tant que n aura des valeurs finies, & même quand il aura un certain nombre infini de valeurs infinies (306).

372. Puiſque 2 n'a qu'un nombre fini de puiſſances finies (228), & à plus forte raiſon tous les autres nombres plus grands que 2, la Suite des puiſſances d'un nombre n fini étant réduite en fractions, qui ſera $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, &c. $\frac{1}{n^\infty}$, n'aura qu'une ſomme finie, & d'autant moindre que n ſera plus grand. Et en effet, cette Suite étant une progreſſion géométrique, on trouvera aiſément que la ſomme en eſt $\frac{1}{n-1}$. Si, par exemple, $n = 2$, la ſomme de la Suite infinie des puiſſances de $\frac{1}{2}$, à commencer par $\frac{1}{2}$, eſt 1, celle des puiſſances de $\frac{1}{3}$ eſt $\frac{1}{2}$, celle des puiſſances de $\frac{1}{4}$ eſt $\frac{1}{3}$, &c. & même celle des puiſſances de $\frac{1}{\infty}$ eſt $\frac{1}{\infty - 1} = \frac{1}{\infty}$, car toute la ſomme ſe réduit au 1er terme de la Suite.

373. Quand un nombre infini de Suites ont toutes leurs ſommes compriſes dans le même ordre, il faut, ou que les différences de ces ſommes ſoient toutes de l'ordre inférieur, ou qu'il y ait un nombre fini de ces différences qui ſoient de l'ordre ſuppoſé, & un nombre infini de l'ordre inférieur. Dans le 1er cas, les ſommes de deux Suites conſécutives, ou qui ne ſont qu'à une diſtance finie l'une de l'autre, ſont égales, ou infiniment peu inégales; dans le 2^d, il y en a un nombre fini d'inégales, & un nombre infini d'égales, ou du moins d'infiniment peu inégales, & elles tendoient toutes à l'égalité. De-là il ſuit, que ſi de ce nombre infini de Suites on voit que les premieres aient des ſommes inégales, elles ſont toutes dans le 2^d cas, & leurs ſommes tendent à l'égalité, & en approchent d'autant plus que les Suites ſont plus avancées dans leur cours. Donc les ſommes des Suites $\frac{1}{A^n}$ étant toutes compriſes dans l'ordre du Fini, dès que $n = 2$ (365), & les premieres de ces ſommes étant manifeſtement inégales, elles

M.E.C.D. 2017

tendent toutes à l'égalité ; c'eſt-à-dire, que par ex. la ſomme de $\frac{1}{A^4}$ approche plus d'être égale à celle de $\frac{1}{A^3}$, que celle de $\frac{1}{A^3}$ n'approche d'être égale à celle de $\frac{1}{A^2}$. De même les ſommes des $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$ de l'art. 366, & pluſieurs autres qu'il ſera aiſé de voir, tendront à l'égalité.

374. Si l'on réduit en fractions la progreſſion géométrique G, correſpondante à A, ce qui donne $\frac{1}{G} \overset{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1 = = = \frac{1}{\infty^{\frac{0}{\infty}}}$ *Conſidération de la Suite* $\frac{1}{G}$ *correſpondante à* $\frac{1}{A}$.

$\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}} \cdot \frac{1}{\infty^{\frac{2}{\infty}}}$, &c. $\frac{1}{\infty^{\frac{\infty}{\infty}}} = = = \frac{1}{\infty}$, la ſomme en eſt infinie, puiſque G a une infinité de termes Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis. Mais cette ſomme eſt moindre & beaucoup moindre que ∞, puiſque $\frac{1}{G}$ n'a que des termes moindres que 1, excepté le 1er, & toujours décroiſſans, & qu'elle a des Infiniment petits, & d'ailleurs la même ſomme eſt plus grande que celle de $\frac{1}{A}$ qui eſt infinie (362), puiſque les termes de A étant tous plus grands que ceux de G, excepté les deux extremes, les termes de $\frac{1}{G}$ ſont plus grands que ceux de $\frac{1}{A}$.

375. La grandeur eſt ſuſceptible de diminution à l'infini. Donc quelque partie que je retranche de a, je puis encore retrancher une partie du reſte, & encore une partie de ce 2^d^ reſte, & je trouverai toujours à retrancher, pourvu que je ne retranche aucun reſte entier ; or je n'y ſerai jamais obligé, puiſqu'un reſte quelconque ſera toujours une grandeur. Donc la grandeur eſt diviſible à l'infini, ou en une infinité de parties. On a déja vû dans cet Ouvrage quantité de choſes qui prouvent néceſſairement cette diviſibilité à l'infini, ou qui s'y accordent. *Différentes diviſions finies ou infinies de la grandeur finie.*

376. La grandeur n'eſt diviſible qu'en parties qu'elle a réellement. Un Pied, par exemple, n'eſt diviſible en 12 pouces

M.E.C.D. 2017

que parce qu'il les a. Donc la grandeur a réellement une infinité de parties.

377. Puiſqu'elle les a réellement, cette infinité de parties conçues comme faiſant une Suite infinie de grandeurs, ne feront toutes enſemble que a, qui eſt le Tout quelconque ſuppoſé, ou, ce qui eſt le même, cette Suite infinie aura une ſomme $= a$. Il ne reſte plus qu'à voir quelle doit être cette Suite infinie, ou dans quel ordre ſes grandeurs doivent être diſpoſées.

378. Il eſt clair, 1°. Que la Suite doit être toujours décroiſſante. 2°. Qu'il faut qu'il n'y ait aucun de ſes termes qui ne ſoit une partie de a. 3°. Qu'il faut que chacun en ſoit une partie différente de toute autre. Or je remplis ces trois conditions, ſi ayant pris d'abord $\frac{1}{2}$ de a, ce qui donne pour 1er reſte $\frac{1}{2}a$, je prens $\frac{1}{2}$ de ce 1er reſte, enſuite $\frac{1}{2}$ du 2^d^, $\frac{1}{2}$ du 3me, &c. à l'infini; car par ce moyen il n'y a rien dans a qui ne devienne à ſon tour $\frac{1}{2}$, & une moitié différente de toute autre; d'ailleurs je prens toujours tout ce qui eſt moitié, & toutes ces moitiés ſont décroiſſantes. Ce ſera le même raiſonnement ſi je prens d'abord $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. enfin une partie quelconque de a, & qu'enſuite je prenne ſur tous les reſtes à l'infini une partie du même nom, c'eſt-à-dire, toujours $\frac{1}{3}$, ou toujours $\frac{1}{4}$, &c.

379. Donc a eſt compoſé d'une infinité, ou de moitiés, ou de tiers, &c. enfin de parties de même nom inégales & décroiſſantes, au lieu que ſi on prend ces parties de même nom égales, a n'en a qu'un nombre fini.

380. Si ayant pris d'abord, par ex. $\frac{1}{2}a$, je prens enſuite $\frac{1}{3}$ du 1er reſte, $\frac{1}{4}$ du 2^d^, $\frac{1}{5}$ du 3me, &c. il eſt clair que je prendrai moins que les moitiés de tous les reſtes, & par conſéquent quoique je prenne un nombre infini de parties de a, je n'aurai pas pris a entier, parce que je n'aurai pas pris tout ce qui étoit dans a, mais ſeulement des parties moindres que celles qu'il pouvoit me fournir. En un mot, les diviſions infinies ne ſeront pas tombées ſur a entier, mais ſeulement ſur une certaine portion de a, diviſible auſſi à l'infini, & n'auront pas touché à l'autre portion.

M.E.C.D. 2017

381. Il ſemble qu'il y ait au contraire une maniere de faire ſur a une infinité de diviſions qui prennent plus que a. Telle eſt la Suite infinie $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{5}a$, &c. où dès qu'on a pris $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, on a $\frac{13}{12}a$ plus grand que a. Mais ce n'eſt pas là faire ſur a une infinité de diviſions, ou prendre une infinité de parties de a, puiſqu'avant la fin de la 3me diviſion, a eſt déja épuiſé. C'eſt ſeulement concevoir différentes grandeurs décroiſſantes rapportées à a, dont la 1re eſt $= \frac{1}{2}a$, la 2^de^ $= \frac{1}{3}a$, la 3me $= \frac{1}{4}a$, &c. Et quoique chacune en particulier puiſſe être conſidérée comme partie de a, toutes priſes enſemble n'en ſont pas parties.

382. Si après avoir pris d'abord $\frac{1}{10}a$, par ex. je prens une partie du 1er reſte qui ſoit d'une plus grande dénomination que $\frac{1}{10}$, comme $\frac{1}{9}$, enſuite $\frac{1}{8}$ du 2^d^ reſte, &c. il eſt bien vrai que je ne prendrai que de véritables parties de a, & différentes les unes des autres, mais je ne les prendrai qu'en nombre fini, & égales, & dans cet exemple ce ſeront dix 10mes parties.

383. Donc en prenant toujours ſur a des parties d'une même dénomination, on en prend une infinité d'inégales & de décroiſſantes, & on prend a entier (378). Si on prend des parties d'une dénomination toujours moindre, on en prend une infinité d'inégales & de décroiſſantes, mais on prend moins que a (379). Si on prend des parties d'une dénomination toujours plus grande, on prend a entier, mais on ne prend qu'un nombre fini de parties égales (382).

384. Donc il n'y a que deux manieres de faire une infinité de diviſions ſur a. La 1re prend tout ce qui eſt dans a, & la 2de ne prend pas tout.

385. Selon la 1re maniere, il faut donc prendre un nombre conſtant b, plus grand que a, qui ſera le diviſeur perpétuel de a, & de tous ſes reſtes, & on aura une Suite infinie, dont la ſomme ſera $= a$. $\frac{a}{b}$ ſera le 1er terme de cette Suite. $\frac{a}{b}$ étant ôté de a, le 1er reſte ſera $a - \frac{a}{b} = \frac{ab - a}{b}$, & ce

Diviſion de la grandeur finie en une infinité de parties qui ſont en progreſſion géométrique.

M.E.C.D. 2017

reſte diviſé par b, ſera $\frac{ab-a}{b^2}$, 2^{d} terme $\frac{a}{b}$ & $\frac{ab-a}{b^2}$ étant encore ôtés de a, le 2^{d} reſte ſera $a - \frac{a}{b} - \frac{ab+a}{b^2} = \frac{ab^2-2ab+a}{b^2}$, & ce reſte diviſé par b, ſera $\frac{ab^2-2ab+a}{b^3}$ 3me terme.

Or le 2^{d} terme $\frac{ab-a}{b^2} = \frac{\overline{b-1}\times a}{b^2}$. Le 3me $\frac{ab^2-2ab+a}{b^3} = \frac{\overline{b-1}^2\times a}{b^3}$. On trouvera de même que le 4me terme ſera $\frac{\overline{b-1}^3\times a}{b^4}$, & ainſi de ſuite, deſorte qu'on aura la Suite infinie décroiſſante $\frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b-1}^1\times a}{b^2} \cdot \frac{\overline{b-1}^2\times a}{b^3} \cdot \frac{\overline{b-1}^3\times a}{b^4}$, &c. juſqu'à $\frac{\overline{b-1}^{\infty-1}\times a}{b^\infty} = \frac{\overline{b-1}^\infty\times a}{b^\infty}$.

386. On voit d'abord que cette Suite eſt une progreſſion géométrique dont $\frac{a}{b}$ eſt le 1er terme, & le multiplicateur perpétuel ou m eſt $\frac{b-1}{b}$.

387. Si, pour avoir la ſomme de cette progreſſion, on y applique la Formule $\frac{am^n-a}{m-1}$, on trouvera que a de la Formule étant ici $= \frac{a}{b}$, $m = \frac{b-1}{b}$, & $n = \infty$, am^n devient $\frac{a}{b} \times \frac{\overline{b-1}^\infty}{b^\infty}$: or $\overline{b-1}^\infty$ étant infiniment petit par rapport à b^∞ (241), $\frac{a}{b} \times \frac{\overline{b-1}^\infty}{b^\infty}$ eſt une grandeur infiniment petite, qui par conſéquent dans le numérateur de la Formule $am^n - a$ diſparoît devant $-a = -\frac{a}{b}$. Donc il ne reſte que $-\frac{a}{b}$ diviſé par $m-1$, c'eſt-à-dire $-\frac{a}{b}$ diviſé par

M.E.C.D. 2017

par $\frac{b-1-b}{b}$ ou $-\frac{a}{b}$ diviſé par $\frac{-1}{b}$, ce qui eſt $\frac{ab}{b} = a$, ſomme de la progreſſion, comme on avoit trouvé par le ſeul raiſonnement que cela devoit être.

388. Il n'y a point de grandeur qui ne puiſſe être exprimée par une infinité de différentes progreſſions géométriques décroiſſantes : car la valeur de a ayant été déterminée, on peut donner à b une infinité de valeurs différentes, pourvu que b ſoit plus grand que a (385).

Par exemple, ſi $a = 2$, & $b = 3$, on aura

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{2}{3} \cdot \frac{2\times2}{9} \cdot \frac{4\times2}{27} \cdot \frac{8\times2}{81}$, &c. $= 2$.

ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{16}{81}$, &c. $= 2$.

Si $b = 4$, a étant toujours $= 2$, on aura

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{2}{4} \cdot \frac{3\times2}{16} \cdot \frac{9\times2}{64} \cdot \frac{27\times2}{256}$, &c. $= 2$.

ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{2}{4} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{18}{64} \cdot \frac{54}{256}$, &c. $= 2$.

ou $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{32} \cdot \frac{27}{128}$, &c. $= 2$.

D'où l'on voit que b étant ſucceſſivement $= 5$, $= 6$, &c. il y aura une infinité de progreſſions géométriques décroiſſantes dont la ſomme ſera $= 2$.

389. Si $a = 1$, tous les termes qui ſuivent le 1er $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}$ ne ſont plus que $\frac{\overline{b-1}^{n}}{b^{n+1}}$, n étant ſucceſſivement 1, 2, 3, &c.

Par exemple, ſi $b = 2$, on a

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c. $\frac{1}{2^{\infty}} = 1$.

Si $b = 3$, on a

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{8}{81}$, &c. $\frac{2^{\infty}}{3^{\infty}} = 1$.

Si $b = 4$, on a

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{27}{256}$, &c. $\frac{3^{\infty}}{4^{\infty}} = 1$.

M.E.C.D. 2017

390. Les progreſſions, qui ſeroient les puiſſances conſécutives à l'infini d'une fraction quelconque $\frac{1}{n}$, n'appartiennent point à cette Théorie, ſi ce n'eſt quand $n = 2$; car hors de-là ce ne ſont point des Suites qui prennent toutes les parties de 1 ſelon l'art. 378, mais elles prennent moins ſelon l'art. 379. Auſſi a-t'on vû dans l'art. précédent, que ſi on a pris d'abord $\frac{1}{3}$ d'un Tout, il faut pour prendre le Tout, prendre enſuite $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{27}$, &c. & non pas $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, &c. ce qui ſeroit la Suite des puiſſances de $\frac{1}{3}$; que ſi on a pris d'abord $\frac{1}{4}$, il faut prendre enſuite $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{64}$, &c. & non pas $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$. On ſait d'ailleurs par l'art. 372, que la ſomme des puiſſances à l'infini de $\frac{1}{n}$ eſt $= \frac{1}{n-1}$: or $\frac{1}{n-1}$ eſt toujours une fraction, ſi ce n'eſt quand $n = 2$, ce qui fait que la Suite des puiſſances de $\frac{1}{2}$, dont la ſomme eſt $= 1$, entre dans la Théorie que nous traitons préſentement, & non pas les autres.

391. Donc ſi on a les deux 1ers termes d'une progreſſion géométrique infinie décroiſſante, dont les deux numérateurs ne ſoient pas tous deux 1, elle n'appartiendra qu'à la Théorie préſente, & l'on verra aiſément quelle en eſt la ſomme. Car c'eſt toujours a, c'eſt-à-dire, le numérateur du 1er terme $\frac{a}{b}$. Mais comme la fraction $\frac{a}{b}$ peut avoir été réduite, & par conſéquent les autres, ainſi qu'elles le ſont dans le 2^d exemple de l'art. 388, ou $\frac{2}{4}$, $\frac{6}{16}$, &c. ſont devenus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, &c. on n'auroit plus a, qui dans cet exemple eſt 2, & la ſomme de la progreſſion : mais 1 paroîtroit être a, & la ſomme de la progreſſion, & il ne l'eſt pas. C'eſt pour cela que la connoiſſance du 2^d terme eſt néceſſaire auſſi. Si le dénominateur du 2^d terme eſt le quarré de celui du 1er, il n'y a point eu de réduction de fractions, & par conſéquent le numérateur du 1er terme eſt a, qui n'a point été changé, & c'eſt la ſomme de la progreſſion. Mais ſi le dénominateur du 2^d terme n'eſt pas le quarré de celui du 1er, il y a eu une réduction, & il faut chercher a. Pour cela il faut voir quel eſt le plus petit nombre entier, qui étant coëfficient de ce dénominateur du

M.E.C.D. 2017

2^d terme, le rendroit le quarré du dénominateur du 1er; ce coëfficient multipliant auſſi le numérateur du 2^d terme, & le numérateur & le dénominateur du 1er, ne changera rien à leur valeur, & les remettra tous deux tels qu'ils étoient avant la réduction.

Ainſi ſi on a pour les deux 1ers termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{9}$, on voit tout d'un coup que 2 eſt la ſomme de la progreſſion.

Mais ſi on a $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{8}$, il faut, parce que 2 eſt le moindre coëfficient qui puiſſe rendre 8 quarré du dénominateur du 1er terme, qui ſera alors 4, tout étant multiplié par 2, il faut, dis-je, changer les deux termes en $\frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4}$, & en $\frac{3\times 2}{2\times 8} = \frac{6}{16}$, & l'on voit que 2 eſt la ſomme.

De même ſi on a pour les deux 1ers termes $\frac{2}{3}$ & $\frac{10}{18}$, on voit qu'en multipliant tout par 2, on aura $\frac{4}{6}$ & $\frac{20}{36}$; & par conſéquent 4 eſt la ſomme de la progreſſion.

392. Puiſque a étant $= 1$, la progreſſion eſt $\div\div \frac{1}{b} \cdot \frac{\overline{b-1}^{1}}{b^2} \cdot \frac{\overline{b-1}^{2}}{b^3}$, &c. (389), il ſuit que deux termes quelconques conſécutifs étant pris dans la Suite naturelle, ſi on fait une Suite dont le 1er terme ſoit 1 diviſé par le plus grand des deux, le 2^d, la 1re puiſſance du moindre diviſée par la 2de du plus grand, le 3me terme, la 2de puiſſance du moindre diviſée par la 3me du plus grand, & toujours ainſi à l'infini, cette Suite eſt une progreſſion géométrique, dont la ſomme eſt $= 1$.

Ainſi $\frac{1}{14} \cdot \frac{13}{\overline{-2}\,14} \cdot \frac{13}{\overline{-3}\,14}^{-2}$, &c. $= 1$.

393. Sans donner à a aucune autre valeur que 1, on peut avoir les expreſſions de chaque nombre entier ou rompu en progreſſions géométriques infinies, & l'expreſſion de chaque nombre en une infinité de différentes progreſſions. Car pour avoir l'expreſſion de 2, de 3, &c. il n'y a qu'à multiplier par 2, ou par 3, &c. tous les numérateurs d'une

M.E.C.D. 2017

progreſſion dont la ſomme ſoit $=1$, & de ces progreſſions il y en a une infinité (388 & 389). De même pour avoir l'expreſſion de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. il n'y a qu'à multiplier par 2, ou par 3, &c. tous les dénominateurs d'une progreſſion dont la ſomme ſoit $=1$. Ainſi la progreſſion $\frac{1}{b} . \frac{\overline{\quad}^{1}}{b-1} . \frac{\overline{\quad}^{2}}{b^2-1}$, &c. ſuffit pour tout.

394. Toutes ces progreſſions ayant un nombre de termes $=\infty$, & une ſomme finie, elles n'ont donc qu'un nombre fini de termes finis, & un infini d'infiniment petits. Donc telle eſt la progreſſion $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. $\frac{1}{2^{\infty}}$. Or cette progreſſion eſt celle des puiſſances conſécutives de 2, que l'on a changées en fractions, en donnant à toutes 1 pour numérateur, ce qui a laiſſé fini tout ce qui étoit fini, & changé en infiniment petit tout ce qui étoit infiniment grand. Donc il n'y avoit qu'un nombre fini, mais indéterminable, de puiſſances de 2 qui fuſſent finies, & il y en avoit un nombre infini d'infinies. Et cela confirme par le calcul, & *à poſteriori*, ce qui avoit été conclu *à priori* dans l'art. 228.

395. Il y a dans la Suite naturelle un nombre infini de termes finis, qui ſont ſucceſſivement les expoſans de 2. Donc puiſque 2 n'a qu'un nombre fini de puiſſances finies, il devient infini lorſqu'il n'a encore pour expoſant qu'un nombre fini, mais indéterminable. Donc il eſt poſſible réciproquement qu'un nombre fini beaucoup plus grand que 2, mais indéterminable, devienne infini, lorſqu'il n'aura pour expoſant qu'un nombre fini déterminable, comme 2, ou 3, &c. & ce qu'on trouve ici poſſible par une ſuite du calcul, & *à poſteriori*, on a prouvé *à priori* dans les art. 197. 198, &c. qu'il exiſtoit.

396. Dans la progreſſion $\frac{1}{b} . \frac{\overline{\quad}^{1}}{b-1}$, &c. plus b eſt grand, plus le 1er terme eſt petit, & en même temps moins les autres ſont décroiſſans. Car $\frac{b-1}{b}$ étant le multiplicateur

M.E.C.D. 2017

perpétuel de la progreſſion, & une fraction plus petite que 1, & d'autant plus approchante de 1, que 1 eſt plus petit par rapport à b, ou b plus grand, cette fraction approche d'autant plus de ne point changer, non plus que 1, ce qu'elle multiplie, qu'elle approche plus de 1, ou que b eſt plus grand. Donc plus b eſt grand, plus les termes de la progreſſion ſont petits, & en même temps moins décroiſſans, ou moins inégaux entr'eux. Ainſi la progreſſion $\frac{1}{14} \cdot \frac{13}{12}$, &c. de l'art. 392, eſt de toutes celles qu'on a vûes, celle dont les termes ſont les plus petits & les moins décroiſſans. Réciproquement, &c.

397. Donc ſi $b = \infty$, les termes ſeront infiniment petits, & infiniment peu décroiſſans, ou égaux. Et en effet la Formule donne $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{\infty - 1}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} \cdot \frac{\infty^2}{\infty_3} = \frac{1}{\infty}$, &c. & la ſomme en eſt $= 1$, comme doit être celle d'une infinité d'Infiniment petits du 1er ordre égaux. Cette progreſſion n'eſt plus progreſſion, ou ne l'eſt que le moins qu'il ſe puiſſe (53), & cela vient de ce qu'elle eſt la derniere d'une infinité de progreſſions pareilles, dont les termes étoient toujours d'autant moins décroiſſans, ou plus approchans d'être égaux entr'eux, que b étoit plus grand.

398. La progreſſion générale $\frac{1}{b}, \frac{\overline{b-1}^{1}}{b^2}$, &c. aboutit toujours à $\frac{\overline{b-1}^{\infty}}{b^{\infty}}$, c'eſt-à-dire, à la puiſſance infinie d'un nombre quelconque, diviſée par la puiſſance infinie d'un nombre plus grand d'une unité. Or tant que b eſt fini, ces deux puiſſances different d'un nombre infini d'ordres, mais toujours décroiſſant à meſure que b eſt plus grand (241). D'où il ſuit qu'à meſure que b eſt plus grand, chaque progreſſion finit toujours par un infiniment petit d'un ordre moins bas, ce qui convient avec ce qu'on a déja vû, qu'à meſure que b eſt plus grand, les termes ſont moins décroiſſans, & que quand $b = \infty$, le dernier terme eſt $\frac{1}{\infty}$, le moins bas de tous les Infiniment petits.

M.E.C.D. 2017

399. Si entre toutes ces progreſſions qui ont une ſomme égale, on vouloit choiſir celle dont les 4 premiers termes, par ex. approcheroient plus de faire la ſomme entiere que les 4 premiers de toute autre, il eſt clair qu'il faudroit prendre celle où b eſt le moindre, & par conſéquent $= 2$, car c'eſt celle dont les termes ſont les plus décroiſſans & les plus inégaux entr'eux (396), & par conſéquent tous les termes qui ſuivent les 4 premiers, étant plus petits, peuvent être négligés avec moins d'erreur, ou, ce qui revient au même, les 4 premiers approchent plus de faire la ſomme entiere qu'en toute autre progreſſion. Ainſi dans la progreſſion $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$; dès qu'on a pris ces 4 premiers termes, on a $\frac{15}{16}$, & il n'y a point de progreſſion pareille dont les 4 premiers termes approchent tant de faire 1.

400. Quoique dans ces progreſſions, dont la ſomme eſt $= 1$, ou en général $= a$, il puiſſe y avoir une infinité d'Infiniment petits d'ordres différens, inutiles à la ſomme, il faut prendre tous les termes de la progreſſion pour avoir a, parce que le nombre fini des termes finis qui ſeroient ſeuls utiles à la ſomme eſt indéterminable, & abſolument inconnu.

401. Il n'eſt pas beſoin qu'une Suite infinie, pour avoir une ſomme finie $= a$, ſoit une progreſſion géométrique: car il eſt clair qu'il peut y avoir une infinité d'autres manieres de diviſer a telles que quelques termes étant moindres ou plus grands que les correſpondans d'une progreſſion géométrique, d'autres ſeront en récompenſe plus grands ou plus petits, de ſorte que tout reviendra au même. J'appelle ces Suites *équivalentes à des progreſſions géométriques*.

Maniere dont une grandeur finie peut recevoir une infinité d'accroiſſemens ſans ceſſer d'être finie.

402. Je puis ajouter tout d'un coup a à a, ce qui donnera $2a$, de ſorte que a, par un ſeul accroiſſement, ſera devenu $2a$. Je puis auſſi ajouter à a d'abord $\frac{1}{10}a$, enſuite encore $\frac{1}{10}a$, &c. ou en général $\frac{1}{n}a$, n étant un nombre fini; & a ne deviendra $2a$, qu'après avoir reçu le nombre n d'accroiſſemens égaux. Mais ſi j'ajoute à a d'abord $\frac{a}{b}$, enſuite à a ainſi accrû $\frac{\overline{b-1}^{1} \times a}{b^2}$, enſuite à a encore accrû

M.E.C.D. 2017

$\frac{\overline{\quad}^{2}}{b-1\times a}$, & toujours ainſi de ſuite, a ne deviendra $2a$, qu'après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens : mais ces accroiſſemens ſeront décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, & ce ſeroit la même choſe, s'ils l'étoient ſelon quelqu'autre Suite équivalente (401). Or alors a devenu $2a$, ne ſort point de ſon ordre, qui eſt celui du Fini. Donc une grandeur finie qui reçoit une infinité d'accroiſſemens, mais décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, demeure finie, ou dans ſon ordre.

403. A plus forte raiſon a demeureroit-il dans ſon ordre, s'il recevoit une infinité d'accroiſſemens plus décroiſſans que ſelon une progreſſion géométrique, tels que ceux de l'article 380. Alors a ainſi accrû, ſeroit moindre que $2a$, & moindre ſelon telle raiſon qu'on voudroit.

404. Il eſt clair que a ſortiroit de ſon ordre, & deviendroit infini, s'il recevoit une infinité d'accroiſſemens finis égaux, à plus forte raiſon s'ils étoient croiſſans. Donc la ſeule maniere dont a puiſſe recevoir une infinité d'accroiſſemens, & demeurer dans ſon ordre, eſt de les recevoir décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, ou plus décroiſſans.

405. Réciproquement ſi une grandeur finie demeure dans ſon ordre après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens, ils étoient décroiſſans ſelon une progreſſion géométrique, ou équivalente, ou plus décroiſſans.

406. Ce qui ſe dit ici de la grandeur finie eſt également vrai de l'infiniment grande, ou petite, car cela naît de l'eſſence de la grandeur, & de ſa diviſibilité infinie.

407. Soit x une grandeur variable & croiſſante qui eſt d'abord $\frac{a}{b}$, enſuite $\frac{a}{b}+\frac{\overline{\quad}^{1}}{\frac{b-1\times a}{b^2}}$, enſuite $\frac{a}{b}+\frac{\overline{\quad}^{1}}{\frac{b-1\times a}{b^2}}+\frac{\overline{\quad}^{2}}{\frac{b-1\times a}{b^3}}$, & toujours ainſi de ſuite, il eſt clair que x ne ſera $=a$ qu'après avoir reçu une infinité d'accroiſſemens.

M.E.C.D. 2017

Si je retranche toujours de a, x ainſi croiſſant, je n'aurai donc $a - x = a - a = 0$, qu'après une infinité d'autres $a - x$, où x aura paſſé par une infinité de degrés, au lieu que j'aurois eu $a - a = 0$, en retranchant tout d'un coup a de a, ou par un nombre fini de degrés ſelon l'idée de l'art. 382. Donc une grandeur finie, & en général (406) toute grandeur peut n'être anéantie que par une infinité de décroiſſemens.

408. Lorſque x, en croiſſant toujours ſelon la progreſſion décroiſſante $\frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b-1}^{1} \times a}{b^2}$, &c. a paſſé l'endroit de cette progreſſion où finiſſent les termes finis, il ne prend plus que des accroiſſemens infiniment petits, & enfin ne differe de a qu'infiniment peu. Donc alors la différence de a & de x, ou $a - x$, eſt une grandeur infiniment petite, ou $= \frac{1}{\infty}$.

409. Puiſqu'alors $x + \frac{1}{\infty} = a$, x eſt $= a$, & $a - x = a - a = 0$. Mais cet $a - a = 0$ n'eſt pas le même que ſi on avoit retranché a de a tout d'un coup, ou par un nombre fini de degrés, ce qui auroit auſſi donné $a - a = 0$. Dans ces deux derniers cas, $0 = a - a$ eſt abſolu, parce qu'on a abſolument retranché a de a. Mais dans le cas de $a - x = a - a = 0$, on prend x dans un état où il ne differe qu'infiniment peu de a, & où $a - x = \frac{1}{\infty} = a - a = 0$. Donc alors 0 eſt relatif.

410. Si l'on a une grandeur croiſſante $\frac{1}{a-x}$, qui ſoit telle, parce que a étant conſtant, x croît toujours, & tend à devenir $= a$, & ſi à la fin l'étant devenu, il donne $\frac{1}{a-a} = \frac{1}{0}$, cette grandeur $\frac{1}{0}$ ſera infinie, pourvu que x ait paſſé par une infinité de degrés d'accroiſſement. Car alors $a - a = \frac{1}{\infty}$ (409), donc $\frac{1}{0}$ eſt 1 diviſé par $\frac{1}{\infty}$, ou ∞.

411. Réciproquement ſi on a une Suite de $\frac{1}{e-x}$ terminée par

M.E.C.D. 2017

par $\frac{1}{a-a} = \frac{1}{0} = \infty$, il faut entendre que x a passé par une infinité de degrés d'accroissement.

412. Jusqu'ici nous n'avons considéré les différens ordres d'Infiniment grands, ou d'Infiniment petits, que comme formés par des puissances, ou par des racines ; mais il y a encore une autre maniere dont il peut se former des ordres.

Maniere dont se peuvent former les différens ordres d'Infiniment grand ou petit, différente des précédentes.

Un nombre quarré, ou cubique, &c. peut être conçu comme formé *linéairement*. 4, par ex. ou 8, &c. peuvent être conçus, non comme le quarré, ou le cube de 2, mais comme une simple Suite linéaire de 4 ou de 8 unités, & alors au lieu que 2 étoit leur racine, 1 est leur Elément, c'est-à-dire, la moindre grandeur de leur *espece*, ou le moindre nombre entier dont ces nombres puissent être formés.

Selon cette idée, 1 est l'Elément commun de tous les nombres, & même de ∞, & si l'on veut, de ∞^2, ∞^3, &c. Mais si, lorsqu'il s'agira d'Infinis, on veut avoir l'Elément *de même espece*, c'est-à-dire, la moindre grandeur infinie, qui répétée un nombre de fois infini, ait pû former un certain Infini ; alors 1 n'est l'Elément que de ∞, quoiqu'il ne soit pas de même espece, mais il ne sera plus l'Elément de ∞^2, ∞^3, &c. ce ne sera pas même ∞ qui sera l'Elément de ∞^2, quoiqu'une Suite infinie de ∞ forment ∞^2, car il y a un moindre nombre infini qui étant infiniment répété, le peut former.

Soit $\propto < \infty$, & du même ordre. Le 3me proportionnel géométrique à $\propto$ & ∞ sera plus grand que ∞ & du même ordre ; donc $\propto$ multiplié par ce nombre, ou répété ce nombre de fois infini, donnera ∞^2. Donc $\propto$, & non pas ∞, sera l'Elément de ∞^2, & un Elément de même espece, au lieu que 1 étoit fini, ou, ce qui revient au même, $\propto$ sera l'Elément *immédiat* de ∞^2.

De même un $\propto^2$ sera l'Elément immédiat de ∞^3, car le 3me proportionnel à $\propto^2$ & à $\infty^{\frac{3}{2}}$ sera le nombre infini par lequel $\propto^2 < \infty^2$ étant multiplié, formera $\infty^{\frac{2\times 3}{2}} = \infty^3$.

M.E.C.D. 2017

Donc en général tout ∞^n a un Elément immédiat dans l'ordre $n-1$. Ainſi ∞^1 a pour le ſien $\infty^{1-1} = \infty^0 = 1$, ∞^2 pour le ſien un $\propto$ de l'ordre de ∞, &c. & de plus ſi $n > 1$, ∞^n a dans l'ordre de ∞^{n-1} un Elément immédiat moindre que ∞^{n-1}.

413. Si on éleve ∞^n & ſon Elément immédiat à la même puiſſance x, l'Infini ſera ∞^{nx}, & ſon Elément montera à l'ordre $\overline{n-1} \times x$. Par ex. ſi $n = 3$, & $x = 2$, l'Infini étant ∞^3, & ſon Elément immédiat de l'ordre de ∞^2, le 1er étant quarré ſera ∞^6, & le 2^d^ ſera de l'ordre de ∞^4. Si n étant toujours $= 3$, $x = 3$, le cube de l'Infini ſera ∞^9, & celui de l'Elément ſera de l'ordre de ∞^6, &c.

414. Si on tire la $\sqrt[x]{}$ quelconque d'un ∞^n & de ſon Elément immédiat, l'un ſera $\infty^{\frac{n}{x}}$, & l'autre de l'ordre de $\infty^{\frac{n-1}{x}}$.

Tout cela s'applique de ſoi-même aux Infiniment petits, qui ne ſont que des Infinis renverſés. Ce n'eſt que par rapport à ces Infiniment petits que cette conſidération des Elémens eſt de quelque utilité.

M.E.C.D. 2017

SECTION V.

Des grandeurs Incommenſurables.

415. SI l'on introduit entre 1 & 2 une infinité de moyens proportionnels arithmétiques, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on diviſe l'intervalle qui eſt entre 1 & 2, en une infinité de parties égales; il eſt clair que l'intervalle étant fini, & diviſé en un nombre infini de parties, ces parties, ou les différences des termes de la progreſſion qui ſe formera ſeront infiniment petites. Et en effet on aura $\frac{\cdot}{\cdot}$ 1. $1 + \frac{1}{\infty} . 1 + \frac{2}{\infty} . 1 + \frac{3}{\infty}$, &c. $1 + \frac{\infty}{\infty} = 1 + 1 = 2$.

Formation d'une infinité de nombres finis inexprimables dans des Suites infinies compriſes entre deux termes finis.

416. Ici il ne faut pas prendre le 2^d^ terme $1 + \frac{1}{\infty}$, $= 1$. Car ſi cela étoit, les deux 1ers termes de la progreſſion étant égaux, tous les autres le feroient, & elle ne ſeroit point croiſſante comme elle doit l'être, ou n'arriveroit point à 2 comme elle y doit arriver. $1 + \frac{1}{\infty}$ eſt donc 1 augmenté ſeulement d'une quantité infiniment petite, & telle que quand il aura reçu une infinité d'augmentations pareilles, il ſera $= 2$; c'eſt 1 que l'on conſidere comme commençant à être, pour ainſi dire, dans un mouvement d'accroiſſement, dont il reçoit déja le premier degré infiniment petit, & il ſeroit contradictoire à cette idée, de prendre $1 + \frac{1}{\infty} = 1$. Que ſi l'on ne conſidere pas $1 + \frac{1}{\infty}$ préciſément comme 1 étant dans ce mouvement d'accroiſſement; mais comme 1 accrû déterminément, & *à demeure*, de $\frac{1}{\infty}$, & qu'en cet état on le compare à 1, il eſt certain que $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, parce que 1 n'eſt accrû de rien, en comparaiſon de ce qu'il eſt. Cela revient encore à la différence qu'on a fait ſentir en pluſieurs endroits entre la grandeur qui eſt dans le paſſage du Fini à l'Infini, & celle qui a

M.E.C.D. 2017

franchi ce paſſage. Car de même qu'entre les Infinis de la Suite naturelle qui précedent ∞, il faut qu'il y ait des différences toujours $= 1$, & qui font l'accroiſſement perpétuel de ces Infinis, quoique nous n'en ayons aucune idée nette, ainſi entre les termes de la progreſſion arithmétique infinie dont 1 & 2 ſont les extremes, il faut qu'il y ait des différences $= \frac{1}{\infty}$ qui faſſent l'accroiſſement perpétuel de ces termes, quoique nous ne concevions point nettement comment ces différences peuvent être des accroiſſemens, ſi ce n'eſt lorſqu'elles ſont parvenues à être en nombre infini. En un mot, le paſſage du Fini à l'Infini, ou, ce qui revient au même, de l'Infiniment petit au Fini, nous échappe toujours, mais il n'en eſt pas moins réel.

417. Il eſt eſſentiel à cette progreſſion arithmétique infinie, compriſe entre 1 & 2, que chaque terme ſoit 1 plus une fraction moindre que 1, que chaque fraction ait ∞ pour dénominateur, & que les numérateurs des fractions ſoient la Suite des nombres naturels depuis 1 juſqu'à ∞.

418. Tant que les numérateurs des fractions ſont des nombres finis, ſoit déterminables, ſoit indéterminables, les fractions ſont infiniment petites, quoique toujours croiſſantes. Mais enfin après les termes finis indéterminables, viennent dans la Suite naturelle les $\propto$, & alors on a dans la progreſſion propoſée des $1 + \frac{\propto}{\infty}$, c'eſt-à-dire, 1 affecté de fractions finies (190), & ces fractions ſont toujours croiſſantes juſqu'à celle du dernier terme qui eſt $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

419. Toutes ces fractions, tant les $\frac{n}{\infty}$, n étant un nombre fini quelconque, que les $\frac{\propto}{\infty}$, ſont inexprimables, parce qu'elles ont toutes ∞ pour dénominateur. On peut même dire que les $\frac{\propto}{\infty}$ ſont les plus inexprimables, parce qu'elles ont auſſi un Infini pour numérateur; mais enfin elles le ſont

M.E.C.D. 2017

toutes, & par conſéquent auſſi tous les termes où elles entrent, & dont elles ſont une partie néceſſaire. Donc tous les termes moyens de la progreſſion ſont inexprimables.

420. ∞ eſt un nombre premier à l'égard de tous les nombres finis (94). Donc (61 & 62) quand on introduit entre 1 & 2 un nombre de moyens arithmétiques $= \infty$, on doit avoir des termes tout différens de ceux qu'on auroit eus, en introduiſant entre ces mêmes extremes un nombre fini quelconque de moyens arithmétiques. Et l'on voit en effet qu'au lieu que ſi ce nombre avoit été fini, on auroit eu des termes exprimables & connus, on n'en a ici que d'inexprimables & d'inconnus.

421. Tant que les fractions qui affectent les termes de la progreſſion propoſée ſont des $\frac{n}{\infty}$, on peut concevoir que les termes ſe confondent avec 1, dont ils ne different que d'une différence infiniment petite. Mais cela ne ſe peut plus abſolument, quand les fractions ſont devenues des $\frac{\propto}{\infty}$; car alors elles ſont finies, & les $1 + \frac{\propto}{\infty}$ different de 1 d'une différence finie. Donc il y a des nombres finis plus grands que 1, qui en different d'une différence finie, & qui ſont inexprimables.

422. Et puiſqu'il y a dans la Suite naturelle une infinité de $\propto$ avant ∞, il y a dans la progreſſion compriſe entre 1 & 2, une infinité de nombres inexprimables finis, dont la différence à 1 eſt finie.

423. De ce qu'ils ſont inexprimables, il ſuit que leur rapport à 1, ou à tout nombre exprimable, l'eſt auſſi.

424. Si l'on conçoit que l'intervalle qui eſt entre 1 & 2 ait été diviſé en un nombre de parties, non pas $= \infty$, mais $= \propto$, & tel que $\infty > \propto$ ait été nombre premier à ſon égard, il ſera entré dans cet intervalle un nombre $= \propto$ d'inexprimables tous différens de ceux que nous avons conſidérés juſqu'ici; & il y aura autant d'infinités de ces inexprimables tous différens les uns des autres dans chaque progreſſion, & différens de tous les exprimables, qu'il y aura de $\propto$ à l'égard deſquels ∞ ſera nombre premier.

M.E.C.D. 2017

425. Mais parce que nous ne pouvons pas diſtinguer ces nombres produits entre 1 & 2 par des diviſions $= \infty$ de ceux qui ſont produits par la diviſion $= \infty$, il vaut autant prendre tous ces inexprimables comme produits par la ſeule diviſion $= \infty$, en ſouſentendant néantmoins qu'ils peuvent avoir été produits par différentes diviſions infinies.

426. Si un nombre fini eſt poſſible, & s'il doit être entre 1 & 2, il eſt certainement un des exprimables ou des inexprimables, c'eſt-à-dire, produit par une diviſion quelconque, ou finie, ou infinie.

427. S'il y a une grandeur dont le quarré ſoit $= 2$, elle eſt entre 1 & 2, & par conſéquent eſt $1 + \frac{n}{m}$, n & m étant deux grandeurs inconnues, & $n < m$. Or $\overline{1 + \frac{n}{m}}^{2} = 2$ donne l'équation $nn + 2nm = mm$, ou $nn + 2nm - mm = 0$, qui ſelon les regles de l'Algebre ne peut être imaginaire, & par conſéquent il y a quelque grandeur dont le quarré $= 2$.

Mais il eſt impoſſible que deux nombres finis exprimables ſoient tels que le quarré nn du plus petit, plus $2nm$ ſoit égal au quarré mm du plus grand, ce que je prouve ainſi.

Tout nombre plus grand que n ſera $n + x$. Il faut par la ſuppoſition que $\overline{n^2 + 2n \times n + x}^{2}$ ſoit $= \overline{n + x}^{2}$, c'eſt-à-dire $3n^2 + 2nx = n^2 + 2nx + xx$, ou $2n^2 = x^2$. Or il eſt impoſſible que le double d'un nombre quarré fini exprimable ſoit quarré.

Donc (426) c'eſt parmi les nombres finis inexprimables, ou produits par une diviſion infinie, qu'il faut chercher le nombre dont le quarré $= 2$.

428. Donc dans $1 + \frac{n}{m}$, expreſſion de la grandeur cherchée, il faut poſer $m = \infty$, ce qui donne l'équation $nn + 2n\infty = \infty^2$, qui ne peut être imaginaire, & où l'on voit que n eſt néceſſairement une grandeur infinie, car autrement l'équation ſe réduiroit à $\infty^2 = 0$, ce qui eſt abſurde.

M.E.C.D. 2017

De plus n eſt, & par la ſuppoſition, & par la nature de la choſe, moindre que m. Et ſi $n = m = \infty$, l'équation donneroit $3\infty^2 = \infty^2$. Donc $n = \infty$. Et $1 + \frac{\infty}{\infty}$ eſt la grandeur cherchée. Donc $1 + \frac{\infty}{\infty} = \sqrt[2]{2}$. Donc $\sqrt[2]{2}$ eſt un nombre inexprimable.

429. $1 + \frac{\infty}{\infty}$ eſt une expreſſion indéterminée de tout inexprimable compris entre 1 & 2, & qui de plus a une différence finie à 1 (422). Et $\sqrt[2]{2}$ eſt une expreſſion déterminée d'un certain inexprimable particulier dont le quarré $= 2$. Mais malgré cela $\sqrt[2]{2}$ eſt toujours un nombre auſſi inexprimable que $1 + \frac{\infty}{\infty}$, ce qui fait voir que l'inexprimable & l'indéterminable peuvent être différens.

430. On prouvera par les mêmes raiſonnemens qu'on a faits dans les art. 427 & 428, qu'il n'y a entre 1 & 2 aucun nombre fini exprimable ou produit par une diviſion finie, dont le cube ſoit $= 2$, mais qu'il y en a un produit par une diviſion infinie, & qui ſe détermine par l'expreſſion $\sqrt[3]{2}$, ſans cependant s'exprimer, qu'il y en a un autre qui eſt $\sqrt[4]{2}$, un autre $\sqrt[5]{2}$, &c. enfin tant que l'expoſant de la $\surd$ ſera fini.

431. Donc 2 eſt réellement & ſans fiction une puiſſance finie quelconque, pourvû qu'on le conſidere dans une Suite infinie où il aura toutes ſes $\surd$ finies quelconques, mais non pas dans une Suite finie, quelle qu'elle ſoit, car alors il ne ſera aucune puiſſance.

432. On fera les mêmes raiſonnemens ſur 3, dont toutes les $\surd$ ſont compriſes entre 1 & 2, & inexprimables.

433. 4 a toutes ſes $\surd$ finies entre 1 & 2, excepté la $\sqrt[2]{}$, qui eſt 2. De même 5, 6, 7, juſqu'à 8 excluſivement, ont toutes leurs $\surd$ finies entre 1 & 2, excepté la $\sqrt[2]{}$, car 8 n'a

M.E.C.D. 2017

par ſa $\sqrt[3]{}$ entre 1 & 2, puiſque $\sqrt[3]{}8 = 2$. Et en général tout nombre a toutes ſes $\sqrt{}$ finies entre 1 & 2, excepté un nombre de ces $\sqrt{}$ égal au nombre des puiſſances de 2 qu'il a au deſſous de lui, à commencer par 4, ce qui revient à l'art. 261. Ainſi 31 a toutes ſes $\sqrt{}$ entre 1 & 2, excepté 3, qui ſont par conſéquent la $\sqrt[2]{}$, la $\sqrt[3]{}$, & la $\sqrt[4]{}$, parce qu'il a au deſſous de lui trois puiſſances de 2, qui ſont 4, 8, & 16. Et il eſt clair que ſelon les raiſonnemens qu'on a faits, toutes ces $\sqrt{}$ quelconques de nombres quelconques compriſes entre 1 & 2 ſont inexprimables.

434. Au lieu de ſuppoſer, comme nous avons toujours fait juſqu'ici, que c'eſt l'intervalle entre 1 & 2 qui a été infiniment diviſé, on peut concevoir également que c'eſt l'intervalle entre 1 & 3, entre 1 & 4, &c. Et il eſt clair que les diviſions infinies quelconques, c'eſt-à-dire, ſoit par ∞, ſoit par les $\propto$, feront entrer dans ces nouveaux intervalles de nouvelles infinités d'inexprimables.

435. D'un autre côté il y a dans la Suite naturelle une infinité de nombres qui ne ſont aucune puiſſance, c'eſt-à-dire, ni quarrés, ni cubiques, &c. Et ce ſont, 1° tous les nombres premiers qui ne ſont aucun produit, 2° tous les nombres qui ne peuvent être un produit que de nombres différens entre eux; de ſorte qu'il en reſte peu qui ſoient un produit de quelque nombre par lui-même, ou une puiſſance quelconque, & qui par conſéquent aient au deſſous d'eux dans la Suite naturelle la $\sqrt{}$ correſpondante à cette puiſſance. De plus les nombres, qui ſont pluſieurs puiſſances à la fois, ne ſont pas toutes les puiſſances qui ſont au deſſous de la plus élevée. Ainſi 64, qui eſt une puiſſance 2, une puiſſance 3, & une puiſſance 6, n'eſt pas une puiſſance 4 ni 5, & par conſéquent il n'a dans la Suite naturelle qu'une $\sqrt[2]{}$, une $\sqrt[3]{}$, & une $\sqrt[6]{}$, mais non une $\sqrt[4]{}$, ni une $\sqrt[5]{}$. Enfin tout nombre fini n ayant ſa $\sqrt[\infty]{} = 1$, puiſque $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$, il a depuis lui juſqu'à 1 une infinité

M.E.C.D. 2017

infinité de ✓ tant d'un exposant fini, que d'un exposant infini ; & comme depuis lui jusqu'à 1 , il n'y a dans la Suite naturelle qu'un nombre fini déterminable de termes $= n$, & que ses ✓ d'un exposant fini déterminable sont en nombre fini indéterminable, il faut que s'il a quelques-unes de ces ✓ dans la Suite naturelle, & quelque grand nombre qu'il en ait, il en ait encore un nombre fini indéterminable qui ne soient point dans cette Suite. Donc toutes ces ✓ ne se trouveront que dans la Suite naturelle infiniment divisée, & feront quelques-uns des inexprimables produits par les divisions infinies.

436. Toutes ces ✓ inexprimables sont les nombres que l'on appelle *incommensurables*, ou *irrationels*, ou *sourds*, parce qu'on a toujours bien reconnu qu'ils n'avoient aux autres nombres ordinaires aucun rapport qui se pût déterminer précisément. Mais quoique l'existence de ces nombres fût bien certaine, il devoit toujours paroître étrange qu'il y en eût ; car d'où peut venir que des grandeurs finies, ou leurs rapports à d'autres grandeurs finies, soient inexprimables ? Cette merveille ne doit point cesser tant qu'on ne regarde les incommensurables que comme des grandeurs finies : mais elle cesse absolument dès qu'on voit le mélange d'Infini qui y entre. Tout incommensurable est $a + \frac{\infty}{\infty}$. Le Fini est par lui-même exprimable, & l'Infini inexprimable ; & puisque $a + \frac{\infty}{\infty}$ est une grandeur finie dans laquelle entre la fraction $\frac{\infty}{\infty}$ qui ne se peut exprimer autrement, l'Infini communique à cette grandeur finie son *inexprimabilité*, de la même maniere dont le Fini communique son *exprimabilité* aux rapports de l'Infini, lorsqu'il y entre, comme dans 1∞ & 2∞.

Que ces nombres inexprimables sont les Incommensurables.

437. On voit aussi la raison essentielle pour laquelle tous les incommensurables sont exprimés par des ✓. C'est qu'étant inexprimables, ils ne peuvent être déterminés que par quelque rapport à des nombres exprimables & déterminés : or ils n'y peuvent avoir de rapport que par en être les ✓ qui

Pourquoi tout Incommensurable est une Racine.

M.E.C.D. 2017

leur manquent en nombres exprimables, car d'ailleurs rien ne manque à ces nombres. Mais du nombre infini d'inexprimables que les diviſions infinies introduiſent entre 1 & n, nombre quelconque, il en reſte une infinité qui ne ſont point $\surd$ de quelque nombre exprimable, & qui faute d'être ſuſceptibles de cette détermination, ne ſont point au rang des incommenſurables, quoiqu'ils ſoient abſolument de la même nature. Ainſi les inexprimables finis ſont une *eſpece*, dont les incommenſurables ne ſont qu'une petite partie.

Que tout nombre fini eſt réellement une puiſſance quelconque.

438. Tout nombre fini n eſt réellement & ſans fiction une puiſſance finie ou infinie quelconque, qui a toutes les $\surd$ correſpondantes dans l'intervalle qui eſt entre n & 1, & ces $\surd$ ſont, ou dans la Suite naturelle entre n & 1, auquel cas elles ſont commenſurables, ou dans cette même Suite infiniment diviſée, auquel cas elles ſont incommenſurables.

439. En ſuppoſant que $\sqrt[n]{a}$ exprime tout incommenſurable en général, il y a néceſſairement quelque progreſſion géométrique d'un nombre fini de termes compris entre a & 1 qui donnera ce $\sqrt[n]{a}$; par ex. $\sqrt[2]{2}$ eſt le moyen géométrique proportionnel entre 2 & 1. Mais cela n'eſt nullement contraire à ce qui a été dit, que tout incommenſurable étoit produit par une diviſion ou progreſſion infinie. Car $\sqrt[n]{a}$ n'eſt pas une valeur, ce n'eſt qu'une détermination d'un incommenſurable entre une infinité d'autres, & une détermination qui n'en apprend point préciſément la valeur, & cette valeur préciſe n'eſt que dans une progreſſion infinie.

Parce que $\sqrt[n]{a}$ entre néceſſairement dans quelque progreſſion géométrique finie, elle n'entrera point dans la progreſſion géométrique infinie que l'on pourra faire entre a & 1 (62 & 94), & on a vû que $\sqrt[n]{a}$ entre toujours dans une progreſſion arithmétique infinie. Ce n'eſt donc que dans cette progreſſion qu'eſt $\sqrt[n]{a}$ avec ſa valeur.

M.E.C.D. 2017

440. Mais comme tous les termes de cette progreſſion nous ſont inconnus, à cauſe de ∞ qui s'y mêle, cette valeur ne peut jamais être connue.

Seulement comme $\sqrt[n]{a}$ eſt plus grande que 1, & moindre que a, limites entre leſquelles $\sqrt[n]{a}$ eſt compriſe, on peut, en introduiſant entre a & 1 un nombre de moyens arithmétiques toujours plus grand, trouver des limites toujours moins éloignées que a & 1, entre leſquelles $\sqrt[n]{a}$ ſera compriſe, & par-là on aura toujours un nombre moins au deſſous d'elle que 1, & moins au deſſus que a, & on approchera toujours de plus en plus de la valeur préciſe de $\sqrt[n]{a}$. De-là vient la Méthode des approximations. On a toujours des nombres commenſurables moins au deſſous, & moins au deſſus de $\sqrt[n]{a}$, parce qu'on fait toujours des diviſions finies plus grandes; mais on ne peut arriver à la valeur préciſe de $\sqrt[n]{a}$, parce qu'on ne fait que des diviſions finies, & quand même on en feroit une infinie, cette valeur ſeroit toujours inconnue à cauſe du mélange de ∞ (436).

441. De cette Théorie réſulte une méthode facile pour trouver deux nombres commenſurables, dont l'un ſoit plus petit, & l'autre plus grand qu'un incommenſurable quelconque de moins que d'une différence donnée, & cela ſans faire différentes approximations comme à l'ordinaire. *Méthode pour trouver les Incommenſurables ſi approchés qu'on voudra.*

L'incommenſurable propoſé ſera en général $\sqrt[n]{a}$, & la différence donnée $\frac{1}{d}$. Je conçois entre 1 & a une progreſſion.

$$\div\ 1.\ 1 + \tfrac{1}{d}.\ 1 + \tfrac{2}{d}.\ 1 + \tfrac{3}{d}, \text{ \&c. } 1 + \tfrac{m}{d} = a.$$

$\sqrt[n]{a}$ étant un incommenſurable, & appartenant à une diviſion ou progreſſion infinie, il ne ſera aucun des termes de cette progreſſion finie, mais il ſera entre deux de ſes termes conſécutifs, & par conſéquent ſera plus grand que l'un, &

M.E.C.D. 2017

moindre que l'autre de moins que $\frac{1}{d}$ qui eſt leur différence. Il s'agit donc de trouver les deux termes de la progreſſion finie, entre leſquels eſt $\sqrt[n]{a}$.

Si je ſuppoſe $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{x}{d}$, x étant un numérateur inconnu, il eſt certain que parce que $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{\infty}{\infty}$, & que cette fraction eſt inexprimable, $\frac{x}{d}$ le ſera auſſi, & par conſéquent d étant exprimable ou commenſurable, ce ſera x qui ſera incommenſurable, & par conſéquent il ne ſera aucun des numérateurs de la progreſſion finie, mais entre deux de ces numérateurs, qui tous different entr'eux d'une unité. Donc le numérateur de cette progreſſion que x ſurpaſſera de moins que d'une unité, ſera le numérateur du terme cherché de la progreſſion finie qui ſera immédiatement au deſſous de $\sqrt[n]{a}$, & ce numérateur étant trouvé, donnera celui du terme qui ſera immédiatement au deſſus de $\sqrt[n]{a}$. Donc tout ſe réduit à trouver la valeur de x.

Puiſque $1 + \frac{x}{d} = \sqrt[n]{a}$, $\overline{1 + \frac{x}{d}}^{n} = a$, cette équation ſera toujours du degré n, & il n'y a qu'à la réſoudre pour avoir la valeur de x.

Si $n = 2$, ce qui rend l'équation du 2d degré, on a $\left.\begin{matrix} xx + 2xd + dd \\ - add \end{matrix}\right\} = 0$, & $x = -d + \sqrt[2]{add}$.

En ce cas, ſi $a = 2$, & $d = 96$, c'eſt-à-dire, ſi on cherche deux nombres commenſurables qui different de $\sqrt[2]{2}$ de moins que de $\frac{1}{96}$, l'un en deſſous, l'autre en deſſus, on trouve $\sqrt[2]{2dd}$ plus grande de moins qu'une unité que 135, & par conſéquent le numérateur du terme qui eſt immédiatement au deſſous de $\sqrt[2]{2}$ eſt $135 - 96 = 39$. Donc ce terme eſt

M.E.C.D. 2017

$1 + \frac{39}{96}$, & celui qui eſt immédiatement au deſſus, eſt $1 + \frac{40}{96} = 1 + \frac{5}{12}$. D'où l'on voit que $1 + \frac{5}{12}$ eſt plus grand que $\sqrt[2]{2}$ de moins que $\frac{1}{96}$.

Si $a = 5$, le reſte étant le même, on trouveroit que $\sqrt[2]{5dd}$ eſt plus grande de moins qu'une unité que 214; que par conſéquent le numérateur du terme, qui eſt au deſſous de $\sqrt[2]{5}$, eſt $214 - 96 + 118$, que ce terme eſt donc $1 + \frac{118}{96} = 2 + \frac{22}{96}$, & que le terme qui eſt immédiatement au deſſus, eſt $2 + \frac{23}{96}$. D'où l'on voit que $\sqrt[2]{5}$ eſt plus grande que $2 + \frac{11}{48}$ de moins que $\frac{1}{96}$.

On voit par cet exemple, que quand $\sqrt[n]{a}$ eſt au deſſus de 2, la fraction qui s'ajoute à 1, contient un entier, ou des entiers, ainſi qu'il le faut, & que la méthode l'emporte néceſſairement.

Si $n = 3$, ce qui donne l'équation du 3me degré $\left.\begin{matrix} x^3 + 3x^2d + 3xd^2 + d^3 \\ - ad^3 \end{matrix}\right\} = 0$, on trouvera qu'en faiſant évanouir le 2^d^ terme par la ſuppoſition de $x = y - d$, le 3me terme s'évanouit auſſi dans la transformée, qui ſe réduit à $y^3 = ad^3$. Donc $y = \sqrt[3]{ad^3}$. Donc $x = \sqrt[3]{ad^3} - d$.

En ce cas, ſi $a = 2$, & $d = 96$, $\sqrt[3]{2}$ eſt entre $1 + \frac{24}{96}$, & $1 + \frac{25}{96}$.

Si $n = 4$, on trouvera qu'en faiſant évanouir le ſecond terme de l'équation du quatrieme degré, le 3me & le 4me s'évanouiront auſſi, & qu'il viendra $x = \sqrt[4]{ad^4} - d$. De ſorte que pour $\sqrt[n]{a}$ en général, on a $x = \sqrt[n]{ad^n} - d$.

Il pourroit ſembler ici que $\sqrt[n]{ad^n}$ étant $= d\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$

M.E.C.D. 2017

entre toujours dans l'expreſſion de $1 + \frac{x}{d} = \sqrt[n]{a}$; que par conſéquent on fait un cercle vicieux, & que l'on n'avance point. Il eſt même vrai, & cela doit être, que $1 + \frac{x}{d}$, par la valeur que nous donnons à x, ne ſe trouve que $\sqrt[n]{a}$; car $1 + \frac{x}{d} = 1 + \frac{d\sqrt[n]{a} - d}{d} = 1 + \frac{\sqrt[n]{a} - 1 \times d}{d} = 1 + \sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{a}$. Mais il faut remarquer que ce n'eſt pas $\sqrt[n]{a}$ que l'on cherche, on ne doit & on ne peut jamais la trouver autrement exprimée par $\sqrt[n]{a}$. On cherche deux nombres commenſurables entre leſquels elle eſt. Il eſt vrai que pour les trouver, il faut laiſſer $\sqrt[n]{\overline{a\,d^n}} - d$ ſous cette forme, & ne la pas prendre ſous l'équivalente $d\sqrt[n]{a} - d$. La raiſon en eſt claire.

Conſidération des Racines quelconques des nombres.

442. Si l'on conçoit toutes les $\sqrt{2}$, qui ſont autant d'incommenſurables, diſpoſées de ſuite entre 2 & 1, elles formeront la Suite $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, &c. $2^{\frac{1}{\infty}}$, dont les termes auront toujours un rapport géométrique décroiſſant, & par conſéquent tendront à l'égalité. Donc l'intervalle entre 2 & 1 ſera diviſé en une infinité de parties décroiſſantes, & comme il eſt Fini, cette infinité de parties ne pourront pas être Finies, mais elles ſeront, ou toutes Infiniment petites, ou les unes en nombre fini Finies, & les autres en nombre infini Infiniment petites. Or il eſt bien clair que $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{4}}$, &c. ont des différences finies, & par conſéquent diviſent l'intervalle en parties finies, donc l'intervalle eſt diviſé d'abord en un nombre ſeulement fini de parties Finies, & enſuite en un nombre infini d'Infiniment petites.

443. Donc il y a un nombre infini de $\sqrt{2}$ qui n'ont de l'une à celle qui la ſuit, que des différences infiniment petites, & même toujours décroiſſantes.

M.E.C.D. 2017

444. Donc le nombre fini de $\surd 2$, qui ont des différences finies, doivent être celles dont les expoſans ſont Finis déterminables, & celles dont les expoſans ſont Finis indéterminables ou ∞, auront les différences infiniment petites. Cela eſt viſible.

445. Puiſque c'eſt l'intervalle entre 2 & 1 qui a été ainſi diviſé, la derniere partie de cet intervalle eſt infiniment petite.

Donc à la fin de la Suite, $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, ce que l'on ſavoit déja d'ailleurs.

Et même toutes les $\surd$ infinies de 2, ou les $2^{\frac{1}{\infty}}$ qui ne ſont éloignés de 1 que d'un nombre fini de termes de cette Suite, ſont encore confondus avec 1, puiſqu'ils n'en different que d'un nombre fini de différences infiniment petites.

446. On en doit dire autant des $\surd 3$ toutes compriſes entre 2 & 1, & même des $\surd$ de tout nombre n, quoiqu'elles ne ſoient pas toutes entre 2 & 1, car elles feront toujours entre n & 1, & cet intervalle étant fini, le raiſonnement ſera toujours le même, ſeulement cet intervalle ſera diviſé en parties plus grandes, tant Finies qu'Infiniment petites, ce qui rendra toujours $n^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

447. Toutes les $\surd 2$ étant diſpoſées entre 2 & 1, ſi l'on conçoit les $\surd 3$ diſpoſées dans ce même intervalle, elles ne peuvent, parce qu'elles ſont toutes différentes des $\surd 2$, ſe placer que dans les intervalles que les $\surd 2$ laiſſent entr'elles, & par-là on voit que tant que les $\surd 2$ & les $\surd 3$ ont des expoſans finis déterminables, les unes ſe placent dans des intervalles finis que les autres laiſſent entr'elles, & que par conſéquent elles ont les unes aux autres des différences finies, après quoi elles n'en ont plus que d'infiniment petites, & que toutes les $\surd 2$ & $\surd 3$ ſe confondent dès qu'elles n'ont plus des expoſans finis déterminables.

448. Donc auſſi à meſure que leurs expoſans Finis déterminables augmentent, elles approchent davantage de ſe

M.E.C.D. 2017

confondre, ou d'être égales. Par exemple, $\sqrt[5]{2}$ & $\sqrt[5]{3}$ approchent plus de l'égalité que $\sqrt[4]{2}$ & $\sqrt[4]{3}$, & moins que $\sqrt[6]{2}$ & $\sqrt[6]{3}$.

449. Il en ira de même des incommenſurables qui ne ſeront pas tous compris entre 2 & 1, tels que ſont les $\sqrt{4}$ & les $\sqrt{5}$, & en général des $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$, n étant un nombre fini quelconque; car les intervalles entre n ou $n+1$ & 1 ſeront toujours diviſés de la même maniere, mais ſeulement en parties plus grandes (446). Donc en général les $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ approchent d'autant plus de l'égalité, que l'expoſant de la $\sqrt{}$ étant le même de part & d'autre, eſt plus grand.

450. D'un autre côté, plus n eſt grand, plus n & $n+1$ approchent de l'égalité, & par conſéquent auſſi leurs $\sqrt{}$ d'un même expoſant. Donc $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ approchent d'autant plus de l'égalité, 1° que leur expoſant étant le même eſt plus grand, 2° que n eſt plus grand. Par exemple, $\sqrt[6]{2}$ & $\sqrt[6]{3}$ approchent plus de l'égalité que $\sqrt[5]{2}$ & $\sqrt[5]{3}$, mais moins que $\sqrt[6]{3}$ & $\sqrt[6]{4}$.

Cela vient évidemment de ce que, quoique l'intervalle entre n ou $n+1$ & 1 ſoit diviſé en de plus grandes parties à meſure que n eſt plus grand, les $\sqrt{n}$ & les $\sqrt{n+1}$ ſont plus proches chacune de celle du même nom à meſure que n eſt plus grand; & par conſéquent le plus de grandeur de l'intervalle qui eſt entre n ou $n+1$ & 1 n'empêche nullement le plus de proximité des $\sqrt{n}$ & $\sqrt{n+1}$ du même nom.

Nous n'avons comparé que des $\sqrt{}$ de même nom de nombres conſécutifs, parce qu'on ne pourroit comparer que beaucoup moins exactement des $\sqrt{}$ de différens noms, & de nombres

M.E.C.D. 2017

nombres non conſécutifs, & de plus cela ſeroit inutile au deſſein préſent.

451. De tout ce qui a été dit, il ſuit que tous les Incommenſurables ont entr'eux des différences finies, tant que les ✓ qui les expriment ont des expoſans finis déterminables, ce qui eſt la ſeule forme ſous laquelle nous les connoiſſions, qu'enſuite quand ces expoſans ſont des Finis indéterminables, ils n'ont plus que des différences infiniment petites décroiſſantes, & qu'enfin quand l'expoſant eſt infini, ils n'ont plus à 1 qu'une différence encore plus petite que toutes les précédentes, ou ſont 1.

452. Donc l'incommenſurabilité s'anéantit par le décroiſſement infini de la grandeur incommenſurable quelconque, qui cependant ne s'anéantit pas, puiſqu'elle devient 1, & par ce décroiſſement infini l'incommenſurable devient commenſurable. En effet, tout Incommenſurable étant, ou pouvant être devenu $1 + \frac{\propto}{\infty}$, il décroît à l'infini par le ſeul décroiſſement de la fraction $\frac{\propto}{\infty}$, dans laquelle ∞ étant conſtant & $\propto$ variable, $\propto$ décroît juſqu'à ce qu'il ſoit enfin $= 1$, ce qui donne $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, & alors l'incommenſurabilité ceſſe.

A quoi eſt attachée l'incommenſurabilité; qu'elle vient de l'Infini.

453. L'incommenſurabilité eſt attachée au rapport $\frac{\propto}{\infty}$ qui dans toutes ſes variations eſt toujours également inexprimable & inconnu, & par conſéquent quoique la grandeur $1 + \frac{\propto}{\infty}$, qui eſt incommenſurable, décroiſſe, & tende à devenir commenſurable, & à la fin le devienne effectivement, elle eſt cependant toujours également incommenſurable.

454. Donc l'incommenſurabilité n'a point de plus & de moins, quoique la grandeur $\frac{\propto}{\infty}$, d'où dépend l'incommenſurabilité, en ait.

455. Puiſque l'incommenſurabilité d'un nombre vient de l'Infini qui y entre néceſſairement, il faut regarder deux

M.E.C.D. 2017

Incommenſurables comparés entr'eux comme deux Infinis, & leur rapport comme celui de deux Infinis. Donc deux Iucommenſurables auront entr'eux un rapport exprimable, ou inexprimable, quand deux Infinis en auroient un. Or deux Infinis n'ont un rapport exprimable que quand ils ſont le même Infini affecté de deux coëfficiens finis, donc pareillement deux Incommenſurables n'ont un rapport exprimable que quand ils ſont le même Incommenſurable affecté de deux différens coëfficiens, comme $\sqrt[n]{a}$ & $m\sqrt[n]{a}$, ou $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{m}$, donc en ce cas leur rapport eſt exprimable, ou, ce qui eſt le même, ils ſont commenſurables entr'eux, c'eſt-à-dire, :: 1. *m*. ou :: *m*. 1. Mais par la raiſon contraire, $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$, ou $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[m]{a}$, quelques coëfficiens qu'ils puiſſent avoir, n'ont aucun rapport exprimable, ou ſont incommenſurables à l'égard l'un de l'autre, auſſi bien qu'à l'égard de tous les autres nombres, car dans $\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{\propto}{\infty}$, & dans $\sqrt[m]{a} = 1 + \frac{\propto}{\infty}$, $\propto$ eſt différent, & de même dans $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$. En un mot $\propto$ qui entre dans $\sqrt[n]{a}$ eſt unique, & n'eſt le même dans aucun autre Incommenſurable, & de-là tout le reſte s'enſuit.

Comparaiſon des Finis indéterminables, & des Incommenſurables.

456. Les Finis indéterminables ſont tels qu'étant élevés à quelque puiſſance finie, ils deviennent Infinis, & par conſéquent ils ſont $\surd$ finies de quelque Infini. Les Incommenſurables ſont des $\surd$ finies de quelque nombre fini, mais tels que l'Infini entreroit néceſſairement dans leur valeur préciſe. Donc les Incommenſurables & les Finis indéterminables ſont également inexprimables, parce qu'ils tiennent de l'Infini les uns & les autres. Mais les Incommenſurables ſont déterminables, parce qu'ils ſont $\surd$ de quelque nombre fini qui ſe détermine, & les Finis indéterminables ſont indéterminables, parce qu'ils ſont $\surd$ de quelque Infini.

M.E.C.D. 2017

457. Nous n'avons conſidéré juſqu'ici que des Incommenſurables, qui étoient des √ finies de quelque nombre fini, & ce ſont auſſi les ſeuls que les Géometres aient conſidérés, mais il y en a d'autres eſpeces. *Nouvelles eſpeces d'Incommenſurables. 2de eſpece.*

Au lieu d'introduire dans l'art. 415. un nombre infini de moyens arithmétiques entre 1 & 2, on y auroit pu introduire ce même nombre de moyens géométriques, ce qui donne $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $2^{\frac{1}{\infty}}$. $2^{\frac{2}{\infty}}$. $2^{\frac{3}{\infty}}$, &c. $2^{\frac{\infty}{\infty}} = 2$.

Parce que $2^{\frac{1}{\infty}} = 1$, comme $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, il faut appliquer ici le raiſonnement de l'art. 416, & ne pas prendre $2^{\frac{1}{\infty}}$ comme préciſément $= 1$, de même qu'on n'a pas pris $1 + \frac{1}{\infty}$ comme préciſément $= 1$. Il faut donc néceſſairement regarder la progreſſion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. $2^{\frac{1}{\infty}}$. $2^{\frac{2}{\infty}}$, &c. comme croiſſante, quoiqu'elle le ſoit infiniment peu dans tout ſon cours, auſſi-bien que l'arithmétique correſpondante : mais les différences infiniment petites de l'arithmétique étoient égales, & celles de la géométrique ſont croiſſantes.

Il y a dans la géométrique des $2^{\overline{\infty}}$, mais en nombre fini ſeulement, qui ont à 1 une différence finie. Car la progreſſion arithmétique correſpondante a une infinité de termes qui ont à 1 une différence finie (421 & 422), donc la géométrique qui diviſe le même intervalle le plus inégalement qu'il ſoit poſſible, & de la maniere la plus oppoſée à la progreſſion arithmétique, n'a qu'un nombre fini de ces termes. Or ils ſont néceſſairement des $2^{\frac{\propto}{\infty}}$. Et en effet, comme dans *A* le nombre des termes finis, ou qui ont une différence finie à 1, & le nombre des termes qui y ont une différence infinie, étant tous deux infinis, le nombre ſeul des termes qui ont des différences finies à 1 eſt infini dans *G*, de même il faut pour les deux progreſſions dont il s'agit ici,

M.E.C.D. 2017

que le nombre des termes qui ont une différence infiniment petite à 1, & le nombre des termes qui y ont une différence finie, étant tous deux infinis dans l'arithmétique, le nombre seul des termes qui y ont une différence infiniment petite à 1, soit infini dans la géométrique. Or les $2^{\frac{\infty}{\infty}}$ étant des nombres finis finiment différens de 1, ils sont cependant inexprimables, & par conséquent ont tous les caracteres d'Incommensurables.

458. Ces Incommensurables ne sont pas comme les $\surd 2$ des $\surd$ finies de 2, mais des $\surd$ infinies de 2 élevé à quelque puissance infinie moindre que la $\surd$. Ils sont déterminables en ce que, comme les $\surd 2$, ils appartiennent au nombre déterminé 2 : mais ni la dénomination de la $\surd$ qui les exprime n'est déterminée comme dans les $\surd 2$, ni la puissance dont on tire cette $\surd$ ne l'est ; & par tout cela ils sont d'une espece différente des $\surd 2$.

459. On peut remarquer ici en passant, que la somme de la progression arithmétique infinie comprise entre 1 & 2 sera $(77)\ 2 + \frac{1}{\infty} \times \infty \times \frac{\infty}{2} = 2 + \frac{\infty}{\infty} \times \frac{\infty}{2} = \frac{3\infty}{2}$, & que par conséquent elle sera à la somme de la Suite infinie des Unités, qui est $= \infty :: 3. 2$. Ce qui vient de ce que cette progression a une infinité de termes plus grands que 1, & plus grands d'une différence finie (457).

La somme de la progression géométrique correspondante sera $\frac{2^{\frac{\infty}{\infty}} - 1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{2 - 1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1}$. Or $2^{\frac{1}{\infty}} - 1$ est une grandeur infiniment petite (351), ou 0 relatif. Donc $\frac{1}{2^{\frac{1}{\infty}} - 1} = \frac{1}{0}$, grandeur infinie (338). Cet $\frac{1}{0}$ n'est pas absolument $= \infty$, car la progression géométrique ayant tous

M.E.C.D. 2017

ſes termes plus grands que 1, & entr'eux un nombre fini indéterminable, qui ſont plus grands que 1 d'une différence finie (457.), ſa ſomme eſt plus grande que celle de la Suite infinie des Unités qui eſt $= \infty$. Donc cet $\frac{1}{0} > \infty$, mais ſeulement d'une différence finie, & ſi on la compte, cette ſomme de la progreſſion géométrique ne peut être comparée à celle de l'arithmétique, qui eſt $\frac{3\infty}{2}$, ou ces ſommes ſont incommenſurables entr'elles. Seulement on ſait que celle de l'arithmétique doit être la plus grande, & par conſéquent elle auroit à celle de la géométrique un moindre rapport que celui de 3 à 2.

460. Tout ce qui a été dit de la progreſſion géométrique infinie dont 1 & 2 ſont les extremes, s'applique de ſoi-même à celles dont 1 & 3, ou 1 & 4, &c. ſeroient les extremes, & l'on voit naître une infinité de $3\frac{\infty}{\infty}$, de $4\frac{\infty}{\infty}$ &c. qui ſeront autant de nombres finis incommenſurables d'une 2de *eſpece*.

461. Que ſi enfin on établit la progreſſion géométrique dont 1 & ∞ ſoient les extremes, ce qu'on a déja vû pluſieurs fois, tous les termes $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, &c. enfin tant que le numérateur des expoſans ſera fini, ſeront finis, & ce ſont de nouveaux Incommenſurables d'une 3me *eſpece*, parce qu'ils n'appartiennent plus à aucun nombre fini, mais à l'Infini élevé à quelque puiſſance finie dont ils ſont √ infinies. 3me *eſpece*.

462. Et comme dans cette progreſſion il y a des $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}$ qui ſont encore finis (321), ce ſont encore des Incommenſurables d'une 4me *eſpece*, parce qu'il n'entre abſolument rien de fini dans leur expreſſion, non pas même le numérateur de leur expoſant, ou, ce qui revient au même, qu'ils ſont √ infinies d'un Infini élevé à une puiſſance infinie. 4me *eſpece*.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

463. On voit assez que passé cela, il ne doit plus être possible de trouver des Incommensurables, c'est-à-dire, des nombres finis inexprimables; & même ces derniers, qui sont les $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}$, manquent absolument d'un caractere qui les fasse reconnoître pour finis, car il y en a aussi de pareils ou pris dans la même progression qui sont infinis. A mesure que les Incommensurables ont plus de rapport à l'Infini, ils deviennent plus indéterminables.

464. Donc il y a des nombres finis de deux especes principales : les uns purement Finis, les autres qui tiennent de l'Infini. Les premiers sont les Commensurables, tous exprimables & déterminables, dont nous avons une idée parfaite. Les seconds sont les Incommensurables, tous inexprimables, & dont nous n'avons qu'une idée obscure. Ils se subdivisent en quatre especes, & deviennent d'autant moins déterminables, & l'idée que nous en avons d'autant plus obscure, qu'ils tiennent plus de l'Infini, & enfin dans la derniere espece ils deviennent absolument indéterminables, & nous n'en avons plus d'idée.

465. Il suit de l'art. 435, que chaque nombre commensurable produit une infinité d'Incommensurables, & ils ne sont que de la 1re espece. Donc il y a autant d'Infinités d'Incommensurables de cette espece qu'il y a de commensurables, & il ne faut pas être surpris que dans les recherches Algébriques on en rencontre tant.

466. Que si on rencontre aussi des grandeurs qui soient certainement finies, & ne soient cependant point $\sqrt{}$ de quelque nombre fini exprimable, ce seront des Incommensurables de quelqu'une des trois dernieres especes : ainsi les sommes de $\frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^3}$, &c. sont des grandeurs finies (363 & 365), mais qui ne se peuvent exprimer par aucun nombre fini, ni par aucune $\sqrt{}$ d'un nombre fini. Elles seront de ces nouveaux Incommensurables.

M.E.C.D. 2017

467. A plus forte raiſon deux grandeurs de cette eſpece auront-elles un rapport fini qui ne ſe pourra jamais exprimer ni déterminer. Tel ſera le rapport de la ſomme de $\frac{1}{A^2}$ à la ſomme de $\frac{1}{A^3}$. C'eſt peut-être celui de $3\frac{\infty}{\infty}$ à $2\frac{\infty}{\infty}$, ∞ étant le même de part & d'autre. Il ſuffit de voir par-là qu'il peut y avoir une infinité de rapports finis de grandeurs finies, qui par leur nature ſeront éternellement hors de la portée de l'Eſprit humain.

M.E.C.D. 2017

SECTION VI.

Des Grandeurs Positives & Négatives, Réelles & Imaginaires.

468. ON appelle grandeurs *positives*, celles qui ont le signe +, ou qui n'en ont point; car alors + est sousentendu, & en effet toute grandeur que l'on considere est pour cela seul posée. Et on appelle *négatives*, celles qui ont le signe —.

Il paroît que dans l'usage commun on confond assez les grandeurs positives avec celles qui sont ajoutées à quelqu'autre, & les négatives avec celles qui sont retranchées de quelqu'autre; & il est si vrai qu'on les confond, que l'on ne tire les Regles du calcul des grandeurs positives & négatives, que des seules idées de l'addition & de la soustraction. De-là vient encore que quand les grandeurs négatives ont un — absolu, comme — 1, — 2, — 3, &c. c'est-à-dire, qu'elles ont le signe — sans être précédées d'aucune grandeur dont elles soient réellement retranchées, on est réduit à imaginer qu'elles sont retranchées de 0. Mais on tombe par-là dans quelque chose d'entierement inconcevable, qui est une grandeur moindre que rien.

On dit, pour justifier cette idée, qu'un homme qui a, par exemple, plus de dettes que de bien, a moins que rien. Mais il faut prendre garde que ce *moins que rien* n'est pas une idée géométrique, ni physique, mais seulement morale, & qu'on entend par-là que selon les loix de la Société la condition de cet homme est plus mauvaise, que s'il n'avoit précisément rien, c'est-à-dire, ni bien, ni dettes. Si — 1 est moins que rien, j'entens que ce — soit absolu, comment son quarré est-il 1 ? Et si — 2 est moindre que — 1, parce qu'il est plus au-dessous de 0, comment son quarré 4 est-il au-dessus de celui de — 1 ?

On

M.E.C.D. 2017

On dit auſſi que $--a$ eſt la négation de a, mais cela ne porte pas une idée nette : car dès que l'on conſidere une grandeur, on l'affirme, ou on la poſe, & on n'entend pas ce que c'eſt que de la nier, à moins que ce ne ſoit la retrancher de quelque autre. Or le $--$ étant abſolu, il n'y a point de retranchement, ou ſi l'on en ſuppoſe un, on retombe dans les embarras qui viennent d'être repréſentés.

Enfin les expoſans négatifs des puiſſances ne ſont négatifs par aucune ſouſtraction, ni par aucune négation. Quand je dis $a^{--n} = \frac{1}{a^{n}}$, je ne puis concevoir ni que n ſoit retranché d'aucune grandeur, ni que $--n$ ſoit la négation de la puiſſance n, puiſque je retrouve cette puiſſance n dans $\frac{1}{a^{n}} = a^{--n}$.

De tout cela je conclus que les grandeurs poſitives & négatives le ſont par elles-mêmes, & indépendamment de toute addition, ou ſouſtraction, ou négation, & que dans ce qui les rend poſitives ou négatives, il y a quelque idée peu développée, qu'il eſt bon de démêler.

469. Si on veut qu'une Suite de nombres repréſente le cours du Soleil au deſſus de l'Horiſon, 0, 1, 2, &c. 90, 89, &c. 2, 1, 0, 0 marquera que le Soleil eſt à l'Horiſon, ſoit qu'il ſe leve, ou ſe couche. Si on veut ſuivre ſon cours au deſſous de l'Horiſon, on ne peut avoir que les mêmes nombres 0, 1, 2, &c. 90, 89, &c. 2, 1, 0, où l'on voit qu'ils repréſentent également & les élevations du Soleil au deſſous de l'Horiſon, & ſes abaiſſemens au deſſous. L'expreſſion par les nombres ſeuls eſt donc douteuſe & équivoque. Pour la déterminer, on affecte du ſigne $--$ les nombres qui repréſentent les abaiſſemens, en donnant le ſigne $+$ à ceux qui repréſentent les élevations, ou en le leur laiſſant ſouſentendu, puiſque tous les nombres l'ont naturellement & par eux-mêmes. Par-là l'équivoque eſt entierement levée.

Ce que c'eſt que le Poſitif & le Négatif. Que le Négatif ne conſiſte pas dans un retranchement, mais dans une certaine oppoſition.

De même, ſi étant toujours tourné du même côté, je voulois repréſenter par une Suite de nombres les arcs ou degrés d'un demi-Cercle que parcourroit le Soleil d'abord à ma

M.E.C.D. 2017

droite, enſuite à ma gauche, j'aurois 0, 1, 2, &c. j'uſqu'à 90 pour les arcs qu'il parcourroit à ma droite, 0 étant le point où le demi-Cercle couperoit l'Horiſon, après quoi j'aurois pour les arcs à ma gauche —— 89, &c. —— 2, —— 1, 0, car ſans cela les deux eſpeces d'arcs n'auroient nulle diſtinction.

De-là il ſuit que l'idée du poſitif & du négatif ajoute à celle des grandeurs qu'elles ſoient *contraires* en quelque choſe, comme dans les deux exemples rapportés les nombres ſont contraires par la poſition des grandeurs qu'ils repréſentent.

470. Toute *contrariété* ou oppoſition ſuffit pour l'idée du poſitif & du négatif. Si, par ex. 4, 3, 2, 1, repréſentent le Bien ou le Fonds d'un Homme qui diminue toujours, —— 1, —— 2, &c. repréſenteront ſes Dettes qui augmenteront. Et en général, ſi *a* eſt un Fonds, une élevation du Soleil, &c. —— *a* eſt une Dette, ou un abaiſſement du Soleil, &c.

471. Donc toute grandeur poſitive ou négative n'a pas ſeulement ſon être *numérique*, par lequel elle eſt un certain nombre, une certaine quantité, mais elle a de plus ſon être *ſpécifique*, par lequel elle eſt une certaine *Choſe* oppoſée à une autre.

Je dis *oppoſée à une autre*, car ce n'eſt que par cette oppoſition qu'elle prend un être ſpécifique; & ſi on lui en donnoit un qui ne lui apportât aucune oppoſition à une autre grandeur, elle ne conſerveroit aucun caractere d'être ſpécifique, & ne ſeroit conſidérée que ſelon le numérique. Ainſi quoique des degrés de Viteſſe appartiennent à une certaine choſe, qui eſt une Viteſſe, ils ne ſont point ſuſceptibles de l'idée du poſitif & du négatif, parce que la Viteſſe, entant que Viteſſe préciſément, n'a rien qui lui ſoit oppoſé, non pas même la Lenteur, qui n'eſt qu'une moindre Viteſſe, ni le Repos, qui n'eſt qu'une Viteſſe devenue nulle, ou infiniment petite.

472. Donc toute grandeur n'eſt pas ſuſceptible de l'idée du poſitif & du négatif, & celles qui le ſont peuvent être aiſément reconnues par l'oppoſition ſpécifique qu'elles auront à d'autres.

M.E.C.D. 2017

473. Quand deux grandeurs ſont oppoſées, l'une exclut ou nie l'autre, & par conſéquent eſt négative à l'égard de l'autre qui ſera poſitive. Ainſi l'abaiſſement du Soleil nie l'élévation, une Dette nie un Fonds, &c. Et comme deux grandeurs oppoſées ſe nient également l'une l'autre, & que l'élevation nie autant l'abaiſſement que l'abaiſſement nie l'élevation, &c. il eſt indifférent laquelle des deux on prenne pour poſitive ou pour négative. Cependant on prend ordinairement pour poſitive celle qui ſe préſente la premiere dans la recherche dont il s'agit, & qu'il eſt le plus naturel de conſidérer. Un Fonds ſera plutôt la grandeur poſitive qu'une Dette.

474. Quoiqu'une grandeur ait une oppoſée, il n'eſt nullement néceſſaire de conſidérer cette oppoſée. Ainſi quoique je conſidere un Fonds que j'appelle a, je puis ne conſidérer a que numériquement, par ſes accroiſſemens ou décroiſſemens numériques quelconques, & ſans aucun rapport à la grandeur ſpécifique oppoſée, qui eſt une Dette : mais ſi je dis $-a$, cette grandeur n'eſt ce qu'elle eſt, & affectée du ſigne $-$, que parce qu'elle eſt oppoſée à a, ou $+a$, qui eſt un Fonds. La grandeur négative, quoique priſe à part, renferme donc néceſſairement dans ſon idée l'être ſpécifique : mais la poſitive, priſe de même, ne le renferme pas néceſſairement, & alors elle n'eſt poſitive qu'*improprement*, & parce qu'elle eſt conſidérée ou poſée, mais non pas *proprement*, & par rapport à une grandeur oppoſée. Elle n'eſt plus qu'un nombre.

475. Donc $-a$ n'eſt point un pur nombre, & à moins que d'y attacher une idée ſpécifique, on n'en a plus d'idée.

476. Zero n'eſt point ſuſceptible de l'idée du poſitif & du négatif, puiſqu'il n'eſt point grandeur, & que loin de pouvoir avoir un être ſpécifique, il n'en a ſeulement pas un numérique.

477. Par la raiſon contraire, l'Infini eſt ſuſceptible de cette idée, ce qui eſt évident de ſoi-même.

478. Les entiers & les fractions ne ſont point des

M.E.C.D. 2017

grandeurs ſpécifiquement oppoſées. Par exemple, 3 ne l'eſt point à $\frac{1}{3}$, car 3 eſt $\frac{1}{3}$ à l'égard de 9, & $\frac{1}{3}$ eſt 3 à l'égard de $\frac{1}{9}$. Donc l'idée de poſitif & de négatif ne peut tomber ſur les entiers entant qu'oppoſés aux fractions, ni réciproquement.

En quoi conſiſte le Négatif des Puiſſances & des Racines.

479. De même les puiſſances & les racines ne ſont point des grandeurs oppoſées. Car il n'y a point de nombre qui ne ſoit en même temps & une puiſſance quelconque (438) & une racine quelconque. Cela ſe voit encore, parce que les puiſſances ſont n, & les racines $\frac{1}{n}$, entiers & fractions, qui ne ſont point oppoſés (478).

480. Mais les puiſſances peuvent avoir entr'elles-mêmes, & les racines de même entr'elles une oppoſition ſpécifique. Une puiſſance éleve ou abaiſſe la grandeur qu'elle affecte, ſelon que cette grandeur eſt un entier ou une fraction. Donc les puiſſances qui élevent & celles qui abaiſſent ſont ſpécifiquement oppoſées entr'elles. Donc ſi n eſt une puiſſance qui éleve, $-n$ eſt une puiſſance qui abaiſſe, ou, ce qui eſt le même, ſi a eſt élevé par la puiſſance n, il eſt abaiſſé par la puiſſance $-n$. Or il n'y a qu'une fraction qui puiſſe être abaiſſée par une puiſſance, donc a abaiſſé par la puiſſance $-n$ eſt devenu fraction, ou $\frac{1}{a^n}$. Donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. De même une racine abaiſſe ou éleve une grandeur ſelon que cette grandeur eſt un entier, ou une fraction. Donc ſi $\frac{1}{n}$ eſt une racine qui abaiſſe, $-\frac{1}{n}$ eſt une racine qui éleve. Or une racine ne peut élever qu'une fraction. Donc $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

On voit par l'article précédent pourquoi a^{-n} n'eſt pas $= a^{\frac{1}{n}}$, ou $a^{-\frac{1}{n}} = a^n$, & par celui-ci pourquoi $a^{-n} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$, & $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$. Et peut-être tout cela ſeroit-il

M.E.C.D. 2017

plus difficile à démontrer *à priori* par d'autres principes que ceux qui ont été établis.

La même chose se trouve aisément par le calcul. Car $a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$. Donc $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. De même $a^{\frac{1}{n}} \times a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} = a^0 = 1$. Donc $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

481. Dans les exemples des élévations ou abaissemens du Soleil, des Fonds ou Dettes, l'opposition spécifique ne touche point à l'être numérique des grandeurs qui demeure toujours le même, c'est-à-dire, que 2 degrés d'élévation du Soleil, par ex. ou 2 degrés d'abaissement sont toujours le même nombre 2. Mais l'opposition spécifique des puissances ou des racines positives ou négatives entr'elles change l'être numérique de la grandeur à laquelle elles sont appliquées, puisque ce qui dans a^n & dans $a^{\frac{1}{n}}$ étoit a, devient $\frac{1}{a}$ dans a^{-n} & dans $a^{-\frac{1}{n}}$.

482. Du raisonnement de l'art. 480, & du précédent il suit que si une puissance éleve infiniment a, la même puissance affectée de — l'abaisse infiniment. Donc puisque a^{∞} est infiniment grand, $a^{-\infty}$ est infiniment petit. Et en effet $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$ (480).

483. Pareillement si une puissance ou une racine a rendu une grandeur telle qu'elle ne puisse plus être ni élevée ni abaissée par les puissances ou par les racines, la même puissance ou racine affectée de — ne rendra point la grandeur différente de ce qu'elle étoit, quand la puissance ou racine étoit affectée de +, car les puissances ou racines auront perdu l'opposition spécifique qu'elles avoient entr'elles. Donc puisque $a^0 = 1$, a^{-0} est de même $= 1$, car la puissance o

M.E.C.D. 2017

ayant rendu $a = 1$, l'a rendu incapable d'être élevé ou abaissé par des puissances. De même puisque $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $a^{-\frac{1}{\infty}}$ est aussi $= 1$. Et en effet $a^{-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{1} = 1$.

284. Donc $a^{-0} = a^0 = 1$, soit que 0 soit absolu ou relatif. S'il est absolu, on vient de le voir dans l'art. précédent, & si 0 est relatif, $a^{-\frac{1}{\infty}} = a^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

Comment une Suite devient de positive négative.

485. On voit suffisamment par le 1er exemple de l'art. 469, qu'une Suite de grandeurs peut devenir de positive négative, & qu'elle passeroit du positif au négatif par 0, que de même dans le 2^d^ exemple elle passeroit du positif au négatif par 90, c'est-à-dire, que dans le 1er exemple, 0 étant le point de l'Horison où le Soleil seroit dans le plan de ce Cercle, il ne seroit ni au dessus, ni au dessous, & par conséquent sa position ne seroit ni positive ni négative, & dans le 2^d^ exemple elle ne seroit non plus ni l'un ni l'autre, parce que le Soleil étant à 90, ne seroit ni à ma droite ni à ma gauche, mais sur ma tête. D'où l'on voit en général que dans les Suites qui deviennent de positives négatives, le passage du positif au négatif se fait par quelque *terme* qui n'est ni l'un ni l'autre, ou si l'on veut, qui est l'un & l'autre en même temps. Car 0 n'est ni positif ni négatif (476). mais on peut bien concevoir que 90 soit la derniere des grandeurs positives, & la premiere des négatives en même temps. Ces deux idées, *quant à présent*, reviennent au même.

486. Il est clair que ce que 90 est dans l'exemple qu'on avoit pris, tout autre nombre le sera dans d'autres exemples ou d'autres cas, & que l'Infini même le pourra être. Donc en général zero, tous les nombres Finis & l'Infini sont des termes par où des Suites de grandeurs peuvent passer du positif au négatif.

Calcul des grandeurs négatives.

487. Il se trouve par le calcul, que les opérations que l'on fait sur les grandeurs négatives sont les mêmes qu'on

M.E.C.D. 2017

feroit ſur des grandeurs ſimplement retranchées, parce qu'en effet on peut ramener en quelque ſorte l'idée de grandeurs négatives à celle de grandeurs ſimplement retranchées. Mais comme cette maniere de les y ramener eſt un peu forcée, qu'elle ne va point aſſez au fond de la nature des choſes, & qu'elle ne peut s'étendre à tout, par ex. aux puiſſances négatives qui ne ſont telles par aucun retranchement, il vaut mieux prouver les opérations ſur les grandeurs négatives, en les prenant ſimplement comme négatives, & de-là naîtront quelques idées qui éclairciront peut-être un peu une partie aſſez obſcure de l'Algebre. Je ſuppoſe donc les grandeurs négatives affectées du ſigne — abſolu, ou négatives par elles-mêmes.

Ajouter une grandeur négative à une négative, une Dette à une Dette, c'eſt l'augmenter. Donc — a, auquel on ajoute — a, ou — a + — a = — $2a$.

Ajouter à une grandeur négative une poſitive, un Fonds à une Dette, c'eſt diminuer la Dette. Donc — $2a$ + a = — a. De même ajouter une Dette à un Fonds, c'eſt diminuer le Fonds. $2a$ + — a = a.

Oter d'une grandeur négative une négative, une Dette d'une Dette, c'eſt la diminuer. Donc — $2a$ — — a = — a. Et l'on voit par conſéquent que — — a = + a.

Oter d'une grandeur négative une poſitive, un Fonds d'une Dette, c'eſt augmenter la négative. Donc — $2a$ — + a = — $2a$ — a = — $3a$. De même ôter une Dette d'un Fonds, c'eſt augmenter le Fonds. Donc $2a$ — — a = $2a$ + a = $3a$. Et l'on voit toujours que — — = +.

Il eſt clair que tout cela naît ou de la ſeule nature de la grandeur, lorſqu'on n'opere que ſur des grandeurs négatives, ou de l'oppoſition ſpécifique, lorſqu'on opere ſur des grandeurs poſitives & négatives.

488. Il n'y a point d'idée plus claire que celle de la multiplication d'un Fonds a, ou d'une Dette — a, par un nombre b, ce n'eſt que doubler, tripler, &c. le Fonds ou la Dette. Le 1er produit eſt donc $a\,b$, & le 2^d^ — $a\,b$; car il eſt

M.E.C.D. 2017

évident que ſi le produit des deux nombres purs a & b eſt $= c$, le 1er produit eſt un plus grand Fonds c, & le 2^d une plus grande Dette $-c$.

Il eſt bon de remarquer que dans ab, produit du Fonds a par le pur nombre b, l'idée de l'être ſpécifique de a diſparoît entierement, & que ce produit n'eſt en rien différent de celui du pur nombre a par le pur nombre b. Mais dans le produit $-ab$, l'idée de l'être ſpécifique ſubſiſte, & en effet c'eſt proprement aux grandeurs négatives que cette idée eſt attachée (474).

Autant qu'il eſt clair qu'un Fonds peut être doublé, par exemple, ou multiplié par 2, autant il eſt inconcevable qu'un Fonds puiſſe être multiplié par 2 Fonds. Car que fait l'idée de Fonds dans les 2 Fonds qui multiplieroient? Il faut néceſſairement l'en détacher, ſi l'on veut ramener cela à quelque choſe d'intelligible, & réduire les 2 Fonds à n'être que le nombre 2, auquel cas, ſelon qu'on vient de le remarquer, l'idée d'être ſpécifique diſparoît entierement dans le produit quelconque ab, qui n'eſt plus que purement numérique.

Cela eſt ainſi, non parce que a eſt un Fonds, mais parce que c'eſt une grandeur qu'on avoit revêtue d'une idée ſpécifique. Donc il en ira de même du produit de $-a$ Dette, par $-b$ Dette. Donc ce produit ſera purement numérique, donc $= ab$.

Ce qui a été dit de la multiplication des grandeurs négatives ſe doit appliquer à la diviſion. Donc $\frac{-a}{b}$ ou $\frac{a}{-b} = -x$, & $\frac{-a}{-b} = x$.

489. Si, dans quelque recherche que l'on fait, les grandeurs ont pû être revêtues d'une idée ſpécifique, ab eſt un produit *équivoque*, c'eſt-à-dire, qu'il peut être également le produit de deux grandeurs auxquelles on avoit attaché à toutes deux ou l'idée de Fonds, par ex. ou celle de Dette, & qui en ont été dépouillées toutes deux par la multiplication. Mais $-ab$ n'eſt point un produit équivoque, il ne peut être que celui d'une Dette par un nombre.

490.

M.E.C.D. 2017

490. L'idée de puiſſance ajoute à celle de produit l'égalité, ou *identité* de la grandeur multipliée. Je ne puis, ſelon le raiſonnement de l'art. 488, concevoir le quarré d'un Fonds, ou d'une Dette, mais ſeulement le quarré du nombre qui exprimoit le Fonds ou la Dette, c'eſt-à-dire, que ce nombre revétu de l'idée de Fonds ou de Dette, je l'en ai dépouillé pour en faire un quarré. Mais il eſt vrai auſſi que j'ai fait un quarré d'un nombre primitivement revétu de l'une ou de l'autre idée, & que puiſqu'il a été dépouillé ou de l'une ou de l'autre, il demeure douteux, lorſqu'il eſt quarré, de laquelle des deux il avoit été d'abord revétu. Donc *aa* eſt un quarré équivoque, comme le produit *ab* (489).

491. Mais —— *aa* n'eſt point équivoque, non plus que —— *ab*. Il ne peut être que le produit de —— *a* Dette par *a* nombre pur.

492. De-là il ſuit que —— *aa* n'eſt point un quarré, mais il y a deux manieres ſelon leſquelles il ne l'eſt point. 1°. Ce n'eſt point un quarré purement numérique, car *a* étant un pur nombre, —— *a* n'en eſt point un (475). 2°. Ce n'eſt point un quarré ſpécifique, ou de —— *a* Dette, ſelon le ſens de l'art. 490, car —— *a* n'a point été dépouillé de ſon idée ſpécifique.

Il faut remarquer que ſi on ne diſtinguoit pas l'être numérique d'avec le ſpécifique, ce ne ſeroit que numériquement que —— *aa* ne ſeroit point quarré, car on pourroit ſeulement dire que *a* & —— *a*, quoiqu'égaux, ne ſeroient pas préciſément le même nombre. Mais il eſt néceſſaire, & tous les Géometres en conviendront qu'il y ait deux manieres ſelon leſquelles —— *aa* ne ſeroit point quarré, & par conſéquent la diſtinction de l'être numérique & du ſpécifique eſt néceſſaire.

493. —— a^2 pour n'être point quarré, ne laiſſe pas d'être un véritable plan.

494. Si je prends —— a^2 pour un quarré, je le prends donc pour ce qu'il ne peut être. On appelle *Imaginaires*, les grandeurs qui ne peuvent être ce qu'on ſuppoſe qu'elles ſont, ou ce qu'elles devroient être, & qui par conſéquent enferment

Ce que c'eſt que les Imaginaires.

M.E.C.D. 2017

contradiction, & on les oppose à toutes les autres qui sont *Réelles*. Donc $--a^2$ pris pour quarré est imaginaire, mais pris pour plan il est réel (493). Donc il peut devenir réel ou imaginaire selon le sens où il sera pris.

495. Si l'on dit $\sqrt[2]{\ --a^2}$, on détermine nécessairement $--a^2$ à être pris pour un quarré, puisqu'on lui suppose une $\sqrt[2]{}$. Donc $\sqrt[2]{\ --a^2}$ est une grandeur entierement déterminée à être imaginaire, & ce sont celles-là seules auxquelles on donne ce nom absolu, parce qu'elles ne peuvent être réelles en aucun sens.

496. Il y a deux manieres selon lesquelles $--a^2$ n'est point quarré (492) ou est quarré imaginaire. Donc il a deux $\sqrt[2]{}$ imaginaires, dont chacune répond à chaque maniere dont il peut être formé sans être quarré.

797. Toute grandeur qu'on affecte de $\sqrt[2]{}$ est prise pour un quarré. Donc si cette même grandeur est affectée du signe $--$, comme $\sqrt[2]{\ --a}$, ou $\sqrt[2]{\ --a^n}$, n étant un nombre indéterminé, c'est une grandeur imaginaire.

498. Toute $\sqrt{}$ dont l'exposant est pair est une $\sqrt[2]{}$. Ainsi $\sqrt[6]{}$ est la $\sqrt[2]{}$ de $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[8]{}$ de $\sqrt[4]{}$, &c. Donc toute $\sqrt{}$ paire d'une grandeur quelconque négative est imaginaire.

499. Il y a deux manieres selon lesquelles a^2 est quarré (490) comme il y en a deux selon lesquelles $--a^2$ ne l'est point. Donc comme $--a^2$ a deux $\sqrt[2]{}$ imaginaires (496), a en a deux réelles, qui sont a & $--a$.

D'où viennent les Racines réelles mêlées avec les Imaginaires.

500. Quoique l'on eût formé le quarré a^2, en ne prenant a que pour un pur nombre, auquel cas il semble qu'il ne devroit avoir que a pour $\sqrt{}$, la seule possibilité d'une autre formation qui auroit été faite sur $--a$, donne un quarré a^2 une 2^{de} $\sqrt{}$. Et de même les deux manieres selon lesquelles

M.E.C.D. 2017

— a^2 peut être formé, dont il eſt impoſſible qu'aucune faſſe un quarré, lui donnent deux $\sqrt{}$ imaginaires. D'où l'on voit en général que ce ne ſont pas ſeulement les formations actuelles qu'on a faites, mais encore toutes les autres formations poſſibles, qui produiſent des $\sqrt{}$ réelles ou imaginaires.

501. a^3 eſt un cube numérique, & c'eſt auſſi un cube ſpécifique devenu numérique, parce que le cube d'un Fonds étant auſſi inconcevable que ſon quarré, ce ſera le cube du nombre a, auquel j'avois attaché l'idée ſpécifique de Fonds, & que j'ai été obligé d'en dépouiller pour faire un cube. Selon cette formation, a^3 n'auroit que a pour $\sqrt[3]{}$. Mais a^3 peut être auſſi le produit de — a par — a^2. Or il faut que toute grandeur de deux dimenſions qui entre dans la formation d'un cube ſoit un quarré. — a^2 eſt cette grandeur de deux dimenſions, mais il n'eſt point quarré, & il y a deux manieres dont il ne l'eſt point. Donc il y a deux manieres dont — $a \times$ — $a^2 =$ a^3 n'eſt point cube. Donc a^3 eſt cube imaginaire en deux ſens, & a deux $\sqrt[3]{}$ imaginaires; mais il y a un ſens dans lequel il eſt cube réel, & a une $\sqrt[3]{}$ réelle.

502. Si je veux avoir le cube de — a, je trouve cette grandeur dépouillée de ſon idée ſpécifique, ou, ce qui revient au même, du ſigne —, dès ſon quarré a^2. Pour la cuber, il faut donc que je la multiplie par elle-même dépouillée de ſon ſigne dans ſon quarré, c'eſt-à-dire, que je multiplie — a par a^2, ce qui donne — a^3, dont la $\sqrt[3]{}$ eſt — a, & réelle. Mais — a^3 peut être auſſi le produit de — a^2 par a, ce qui fait entrer dans cette formation — a^2, & par conſéquent deux $\sqrt[3]{}$ imaginaires dans — a^3.

On voit par-là pourquoi le calcul algébrique donne pluſieurs racines pour une puiſſance qui n'a été formée que par une ſeule racine, & en même-temps pourquoi il donne des racines imaginaires pour une puiſſance qui n'a été formée que

M.E.C.D. 2017

par une racine réelle, peut-être ne voyoit-on pas trop d'où tout cela pouvoit sortir. Il suffit presentement d'avoir pris cette idée générale de ce que c'est que l'Imaginaire.

Comment l'Imaginaire devient réel.

503. La qualité d'Imaginaire tient, pour ainsi dire, à peu de chose, & peut être aisément effacée. — a^2 n'est imaginaire que comme quarré, & non comme plan (493). Or un plan multiplié par lui-même est un véritable quarré, donc $--a^2 \times --a^2$ en deviendra un, qui est en effet a^4, quarré réel. De même $\sqrt[2]{--a^2} \times \sqrt[2]{--a^2} = --a^2$, plan réel. Ainsi la racine d'un quarré imaginaire est imaginaire, parce que c'est cette racine même qui rend le quarré imaginaire, en le déterminant à être quarré & non pas plan, & le quarré d'une racine imaginaire est réel, parce qu'alors la racine qui faisoit tout l'Imaginaire, disparoît.

504. Ce sera le même raisonnement, si une grandeur imaginaire en multiplie une autre différente d'elle; car ce sera une $\sqrt[2]{}$ qui déterminoit un plan à être pris pour quarré qu'il ne pouvoit être, & cette $\sqrt[2]{}$, en multipliant une autre pareillement conditionnée, les deux plans qu'elles affectoient deviendront un plan réel. Ainsi $\sqrt[2]{--a^2} \times \sqrt[2]{--b^2} = \sqrt[2]{a^2 b^2} = ab$. Il en est de même de $\sqrt[2]{--a^n} \times \sqrt[2]{--b^m} = \sqrt[2]{a^n b^m}$.

505. Le produit de l'Imaginaire par le Réel doit être imaginaire, car l'Imaginaire doublé, par ex. triplé, &c. enfin multiplié par n, n'en est pas moins imaginaire.

506. Donc le produit de l'Imaginaire par lui-même étant réel (503), si on multiplie encore ce produit par l'Imaginaire, le 2^{d} produit sera imaginaire (505), un 3me pareil réel, un 4me imaginaire, & toujours ainsi de suite.

507. Tout cela s'applique de soi-même à la division, & l'on voit à l'égard de ces deux opérations, l'analogie parfaite du positif & du Réel, du négatif & de l'Imaginaire. Aussi l'Imaginaire n'est-il imaginaire qu'en ce qu'il tient du négatif.

M.E.C.D. 2017

508. Il eſt aiſé de voir auſſi le rapport de l'Incommenſurable & de l'Imaginaire. Il ſont tous deux néceſſairement exprimés par une $\sqrt{}$, l'un par une $\sqrt{}$ quelconque, l'autre par une $\sqrt[2]{}$, ou plus généralement par une $\sqrt{}$ paire (498). L'un ſuppoſe qu'une grandeur eſt une puiſſance qu'elle n'eſt pas dans le Fini, l'autre qu'elle eſt une puiſſance qu'elle ne peut abſolument être. Une ſimple élevation à une puiſſance les fait tous deux changer de nature, & rend l'un commenſurable, l'autre réel. *Comparaiſon de l'Incommenſurable, & de l'Imaginaire.*

509. L'Imaginaire n'eſt pas zero ; car quoiqu'il ne puiſſe être, il ne tient preſque à rien qu'il ne ſoit, & un léger changement le rendra réel & exiſtant, ce qui ne convient pas à zero.

510. L'Imaginaire a même une grandeur déterminée, & l'on voit par ſon expreſſion quelle ſeroit cette grandeur qui ne peut être, en cas qu'elle fût. Si $\sqrt[2]{} - a^n$ étoit poſſible, elle ſeroit $a^{\frac{n}{2}}$, & cette propriété ne convient pas non plus à zero. *Que l'Imaginaire ne laiſſe pas d'avoir une grandeur.*

511. $\sqrt{} - a^n + b$ n'eſt pas $= b$, puiſque $\sqrt{} - a^n$ n'eſt pas $= 0$ (509). Qu'eſt-ce donc que cette ſomme ?

Il faut conſidérer que mettre pluſieurs grandeurs enſemble, c'eſt les concevoir comme exiſtant enſemble. Mettre b avec 0, ou avec $\frac{1}{\infty}$, c'eſt concevoir b comme exiſtant ſeul, ou avec une grandeur qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe ne l'augmente point. Mais mettre b avec une grandeur qui ne peut exiſter, c'eſt ſe réduire à l'impoſſibilité de concevoir b comme exiſtant, puiſqu'on le lie à l'Impoſſible. Donc $\sqrt[2]{} - a^n + b$ eſt une ſomme imaginaire. Il en faut dire autant de la ſouſtraction, ou d'une différence.

512. Puiſque l'Imaginaire a une grandeur (510), on peut concevoir qu'il croiſſe ou décroiſſe. Ainſi x étant une grandeur variable, $\sqrt[2]{} - x$ formera une Suite croiſſante de

M.E.C.D. 2017

grandeurs imaginaires, ſi x croît, & au contraire, ſi x décroît.

513. x peut même croître juſqu'à l'infini, ou décroître juſqu'à zero, ce qui donnera $\sqrt[2]{} -\infty$, ou $\sqrt[2]{} -0$, grandeurs encore imaginaires.

514. On peut même concevoir qu'à l'exemple de la Suite 2, 1, 0, — 1, — 2, &c. $\sqrt[2]{} -0$ étant poſé pour terme commun, il y aura d'un côté des $\sqrt[2]{} -x$ poſitives décroiſſantes, qui y aboutiront, & de l'autre des $-\sqrt[2]{} -x$ négatives & croiſſantes, qui en partiront, de ſorte que les grandeurs imaginaires qui ne ſont telles que par l'impoſſibilité de l'être ſpécifique qu'elles renferment, prendront elles-mêmes un être ſpécifique, mais cela ne laiſſe pas d'être aiſé à concevoir.

515. On a pris ſouvent dans cette Section pour exemple de grandeurs ſpécifiquement oppoſées, des Fonds & des Dettes, à cauſe de la briéveté de l'expreſſion. Mais on voit aſſez que les mêmes choſes s'appliqueroient aux élevations, ou abaiſſemens du Soleil par rapport à un Terme commun, & comme ces grandeurs n'ont d'autre être ſpécifique que leur poſition par rapport à ce Terme, il faut comprendre dans tout ce qui a été dit, les grandeurs qui n'auroient que cette ſorte d'être ſpécifique, & plus généralement encore, toutes celles qui en auroient un, quel qu'il fût.

516. De plus, pour ne conſidérer que des grandeurs véritablement négatives, nous avons ſuppoſé qu'elles euſſent le ſigne — abſolu, ou par elles-mêmes, originairement, & ſans aucune ſouſtraction, comme des abaiſſemens du Soleil ſous l'Horiſon, comparés aux élévations. Cependant ſi de 2 degrés d'élévation du Soleil, j'en ôtois 3, j'aurois — 1 qui ſeroit un degré d'abaiſſement, & ce — 1 me ſeroit venu par une ſouſtraction. Mais il eſt clair que cette ſouſtraction n'eſt pas néceſſaire pour donner à un degré d'abaiſſement le ſigne —, & qu'il l'auroit eu par lui-même, & par ſon oppoſition ſpécifique à un degré d'élévation. C'eſt cela même, c'eſt-à-dire,

M.E.C.D. 2017

cette ſouſtraction, non pas néceſſaire, mais poſſible, qui a fait confondre les grandeurs négatives avec les retranchées.

517. De-là il ſuit que — 1 ne ſeroit plus une grandeur véritablement négative, s'il venoit néceſſairement de quelque ſouſtraction ou opération équivalente, quoiqu'il eût le — abſolu. Ainſi ſi on diviſe 3 par — 3, on a — 1, qui n'eſt plus une grandeur véritablement négative, ou qui renferme dans ſon idée quelque être ſpécifique, & le — abſolu ſignifie ſeulement que cette grandeur vient de la diviſion d'une grandeur poſitive par une négative. Alors — 1 n'eſt plus qu'un pur nombre qui n'eſt que 1, & le — qui ne ſignifie rien, ne doit plus être d'aucune conſidération, à moins que — 1 ne doive entrer dans quelque calcul, auquel cas le — doit être conſervé ; parce que dans le calcul le + & le — ſe traitent différemment, & que — 1 doit porter le caractere du calcul qui l'a produit.

518. Donc pour juger ſi une grandeur qui a le — abſolu eſt véritablement négative, il faut avoir égard & à ſa nature, & au calcul qui peut l'avoir produite.

M.E.C.D. 2017

SECTION VII.

Sur les Suites infinies de Grandeurs quelconques.

519. LORSQUE pluſieurs grandeurs conſécutives ſont telles que chacune eſt déterminée à être ce qu'elle eſt par quelque ordre, ou quelque Loi commune à toutes, elles ſont une *Suite* ou *Série*. Il eſt viſible que toute Progreſſion eſt une Suite, mais il y en a une infinité d'autres eſpeces, parce qu'il peut y avoir une infinité d'autres ſortes de Loix qui reglent des grandeurs. Ainſi ces nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, ſont une Suite, parce que la Loi commune eſt que les produits du 1er terme par le dernier, du 2^d par le penultieme, du 3me par l'ante-penultieme, &c. ſont toujours = 60. Les nombres Naturels ſont une Suite, parce que leur Loi eſt que leurs différences ſoient la Suite des Unités, ou toujours 1, & en même-temps cette Suite eſt une progreſſion arithmétique. La Loi des nombres Triangulaires eſt que leurs différences ſoient la Suite des nombres Naturels. La Loi des Pyramidaux, que leurs différences ſoient la Suite des Triangulaires, & toujours ainſi à l'infini d'un ordre de nombres Figurés à l'autre. De même la Loi générale des Polygones eſt que leurs différences ſoient des progreſſions arithmétiques, dont la différence croiſſe toujours de 1, d'un ordre de Polygones à l'autre. Ainſi les Triangulaires ont les nombres Naturels pour différences, les Quarrés ont les nombres impairs, &c.

Les grandeurs d'une Suite *varient*, lorſqu'elles croiſſent ou décroiſſent, & leur *variation* eſt cette eſpece de mouvement reglé par la Loi qui les fait croître ou décroître. Elles varient *continuement*, quand elles vont toujours en croiſſant ou en décroiſſant, & je ſuppoſe, quant à préſent, qu'elles ne varient que continuement.

Je n'appelle à preſent Suite *infinie*, que celle qui a un nombre

M.E.C.D. 2017

nombre des termes $= \infty$, il n'importe quelle en ſoit la Loi.

Je ſuppoſe les Suites infinies formées de termes finis, du moins à leur origine. Ce ſont celles qu'il nous importe le plus de connoître, & que toute cette Section aura en vûe.

Je ſuppoſe les Suites toujours croiſſantes, à moins que le contraire ne ſoit dit, & ſi elles ne le ſont pas, il n'y a qu'à les renverſer.

Nous allons conſidérer les ſommes de ces Suites.

Sommes des Suites infinies qui n'ont des termes que d'un même ordre.

§ 20. Il n'y a nulle difficulté ſur les ſommes des Suites infinies, dont tous les termes ſont du même ordre ; car ces ſommes ſont toujours de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des termes, quel qu'il ſoit. En voici cependant des Exemples que l'on apporte, parce qu'ils donneront lieu à des remarques particulieres, & auront leur uſage dans la ſuite.

EXEMPLE I.

§ 21. La Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. Et en général $\frac{n}{n+1}$, n étant ſucceſſivement tous les nombres naturels, eſt terminée par $\frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty}$ 1, & par conſéquent a une ſomme de l'ordre de ∞, mais moindre que ∞, puiſque tous ſes termes, excepté le dernier, ſont moindre que 1.

Suite infinie croiſſante dans le ſeul ordre du Fini.

§ 22. Il eſt bon de remarquer que cette Suite, quoique toujours croiſſante, & infinie, & compoſée de termes Finis déterminables, du moins à ſon origine, ne ſort point d'un même ordre, qui eſt celui du Fini, & même qu'elle eſt toute compriſe dans un très-petit intervalle, qui eſt celui de $\frac{1}{2}$ à 1. Cela ſeroit impoſſible, ſi toutes ces différences étoient de l'ordre de celles de ſon origine, c'eſt-à-dire finies; car une infinité de différences finies, ſoit égales, ſoit croiſſantes, ſoit décroiſſantes, feroient une ſomme infinie, & par conſéquent un dernier terme infini. Cette Suite qui a un dernier terme fini, & des différences finies à ſon origine, n'a donc qu'un nombre fini de ces différences, & un nombre infini de différences infiniment petites, & le dernier terme moins le premier

M.E.C.D. 2017

ou $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ eſt la ſomme de cette infinité totale de différences de ces deux ordres.

523. Deux termes conſécutifs quelconques de cette Suite étant $\frac{n}{n+1}$ & $\frac{n+1}{n+1}$, la différence en général eſt $\frac{1}{nn+3n+2}$ $= \frac{1}{n+1 \times n+1}$. Par exemple, ſi $n = 4$, la différence entre $\frac{4}{5}$ & $\frac{5}{6}$ eſt $\frac{1}{16+12+2} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$. Or il n'y a (522) qu'un nombre fini de $\frac{1}{nn+3n+2}$ finies, & une infinité d'infiniment petites, & d'un autre côté il y a une infinité de valeurs de n finies, puiſqu'il y a dans la Suite naturelle une infinité de nombres finis. Donc $\frac{1}{nn+3n+2}$ devient infiniment petite, lorſque n a encore des valeurs finies, & même lorſqu'il en doit encore avoir une infinité. Or cela ne ſe peut, à moins que n étant fini, nn ne ſoit infini, ce qui revient aux Finis indéterminables, qu'on a déja tant vûs, & les confirme.

524. En ce cas la Formule des différences devient $\frac{1}{nn}$ $= \frac{1}{\infty}$. Et quand $n = \infty$, elle eſt $\frac{1}{\infty^2}$. Donc la Suite poſée a des différences de trois ordres, du Fini, de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, celles du 1er n'étant qu'en nombre fini, mais indéterminable, & celles des deux autres ordres en nombre infini.

EXEMPLE II.

Suite pareillement renfermée dans le Fini, & croiſſante.

525. Si on prend la Suite infinie des puiſſances n^0, n^1, n^2, &c. n^∞ d'un nombre fini quelconque n, & que de chaque terme de cette progreſſion géométrique on en tire la $\sqrt[\infty]{}$, ce qui donnera la nouvelle progreſſion $\div\div n^{\frac{0}{\infty}} = 1^{\frac{1}{\infty}} = 1$, $n^{\frac{1}{\infty}}$, $n^{\frac{2}{\infty}}$, $n^{\frac{\infty}{\infty}}$, &c. $n^{\frac{\infty}{\infty}} = n$, il eſt clair que tous ſes termes étant finis, ſa ſomme ſera de l'ordre de ∞.

M.E.C.D. 2017

526. Puiſque cette Suite eſt une progreſſion géométrique, ſes différences ſont auſſi en progreſſion, & en même progreſſion. Donc les termes de la progreſſion principale étant croiſſans, & tous du même ordre, les différences de ces termes ſont croiſſantes, & toutes du même ordre. Et puiſque la ſomme de ces différences eſt $n-1$, c'eſt-à-dire 1, ſi $n=2$, 2, ſi $n=3$, &c. cette ſomme ne peut être que celle d'une infinité de différences toutes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais en même-tems, parce que les différences de ces ſuites ſont croiſſantes, & que par conſéquent la différence de $n^{\frac{3}{\infty}}$ à $n^{\frac{2}{\infty}}$, par ex. eſt plus grande que celle de $n^{\frac{2}{\infty}}$ à $n^{\frac{1}{\infty}}$, $n^{\frac{3}{\infty}}$ infiniment peu différent de $n^{\frac{2}{\infty}}$, en eſt plus différent que $n^{\frac{2}{\infty}}$ de $n^{\frac{1}{\infty}}$, & à plus forte raiſon $n^{\frac{3}{\infty}}=1$ eſt plus différent de 1. que $n^{\frac{2}{\infty}}=1$ n'en eſt différent, ce qui revient à l'art. 263.

527. Si on donne à n les différentes valeurs ſucceſſives 2, 3, 4, &c. on voit que dans les progreſſions $1, 2^{\frac{1}{\infty}}$, $2^{\frac{2}{\infty}}=4^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $1, 3^{\frac{1}{\infty}}, 3^{\frac{2}{\infty}}=9^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $1, 4^{\frac{1}{\infty}}$, $4^{\frac{2}{\infty}}=16^{\frac{1}{\infty}}$, &c. les différences toujours infiniment petites, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ dans chaque progreſſion, ſont toujours plus grandes d'une progreſſion à l'autre, & en effet la ſomme en eſt toujours plus grande, puiſque dans la 1re elle eſt $2-1$, dans la 2de $3-1$, dans la 3me $4-1$, &c. Donc à meſure que n eſt plus grand, les différences d'une progreſſion à l'autre ſont plus grandes. Donc ſi enfin $n=\infty$, les différences deviendront infiniment plus grandes qu'elles n'étoient, c'eſt-à-dire finies. Or alors on a $\div 1.\ \infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}=\infty$. Donc la différence de ∞^{∞} à 1 eſt finie, comme on l'a toujours trouvée.

M.E.C.D. 2017

528. Quoique cette derniere progreſſion n'appartienne pas à la conſidération préſente, parce qu'elle a des termes de deux ordres, elle y eſt amenée par l'analogie qu'elle a avec toutes les précédentes où n étoit fini, & on y peut remarquer que comme elle a des termes de deux ordres, au lieu que les autres n'en avoient que d'un, auſſi a-t-elle des différences de deux ordres, de Finies, & d'Infinies (310). Il eſt même impoſſible que la progreſſion des différences ait des termes de plus de deux ordres, puiſque la progreſſion principale n'en a que de deux ordres. De plus la progreſſion des différences doit avoir à ſon origine des différences finies (527), & par conſéquent les autres ſeront infinies.

529. La Formule de la ſomme de la progreſſion géométrique donnera pour toutes ces progreſſions, où $a = 1$, m ou le multiplicateur perpétuel $= n^{\frac{1}{\infty}}$, le nombre des termes $= \infty$, la ſomme $\frac{n-1}{n^{\frac{1}{\infty}}-1}$. Par exemple, ſi $n = 2$, c'eſt-à-dire, ſi la progreſſion eſt $1, 2^{\frac{1}{\infty}}, 2^{\frac{2}{\infty}}$, &c. 2, la ſomme eſt $\frac{1}{\frac{1}{2^{\infty}}-1}$ Or $2^{\frac{1}{\infty}} - 1 = \frac{1}{\infty}$ (351). Donc la ſomme eſt $1 \times \frac{\infty}{1} = \infty$. Si $n = 3$, la ſomme eſt $\frac{2}{\frac{1}{3^{\infty}}-1} = 2 \times \infty$, & ainſi des autres, d'où il ſuit que les ſommes augmentent toujours par les coëfficiens 1, 2, &c. qui multiplient ∞. Mais il faut prendre garde que dans ces deux exemples, & par conſéquent dans les autres, ∞ affecté des coëfficiens 1, 2, &c. n'eſt pas le même. Car la différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui eſt entre $3^{\frac{1}{\infty}}$ & 1 eſt plus grande que celle du même ordre qui eſt entre $2^{\frac{1}{\infty}}$ & 1 (351), & par conſéquent elles ne doivent pas être exprimées par le même $\frac{1}{\infty}$, mais la plus grande par $\frac{1}{\propto}$, & l'autre par $\frac{1}{\infty}$, d'où il ſuit que la ſomme de la progreſſion où $n = 2$, étant $1 \times \infty$,

M.E.C.D. 2017

celle de la progreſſion où $n = 3$, ſera $2 \times \infty$, & que ſi ces ſommes croiſſent par les coëfficiens des Infinis qui y entrent, elles décroiſſent par les Infinis mêmes, de ſorte qu'elles ſe tiennent à peu près dans l'égalité, ou du moins ne doivent point ſortir de l'ordre de ∞. Et en effet quand $n = \infty$, la ſomme n'eſt encore que de cet ordre (313).

EXEMPLE III.

530. On a déja vû dans les art. 260, &c. 267, que la ſomme de la Suite $1^{\frac{1}{\infty}} = 1, 2^{\frac{1}{\infty}}, 3^{\frac{1}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, eſt $= \infty$. *Suite pareille.*

Deux de ſes termes conſécutifs quelconques ſont $n^{\frac{1}{\infty}}$ & $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$, n étant ſucceſſivement tous les nombres naturels.

La différence des deux 1ers termes 1 & $2^{\frac{1}{\infty}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ (351), & cette différence doit toujours enſuite aller en décroiſſant, parce que n & $n+1$ dont on tire la $\sqrt[\infty]{}$, different d'autant moins ou approchent d'autant plus de l'égalité, que n eſt plus grand. Donc la différence décroiſſante de $n^{\frac{1}{\infty}}$ & de $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$ tend à devenir de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Il eſt clair que comme elle ſuit le décroiſſement du rapport de 1 à n, elle ne doit changer d'ordre & tomber dans l'ordre inférieur, que quand 1 change d'ordre & devient infiniment petit par rapport à n. Or cela arrive dès que n eſt le moindre Infini poſſible, donc alors la différence de $n^{\frac{1}{\infty}}$ & de $\overline{n+1}^{\frac{1}{\infty}}$ devient infiniment petite par rapport à ce qu'elle étoit, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Et comme n n'eſt jamais infini que du 1er ordre, la différence ne tombe point au-deſſous de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

531. Donc il y a dans cette Suite une infinité de différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une autre infinité beaucoup plus

M.E.C.D. 2017

grande de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, toutes décroiſſantes, dont la ſomme eſt $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, eſt finie, comme on l'a toujours trouvée, mais très-petite.

532. Je ſuppoſe les différences continuement croiſſantes, ou décroiſſantes, comme j'ai ſuppoſé les Suites continuement croiſſantes. Il ſuit en général de tout ce qui a été dit, que les Suites originairement formées de termes Finis, ne ſortent point de l'ordre du Fini, ſi elles n'ont que des différences infiniment petites, ſoit croiſſantes, comme celle de l'Ex. 2, ſoit décroiſſantes, comme celle de l'Ex. 3, ou ſi, comme celle de l'Ex. 1, elles n'ont qu'un nombre Fini de différences finies, ſoit croiſſantes, ſoit décroiſſantes, car dans tous ces cas la ſomme des différences ne peut être d'un ordre plus élevé que le Fini, & par conſéquent le dernier terme, qui moins le premier eſt cette ſomme, ne peut être que Fini.

533. Et comme l'art. précédent comprend toutes les manieres poſſibles, dont une infinité de grandeurs peuvent ne faire qu'une ſomme finie, toute Suite qui ne ſort point de l'ordre du Fini eſt dans quelqu'un de ces cas, & réciproquement.

Théorie générale pour l'ordre des ſommes des Suites croiſſantes, qui s'élevent du Fini à un Infini quelconque.

534. Mais quand des Suites infinies s'élevent de 1 à ∞, ou en général à ∞^n, il n'eſt plus vrai que leurs ſommes ſoient toujours de l'ordre ſupérieur à celui de leur dernier terme, & il s'agit de ſavoir de quel ordre elles ſeront.

Une Suite croiſſante ne peut jamais avoir une ſomme moindre, quant à l'ordre & à la grandeur, que lorſque ſon dernier terme ſeul eſt ſa ſomme, & elle n'en peut jamais avoir une plus grande, quant à l'ordre, que quand elle eſt de l'ordre de ∞^{n+1}, mais alors cette ſomme eſt moindre, quant à la grandeur, que ∞^{n+1}, ou, ce qui eſt le même, elle eſt ∞^{n+1} affecté de quelque coëfficient qui le diminue, car pour être ∞^{n+1} ſans coëfficient qui le diminuât, il faudroit que la Suite ne fût formée que d'un nombre ∞ & de ∞^n, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

M.E.C.D. 2017

535. Afin qu'une Suite ait la plus grande ſomme poſſible, c'eſt-à-dire, qu'elle l'ait plus grande que toutes les Suites qui auront les mêmes extremes, & le même nombre ∞ de termes, ce qu'on ſouſentendra toujours, il faut que ſa ſomme ſoit ∞^{n+1} affecté d'un coëfficient le plus approchant de 1 qu'il ſoit poſſible, ou qui diminue le moins de grandeur ∞^{n+1}. Pour cela il faut que la Suite ait eu un nombre infini de ∞^n, & le plus grand poſſible, & de plus des Infinis d'ordres inférieurs dans le plus grand nombre infini poſſible, enfin le plus grand nombre poſſible de termes tous utiles à la ſomme. Or cela demande qu'elle ſéjourne infiniment, s'il ſe peut, dans chacun de ſes ordres, ou que du moins elle ſéjourne infiniment dans les derniers qui ſont les principaux pour la ſomme. Ces ſéjours infinis demandent que la Suite croiſſe lentement, ou, ce qui eſt le même, qu'elle n'ait que de petites différences, & de plus, comme les derniers ordres ſont les plus importans pour la ſomme, les différences y doivent être moindres, c'eſt-à-dire, qu'elles doivent être décroiſſantes, & le plus lentement décroiſſantes qu'il ſera poſſible, ſur-tout vers la fin.

536. Il eſt clair & par la raiſon des contraires, & par la nature même de la choſe, que les Suites à différences croiſſantes auront de moindres ſommes, & que celle qui les aura les plus croiſſantes vers la fin aura la moindre ſomme poſſible.

537. Le même ∞^n étant le dernier terme des Suites que l'on compare, & en même-temps la ſomme conſtante de leurs différences qui ſont en même nombre, plus des différences ſont croiſſantes, & par conſéquent plus elles ſont grandes à l'extrémité de la Suite, plus elles ſont petites à ſon origine, & réciproquement. De même plus des différences ſont lentement décroiſſantes vers l'extrémité, plus elles ſont grandes à l'origine, & réciproquement.

538. Les différences croiſſantes ſont de deux eſpeces, elles le ſont ou *abſolument* & en même-temps *relativement* aux termes dont elles ſont différences, ou abſolument, & non relativement.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Soient les quatre nombres 1, 2, 5, 13, dont les différences ſont 1, 3, 8. Non-ſeulement elles ſont abſolument croiſſantes, mais elles le ſont relativement, ou ſelon une plus grande raiſon que les termes, car 3, la 2de de ces différences, a un plus grand rapport à 1 qui en eſt la 1re, que 2, le 2^d des termes à 1 qui en eſt le 1er. De même 8 a un plus grand rapport à 3, que 5 à 2. Ces différences ſont abſolument & relativement croiſſantes.

Soient les quatre termes 1, 3, 6, 10, dont les différences ſont 2, 3, 4. Il eſt viſible qu'elles ſont croiſſantes ſelon une moindre raiſon que les termes. Elles ſont abſolument croiſſantes, & relativement décroiſſantes.

539. Puiſqu'il y a des différences abſolument croiſſantes & relativement décroiſſantes, à plus forte raiſon y en a-t-il qui ſoient abſolument conſtantes & relativement décroiſſantes. Telles ſont celles de toutes les progreſſions arithmétiques croiſſantes.

540. De même, puiſqu'il y a des différences abſolument croiſſantes & relativement décroiſſantes, à plus forte raiſon y en a-t-il qui ſoient abſolument croiſſantes, & relativement conſtantes. Telles ſont celles de toutes les progreſſions géométriques croiſſantes, car elles ſont toujours en même raiſon que les termes.

541. Il eſt certain que les Suites à différences abſolument décroiſſantes auront de plus grandes ſommes que celles à différences abſolument & relativement croiſſantes, & que ce ſeront là les deux *genres* extremes de Suites par rapport à la grandeur des ſommes. Ainſi entre ces deux genres il s'en placera un moyen qui ſera des Suites à différences abſolument croiſſantes & relativement décroiſſantes. Elles auront des ſommes moindres que celles du 1er genre, & plus grandes que celles du 3me. Car par rapport à la grandeur des ſommes, le décroiſſement relatif des différences doit faire moins d'effet que le décroiſſement abſolu, & plus que l'accroiſſement abſolu. Il eſt aiſé de s'imaginer ces trois genres ainſi rangés. 1, Suites à différences abſolument décroiſſantes. 2, Suites à différences

M.E.C.D. 2017

différences relativement décroiſſantes, & abſolument croiſſantes. 3, Suites à différences abſolument & relativement croiſſantes. Les ſommes vont toujours diminuant.

542. La derniere Suite du 1er genre eſt celle dont les différences ceſſent d'être abſolument décroiſſantes, & commencent à l'être relativement, & en même temps ne ſont pas encore abſolument croiſſantes comme ſeront celles de la Suite qui viendra après elle. C'eſt donc une progreſſion arithmétique. Elle eſt la derniere du 1er genre, & la 1re du 2^d^, & le paſſage de l'un à l'autre.

543. De même la derniere du 2^d^ genre & la 1re du 3me ceſſera d'avoir des différences relativement décroiſſantes, & ne les aura pas encore relativement croiſſantes, quoiqu'elle les ait abſolument croiſſantes, comme celles du 2^d^ & 3me genre. Elle ne les aura donc ni relativement décroiſſantes, ni relativement croiſſantes, quoiqu'abſolument croiſſantes, & par conſéquent elle les aura abſolument croiſſantes, & relativement conſtantes, & ſera une progreſſion géométrique (540) qui fera le paſſage du 2^d^ genre au 3me.

544. La progreſſion arithmétique & la géométrique font chacune le paſſage d'un genre à un autre, parce qu'elles ſont d'une nature unique & ſinguliere entre toutes les Suites, & qu'elles participent toujours également de deux genres conſécutifs, ce qui les met à l'extrémité de l'un & à la tête de l'autre. Par la même raiſon elles doivent faire les autres paſſages qui ſont à faire. Il s'en fait un des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1} à des ſommes de l'ordre de ∞^{n}. Ce paſſage, qui eſt infini, ne doit ſe faire que dans le genre de Suites les plus oppoſées à celles dont les ſommes ſont de l'ordre de ∞^{n+1}. Or ſelon l'arrangement que nous ſuppoſons ici, les plus oppoſées à celles du 1er genre, qui ont certainement des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1}, ſont les Suites du 3me genre. Donc ce paſſage ſe fait par une Suite de ce genre, & de plus par la progreſſion géométrique qui en eſt la 1re, c'eſt-à-dire, que

M.E.C.D. 2017

toutes les Suites au deſſus de la progreſſion géométrique ont des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1}, & que cette progreſſion & toutes les Suites au deſſous n'ont que des ſommes de l'ordre de ∞^{n}.

545. Il ſuit de-là que de toutes les Suites qui n'ont des ſommes que de l'ordre de ∞^{n}, la progreſſion géométrique eſt celle qui a la plus grande ſomme, & qu'après elle les ſommes vont toujours en décroiſſant, juſqu'à une derniere $= \infty^{n}$, la moindre poſſible.

546. La progreſſion arithmétique eſt auſſi placée dans un paſſage, mais qui n'a rapport qu'à la grandeur de ſommes toutes de l'ordre de ∞^{n+1}. La ſomme de cette progreſſion eſt toujours $\frac{\infty^{n+1}}{2}$, ou, ce qui eſt le même, $\frac{1}{2}$ eſt un coëfficient conſtant qui affecte la ſomme de toute progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^{n}, ce qu'il eſt très-aiſé de voir. Toute Suite qui ſera au deſſus d'elle, aura le ∞^{n+1} de ſa ſomme affecté d'un coëfficient plus grand que $\frac{1}{2}$, mais toujours moindre que 1, & toute Suite au deſſous de la progreſſion arithmétique & au deſſus de la géométrique aura le ∞^{n+1} de ſa ſomme, affecté d'un coëfficient moindre que $\frac{1}{2}$.

547. Pour ſavoir ſi une Suite a une ſomme de l'ordre de ∞^{n} ou de ∞^{n+1}, il ne faut donc que ſavoir ſi elle eſt au deſſous ou au deſſus de la progreſſion géométrique, & ſi elle eſt au deſſous, on ſait que ſa ſomme de l'ordre de ∞^{n} eſt moindre que celle de cette progreſſion (544). Si elle eſt au deſſus, on ſait que ſa ſomme de l'ordre de ∞^{n+1} eſt plus grande ou moindre que $\frac{\infty^{n+1}}{2}$ ſelon que la Suite eſt au deſſus ou au deſſous de la progreſſion arithmétique. Il ne s'agit donc que de juger quelle eſt la ſituation d'une Suite donnée à l'égard de l'arithmétique & de la géométrique correſpondantes, que l'on aura toujours par les Regles connues. C'eſt ce

M.E.C.D. 2017

que nous allons faire, en donnant à n, expoſant de ∞^n, ſes différentes valeurs qui étoient demeurées indéterminées.

Nous avons toujours ſuppoſé que ∞^n étoit ſans coëfficient, c'eſt-à-dire, qu'il n'étoit ni $m\,\infty^n$, ni $\frac{\infty^n}{m}$. Cependant il eſt certain que des Suites peuvent s'élever à ∞^n ainſi affecté, mais ce coëfficient devant être fini, puiſqu'autrement ∞^n changeroit d'ordre, il eſt clair que cela ne change rien à l'ordre des ſommes, & que pour leur grandeur, il ſera aiſé d'y avoir égard. Mais il va être queſtion principalement de l'ordre des ſommes.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 *&* ∞.

548. Comme les Suites que la Géométrie conſidere ne ſont que celles qui ſont originairement formées de termes Finis déterminables, & que ſi nous en avons conſidéré d'autres, ce n'a été que pour en venir à celles-là, nous allons y réduire toute cette Théorie, qui n'étoit que trop générale.

Lorſqu'une Suite eſt compriſe entre 1 & ∞, on a déja les deux progreſſions A & G que l'on a tant vues, auxquelles on la comparera. A eſt originairement toute formée de termes Finis déterminables, & G de termes Finis non déterminables : car quoique $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ſoient finis, & aient entr'eux des différences finies (527 & 528), on ne peut connoître leur valeur préciſe, parce que G n'ayant une ſomme que de l'ordre de ∞, & ſes différences vers ſon extrémité fort croiſſantes, quoique relativement conſtantes, elle a les différences de ſon origine ſi petites, que la premiere qui eſt $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, eſt indéterminable en petiteſſe (357), ce qui emporte que les ſuivantes ſoient de même nature. Donc les Suites qui ſeront au deſſus de G, & qui par conſéquent auront des ſommes de l'ordre de ∞^2, auront à leur origine des différences finies plus grandes que des indéterminables en petiteſſe, donc ces différences ſeront déterminables, & les termes auſſi dont elles ſeront différences, & réciproquement les Suites compriſes entre 1 & ∞, & originairement

M.E.C.D. 2017

formées de termes Finis déterminables ſeront au deſſus de G, & auront des ſommes de l'ordre de ∞^2.

549. Et comme les Suites au deſſus de G peuvent être tant au deſſus qu'au deſſous de A, c'eſt-à-dire, avoir des différences ou décroiſſantes, ou croiſſantes, il ſuit que pourvu qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables, elles ont toutes des ſommes de l'ordre de ∞^2.

550. Il peut y avoir au deſſus de A quelque Suite à différences abſolument décroiſſantes, telle que ſeroit $\frac{nn+2n}{n+1}$, n étant ſucceſſivement tous les nombres naturels, de ſorte que pour $n = 1$, on auroit $\frac{3}{2}$, 1er terme, pour $n = 2$, $\frac{8}{3}$, enſuite $\frac{15}{4}$, $\frac{24}{5}$, &c. & la Suite, quoique commençant par un terme un peu plus grand que 1, ſe termineroit comme A par ∞, car on auroit $\frac{nn+2n}{n+1} = \frac{\infty^2+2\infty}{\infty+1} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$.

L'expreſſion générale de la différence ſeroit $\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$, qui donneroit pour les différences conſécutives à l'origine de la Suite, $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$, $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$, $\frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$, &c. différences décroiſſantes. Il ſemble donc que la ſomme devroit être plus grande que celle de A. Mais il faut prendre garde que cette Suite vient bien-tôt à n'avoir que la même différence que A, car dès que n eſt un nombre naturel ſi grand, qu'étant quarré il devient infini, $\frac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}$ ſe réduit à $\frac{n^2}{n^2} = 1$. Or afin que les Suites aient de plus grandes ſommes en vertu de leurs différences abſolument décroiſſantes, il faut, comme on a vû, que ces différences abſolument décroiſſantes, le ſoient juſqu'au bout, parce que c'eſt principalement à l'extrémité qu'il en réſulte un plus grand nombre de grands termes & de l'ordre ſupérieur. Ici il eſt viſible que les grandeurs $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, &c. dont les différences de cette Suite excedent 1, ne peuvent faire qu'une ſomme finie, parce qu'elles ne regnent que dans une étendue finie, ou juſqu'aux Finis indéterminables. De plus cette ſomme ne peut être que fort petite, & elle diſparoît devant la ſomme infinie des Unités.

M.E.C.D. 2017

551. Par le même raiſonnement, mais renverſé, ſi l'on fait la Suite $\frac{n^2+1}{n+1}$ qui ſera 1, $\frac{5}{3}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{17}{5}$, &c. terminée par ∞, & dont les différences à l'origine ſeront $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{10}$, &c. & par conſéquent croiſſantes, elle ſera, ſi l'on veut, au deſſous de A, mais elle n'en aura pas une moindre ſomme, car $\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$, expreſſion générale de la différence, deviendra $=1$ dès les premiers Finis indéterminables.

552. A eſt la ſeule Suite originairement formée de nombres entiers déterminables, compriſe entre 1 & ∞, & nulle autre pareille, quoique fractionnaire, ne peut avoir une plus grande, ou une moindre ſomme, de ſorte qu'il n'y a proprement aucune Suite pareille, qui ſoit au deſſus, ni au deſſous de A.

553. Il n'en va pas de même de G, qui lui eſt toujours oppoſée, & pour voir qu'il y a quelque Suite au deſſous de G, & dont la ſomme eſt moindre, il n'y a qu'à ſe ſouvenir de $A^{\frac{a}{\infty}}$ des art. 292 & 293, qui eſt $1^{\frac{1}{\infty}}=1$, $2^{\frac{2}{\infty}}$, $3^{\frac{3}{\infty}}$ &c. $\infty^{\frac{\infty}{\infty}}=\infty$. Les différences de ſon origine ſont infiniment petites (350 & 351) & fort croiſſantes, puiſqu'elles commencent par $\frac{1}{\infty}$, & font une ſomme $=\infty$. De plus elles ſont, ſelon que le demande la Théorie préſente, croiſſantes ſelon une plus grande raiſon que les termes, car les termes de l'origine, qui ſont finis, ne prennent des accroiſſemens que de l'ordre qui leur eſt inférieur, & les différences en prennent de leur ordre. Auſſi la ſomme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ eſt-elle moindre que celle de G, ce qu'on peut voir ainſi.

$\infty^{\frac{1}{\infty}}$, 2[d] terme de G, eſt plus grand que $2^{\frac{2}{\infty}}=4^{\frac{1}{\infty}}$, 2[d] terme de $A^{\frac{a}{\infty}}$, ce qui eſt clair de ſoi-même, & de plus $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ differe finiment de 1, & $4^{\frac{1}{\infty}}$ infiniment peu. De

M.E.C.D. 2017

même $\infty^{\frac{2}{\infty}} > 3^{\frac{3}{\infty}}$, &c. Enfin le penultieme terme de G eſt $\infty^{\frac{\infty-1}{\infty}}$, car le dernier terme ∞ eſt à ce penultieme $:: = ^{\frac{1}{\infty}} . 1$, ce qui donne pour ce penultieme $\frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{\infty}}} = = \infty^{\frac{\infty-1}{\infty}}$. Le penultieme terme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ eſt $\overline{\infty - 1}^{\frac{\infty-1}{\infty}}$, donc il eſt moindre que le penultieme de G, ou tout au plus égal. Donc juſque-là tous les termes moyens de $A^{\frac{a}{\infty}}$ ſont moindres que ceux de G, donc la ſomme de $A^{\frac{a}{\infty}}$ moindre que celle de G.

554. Toutes nos connoiſſances exactes & completes ne roulent qu'autour de A, & tout ce qui eſt analogue à G nous échappe pour la plus grande partie.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 & ∞^2.

555. Conſidérons maintenant toutes les Suites poſſibles compriſes entre 1 & ∞^2, & toujours compoſées d'un nombre de termes $= = \infty$. Selon la Théorie préſente, il y aura une progreſſion arithmétique qui aura une ſomme de l'ordre de ∞^3, & la plus grande ſomme poſſible entre toutes les Suites à différences croiſſantes; & il y aura au deſſous d'elle, dans cette même eſpece de Suites à différences croiſſantes, une progreſſion géométrique qui n'aura une ſomme que de l'ordre de ∞^2, mais la plus grande de toutes celles de cet ordre.

La progreſſion arithmétique eſt $\div 1. 1 + \infty = = \infty. 2\infty. 3\infty$, &c. $\infty \times \infty = = \infty^2$. La géométrique eſt $\div\div 1. \infty^{\frac{2}{\infty}} = = \infty^{\frac{2\times 1}{\infty}} . \infty^{\frac{2\times 2}{\infty}} . \infty^{\frac{2\times 3}{\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{2\infty}{\infty}} = = \infty^2$. La ſomme de l'arithmétique eſt $\frac{\infty^3}{2}$, & celle de la géométrique $\frac{\infty^2}{\infty^{\frac{\infty}{2}} - 1}$.

Puiſque $\infty^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{x}$, x étant un Fini indéterminable

M.E.C.D. 2017

en grandeur (357), on a $\infty^{\frac{2}{\infty}} = \frac{xx+2x+1}{xx}$, & $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1 = \frac{2x+1}{xx}$. Donc $\frac{\infty^2}{\frac{2}{\infty}} = \frac{xx\,\infty^2}{2x+1} = \frac{x\infty^2}{2}$ à très-peu près. Donc cette ſomme ∞^{-1} n'eſt que de l'ordre de ∞^2.

556. En même temps $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, premiere différence de la progreſſion géométrique, eſt un Fini indéterminable en petiteſſe, dont le quarré $1 - 2\infty^{\frac{2}{\infty}} + \infty^{\frac{4}{\infty}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Car en procédant comme dans l'art. 357, on trouvera que $2\infty^{\frac{2}{\infty}} - \infty^{\frac{4}{\infty}} = \overline{1+\frac{1}{x}}^2 \times 2 - \overline{1+\frac{1}{x}}^4$ eſt $= 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^4} = 1 - \frac{4}{x^2}$, car $\frac{1}{x^4}$ diſparoît devant $\frac{4}{x^2}$, puiſque x^4 eſt x^2 infini du 1er ordre multiplié par lui-même, & $\frac{4}{x^3}$ où x^3 eſt x^2 infini multiplié par x fini, eſt quelque Infiniment petit radical moyen entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, & qui diſparoît devant $\frac{1}{\infty}$. Donc $1 - 2\infty^{\frac{2}{\infty}} + \infty^{\frac{4}{\infty}} = 1 - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty}$.

557. S'il y a des Suites qui aient dans l'ordre de ∞^3 de plus grandes ſommes que la progreſſion arithmétique, compriſe entre 1 & ∞^2, car elles ne peuvent jamais avoir des ſommes d'un ordre plus élevé, elles ſeront au deſſus de cette progreſſion arithmétique, & auront des différences décroiſſantes, & par conſéquent de plus grandes différences à leur origine que cette progreſſion, dont la différence conſtante eſt ∞. Elles ne ſeroient donc pas originairement formées de termes Finis déterminables. Donc toutes celles qui ſeront originairement formées de termes de cette nature, ſeront au deſſous de la progreſſion arithmétique. En même temps elles ſeront au deſſus de la géométrique, dont les différences de l'origine ſont Finies indéterminables en petiteſſe,

M.E.C.D. 2017

puiſque $\infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, premiere différence de cette progreſſion (556), eſt indéterminable en petiteſſe. Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞^2, & originairement formées de termes Finis déterminables, ont des ſommes de l'ordre de ∞^3, mais moindres que celle de la progreſſion arithmétique.

558. En effet, on a vu que A^2, qui eſt 1, 4, 9, 16, &c. ∞^2, a une ſomme qui eſt ∞^3 diviſé par un plus grand nombre que 2 (212). Or la ſomme de la progreſſion arithméti-que eſt $\frac{\infty^3}{2}$. On peut remarquer pour confirmation de cette Théorie, que les différences de A^2, qui ſont les nombres impairs, 3, 5, 7, &c. ſont croiſſantes ſelon une moindre raiſon que les termes, ce qui la place entre la progreſſion arithmétique & la géométrique.

559. Quoique la progreſſion arithmétique n'ait, horſmis ſon 1er terme, que des Infinis, qui par conſéquent ſont tous inexprimables ou indéterminables, les rapports de ces Infinis, du moins à l'origine, ſont tous Finis & exprimables, ou déterminables, & au contraire la progreſſion géométrique n'a que des termes tous inexprimables & indéterminables, lors même qu'ils ſont Finis, & dont les rapports le ſont pareillement. Cela met encore une différence d'eſpece entre les deux progreſſions, & de-là vient que les Suites originairement formées de termes Finis déterminables n'ont d'analogie ou d'affinité qu'avec les progreſſions arithmétiques correſpondantes, c'eſt-à-dire, compriſes entre les mêmes extremes, & compoſées du même nombre de termes, & non avec les géométriques pareillement correſpondantes.

560. La ſomme de la progreſſion géométrique compriſe entre 1 & ∞, étant $x\infty$, & celle de la progreſſion compriſe entre 1 & ∞^2, étant $x\infty^2$ diviſé par 2, ou par un nombre de très-peu plus grand (555), celle de la 2de n'eſt pas tout-à-fait une moitié de ſon Infini, au lieu que celle de la 1re eſt ſon Infini entier.

Ordre des

561. Il en ira de même des Suites compriſes entre 1 & ∞^3.

M.E.C.D. 2017

∞^3. La différence conſtante de la progreſſion arithmétique ſera ∞^2, le multiplicateur perpétuel de la géométrique $\infty^{\frac{3}{\infty}}$, la ſomme de l'arithmétique $\frac{\infty^4}{2}$, & celle de la géométrique $\frac{\infty^3}{\infty^{\frac{3}{\infty}}-1}$, d'où l'on voit d'abord que la ſomme de la 1re étant toujours $\frac{1}{2}$ de ſon Infini, celle de la 2de ſera toujours une moindre partie du ſien, car $\infty^{\frac{3}{\infty}} - 1 > \infty^{\frac{2}{\infty}} - 1$, ce qui donnera pour la ſomme de la géométrique $x\,\infty^3$ diviſé par quelque nombre plus grand que 2. On voit auſſi, par tout ce qui a été dit, que les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, comme A^3 (214), ſeront entre ces deux progreſſions, & auront des ſommes de l'ordre de ∞^4, mais moindres que $\frac{\infty^4}{2}$, ſelon ce qui a été dit de A^3 (223).

Sommes des Suites compriſes entre 1 & ∞^3.

562. Il eſt aſſez clair, & on peut s'en aſſurer encore plus en détail, que ce ſera toujours la même choſe de toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞^n, n étant fini. Donc toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & compriſes entre 1 ∞^n, n étant fini, auront des ſommes de l'ordre de ∞^{n+1}.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 & ∞^n.

563. La différence conſtante, & par conſéquent celle des deux 1ers termes de la progreſſion arithmétique quelconque, compriſe entre 1 & ∞^n, eſt ∞^{n-1}, ce qui ſubſiſte, lors même que $n = 1$, car alors $\infty^{n-1} = \infty^{1-1} = \infty^0 = 1$. Et dès que $n = 2$, la différence de la progreſſion arithmétique eſt $= \infty$. La différence des deux 1ers termes de la progreſſion géométrique correſpondante eſt $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$. Or on a trouvé (310) qu'en donnant à n toutes ſes différentes valeurs ſucceſſives, il y a une infinité de $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ finis, & à

M.E.C.D. 2017

plus forte raiſon, de $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$. De plus le premier des $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$ eſt $\infty^{\frac{1}{\infty}} - 1$, quantité finie, mais indéterminable en petiteſſe, ce qui détermine l'accroiſſement des $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$ à être fort lent. Enfin, on a vû (285) que $3^{\frac{n}{3}} > \infty^{\frac{n}{\infty}}$, ce qui tient toujours les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$ dans une aſſez grande petiteſſe, & encore plus les $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} - 1$; car ſi, par ex. $n = 3$, on a $3 > \infty^{\frac{3}{\infty}}$, ſi $n = 6$, $9 > \infty^{\frac{6}{\infty}}$, &c. & par conſéquent $2 > \infty^{\frac{3}{\infty}} - 1$, $8 > \infty^{\frac{6}{\infty}} - 1$, &c. D'un autre côté les Suites originairement formées de termes Finis déterminables ont les différences de leurs deux 1ers termes beaucoup plus grandes que ces $\infty^{\frac{n}{\infty}} - 1$; par ex. ſi $n = 3$, la différence des deux 1ers termes de A^3 eſt 7, beaucoup plus grand que 2, ſi $n = 6$, la différence des deux 1ers termes de A^6 eſt 63, beaucoup plus grand que 8, &c. Or les Suites compriſes entre 1 & ∞^n, étant rangées ſelon la grandeur de leurs ſommes décroiſſantes, & par conſéquent les différences d'une Suite étant plus croiſſantes que celles de la précédente, ou, ce qui revient au même, les différences de l'origine étant plus petites dans une Suite que dans la précédente, il ſuit de tout ce qui vient d'être dit, que dès que $n = 2$, les différences de l'origine des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, ſont plus petites que celles de la progreſſion arithmétique, & plus grandes que celles de la progreſſion géométrique, que par conſéquent ces Suites ſont placées entre ces deux progreſſions, & que cela dure au moins tant que n eſt fini. Mais quand $n = \infty$, la différence de la progreſſion arithmétique eſt $\infty^{\infty - 1}$, & la 1re différence de la géométrique eſt $\infty^{\frac{\infty}{\infty}} - 1 = \infty$, & par conſéquent

M.E.C.D. 2017

il n'y a aucune Suite à différences finies, ou originairement formée de termes Finis déterminables, qui puiſſe ſe placer entre ces deux progreſſions. Donc s'il y a quelque Suite de cette nature compriſe entre 1 & ∞^{∞}, elle eſt au-deſſous de la progreſſion géométrique.

564. La progreſſion arithmétique eſt $\div$ 1. 1 + ∞ $^{\infty-1}$. $= \infty^{\infty-1}$. $2\infty^{\infty-1}$, &c. $\infty \times \infty^{\infty-1} = \infty^{\infty}$, dont la ſomme eſt $\infty \frac{\infty^{\infty}+1}{2}$, & la géométrique eſt $\div$ 1. ∞. ∞^{2}, &c. ∞^{∞}, dont la ſomme eſt ∞^{∞}. Entre les mêmes extremes eſt A^a originairement formée de termes Finis déterminables, qui eſt $1^1, 2^2, 3^3$, &c. ∞^{∞} (282). Selon l'art. précédent, A^a eſt au-deſſous de la progreſſion géométrique, & par conſéquent elle devroit avoir une moindre ſomme, cependant elle a préciſément la même (283). Mais cela vient de ce que la progreſſion géométrique ayant la moindre ſomme poſſible, puiſque ce n'eſt que ſon dernier terme, A^a n'en peut jamais avoir une moindre. En ce cas-là le dernier terme ſeul faiſant la ſomme, & étant le même en deux Suites, tous les termes qui le précedent dans l'une & dans l'autre, quelque différens qu'ils ſoient, ne ſont plus à conſidérer, ainſi qu'ils l'étoient lorſque *n* étoit fini. Et ce qui marque bien que ſi ce n'étoit cela, la ſomme de A^a ſeroit moindre que celle de la progreſſion géométrique, c'eſt qu'en prenant un nombre fini quelconque de termes de A^a, on en trouvera la ſomme moindre, & même infiniment moindre que celle d'un même nombre de termes de la progreſſion, ou plutôt que le dernier de ce nombre de termes qui fera ſeul la ſomme. Ainſi 32, ſomme des trois 1ers termes de A^a, eſt infiniment moindre que ∞^2, ſomme des trois 1ers termes, ou 3me terme de la progreſſion.

565. On voit par-là que les ſommes de Suites compriſes entre 1 & ∞^n, & originairement formées de termes Finis

M.E.C.D. 2017

déterminables, ſe ſont toujours d'autant plus approchées de la ſomme de la progreſſion géométrique que n fini a été plus grand, juſqu'à ce qu'enfin n étant $= \infty$, ces ſommes ſoient devenues égales à celle de cette progreſſion. En effet on a vû dans les A^n qu'à meſure que n étoit plus grand, les ſommes étoient ∞^{n+1} diviſé par un plus grand nombre (227), ce qui approchoit toujours de plus en plus ∞^{n+1} de ∞^n.

566. D'un autre côté les ſommes des progreſſions géométriques compriſes entre 1 & ∞^n, ayant été pour $n = 1$, $x\infty$, pour $n = 2$, $\frac{x\infty^2}{2}$, & enfin pour $n = \infty$, ∞^∞, on voit qu'elles ont toujours dû être le dernier terme de la progreſſion multiplié par un même nombre, & diviſé d'abord par un nombre beaucoup plus petit que ce multiplicateur, mais croiſſant, de ſorte que le diviſeur eſt enfin devenu égal au multiplicateur. Ainſi ces ſommes ont toujours été des Infinis plus élevés, mais décroiſſans chacun dans ſon ordre. Tous ces décroiſſemens de ſommes dans leurs ordres viennent, ſelon ce qui a été dit ici aſſez ſouvent, de ce qu'il y a eu toujours moins de termes utiles à la ſomme.

567. Entre 1 & ∞^∞ eſt encore la Suite A^∞, 1^∞, 2^∞, 3^∞, &c. ∞^∞ (228). Il ſaute aux yeux que les différences de ſon origine qui ſont les termes mêmes, 2^∞, 3^∞, &c. étant plus grandes que ∞, ∞^2, &c. (235, 239), différences correſpondantes de la progreſſion géométrique, A^∞ doit être au-deſſus de cette progreſſion, & ſa ſomme plus grande, & c'eſt auſſi ce qu'on a trouvé (245).

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$.

268. Soient maintenant les Suites infinies compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$. Si $n = 2$, ce qui eſt ici ſa moindre valeur poſſible, on a la $\div$ 1. $1 + \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $1 + \frac{2}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $1 + \frac{3}{\infty^{\frac{1}{2}}}$; &c. $1 + \frac{\infty}{\infty^{\frac{1}{2}}} = 1 + \infty^{\frac{1}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. Et la $\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{2\infty}}$.

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{2}{2\infty}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} . \infty^{\frac{3}{2\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{2\infty}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. La somme de la 1re est $\frac{\infty^{\frac{3}{2}}}{2}$, & la somme de la 2de $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{2\infty}} - 1}$. La somme de la 1re est de l'ordre le plus élevé qu'elle puisse être ; car elle est de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}+1}$; or nulle Suite ne peut avoir une somme d'un ordre plus élevé que celui qui est immédiatement supérieur à son dernier terme.

La différence constante de la progression arithmétique est infiniment petite, puisqu'elle est $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, & la 1re différence de la progression géométrique est encore plus petite par la nature de ces deux progressions. Donc il n'y a entr'elles aucune Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & qui par conséquent auroit des différences finies. Donc toute Suite de cette nature est au-dessus de la progression arithmétique, & a une plus grande somme. Or elle n'en peut avoir une d'un ordre plus élevé, donc elle l'a seulement plus grande dans l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$.

En effet on a trouvé (258) que $A^{\overline{2}}$, qui est $1^{\overline{2}}$, $2^{\overline{2}}$, &c. $\infty^{\frac{1}{2}}$, & qui a des différences finies, a une somme plus grande que $\frac{\infty^{\frac{3}{2}}}{2}$. Aussi $A^{\frac{1}{2}}$ a-t-elle des différences absolument décroissantes, comme l'on verra aisément, car les $\surd$ commensurables consécutives, telles que $\surd 1$, $\surd 4$, $\surd 9$, &c. n'ayant toutes que 1 pour différence, cet intervalle est toujours partagé en un plus grand nombre de parties par les $\surd$ incommensurables intermédiaires.

569. Il en ira de même des Suites compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{3}}$, dont la $\div$ est $1 . 1 + \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}} . 1 + \frac{2}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, &c. $1 + \frac{\infty}{\infty^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$. Et la $\div$ est $1 . \infty^{\frac{1}{3\infty}} . \infty^{\frac{2}{3\infty}}$, &c. $\infty^{\frac{\infty}{3\infty}}$

M.E.C.D. 2017

$= \infty^{\frac{1}{3}}$. La somme de la 1re est $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{2}$, & celle de la 2de $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{3}\infty} - 1}$. Il est aisé de voir que la différence de la progression arithmétique étant infiniment petite, & même infiniment plus petite que celle de la progression arithmétique comprise entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, & la 1re différence de la progression géométrique encore plus petite que celle de l'arithmétique, il n'y aura point de Suites telles que $A^{\frac{1}{3}}$ (259) originairement formées de termes Finis déterminables, qui n'aient une plus grande somme que $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{2}$, quoique du même ordre.

570. Il en ira toujours de même, & à plus forte raison des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, comprises entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$, à mesure que n croîtra, & tant qu'il sera fini. Donc toutes ces Suites ont des sommes de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{n}+1} = \infty^{\frac{n+1}{n}}$.

On pourroit suivre cette Théorie jusqu'à $n = \infty$, ce qui feroit voir l'analogie des Suites décroissantes depuis celles qui seroient comprises entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$, jusqu'à celles qui seroient entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$, & produiroit quelques remarques particulieres, mais ce seroit une curiosité inutile, quant à present.

Ordre des sommes des Suites comprises entre 1 *&* $\infty^{\frac{m}{n}}$ *où* $m > n$.

571. Il est clair que toutes les Suites comprises entre 1 & $\infty^{\frac{3}{2}}$ ou $\infty^{\frac{4}{3}}$, &c. & en général entre 1 & $\infty^{\frac{m}{n}}$, m étant plus grand que n, sont de l'espece de celles qui sont entre 1 & ∞^2 ou ∞^3, &c. comme toutes celles qui sont entre 1 & $\infty^{\frac{2}{3}}$, ou $\infty^{\frac{3}{4}}$, &c. & en général entre 1 & $\infty^{\frac{n}{m}}$ sont de l'espece de celles qui sont entre 1 & $\infty^{\frac{1}{2}}$ ou $\infty^{\frac{1}{3}}$, &c.

M.E.C.D. 2017

Donc toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & compriſes entre 1 & ∞ élevé à quelque puiſſance finie que ce ſoit, parfaite ou imparfaite, & dont les différences ſont continuement croiſſantes ou décroiſſantes, ont une forme de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui de leur dernier terme, ou de l'ordre de ∞^{n+1}, n étant un nombre fini quelconque entier ou rompu, & ∞^n leur dernier terme.

572. Toutes les A^n dont on a vû dans la Sect. III, que la ſomme étoit de l'ordre de ∞^{n+1}, n étant fini, ſont autant d'exemples de cette Théorie, mais comme elle eſt devenue plus générale, il ſera bon d'en donner encore quelques autres nouveaux. *Application de la Théorie aux nombres Polygones.*

EXEMPLE I.

Il eſt démontré ſur les nombres Polygones que n étant un nombre naturel quelconque,

le n^{me} Triangulaire eſt . . . . . $\frac{nn+n}{2}$.

Quarré . . . . . nn.

Pentagone . . . . . $\frac{3nn-1n}{2}$.

Exagone . . . . . $\frac{4nn-2n}{2}$.

Eptagone . . . . . $\frac{5nn-3n}{2}$, &c.

D'où il ſuit que le dernier des Naturels étant ∞,

le dernier des Triangulaires eſt . . . . $\frac{\infty^2}{2} = \frac{1\infty^2}{2}$.

des Quarrés . . . . . $\infty^2 = \frac{2\infty^2}{2}$.

des Pentagones . . . . . $\frac{3\infty^2}{2}$.

des Exagones . . . . . $\frac{4\infty^2}{2}$.

des Eptagones . . . . . $\frac{5\infty^2}{2}$, &c.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Et par conſéquent ſelon la Théorie préſente, la ſomme d'une Suite infinie de Polygones quelconques ſera de l'ordre de ∞^3.

En effet, il eſt démontré dans l'art. 10, de la 2de Edit. de l'*Eſſai d'Analyſe ſur les Jeux de Haſard*, que la ſomme d'un nombre quelconque de nombres Polygones quelconques eſt $\frac{n^3 - n \times a}{6} + \frac{n^2 + n}{2}$, en prenant $a = 1$, s'il s'agit des Triangulaires, $a = 2$ pour les quarrés, $a = 3$ pour les Pentagones, &c. & n étant le nombre des termes, dont on cherche la ſomme.

D'où il ſuit que ſi $n = \infty$,

La ſomme infinie des Triangulaires eſt . . . $\frac{1\infty^3}{6}$.

des Quarrés . . . . . $\frac{2\infty^3}{6}$.

des Pentagones . . . . . $\frac{3\infty^3}{6}$, &c.

573. Toutes ces ſommes ſont en progreſſion arithmétique, auſſi-bien que les derniers termes des différens ordres conſécutifs de Polygones rangés de ſuite, & même que tous leurs n^{mes} termes, comme il ſera aiſé de le voir.

574. Les multiplicateurs des ſommes, toutes de l'ordre de ∞^3, des Polygones finis, augmentent toujours, leur diviſeur demeurant le même, parce qu'à meſure que ces Polygones ſont plus grands, les Suites ont un moindre nombre de termes Finis, & un plus grand d'Infinis. Et comme ces Polygones ne paſſent point ∞^2, ils n'ont des Infinis que de deux ordres, & tous utiles à la ſomme.

575. Si entre les deux extremes d'une Suite de Polygones finis quelconques, on fait une progreſſion arithmétique d'un même nombre de termes, on trouvera toujours ſa ſomme plus grande que celle de la Suite de Polygones, & même dans le rapport conſtant de 3 à 2. Auſſi les Suites de Polygones ont-elles des différences abſolument croiſſantes, qui ne ſont que relativement décroiſſantes. Et pareillement une progreſ-

ſion

M.E.C.D. 2017

ſion géométrique aura toujours une ſomme de l'ordre de ∞^2, ſelon que le demande la Théorie préſente.

EXEMPLE II.

576. On a dans l'art. 126, les derniers termes de toutes les Suites des Nombres Figurés. Or c'eſt une propriété de ces nombres, que le n^{me} terme d'un ordre de Figurés quelconque eſt égal à la ſomme des n premiers termes de l'ordre immédiatement inférieur. Par exemple, 10, 4me terme des Triangulaires, eſt égal à la ſomme des 4 premiers Naturels. *Application aux Figurés.*

Donc n étant $= \infty$,

La ſomme des Triangulaires eſt . . . . . $\frac{\infty^3}{6}$.

des Pyramidaux . . . . . $\frac{\infty^4}{24}$.

des Triang. pyramidaux . . . $\frac{\infty^5}{120}$, &c.

D'où l'on voit que ces ſommes ſont toujours de l'ordre ſupérieur au dernier terme de la Suite.

577. En même temps que d'un ordre de Figurés au ſuivant ces ſommes s'élevent toujours d'un ordre d'Infini, elles ſont de moindres Infinis dans leur ordre. Cela vient 1° de ce que ces Suites terminées par des Infinis toujours d'ordres ſupérieurs, le ſont par de moindres Infinis dans ces ordres : mais 2° elles ont toujours un plus grand nombre de différens ordres, & par conſéquent moins d'Infinis de leur dernier ordre, qui ſont les principaux pour la ſomme, & d'ailleurs elles ont auſſi plus de termes inutiles à la ſomme. C'eſt par cette raiſon que l'Infini de leur ſomme a un plus grand diviſeur que l'Infini, qui eſt leur dernier terme.

578. D'une Suite à l'autre les Poligones ſe terminent toujours à un Infini du même ordre & croiſſant de grandeur, & les Figurés à des Infinis croiſſans d'ordre & décroiſſans de grandeur. Les ſommes ſont de même, & en partie parce que tels ſont les derniers termes : mais de plus les

M.E.C.D. 2017

ſommes des Figurés ſont décroiſſantes de grandeur, parce que le nombre de leurs différens ordres eſt croiſſant.

579. Par la formation des Poligones & des Figurés, les différences des uns & des autres ſont croiſſantes dans chaque Suite, & plus croiſſantes dans une Suite que dans l'inférieure, mais beaucoup plus croiſſante dans une Suite de Figurés que dans une Suite correſpondante de Poligones, excepté la Suite des Triangulaires, qui eſt en même temps Suite de Poligones & de Figurés. Cette conſidération des différences pouſſée plus loin, s'accordera avec tout ce qu'on a établi dans la Théorie générale.

Détermination préciſe de la ſomme de toutes les Suites A^n.

580. Il eſt démontré dans l'art. 13 de l'*Analyſe des Jeux de Haſard*, qu'un nombre quelconque de Nombres naturels étant n, la ſomme de ces nombres depuis 1 juſqu'à n inclu-

ſivement élevés au quarré eſt . . . . $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$.

au cube . . . . . $\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$.

au quarré-quarré $\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$, &c.

D'où il ſuit que n étant $=\infty$, la ſomme des nombres Naturels élevés au quarré eſt . . . . . $\frac{2\infty^3}{6}=\frac{\infty^3}{3}$.

au cube . . . . . $\frac{\infty^4}{4}$.

à la 4me puiſſance . . . . . $\frac{6\infty^5}{30}=\frac{\infty^5}{5}$.

à la 5me . . . . . $\frac{\infty^6}{6}$, &c.

Et en général n étant une puiſſance parfaite, la ſomme des nombres Naturels élevés à n eſt $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, ce qui donne, outre l'ordre que l'on avoit déja, une valeur préciſe que l'on n'avoit pas.

En attendant cette détermination préciſe, on avoit prouvé *à priori*, dans les art. 212, 223, 226, 227, que la ſomme

M.E.C.D. 2017

de A^2 étoit une partie de ſon Infini moindre que $\frac{1}{2}$, & en effet elle en eſt $\frac{1}{3}$; que celle de A^3 étoit une partie de ſon Infini moindre que $\frac{1}{3}$, & en effet elle en eſt $\frac{1}{4}$, &c.

581. La ſomme des nombres Naturels non élevés eſt auſſi compriſe dans la Formule $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, car alors étant élevés à 1, leur ſomme $\frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^{1+1}}{1+1}$. Et même la ſomme des mêmes nombres élevés à o y eſt compriſe auſſi, car elle eſt $\frac{\infty^{0+1}}{0+1} = \frac{\infty^1}{1} = \infty$, ſomme des Unités. Et tous les nombres naturels ne ſont alors que des Unités.

582. La ſomme de toute A^n où n eſt un entier, étant donc $\frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, il s'agit de ſavoir ſi cela aura encore lieu, quand n ſera une fraction ou $\frac{1}{n}$, c'eſt-à-dire, ſi la ſomme de $A^{\frac{1}{n}}$ ſera $\frac{\infty^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$.

Détermination de la ſomme des $A^{\frac{1}{n}}$, *& en général des* $A^{\frac{n}{m}}$, *ou* $A^{\frac{m}{n}}$.

En donnant à n, dénominateur de $\frac{1}{n}$, ſes deux valeurs extremes 1 & ∞, la premiere des $A^{\frac{1}{n}}$ eſt $A^{\frac{1}{1}} = A$, dont la ſomme eſt $\frac{\infty^2}{2} = \frac{1\infty^{\frac{1+1}{1}}}{1+1}$. Et la derniere des $A^{\frac{1}{n}}$ eſt $A^{\frac{1}{\infty}}$, dont la ſomme, ſi la Formule préſente lui convient, ſera $\frac{\infty \times \infty^{\frac{\infty+1}{\infty}}}{\infty+1} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. Or c'eſt là effectivement la ſomme de $A^{\frac{1}{\infty}}$ (267). Donc, puiſque la Formule convient aux deux extremes des $A^{\frac{1}{n}}$, elle convient à toutes les moyennes, ſelon l'art. 123 ; car on a vû dans toute la Sect. III, que le cours des $A^{\frac{1}{n}}$, comparées les unes aux autres, auſſi-

M.E.C.D. 2017

bien que celui des A^n, étoit très-uniforme, & que toutes leurs autres propriétés croiſſantes ou décroiſſantes ne faiſoient que croître ou décroître toujours des unes aux autres.

583. On peut prouver encore ainſi la même choſe. n entier eſt $= \frac{n}{1}$. Donc la Formule de la ſomme des A^n eſt $\infty^{\frac{n+1}{1}}$ diviſé par $\frac{n+1}{1}$, ou multiplié par $\frac{1}{n+1}$, c'eſt-à-dire $\frac{1\infty^{\frac{n+1}{1}}}{n+1}$. Donc quand n ſera une vraie fraction, ou $\frac{1}{n}$, il faudra faire la même opération, & on aura $\frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}$.

Et en effet, ſi n entier eſt, par ex. 3, il peut être exprimé par $\frac{6}{2}$, & alors on a pour la ſomme de A^3, $\frac{\infty^{\frac{6}{2}+1}}{\frac{6}{2}+1} = \frac{2\infty^{\frac{8}{2}}}{8} = \frac{\infty^4}{4}$; d'où l'on voit que quand l'Infini, qui exprime l'ordre d'une ſomme, a un expoſant fractionnaire, il faut, pour la valeur préciſe de la ſomme, multiplier l'Infini par cet expoſant reverſé. Or il n'eſt pas poſſible que cela ſoit vrai des expoſans fractionnaires qui valent des entiers, & non de ceux qui ſont de pures fractions.

584. Donc en général la ſomme de toute $A^{\frac{n}{m}}$, quelques nombres que ſoient n & m, eſt $\frac{m\infty^{\frac{n+m}{m}}}{n+m}$.

Quand $m = 1$, ce ſont les ſommes des A^n. Quand $n = 1$, ce ſont celles des $A^{\frac{1}{m}}$, dont l'expoſant eſt une pure fraction. Hors de ces deux cas $\frac{n}{m}$ eſt une fraction ou pure ou mixte.

Ainſi la ſomme de $A^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$, celle de $A^{\frac{1}{3}}$ eſt $\frac{3\infty^{\frac{4}{3}}}{4}$, &c.

M.E.C.D. 2017

celle de $A^{\frac{2}{3}}$ eſt $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$, celle de $A^{\frac{3}{2}}$ eſt $\frac{2\infty^{\frac{5}{2}}}{5}$, &c.

On pourra voir combien ces déterminations préciſes s'accordent avec ce qui avoit été trouvé *à priori* ſur ces ſommes dans la Sect. III.

585. Il ne ſuffit pas de ſavoir de quel ordre ſont les ſommes des Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & compriſes entre 1 & ∞^n, ce qui fait voir en même temps ſi les Infinis de leur dernier ordre ſont en nombre fini ou infini; il eſt important de ſavoir auſſi quand le nombre de leurs termes finis eſt fini ou infini.

Quand les Suites infinies compriſes entre 1 & ∞^n, ou $\infty^{\frac{m}{n}}$ ou $\infty^{\frac{n}{m}}$ ont un nombre infini ou fini de termes finis.

1 & ∞ étant poſés pour extremes, entre leſquels ſont compriſes toutes les Suites poſſibles qui les auront pour premier & dernier terme, les deux Suites dont la nature eſt la plus oppoſée qu'il ſe puiſſe, ſur-tout à l'égard du nombre des termes des deux différens ordres que toutes ces Suites contiennent, ſont *A* & *G*, que l'on a tant vûes. Car *A* ayant une infinité de termes tant Finis qu'Infinis, & une plus grande infinité d'Infinis, *G* n'en a une infinité que de Finis, & un nombre ſeulement fini d'Infinis, ce qui eſt la plus grande oppoſition poſſible. Donc ce en quoi elles conviennent à cet égard doit être bien eſſentiel à toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞. Or *A* & *G* conviennent en ce qu'elles ont un nombre infini de termes finis; donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞ en ont auſſi un nombre infini, & cela, comme on voit, ſoit qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables, ou non.

586. Cela ſera encore vrai, quand les Suites ſe termineront par un Infini plus grand que ∞, mais du même ordre, comme par 2∞. Telle eſt la Suite des Impairs $\dot{-}$ 1, 3, 5, &c. qui pour avoir un nombre de termes $= \infty$, doit aller juſqu'à 2∞. Il eſt clair qu'elle a encore une infinité de termes finis, quoiqu'elle en ait la moitié moins que *A*. Il eſt clair auſſi que le nombre de ſes termes finis, comparé au nombre des Finis de *A*, n'a reçu qu'une diminution proportionnée à

M.E.C.D. 2017

l'augmentation du dernier des Impairs comparé au dernier de A, & que comme cette augmentation n'a été que finie, ou de grandeur ſimplement, & non d'ordre, la diminution qui s'en enſuivoit n'a été auſſi que de grandeur, & non d'ordre, ou finie. Ce même raiſonnement aura également lieu pour toutes les Suites terminées par $n\infty$, n étant Fini déterminable. Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & $n\infty$, n étant un nombre Fini déterminable quelconque, & originairement formées de termes Finis déterminables, ou non, ont une infinité de termes finis.

587. A plus forte raiſon, ſi ces Suites étoient terminées par $\frac{\infty}{n}$, car le nombre des termes finis en augmenteroit plutôt que de diminuer.

588. La progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^2 (555) a des termes de trois ordres, & n'a que ſon premier terme 1 dans l'ordre du Fini. La géométrique n'a qu'une ſomme de l'ordre de ∞^2 (555), & par conſéquent n'a qu'un nombre fini de termes dans ſon dernier ordre, qui eſt celui de ∞^2. Donc malgré leur oppoſition elles conviennent en ce qu'elles n'ont ni l'une ni l'autre un nombre infini de termes dans chacun de leurs trois ordres. Donc nulle Suite compriſe entre 1 & ∞^2, & qui par conſéquent aura des termes de trois ordres, n'aura une infinité de termes dans chacun des trois.

589. Toute Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & compriſe entre 1 & ∞^2, a une ſomme de l'ordre de ∞^3 (557). Donc elle a une infinité de termes de l'ordre de ∞^2, donc elle n'en a pas une infinité de l'ordre du Fini, & de l'ordre de ∞ (588). Donc elle en a, ou 1° un nombre fini de ces deux ordres, ou 2° un nombre fini de l'ordre du Fini, & un nombre infini de l'ordre de ∞, ou 3° un nombre infini de l'ordre du Fini, & un nombre ſeulement fini de l'ordre de ∞. Ce dernier cas eſt viſiblement impoſſible, & abſolument contraire à la gradation réguliere des Suites toujours réglées par quelque Loi, car une Suite

M.E.C.D. 2017

composée de trois ordres consécutifs, auroit donc un nombre infini de termes dans le 1er, un nombre fini dans le 2^d, & un nombre infini dans le 3me. Donc il ne reste que les deux 1ers cas de possibles, qui tous deux ne donnent à la Suite qu'un nombre fini de termes finis : mais il est aisé de voir que c'est le 2^d qui est le vrai. Donc toute Suite originairement formée de termes Finis déterminables, & comprise entre 1 & ∞^2, n'a qu'un nombre fini de termes finis.

On en peut prendre pour exemple A^2.

590. Si la Suite se terminoit par $\frac{\infty^2}{n}$, ce qui seul peut augmenter le nombre des termes finis, le nombre n'en seroit encore que fini, selon le raisonnement de l'art. 586, renversé, & 587.

591. Donc la Suite infinie des Triangulaires, terminée par $\frac{\infty^2}{2}$ (572), n'a qu'un nombre fini de termes finis. Et en effet, puisqu'un nombre Naturel quelconque étant n, le Triangulaire correspondant est $\frac{nn+n}{2}$, la Suite des Triangulaires arrive à l'infini, dès que nn est infini : or il l'est, dès que n est un Fini indéterminable $= x$, & quand cela arrive, il n'y a encore eu qu'un nombre fini de nombres Naturels n finis, & par conséquent que ce même nombre de Triangulaires finis.

592. De même toutes les autres Suites de Poligones terminées par des $\frac{\infty^2}{2}$ croissans dans cet ordre, n'auront qu'un nombre fini de termes finis. On peut leur appliquer aussi le raisonnement qui vient d'être fait sur la Suite des Triangulaires.

593. Si les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & comprises entre 1 & ∞^2, soit que cet Infini ait un multiplicateur ou un diviseur fini, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, à plus forte raison cela sera-t'il vrai des Suites pareilles qui s'éleveront plus haut, ou se termineront par ∞^3, ∞^4, &c. & en général par ∞^n, n étant

M.E.C.D. 2017

fini. On peut auſſi leur appliquer le raiſonnement qui a été fait ſur les Suites compriſes entre 1 & ∞^2.

Donc toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞, ſoit qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables, ou non, ont une infinité de termes finis, & toutes les Suites compriſes entre 1 & ∞^n, n étant fini & plus grand que 1, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, ſi ces termes dont elles ſont originairement formées ſont déterminables, & cela, quelque coëfficient fini qu'ait ∞^1 ou ∞^n.

On voit aiſément par les art. 557 & 589, pourquoi la condition que les Suites ſoient originairement formées de termes Finis déterminables eſt néceſſaire, dès que l'expoſant de l'Infini qui les termine eſt plus grand que 1.

594. Donc tous les nombres Figurés, à commencer par les Triangulaires, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, & même un nombre toujours décroiſſant d'une Suite à l'autre. On le verra auſſi *à priori* par leurs Formules de l'art. 126, en ſuivant le raiſonnement de l'art. 591.

595. Si les Suites ſont compriſes entre 1 & $\infty^{\frac{1}{n}}$, il eſt viſible qu'elles ſont de la même eſpece que celles qui ſeroient terminées par ∞^1, & que même celles-ci doivent à plus forte raiſon avoir un nombre infini de Finis. Il en faut dire autant de celles qui ſeroient terminées par $\infty^{\frac{n}{m}}$, ſi $n < m$. Pareillement celles qui ſeront terminées par $\infty^{\frac{m}{n}}$, où $m > n$, ſeront de l'eſpece de celles qui ſont terminées par ∞, dont l'expoſant eſt un entier plus grand que 1, & elles n'auront qu'un nombre fini de termes finis. On en a vû des exemples dans les $A^{\frac{n-1}{n}}$ de l'art. 273, & dans les $A^{\frac{n}{n-1}}$ de l'art. 279.

596. Si une Suite a plus d'un terme fini, elle n'en ſauroit avoir moins qu'un nombre fini indéterminable. Il eſt clair que ſi ſon 1er terme étant 1, le 2^d^ eſt un Infini, comme dans la progreſſion arithmétique compriſe entre 1 & ∞^2

M.E.C.D. 2017

(555) dont la différence eſt ∞, elle ne peut jamais avoir que ſon 1er terme de Fini. Mais ſi ce 2^d terme eût été un nombre fini quelconque, il eût été impoſſible que la Loi qui auroit réglé la Suite, n'eût fourni un 3me terme fini, qui eût ſuivi cette Loi à l'égard du 2^d, comme le 2^d la ſuivoit à l'égard du 1er, & de même un 4me à l'égard du 3me, &c. ce qui ſe ſeroit étendu à tous les nombres Finis déterminables qui auroient pu ſuivre la Loi, de ſorte qu'on n'en auroit pu aſſigner ou déterminer le dernier, ou, ce qui revient au même, qu'ils auroient été au moins en nombre Fini indéterminable. C'eſt ce qu'on a vu dans les A^2, A^3, &c. Ce ſera la même choſe, ſi une Suite originairement formée de termes finis, doit ſe terminer par l'Infiniment petit. Elle aura ou une infinité, ou un nombre Fini indéterminable de termes finis. Il en ira encore de même, ſi une Suite a d'abord des différences finies, & après cela d'infiniment petites.

597. Conſiderons maintenant les Suites originairement formées de termes Finis, & terminées par des Infiniment petits, & par conſéquent compoſées de termes de différens ordres, qui vont en s'abbaiſſant.

Ordre des ſommes des Suites infinies décroiſſantes compriſes entre 1 *&* $\frac{1}{\infty}$, *ou* $\frac{1}{\infty^n}$ *ou* $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$.

Quel que ſoit le nombre de ces différens ordres, elles ne peuvent avoir une ſomme infinie que quand le nombre de leurs termes finis ſera infini; car le nombre des termes infiniment petits du 1er ordre, qui ſont les plus élevés de tous, fût-il infini, ils ne vaudroient tous enſemble qu'un terme fini, qui ſe joindroit aux finis, & ne changeroit rien à l'ordre de leur ſomme. A plus forte raiſon cela ſera-t'il vrai des Infiniment petits inférieurs, & par conſéquent tout ſe réduit à ſavoir quand le nombre des termes finis de ces Suites ſera fini, ou infini.

598. Ces Suites n'ayant qu'un nombre total de termes $= \infty$, & le nombre de leurs termes finis, quand il eſt infini, ne pouvant être que de cet ordre, elles ne peuvent avoir une ſomme d'un ordre plus élevé que celui de ∞.

599. Quelle que ſoit une de ces Suites, elle n'eſt (361) qu'une Suite croiſſante originairement formée de termes finis,

M.E.C.D. 2017

& terminée par ∞^n, n ayant une valeur quelconque, mais que l'on a changée en une Suite de fractions, & qui par conſéquent eſt devenue décroiſſante, & terminée par $\frac{1}{\infty^n}$. Donc tous les termes finis de la Suite croiſſante terminée par ∞^n ſont demeurés finis dans la décroiſſante terminée par $\frac{1}{\infty^n}$, & au contraire tous les Infinis de la 1re ſont devenus Infiniment petits dans la 2de. Or toutes les Suites originairement formées de termes Finis, & terminées par ∞, ont un nombre infini de termes Finis, & toutes les Suites originairement formées de termes Finis déterminables, & terminées par ∞^n, n étant fini, & plus grand que 1, n'ont qu'un nombre fini de termes Finis; donc toutes les Suites décroiſſantes terminées par $\frac{1}{\infty}$ ont une infinité de termes Finis, & par conſéquent une ſomme infinie de l'ordre de ∞, & toutes les autres terminées par $\frac{1}{\infty^n}$, n'ont qu'un nombre fini de termes finis, & par conſéquent une ſomme finie, pourvû qu'elles ſoient originairement formées de termes Finis déterminables.

Il faut joindre aux Suites terminées par $\frac{1}{\infty}$, celles qui le ſont par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ ou par $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$, puiſqu'elles ſont de la même eſpece, & aux Suites terminées par $\frac{1}{\infty^n}$, celles qui le ſont par $\frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$.

On a déja vû des exemples de cette Théorie dans les art. 362, 363, 365, 366, 367, 368, 369, 370. Mais comme elle n'étoit pas alors générale, en voici de nouveaux.

EXEMPLE I.

Application de la Théorie aux ſommes de différentes Suites décroiſſantes de cette eſpece.

600. Si l'on diviſe les Unités par les nombres Naturels, ce qui donnera $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. $\frac{1}{\infty}$.

Les nombres Naturels par les Triangulaires, ce qui donnera $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{10}$, &c. $\frac{\infty}{\frac{1}{2}\infty^2} = \frac{2}{\infty}$.

M.E.C.D. 2017

Les Triangulaires par les Pyramidaux, ce qui donnera

$\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{6}{10}, \frac{10}{20}$, &c. $\frac{\frac{1}{2}\infty^2}{\frac{1}{6}\infty^3} = \frac{3}{\infty}$.

Les Pyramidaux par les Triangulo-pyramidaux, ce qui donnera $\frac{1}{1}, \frac{4}{5}, \frac{10}{15}, \frac{20}{35}$, &c. $\frac{\frac{1}{6}\infty^3}{\frac{1}{24}\infty^4} = \frac{4}{\infty}$.

Et si enfin on opere toujours ainsi de suite sur les Nombres Figurés, on voit que l'on aura toujours des sommes infinies de l'ordre de ∞ (599), & même des sommes toujours croissantes.

601. Tous les derniers termes des Suites de Figurés divisés par les Figurés de l'ordre immédiatement supérieur, sont en progression arithmétique naturelle.

EXEMPLE II.

602. Si l'on divise les Figurés d'un ordre par les Figurés supérieurs de deux ordres, les Unités par les Triangulaires, les nombres Naturels par les Pyramidaux, &c. ce qui donnera

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$, &c. $\frac{1}{\frac{1}{2}\infty^2} = \frac{2}{\infty^2}$.

$\frac{1}{1}, \frac{2}{4}, \frac{3}{10}, \frac{4}{20}$, &c. $\frac{\infty}{\frac{1}{6}\infty^3} = \frac{6}{\infty^2}$.

Et pour les autres derniers termes des Suites de Figurés ainsi divisées, $\frac{12}{\infty^2}, \frac{20}{\infty^2}$, &c. on voit que toutes ces Suites n'auront que des sommes finies (599) & croissantes.

603. Les dénominateurs des derniers termes de ces Suites étant toujours ∞^2, les numérateurs 2, 6, 12, 20, &c. ont pour différences les termes d'une progression arithmétique, dont le 1er terme est 4, & la différence 2.

604. En opérant de même sur les Poligones, on trouve que les Triangulaires divisés par les Quarrés, donnent

$\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{6}{9}, \frac{10}{16}$, &c. $\frac{\frac{1}{2}\infty^2}{\infty^2} = \frac{1}{2}$.

Que le dernier terme des Quarrés divisés par les Pentagones

M.E.C.D. 2017

eſt $\frac{2}{3}$, des Pentagones par les Exagones $\frac{3}{4}$, des Exagones par les Eptagones $\frac{4}{5}$, &c. & par conſéquent que ces Suites ne peuvent avoir que des ſommes infinies de l'ordre de ∞, & même croiſſantes, puiſque ces derniers termes le ſont.

605. Si on diviſe des Poligones par les Poligones ſupérieurs de deux ordres, les Triangulaires par les Pentagones, les Quarrés par les Exagones, &c. on aura cette Suite des derniers termes $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{8}$, &c. D'où l'on voit que toutes les ſommes ſeront infinies & croiſſantes.

EXEMPLE III.

606. A étant la Suite naturelle, ſi on diviſe $A^{\frac{1}{3}}$ par $A^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne $\frac{1}{1}$, $\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{4^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}}$, &c. $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} = \infty^{\frac{2-3}{6}} = \infty^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{6}}}$, la ſomme eſt infinie (599).

De même le dernier terme de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ étant $\frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{\infty^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{12}}}$, la ſomme de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ eſt encore infinie, & toujours ainſi tant que la Suite ſera $\frac{A^{\frac{1}{m}}}{A^{\frac{1}{n}}}$ où $m > n$, & plus généralement encore, tant que les expoſans de A diviſée & de A diviſante ſeront de pures fractions, ſoit que le numérateur en ſoit 1 ou non, pourvû que l'expoſant de A diviſée ſoit le plus petit, comme il eſt néceſſaire pour avoir une Suite décroiſſante.

EXEMPLE IV.

607. La ſomme de $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{5}{3}}}$ qui ſe termine par $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$ n'eſt que finie, puiſque $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (599). Et en

M.E.C.D. 2017

général ces ſommes ſont toujours finies, tant que l'expoſant de A diviſée étant une pure fraction, celui de A diviſante eſt une fraction mixte.

608. Si les deux expoſans étoient des fractions mixtes, l'ordre de la ſomme dépendroit de leur rapport. Ainſi $\frac{A^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{3}{2}}}$ terminée par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{6}}}$ auſſi-bien que $\frac{A^{\frac{1}{3}}}{A^{2}}$, auroit auſſi une ſomme infinie, & $\frac{A^{\frac{5}{4}}}{A^{\frac{8}{3}}}$ terminée par $\frac{1}{\infty^{\frac{17}{12}}}$ n'auroit qu'une ſomme finie.

609. Je conſidere maintenant les Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, qui aboutiſſent à un dernier terme quelconque.

Théorie pour l'ordre des ſommes des Suites compriſes entre $\frac{1}{\infty}$ & un dernier terme quelconque, & d'abord pour celles des Suites compriſes entre deux Infiniment petits.

Si elles aboutiſſent à un infiniment petit du 1er ordre, ce ſont des Suites que j'appelle *primitives*, toutes formées de termes finis, dont on a diviſé chaque terme par ∞. Telles ſeroient les trois Suites primitives des art. 521, 525, 530, diviſées par ∞. La 1re deviendroit

$$\frac{1}{2\infty}, \frac{2}{3\infty}, \frac{3}{4\infty}, \text{ \&c. } \frac{1}{\infty}.$$

La 2^de^ $\frac{n^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}, \frac{n^{\frac{2}{\infty}}}{\infty}, \frac{n^{\frac{3}{\infty}}}{\infty}$, \&c. $\frac{n}{\infty}$.

La 3me $\frac{1}{\infty}, \frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}, \frac{3^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}$, \&c. $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}$.

Il eſt clair que ces Suites, qui ne ſortent point de l'ordre de leur origine, ont par cette raiſon une ſomme de l'ordre immédiatement ſupérieur, c'eſt-à-dire finie, & cela indépendamment des rapports déterminables, ou non, des Infiniment petits de leur origine, car il n'y a que la 1re dont les Infiniment petits de l'origine aient des rapports déterminables. Il eſt clair auſſi qu'il n'importe que ces Suites ſoient croiſſantes ou décroiſſantes.

M.E.C.D. 2017

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre $\frac{1}{\infty}$ & 1.

610. Si ces Suites ſortent de leur ordre, & ſe terminent par 1, ou, ce qui revient au même, par tout autre nombre fini, ce ſont des Suites primitives, originairement formées de termes finis, & terminées par ∞, dont on a diviſé chaque terme par ∞. Ainſi la Suite primitive A deviendroit $\frac{1}{\infty}$, $\frac{2}{\infty}$, $\frac{3}{\infty}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, & la correſpondante G deviendroit $\frac{1}{\infty}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}$, $\frac{\infty^{\frac{2}{\infty}}}{\infty}$, &c. 1.

Ces Suites, qui ont des termes Finis, ne peuvent avoir une ſomme de l'ordre de ∞, que quand elles auront une infinité de termes Finis, & elles n'en peuvent avoir une infinité que quand les primitives en auront une infinité d'Infinis de l'ordre de ∞. Or les primitives ont des ſommes de l'ordre de ∞^2, ou, ce qui eſt le même, une infinité de termes de l'ordre de ∞, quand elles ſont originairement formées de termes Finis déterminables (549 & 571), & en ce cas il eſt clair que les Infiniment petits, dont les Suites que nous conſidérons ſont originairement formées, ont des rapports déterminables. Donc en ce cas ces Suites ont des ſommes de l'ordre de ∞. Les deux Suites de cet art. ſont des exemples des deux cas. La 1re étant une progreſſion arithmétique, ſa ſomme eſt $\frac{\infty}{2}$, & la ſomme de la 2de, qui eſt une progreſſion géométrique, eſt $\frac{1}{\frac{1}{\infty^{\frac{1}{\infty}}} - 1} = 1$ diviſé par $\frac{1}{x}$, ou $= x$, nombre Fini indéterminable.

Ordre des ſommes des Suites compriſes entre $\frac{1}{\infty}$ & ∞ ou ∞^{11}.

611. Si ces Suites ſe terminent par ∞, ce ſont des Suites primitives originairement formées de termes Finis, & terminées par ∞^2, dont on a diviſé chaque terme par ∞. Ainſi A^2 deviendroit $\frac{1}{\infty} \cdot \frac{4}{\infty} \cdot \frac{9}{\infty}$, &c. $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty$. On voit aſſez que le raiſonnement de l'art. précédent revient ici, & que ces Suites qui ont des termes de l'ordre de ∞, n'en peuvent avoir une infinité, ni par conſéquent des ſommes de l'ordre de ∞^2, que quand les Suites primitives auront des ſommes

M.E.C.D. 2017

de l'ordre de ∞^3, & que par conſéquent les Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, & terminées par ∞, ont des ſommes de l'ordre de ∞^2, quand les Infiniment petits de leur origine ont des rapports déterminables.

612. Il eſt clair que ces Suites, quoiqu'originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, peuvent monter par leurs derniers termes à ∞^2, ∞^3, &c. & que ce ſera toujours le même raiſonnement. Donc en général ſi elles ne ſortent point de l'ordre de leur origine, elles n'ont que des ſommes finies, & ſi elles s'élevent à quelque ordre ſupérieur, elles ont des ſommes infinies de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui de leur dernier terme, lorſque les Infiniment petits de leur origine ont des rapports déterminables.

613. Si ces Suites ſont décroiſſantes, & terminées par $\frac{1}{\infty^2}$, ce ſont des Suites primitives compriſes entre ∞ & ∞^2, telles que la progreſſion arithmétique $\div \infty$, 2∞, 3∞, &c. ∞^2 de l'art. 555, dont tous les termes ont diviſé les termes de Suites toutes formées de Finis, telles que les trois Suites des art. 521, 525 & 530, qui ſeroient devenues,

Ordre des ſommes des Suites décroiſſantes compriſes entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^n}$.

La 1re $\frac{1}{2\infty}, \frac{2}{6\infty}, \frac{3}{12\infty}$, &c. $\frac{1}{\infty^2}$.

ou $\frac{1}{2\infty}, \frac{1}{3\infty}, \frac{1}{4\infty}$, &c. $\frac{1}{\infty \times \infty} = \frac{1}{\infty^2}$.

La 2^de^ $\frac{1}{\infty}, \frac{n^{\frac{1}{\infty}}}{2\infty}, \frac{n^{\frac{2}{\infty}}}{3\infty}$, &c. $\frac{n}{\infty^2}$.

La 3me $\frac{1}{\infty}, \frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{2\infty}, \frac{3^{\frac{1}{\infty}}}{3\infty}$, &c. $\frac{\infty^{\frac{1}{\infty}}}{\infty^2}$.

D'où l'on voit que la progreſſion arithmétique $\div \infty$. 2∞, &c. ∞^2, ayant une infinité de termes de l'ordre de ∞, ce qu'il eſt aiſé de voir, auſſi-bien qu'une infinité de l'ordre de ∞^2, les Suites décroiſſantes, dont il s'agit ici, auront une infinité de termes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent des ſommes finies, ſoit que les Infiniment petits de leur origine

M.E.C.D. 2017

aient des rapports déterminables, comme dans la 1re, ou non, comme dans les deux autres. Donc à plus forte raiſon les Suites originairement formées de $\frac{1}{\infty}$, & terminées par $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, &c. ne peuvent avoir des ſommes d'un ordre plus élevé que celui du Fini.

614. Quant aux Suites originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, & terminées par des Finis, ou Infinis, ou Infiniment petits, qui aient des coëfficiens, il ne peut y avoir nulle difficulté (547), non plus que ſur ces mêmes Suites terminées par des Infinis ou Infiniment petits radicaux, qui ſe rapporteroient ſans peine aux potentiels.

Sur les derniers termes des Suites qui commencent par $\frac{1}{\infty}$, & dont les termes n'ont que des différences infiniment petites.

615. Il eſt important de connoître des Suites qui commenceroient par o, ou par $\frac{1}{\infty}$, & dont les termes quelconques n'auroient que des différences infiniment petites, qui ſeroient originairement de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Mais après tout ce qui vient d'être dit, la connoiſſance en ſera facile.

Si une Suite croiſſante commence par $\frac{1}{\infty}$, & ſi les différences de ſes termes doivent être toutes égales, le 2d terme ſera $\frac{2}{\infty}$, le 3me $\frac{3}{\infty}$, &c. & elle ne pourra avoir un terme Fini que quand ſes numérateurs, qui ſont les nombres naturels, auront atteint le premier & le moindre $\propto$, & alors $\frac{\propto}{\infty}$ ſera une fraction finie beaucoup moindre que 1, & la ſomme de toutes les différences infiniment petites de termes qui auront précédé. Et comme ces termes précédens ont été en nombre infini, il a fallu que la Suite ſuppoſée ait eu un nombre infini de termes avant que de venir à en avoir un fini.

616. Après $\frac{\propto}{\infty}$, elle n'a plus que des termes finis, mais qui n'ont que des différences $= \frac{1}{\infty}$, & pour venir à en avoir un qui ait à $\frac{\propto}{\infty}$ une différence finie, il faut qu'elle ait encore une infinité de termes finis; car puiſque cette différence doit être finie, elle ne peut être que la ſomme d'une infinité de différences $= \frac{1}{\infty}$, & par conſéquent entre $\frac{\propto}{\infty}$ & le terme le

M.E.C.D. 2017

le plus proche, dont la différence à $\frac{\infty}{\infty}$ ſoit finie, il y aura une infinité de termes, & toujours ainſi de ſuite, de ſorte qu'il y aura toujours une infinité de termes finis infiniment peu différens entre deux termes finis quelconques, qui auront une différence finie.

617. Tous les termes finis, qui n'ont à d'autres termes finis que des différences infiniment petites, ne peuvent être déterminés, & il n'y a de déterminables que ceux qui ont entr'eux des différences finies. Donc ces Suites ont autant d'infinités de termes Finis non-déterminables, qu'elles ont de termes Finis déterminables.

618. Et comme les Suites infinies que nous conſidérons n'ont de termes qu'en nombre infini de l'ordre de ∞, elles ne peuvent pas avoir une infinité d'infinités de termes Finis non-déterminables. Donc elles ne peuvent avoir qu'un nombre fini d'infinités de termes Finis non-déterminables, & par conſéquent un nombre fini de termes Finis déterminables. Donc en quelque grand nombre fini de parties qu'on les diviſe, on ne peut leur trouver qu'un nombre fini de termes Finis déterminables.

619. Donc leur dernier terme eſt toujours fini. Ce qui ſuit auſſi de ce qu'il eſt la ſomme d'un nombre infini de différences égales de l'ordre $\frac{1}{\infty}$.

620. Mais comme ces différences égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ peuvent être plus ou moins grandes, ce dernier terme fini peut être auſſi plus ou moins grand.

621. Si ces Suites ont des différences inégales, il n'y a rien de changé au nombre total de leurs termes, qui eſt toujours de l'ordre de ∞, ni à ce nombre fini d'infinités de termes Finis non-déterminables, qui ſont toujours entre deux termes Finis déterminables; mais le dernier terme eſt différent, ſelon que les différences inégales ſont croiſſantes ou décroiſſantes.

Si elles ſont croiſſantes, & terminées par $\frac{1}{\infty}$, le dernier

M.E.C.D. 2017

terme de la Suite principale eſt encore fini (609).

622. Si la Suite des différences croiſſantes eſt terminée par 1, & ſi de plus ces différences ont eu originairement des rapports déterminables, le dernier terme de la Suite principale eſt un Infini de l'ordre de ∞ (610).

623. Et en général ſi les différences croiſſantes ſont terminées par ∞^n, & ont eu originairement des rapports déterminables, le dernier terme de la Suite principale ſera de l'ordre de ∞^{n+1} (612).

624. Si les différences ſont décroiſſantes, & terminées par $\frac{1}{\infty}$, le dernier terme de la Suite principale ſera fini.

625. Si les différences ſont terminées par $\frac{1}{\infty^2}$, & en général par $\frac{1}{\infty^n}$, n étant fini, le dernier terme de la Suite principale eſt Fini (613).

Suites infiniment infinies, & l'ordre de leurs ſommes.

626. Nous n'avons encore conſidéré que des Suites dont les termes étoient en nombre infini de l'ordre de ∞. Mais le nombre infini de termes peut être infiniment plus grand, ou d'un ordre ſuperieur à ∞. Par exemple, on peut introduire entre 1 & 2 une infinité de moyens arithmétiques ou géométriques, de même entre 2 & 3, &c de ſorte qu'en concevant tous ces termes diſpoſés de ſuite, on aura une Suite qui aura autant d'infinités de termes qu'il y a de termes dans la Suite naturelle, & qui en aura par conſéquent un nombre $= \infty \times \infty = \infty^2$. Il eſt clair qu'on peut imaginer une infinité d'autres Suites pareilles qui auront d'autres Loix. Je les appelle *infiniment* infinies, à la différence des autres qui ſont *ſimplement* infinies, & je ſuppoſe que le nombre de leurs termes ne paſſe point l'ordre de ∞^2, parce qu'il ſeroit abſolument inutile de pouſſer cela plus loin.

627. Ces Suites originairement formées ſoit de termes finis, ſoit d'infinis, ſoit d'infiniment petits, ſoit croiſſantes, ſoit décroiſſantes, ſoit toujours égales, ayant une infinité d'infinités de termes, ſi l'on conçoit qu'on ait pris la ſomme de chaque infinité de leurs termes, toutes ces ſommes diſpo-

M.E.C.D. 2017

ſées ſelon leur ordre, ne feront plus qu'une Suite ſimplement infinie, dont la ſomme ſera celle de la Suite infiniment infinie. Donc les Suites infiniment infinies étant réduites par ce moyen en Suites ſimplement infinies, on jugera de leurs ſommes par les regles précédentes.

628. Une Suite quelconque infiniment infinie peut toujours être conçue, comme ayant chaque infinité de ſes termes introduite ou inſérée entre deux termes conſécutifs d'une Suite ſimplement infinie finiment diſtans l'un de l'autre; d'où il ſuit que la ſomme de chaque infinité de termes de la Suite infiniment infinie, eſt toujours de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui des deux termes conſécutifs de la Suite ſimplement infinie, entre leſquels cette infinité ſeroit compriſe. Ainſi ſi entre 1 & 2 eſt cette infinité de termes $1+\frac{1}{\infty}$, $1+\frac{2}{\infty}$, $1+\frac{3}{\infty}$, &c. $1+\frac{\infty}{\infty}=2$, la ſomme en eſt (459) $\frac{3\infty}{2}$. De même entre ∞ dernier terme de la Suite naturelle, & celui qui le précede immédiatement, la Suite infiniment infinie introduira une infinité de termes infinis, dont la ſomme ſera de l'ordre de ∞^2. Donc la Suite infiniment infinie quelconque étant réduite en une Suite ſimplement infinie des ſommes de chaque infinité de ſes termes, ſon premier & ſon dernier terme, après cette réduction, ſeront de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui dont ils étoient auparavant.

629. Donc toute Suite ſimplement infinie a une ſomme du même ordre qu'une Suite ſimplement infinie, qui auroit un premier terme & un dernier terme de l'ordre immédiatement ſupérieur à celui dont ils étoient dans la Suite infiniment infinie.

EXEMPLE.

630. Donc la Suite infiniment infinie qui introduit une infinité de moyens arithmétiques entre 1 & 2, entre 2 & 3, &c. a une ſomme de l'ordre de ∞^3, puiſqu'elle ſe termine par ∞, & qu'elle a une ſomme du même ordre qu'une Suite

M.E.C.D. 2017

ſimplement infinie commençant par ∞, & terminée par ∞^2, ou par un infini de cet ordre comme la progreſſion arithmétique de l'art. 555, ∞ étant poſé pour ſon 1er terme.

En effet, la ſomme de l'infinité de moyens arithmétiques introduits entre 1 & 2 eſt . . . . $\frac{3\infty}{2}$.

entre 2 & 3 . . . . . $\frac{5\infty}{2}$.

entre 3 & 4 . . . . . $\frac{7\infty}{2}$, &c.

D'où l'on voit que ces ſommes diſpoſées ſelon leur ordre en nombre infini font une progreſſion arithmétique, dont le 1er terme eſt $\frac{3\infty}{2}$, & la différence ∞, & par conſéquent la

ſomme $= \frac{6\infty}{2} + \infty \times \infty \times \frac{\infty}{2} = \frac{\infty^3}{2}$, ſomme de la Suite infiniment infinie, qui eſt auſſi celle de la progreſſion arithmétique compriſe entre ∞ & ∞^2.

631. Les Suites infiniment infinies, dont il eſt le plus utile de connoître les ſommes, ſont celles qui ſont originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre. Et comme les ſeules ſur leſquelles on puiſſe faire des recherches, ſont celles qui ſont originairement formées d'Infiniment petits, dont les rapports ſont déterminables, il faut les ſuppoſer ainſi conditionnées.

De plus, comme il faut les réduire à des Suites ſimplement infinies, dont le 1er terme ſera 1, ou en général Fini, puiſqu'on aura toujours pris la ſomme d'un nombre ∞ de $\frac{1}{\infty}$, les Suites infiniment infinies originairement formées d'Infiniment petits du 1er ordre, qui auront des rapports déterminables, répondront aux Suites ſimplement infinies originairement formées de termes Finis déterminables.

Donc il n'y aura plus qu'à élever à l'ordre immédiatement ſupérieur le dernier terme de la Suite infiniment infinie, & on aura l'ordre de la ſomme.

632. Donc une Suite infiniment infinie, commençant par $\frac{1}{\infty}$, & terminée par un Infiniment petit du même ordre,

M.E.C.D. 2017

a une ſomme infinie, puiſque la ſomme d'une Suite ſimplement infinie, commençant par un terme fini, & terminée par un fini, auroit une ſomme infinie.

633. Donc une Suite infiniment infinie croiſſante, originairement formée d'Infiniment petits du 1er ordre, & terminée par 1, a une ſomme infinie de l'ordre de ∞^2, puiſqu'une Suite ſimplement infinie, commençant par 1 & terminée par ∞, a une ſomme de cet ordre (549).

634. Il en ira de même de ces Suites terminées par ∞, & en général par ∞^n.

635. Une Suite infiniment infinie décroiſſante, originairement formée d'Infiniment petits du 1er ordre, & terminée par $\frac{1}{\infty}$ ou par $\frac{1}{\infty^2}$, a une ſomme infinie, puiſque telle ſeroit la ſomme d'une Suite ſimplement infinie commençant par 1, & terminée par 1, ou par $\frac{1}{\infty}$ (599).

636. Mais toutes les autres Suites infiniment infinies, terminées par $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$, &c. n'auront plus que des ſommes finies (613).

637. Tout ce qui a été dit des ſommes des Suites terminées par ∞^n, ou par $\frac{1}{\infty^n}$, ſe doit entendre de même des ſommes de celles qui ſeroient terminées par $\infty^{\frac{n}{m}}$ ou $\infty^{\frac{m}{n}}$, ou par $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{m}{n}}}$. Car il n'y auroit qu'à rapporter ces Infinis radicaux à l'ordre potentiel auquel ils appartiendroient ſelon l'art. 158, & les derniers termes ſeroient par rapport au Fini de cet ordre potentiel.

638. Une Suite ſimplement infinie, & une infiniment infinie, ayant toutes deux originairement des différences infiniment petites, la raiſon qui empêche que la 1re n'ait une infinité de termes Finis déterminables (618), ceſſe à l'égard de la 2de, & par conſéquent celle-ci a cette infinité de termes Finis déterminables.

639. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les Suites que *Termes où*

M.E.C.D. 2017

les Suites tendent & arrivent, & renverſement des Suites arrivées à ces Termes.

comme abſolument terminées par leur dernier terme, & elles y doivent être effectivement terminées, quant à la grandeur des termes qui les compoſent, puiſque le dernier terme n'eſt le dernier, que parce qu'il eſt le plus grand ou le plus petit de tous ceux que la Suite peut avoir ſelon la Loi qui la regle. Mais elle peut n'être pas terminée à ce dernier terme, quant à ſon *cours*; c'eſt-à-dire, qu'étant arrivée à ce terme, elle peut être obligée par la Loi à y recommencer un nouveau cours. Ainſi ſuppoſé que le Soleil pût s'élever à l'infini au deſſus de la Terre, la Suite des nombres, qui repréſenteroient ſes élévations, ſe termineroit par ∞; mais ſi le Soleil ſe rapprochoit enſuite, cette même Suite arrivée à ∞, & terminée là, quant à la grandeur de ſes termes, recommenceroit un nouveau cours d'élévations toujours décroiſſantes. Ces ſecondes Suites qui naiſſent des premieres, ou leur ſuccedent, ne donnent lieu à aucune conſidération nouvelle, ni pour les derniers termes, ni pour les ſommes, mais le paſſage d'une Suite à l'autre, ou la maniere dont elles peuvent ſe ſuccéder, y donne lieu.

Si le Soleil s'eſt élevé infiniment au deſſus de la Terre, & après cela redeſcend, la Suite des élévations ſe termine à ∞, & celle des abaiſſemens y commence; de ſorte que ∞ eſt en même temps le *Terme* de la 1re, & l'*Origine* de la 2de. Je n'emploierai plus indifféremment le mot de *Terme* pour une grandeur quelconque d'une Suite, mais ſeulement pour celle qui la termine, ſoit qu'elle la termine ſimplement, ſoit qu'elle la termine & en commence une ſeconde.

Comme l'Infini peut être le Terme d'une Suite croiſſante & l'Origine d'une décroiſſante, zero ou l'Infiniment petit peuvent être le Terme d'une décroiſſante, & l'Origine d'une croiſſante.

640. Une Suite ne peut arriver à un Terme, & y recommencer un nouveau cours ſans ſe renverſer, c'eſt-à-dire, ſans devenir de croiſſante décroiſſante, ou de décroiſſante croiſſante, en un mot, contraire à ce qu'elle étoit. Car elle étoit arrivée à un Terme de grandeur.

M.E.C.D. 2017

641. C'eſt la même Suite qui ſe renverſe, & ce ne ſont pas deux Suites contraires miſes bout à bout. Je m'explique. Si je conçois une Suite croiſſante terminée par ∞, & après elle une Suite décroiſſante commençant par ∞, & que je veuille les concevoir comme miſes ſeulement bout à bout, ou comme étant toujours deux Suites diſtinctes, je concevrai ∞ Terme de la 1re, diſtinct de ∞ Origine de la 2de, & par conſéquent je concevrai ∞ poſé deux fois conſécutives. Mais ſi je veux que ce ne ſoit que la même Suite qui ſe renverſe, je ne concevrai ∞ poſé qu'une fois, parce qu'alors il eſt en même temps Terme & Origine, & qu'en général toute grandeur d'une Suite appartient également & au cours qui précede, & à celui qui ſuit, & ne ſe répete point deux fois pour appartenir à l'un & à l'autre. Par-là ſe leve l'indétermination qu'on a laiſſée dans l'art. 485.

J'ai dit préciſément *pour appartenir à l'un & à l'autre cours*, car une grandeur peut ſe répéter deux fois par quelque autre raiſon.

En un mot, une Suite qui ſe renverſe en une même Suite, où ce renverſement eſt auſſi-bien cauſé par la Loi que le ſeroit un cours toujours continu. Donc le Terme où ſe fait le renverſement y eſt unique, auſſi-bien que toute autre grandeur.

642. Si l'*unité* de la Suite exige que le Terme où ſe fait le renverſement ſoit unique, l'unité du Terme exige auſſi qu'il contienne toute la nature ou toute l'eſſence du renverſement ; c'eſt-à-dire, que la Suite ſe renverſe dans le même ſens que le Terme peut appartenir à deux cours contraires, & ne ſe renverſe qu'autant qu'il y peut appartenir.

643. Une Suite croiſſante peut être telle qu'elle ne ſe terminera pas à ∞, mais à quelque grandeur finie. Ainſi la Suite des élévations du Soleil ſur l'Horiſon ne peut paſſer 90. Après cela comme cette Suite ſe renverſe, & devient décroiſſante, 90 eſt auſſi-bien Terme & Origine que l'auroit été ∞ dans une autre ſuppoſition. On appelle ces Termes finis des *Maxima* ou *plus grands*. De même une Suite décroiſſante peut

Termes naturels, & arbitraires.

M.E.C.D. 2017

ſe terminer, non à o, ou à $\frac{1}{\infty}$, mais à une grandeur finie, qui ſera un *Minimum*, ou *plus petit*. J'appelle ∞ ou o, ou $\frac{1}{\infty}$, Termes *naturels*, & les plus grands ou plus petits, Termes *arbitraires*, parce que leur grandeur dépend d'une détermination arbitraire de la Loi.

644. On en a vû un exemple dans $A^{\frac{1}{a}}$ (284) qui eſt croiſſante juſqu'à $3^{\frac{1}{3}}$, & après cela ſe renverſe, & devient décroiſſante. $3^{\frac{1}{3}}$ y eſt donc un *plus grand*.

645. Toute Suite tend à un dernier Terme, & il faut qu'elle y arrive, ſoit par un cours fini, ſoit par un cours infini. Donc toute Suite croiſſante arrive à l'infini, ou à un *plus grand*, & toute Suite décroiſſante arrive à zero, ou à l'Infiniment petit, ou à un *plus petit*. Et ſi elles ont à ſe renverſer, c'eſt là qu'elles ſe renverſent.

Que l'Egalité eſt un Terme.

Terme compliqué.

646. Une Suite croiſſante ou décroiſſante, dont les différences ſont croiſſantes, croît ou décroît toujours de plus en plus : mais ſi ces différences ſont décroiſſantes, elle ne croît ou ne décroît que de moins en moins. Or ce qui ne croît ou ne décroît que de moins en moins, tend à ceſſer de croître ou de décroître, c'eſt-à-dire, à demeurer égal, & par conſéquent toute Suite croiſſante ou décroiſſante qui a des différences décroiſſantes, outre qu'elle tend à un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petiteſſe, tend auſſi à l'Egalité, nouveau Terme qui lui eſt particulier; & puiſqu'elle y tend, elle y arrive par un cours ſoit fini ſoit infini (645).

647. L'Egalité eſt un Terme en partie naturel, en partie arbitraire ; naturel, en ce que l'égalité eſt quelque choſe de fixe, & qui n'eſt point ſuſceptible de plus & de moins ; arbitraire, en ce que la détermination des deux grandeurs, entre leſquelles doit être l'égalité, dépend de la Loi.

648. Une Suite arrivée au Terme de l'Egalité peut être arrivée en même temps aux deux plus grandes ou plus petites grandeurs qu'elle puiſſe avoir, ou ſeulement aux deux

plus

M.E.C.D. 2017

plus grandes ou plus petites grandeurs qu'elle puiſſe avoir égales, & non abſolument à la plus grande ou à la plus petite. Si elle ſe renverſe, il eſt neceſſaire dans l'un & dans l'autre cas, que les différences de décroiſſantes qu'elles étoient, deviennent croiſſantes, puiſqu'elles ſont arrivées à zero. Mais dans le 1er cas la Suite principale deviendra outre cela de croiſſante, décroiſſante, ou au contraire; & dans le 2^d^ elle demeurera croiſſante ou décroiſſante, comme elle étoit; mais croiſſante ou décroiſſante de plus en plus, au lieu qu'elle l'étoit de moins en moins. Ainſi le Terme de l'Egalité peut être ou *ſimple*, ou *compliqué* avec un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petiteſſe.

649. Quand une Suite arrivée à un Terme compliqué, s'y renverſe, il faut qu'elle ſe renverſe ſelon tous les ſens que contient le Terme compliqué, ſuppoſé qu'elle ait tendu à ce Terme ſelon tous les ſens qu'il contient.

650. Deux Infiniment grands ou petits peuvent être égaux, & deux zero le ſont toujours. Donc une Suite qui arrive à l'Egalité, peut arriver auſſi en même temps ou à l'Infini, ou à l'Infiniment petit, ou à zero. Mais en ce cas le Terme de l'Egalité eſt néceſſairement compliqué avec un Terme naturel de grandeur ou de petiteſſe : car la Suite ne peut avoir tendu à ce Terme que comme à la plus grande ou plus petite grandeur qu'elle pût avoir. Donc ſi elle ſe renverſe, elle ſe renverſe en deux ſens, c'eſt-à-dire, que non ſeulement elle prend des différentes croiſſantes, mais qu'elle devient de croiſſante, décroiſſante, ou au contraire. Donc ce n'eſt que dans le cas où une Suite arrive à deux grandeurs égales finies qu'elle peut continuer après cela d'être croiſſante ou décroiſſante comme elle étoit. Alors ces deux grandeurs égales ne ſont pas un Terme arbitraire de grandeur ou de petiteſſe, mais un Terme ſimple d'Egalité.

651. L'Egalité ne paroît être qu'un effet de ce que des grandeurs précédentes ont cru ou décru de moins en moins, & puiſqu'elle ſuppoſe des grandeurs précédentes, elle n'eſt pas propre à être Origine, mais ſeulement Terme, ou Terme

M.E.C.D. 2017

& Origine en même temps. Cependant comme toute Suite peut être renverſée, & que par conſéquent une Suite terminée par l'Egalité pouvoit auſſi commencer par-là, l'Egalité peut abſolument être Origine.

Cinq ſortes de Termes.

652. Il n'y a que cinq eſpeces de Termes poſſibles, les deux naturels de grandeur & de petiteſſe, les deux arbitraires correſpondans, & l'Egalité; car une Suite ne peut être que croiſſante ou décroiſſante, à différences conſtantes, croiſſantes, ou décroiſſantes, & dans tous ces cas elle arrive néceſſairement à un Terme naturel ou arbitraire de grandeur ou de petiteſſe, excepté dans celui où elle a des différences décroiſſantes, qui eſt celui du Terme de l'Egalité. Encore peut-il être compliqué avec l'un des quatre autres (648).

Suites acceſſoires des différences, ou des différences de différences, &c. qui naiſſent de la Suite principale. Quand, & juſqu'à quel point les Suites acceſſoires influent ſur la principale.

653. Les différences font une Suite que j'appelle *acceſſoire*, pour la diſtinguer de la principale. Si une Suite eſt conſtante, elle n'a point de différences ou de Suite acceſſoire, mais dès qu'elle n'eſt pas conſtante, elle a au moins une Suite acceſſoire; car elle peut n'en avoir qu'une, & c'eſt lorſque ſes différences ſont conſtantes. Que ſi les différences de la Suite principale ne ſont pas conſtantes, elles ont elles-mêmes au moins une Suite acceſſoire, & la ſuite principale en a au moins deux. Ainſi la Suite des Quarrés naturels a pour Suite acceſſoire celle des nombres Impairs, & celle-ci a pour Suite acceſſoire une Suite conſtante dont tous les termes ſont 2. la Suite des Cubes naturels a trois Suites acceſſoires, dont la 3me eſt une Suite conſtante dont tous les termes ſont 6; & ainſi à meſure que ces Suites ſont de plus hautes puiſſances des nombres naturels, elles ont plus de Suites acceſſoires, & la derniere acceſſoire qui eſt conſtante & qui termine tout, eſt plus éloignée. Elle le ſeroit infiniment, ſi on formoit une Suite des puiſſances infinies des nombres naturels.

Mais ſans aller juſqu'à une Suite toute formée de grandeurs infinies, toute progreſſion géométrique formée d'une infinité de termes, a une infinité de Suites acceſſoires, & n'en a point de derniere conſtante; car les différences d'une progreſſion géométrique ſont auſſi en progreſſion géométrique, & par

M.E.C.D. 2017

conſéquent les différences de ces différences, & ainſi à l'infini, au lieu que la progreſſion arithmétique n'a qu'une ſeule Suite acceſſoire conſtante, ce qui confirme encore tout ce qui a été dit de l'oppoſition de ces deux progreſſions.

On voit donc qu'une Suite principale quelconque étant poſée, elle peut avoir plus ou moins de Suites acceſſoires juſqu'à la derniere, qui ſera conſtante. Mais tout ce qu'on a ici en vue, c'eſt de conſidérer quand & juſqu'à quel point les Suites acceſſoires *influent* ſur la principale, c'eſt-à-dire, y produiſent ce qu'elle n'eût pas eu par elle-même, & indépendamment d'elles.

Une Suite croiſſante qui a des différences conſtantes, arrive à l'Infini, une Suite croiſſante qui a des différences croiſſantes, y arrive auſſi, & par conſéquent ce n'eſt point en vertu préciſément de ſes différences croiſſantes qu'elle y arrive, puiſque l'autre avec des différences conſtantes y arrivoit pareillement. Mais quand une Suite croiſſante arrive à deux Infinis égaux, c'eſt préciſément en vertu de ſes différences décroiſſantes, & par conſéquent en ce cas-là la Suite acceſſoire influe ſur la principale. Et comme ce raiſonnement eſt général pour toutes les Suites qui arrivent à l'Egalité, il ſuit qu'en ce cas la Suite acceſſoire a influé ſur la principale, & il eſt clair que c'eſt que la Suite acceſſoire eſt arrivée à zero.

654. Donc quand une Suite arrive à l'Egalité, il faut néceſſairement conſidérer la Suite de ſes différences, ou la 1re Suite acceſſoire.

655. Si la 1re Suite acceſſoire arrive elle-même à l'Egalité, il y a donc une 2de Suite acceſſoire qui eſt arrivée à zero, & alors il y a dans la Suite principale trois grandeurs, qui ont des différences égales. Donc l'égalité de ces deux différences eſt produite dans la Suite principale par une 2de Suite acceſſoire, & il faut remonter juſqu'à cette 2de pour trouver la ſource de cette égalité des différences de la principale.

656. De-là il ne s'enſuit pas néceſſairement que les trois grandeurs de la Suite principale ſoient en progreſſion arithmétique, ſi on attache au mot de *progreſſion* l'idée que les

M.E.C.D. 2017

grandeurs aillent toujours en croiſſant ou en décroiſſant. Car 2, 1, 2, ou 1, 2, 1, ont des différences égales, & ne ſont pas ſelon cette idée en progreſſion arithmétique, mais on peut dire qu'ils ſont en *contre-progreſſion*. Donc la 2de Suite acceſſoire arrivée à zero produit dans la principale trois grandeurs en progreſſion ou en contre-progreſſion arithmétique, qui n'y euſſent pas été ſans cela : car la Suite principale n'étoit pas une progreſſion arithmétique, puiſqu'on lui a ſuppoſé des différences variables.

Il eſt vrai que ſi les trois grandeurs de la Suite principale ont été en contre-progreſſion, elle eſt arrivée à un *plus grand*, ſi elles ont été comme 1, 2, 1, ou à un *plus petit*, ſi elles ont été comme 2, 1, 2, & qu'elle pouvoit arriver à un *plus grand*, ou à un *plus petit*, indépendamment de toute Suite acceſſoire, mais elle n'y ſeroit pas arrivée avec des différences égales de part & d'autre du Terme. Si les trois grandeurs ſont en progreſſion, la Suite n'arrive ni à un *plus grand*, ni à un *plus petit*.

657. Si la 1re Suite acceſſoire arrive à l'Egalité & à zero tout enſemble, il y a dans la Suite principale trois grandeurs conſécutives égales, & qui, par conſéquent ſont dans la moindre progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique qu'il ſoit poſſible. Il eſt clair qu'une Suite, dont la nature eſt de varier toujours, n'auroit pas par elle-même trois grandeurs conſécutives égales, & qu'il faut que ce ſoit quelque choſe d'étranger qui l'y détermine. C'eſt la 1re Suite acceſſoire arrivée à l'Egalité & à zero, & la 2de arrivée ſeulement à zero.

658. S'il y a une 3me Suite acceſſoire qui arrive à zero, elle produit dans la 2de deux grandeurs égales, dans la 1re, trois grandeurs en progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique, c'eſt-à-dire, comme 1, 2, 3, ou 3, 2, 1, ou comme 1, 2, 1, ou 2, 1, 2, & par conſéquent il y a dans la Suite principale quatre grandeurs qui ſont (y étant une grandeur quelconque) $y.\ y+1.\ y+1+2=y+3.\ y+3+3=y+6$, ou $y.\ y+1.\ y+1+2=y+3.\ y+3+1=y+4$, &c. ce qui n'a rien de particulier, & qui ne pût être dans la Suite principale indépendamment des acceſſoires.

M.E.C.D. 2017

659. Que ſi, lorſque la 3me Suite acceſſoire arrive à zero, les deux grandeurs égales de la 2de ſont auſſi zero, il y en a trois égales dans la 1re, & par conſéquent il y a quatre grandeurs de la Suite principale en progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique, qui n'y euſſent pas été ſans cela.

660. Que ſi tout le reſte demeurant le même, les trois grandeurs égales de la 1re Suite acceſſoire ſont zero, il y a dans la Suite principale 4 grandeurs conſécutives égales, ce qui eſt encore un effet particulier des Suites acceſſoires.

661. Et comme on peut ſuivre cette idée auſſi loin qu'on voudra, il s'enſuit en général qu'autant qu'une Suite principale qui n'eſt point progreſſion arithmétique a de grandeurs égales, ou en progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique, autant il y a de Suites acceſſoires, moins une, qui influent ſur elle, ou, ce qui revient au même, qu'il faut conſidérer, & juſqu'où il faut remonter pour trouver la ſource de la propriété ſuppoſée dans la Suite principale, & que hors de-là les Suites acceſſoires n'influent point néceſſairement ſur elle, ou qu'il n'eſt point néceſſaire de les conſidérer.

662. J'appelle *Changement*, ce qui arrive à une Suite qui paſſe au de-là d'un Terme, & y recommence un nouveau cours, & par conſéquent Changement s'oppoſe à *Variation*, qui n'eſt que le cours d'une Suite depuis une Origine juſqu'à un Terme.

Changemens cauſés dans les Suites par le renverſement.

L'idée de changement n'emporte aucune autre néceſſité, ſinon que la Suite devienne contraire à ce qu'elle étoit ſelon la nature du Terme par où elle paſſe. Du reſte les grandeurs de la Suite dans la 2de variation peuvent être, ou les mêmes que celles de la 1re, mais poſées dans un ordre contraire, ou différentes.

663. Si dans une Suite qui a un premier changement, la 2de variation n'eſt que la 1re renverſée, & que la Loi ne permette pas qu'il y en ait une 3me différente des deux 1res, ce qui arriveroit dans la Suite des élévations ou abaiſſemens du Soleil par rapport à l'Horiſon, il faut concevoir, ou que la Suite eſt abſolument terminée par les deux 1res variations,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO Nal S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

ou qu'elle en recommence une 3me toute ſemblable à la 1re, & après cela une 4me toute ſemblable à la 2de, ce qui n'a point de fin. Donc ces ſortes de Suites peuvent être conçues, ou comme ayant un cours fini, ſi on les borne au point après lequel il ne peut plus rien arriver de nouveau, ou comme ayant un cours infini, ſi on veut qu'elles le continuent toujours ſans aucune nouveauté.

664. Et quand même les deux 1res variations ſeroient différentes, ce ſeroit encore la même choſe, ſi la 3me n'étoit que la 1re, & la 4me que la 2de, & toujours ainſi.

665. Que ſi toutes les variations étoient différentes au moins de deux en deux, c'eſt-à-dire, que les deux 1res n'étant que la même renverſée, la 3me & la 4me en fuſſent différentes, quoiqu'elles ne fuſſent que la même renverſée, & toujours ainſi, la Suite auroit un cours abſolument infini, & un nombre infini de variations & de changemens.

666. Une Suite, qui a un Terme infiniment éloigné de ſon Origine, & par conſéquent un cours infini, eſt ordinairement cenſée finir à ce Terme, & par conſéquent elle n'a point de changement. Quelquefois auſſi on peut concevoir qu'elle revienne de ce Terme vers le Fini, auquel cas elle a un changement, & a paſſé par ce Terme infiniment éloigné.

667. Il eſt poſſible qu'une Suite, après avoir paſſé par un nombre fini de Termes finis, à chacun deſquels elle ſera arrivée par un cours fini, & où elle aura reçu un changement, tende à un Terme infiniment éloigné, où elle ne pourra arriver que par un cours infini, & où elle ne recevra plus de changement.

668. Donc par rapport aux changemens, il y a trois eſpeces de Suites, les 1res qui n'en ont point (666), les 2des qui en ont un nombre fini (667), les 3mes qui en ont un nombre infini (665).

669. Et par rapport au cours, il n'y a que deux eſpeces de Suites, les unes qui en ont un abſolument infini; les autres qui en ayant un fini, peuvent cependant être conçues comme en ayant un infini (663).

M.E.C.D. 2017

Changement numérique, & ſpécifique.

670. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les Suites de grandeurs que comme purement numériques : mais ſi on leur joint quelque idée d'être ſpécifique, il y a certaines conſidérations à ajouter.

Lorſqu'une Suite ainſi conditionnée paſſe au-de-là d'un Terme, il faut que ce Terme le ſoit non ſeulement numériquement, mais encore ſpécifiquement, car ce qu'exigeoit l'unité de la Suite numériquement priſe (641), l'unité de la Suite ſpécifiquement priſe l'exige auſſi.

Terme moyen, & Terme commun.

671. Il n'y a que deux manieres dont un Terme puiſſe l'être ſpécifiquement. Il peut ne contenir ni l'un ni l'autre des deux êtres ſpécifiques qui appartiennent aux deux variations contraires, chacun à la ſienne, en ce cas je l'appelle Terme *moyen*, ou il contient l'un & l'autre être ſpécifique, & je l'appelle Terme *commun*.

Par exemple, ſi on tire une Bombe obliquement à l'horiſon, elle a un premier cours où elle monte toujours, & un ſecond où elle deſcend toujours; ſi je veux concevoir ces deux cours ou variations comme appartenans à une Suite où entre l'idée ſpécifique de variation montante & deſcendante, il faut que je conçoive que cette Suite paſſe de l'une à l'autre par un Terme qui n'eſt ni montant ni deſcendant, c'eſt-à-dire, par quelque étendue où la Bombe va parallélement à l'horiſon. C'eſt là un Terme moyen.

Si je ſuppoſe que deux Jets d'eau égaux, courbes, ſortant de terre avec leurs convexités tournées vers la terre, & directement oppoſés, ſe rencontrent & ſe choquent dans leur plus grande élévation, qui ſera une petite étendue verticale, quelques gouttes d'eau dans cette étendue monteront, & d'autres deſcendront, de ſorte qu'on pourra dire que le total montera & deſcendra en même temps. Si j'avois pris les deux cours des deux Jets d'eau pour une ſeule Suite, dont l'origine auroit été fixée au point où l'un des deux ſort de terre, cette Suite auroit eu une variation montante & une deſcendante, & le Terme par où elle paſſeroit pour devenir de montante, deſcendante, ſeroit l'étendue verticale où elle

M.E.C.D. 2017

ſeroit montante & deſcendante en même temps, & ce ſeroit un Terme commun.

Ce ſecond exemple, quoiqu'un peu forcé, ſuffit pour donner l'idée du Terme commun. C'eſt aſſez préſentement qu'on en apperçoive la poſſibilité.

672. Si une Suite ſpécifique & qui ſe renverſe, ne peut avoir, ou n'a pas un Terme moyen, il faut qu'elle en ait un commun; car ſon unité demande néceſſairement qu'elle ait un Terme entre ſes deux variations, & elle n'en peut avoir que de l'une ou de l'autre eſpece.

673. Le Terme moyen ne détermine pas abſolument la Suite à devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit; car comme il ne contient ni l'un ni l'autre des deux êtres ſpécifiques oppoſés, il peut être Terme entre le même être ſpécifique qui a toujours décru, & le même qui va croître, ou au contraire. Ainſi, ſi lorſque le cours de la Bombe eſt devenu parallele à l'horiſon, il lui ſurvenoit une nouvelle force pour la faire monter, l'étendue parallele du cours ne laiſſeroit pas de pouvoir être Terme moyen entre deux variations montantes; mais comme le Terme moyen eſt toujours Terme, & par conſéquent doit produire un changement, il faudroit que la 1re variation ayant été montante de moins en moins, la 2de le fût de plus en plus, ce qui revient à l'art. 648.

674. Le Terme commun détermine néceſſairement la Suite à devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit; car comme il contient les deux êtres ſpécifiques oppoſés, il faut qu'au 1er qui a regné dans la 1re variation, ſuccede le 2d dans la 2de, autrement le Terme commun contiendroit les deux êtres oppoſés, & les deux variations n'auroient que le même, ce qui feroit que le Terme commun ne le ſeroit pas; contradiction manifeſte.

675. Comme l'idée de poſitif & de négatif, j'entends négatif abſolu, renferme un être ſpécifique, une Suite ne peut devenir de poſitive négative, ſans avoir paſſé par un Terme moyen, ou commun. Ainſi dans le 1er exemple de l'art.

M.E.C.D. 2017

l'art. 469, les élevations du Soleil ſur l'horiſon ne deviennent abaiſſemens, ou grandeurs négatives, qu'après avoir paſſé par zero, c'eſt-à-dire, par une poſition du Soleil à l'horiſon, où il n'eſt ni au-deſſus ni au-deſſous; ce zero eſt donc Terme moyen. De même dans le 2^d^ exemple du même art. les arcs que le Soleil décrit à ma droite, ne deviennent arcs décrits à ma gauche qu'après avoir paſſé par le point 90, qui n'eſt ni à ma droite, ni à ma gauche; ce point 90 eſt donc encore un Terme moyen par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif.

676. La nature du Terme par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif, c'eſt-à-dire, la détermination s'il eſt moyen ou commun, dépend de l'être ſpécifique auquel on a attaché le poſitif & le négatif. Ainſi ſi on avoit attaché ces deux idées à des Fonds & à des Dettes, on ſeroit ſûr que le paſſage ne pourroit ſe faire que par un Terme moyen qui ne fût ni Fonds ni Dette; parce qu'il ne peut y avoir un Terme commun, qui ſoit Fonds & Dette en même temps. Donc le Terme ſeroit zero.

Ce n'eſt pas qu'un Homme ne puiſſe venir à avoir des Dettes & aucun Bien ſans avoir paſſé par n'avoir ni Dettes, ni Bien, ou, ce qui revient au même, autant de Dettes que de Bien. Mais il eſt vrai qu'on ne changera rien à l'état de ſa fortune, quand on ſuppoſera qu'il a paſſé par-là, & il faudra le ſuppoſer, pour conſerver l'unité mathématique de la Suite des grandeurs qui exprimeront ſa fortune & ſes variations. Ainſi le paſſage ſe fera par zero, du moins *ſouſentendu*, ce qui ſuffit quant à préſent.

677. Tout Terme par où ſe fait le paſſage du poſitif au négatif eſt en même temps un Terme d'accroiſſement ou de décroiſſement: car une grandeur ne peut devenir ſpécifiquement contraire à ce qu'elle étoit, ſans avoir épuiſé dans ſon premier être ſpécifique tout l'être numérique dont elle étoit capable.

678. Si une Suite eſt exprimée par $\sqrt[2]{a-x}$, a étant *Changemens*

M.E.C.D. 2017

de Suites réelles en imaginaires, & réciproquement.

une grandeur conſtante, plus grande d'abord que x, & x une grandeur variable croiſſante, moindre d'abord que a, la Suite deviendra imaginaire, lorſque x ſera plus grand que a, car ſoit alors $a - x = -z$, la Suite ſera donc $\sqrt[2]{\ } - z$. Le paſſage du réel à l'imaginaire doit ſe faire par un Terme ou moyen ou commun. Il ne peut y en avoir un commun : car aucune grandeur ne peut être telle qu'elle ſoit, & en même temps ne puiſſe être. Il reſte donc que le Terme ſoit moyen, & ce ne peut être que zero, qui eſt parfaitement moyen entre ce qui eſt, & ce qui ne peut être : car il eſt également vrai qu'une grandeur n'exiſte point, & n'eſt point pour cela préciſément dans l'impoſſibilité d'être. Donc la Suite a paſſé par zero, c'eſt-à-dire par $\sqrt[2]{a - x} = 0$, a étant $= x$, après quoi vient $\sqrt[2]{\ } - z$.

679. Il ſuit de ce raiſonnement que zero eſt le ſeul Terme par où une Suite puiſſe paſſer du réel à l'imaginaire.

680. Si après que x eſt devenu plus grand que a, & la Suite par conſéquent imaginaire, x ne peut croître que juſqu'à un plus grand, après quoi il décroît, & redevient $= a$, ce qui fait arriver la Suite à zero une ſeconde fois, x continue à décroître, la Suite redevient réelle, & par conſéquent il peut y avoir dans les Suites des *Vuides*, ou certains eſpaces dans leſquels il n'y a nulles grandeurs, après quoi il peut revenir des eſpaces *pleins*. Et il faut concevoir que les grandeurs impoſſibles de ces Vuides ne laiſſent pas d'être capables de variations qui ſuivent les mêmes loix que celles des autres, ſelon les art. 512, 513, 514.

681. Dans une Suite qui a pluſieurs changemens, deux Termes de même nature ou eſpece ne ſauroient être *conſécutifs*, c'eſt-à-dire, placés dans la Suite l'un après l'autre avec une ſeule variation entre deux : car toute Suite qui paſſe par un Terme, y reçoit un changement, & par conſéquent ne peut plus tendre qu'à un Terme contraire.

682. Deux termes différens ne ſauroient être *contigus*,

M.E.C.D. 2017

c'eſt-à-dire, placés immédiatement l'un après l'autre; car l'idée de Terme ſuppoſe néceſſairement une variation qui y aboutiſſe, & par conſéquent il faut qu'il y ait toujours une variation entre deux Termes différens. Mais au lieu d'être contigus, ils peuvent en être un ſeul compliqué ; parce que la variation aura été telle qu'elle aura tendu, & ſera arrivée à tous les deux en même temps, ce qui revient à l'art. 649.

Application aux Suites dont les différences ſeroient infiniment petites, & ce qui en reſulte.

683. Si les différences des grandeurs d'un Suite ſont infiniment petites, il n'arrivera aucun autre changement à tout ce qui a été dit, ſinon que les variations ſeront conduites par degrés infiniment petits, & par conſéquent ſeront, pour ainſi dire, infiniment *douces*, car de chaque pas au ſuivant, la différence ſera inexprimable & indéterminable à cauſe de ſon infinie petiteſſe.

Si on appelle y une grandeur variable quelconque, dont l'accroiſſement ou décroiſſement perpetuel reglé par quelque Loi, forme une Suite, on appellera dy ſes différences infiniment petites. Ces dy ſont les $\frac{1}{\infty}$, & en effet ce ſont des fractions ou parties infinitiémes de y, & dy eſt $\frac{y}{\infty}$. Si les dy ſont variables, ils auront auſſi des différences qui ſeront par rapport à eux comme les dy par rapport aux y. On les appelle ddy, & on a $ddy = \frac{dy}{\infty}$. De même les ddy pourront avoir leurs $dddy$, &c. juſqu'à ce qu'on arrive à une Suite d'Infiniment petits égaux, s'il y en a une même dans l'Infini, car cela n'arrive pas toujours (653).

684. Si lorſque les différences de y ſont finies, & les pas ou degré des variations déterminés, l'unité de la Suite demande qu'il y ait à chaque changement une grandeur qui ſoit en même temps Terme & Origine, & Terme moyen ou commun ; à plus forte raiſon cette même unité le demande-t-elle jointe à la *douceur* infinie, dont les variations doivent être dans cette nouvelle hipotheſe (683).

685. Le paſſage du poſitif au négatif qui pouvoit ſe faire par un zero ſouſentendu (676) ne peut donc plus ſe faire que par un zero *exprimé*.

M.E.C.D. 2017

686. En général, comme il eſt néceſſaire qu'entre deux variations il y ait un Terme ſoit naturel, ſoit arbitraire, on eſt ſûr que s'il y a un Terme naturel poſſible entre les deux variations, la Suite paſſe par-là ; car avec ſes pas infiniment petits, elles ne peut manquer de le rencontrer. Donc s'il eſt ſeulement poſſible qu'entre une variation poſitive, par ex. & une negative, il y ait l'Infini ou zero, cela eſt néceſſaire. Le même raiſonnement conclut que ſi une Suite, dont les différences ſont infiniment petites, peut paſſer par l'Egalité, elle y paſſe néceſſairement.

Quant aux Termes arbitraires, il n'eſt pas beſoin d'employer ce raiſonnement, puiſqu'étant déterminés par la Loi même, la Suite ne peut manquer de les avoir.

687. Excepté dans une progreſſion géométrique, les variations de la Suite principale & de l'acceſſoire ou des acceſſoires ſont différentes : mais celle de ces variations que l'on voudra, étant réglée par une Loi, toutes les autres ſeront néceſſairement déterminées en conſéquence. Ainſi il eſt indifférent que la Loi tombe immédiatement ſur la Suite principale, ou ſur une acceſſoire quelconque. Cependant il eſt plus naturel qu'elle tombe ſur la principale, ſi elle le peut ; ou ſi elle ne le peut pas, ſur une acceſſoire qui influe ſur la principale. Il ſeroit inutile, par ex. de preſcrire pour Loi que les dy, différences $1^{r.s}$ des y, ou les ddy, &c. fuſſent en progreſſion géométrique, puiſque par-là les y y ſeront, & qu'il vaut mieux preſcrire cette Loi aux y mêmes.

Et comme les Suites acceſſoires n'influent point ſur la principale, paſſé la 2de, hors dans le cas des art. 659 & 660. il ſeroit inutile hors de ce cas, que la Loi tombât ſur une Suite acceſſoire plus éloignée que la 2de. Mais ce qui eſt inutile n'eſt pas pour cela impratiquable.

688. Si des Suites à différences infiniment petites, au lieu d'être formées de grandeurs finies, le ſont de grandeurs infiniment petites du 1er ordre, ce qui rendra les différences du 2^{d}, il n'y aura rien de changé à tout ce qui a été dit, & les mêmes principes s'appliqueront également à cette nouvelle hipothéſe.

M.E.C.D. 2017

SECTION VIII.

Application des Théories précédentes aux Lignes droites.

689. IL n'y a point de nombre qui ne puiſſe exprimer quelque Ligne droite, ni réciproquement de Ligne droite qui ne puiſſe être exprimée par quelque nombre commenſurable ou incommenſurable ; donc à tout les nombres infiniment grands ou petits répondent des lignes poſſibles infiniment grandes ou petites. Commençons par les Infinies.

690. Donc il y a des lignes Infinies poſſibles de tous les ordres d'Infini, c'eſt-à-dire, de l'ordre de ∞, ou de ∞^2, &c. & en général de l'ordre de ∞^n, ou de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{n}}$, &c. & elles auront entr'elles les mêmes rapports finis ou infinis, que les Infinis qui les exprimeront, c'eſt-à-dire, des rapports finis, ſi les lignes infinies ſont du même ordre, infinis, ſi elles n'en ſont pas. *Lignes infinies de tous les ordres.*

691. Si l'on conçoit un Triangle fini quelconque, ſes trois côtés peuvent toujours croître, & croître à l'infini, & le Triangle être toujours ſemblable, & par conſéquent trois lignes infinies feront entr'elles trois angles finis égaux aux premiers. Donc en général des lignes infinies peuvent faire entr'elles tous les angles finis quelconques.

692. Si le premier Triangle fini qu'on poſe d'abord, eſt iſoſcele, & que l'on conçoive qu'il n'y a que les deux côtés égaux qui croiſſent, la baſe de l'angle du ſommet demeurant toujours la même, l'angle du ſommet décroîtra toujours, & les deux égaux ſur la baſe croîtront toujours, & enfin les deux côtés égaux étant devenus infinis, l'angle du ſommet ſera infiniment petit, & les deux autres égaux chacun à un droit, moins la moitié de l'angle du ſommet, c'eſt-à-dire, égaux chacun à un droit. Donc les deux côtés égaux du Triangle iſoſcele ſeront devenus deux lignes infinies paralléles, & *Angles infiniment petits de tous les ordres.*

M.E.C.D. 2017

la baſe toujours finie ſera infiniment petite par rapport à elles. Et comme elle ſera perpendiculaire à l'une & à l'autre, elle meſurera leur diſtance.

693. Donc en général ce qu'on appelle dans le Fini deux lignes paralleles, ſont deux lignes qui, prolongées à l'infini, font entr'elles à leur point de rencontre infiniment éloigné, un angle infiniment petit, dont la baſe eſt la diſtance finie des deux paralleles.

694. Si l'on concevoit deux paralleles infinies du ſecond ordre, dont la diſtance fût toujours finie, l'angle de la rencontre des paralleles dans l'Infini ſeroit infiniment plus petit qu'il n'étoit dans l'art. précédent, car la baſe ſeroit de deux ordres au-deſſous des côtés.

695. Et comme on peut concevoir des lignes infinies de tous les ordres, & qui ſeront paralleles, & auront des diſtance finies, on trouvera que ces paralleles ſeront toujours des angles infiniment petits d'un ordre plus bas.

696. Donc en général il peut y avoir des angles infiniment petits de tous les ordres.

Lignes infiniment petites de tous les ordres, & toujours étendues.

697. Les lignes infiniment petites d'un ordre quelconque répondent aux $\frac{1}{\infty^n}$, qui ont une grandeur, & ne ſont pas des zero abſolus, & par conſéquent elles ne ſont pas des points, mais elles ont une étendue.

698. Cela n'empêche pas qu'elles ne ſoient des points *phyſiquement* ou ſenſiblement, comme les $\frac{1}{\infty^n}$ ſont des zero relatifs, mais en elles-mêmes, ou géométriquement, ce ſont des étendues.

699. Donc tout ce qui appartient aux lignes finies, leur appartient auſſi. Elles peuvent être perpendiculaires à d'autres lignes quelconques, obliques, paralleles, en un mot, elles ont une poſition que des points abſolus n'ont pas.

700. On peut auſſi-bien concevoir un Triangle infiniment petit, dont les trois côtés ſeront des lignes infiniment petites d'un ordre quelconque, qu'un Triangle infiniment grand, ou même fini, & les trois côtés du Triangle infiniment

M.E.C.D. 2017

petit feront auſſi entr'eux des angles finis, tant qu'ils ſeront des Infiniment petits du même ordre.

701. Mais ſi deux lignes infiniment petites du même ordre font entr'elles un angle dont la baſe ſoit de l'ordre immédiatement inférieur, cet angle eſt infiniment petit, & les deux lignes paralleles. Et plus la baſe ſera d'un ordre inférieur à celui des côtés, plus l'angle infiniment petit baiſſera d'ordre. *Parallélisme ſuſceptible de plus & de moins à l'infini, & dans tous les ordres.*

702. Donc auſſi ſi deux lignes finies qui ſe rencontrent, ont une baſe infiniment petite du 1er ordre, elles font entr'elles un angle infiniment petit, & ſont paralleles. Et leur angle eſt encore infiniment plus petit, ſi leur baſe eſt du 2^d^ ordre d'Infiniment petit, &c.

703. Donc en général deux lignes qui ſe rencontrent ſous un angle, dont la baſe eſt infiniment petite par rapport à elles, ſont paralleles, & font entr'elles un angle infiniment petit, & cet angle eſt d'un ordre d'Infiniment petits d'autant plus bas, que la baſe eſt d'un ordre plus inférieur aux côtés.

704. Réciproquement ſi deux lignes d'un ordre quelconque ſe rencontrent ſous un angle infiniment petit, la baſe de cet angle eſt d'un ordre inférieur à elles, & d'autant plus inférieur que l'angle infiniment petit eſt d'un ordre plus bas, & ces lignes ſont paralleles.

705. Il eſt poſſible, mais non pas néceſſaire, de concevoir deux paralleles comme faiſant entr'elles un angle infiniment petit. Car on peut les concevoir comme étant toujours paralleles, même lorſqu'elles ſeront prolongées à l'infini, de même qu'elles l'étoient dans le fini. Mais ſi, lorſqu'elles ſeront prolongées à l'infini, on les conçoit comme ſe rencontrant ſous un angle infiniment petit, elles ſeront encore paralleles à cauſe de l'infinie petiteſſe de l'angle. Ainſi on peut concevoir leur parallélisme, ou comme abſolu, exact & rigoureux, ou comme infiniment peu différent de celui-là, & il n'y a pas de néceſſité de le concevoir de la 2de façon, mais ſeulement poſſibilité.

706. Si deux lignes finies ſe rencontrent ſous un angle infiniment petit, il n'y a que poſſibilité de les concevoir

BIBLIOTECA DEL OBSERVATÒRIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

comme paralleles, & leur parallélisme ne peut être absolu, mais seulement infiniment peu différent de l'absolu. Ainsi dans ce cas là on peut les considérer encore selon l'angle infiniment petit qu'elles font entr'elles.

707. Il en va de même de deux lignes infiniment petites, qui font entr'elles un angle infiniment petit.

708. Le parallélisme non-absolu consistant donc toujours en ce que deux lignes font entr'elles un angle infiniment petit, si deux lignes sont paralléles de ce parallélisme, elles ne peuvent se rencontre qu'à une distance qui soit de l'ordre immédiatement supérieur à celui dont est la base de l'angle infiniment petit. Ainsi si la base de cet angle est une ligne finie, les deux lignes paralleles ne peuvent se rencontrer qu'à une distance infinie, ou dans l'Infini (692). Si la base est infiniment petite du 1er ordre, les deux paralleles se rencontrent à une distance finie, &c.

709. Le parallélisme absolu n'est point susceptible de plus & de moins, mais le non-absolu en est susceptible, car l'angle infiniment petit peut être plus ou moins grand.

710. Le parallélisme non-absolu est même susceptible de tous les ordres, puisque l'angle infiniment petit peut être de tous les ordres d'infiniment petits (696).

711. Donc deux lignes paralleles d'un parallélisme non-absolu peuvent être plus ou moins paralleles à l'infini, & infiniment plus ou moins paralleles selon tous les ordres d'Infini que deux autres paralleles.

On peut le voir encore ainsi. Soient deux droites égales *A* & *B*, perpendiculaires sur une même base droite *C*, la ligne *D* qui passera par leurs extrémités sera parallele à la base *C*. Si *B* est plus grande que *A* d'une différence infiniment petite, *D* sera encore parallele à *C*, mais non d'un parallélisme absolu, comme dans le 1er cas. Plus la différence de *A* & *B* sera grande, étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, moins *D* & *C* seront paralleles, & enfin elle ne cesseront entiérement de l'être, ou ne deviendront obliques l'une à l'autre, que quand la

M.E.C.D. 2017

la différence de A & de B ſera finie. Que ſi au contraire la différence de A & de B, étant de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, étoit décroiſſante, D & C ſeroient toujours plus paralleles; & enfin quand cette différence ſeroit devenue $= \frac{1}{\infty^2}$, D & C ſeroient infiniment plus paralleles, mais non encore d'un paralléliſme abſolu : & il ne le deviendroit que quand la différence auroit paſſé par tous les ordres d'Infiniment petits, & ſeroit devenue zero abſolu.

Dans les recherches géométriques, & dans le calcul, le paralléliſme non-abſolu eſt le même que l'abſolu, comme $1 + \frac{1}{\infty} = 1$, & par la même raiſon. Mais quoique la différence de ces deux eſpeces de paralléliſme nous échappe, il y a des occaſions où il eſt bon de les diſtinguer ; comme il y en a où il faut prendre $1 + \frac{1}{\infty}$ tel qu'il eſt, & non pas $= 1$ (416).

712. Tout ce qui a été dit du paralléliſme s'applique de ſoi-même à la perpendicularité, & l'on verra aiſément qu'il y a une perpendicularité abſolue, & une non-abſolue qui peut décroître ſelon tous les degrés d'un ordre, juſqu'à devenir obliquité, ou au contraire croître ſelon tous les ordres d'Infini juſqu'à ce qu'elle devienne perpendicularité abſolue. *Et de même la perpendicularité.*

Pour entendre nettement cette perpendicularité croiſſante, il n'y a qu'à concevoir que dans le Triangle rectangle MRm, dont les trois côtés ſont finis, l'hypotenuſe Mm oblique ſur MR s'approche toujours en décroiſſant de la perpendiculaire Rm, & tend à ſe confondre avec elle. Mm ſera oblique tant que MR ſera d'une grandeur finie, quoique cette grandeur ſoit toujours moindre. Lorſque Mm ſe ſera tant approchée de Rm, que MR ne ſera plus que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, Mm ſera perpendiculaire, mais non pas d'une perpendicularité abſolue, car elle ne ſera pas encore entiérement & exactement confondue avec Rm : elle le ſera plus, lorſque MR ne ſera que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, plus encore, lorſ- FIG II.

M.E.C.D. 2017

que MR ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & ainſi à l'infini, & par conſéquent Mm ſera toujours de plus en plus perpendiculaire, & enfin elle le ſera abſolument, lorſque MR ſera zero abſolu.

Suites infinies de Lignes, qui ſont des Ordonnées poſées paralléiement ſur un Axe.

713. On peut concevoir, ainſi que des Suites de nombres, des Suites de lignes droites, ou finies, ou infinies, ou infiniment petites, ou originairement formées de lignes finies & terminées par des lignes infiniment grandes ou petites. Mais comme on rapporte toutes les Suites de nombres à la Suite naturelle, ne fût-ce que pour leur donner les dénominations de 1er, 2^{d}, 3me, &c. de même il faut concevoir les Suites quelconques de lignes diſpoſées parallélement ſelon leur grandeur ſur une ligne commune, qu'on appelle en général *diamétre*, & en particulier *axe*, ſi les lignes, qui y ſont diſpoſées, lui ſont perpendiculaires, ce qui eſt la ſuppoſition la plus naturelle, & la plus ordinaire. Les lignes diſpoſées ſur un diametre ou axe s'appellent *Ordonnées* ou *Appliquées*.

714. L'axe étant conçû diviſé en une infinité de parties égales, elles repréſentent la Suite infinie des Unités, & leurs ſommes, à compter de l'origine de l'axe, ſont en progreſſion arithmétique naturelle, & repréſentent la Suite naturelle A. Les Ordonnées poſées ſur tous les points de diviſion de l'axe, peuvent croître ou décroître ſelon telle Loi qu'on voudra.

715. Il eſt plus naturel, mais non pas néceſſaire, que l'axe ſoit conçû diviſé en parties égales, & on peut le diviſer en parties qui ſuivront telle Loi qu'on voudra. Les ſommes conſécutives de ces différentes parties égales ou inégales, correſpondantes chacune à une Ordonnée, s'appellent *Abſciſſes* ou *Coupées*.

716. Une droite finie quelconque étant priſe pour axe, & conçûe diviſée en une infinité de parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ſi l'on conçoit de plus que ſur chaque point de diviſion ſoit élevée une Ordonnée, qu'elles ſuivent toutes comme leurs Abſciſſes correſpondantes la progreſſion arithmétique

M.E.C.D. 2017

naturelle, & que la derniére ſoit finie comme ſon Abſciſſe, qui eſt l'axe entier, il eſt clair que ces Ordonnées ne pourront repréſenter les nombres de *A*, qui ſont de deux ordres différens, à moins qu'elle ne ſoient auſſi de deux différens ordres; & que puiſque la derniere ou plus grande eſt finie, il y en aura vers l'origine de leur Suite ou de l'axe, qui ne ſeront que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc les Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ repréſenteront les nombres finis de *A*, & les Ordonnées finies repréſenteront les Infinis de *A*. Donc puiſqu'il y a dans *A* une infinité de Finis, & une infinité beaucoup plus grande d'Infinis, il y aura une infinité de ces Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité beaucoup plus grande de Finies.

Et en effet on voit déja qu'en joignant par une ligne droite oblique à l'axe les extrémités de toutes ces Ordonnées, il ſe formera un Triangle rectangle, dont elles rempliront l'aire; que l'on n'en pourra trouver une finie vers le ſommet du Triangle, quelque petite qu'elle ſoit, que quand on prendra une partie finie de l'axe; que cette partie finie de l'axe étant compoſée d'une infinité de parties de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, la premiere & plus petite ordonnée finie que l'on concevra, ſera précédée par conſéquent d'une infinité d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; & qu'après elle il en viendra une infinité beaucoup plus grande de Finies. Cela repréſente à l'œil ce que nous avons dit tant de fois ſur la Suite naturelle *A*, qui, quant au nombre, aux rapports, & aux différens ordres de ſes grandeurs, eſt préciſément la même choſe que la Suite des Ordonnées de ce Triangle.

717. Ce qui fait que ce Triangle ne repréſente que les rapports, & non l'abſolu de *A*, c'eſt qu'on a pris un axe fini, diviſé en parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont chacune repréſentoit une Unité finie de *A*, de ſorte que les différences conſtantes des Ordonnées n'ont été auſſi que des $\frac{1}{\infty}$. Mais ſi on avoit pris un axe $= \infty$, diviſé en une infinité de par-

M.E.C.D. 2017

ties toutes = 1, on auroit eu dès les premiers points de division des Ordonnées finies, qui euſſent repréſenté l'abſolu des nombres finis qui ſont à l'origine de *A*. Auſſi n'auroit-on pû jamais avoir actuellement, ou tracer qu'un nombre fini de ces Ordonnées, encore moins eût-on pû tracer les infinies qui auroient dû les ſuivre, & l'on n'eût eu qu'une repréſentation très-incomplete de *A*.

718. A^2 ayant des nombres de trois ordres, des Finis en nombre fini, des ∞, & des ∞^2 en nombre infini croiſſant (210), cette Suite peut être repréſentée par des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, de $\frac{1}{\infty}$, & du Fini, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, du Fini, & de ∞, ou du Fini, de ∞, & de ∞^2; toutes conſervant les rapports des quarrés des nombres naturels. Et en général il eſt évident qu'il n'y a point de Suite de nombres qui ne puiſſe être repréſentée par des Ordonnées diſpoſées ſur un axe, ou diametre, ce qui ſuffit quant à préſent.

Lignes poſitives, négatives, & imaginaires.

719. Si les lignes ſont ſuſceptibles de l'idée du poſitif & du négatif, il faut que ce ſoit par quelque être ſpécifique. Or on n'y peut jamais conſiderer que deux choſes, leur grandeur, & leur poſition Leur grandeur eſt certainement leur être numérique, dont il faut que le ſpécifique ſoit entiérement diſtinct; il faut même, autant qu'il eſt poſſible, que le ſpécifique ne touche point au numérique; c'eſt-à-dire, qu'il ne doit ni augmenter ni diminuer la grandeur, mais lui être abſolument indifférent. La poſition d'une ligne par rapport à une autre ligne conſiſte à lui être ou perpendiculaire, ou oblique, ou parallele: mais outre que ces différentes poſitions feroient varier dans preſque tous les cas la grandeur d'une ligne, & ne feroient pas par conſéquent indifférentes à leur être numérique, il eſt clair que cette idée de poſition ne peut convenir ni aux Abſciſſes, qui ne ſont qu'une même ligne plus ou moins grande, ni aux Ordonnées, qui ſont toutes perpendiculaires à l'axe, ou également obliques ſur un diamétre. Donc ſi ces lignes ſont capables d'être ſpécifiques, il conſiſte en quelque autre choſe.

M.E.C.D. 2017

720. Il faut néceſſairement déterminer une Origine à l'axe, c'eſt-à-dire, un point d'où parte la 1re Ordonnée. Cette Origine étant arbitrairement déterminée, car elle ne peut l'être autrement, il faut que les Abſciſſes prennent leur cours ou à la droite ou à la gauche de l'Origine, &, s'il eſt poſſible, qu'elles prennent leur cours & à la droite & à la gauche, les Abſciſſes d'une part & les Abſciſſes de l'autre auront donc des poſitions contraires par rapport à leur Origine commune: & ſi celles qui ſont à la droite ont été qualifiées de poſitives, celles qui ſeront à la gauche ſeront négatives, ou au contraire. Ce ſera donc là leur être ſpécifique.

721. De même il faut déterminer arbitrairement ſi les Ordonnées ſeront poſées au-deſſus ou au-deſſous de l'axe, car cela eſt entiérement indifférent, & s'il eſt poſſible qu'il y en ait tant au-deſſous qu'au-deſſus, elles auront par rapport à l'axe des poſitions contraires, en quoi conſiſtera leur être ſpécifique, & ſi les ſuperieures ont été qualifiées de poſitives, les inférieures ſeront négatives, ou au contraire.

722. Il eſt évident que les Abſciſſes ne peuvent être poſitives & négatives que de la maniere qui a été dite. Mais on pourroit croire que les Ordonnées le devroient être auſſi de la même maniere: car celles qui ſeront à la droite de l'origine de l'axe, auront une poſition contraire à celles qui ſeront à la gauche. Mais ce qui fait que cela n'eſt pas, c'eſt que pour déterminer une Ordonnée, qui eſt à la gauche de l'origine de l'axe, il ſuffit d'avoir déterminé que l'Abſciſſe qui lui répond eſt négative. Ainſi le poſitif & le négatif des Ordonnées ne doit conſiſter que dans leur poſition, au-deſſus ou au deſſous de l'axe, comme le poſitif & le négatif des Abſciſſes ne conſiſte que dans leur poſition, à la droite ou à la gauche de l'origine de l'axe.

On a déja vû des exemples de ces deux eſpeces de poſitif & de négatif dans l'art. 469, parce qu'ils étoient tirés d'arcs ou de lignes qui ne peuvent avoir que ces deux manieres d'être poſitives ou négatives.

723. On voit aſſez que le quarré d'une Ordonnée ſupé-

M.E.C.D. 2017

rieure par une inférieure égale ne ſera qu'imaginaire ; parce que ſi on vouloit tracer réellement un quarré ſur une Ordonnée ſupérieure, il faudroit que ce quarré fût auſſi entiérement au-deſſus de l'axe. C'eſt la même choſe pour le quarré d'une Abſciſſe poſitive par une négative égale. De-là s'enſuit tout ce qui peut appartenir à ces grandeurs entant que réelles ou imaginaires.

724. Si l'on conçoit que les différences des Ordonnées ſoient finies, il faut, pour la correſpondance des diviſions de l'axe aux Ordonnées, concevoir auſſi ces diviſions finies, ou, ce qui eſt la même choſe, les différences des Abſciſſes. Mais ſi on conçoit les différences des Ordonnées infiniment petites du 1er ordre, il faut concevoir auſſi les diviſions de l'axe infiniment petites de ce même ordre, & par conſéquent les Ordonnées infiniment proche les unes des autres, ou chacune de ſa conſécutive.

725. Les différences quelconques, ſoit des Abſciſſes, ſoit des Ordonnées, ne ſont point proprement & par elles-mêmes ſuſceptibles de l'idée du poſitif & du négatif : car elles n'ont point de poſition qui leur appartienne, elles n'ont que celle des grandeurs dont elles ſont différences & parties. Elles n'ont le + que parce qu'elles ſont ajoûtées à des grandeurs croiſſantes, ni le — que parce qu'elles ſont retranchées de grandeurs décroiſſantes.

M.E.C.D. 2017

SECTION IX.

Idée générale des Lignes Courbes.

726. IL n'y a point de Lignes qui ne puiſſe être conçûe comme décrite par le mouvement d'un point qui coule. La Ligne droite eſt décrite par un point dont le mouvement a toujours la même direction, & la Ligne Courbe dont l'idée eſt oppoſée à celle de la droite, ſera donc décrite par un Point dont le mouvement changera toujours de direction. Il faut voir maintenant ce que c'eſt que changer toujours de direction. Le Point décrivant n'en peut changer qu'après chaque pas ou chemin fini, ou après chaque pas infiniment petit; il n'en peut changer que finiment, ou infiniment peu.

Différentes manières dont on pourroit concevoir la formation des Courbes, & celle dont il la faut concevoir.

727. Si le Point décrivant change finiment de direction après un pas fini, auquel ſelon la ſuppoſition ſuccede un ſecond pas fini, ce ſont deux lignes droites finies qui font entr'elles un angle fini, & tout le mouvement quelconque du Point produit un aſſemblage de droites finies, qui font entr'elles certains angles; c'eſt-à-dire, que le tout eſt un *Poligone rectiligne*.

728. Si le Point décrivant change finiment de direction après un pas infiniment petit, & ainſi de ſuite, il ſe forme un aſſemblage de lignes droites infiniment petites, qui font entr'elles des angles finis, ou, pour ne pas éviter une expreſſion que l'idée demande, un Zic-zac, dont tous les angles ſont finis, & les côtés infiniment petits. Or il eſt manifeſte que ce n'eſt pas là ce qu'on entend par une Courbe, & que cette figure ne pourroit jamais être décrit: car ſes côtés infiniment petits devroient être diſtincts les uns des autres à cauſe des angles finis qu'ils feroient entr'eux, mais par la même raiſon que tout Infini en grandeur ou en petiteſſe eſt inexprimable en nombres, il eſt indeſcriptible en ligne, & par conſéquent

M.E.C.D. 2017

les côtés du Zic-zac infiniment petits, & distincts les uns des autres, devroient & ne pourroient être décrits.

729. Si le Point décrivant après un pas fini, change infiniment peu de direction, son second pas est en ligne droite avec le premier à cause de la petitesse infinie du changement de direction, & par conséquent il ne se forme dans cette hipothése qu'une ligne droite.

730. Donc il reste pour la description de la Courbe que le Point décrivant à chaque pas infiniment petit, change infiniment peu de direction.

731. Si la Courbe étoit le Zic-zac de l'art. 728, elle auroit la plus grande opposition possible à la ligne droite : car rien n'est plus opposé à ne changer jamais de direction après aucun pas fini, que d'en changer toujours finiment après chaque pas infiniment petit; & il est visible que de n'en changer qu'infiniment peu à chaque pas infiniment petit, est une moindre opposition. Elle est même si petite, qu'on peut concevoir la ligne droite comme changeant infiniment peu de direction après un pas fini, ainsi qu'on a vû dans l'art. 729; en quoi consiste donc l'opposition de la droite & de la Courbe? C'est que la Courbe changeant infiniment peu de direction à chaque pas infiniment petit, dès que le nombre de ces pas est infini, la somme en est finie, & par conséquent aussi celle des changemens de direction, d'où il suit qu'après une étendue finie de la Courbe, quelque petite qu'elle soit, il y a un changement de direction fini, au lieu qu'après une étendue finie quelconque de la ligne droite, il n'y a aucun changement de direction fini, & l'Infiniment petit qu'on y suppose feroit ne feroit rien, & n'empêcheroit pas la rectitude de la ligne.

732. De-là il suit qu'une droite qui à chaque pas fini quelconque changeroit infiniment peu de direction, seroit toujours une droite tant qu'elle seroit finie, mais deviendroit Courbe, ou changeroit de direction dès qu'elle seroit infinie : car au nombre infini de ses pas finis répondroit un même nombre infini de changemens de direction infiniment petits

qui

M.E.C.D. 2017

qui feroient une ſomme finie. Mais cette Courbe ſeroit d'une nature différente des Courbes que nous connoiſſons, & qui le ſont dans des étendues finies quelconques. Cependant cette idée peut avoir lieu en certains cas, & l'aura dans la ſuite.

733. Nous concevons toujours que les changemens de direction de la Courbe ſont des Infiniment petits du 1er ordre, puiſqu'il ſuffit de les prendre de cet ordre, auſſi-bien que les pas de la Courbe. Mais ſi l'on concevoit que les pas étant toujours de ce 1er ordre, les changemens de direction fuſſent du 2^d^, il s'enſuivroit qu'après un nombre infini de pas de la Courbe, ou quand elle auroit une étendue finie, elle n'auroit qu'un changement de direction infiniment petit du 1er ordre, & par conſéquent ſeroit encore ligne droite, & que ce ne ſeroit qu'après une étendue infinie qu'elle auroit un changement de direction fini, ou deviendroit Courbe, ce qui retombe dans l'art. précédent, dont le cas eſt le parfait équivalent de celui-ci.

734. Ces ſortes de Lignes infinies qui ſeroient droites tant qu'elles auroient des étendues finies, & Courbes quand elles en auroient d'infinies, peuvent toujours être conçues comme ayant un nombre fini de parties infinies, telles que des moitiés, des tiers, &c. & par conſéquent elles auroient à chacune de ces parties un changement de direction fini, ce qui les rendroit eſſentiellement différentes des droites, qui le ſont toujours, dans quelque étendue infinie que ce ſoit, & en même temps différentes des Courbes ordinaires, qui ont un changement de direction fini dans la plus petite étendue finie.

735. Il ſeroit impoſſible ou inutile de concevoir les pas de la Courbe comme infiniment petits du 2^d^ ordre. Car ou l'on concevroit en même temps les changemens de direction comme infiniment petits du 1er, auquel cas, après une étendue infiniment petite du 1er ordre, qui ſeroit la ſomme d'une infinité de pas infiniment petits du 2^d^, il y auroit un changement de direction fini, ce qui ſeroit la ligne indeſcriptible de l'art. 728, où l'on concevroit les changemens de direction

M.E.C.D. 2017

infiniment petits du 2^d ordre, comme les pas, ce qui ne feroit que ce que font les pas infiniment petits du 1er ordre avec des changemens de direction du même ordre.

Ce raisonnement ne conclut pas qu'il ne puisse y avoir une Courbe dont les pas soient infiniment petits du 2^d ordre avec des changemens de direction du 1er, mais seulement qu'une telle Courbe seroit indescriptible, & ne seroit pas par conséquent de la nature de celles que nous connoissons.

Il n'empêche pas non plus que dans quelque Courbe descriptible & que nous connoîtrons, il ne puisse y avoir quelque pas infiniment petit du 2^d ordre; mais seulement la Courbe n'en sera pas toute composée, puisqu'on la suppose descriptible.

736. Donc la Courbe en général, & par rapport à nos connoissances, est un assemblage de lignes droites infiniment petites du 1er ordre, dont chacune se détourne infiniment peu de celle qui la précéde ou la suit, ou, ce qui est le même, fait avec elle un angle infiniment petit du 1er ordre. Ces petites droites s'appellent les *côtés* de la Courbe, qui est par conséquent un *Poligone rectiligne dont les côtés sont infiniment petits*. On sousentend qu'ils se détournent infiniment peu les uns des autres.

737. Et comme il n'y a point de Courbe qui n'ait au moins une étendue finie, & qu'il faut une infinité d'infiniment petits du 1er ordre, pour faire une somme ou grandeur finie, toute Courbe, dans quelque étendue finie qu'on la prenne, est un *Poligone rectiligne infiniti-latere*, ou un *Poligone infini*, en sousentendant que ses côtés sont droits, infiniment petits, & se détournant infiniment peu. Et si la Courbe a une étendue infinie, c'est un Poligone infiniment infini (626).

738. Chaque côté d'une Courbe est inassignable & indéterminable, puisqu'il est infiniment petit. Cependant il a une direction, ou, ce qui est le même, une étendue (697). mais sensiblement ou physiquement nulle (698).

Ce que c'est que l'angle de contingence de la Courbe.

739. Afin que le changement de direction d'un côté quelconque au suivant soit infiniment petit, il faut que les deux côtés AB, AC, soient infiniment peu éloignés d'être

M.E.C.D. 2017

en ligne droite, & par conſéquent que l'angle *ABC* differe infiniment peu d'un angle de 180 degrés, & que l'angle de complément *DBC* ſoit infiniment petit. On appelle l'angle *DBC*, *angle de contingence*. FIG. I.

740. Puiſque l'angle de contingence *DBC*, qui eſt le changement de direction du côté *AB* au côté *BC*, eſt infiniment petit du 1er ordre, & que *BC*, l'un de ſes côtés, eſt infiniment petit du 1er ordre, étant côté de la Courbe, ce qui fait que *BD* doit être auſſi conçû du même ordre, la baſe de cet angle ſera une ligne infiniment petite du 2^d^ ordre (704).

741. Donc auſſi ſon Sinus, qui ſera ſa meſure, en prenant pour Sinus total le côté *BC*, ſera une ligne infiniment petite du 2^d^ ordre.

742. De ce que chaque côté de la Courbe eſt inaſſignable & indéterminable (738), il ſuit qu'on ne peut déterminer que le côté *AB*, ſuppoſé que *A* ne ſoit pas le premier point de la Courbe, commence au point *A* & finiſſe au point *B*, ni que le côté *BC* commence en *B*, & finiſſe en *C*. Par conſéquent on peut prendre *AB* & *BC* enſemble pour un ſeul côté de la Courbe, ou *AB* & une partie de *BC*, telle que *Bb*, ou ſeulement la ligne *Aa*, ou *aBb*. Enfin *ABC* étant une portion infiniment petite de la Courbe, il eſt libre de la prendre, ou pour un ſeul côté, ou pour une partie d'un côté, ou pour pluſieurs côtés, en tel nombre fini qu'on voudra; car cette portion étant infiniment petite, elle peut n'être, ou qu'une petite droite, ou portion de droite, ſans aucun changement de direction, ou pluſieurs petites droites qui n'auront qu'un nombre fini de changemens de direction infiniment petits, qui tous enſemble n'empêcheront point toutes ces petites lignes d'être poſées bout à bout en ligne droite.

743. Si on conçoit *AB* & *BC* comme deux côtés, alors cette idée emporte néceſſairement qu'il y ait entr'eux un angle *ABC*, comme au point *B*.

744. Donc de l'infinie petiteſſe des côtés d'une Courbe, qui les rend indéterminables, il ſuit que la diviſion d'une Courbe en ſes côtés eſt entierement arbitraire, c'eſt-à-dire,

M.E.C.D. 2017

qu'on peut les concevoir égaux ou inégaux, ſelon telle raiſon qu'on voudra, pourvû que cette diviſion étant établie, on conçoive toujours entre deux côtés conſécutifs un angle *A B C*.

745. De cette diviſibilité arbitraire de la Courbe qui peut produire des diviſions différentes à l'infini, & de ce qu'entre deux côtés conſécutifs, il y a toujours un angle *A B C*, il ſuit qu'il n'y a aucun point de la Courbe où il ne ſe faſſe un changement de direction infiniment petit.

Angle de contingence croiſſant ou décroiſſant. Idée de la courbure croiſſante ou décroiſſante.

746. L'angle de contingence *D B C* a une grandeur, & par conſéquent peut croître ou décroître.

747. S'il croît, il ſemble qu'il doive être capable de devenir infiniment plus grand qu'il n'étoit, c'eſt-à-dire, fini. Mais s'il le devenoit, la diviſion de la Courbe ne ſeroit plus arbitraire en cet endroit; car on ne pourroit plus prendre pour une ſeule ligne droite *A B* & *B C*, qui feroient entr'eux un angle obtus *A B C*, dont le complément *DBC* ſeroit fini. Il eſt vrai qu'on pourroit dire qu'il ſuffiroit que par-tout ailleurs la diviſion de la Courbe fût arbitraire, mais on prouvera dans la ſuite que l'angle *D B C* ne peut jamais être fini.

748. S'il décroît, rien n'empêche qu'il ne devienne = 0, auquel cas il faut concevoir l'angle *A B C* comme étant exactement de 180 degrés, & les deux côtés *A B*, *BC*, exactement poſés bout à bout en ligne droite. Alors ces deux côtés peuvent encore n'être pris que pour un ſeul, & ne ſont ſenſiblement qu'un point.

749. Si l'angle *DBC* devient, non pas abſolument zero, mais infiniment petit du 2^d^ ordre, c'eſt encore la même choſe; car les deux côtés *AB*, *BC*, qui approchoient infiniment d'être poſés en ligne droite, venant à en approcher encore infiniment davantage, doivent être conçus comme poſés en ligne droite, quoique ce ne ſoit pas à la derniere rigueur. Il en faudra dire autant de l'angle *DBC*, devenu infiniment petit du 3me ordre, &c. Tout cela revient aux lignes paralleles plus ou moins paralleles de la Sect. VIII, & dépend des mêmes principes. Ici une ligne droite eſt plus ou moins droite ſelon qu'il y faut concevoir des angles ou changemens de

M.E.C.D. 2017

direction d'un ordre d'Infiniment petit plus ou moins bas. Et en effet, dans une ligne abſolument droite, il n'en faudroit abſolument concevoir aucun.

750. Puiſque la courbure d'une Courbe conſiſte dans ſes changemens de direction ou angles infiniment petits *D B C* à chaque pas infiniment petit, & que les pas ou côtés de la Courbe, & les angles *D B C*, peuvent être plus ou moins grands, la courbure ſera d'autant plus grande, qu'un côté ſera plus petit, & l'angle *DBC* plus grand, de ſorte que la courbure ſera croiſſante, ſi les côtés ſont décroiſſans, & les angles *DBC* croiſſans; car il eſt viſible que ſe détourner davantage après un moindre chemin en ligne droite, c'eſt s'éloigner davantage de la rectitude. Ce ſera le contraire ſi les côtés ſont croiſſans, & les angles *DBC* décroiſſans. Et ſi les côtés ſont toujours égaux, & les angles *DBC* auſſi, la courbure ſera toujours la même, ou uniforme.

751. On voit aſſez par-là qu'il ne peut y avoir qu'une ſeule eſpece de Courbe dont la courbure ſoit uniforme, & que toutes les autres doivent avoir une courbure croiſſante ou décroiſſante.

752. La diviſion d'une Courbe en ſes côtés étant entiérement arbitraire, on peut concevoir les côtés tous égaux, auquel cas on n'a plus pour la courbure que les angles *D B C* croiſſans ou décroiſſans, à conſidérer. Ou bien on peut concevoir la Courbe tellement diviſée, que tous les angles *DBC* qui ſeront aux points de diviſion ſoient égaux, & on n'aura plus à conſidérer que les côtés croiſſans ou décroiſſans : car ſi la Courbe eſt ſuppoſée faire des pas toujours égaux, il faut pour une courbure croiſſante, qu'elle ſe détourne toujours davantage, ou au contraire pour une courbure décroiſſante; & ſi elle eſt ſuppoſée ſe détourner toujours également, il faut pour une courbure croiſſante, qu'elle faſſe toujours de plus petits pas en ligne droite, ou au contraire.

Différentes poſitions des parties de la

753. Puiſque tous les côtés de la Courbe ont chacun leur direction particuliere, ſi on rapporte la ſuite *A Mm* de différens côtés infiniment petits, où la Courbe *A Mm* a une

M.E.C.D. 2017

Courbe par rapport à un même axe.

FIG. II.

ligne droite AB, ils auront tous par rapport à cette ligne leur position particuliere; par exemple, le côté Mm aura par rapport à AB une position que les précédens ni les suivans n'auront point, ou, ce qui revient au même, Mm étant conçu prolongé jusqu'à AB, l'angle ATM sera différent de celui que feroient sur AB les autres côtés pareillement prolongés. Il est clair qu'il n'y a pas d'autre moyen de considérer les différentes directions des côtés, que de les rapporter tous à une ligne droite commune.

754. Si des deux extrémités du côté Mm, & pareillement de celles de tous les autres côtés, on mene sur AB les perpendiculaires MP, mp, &c. ces lignes sont *Ordonnées* ou *Appliquées* à l'*axe* AB. Et parce que les côtés Mm sont infiniment petits du 1er ordre, les distances Pp ou MR de deux Ordonnées consécutives, & leurs différences $pm - PM = Rm$, sont des Infiniment petits de ce même ordre.

Mouvement composé de chaque côté infiniment petit de la Courbe.

755. L'axe AB étant conçu comme une ligne horisontale, ce qui est entierement arbitraire, un côté quelconque Mm oblique à cet axe, est l'hypothenuse d'un Triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont la ligne horisontale MR, & la verticale Rm. Donc tout côté Mm oblique à l'axe représente un mouvement infiniment petit de la Courbe, composé d'un horisontal & d'un vertical.

756. L'origine de la Courbe AMm étant au point A, & son étendue jusqu'au point m finie, il est clair qu'elle est la somme d'une infinité de côtés Mm, qui ont eu une direction composée de l'horisontale & de la verticale, que l'*Abscisse* Ap correspondante à la somme de tous ces côtés, est la somme de tout ce qu'il y a eu d'horisontal dans leurs directions, & l'Ordonnée pm la somme de tout ce qu'il y a eu de vertical: ou, pour parler plus exactement, car les idées d'horisontal & de vertical ne sont employées ici qu'afin de rendre l'image plus sensible, Ap est la somme de toutes les distances infiniment petites Pp qui ont été entre les Ordonnées, & pm est la somme de toutes leurs différences infiniment petites Rm, les distances Pp & les différences Rm ayant été en un même nombre infini.

M.E.C.D. 2017

757. Dans une étendue finie quelconque Ap de l'axe, il y a une infinité d'Ordonnées infiniment proches, qui répondent à une égale infinité de côtés Mm.

758. Au point A de l'origine d'une Courbe, il faut lui concevoir une Ordonnée infiniment petite, & ne lui en concevoir point d'autres jusqu'à ce que la Courbe ait une étendue finie. Ces Ordonnées sont infiniment petites du 1er ordre, leurs distances sont toujours des Pp, & leurs différences des Rm du même ordre qu'elles. Et ce n'est que quand ces Ordonnées sont en nombre infini, que la Courbe a une étendue finie, & une premiere Ordonnée finie, qui est la somme de toutes les différences des Ordonnées précédentes. Il est clair que cette premiere Ordonnée finie est indéterminable, & ne peut être déterminée qu'arbitrairement.

759. Puisque chaque étendue finie de la Courbe a une infinité de Mm, auxquels répondent une infinité égale d'Ordonnées, de Pp, & de Rm, si la Courbe a une étendue infinie, il y a une infinité d'infinités de Mm, d'Ordonnées, de Pp, & de Rm.

760. Puisque les Ordonnées étant infiniment proches, il n'y a aucun point de la Courbe où il ne se termine une Ordonnée, la Courbe peut aussi-bien être conçue comme la Suite des extrémités de toutes les Ordonnées, que comme une Suite de côtés Mm. Donc on a la Courbe, si on a la grandeur de toutes les Ordonnées PM ou pm, ou, ce qui revient au même, le rapport de chaque Abscisse AP, ou Ap, a son Ordonnée correspondante PM ou pm. Donc la connoissance du rapport des Abcisses aux Ordonnées, renferme toute la connoissance de la Courbe.

Ce qui est nécessaire pour la connoissance des Courbes. Leur Equation ou Loi.

761. Si ce rapport étoit constant, c'est-à-dire, si une Abscisse quelconque étoit à son Ordonnée comme une autre Abscisse à la sienne, il est aisé de voir que ce qu'on auroit supposé être une Courbe, ne seroit que l'Hypothenuse d'un Triangle rectangle, dont une Abscisse & une Ordonnée quelconques seroient les deux autres côtés, comme

M.E.C.D. 2017

dans l'art. 716. Donc il faut que dans une Courbe, le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées ſoit inceſſamment variable.

762. Mais il faut en même temps qu'il ſoit *perpétuel*; c'eſt-à-dire, entre ces grandeurs toujours *conditionnées* de la même maniere. Ainſi ne pouvant être toujours le même entre les Abſciſſes & les Ordonnées, parce qu'il n'en réſulteroit qu'une ligne droite, il pourra être, par exemple, entre les Abſciſſes & les quarrés des Ordonnées, ou leurs cubes, &c. & alors il eſt variable, ce qui eſt évident & perpétuel, parce qu'il eſt toujours entre les Abſciſſes & les mêmes puiſſances des Ordonnées. On voit aſſez qu'il peut y avoir une infinité d'autres manieres de le rendre variable & perpétuel, & que chacune de ces manieres produira une différente eſpece de Courbe.

763. Il faut une Loi particuliere pour déterminer chaque rapport perpétuel, & l'expreſſion algébrique de cette Loi s'appelle l'*Equation de la Courbe*.

764. Toute variation demande quelque choſe d'invariable & de conſtant, qui ſoit comme le point fixe par rapport auquel ſe faſſe tout le mouvement de la variation. Donc parmi les grandeurs qui compoſent la Courbe, & qui ſont les Mm, ou celles qui y ont rapport, qui ſont les Pp, ou les Rm, il faut en choiſir quelques-unes qui ſeront ſuppoſées conſtantes, tandis que les autres varieront. Et ce choix eſt entiérement libre, parce que quelque choix que l'on faſſe, il n'en arrivera autre choſe, ſinon que la Courbe ſera différemment diviſée en ſes côtés, or cette diviſion eſt arbitraire. La plus ordinaire des trois ſuppoſitions & la plus commode eſt celle des Pp conſtans, moyennant quoi les Abſciſſes croiſſent ſelon la progreſſion arithmétique naturelle, tandis que les Ordonnées varient ſelon la loi quelconque preſcrite par l'Equation.

765. Le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées, exprimé par l'Equation de la Courbe, ſe maintient dans l'Infiniment petit, & dans l'Infini, c'eſt-à-dire, lorſque la Courbe n'a encore qu'une étendue infiniment petite, & lorſqu'elle en a une infinie,

M.E.C.D. 2017

infinie, ſi elle en a une telle. Car ce rapport eſt perpétuel, & d'ailleurs tout rapport peut être également entre des grandeurs finies, ou infiniment grandes, ou petites.

766. L'Axe & les Ordonnées ſont des lignes étrangeres à la Courbe, & ſans leſquelles on peut abſolument la concevoir. De-là il ſuit que la poſition de l'Axe par rapport à la Courbe eſt indifférente, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de rapporter la Courbe AMm à l'axe AB, on peut la rapporter à l'axe ab parallele au premier, ou à l'axe $\alpha\beta$ perpendiculaire à tous les deux, ou même à un autre axe qui leur ſoit oblique. Mais un axe étant poſé, il emporte la poſition des Ordonnées qui lui ſont toujours perpendiculaires, non par aucune néceſſité tirée de leur nature, mais par une ſuppoſition arbitraire qui a prévalu, parce qu'elle eſt plus ſimple & plus commode que ne ſeroit celle des Ordonnées obliques à une ligne droite commune, qu'on appelleroit alors *diametre*.

767. Puiſqu'il eſt indifférent à quel axe on rapporte une Courbe, on peut lui en concevoir deux en même temps. Ainſi ſi la Courbe AMm ſe termine au point β, on peut lui concevoir Aa & $\alpha\beta$ comme deux axes perpendiculaires l'un à l'autre, enſorte que la derniere des Ordonnées priſes ſur l'un ſera l'autre axe même. En ce cas-là les Abſciſſes & les Ordonnées priſes indifféremment ſur l'un ou l'autre, s'appellent *Coordonnées*. On appelle auſſi les deux axes *Conjugués*.

768. La Courbe AMm eſt concave vers l'axe AB, mais ſi on avoit pris ab pour axe, elle ſeroit convexe vers lui. Sa concavité vers AB vient de ce que les angles obtus ABC de ſes côtés ſont tournés vers AB, & par conſéquent les angles de contingence du côté oppoſé, ou vers ab. FIG. I.

Ce qui fait la concavité ou convexité de la Courbe vers l'axe.

769. Je ſuppoſe les Pp égaux. Si après le côté Mm, hypotenuſe du Triangle infiniment petit MRm, il vient un autre côté poſé en ligne droite avec Mm, il y aura un ſecond triangle égal & ſemblable à MRm, & les deux côtés conſécutifs ne feront point d'angle tourné ni vers AB, ni vers ab. Mais ſi le côté qui ſuit Mm ſe détourne de Mm, & s'abaiſſe vers AB, le côté Rm du ſecond triangle ſera moindre qu'il FIG. II.

M.E.C.D. 2017

n'étoit dans le premier, & en même temps les deux côtés *Mm* & le ſuivant ſeront entr'eux un angle obtus tourné vers *AB*. Or *Rm* eſt la différence de deux Ordonnées croiſſantes. Donc la Courbe eſt concave vers *AB* (768), lorſque les Ordonnées croiſſent, & que leurs différences décroiſſent. Par la raiſon contraire, elle ſeroit convexe vers *AB*, ſi les Ordonnées & leurs différences croiſſoient en même temps.

Et comme la Courbe *AMm* renverſée, c'eſt-à-dire, priſe de *m* vers *A*, eſt une Courbe dont les Ordonnées décroiſſantes ont des différences croiſſantes, & qu'elle eſt encore concave vers *AB*, il s'enſuit en général que la Courbe eſt toujours concave vers l'Axe, dont les Ordonnées ont une variation d'accroiſſement ou de décroiſſement contraire à celle de leurs différences, & toujours convexe, quand les Ordonnées & leurs différences ont la même eſpece de variation.

Rebrouſſement de la Courbe.

770. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré le changement de direction perpétuel qui fait l'eſſence de la Courbe, que comme appartenant à un mouvement direct, ou qui va toujours en avant, par exemple, à celui de la Courbe *AMm*, qui va toujours de *A* vers *B*. Mais quand un mouvement qui étoit direct, devient rétrograde ou rebrouſſant, c'eſt une autre eſpece de changement de direction, & il faut voir comment il peut appartenir à la Courbe.

Si un Point, qui a décrit une ligne droite, eſt conçu comme revenant exactement ſur ſes pas, il a le plus grand changement de direction qui ſoit poſſible; mais quant à la deſcription d'une ligne, ce changement de direction ne fait abſolument rien, car tout au plus le Point redécrit une ligne déja décrite. C'eſt la même choſe, ſi cette ligne eſt Courbe. Ainſi le plus grand changement de direction poſſible ne fait rien par lui-même à la Courbe ni à la courbure.

771. Je dis *par lui-même*, car il peut avoir quelque effet, ſi on y ajoute une condition, qui eſt, que le Point décrivant décrive par ſon mouvement rétrograde une ligne ſoit droite, ſoit courbe, exactement poſée ſur une ligne déjà décrite, ce qui la rendra double, car cela n'eût pas été ſans le mouvement

M.E.C.D. 2017

rétrograde, mais il n'y a encore rien de changé par-là à la ligne décrite. Pour tirer de-là quelque nouvel effet, il faut concevoir que le Point décrivant, ayant décrit par son mouvement direct une Courbe, retourne du dernier point où il étoit arrivé, non pas exactement sur ses pas, mais seulement vers le même côté d'où il étoit parti, & forme une nouvelle courbure ou *branche* de Courbe. La Courbe totale formée des deux branches, dont l'une a été produite par le mouvement direct, l'autre par le rétrograde, s'appelle *rebrouſſante*. Elle eſt continue, parce que le mouvement du Point décrivant n'a pas été interrompu.

772. Soit que l'on conſidere la Courbe en elle-même, c'eſt-à-dire, comme une Suite de côtés infiniment petits qui ſe détournent infiniment peu les uns des autres, ſoit qu'on la conſidere comme la Suite des extrémités de ſes Ordonnées infiniment peu diſtantes les unes des autres, & infiniment peu différentes en grandeur, il eſt clair que toutes les variations de la Courbe doivent être infiniment douces(683), & par conſéquent il ne s'y fera aucun changement ſans un Terme qui ſoit en même temps Terme & Origine, & Terme moyen ou commun (684).

773. Il n'entre dans la conſidération des Courbes que des Suites de lignes droites, ſoit finies, ſoit infiniment petites, réglées par quelque Loi, & par conſéquent il n'y a qu'à leur appliquer tout ce qui a été dit ſur les Suites de nombres. Toute la différence eſt qu'une Courbe eſt comme le réſultat de la combinaiſon ou complication de pluſieurs Suites différentes de lignes, de celles des Ordonnées, de celle de leurs diſtances, de celle de leurs différences, de celle des côtés, de celle des baſes ou des Sinus des angles de contingence, ou du moins de quelques-unes de toutes celles-là. Mais tout ce qui en arrive, c'eſt que les Termes par où ſe font les changemens des Courbes ſont ordinairement compliqués, & qu'il faut que chaque Suite en particulier y trouve également ce qui lui eſt néceſſaire.

774. Toute Courbe eſt naturellement infinie, c'eſt-à-dire,

M.E.C.D. 2017

d'un cours ou d'une étendue infinie. Car c'eſt une Suite dont le cours eſt abſolument infini, ou peut-être conçu comme infini (663).

775. Il entre dans la conſidération de toute Courbe des Suites ou ſimplement infinies ou infiniment infinies de grandeurs infiniment petites: & comme ce n'eſt que par ces grandeurs que la Courbe peut être connue ou conſidérée, il faut que ces Infiniment petits, inconnus & indéterminables par eux-mêmes, aient des rapports qui puiſſent être connus & déterminés. Donc de tout ce que nous avons dit ſur les Suites formées d'Infiniment petits dans la Théorie des Suites en général, on n'en peut appliquer aux Suites d'Infiniment petits qui entrent dans la conſidération des Courbes, que ce qui appartient aux Suites originairement formées d'Infiniment petits dont les rapports ſont déterminables.

776. Si une Courbe a un cours infini, elle nous échappe, & ne peut plus être décrite vers cette extrémité, préciſément comme les Suites infinies de nombres dont nous ne connoiſſons point les nombres infinis, ou en grandeur, ou en petiteſſe. Et comme ces Suites nous échappent, non ſeulement quand elles ont atteint les nombres infinis, mais infiniment plutôt, & dès qu'elles ſont parvenues aux Finis indéterminables, & même encore plutôt, ce que l'on voit dans la Suite naturelle, dont toutes les autres que nous connoiſſons ſont extraites: ainſi les Courbes qui ont un cours infini nous échappent, non ſeulement dès que ce cours eſt devenu infini, mais infiniment plutôt, & nous n'en pouvons connoître ou décrire que quelque portion finie qui peut toujours être plus grande, & par conſéquent eſt indéterminable.

777. Une Courbe d'un cours infini ne doit être conçue comme terminée que quand elle a tout le cours infini dont ſon Equation la rend capable, mais auſſi dès qu'elle l'a atteint, elle doit être conçue comme terminée.

Courbe devenue infiniment moins courbe.

778. Les variations de grandeur de toutes les différentes Suites poſſibles de nombres ſont analogues aux variations de direction de toutes les différentes Courbes poſſibles, ou les

M.E.C.D. 2017

peuvent repréſenter, & tout ce qu'on aura conçu des uns ſe peut concevoir des autres. Donc comme il y a des Suites de nombres qui ayant eu des variations de grandeur finies & déterminables, viennent à n'en avoir plus que d'infiniment petites, & par conſéquent indéterminables, il doit y avoir des Courbes qui ayant eu des variations de direction finies & déterminables dans des étendues finies, viennent à n'en avoir plus que d'infiniment petites dans de pareilles étendues. Et en effet il doit être poſſible que les angles de contingence qui ſont naturellement infiniment petits du 1er ordre, viennent dans certaines Suites où ils ſeront décroiſſans, à être infiniment petits du 2^d, du 3me, &c. puiſque tous ces angles ſont poſſibles (696). En ce cas, dès que ces angles ſeront du 2^d ordre, la variation de la direction des Courbes ſera infiniment moindre qu'elle n'étoit, ou, ce qui eſt le même, ces Courbes deviendront lignes droites, du moins phyſiquement, car quoiqu'en elles-mêmes & réellement elles varient encore de direction, elles n'en varieront plus de la maniere que nous connoiſſons, & auront infiniment moins de courbure, ce qui eſt équivalent à la rectitude. Tels ſont le paralléliſme ou la perpendicularité croiſſans ou décroiſſans des art. 709, 710, 711, 712.

779. Il n'y a aucune Suite infinie de nombres, qui ayant eu d'abord des variations finies, vienne dans un cours Fini déterminable à avoir une variation infiniment petite; & toute Suite qui vient à en avoir une pareille, ne l'a qu'après un cours infini moindre que ſon cours total, ou au moins après un cours fini ſi grand, qu'il en eſt indéterminable (596). Donc auſſi ſi une Courbe doit venir à n'avoir qu'une variation de direction infiniment petite dans des étendues finies, ou, ce qui eſt le même, devenir ligne droite, cela ne peut arriver au plutôt qu'après qu'elle aura eu un cours Fini indéterminable, & dans d'autres cas, après qu'elle aura eu un cours infini. Donc une Courbe ne peut devenir ligne droite, même phyſiquement, après un cours Fini déterminable.

M.E.C.D. 2017

SECTION X.

Des Variations & des Changemens des Courbes.

Conſidération d'une Courbe qui s'élevant toujours au-deſſus de ſon axe, tend ou arrive à lui devenir parallele, ſoit par un cours fini, ſoit par un cours infini.

FIG. II.

780. JE ſuppoſe la Courbe AMm, dont les Ordonnées PM, pm, ſont infiniment proches, ſont toujours diſtantes de la même quantité Pp. Je ſuppoſe auſſi que la Courbe s'éleve au deſſus de ſon axe AB, & que par conſéquent les PM ſont croiſſantes, mais que leurs différences Rm ſont décroiſſantes, & que par conſéquent la Courbe s'éleve toujours de moins en moins.

Donc dans chaque petit Triangle MRm, Rm, qui repréſente le mouvement vertical de chaque côté correſpondant Mm, eſt toujours plus petit par rapport à $MR = Pp$, qui repréſente un mouvement horiſontal conſtant.

781. Il ne s'enſuit pas de-là que Rm n'ait pû être d'abord ou vers l'origine A de la Courbe plus grand que MR, mais ſeulement que Rm décroît toujours, $MR = Pp$ étant conſtant. Et ſi Rm a été d'abord plus grand que MR, il viendra à lui être égal (686), après quoi il ſera toujours plus petit.

782. Puiſque Rm, ou le mouvement vertical décroît toujours, chaque côté Mm eſt toujours plus oblique à l'axe AB, ou, ce qui revient au même, chaque Mm prolongé juſqu'à un point T de l'axe, y fait toujours un angle MTP plus aigu.

783. C'eſt dans cette obliquité croiſſante que conſiſte la variation de la poſition des côtés Mm par rapport à l'axe.

784. Une Courbe qui s'éleve toujours de moins en moins au deſſous de ſon axe, tend à ne s'élever plus, & par conſéquent à avoir un côté parallele à l'axe, qui ſera le plus oblique qu'il ſe puiſſe, après que tous les précédens l'ont toujours été de plus en plus. Donc le Terme où la Courbe tend eſt le paralléliſme.

785. Il ſeroit naturel de concevoir que ſon Origine a

M.E.C.D. 2017

été un côté perpendiculaire à l'axe au point *A*, mais cela n'eſt pas abſolument néceſſaire. Ce premier côté peut avoir été oblique à l'axe, mais il doit l'avoir été moins que tous les ſuivans.

786. Quand la Courbe arrive à un côté parallele, les deux Ordonnées qui lui répondent ſont égales. Ces deux Ordonnées égales, conſidérées dans le Fini, c'eſt-à-dire, comparées à quelque autre Ordonnée finiment diſtante d'elles, n'en ſont qu'une à cauſe de leur proximité infinie, mais conſidérées dans l'Infini, c'eſt-à-dire, en tant qu'infiniment proches, elles ſont toujours deux.

787. Donc leur différence Rm eſt nulle, & la Suite décroiſſante des Rm qui étoient originairement des $\frac{1}{\infty}$, eſt arrivée ou à zero abſolu, ou à $\frac{1}{\infty^2}$, ou à quelque Infiniment petit inférieur.

788. Si la Suite des Rm eſt arrivée à zero abſolu, les deux Ordonnées correſpondantes étant abſolument égales, la Courbe eſt arrivée au paralléliſme abſolu & rigoureux. Mais ſi la Suite des Rm n'eſt arrivée qu'à $\frac{1}{\infty^2}$, les deux Ordonnées qui ont cette différence, ſont infiniment moins différentes que les précédentes qui l'étoient infiniment peu, & par conſéquent ſont *cenſées* égales, & la Courbe parallele. Mais enfin elle pourroit réellement l'être davantage. Ce qui revient au paralléliſme ſuſceptible de plus & de moins des art. 709, 710, 711; à plus forte raiſon cela ſeroit-il vrai, ſi la Suite des Rm ſe terminoit par $\frac{1}{\infty^3}$ ou $\frac{1}{\infty^4}$, &c.

789. La Suite des Rm, terminée par 0, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, étoit ou ſimplement infinie, ou infiniment infinie. Si c'eſt le 1er, la Courbe eſt arrivée au paralléliſme par un cours fini, ou n'a eu juſque là qu'une étendue finie (759). Si c'eſt le 2^d^, la Courbe eſt arrivée au paralléliſme par un cours infini (759) & a eu un axe AB infini.

790. Lorſque la Suite des Rm, terminée par 0, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, eſt ſimplement infinie, la ſomme en eſt finie (613).

M.E.C.D. 2017

Donc l'Ordonnée PM, qui répond au côté parallele, & qui eſt la ſomme de cette Suite des Rm, eſt finie. Donc la Courbe arrivée au paralléliſme par un cours fini (789), n'y peut avoir qu'une Ordonnée finie.

791. Si à l'origine de la Courbe, qui eſt arrivée au paralléliſme par un cours fini, les Rm ont été plus petits que les Pp, l'Ordonnée PM qui répond au côté parallele eſt plus petite que l'Abſciſſe AP correſpondante, puiſque cette AP eſt la ſomme de tous les Pp conſtans qui ſont en même nombre infini que les Rm, & qui dès le commencement ont été plus grands. Mais ſi les Rm ont été d'abord plus grands que les Pp, ſelon l'art. 781, il eſt poſſible que PM, qui répond au côté parallele, ſoit plus grande que AP correſpondante. Cela eſt poſſible, & non pas néceſſaire, car les Rm, quoique d'abord plus grands que les Pp, peuvent avoir été dans la ſuite ſi décroiſſans, que leur ſomme ſera moindre que celle des Pp. Puiſque PM peut être moindre ou plus grande que AP, il eſt évident qu'elles peuvent être égales.

792. Lorſque la Suite décroiſſante des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, eſt infiniment infinie, la ſomme en eſt infinie (635). Donc en ce cas la Courbe qui arrive au paralléliſme par un cours infini, & a un axe infini (789), a auſſi une Ordonnée infinie.

Il eſt vrai que cette démonſtration ſuppoſe que la Suite des Rm ait été originairement formée de Rm, dont les rapports étoient déterminables (631), mais on eſt toujours ici, & on ſera toujours dans cette ſuppoſition (775), & il ne ſera plus néceſſaire d'en avertir.

793. Une Suite ſimplement infinie de $\frac{1}{\infty}$, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, a une infinité de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité de $\frac{1}{\infty^2}$ (613). Mais c'eſt lorſqu'on ſuppoſe qu'elle a le même nombre infini de grandeurs que la Suite naturelle : or elle en peut avoir une infinité moindre, ſelon tel rapport fini qu'on voudra, & par conſéquent on peut concevoir qu'elle n'a que l'infinité de ſes $\frac{1}{\infty}$, & ſe termine à ſon premier $\frac{1}{\infty^2}$, & ſa ſomme n'en eſt

M.E.C.D. 2017

eſt pas moins finie. Or il eſt néceſſaire de le concevoir ainſi, quand la Suite des $Rm = \frac{1}{\infty}$ répond ou eſt liée à une Courbe dont elle repréſente les différences des Ordonnées. Car ſi on laiſſe à cette Suite des Rm ſon infinité de $\frac{1}{\infty^2}$, la Courbe arrivée au paralléliſme par un cours Fini déterminable dès le premier $\frac{1}{\infty^2}$, continue donc à être parallele tant que dure l'infinité des $\frac{1}{\infty^2}$; c'eſt-à-dire, que la Courbe eſt parallele à ſon axe pendant un autre cours fini, & par conſéquent eſt ligne droite après un cours Fini déterminable. Or cela ne ſe peut (779). Donc la Suite des Rm, parce qu'elle eſt liée à une Courbe, doit être conçue comme terminée à ſon premier $\frac{1}{\infty^2}$, & la Courbe terminée auſſi, *quant à préſent*, à un ſeul côté parallele. De plus (777) il faut concevoir une Courbe, & par conſéquent auſſi un certain cours d'une Courbe terminé dès qu'il eſt arrivé au premier Infiniment grand ou petit dont il eſt capable.

794. Si la Suite des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$ eſt infiniment infinie, elle a une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty^2}$ (613 & 628), dans la ſuppoſition que le nombre de ſes grandeurs eſt $= \infty^2$. Mais comme il peut être de ce même ordre, & moindre ſelon tel rapport fini qu'on voudra, & que d'ailleurs la Suite des Rm eſt liée à une Courbe, il faut concevoir cette Suite terminée à ſon premier $\frac{1}{\infty^2}$, ce qui la laiſſe encore infiniment infinie, & par conſéquent la Courbe eſt arrivée par un cours infini à un ſeul côté parallele où elle ſe termine, & auquel répond une Ordonnée infinie.

795. En ce cas, ſi les Rm ont été d'abord égaux aux Pp, ou moindres, il eſt viſible que la derniere PM infinie eſt moindre que ſon AP correſpondante, qui eſt l'axe infini. Mais quand même les Rm auroient été d'abord plus grands que les Pp, cela ſeroit encore. Car dans cette ſuppoſition les Rm, toujours décroiſſans, ont dû venir à un $Rm = Pp$, ce

M.E.C.D. 2017

qui n'a pu arriver qu'après un cours fini de la Courbe, puiſqu'alors elle n'eſt pas parallele, & qu'elle ne l'eſt que quand elle a un cours infini (789). Donc à ne conſidérer la Courbe que comme ayant ſon origine au point où $Rm = Pp$, ſa derniere PM infinie eſt moindre que ſon AP. Maintenant à la reprendre depuis ſa premiere & vraie origine juſqu'au point où $Rm = Pp$, on a à ce point une PM finie plus grande que ſon AP pareillement finie, & parce qu'en ajoutant cette PM finie à la PM infinie, & l'AP finie à l'axe infini, on ne fait rien, la derniere PM eſt toujours moindre que l'axe infini.

796. Donc l'axe infini étant ſuppoſé $= \infty$, ce qui ſuffit toujours, la derniere PM d'une Courbe arrivée au paralléliſme par un cours infini, eſt toujours moindre que ∞, ou de quelque ordre radical, tel que $\infty^{\frac{1}{n}}$, ou $\infty^{\frac{n}{m}}$.

797. On a vu que la Suite des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, eſt & en elle-même, & comme liée à une Courbe, indifférente entre être ſimplement infinie, ou infiniment infinie. Mais ſi elle ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$, elle perdra par ſa liaiſon avec une Courbe cette indifférence qu'elle auroit toujours par ſa nature. Car comme elle ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$, elle ne peut ſe terminer plutôt qu'au premier $\frac{1}{\infty^3}$, & par conſéquent elle a tous ſes $\frac{1}{\infty^2}$ auſſi-bien que tous les $\frac{1}{\infty}$. Si elle eſt ſimplement infinie, la Courbe qui arrive au paralléliſme par un cours Fini déterminable, eſt donc encore parallele ou ligne droite pendant un autre cours Fini déterminable : or cela ne ſe peut (779). Donc la Suite des Rm d'une Courbe terminée par $\frac{1}{\infty^3}$ ne peut être qu'infiniment infinie, ou la Courbe dont les Rm ſe terminent par $\frac{1}{\infty^3}$, a un cours infini

798. La Suite infiniment infinie des Rm, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, n'a qu'une ſomme finie (636). Donc la derniere PM de la Courbe n'eſt que finie, tandis que l'axe AB eſt infini.

M.E.C.D. 2017

799. Si on connoît la grandeur dont doit être cette derniere $P\,M$ finie, que l'on tire perpendiculairement sur l'axe une ligne égale $\alpha\beta$, & par son extrémité β une ligne $a\,b$ parallele à $A\,B$, la Courbe $A\,M\,m$ qui s'élevera toujours au-dessus de son axe, ne pourra cependant s'élever jusqu'à la parallele $a\,b$ que par un cours infini. On appelle la ligne $a\,b$ ainsi conditionnée, *Asymptote* de la Courbe.

Cas où cette Courbe a une Asymptote parallele à l'axe. Ce que c'est que l'Asymptotisme en général.

800. Donc une Courbe à laquelle répond une Suite de $R\,m$, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, a toujours une Asymptote, au lieu qu'elle n'en auroit point, si la Suite des $R\,m$, quoiqu'infiniment infinie, étoit terminée par $\frac{1}{\infty^2}$, car la derniere $P\,M$ seroit infinie aussi-bien que l'axe (792).

801. L'axe infini & la derniere $P\,M$ étant composés du même nombre infiniment infini, l'un de $P\,p$, & l'autre de $R\,m$, il est visible qu'en ce cas l'Asymptotisme vient de ce que de deux mouvemens, l'un horisontal, l'autre vertical, qui ont été conduits par le même nombre de degrés, l'un a une somme totale infinie, & l'autre une seulement finie, & qu'en général, toutes les fois que de ces deux mouvemens, l'un ne fera qu'une somme finie, tandis que l'autre en fera une infinie, il y aura Asymptotisme.

802. Comme il est fort naturel & fort ordinaire que de deux Suites infinies, composées du même nombre de grandeurs, l'une ait une somme infinie, & l'autre une finie, l'Asymptotisme n'a donc rien de merveilleux.

803. Puisque la Suite infiniment infinie des $R\,m$, terminée par $\frac{1}{\infty^3}$, n'a qu'une somme finie, elle n'a qu'un nombre infini de $R\,m = \frac{1}{\infty}$: car si elle en avoit un nombre infiniment infini, elle auroit une somme infinie (635). Donc elle a un nombre simplement infini de $\frac{1}{\infty}$, & un nombre infiniment infini de $\frac{1}{\infty^2}$. Donc la Courbe arrive au paralléliſme par un cours fini, & est parallele ou ligne droite pendant un cours infini. Mais le cours fini de la Courbe, pendant lequel seulement elle sera courbe, sera indeterminable (779).

M.E.C.D. 2017

Les art. 521, 522, 523, 524, fourniſſent un exemple ſenſible de cette vérité qui peut paroître paradoxe.

Si l'on conçoit diſpoſées ſur un axe des Ordonnées qui ſoient comme les grandeurs $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, &c. $\frac{\infty}{\infty} = 1$, & ſéparées par de petits intervalles finis égaux, & que de l'extrémité de chaque Ordonnée à l'extrémité de la ſuivante, on tire une ligne droite, il ſe formera un Poligone rectiligne infini, dont chaque côté ſera toujours plus oblique à l'axe. Mais il n'y aura qu'un nombre Fini indéterminable de ces Ordonnées qui aient des différences finies, & toutes les autres en nombre infini n'auront que des différences infiniment petites. Donc les côtés du Poligone ne ſeront obliques à l'axe que pendant un cours fini, mais indéterminable, du Poligone, après quoi ils ſeront tous paralleles à l'axe, ou diſpoſés bout à bout en ligne droite pendant un cours infini. Il eſt clair que pour changer ce Poligone rectiligne en Courbe qui aura le même cours infini, & qui ne ſera courbe que pendant un cours Fini indéterminable, il n'y a qu'à concevoir entre les Ordonnées $\frac{0}{1}$ & $\frac{1}{2}$, entre $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$, &c. dont les intervalles ou diſtances ont été ſuppoſées finies, une infinité d'Ordonnées intermédiaires, ce qui ne changera rien au reſte.

804. La Courbe dont la Suite des $R\,m$ ſe termine par $\frac{1}{\infty^3}$ eſt donc parallele, dès qu'elle a atteint le premier $R\,m = \frac{1}{\infty^2}$, ce qu'elle fait par un cours Fini indéterminable, après quoi elle continue d'être parallele ou ligne droite pendant un cours infini, c'eſt-à-dire, tant que durent les $R\,m = \frac{1}{\infty^2}$, & enfin quand elle arrive à $\frac{1}{\infty^3}$, elle devient encore plus parallele qu'elle n'étoit, ce qui revient à l'art. 788.

805. La Courbe n'a tout le paralléliſme dont elle eſt capable, que quand elle eſt arrivée à $\frac{1}{\infty^3}$, & par conſéquent on ne la doit concevoir terminée que là. Mais auſſi on doit la concevoir terminée dès qu'elle y eſt arrivée (777), & par conſéquent elle ne doit avoir que deux dernieres Ordonnées

M.E.C.D. 2017

infiniment proches, dont la différence ſoit $= \frac{1}{\infty^3}$, ou, ce qui eſt le même, elle n'a qu'un ſeul côté parallele de ce dernier paralléliſme, au lieu qu'elle en a précédemment une infinité d'infinités paralleles d'un moindre paralléliſme, & toujours le même, ou d'une même eſpece.

806. Quoiqu'elle ſoit *cenſée* ligne droite pendant un cours infini, elle ne l'eſt pourtant pas abſolument & en elle-même. Car ſi on concevoit une ligne droite infinie parallele à l'axe AB, on concevroit toutes ſes Ordonnées infiniment proches comme abſolument égales, & ayant des différences $= 0$, & non des différences $= \frac{1}{\infty^2}$. Donc la Courbe tient encore de ſa nature de courbe, & n'eſt point abſolument droite. Et en effet chaque infinité de $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ a une ſomme $= \frac{1}{\infty}$, d'où il ſuit que quand la Courbe eſt devenue ce que nous appellons n'être que *cenſée* ligne droite, il y a aux deux extrémités de chaque partie finie de ſon cours, deux Ordonnées dont la différence eſt $= \frac{1}{\infty}$, ce qui n'empêche pas la rectitude, & ne convient pas cependant à la ligne droite préciſément priſe comme telle. Et enfin ſi l'on conçoit les deux Ordonnées poſées aux deux extrémités du cours infini pendant lequel les Rm ont été $= \frac{1}{\infty^2}$, la différence de ces deux Ordonnées eſt finie, puiſqu'elle eſt la ſomme d'une infinité d'infinités de $\frac{1}{\infty^2}$, ou d'une infinité de $\frac{1}{\infty}$, & cette propriété ne convient pas à une droite qui le ſeroit à toute rigueur. Tout cela revient aux art. 709, &c. 788.

807. Puiſque la Courbe n'eſt courbe à la maniere ordinaire, & que nous connoiſſons que dans un cours fini, elle atteint ſon Aſymptote dès qu'elle a fait ce cours fini, car quand elle eſt ligne droite elle n'eſt plus que cette Aſymptote même. Mais elle n'eſt que *cenſée* atteindre ſon Aſymptote ou la devenir après ce cours fini, car abſolument ou à toute rigueur elle ne la devient pas encore. Cependant il eſt aiſé de voir que cela ſuffit pour faire évanouir entierement tout le ſurprenant de l'Aſymptotiſme.

M.E.C.D. 2017

808. Si la Suite des Rm ſe termine par $\frac{1}{\infty^4}$, & en général par $\frac{1}{\infty^n}$, n étant fini, & plus grand que 2, la Courbe a un cours infini, une derniere Ordonnée finie, & une Aſymptote, & elle eſt courbe ſeulement pendant un cours Fini indéterminable, & ligne droite; mais non abſolument & à la rigueur, pendant un cours infini. Il eſt très-aiſé de le voir.

809. Plus dans $\frac{1}{\infty^n}$ dernier Rm, l'expoſant n ſera grand; plus la Courbe, dont l'axe eſt toujours ſuppoſé le même Infini, ſera courbe pendant un petit cours Fini indéterminable; & plus le cours infini, pendant lequel elle ſera ligne droite, ſera grand, plus auſſi elle aura de paralléliſmes différens, & toujours plus exacts, depuis le premier, qui ſe fera toujours dès qu'elle aura atteint le premier $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ juſqu'au dernier qui ſe fera au premier & unique $\frac{1}{\infty^n}$.

Conſidération de la Courbe arrivée au paralléliſme par un cours fini, & qui enſuite continue ſon cours, ſoit en continuant de s'élever au-deſſus de ſon axe, ſoit en redeſcendant vers lui.

810. Voilà tout ce qui regarde la Courbe arrivée au paralléliſme par un cours infini; & il eſt viſible qu'en ce cas, c'eſt une Suite infinie ſans changement (666). Mais ſi elle n'eſt arrivée au paralléliſme que par un cours Fini déterminable, il faut voir ce qu'elle peut devenir après.

La Courbe avoit monté par rapport à ſon axe, & le côté parallele où elle eſt arrivée n'eſt ni montant ni deſcendant. Donc c'eſt un Terme moyen (671) qui par conſéquent (673) ne détermine pas néceſſairement la Courbe à redeſcendre vers ſon axe, mais la laiſſe indifférente entre redeſcendre ou continuer de monter. Il n'y a rien de néceſſaire, ſi non que les Rm deviennent croiſſans, puiſque leur Suite eſt terminée par 0, ou par $\frac{1}{\infty^2}$, la moindre grandeur qu'elle puiſſe avoir.

811. Je ſuppoſe que la Courbe tedeſcend. Ses Ordonnées ſont donc décroiſſantes, & comme leurs différences Rm ſont croiſſantes (810), la Courbe eſt encore concave vers ſon axe (769), ainſi qu'elle l'étoit dans ſon premier cours.

812. Donc l'Ordonnée qui répond au côté parallele eſt

M.E.C.D. 2017

plus grande que toutes celles des deux cours, l'un montant, l'autre deſcendant, au lieu que dans le cours infini il n'y avoit que la derniere qui fût la plus grande de toutes.

813. De plus, les Rm qui repréſentent dans le ſecond cours le mouvement vertical deſcendant, étant croiſſantes, la Courbe deſcend de plus en plus, au lieu qu'auparavant elle montoit de moins en moins.

814. De ce que les Rm croiſſent, les Pp ou MR étant conſtans, il ſuit que dans le Triangle MRm l'angle RMm eſt toujours plus grand, & par conſéquent le côté Mm moins oblique ſur MR, & la Courbe moins oblique à ſon axe, & que par conſéquent elle tend à lui être perpendiculaire. On n'a qu'à s'imaginer la Courbe AMm renverſée, ou priſe de m vers A.

815. La Courbe doit arriver à un côté perpendiculaire, ou du moins à un côté moins oblique que tous ceux de ce ſecond cours; ce qui eſt la même choſe que les art. 784 & 785. renverſés.

816. Le côté parallele & le perpendiculaire ſont les Termes naturels de la poſition oblique des côtés de la Courbe par rapport à l'axe, & un côté plus ou moins oblique que tous les précédens du même cours, n'en eſt qu'un Terme arbitraire (643). c'eſt-à-dire, fixé & déterminé par l'Equation de la Courbe. Et comme les Termes arbitraires peuvent être ſubſtitués aux naturels, il eſt poſſible que la Courbe, qui dans ſon ſecond cours tend à la perpendicularité, n'arrive qu'à un côté moins oblique que les précédens, & y termine ce ſecond cours.

817. Soit que dans ce ſecond cours la Courbe arrive au Terme naturel ou à un arbitraire, elle ne peut avoir beſoin d'un cours infini pour y arriver. Car ce Terme quelconque ſera un côté poſé ſur l'axe dont la Courbe dans le cours qu'on lui ſuppoſe ſe rapproche toujours; donc ſi elle avoit beſoin d'un cours infini pour arriver au Terme, ſoit naturel, ſoit arbitraire, l'axe ſeroit Aſymptote de la Courbe. Or tout le mouvement vertical deſcendant, dont elle a beſoin pour

M.E.C.D. 2017

arriver à ſon axe, n'eſt que l'Ordonnée qui répond au côté parallele d'où la Courbe eſt partie, & cette Ordonnée n'eſt que finie. Donc il faudroit pour l'Aſymptotiſme que le mouvement horiſontal fût infini (801). S'il l'étoit, il ſeroit croiſſant par rapport au vertical, & ici tout au contraire, c'eſt le vertical qui eſt croiſſant par rapport à l'horiſontal. Donc la Courbe n'arrivera à ſon Terme que par un cours fini.

Cas où la Courbe en redeſcendant, arrive dans ce ſecond cours à la perpendicularité, Terme naturel.

818. Je ſuppoſe que la Courbe arrive au Terme naturel, l'arbitraire viendra enſuite. Quand la Courbe arrive à un côté perpendiculaire, ſon mouvement horiſontal eſt devenu abſolument nul, & le vertical ſubſiſte ſeul, au lieu que quand la Courbe étoit arrivée à un côté parallele, c'étoit le contraire; ou, ce qui revient au même, l'angle RmM du petit Triangle MRm eſt $=$ o dans la perpendicularité, au lieu que dans le paralléliſme, c'étoit l'angle RMm.

819. Dans le paralléliſme le côté Mm eſt néceſſairement déterminé à être $= MR = Pp$, & dans la perpendicularité il eſt ſeulement déterminé à être perpendiculaire ſur MR, mais ſans aucun rapport néceſſaire de grandeur à MR, de ſorte que Mm peut être plus grand ou plus petit que les Pp conſtans ſelon une raiſon quelconque, ou leur être égal.

820. Il y a plus : le côté perpendiculaire n'a point de MR ou Pp qui lui réponde, au lieu que tout autre côté oblique ou parallele en a un. Car ſi le côté perpendiculaire commence la Courbe au point A, il eſt viſible que le premier Pp appartient au côté qui ſuit le perpendiculaire, & que celui qui appartiendroit au côté perpendiculaire, & qui devroit être à la gauche du point A, n'exiſte point. Ce ſera le même raiſonnement ſi le côté perpendiculaire termine un cours de la Courbe, & même quand on le ſuppoſera entre deux cours conſécutifs.

Cas où la Courbe, en continuant de monter, tend à la perpendicularité, après avoir eu une inflexion.

821. Selon la diviſion de l'art. 810, la Courbe AMm arrivée au paralléliſme, peut continuer de monter, les Rm étant toujours néceſſairement croiſſans. En ce cas, ſes Ordonnées étant toujours croiſſantes, & leurs différences Rm l'étant devenues, elle montera toujours de plus en plus, au lieu

M.E.C.D. 2017

lieu qu'auparavant elle montoit de moins en moins, ce qui eſt un changement poſſible (648).

822. Il n'y a point là de plus grande Ordonnée, puiſqu'elles vont toujours en croiſſant.

823. La Courbe dans ſon ſecond cours tend auſſi à la perpendicularité, puiſque les Rm croiſſent.

824. De ce que les Rm croiſſent auſſi-bien que les Ordonnées, il ſuit que la Courbe devient convexe vers ſon axe AB, de concave qu'elle étoit (769). Elle devient la Courbe de la Fig. III.

825. Toute Courbe étant une Suite dont les variations ſont infiniment douces (683), la Courbe n'a pu paſſer de la concavité à la convexité vers le même axe ſans paſſer par un Terme ou moyen ou commun. Comme la concavité d'une Courbe vers un axe conſiſte dans l'*obverſion* de ſes angles obtus vers cet axe, il faut que cette obverſion vienne à ſe faire du côté oppoſé, afin que la Courbe devienne de concave convexe. Si l'obverſion peut ne ſe faire ni d'un côté ni de l'autre, ce ſera là un Terme moyen. Or cela ne peut arriver que par deux côtés conſécutifs exactement poſés bout à bout en ligne droite; alors l'angle obtus qu'ils feront entr'eux, étant exactement de 180, ou nul, car cela revient au même, il ne ſera tourné ni vers l'axe AB, ni du côté oppoſé. On peut même concevoir qu'il y a deux angles de 180, dont l'un eſt tourné vers AB, & l'autre du côté oppoſé. Ainſi ce même Terme peut être conçu & comme moyen, & comme commun, & cela le rend unique pour le paſſage de la concavité à la convexité. En effet il eſt impoſſible d'en imaginer un autre. Donc dans la ſuppoſition préſente, la Courbe qui dans ſon premier cours eſt arrivée au paralléliſme en montant, & continue de monter dans le ſecond, a terminé ſon premier cours par deux côtés conſécutifs Mm & $m\mu$ paralleles à l'axe, & poſés exactement bout à bout en ligne droite.

Le paſſage de la concavité à la convexité vers le même axe, ou au contraire, s'appelle *Inflexion*, & le point où il ſe

M.E.C.D. 2017

Inflexion. fait *point d'inflexion*, car les deux côtés infiniment petits ne ſont qu'un point dans le Fini.

826. A deux côtés paralleles répondent néceſſairement trois Ordonnées égales infiniment proches, dont par conſéquent les deux différences Rm ſont chacune $= o$.

827. Un côté parallele étant $= Pp$ (819), & les Pp étant conſtans, les deux côtés paralleles où ſe fait l'Inflexion ſont égaux.

828. Et même indépendamment de la ſuppoſition arbitraire des Pp conſtans, comme l'eſſence de l'Inflexion demande qu'elle ſe faſſe par deux côtés exactement poſés en ligne droite, il faudroit toujours les concevoir égaux, parce qu'il n'y auroit nulle raiſon de les concevoir inégaux.

Cas où la Courbe eſt arrivée dans ſon premier cours, non au paralléliſme, Terme naturel de l'obliquité croiſſante, mais ſeulement au Terme arbitraire, qui ſera une certaine obliquité plus grande que toutes les précédentes. Inflexion.

829. Si l'on ſuppoſe que la Courbe, au lieu d'être arrivée à la fin de ſon premier cours au Terme naturel de l'obliquité croiſſante, qui eſt le côté parallele, ne ſoit arrivée qu'à un Terme arbitraire qui ſera un côté plus oblique ſeulement que tous les précédens, & moins que les ſuivans, puiſqu'il ſera Terme & Origine, il s'enſuivra, 1°. Que les Rm décroiſſans arriveront à un *plus petit*, & ſeront enſuite croiſſans. 2°. Que la Courbe ne pourra redeſcendre vers l'axe, parce qu'elle n'aura paſſé par aucun Terme qui ſoit moyen entre monter & deſcendre, ou commun, & que par conſéquent la Courbe continuera de monter, & ſes Ordonnées d'être croiſſantes. Donc la Courbe concave, tant que les Rm étoient décroiſſans, ſera enſuite convexe. Or elle ne peut paſſer de la concavité à la convexité que par l'Inflexion (825). Donc ſi la Courbe, au lieu d'arriver à un côté parallele, arrive à un côté le plus oblique de tous les précédens, qui ſoit Terme arbitraire de ſon obliquité croiſſante, elle a néceſſairement une Inflexion en ce même point, & elle pouvoit n'en avoir pas, lorſqu'elle arrivoit au côté parallele.

830. Donc lorſque la Courbe arrive à un Terme arbitraire d'obliquité croiſſante, elle arrive à deux côtés égaux (828) exactement poſés bout à bout en ligne droite, au lieu

M.E.C.D. 2017

qu'en arrivant au Terme naturel elle peut n'arriver qu'à un ſeul côté.

831. Quand elle arrive au Terme arbitraire, il n'y a point de plus grande Ordonnée, non plus que quand elle arrive au Terme naturel avec Inflexion (822).

832. Quand la Courbe, dont l'obliquité étoit croiſſante, arrive ſoit au Terme naturel de cette obliquité avec Inflexion, ſoit au Terme arbitraire, il y a trois Ordonnées infiniment proches, qui ſont égales, ſi l'Inflexion eſt parallele, ou en progreſſion arithmétique, ſi l'Inflexion eſt oblique, & alors les trois Ordonnées ſont comme 1, 2, 3, à cela près que leurs différences ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent dans les deux cas leurs différences ſont égales, toutes deux zero dans le 1er, & dans le 2^d^ deux $\frac{1}{\infty}$ égaux.

833. Comme les termes arbitraires font le même effet que les naturels, quant au renverſement ou aux changemens des Suites, la Courbe arrivée à ſon Terme arbitraire d'obliquité croiſſante ne peut plus après cela qu'avoir une obliquité décroiſſante, ou tendre à la perpendicularité.

834. Quand la Courbe arrive à un ſeul côté parallele, ce côté eſt un Terme ſimple d'obliquité croiſſante, mais quand elle arrive à deux côtés, ſoit paralleles, ſoit obliques, ils ſont en même temps Termes d'obliquité croiſſante, & de concavité vers l'axe, & par conſéquent ils ſont un Terme compliqué.

Cas du rebrouſſement.

835. Puiſqu'une Courbe peut rébrouſſer, elle le peut étant arrivée au paralléliſme. Il faut alors un Terme ou moyen ou commun entre le cours direct & le rétrograde. Un Terme moyen, ce ſeroit un, ou, ſi l'on veut, deux côtés qui n'appartiendroient ni au cours direct ni au rétrograde, mais cela eſt impoſſible, puiſqu'il n'y a point de mouvement ſans direction. Reſte donc que l'on conçoive un Terme commun qui appartiendra au cours direct, & au rétrograde en même temps : & pour cela il faut néceſſairement concevoir que ſur le dernier côté du cours direct ſe poſe exactement le premier du rétrograde, moyennant quoi ce côté double, qui n'en vaut

M.E.C.D. 2017

qu'un, appartient en même temps aux deux cours. Il eſt effectivement néceſſaire, ſelon l'art. 771, que la Courbe rebrouſſante parte du dernier point de ſon cours direct pour rebrouſſer, & ici le côté double n'eſt que ce point commun aux deux cours.

836. Les deux côtés ſont égaux, puiſqu'ils ſont le même Terme commun.

837. Comme la Courbe arrivée au paralléliſme eſt indifférente entre redeſcendre ou continuer de monter (810),
FIG. IV. la Courbe *AMm* arrivée aux deux côtés *Mm* & *mμ* paralleles & rebrouſſans, peut ou redeſcendre vers *AB* comme par la branche *MC*, ou continuer de monter par la branche *MD*. Tout ce qu'il y a de néceſſaire, c'eſt que dans ſon ſecond cours elle tende à la perpendicularité, comme dans la Fig. III, & par la même raiſon.

838. Au lieu que la Courbe rebrouſſante redeſcend dans la Fig. IV, par la branche *MC* extérieure à la premiere branche *AMm*, elle peut redeſcendre par une autre branche intérieure, & alors il faudra concevoir le côté rebrouſſant *mμ* poſé ſous le direct *Mm*, au lieu que dans la Figure il eſt poſé deſſus, mais cela ne change abſolument rien.

839. Si la Courbe redeſcend par une branche, ſoit intérieure à *AMm*, ſoit extérieure comme *MC*, elle eſt concave vers *AB* comme dans ſon premier cours, puiſque ſes Ordonnées ſont décroiſſantes, & leurs différences croiſſantes (811). Si la Courbe continue de monter par la branche *MD*, elle eſt convexe vers *AB*.

839. Il pourroit donc ſembler que dans ce ſecond cas il y auroit rebrouſſement & inflexion, mais il n'y a réellement que rebrouſſement. L'un & l'autre doivent être quelque choſe de réel & d'indépendant de ce que la Courbe ſera rapportée à un axe ou à un autre, ce qui eſt arbitraire. Il eſt bien vrai que la Courbe rebrouſſante *AMD*, rapportée à l'axe *AB*, eſt concave vers cet axe dans la branche *AM*, & convexe dans la branche *MD*; mais ſi on la rapporte à un axe perpendiculaire à *AB*, elle ſera dans ſes deux branches concave

M.E.C.D. 2017

ou convexe vers ce nouvel axe, & par conſéquent n'aura point d'inflexion par rapport à lui, mais elle ſera toujours rebrouſſante. Donc elle n'a réellement que rebrouſſement. Si on rapporte la Courbe de la Fig. III à un axe perpendiculaire à AB, on verra qu'elle eſt toujours concave vers ce nouvel axe dans une de ſes branches, & convexe dans l'autre, ce qui marque qu'elle a réellement inflexion.

840. Dans le Rebrouſſement fait par deux côtés paraleles exactement poſés l'un ſur l'autre, il y a comme dans l'Inflexion trois Ordonnées égales; mais au lieu que dans l'inflexion les trois Ordonnées ſont poſées de ſuite, dans le rebrouſſement la 3me va ſe poſer ſur la 1re, de ſorte que la 3me & la 1re ſont exactement confondues en une ſeule.

841. Cependant comme l'idée de rebrouſſement demande que ces deux Ordonnées confondues en une ſeule ſoient deux, & non pas une ſeule, il faut concevoir dans le rebrouſſement parallele, auſſi-bien que dans l'inflexion parallele, trois Ordonnées égales, dont les différences ſoient chacune $= 0$, comme dans l'art. 832.

842. Comme la Courbe peut avoir une inflexion oblique auſſi-bien que parallele, elle peut avoir un rebrouſſement oblique auſſi-bien que parallele, car il eſt clair que les deux côtés rebrouſſans, exactement poſés l'un ſur l'autre, ſont indifférens à toute poſition à l'égard de l'axe.

843. En ce cas il faut, comme dans celui du rebrouſſement parallele (837), que la Courbe ou continue de monter par la branche MD, ou redeſcende par la branche MC, ſoit extérieure à la branche directe AM, comme dans la Fig. IV, ſoit intérieure. Et pour s'en convaincre encore plus, il n'y a qu'à concevoir la branche rebrouſſante, ſoit MD, ſoit MC égale & ſemblable à la directe AM, & ayant avec elle un côté commun $m\mu = Mm$, & qu'il s'agit de poſer cette branche MD ou MC, de ſorte qu'elle rebrouſſe à l'égard de AM. On ne pourra la poſer que de deux manieres, ou entierement ſur AM, de ſorte qu'elle décrira de M en A le même chemin que l'autre avoit décrit de A en M, ou de

M.E.C.D. 2017

façon qu'elle ſoit adoſſée contre AM, & qu'ainſi elles aient toutes deux leurs convexités oppoſées. De la 1re maniere, la branche rebrouſſante redeſcendra vers l'axe, & ſera concave vers cet axe, comme l'étoit la branche directe ; de la 2de, la branche rebrouſſante continuera de s'élever au deſſus de l'axe, comme faiſoit la directe, & ſera convexe vers l'axe, au lieu que la directe étoit concave. Maintenant que la branche rebrouſſante ne ſoit ni égale ni ſemblable à la directe, il eſt viſible que cela ne fait rien à ce que nous conſidérons ici ſur ſa poſition.

844. Si la Courbe AM, arrivée à un rebrouſſement oblique, redeſcend par la branche MC, ſes Ordonnées deviennent donc décroiſſantes, & la Courbe en même temps eſt concave vers l'axe (843), donc les différences Rm ſont devenues croiſſantes, au lieu qu'elles étoient décroiſſantes dans le cours direct. Si la Courbe AM continue de monter par la branche MD, ſes Ordonnées continuent d'être croiſſantes, & en même temps elle eſt convexe vers l'axe (843). Donc les différences Rm ſont encore croiſſantes. Donc la Courbe dont l'obliquité étoit croiſſante, arrivée à un rebrouſſement oblique, a enſuite une obliquité décroiſſante, ou tend à la perpendicularité, de même que la Courbe dont l'obliquité étoit pareillement croiſſante, & qui eſt arrivée à une inflexion oblique (829).

845. Donc la Courbe arrivée à un rebrouſſement oblique, auſſi-bien que la Courbe arrivée à une inflexion oblique, eſt arrivée en même temps à un Terme arbitraire d'obliquité, c'eſt-à-dire, à deux côtés égaux plus obliques que tous les précédens, & moins que les ſuivans.

846. Les trois Ordonnées infiniment proches, qui répondent au rebrouſſement oblique, & dont les deux extremes ſont confondues enſemble (840), ſont en contre-progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 1, au lieu que les trois qui répondent à l'inflexion oblique ſont en progreſſion arithmétique (832), ou comme 1, 2, 3. Quant à celles qui répondent à l'inflexion ou au rebrouſſement paralleles, elles ſont

M.E.C.D. 2017

dans la moindre progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique poſſible.

847. On a vu tout ce qui appartient à une Courbe qui a commencé par tendre au paralléliſme, ſoit qu'elle y ſoit arrivée par un cours infini, auquel cas elle n'a point de changement, ſoit qu'elle y ſoit arrivée par un cours fini, auquel cas elle a dû recevoir des changemens, ſoit même qu'elle ne ſoit arrivée qu'à un Terme arbitraire de ſon obliquité croiſſante. Maintenant conſidérons une Courbe qui commence par tendre à la perpendicularité. On ſuppoſe toujours qu'elle s'éleve au deſſus de l'axe, & par conſéquent que ſes Ordonnées ſont croiſſantes.

Conſidération de la Courbe, qui s'élevant toujours au deſſus de ſon axe, tend ou arrive à lui devenir perpendiculaire, ſoit par un cours fini, ſoit par un cours infini.

En général il ne faudroit préſentement que changer l'axe des Courbes des Fig. II, III & IV, & les rapporter à un axe mené au point *A* perpendiculairement à *AB*. Il eſt clair que tout ce qui étoit mouvement horiſontal, deviendroit vertical, & réciproquement, & que toutes les conſéquences qu'on a déja tirées reviendroient. Cependant il eſt bon de conſidérer en elle-même la ſuppoſition préſente. Il en naîtra des réflexions particulieres.

848. La Courbe aura commencé par avoir un côté parallele à l'axe, ou du moins plus oblique que tous ceux qui le ſuivront dans la même variation, puiſque ſon mouvement perpendiculaire ou vertical eſt croiſſant.

849. Les Ordonnées, & leurs différences *Rm* qui repréſentent le mouvement vertical, étant croiſſantes, la Courbe qui ira de *A* en *M* ſera convexe vers l'axe *AB*.

FIG. V.

350. Dans la perpendicularité le mouvement horiſontal doit être nul par rapport au vertical, ainſi que dans le paralléliſme le vertical eſt nul par rapport à l'horiſontal, & en effet les deux idées de vertical & d'horiſontal s'excluent néceſſairement l'une l'autre. Mais comme on a vû que dans le paralléliſme le mouvement vertical peut être ou abſolument zero, ou ſeulement infiniment petit par rapport à l'horiſontal, & de tous les degrés différens d'Infiniment petit, de même dans la perpendicularité le mouvement horiſontal peut être

M.E.C.D. 2017

ou abſolument zero, ou ſeulement infiniment petit par rapport au vertical, &c.

851. Donc les *Pp* qui repréſentent le mouvement horiſontal peuvent, quoiqu'ils aient été ſuppoſés conſtans, devenir ou abſolument nuls, ou infiniment plus petits qu'ils n'étoient ſuppoſés. Ils peuvent devenir abſolument nuls, parce que quoiqu'il ſoit vrai qu'une grandeur conſtante doit être toujours la même tant qu'elle exiſte, il ne s'enſuit pas qu'elle doive exiſter toujours; & ils peuvent devenir infiniment plus petits qu'ils n'étoient, parce que c'eſt la même choſe que n'exiſter plus, du moins par rapport à ce qu'ils étoient.

852. Il eſt clair que ce ne peut être qu'à l'origine ou à l'extrémité d'un cours d'une Courbe que les *Pp* n'exiſtent plus, & par conſéquent ils exiſteront par tout ailleurs, & ſeront conſtans ſelon la ſuppoſition.

853. La Suite croiſſante des *Rm* peut ſe terminer par $\frac{1}{\infty}$ (609), & alors elle eſt ou ſimplement infinie, auquel cas la ſomme en eſt finie (609), ou infiniment infinie, auquel cas la ſomme en eſt infinie (632). Donc dans le 1er cas l'Ordonnée par laquelle la Courbe arrive à la perpendicularité eſt finie, & dans le 2^d^ infinie. Donc dans le 1er cas le mouvement vertical par lequel la Courbe eſt arrivée à la perpendicularité eſt fini, & dans le 2^d^ infini.

854. Dans la perpendicularité $MR = Pp$ étant nul par rapport à *Rm* (850), le côté de la Courbe eſt toujours $= Rm$. Donc quand la Suite ſe termine par $\frac{1}{\infty}$, la Courbe qui n'eſt perpendiculaire que par ſon dernier côté $= Rm$, ne l'eſt que dans une étendue de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & cela, ſoit que ſon cours vertical ſoit fini ou infini.

Différens cas où la Courbe ayant un cours infini, arrive à la perpendicularité ſans Aſymptotiſme ou avec Aſymptotiſme.

855. J'examine d'abord le cas où ce cours eſt infini; parce que la Courbe n'a alors qu'une variation ſans changement, ce qui eſt plus ſimple.

Puiſque la Courbe a eu un cours vertical infini, & qu'elle n'eſt perpendiculaire que par un côté $= \frac{1}{\infty}$ (854), elle a donc eu une infinité d'infinités de côtés obliques auxquels ont par

M.E.C.D. 2017

par conſéquent répondu une infinité d'infinités de Pp, c'eſt-à-dire un axe infini, & par conſéquent le mouvement horiſontal de la Courbe eſt alors infini auſſi-bien que le vertical.

856. Donc elle n'a point d'Aſymptote (801).

857. En même temps il faut, à cauſe de la perpendicularité, que le dernier de la Suite infiniment infinie & conſtante des Pp ſoit nul par rapport à $Rm = \frac{1}{\infty}$, donc il faut que ce dernier Pp ſoit $= 0$, ou au moins $= \frac{1}{\infty^2}$.

858. Il ne doit pas être d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$, puiſque la perpendicularité qui ſe fait par un $Rm = \frac{1}{\infty}$ n'en exige pas davantage.

859. Et même ſi la Suite des Rm, toujours terminée par un Rm de l'ordre potentiel de $\frac{1}{\infty}$, l'étoit par un Rm d'un ordre radical ſupérieur, tel que $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, &c. le dernier Pp pourroit être $= \frac{1}{\infty}$, car $\frac{1}{\infty}$ eſt nul par rapport à $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

860. Si la Suite croiſſante des Rm ſe termine par 1 (610), la Courbe eſt perpendiculaire par un côté fini, & par conſéquent ligne droite finie. Si la Suite des Rm avoit été ſimplement infinie, la Courbe deviendroit donc ligne droite après un cours Fini déterminable, ce qui ne ſe peut. Donc dans ce cas le cours vertical de la Courbe eſt néceſſairement infini, ou la Suite des Rm infiniment infinie.

861. Puiſque le dernier côté eſt $= Rm = 1$, & la Suite des Rm infiniment infinie, il y a eu avant ce dernier côté, ſeul perpendiculaire, une infinité d'infinités de côtés obliques, ou un axe ou mouvement horiſontal infini.

862. Donc il n'y a point encore d'Aſymptotiſme.

863. Donc auſſi le dernier Pp ne doit être que $\frac{1}{\infty}$.

864. Si la Suite des Rm ſe termine par ∞, la Courbe a un côté perpendiculaire $= \infty$, & par conſéquent eſt ligne droite pendant un cours infini. Le dernier $Rm = \infty$ eſt

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

équivalent à une infinité d'infinités de Rm croiſſans $= \frac{1}{\infty}$ qui ſeroient tous poſés bout à bout en ligne droite ; & par conſéquent dans ce cas la Suite des Rm doit être conçue comme infiniment infinie, mais formée de Rm, dont une infinité d'infinités ſeront une ligne droite infinie, & tous ces Rm, à cauſe de leur poſition, n'auront point de Pp correſpondans. Donc il n'y aura qu'un nombre fini d'infinités de Rm vers l'origine de cette Suite, qui puiſſent avoir des Pp correſpondans, ou, ce qui eſt le même, l'axe ou le mouvement horiſontal ne ſera que fini.

865. Donc il y aura Aſymptotiſme.

866. Un ſeul $Pp = \frac{1}{\infty}$ répondra à la ligne droite infinie $= Rm$.

867. La Courbe ne ſera courbe que pendant un cours Fini indéterminable.

Ce ne ſont là que les art. 799, 800, &c. renverſés, mais dont le renverſement pouvoit avoir quelque difficulté.

868. Puiſque dans le cas de $Rm = \infty$, la Courbe n'eſt courbe que pendant un cours Fini indéterminable, on peut concevoir Rm, qui eſt toujours par ſa nature la différence de deux Ordonnées infiniment proches, comme la différence de l'Ordonnée finie qui termine ce cours Fini indéterminable, & de l'Infinie qui la ſuit, & qui eſt, après une étendue finie, la Courbe même devenue ligne droite infinie.

869. De tout cela il ſuit que quand la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini, elle n'a point d'Aſymptote tant que Rm n'eſt que d'un ordre au deſſus de Pp (860, 861, 862), & qu'elle n'en a une que quand Rm eſt de deux ordres au deſſus de Pp (864, 865); car alors $Rm = \infty$, & $Pp = \frac{1}{\infty}$ (866).

870. Et comme afin qu'une Courbe qui arrive au paralléliſme par un cours infini ait une Aſymptote, il faut que Rm ſoit au moins $= \frac{1}{\infty^3}$ (799, 800, 808), Pp étant toujours néceſſairement $= \frac{1}{\infty}$, il faut que pour l'Aſymptotiſme

M.E.C.D. 2017

parallele ou perpendiculaire, il faut que Rm ſoit au moins de deux ordres au deſſous ou au deſſus de Pp. Et en effet l'Aſymptotiſme conſiſte en ce que des deux mouvemens de la Courbe, l'horiſontal & le vertical, l'un eſt infini, l'autre fini. Les Pp ſont les parties infiniment petites de l'un, & les Rm les parties infiniment petites de l'autre. Il faut donc que celui des deux qui doit être infini, ait une infinité d'infinités de ces parties qui exiſtent, tandis que l'autre n'en aura qu'un nombre ſimplement infini, ou une infinité d'infinités qui ſeront infiniment moindres que celles du premier. Or il eſt ſûr que cela eſt ainſi, quand la Suite des Rm ſe termine par une grandeur qui eſt de deux ordres au deſſus de celle qui termine la Suite des Pp, ou au contraire.

871. Dans l'Aſymptotiſme parallele on conçoit naturellement une infinité d'infinités de $Pp = \frac{1}{\infty}$, & un nombre ſimplement infini de $Rm = \frac{1}{\infty}$, & une infinité d'infinités de $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ terminée par un dernier $Rm = \frac{1}{\infty^3}$ pour le moins. Mais comme la Courbe eſt parallele ou ligne droite tant que durent les $Rm = \frac{1}{\infty^2}$ ou $= \frac{1}{\infty^3}$, on peut auſſi concevoir que les Rm n'exiſtent plus, que leur Suite eſt ſimplement infinie, & que par conſéquent il y a une infinité d'infinités de Pp ſans Rm correſpondans. Au contraire dans l'Aſymptotiſme perpendiculaire il eſt plus naturel de concevoir, ſelon les art. 864 & 866, qu'à un ſeul $Rm = \infty$ répond un $Pp = \frac{1}{\infty}$. Mais auſſi comme $Rm = \infty$ eſt équivalent à une infinité d'infinités de $Rm = \frac{1}{\infty}$, ou à une infinité de $Rm = 1$, on peut concevoir qu'à chacun de ces $Rm = 1$ répond un $Pp = \frac{1}{\infty^2}$, ce qui n'empêche point que ces Rm ne ſoient tous poſés bout à bout en ligne droite, & le nombre infini des $Pp = \frac{1}{\infty^2}$ qui répondront à ce nombre infini de $Rm = 1$, ne feront qu'un $Pp = \frac{1}{\infty}$, tel qu'on l'a trouvé d'abord.

872. Cette idée d'une infinité de $Pp = \frac{1}{\infty^2}$ ne détruit

M.E.C.D. 2017

point la ſuppoſition des *Pp* conſtans, puiſqu'elle n'a lieu qu'à l'extrémité du cours de la Courbe, où *Pp*, nul par rapport à *Rm*, peut être conçu d'un ordre d'Infiniment petit inférieur à $\frac{1}{\infty}$ (851 & 852).

873. Dans l'Aſymptotiſme parallele, l'Aſymptote eſt parallele à l'axe, & perpendiculaire dans l'Aſymptotiſme perpendiculaire, & néceſſairement infinie dans les deux cas. Donc ſi une Courbe a une Aſymptote, il faut que cette Aſymptote puiſſe être priſe de maniere qu'elle repréſente celui des deux mouvemens de la Courbe qui ſera infini.

Cas où la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours fini, & enſuite redeſcend vers l'axe, ou continue de monter, en tendant au paralléliſme.

874. Maintenant ſi la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours Fini déterminable, auquel cas elle n'eſt perpendiculaire que par un côté $== Rm == \frac{1}{\infty}$, il faut voir ce qui peut arriver.

Il eſt ſûr d'abord, que puiſqu'elle eſt arrivée par un premier cours à un Terme qui eſt la perpendicularité, elle ne peut plus dans un ſecond cours que tendre au paralléliſme. Donc les *Rm* qui étoient croiſſans, deviendront décroiſſans, & par conſéquent la Suite des *Rm* eſt arrivée à un *plus grand*, ou à un Terme arbitraire de grandeur.

Cas où la Courbe redeſcend par un rebrouſſement.

FIG. V.

875. La Courbe peut ou redeſcendre vers ſon axe, ou continuer de monter.

Si elle redeſcend, le côté *Mm* où elle eſt arrivée, étant entierement perpendiculaire, ou vertical, ou montant, il ne peut être Terme moyen entre un cours montant & un deſcendant, donc il reſte qu'il ſoit Terme commun; & il ne peut l'être, à moins qu'il ne ſoit en même temps montant & deſcendant, & il ne peut encore l'être, à moins que l'on ne conçoive un rebrouſſement, moyennant lequel il y aura un autre côté $m\mu$ deſcendant, exactement poſé le long de *Mm* montant, de ſorte que *Mm* & $m\mu$ feront phyſiquement un ſeul côté qui ſera en même temps montant & deſcendant, & par conſéquent Terme commun entre le cours montant & le deſcendant.

876. Il eſt également poſſible que la branche rebrouſſante

M.E.C.D. 2017

mB ſoit poſée comme dans la Figure, de ſorte que la Courbe continuera d'avancer de A vers B, ou que cette branche, ſoit intérieure, ſoit extérieure à la branche directe AMm, retourne de m vers A.

877. Mais de quelque maniere que ce ſoit, la Courbe arrivée à la perpendicularité par le côté Mm, ne peut redeſcendre vers ſon axe ſans un rebrouſſement, parce qu'il lui faut alors un Terme commun.

878. Puiſque la Courbe redeſcend, ſes Ordonnées ſont décroiſſantes, & puiſqu'elle tend au paralléliſme (874), leurs différences Rm ſont décroiſſantes auſſi. Donc la Courbe eſt convexe vers ſon axe dans ſon ſecond cours, comme dans le premier.

Cas où la Courbe continue de monter par une inflexion.

879. Si la Courbe continue de monter, ſes Ordonnées continuent d'être croiſſantes, & leurs différences Rm ſont décroiſſantes (878), donc elle eſt concave vers ſon axe dans ſon ſecond cours, donc elle a paſſé de la convexité à la concavité vers le même axe.

880. Ce paſſage doit ſe faire avec inflexion (825), ſi, ſelon le raiſonnement de l'art. 839, la Courbe eſt véritablement concave & convexe vers un même axe, c'eſt-à-dire, vers quelque axe qu'on puiſſe lui donner, comme l'eſt la Courbe de la Fig. III. Mais ſi elle eſt comme la Courbe de la Fig. VI, qui étant rapportée à un axe perpendiculaire à AB, eſt toujours concave vers cet axe, alors de la branche AM convexe vers AB, elle paſſe à la branche mC concave vers le même AB par le côté perpendiculaire Mm, ſans y avoir d'inflexion, & ce côté Mm eſt un Terme moyen entre les côtés du premier cours qui montoient de A vers M, & ceux du ſecond qui montent de m vers C, parce qu'il ne monte ni de A vers M, ni de m vers C.

881. Si la Courbe arrivée à la perpendicularité, redeſcend comme dans la Fig. V, l'Ordonnée qui répond au point M, eſt plus grande que toutes celles qui l'ont précédée dans le 1er cours, & que toutes celles qui la ſuivent dans le 2^d^. C'eſt la même choſe pour les deux autres cas de l'art. 876,

M.E.C.D. 2017

mais ce n'eſt que dans le 1er des trois que l'Ordonnée, qui répond au point *M*, eſt appellée une *plus grande* Ordonnée, parce que dans les deux derniers l'axe finit ſous le point *M*, & que les Ordonnées rebrouſſent ſur l'axe de *M* vers *A*. Or qu'une Ordonnée ſoit la plus grande de toutes, parce qu'elle eſt la derniere d'un cours auquel l'axe a, pour ainſi dire, manqué, cela n'a rien de ſingulier par rapport aux Ordonnées, ni qui leur appartienne, à proprement parler. Mais quand elles viennent à décroître, en allant toujours en avant ſur l'axe, ou de *A* vers *B*, c'eſt quelque choſe qui leur appartient plus particulierement.

882. Quand la Courbe continue de monter, ſoit ſans inflexion, ſoit avec inflexion, il n'y a point là de *plus grande* Ordonnée.

883. Quand la Courbe redeſcend, il y a un rebrouſſement perpendiculaire (877), c'eſt-à-dire, deux côtés perpendiculaires *Mm*, *m μ*, exactement poſés le long l'un de l'autre, & égaux, puiſqu'ils font un même Terme commun. Donc à ces deux côtés répondent trois Ordonnées qui, à cauſe de la perpendicularité des côtés, ſont ſans *P p* qui les ſéparent, & ſont par conſéquent infiniment plus proches que toutes les autres conſécutives qui ſont infiniment proches, & en même temps à cauſe de l'égalité des côtés = *Rm*, elles ont des différences égales, & à cauſe du rebrouſſement elles ſont en contre-progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 1.

884. Il en va de même de l'inflexion perpendiculaire, à cela près que les trois Ordonnées, qui y répondent, infiniment plus proches que toutes les autres, ſont en progreſſion arithmétique, ou comme 1, 2, 3.

885. Quant au cas de la Fig. VI, rien ne détermine néceſſairement le côté perpendiculaire *Mm* à être égal, ni à *Rm* qui le précéde, ni à celui qui le ſuit. Et par conſéquent il n'y a point là trois Ordonnées qui ſoient néceſſairement en progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique.

Cas où la Courbe arrive, non à la

886. Si la Courbe, au lieu d'arriver au Terme naturel de ſon obliquité décroiſſante, ou à la perpendicularité, n'arrive,

M.E.C.D. 2017

comme elle peut, qu'à un Terme arbitraire, il n'y a qu'à appliquer là tout ce qui a été dit ſur le Terme arbitraire de l'obliquité croiſſante dans les art. 829, &c. 834, car des côtés obliques ſont toujours la même choſe, ſoit qu'ils ſoient plus ou moins obliques que tous les précédens.

perpendicularité, Terme naturel, mais au Terme arbitraire équivalent.

887. Donc une Courbe d'une obliquité, ſoit croiſſante, ſoit décroiſſante, qui n'arrive point au Terme naturel de cette obliquité, c'eſt-à-dire, au parallélisme ou à la perpendicularité, arrive au Terme arbitraire, c'eſt-à-dire, à deux côtés égaux, plus obliques que les précédens, & moins que les ſuivans, ou au contraire, & cette égalité des côtés emporte l'inflexion ou le rebrouſſement.

888. Il eſt clair, par tout ce qui a été dit, que ce qui emporte dans ce cas l'inflexion ou le rebrouſſement, & conſéquemment l'égalité de deux côtés, c'eſt qu'un ſecond cours ſuccede au premier, ou qu'il ſe fait un changement. Donc ſi cette raiſon ceſſe, c'eſt-à-dire, ſi la variation eſt infinie ſans changement, ou s'il n'y a qu'un cours, la Courbe pourra n'arriver par un cours infini qu'à un Terme arbitraire d'obliquité, qui ne ſera qu'un ſeul côté plus ou moins oblique que ceux de la Suite infiniment infinie qui auront précédé.

Cas où la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité croiſſante, ou décroiſſante. Aſymptotiſme.

889. En ce cas cette Suite infiniment infinie de côtés obliques demande néceſſairement deux Suites pareilles, l'une de Pp, l'autre de Rm, tous de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent les deux mouvemens de la Courbe, l'horiſontal & le vertical, ſeront infinis.

890. Donc elle n'aura point d'Aſymptote ni parallele ni perpendiculaire à ſon axe (801).

891. Tant que la Courbe AMm n'aura que des côtés obliques à l'axe AB, les points T où chaque côté Mm prolongé rencontre l'axe, ſeront toujours à une diſtance finie du point A, origine de la Courbe ſur l'axe. Car ſi le point T pouvoit être infiniment éloigné de A, les lignes MT & AT ſeroient paralleles (693), & par conſéquent le côté Mm parallele à l'axe, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc ſi la

FIG. II.

M.E.C.D. 2017

Courbe *A Mm*, dont les côtés ſont toujours plus obliques, n'arrive par un cours infini qu'à un côté plus oblique que tous les précédens, ce côté, quoiqu'infiniment éloigné, étant prolongé juſqu'à l'axe, ne tombe que ſur un point *T* finiment diſtant de *A*. Donc la ligne *AT* eſt finie.

892. Donc tous les côtés de la Courbe prolongés ne ſont tombés que ſur des points entre *A* & *T*, toujours plus proches de *T*, à meſure que ces côtés étoient plus obliques. Et il eſt clair que deux points où tombent deux côtés conſécutifs prolongés, ſont infiniment proches, & que leur diſtance eſt au moins de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

893. Le mouvement de la Courbe, ou, ce qui eſt la même choſe, de tous ſes côtés pris enſemble, étant donc infini de *A* vers *B* par la ſuppoſition, le mouvement de ces mêmes côtés prolongés juſqu'à l'axe n'eſt que fini de *A* vers *T*. Or l'eſſence de l'Aſymptotiſme eſt que de deux mouvemens correſpondans, l'un ſoit infini, tandis que l'autre n'eſt que fini (801). Donc il y a là un Aſymptotiſme, & il conſiſte en ce que la ligne *TM* qui fera ſur l'axe un angle aigu déterminable *ATM*, ſera telle que la Courbe ne pourra arriver que par un cours infini à avoir un côté, qui étant prolongé, ſoit cette *TM*. Donc *TM* ſera Aſymptote de la Courbe.

894. La ligne *AT* étant finie, ne pourra fournir aux points *T* qu'une infinité de diſtances de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Or il y a une infinité d'infinités de côtés ; donc il n'y en aura qu'un nombre infini qui prolongés puiſſent tomber ſur des points *T*, dont la diſtance ſoit $= \frac{1}{\infty}$, & il eſt viſible que ce ſeront ceux qui ſeront vers l'origine de la Courbe. Quant au nombre infiniment infini des autres, ils ne tomberont tous que ſur le même dernier point *T*, ou, ce qui revient au même, ils n'auront ſur *AT* que des diſtances d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Donc la Courbe, pendant un cours infini, ſe confondra avec ſon Aſymptote *TM*, ou ſera ligne droite, & ne ſera courbe que pendant un cours Fini indéterminable, ce qu'on a déja vû

être

M.E.C.D. 2017

être une propriété inſéparable de l'Aſymptotiſme.

895. Puiſque la Courbe, pendant un cours infini, ſera une ligne droite oblique à l'axe, elle aura, les $P\,p$ étant conſtans, une infinité d'infinités de $R\,m$ de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ tous égaux, & les $R\,m$ n'auront été décroiſſans que pendant le cours Fini indéterminable, ou, ce qui revient au même, les $R\,m$ ayant toujours, à cauſe de l'obliquité perpétuelle, un rapport fini aux $P\,p$, ce rapport ne ſera variable que pendant un cours Fini indéterminable de la Courbe, & conſtant pendant un cours infini, ou du moins infiniment moins variable.

896. Donc quand la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité croiſſante, ce Terme eſt une ligne droite infinie, au lieu qu'il n'en eſt qu'une infiniment petite, quand la Courbe arrive à ce Terme par un cours fini.

897. Si l'on ſuppoſe que la Courbe arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité décroiſſante, ce ſera entierement la même choſe ; à cela près que la Courbe ſera convexe vers ſon axe. Il ne faut que rapporter la Courbe $A\,Mm$ à un axe tiré au point A perpendiculairement à AB, & tous les mêmes raiſonnemens reviendront. FIG. II.

898. Donc toute Courbe qui arrive par un cours infini à un Terme arbitraire d'obliquité, a une Aſymptote oblique à ſon axe, & qui fait avec cet axe l'angle aigu, qui eſt le Terme arbitraire de l'obliquité de la Courbe.

899. Si on prend cette Aſymptote pour axe infini, ou pour ordonnée infinie de la Courbe, alors on retombe dans le cas de l'Aſymptotiſme parallele ou perpendiculaire.

900. Le caractere général de l'Aſymptotiſme eſt que le cours de la Courbe étant infini, le dernier $R\,m$ ait un rapport fini au $P\,p$, correſpondant, ce qui arrive dans l'Aſymptotiſme oblique (895), ou que $R\,m$, ſoit de deux ordres au deſſous ou au deſſus de $P\,p$, ce qui arrive dans l'Aſymptotiſme parallele ou perpendiculaire (870).

901. Réciproquement ſi le cours de la Courbe étant infi-

M.E.C.D. 2017

ni, le dernier Rm a un rapport fini au Pp correſpondant, il y a un Aſymptotiſme oblique, & ſi Rm eſt de deux ordres au deſſus ou au deſſous de Pp, il y a Aſymptotiſme perpendiculaire ou parallele; perpendiculaire dans le 1er cas, parallele dans le 2^d^.

Que l'angle de contingence ne peut être fini.

902. Voilà tout ce qui regarde toutes les poſitions poſſibles de la Courbe par rapport à un axe, & l'on n'a vû aucun cas où l'angle de contingence de deux côtés conſécutifs pût être fini; mais il y a plus, il reſulte de tout ce qui a été dit, qu'il ne peut l'être, & c'eſt là ce qui a été laiſſé comme en ſuſpens dans l'art. 747.

Je ſuppoſe que le premier des deux côtés qui feront entre eux l'angle de contingence fini, ſoit oblique & montant, & d'uue telle obliquité que le côté ſuivant ne puiſſe faire avec lui l'angle de contingence déterminé ſans redeſcendre vers l'axe, car tout cela pourra toûjours être par rapport à quelque axe que je donnerai à la Courbe; elle montera donc par ce premier côté, & redeſcendra par le ſuivant, ſans avoir paſſé par aucun Terme, ni moyen, ni commun, ce qui eſt impoſſible, & contraire à la douceur infinie qui fait l'eſſence de la variation des Courbes. Donc l'angle de contingence fini eſt impoſſible.

903. De plus l'angle de contingence fini ſeroit aigu, puiſqu'il ſeroit le dernier d'une Suite infinie d'angles aigus infiniment petits. Ce ſeroit donc un aigu toujours plus grand, ſelon que la Suite d'angles, dont il ſeroit la derniere grandeur, ſeroit plus croiſſante, & enfin elle pourroit l'être à tel point, qu'il ſeroit le plus grand de tous les aigus, c'eſt-à-dire, droit; & par conſéquent il y auroit un axe par rapport auquel la Courbe arrivée au paralléliſme, arriveroit auſſi-tôt après, & dès le côté ſuivant à la perpendicularité. Or deux Termes ne peuvent être contigus (682).

904. On peut ajouter enfin que ſi l'angle de contingence pouvoit être fini, la variation croiſſante qui l'y conduiroit, pourroit être croiſſante de moins en moins, & par conſéquent arriver à l'Egalité, c'eſt-à-dire, à deux angles de con-

M.E.C.D. 2017

tingence finis & égaux conſécutifs. En ce cas il y auroit un côté de la Courbe dont les deux extrémités ſeroient les ſommets de ces deux angles, & ces angles étant finis, les ſommets en ſeroient ſenſibles & déterminables, & par conſéquent la grandeur du côté le ſeroit auſſi. Or il eſt impoſſible que la grandeur d'un côté infiniment petit ſoit déterminable.

Theorie de la courbure des Courbes.

905. Il ne reſte plus preſentement qu'à examiner ce qui appartient à la courbure des Courbes.

Pour cet examen il faut abandonner la ſuppoſition des *Pp* conſtans, & prendre l'une ou l'autre des deux ſuppoſitions de l'art. 752. qui ont toutes deux eſſentiellement rapport à la Courbure, car il faut toûjours quelque choſe de conſtant (764). La 1re de ces deux ſuppoſitions, qui eſt celle des côtés conſtans, eſt la plus aiſée dans la pratique, & nous la préférons. Donc la variation de la courbure ſera celle des angles de contingence *DBC*. La courbure ſera croiſſante, ſi ces angles croiſſent, décroiſſante, s'ils décroiſſent, & ſuivra le rapport de leurs accroiſſemens ou décroiſſemens.

906. La meſure de ces angles étant leur Sinus, qui ſera une ligne infiniment petite du 2d ordre (741), la meſure de la courbure ſera donc ce Sinus de l'ordre de $\frac{1}{2}$.

Differens cas ou la courbure eſt nulle.

907. Ce Sinus exiſte, & par conſéquent il y a courbure, tant que les côtés font entr'eux un angle de contingence infiniment petit, de quelque grandeur qu'il ſoit dans l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ mais dès qu'ils ceſſent d'en faire un, il n'y a plus de courbure. Or ils ceſſent d'en faire un, quand ils ſont exactement poſés ou bout à bout en ligne droite dans l'inflexion, ou l'un ſur l'autre dans le rebrouſſement. Donc alors la courbure eſt nulle.

908. Donc alors la Courbe qui arrive ou à l'inflexion, ou au rebrouſſement, y eſt arrivée par une courbure toujours décroiſſante.

909. La Courbe qui a une Aſymptote quelconque, étant ligne droite pendant un cours infini, elle aura pendant tout ce cours une courbure nulle, & par conſéquent ſa

M.E.C.D. 2017

ſa courbure précédente aura été décroiſſante.

Ce qui fait la courbure infinie, & les cas où elle l'eſt.

910. La courbure croiſſante devroit aboutir à un angle de contingence fini, ce qui la rendroit infinie. Mais cet angle eſt impoſſible (902, 903, 904). Donc la courbure ne peut devenir infinie de cette maniere. Il faut donc voir de quelle maniere elle le peut devenir.

Tout côté oblique a un Rm & un Pp de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui lui répondent, & il eſt de ce même ordre; & parce qu'il eſt oblique d'une certaine obliquité néceſſairement déterminée, il a un certain rapport de grandeur déterminé à Rm & à Pp qui lui répondent, & cela, quelque ſuppoſition qu'on faſſe, ou des Rm, ou des Pp, ou des côtés Mm conſtans. Quand un côté eſt parallele, il eſt néceſſairement égal à quelque portion de l'axe, mais quand il eſt perpendiculaire, il n'a aucun rapport néceſſaire de grandeur à Pp, mais peut être plus grand ou plus petit, ſelon telle raiſon qu'on voudra (819), c'eſt-à-dire, dans le cas qu'il ſoit plus petit, qu'il peut l'être plus que tous les Pp qui répondront à des côtés obliques, & non pas plus que ſon Pp correſpondant, car il n'en a point, ou n'en a qu'un infiniment petit par rapport à lui.

En effet on a vû qu'un côté perpendiculaire $= \infty$ n'avoit qu'un $Pp = \frac{1}{\infty}$ (864 & 866), ce qui marque bien que la grandeur du côté perpendiculaire ne garde aucun rapport avec celle des Pp, qui ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ tant qu'ils exiſtent.

Donc en renverſant cet exemple, il doit être poſſible auſſi que Pp étant zero abſolu pour un côté perpendiculaire, ce côté ſoit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, puiſque rien ne l'aſſujettit à aucun rapport de grandeur à Pp, & qu'il lui ſuffit au contraire de n'en avoir point qui lui réponde (820).

Et comme un côté perpendiculaire eſt neceſſairement ou l'Origine ou le Terme d'un cours, ce ne peut être qu'en l'un ou l'autre de ces deux points qu'il ſe trouvera un côté ou infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que les Pp qui ſeront dans tout le reſte du cours.

Donc il eſt poſſible qu'une Courbe commence ou termine

M.E.C.D. 2017

un cours par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, qui ſera perpendiculaire.

Après ce côté, s'il eſt le premier, en viendra néceſſairement un ſecond oblique, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ car ce n'eſt que la perpendicularité qui diſpenſe les côtés, pour ainſi dire, d'être de cet ordre. C'eſt la même choſe renverſée, ſi ce côté $= \frac{1}{\infty}$ eſt le dernier du cours.

On peut demander pourquoi à l'origine de la Courbe, par exemple, car cela ſuffit pour fixer l'idée, le côté perpendiculaire $= \frac{1}{\infty^2}$, & le ſuivant oblique $= \frac{1}{\infty}$, ne ſont pas plutôt conçus comme un ſeul côté oblique, puiſque le perpendiculaire eſt nul par rapport à l'oblique, ou pourquoi le perpendiculaire & l'oblique pris enſemble, étant $\frac{1}{\infty}$, on ne conçoit pas ce $\frac{1}{\infty}$ comme diviſé en deux parties du même ordre, dont la premiere ſera perpendiculaire, & la ſeconde oblique, puiſque la diviſion d'une Courbe en ſes côtés eſt entierement arbitraire.

On ne peut pas prendre les deux côtés pour un ſeul oblique, puiſqu'il y a là réellement une poſition perpendiculaire de la Courbe.

On ne peut pas prendre le perpendiculaire $= \frac{1}{\infty^2}$ & une partie de l'oblique $= \frac{1}{\infty}$ pour un même côté perpendiculaire de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, puiſque s'il eſt vrai que la Courbe commence par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, elle fait là un pas infiniment plus petit que tous ceux qu'elle fera enſuite, ou, ce qui eſt la même choſe, fait ſon premier détour infiniment plutôt qu'elle ne fera tous les autres; or c'eſt là quelque choſe de réel, qui vient de ſa nature, & qu'on ne lui peut ôter. Et en effet il faut que ce premier côté $= \frac{1}{\infty^2}$, quand il exiſtera, ſoit néceſſaire par l'Equation de la Courbe.

Donc enfin un premier ou dernier côté perpendiculaire $= \frac{1}{\infty}$ eſt poſſible.

Or en ce cas la courbure de la Courbe ſera infinie, car ſi

M.E.C.D. 2017

elle commence par là, elle ſe détournera après un pas infiniment plus petit, ou infiniment plutôt que par tout ailleurs; & ſi elle termine un cours par là, elle ne fera après un détour ordinaire, qu'un pas infiniment plus petit que tous les autres.

Donc il eſt poſſible que la Courbe ait une courbure infinie à l'origine ou l'extrémité d'un cours.

911. L'angle de contingence fini, qui devroit être le Terme de la courbure croiſſante, étant impoſſible, c'eſt cette courbure infinie faite par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$ qui prend ſa place, & dans les cas où par l'accroiſſement continuel des angles de contingence, la courbure devroit devenir infinie par un angle de contingence fini, elle ne le deviendra que par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$. Ainſi ce cas de courbure infinie ne fera que ſe ſubſtituer à celui où l'angle de contingence auroit dû être fini, & cela ne troublera en rien la conſidération de la courbure fondée ſur les angles en tous les autres cas.

912. Cette courbure infinie ne peut avoir rien de ſenſible, ni qui frappe les yeux, car quelque exactement qu'une Courbe fût tracée ou décrite, il ſeroit toujours impoſſible d'y reconnoître aucune grandeur $\frac{1}{\infty^2}$, & encore moins $= \frac{1}{\infty^2}$, ou la différence de $\frac{1}{\infty^2}$ à $\frac{1}{\infty^2}$.

913. La courbure infinie qui demande un côté $= \frac{1}{\infty^2}$ n'eſt pas contraire à la ſuppoſition des côtés conſtans de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, comme les Pp nuls, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ dans la perpendicularité, ne ſont point contraires à la ſuppoſition des Pp conſtans. Les raiſonnemens des art. 851. & 852. reviennent ici, & les Mm ne peuvent non plus que les Pp, être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ qu'à l'origine ou à l'extrémité d'un cours.

914. Quand on appelle infinie la courbure qui ſe fait par un côté $= \frac{1}{\infty^2}$, on ſuppoſe que la courbure ordinaire, ou qui ſe fait par des côtés de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & dont les

M.E.C.D. 2017

angles de contingence ſont de cet ordre, eſt finie; par conſéquent la courbure qui ſe feroit par un côté $= \frac{1}{\infty^3}$ ſeroit infinie du 2d ordre, & ainſi de ſuite, les angles de contingence étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

915. Il n'eſt point néceſſaire pour la courbure infinie, que le côté par lequel elle ſe fait ſoit $= \frac{1}{\infty^2}$, il ſuffit qu'il ſoit de cet ordre comme $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{5}$, &c. car il ſera toujours infiniment petit par rapport à $\frac{1}{\infty}$.

916. Et par la même raiſon ſi les côtés obliques étoient ſeulement, par ex. $= \frac{1}{\frac{1}{2}}$, il ſuffiroit que le côté perpendiculaire par lequel ſe feroit la courbure infinie fût $= \frac{1}{\infty}$.

En général le raiſonnement qu'on a fait ſur la courbure infinie, ne demande autre choſe, ſinon que le côté, par lequel elle ſe fait, ſoit infiniment petit par rapport aux côtés obliques, de quelque maniere qu'il le ſoit.

917. Ce qui fait la courbure infinie eſt réel, c'eſt un côté qui par la nature de la Courbe n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, tandis que tous les autres ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Nous l'avons ſuppoſé perpendiculaire pour mieux faire appercevoir que même dans la ſuppoſition des côtés conſtans il pouvoit être $= \frac{1}{\infty^2}$. Mais un côté perpendiculaire par rapport à un axe, ſera parallele, ou oblique par rapport à un autre, ainſi la perpendicularité du côté n'eſt point néceſſaire pour la courbure infinie. Tout ce qui reſte de néceſſaire, c'eſt que le côté par lequel elle ſe fait, commence ou finiſſe un cours, car une Courbe rapportée à différens axes, ne fait que changer ſes poſitions paralleles en perpendiculaires, ſa concavité en convexité, ou au contraire, mais ſes différens cours ou variations commencent & finiſſent toujours aux mêmes points.

918. Donc la courbure infinie peut ſe faire par un côté parallele; car il commence ou finit néceſſairement un cours.

M.E.C.D. 2017

919. Tout ce qu'exige la nature du côté parallele, c'eſt qu'il y ait un *Pp* égal qui lui réponde ſans *Rm* correſpondant. De-là il a ſuivi que tant qu'on a ſuppoſé que les côtés ne pouvoient être que de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, le côté parallele en étoit auſſi, & $= Pp = \frac{1}{\infty}$ ſuppoſé alors conſtant. Mais ici où le côté parallele eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, il faut que *Pp* ſoit auſſi égal à ce même $\frac{1}{\infty^2}$.

920. La courbure infinie ne peut ſe faire par un côté oblique que quand ce côté oblique commencera ou terminera un cours. Prenons le cas où il le termine, qui eſt le plus naturel. Un côté oblique ne termine un cours que quand il eſt Terme arbitraire d'obliquité croiſſante ou décroiſſante, & alors ce côté oblique eſt double, & il y a inflexion ou rebrouſſement (829 & 845). Donc la courbure infinie qui termine un cours, ne peut ſe faire par un côté oblique ſans infléxion ou rebrouſſement.

921. Donc la courbure qui eſt toujours nulle dans l'infléxion, quand les côtés y ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & dans le rebrouſſement, quand les côtés étant de cet ordre, y ſont exactement poſés l'un ſur l'autre, peut être infinie dans ces mêmes points, & ce ſera quand les deux côtés égaux y ſeront de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, ayant été par-tout ailleurs $= \frac{1}{\infty}$. Ils ne font entr'eux, à cauſe de la poſition que leur donne l'infléxion, ou le rebrouſſement, qu'un angle de contingence nul; mais cet angle nul ne rend pas alors la courbure nulle, car il ſe fait dans une étendue de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & cette étendue rend la courbure infinie.

922. Il eſt clair que cela eſt général pour les inflexions ou rebrouſſemens, tant paralleles, ou perpendiculaires, qu'obliques.

923. La courbure infinie peut ſe faire à l'origine d'une Courbe par un côté oblique ſimple $= \frac{1}{\infty^2}$; car elle s'y peut faire par un côté perpendiculaire ſimple, qui deviendra oblique quand la Courbe ſera rapportée à un autre axe. C'eſt ainſi qu'une

M.E.C.D. 2017

qu'une Courbe peut avoir à ſon origine un côté ſimple oblique $= \frac{1}{\infty}$, mais elle ne peut pas de même avoir pour Terme d'obliquité croiſſante ou décroiſſante un côté ſimple oblique.

924. L'inflexion, qui eſt un Terme ou paſſage de la concavité à la convexité, ou réciproquement, & le rebrouſſement, qui eſt le Terme d'un cours direct, & l'Origine d'un rebrouſſant, ſont toujours compliqués avec un Terme de courbure croiſſante ou décroiſſante, & ce Terme eſt une courbure ou nulle, ou infinie.

925. Donc auſſi le Terme arbitraire d'obliquité, qui eſt toujours compliqué avec l'inflexion ou le rebrouſſement, eſt pareillement compliqué avec un Terme de courbure.

926. L'Inflexion & le rebrouſſement, où la courbure eſt nulle, & qui ſe font par deux côtés égaux de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ont de plus ces deux côtés égaux, qui ſont un Terme, de ſorte que les Pp ayant été ſuppoſés conſtans, la Courbe a dû, dans ſon cours précédent, tendre à cette égalité de côtés, c'eſt-à-dire, que ſes côtés n'ont pu croître ou décroître que de moins en moins. Il y aura donc dans toute inflexion ou rebrouſſement de cette eſpece une complication de quatre Termes différens, 1°. D'inflexion, ou de rebrouſſement. 2°. De poſition parallele, ou perpendiculaire, ou la plus ou la moins oblique de toutes par rapport à l'axe. 3°. D'égalité des deux côtés. 4°. De courbure nulle.

927. Si l'inflexion ou le rebrouſſement ſont accompagnés de courbure infinie, les deux 1ers Termes de l'art. précédent ſubſiſtent, & le 4me ſe change en une courbure infinie. Pour le 3me, il n'eſt plus queſtion de conſidérer les deux côtés égaux de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, les Pp étant conſtans, car ces côtés de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ ne répondent à aucun Pp qui ſoit de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais parce que ces côtés ſont deux, & $= \frac{1}{\infty^2}$, ils marquent non ſeulement une courbure infinie, mais une égalité de courbure infinie. Ils tiennent la place de deux angles de contingence finis égaux & conſécutifs, auxquels la courbu-

M.E.C.D. 2017

re croiſſante ſeroit arrivée, en croiſſant toujours de moins en moins, ſi des angles finis avoient été poſſibles. Il y a donc encore ici quatre Termes compliqués.

928. Une Courbe qui ſe termine par un côté de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ comme tous les autres, ne peut avoir à ſon extrémité une courbure infinie : mais elle en peut avoir une nulle, parce que ce côté pourra faire avec le précédent un angle de contingence nul, & ces deux côtés, poſés bout à bout en ligne droite, ne produiront point d'inflexion à l'extrémité d'un cours infini où la Courbe ſe termine.

929. Quant à la Courbe qui ſe termineroit par un côté $= 1$ (860), il eſt bien viſible que ſa courbure eſt nulle à cette extrémité, puiſqu'elle y devient ligne droite finie. A plus forte raiſon, la Courbe qui a une Aſymptote.

930. Donc la Courbe peut avoir à ſon extrémité une courbure nulle, parce qu'elle y ſera ligne droite pendant une étendue infiniment petite, mais plus grande que partout ailleurs (928), ou qu'elle y ſera droite finie, ou infinie.

931. Comme il n'y a point de Terme naturel auquel un arbitraire ne puiſſe être ſubſtitué, il faut qu'il y ait un Terme arbitraire de courbure croiſſante ou décroiſſante, & ce ſera un angle de contingence plus grand ou plus petit que les précédens, & ſuivi par des angles plus petits ou plus grands. Il ne ſe fait là aucune complication néceſſaire d'autres Termes.

932. Rien n'empêche qu'une Courbe n'arrive par un cours infini à un ſimple Terme arbitraire de courbure : mais en ce cas il eſt viſible qu'elle ne doit pas avoir d'Aſymptote, ni même un dernier côté $= 1$. Ce ne peut donc être que dans le cas où elle aura un dernier côté $= \frac{1}{\infty}$, car il ſera poſſible qu'il faſſe encore un angle de contingence avec le précédent, ſoit plus grand, ſoit plus petit que les angles précédens.

Ordre des Changemens des Courbes.

933. Tout ce qui appartient aux variations & aux changemens des Courbes ayant été examiné, il eſt aiſé de voir quel ordre peuvent garder entr'eux les changemens, quand il y en a.

M.E.C.D. 2017

Une Courbe ne peut aller du paralléliſme au paralléliſme, ni de la perpendicularité à la perpendicularité, ni en général d'un Terme quelconque à un autre de même eſpece, parce que deux Termes de même eſpece ne peuvent être conſécutifs (681), ou, ce qui eſt le même, une Courbe arrivée à un Terme ne peut tendre dans la variation ſuivante qu'à un Terme contraire, ſoit naturel, ſoit arbitraire.

934. Une Courbe peut aller d'un Terme naturel de ſa poſition par rapport à l'axe à un autre Terme naturel contraire, c'eſt-à-dire, être alternativement parallele & perpendiculaire tant de fois qu'on voudra.

935. Une Courbe peut aller d'une Inflexion à une Inflexion, pourvû que dans la 1re la courbure ayant été nulle ou infinie, & pareillement le Terme d'obliquité ayant été celui d'une obliquité croiſſante ou décroiſſante (926), cette courbure & ce Terme ſoient dans la 2de Inflexion contraires à ce qu'ils étoient; cela peut arriver alternativement autant de fois qu'on voudra.

936. Il en faut dire autant des Rebrouſſemens.

937. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que les Courbes qui commençoient par s'élever au deſſus de leur axe : mais elles peuvent auſſi avoir leur origine à un point qui ſoit au deſſus de cet axe, & deſcendre vers lui. Cette nouvelle ſuppoſition ne changera rien à tout ce qui a été dit, ſinon que ce qui étoit montant ſera deſcendant, une Ordonnée la plus grande de deux variations conſécutives ſera la plus petite, &c. mais tous les raiſonnemens demeureront les mêmes.

938. Une Courbe peut même deſcendre au deſſous de ſon axe, & cela ne change encore rien. Seulement ſi les Ordonnées tirées au deſſus de l'axe ou ſupérieures ont été qualifiées de poſitives, les inférieures ſeront négatives. Il faut appliquer ici tout ce qui a été dit dans les articles 719, &c. 725.

Equations des Courbes. Courbes géométriques & méchaniques.

939. Après que l'on a vû tout ce qui peut arriver aux Courbes en général, il ne reſte plus qu'à voir comment on peut déterminer géométriquement tout ce qui doit arriver à

M.E.C.D. 2017

une Courbe ſelon ſa nature particuliere, c'eſt-à-dire, ſelon la Loi ou l'Equation qui la reglera.

Nous avons ſuppoſé d'abord dans les art. 761, &c. 765, que cette Equation conſiſtoit toujours dans quelque rapport perpétuel des Abſciſſes aux Ordonnées affectées ou conditionnées d'une certaine maniere. Mais comme on a vû dans toute la ſuite que les Courbes ne ſont compoſées que de grandeurs infiniment petites, ou réſultent de la combinaiſon de différentes grandeurs de cette eſpece, il eſt viſible que leur nature particuliere ſera déterminée, quand on aura déterminé le rapport de quelques-unes de ces grandeurs, par ex. des Rm aux Pp, ſans avoir déterminé celui des AP aux PM. Cela revient à l'art. 687.

Si le rapport perpétuel qui doit faire l'eſſence de la Courbe eſt établi entre des grandeurs infiniment petites, il ſe peut également qu'il s'enſuive ou ne s'enſuive pas de là un rapport perpétuel entre les Abſciſſes & les Ordonnées. Dans le 1er cas, il a été inutile, du moins à parler en général, mais non pas impoſſible, de régler la Courbe par cette ſorte de rapport, & on la peut ramener à une Equation qui exprime le rapport des Abſciſſes aux Ordonnées; dans le 2^d^ cas, la Courbe n'a pu avoir d'autre Equation, & il n'y a point de rapport perpétuel entre ſes Abſciſſes & ſes Ordonnées.

Dans le 1er cas, la Courbe eſt appellée *géométrique*, parce que le rapport entre ſes Abſciſſes & ſes Ordonnées, qui ne ſont que des lignes droites, étant perpétuel, on peut la connoître & la décrire en tous ſes points par le moyen de ces droites qu'on peut tirer ou déterminer géométriquement.

Mais dans le 2^d^ cas, la Courbe eſt appellée *méchanique*, parce que ſon eſſence ne conſiſte que dans un rapport d'Infiniment petits qui ne peuvent être déterminés, & que les Abſciſſes & les Ordonnées n'ayant pas un rapport perpétuel, on ne peut déterminer géométriquement une Abſciſſe & une Ordonnée quelconques.

940. On voit par la nature des Courbes méchaniques que pour les connoître il faut une Théorie & un Calcul de

M.E.C.D. 2017

Infiniment petits, mais que les géométriques en doivent être plus indépendantes.

En effet, x exprimant toujours une Abſciſſe, & y une Ordonnée indéterminée, il y a certaines choſes que la ſeule Algebre ordinaire donne à la premiere vûe de l'Equation d'une Courbe géométrique. Par exemple, ſi cette équation eſt $ax = yy$, ou $1x = yy$, ou $x = yy$, ſoit en prenant la grandeur conſtante $a = 1$, ſoit en la ſouſentendant, on voit que cette Courbe, qui eſt la Parabole, a des Ordonnées négatives égales aux poſitives correſpondantes: car ſoit que chaque Ordonnée ſoit $= y$, ou $= -y$, on a toujours le quarré yy, & $x = yy$. Donc elle a des Ordonnées au deſſus & au deſſous de l'axe indéterminé x, égales chacune à chacune. On voit auſſi qu'elle n'a point d'Abſciſſes négatives, ou $= -x$, c'eſt-à-dire, priſes à la gauche du point de l'axe où l'on aura fixé l'origine de ſon cours vers la droite; car l'équation ſeroit $-x = -yy$, or elle deviendroit imaginaire, puiſque $-yy$ ne peut être un quarré réel. Un point étant donc fixé pour origine de l'axe, la Parabole n'a ſon cours qu'à la droite ou à la gauche de ce point, mais elle a un cours égal tant au deſſus qu'au deſſous de l'axe.

Si l'on prend la 1re Parabole cubique, qui eſt $aax = y^3$, ou $x = y^3$, on voit que l'équation $-x = -y^3$ eſt la même, & par conſéquent que cette Parabole peut avoir des Abſciſſes négatives en même temps que des Ordonnées négatives, auſſi-bien que des Abſciſſes poſitives en même temps que des Ordonnées poſitives, mais non les unes poſitives, & les autres négatives en même temps, & par conſéquent qu'à la droite du point de ſon origine elle aura ſeulement des Ordonnées au deſſus de l'axe, & à la gauche des Ordonnées ſeulement au deſſous.

De même dans la 2de Parabole cubique, $x^2 = y^3$, on voit que x^2 eſt auſſi-bien quarré de $-x$ que de x, & que par conſéquent la Courbe a des Abſciſſes négatives, mais que l'équation ne peut pas être $-x^2 = -y^3$, parce que $-x^2$ feroit un quarré imaginaire, & par conſéquent que la Courbe

M.E.C.D. 2017

n'a point d'Ordonnées négatives; d'où il ſuit qu'elle a ſon cours tant à la droite qu'à la gauche du point de ſon origine, mais toujours au deſſus de l'axe.

On verra pareillement par la ſeule équation d'une Courbe géométrique, ſi elle aura des Ordonnées, & par conſéquent des portions imaginaires, ou des vuides (680), combien elle aura de Branches, car elle en aura autant que les Ordonnées y, élevées à une certaine puiſſance déterminée par l'équation de la Courbe, auront de valeurs ou racines réelles, & quelques autres choſes qui ſont connues par l'Algebre.

Mais il y a toujours dans la connoiſſance des Courbes, même géométriques, un grand nombre de choſes qui demandent la Théorie de l'Infiniment grand ou petit, du moins pour être connues d'une maniere générale & commune à toutes les Courbes, & en même temps immédiatement tirée du fond de leur nature. Il faut donc auſſi avoir l'Art de calculer les Infinis qui entrent dans les Courbes, & ſur-tout les Infiniment petits, parce que, comme nous l'avons vû, les différences infiniment petites des grandeurs finies qui y entrent, ſont ce qu'il y a de plus important à conſidérer. Par cette même raiſon, ce Calcul s'appelle *Différentiel*.

Il conſiſte à trouver quel eſt l'Infiniment petit d'une grandeur finie quelconque complexe ou incomplexe, conditionnée comme l'on voudra. Je ſuppoſe ces Regles connues, & elles le ſont effectivement de tous les Géometres. Ces Infiniment petits étant déterminés, on opere ſur eux comme nous avons fait dans tout cet Ouvrage. Il n'eſt plus queſtion préſentement que de faire voir comment par le Calcul différentiel on peut déterminer tout ce qui appartient à la connoiſſance des Courbes ſans exception, & cela, en ne faiſant que ſuivre les conſéquences néceſſaires qui naiſſent de tout ce qui a été établi juſqu'ici.

M.E.C.D. 2017

SECTION XI.

Regles générales pour déterminer par le Calcul Différentiel tout ce qui appartient au cours d'une Courbe rapporté à un Axe.

941. L'INDE'TERMINE'E AP étant appellée x, & PM correſpondante y, Rm eſt dy, & Pp, dx, & Mm $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ainſi dx & dy ſont Elémens auſſi-bien que Différences de x & de y; c'eſt-à-dire, que non ſeulement dx & dy ſont les grandeurs de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont x & y croiſſent à chaque pas infiniment petit de la Courbe, mais encore que chaque dx & chaque dy eſt un nombre de fois infini dans x ou dans y finis, & le même nombre de fois, puiſqu'à chaque dx répond un dy. FIG. II.

942. Je ſuppoſe dans toute cette Section les Pp ou dx conſtans.

Si l'on prend trois Ordonnées infiniment proches, correſpondantes aux deux côtés conſécutifs Mm, $m\mu$, & leurs différences Rm, $r\mu$, & qu'on veuille avoir la différence de ces différences, il faut prolonger le côté Mm en p juſqu'à la rencontre de $r\mu$ prolongée, moyennant quoi μp eſt la différence de Rm & de $r\mu$. Or μp eſt en même temps la baſe de l'angle de contingence $pm\mu$. D'ailleurs Rm & $r\mu$ étant toutes deux dy, leur différence, ou la différence 2de des trois Ordonnées eſt ddy, égale à la baſe de l'angle de contingence. FIG. VII.

943. ddy eſt la différence infiniment petite par rapport à $r\mu = dy$, dont $r\mu$ a décru dans la Figure, & eſt en même temps élément de $r\mu = dy$, comme dy eſt élément & différence de y. Il en faut dire autant de ddx à l'égard de dx, ſi dx n'eſt pas conſtant, car une grandeur qui ne croît ni ne décroît, n'a point de différence, c'eſt-à-dire, de grandeur infiniment petite par rapport à elle, dont elle croiſſe ou décroiſſe

M.E.C.D. 2017

à chaque inſtant. On pourroit lui concevoir un élément infiniment petit, mais cela ſeroit inutile.

944. Si ddy eſt variable, comme il eſt très-poſſible & ordinaire qu'il le ſoit, il aura encore un $dddy$ pour élément & pour différence, ce qui peut aller ſi loin qu'on voudra.

945. De-là il ſuit (412) que ddy & dy^2 ſont du même ordre, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, $dddy$ & dy^3 du 3me, &c. On a déja vû (740) que la baſe de l'angle de contingence $= ddy$ (942) étoit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

946. L'Equation d'une Courbe renfermant toute ſon eſſence, le Principe général & invariable de toute la Théorie des Courbes eſt, que toutes les diverſes ſuppoſitions que l'on peut faire ſur les grandeurs indéterminées qui entrent dans l'équation, en leur conſervant le rapport preſcrit par l'équation, ſont autant de modifications ou *affections* qui appartiennent à la Courbe, & qu'elle doit avoir. Ainſi ſi l'équation permet qu'une grandeur indéterminée qu'elle renferme ſoit ſuppoſée d'une certaine valeur finie, ou infinie, ou infiniment petite, tout ce qui s'en enſuivra appartiendra à la Courbe, & en ſera quelque modification.

947. Quand une Courbe peut avoir ou x ou y, ou l'un & l'autre $= \infty$, ou de cet ordre, ſon cours eſt infini.

948. Si x étant $= \infty$, y n'eſt que fini, ou au contraire, la Courbe a un Aſymptote.

949. Par la raiſon contraire il n'y auroit point d'Aſymptote, lorſque x & y peuvent être l'un & l'autre $= \infty$, ſi ce n'étoit qu'une Courbe d'un cours infini, & qui ſe termine par être oblique à ſon axe, a $x = \infty$, & $y = \infty$, & a toujours cependant une Aſymptote (888, &c. 901). Donc afin qu'une Courbe qui a x & $y = \infty$, n'ait point d'Aſymptote, il faut qu'elle ſe termine par être parallele ou perpendiculaire à ſon axe.

Regle pour déterminer quand une Courbe d'un

950. Et comme une Courbe qui au bout d'un cours infini eſt parallele à ſon axe, & a une Aſymptote, a ſon dernier dy de deux ordres au moins au deſſous de dx (800 & 808), &

M.E.C.D. 2017

& que celle qui eſt perpendiculaire, & a pareillement une Aſymptote, a ſon dernier $dy = \infty$ (864 & 865), il s'enſuit cette Regle générale. *cours infini a une Aſymptote, ou n'en a pas.*

Toute Courbe qui a un cours infini, & ſe termine par être oblique à ſon axe, ou ſe termine par être parallele, & a en même temps dy de deux ordres au deſſous de dx, ou ſe termine par être perpendiculaire, & a en même temps $dy = \infty$, a une Aſymptote. Et hors de-là elle a un cours infini ſans Aſymptote.

EXEMPLE I.

951. Soit l'Hyperbole rapportée à ſon premier axe, ou axe traverſant, dont a eſt la moitié, b étant la moitié du ſecond. Son équation eſt, $yy . xx - aa :: bb . aa$, les x étant comptés du centre de l'Hyperbole. Or on voit que x & y peuvent être tous deux infinis, & alors $y^2 . x^2 :: b^2 . a^2$, ou $y . x :: b . a$, & par conſéquent y & x infinis ont un rapport fini. D'ailleurs la même équation donne ſelon le Calcul différentiel, $dy . dx :: b^2 x . a^2 y$, & par conſéquent x & y étant infinis, dy & dx ont un rapport fini, donc la Courbe eſt oblique à ſon axe au bout d'un cours infini, donc elle a une Aſymptote. *Exemple dans l'Hyperbole rapportée à ſes axes.*

952. Cette Aſymptote eſt oblique à l'axe (888, &c. 901).

953. Le rapport $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, qui eſt à l'extrémité de la Courbe, détermine l'angle de cette Aſymptote ſur l'axe. Si $a = b$, ce qui rend l'Hyperbole équilatere, cet angle eſt de 45.

EXEMPLE II.

954. Soit la Logarithmique où $dy . dx :: y . a$. Si $y = \infty$, donc dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, dy eſt $= 1$. Donc dans cette ſuppoſition de $y = \infty$, la Courbe n'a point d'Aſymptote, c'eſt-à-dire, que quand elle a un cours infini vertical, elle en a auſſi un horiſontal, ou un axe infini. *Dans la Logarithmique.*

M.E.C.D. 2017

955. Si $y = \frac{1}{\infty}$, dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, dy eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, & il n'y a point encore d'Aſymptote, mais auſſi on n'a rien ſuppoſé qui donne un cours infini à la Courbe. Que ſi on ſuppoſe $y = \frac{1}{\infty^2}$, ce que l'équation permet, dy devient $= \frac{1}{\infty^3}$, dx étant toujours $= \frac{1}{\infty}$, & la Courbe a un cours infini à cauſe de dy^3 (797), & une Aſymptote parallele à l'axe à cauſe de dy^3 inférieur de deux ordres à dx.

956. Donc la Logarithmique, rapportée au même axe, n'a point d'Aſymptote du côté où ſon cours vertical eſt croiſſant, & elle en a une du côté où ſon cours vertical eſt décroiſſant, & cette Aſymptote eſt l'axe même.

957. On peut auſſi-bien dans la Logarithmique ſuppoſer $y = \frac{1}{\infty^3}$ que $= \frac{1}{\infty^2}$, & enfin on peut le ſuppoſer d'un ordre ſi bas qu'on voudra, ce qui rendra toujours dy de l'ordre immédiatement inférieur, & de tant d'ordres qu'on aura voulu au deſſous de dx, & par conſéquent la Logarithmique en auroit toujours d'autant plus, s'il ſe pouvoit, une Aſymptote; mais du moins elle en ſera toujours d'autant plus exactement & plus rigoureuſement parallele, & confondue avec ſon axe. Et enfin elle ſe terminera par $y = \frac{1}{\infty^\infty}$, & par $dy = \frac{1}{\infty^{\infty+1}}$.

958. Lorſque $y = \infty$, dy eſt $= 1$ (954), & $y = \infty$ eſt la ſomme de la Suite des dy, qui étant infiniment infinie & terminée par 1, devroit avoir une ſomme de l'ordre de ∞^2, ſi les dy, dont elle eſt originairement formée, avoient des rapports déterminables (549 & 633), mais ils n'en ont pas. Car dans la Logarithmique les dx étant conſtans, ou les Abſciſſes en progreſſion arithmétique, les Ordonnées ſont en progreſſion géométrique, & par conſéquent leurs différences dy ſont en même progreſſion. Donc cette Courbe étant priſe du côté que ſon cours vertical eſt croiſſant, & une premiere Ordonnée $= 1$ étant déterminée, la Suite de ſes Ordonnées eſt la progreſſion géométrique infinie compriſe entre 1 & ∞,

M.E.C.D. 2017

c'eſt-à-dire, $\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. ∞, compoſée de grandeurs, dont les rapports ſont tous indéterminables. Ces grandeurs ayant des différences finies, & ne repréſentant que des Ordonnées de la Courbe, qui ont entr'elles des diſtances finies, il faut, pour avoir les Ordonnées infiniment proches, concevoir entre 1 & $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ une infinité de moyens géométriques, de même entre $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ & $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. & ces moyens géométriques en nombre infiniment infini ont des rapports encore plus indéterminables, & toutes ces grandeurs enſemble ſont la Suite infiniment infinie des y en progreſſion géométrique, à laquelle répond une Suite pareille de dy, dont par conſéquent tous les rapports ſont toujours indéterminables. Cela confirme les Théories de la Sect. VII.

959. Quand on peut déterminer ſur l'axe d'une Courbe ſes Ordonnées diſtantes d'une diſtance finie, ſi petite qu'on voudra, cette Courbe peut être décrite *par points*, qui ſeront les extrémités de ces Ordonnées, car quoique finiment diſtantes, elles pourront l'être ſi peu, qu'elles feront ſenſiblement la Courbe. Mais les Ordonnées finiment diſtantes de la Logarithmique étant $\div$ 1. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$. $\infty^{\frac{2}{\infty}}$, &c. grandeurs finies abſolument indéterminables, la Logarithmique ne peut être décrite même par points. De-là vient *à priori* que ſa deſcription eſt miſe au nombre des Problemes impoſſibles, ou non encore réſolus.

Pourquoi la Logarithmique eſt indeſcriptible.

960. C'eſt principalement dans les Courbes méchaniques, comme la Logarithmique, dans l'équation deſquelles x & y n'entrent pas tous deux, que la Regle de l'art. 950 pour l'Aſymptotiſme peut être utile, car pour les géométriques on voit tout d'un coup ſi elles ont une Aſymptote, puiſque x & y étant dans leur équation, il n'y aura que l'un ou l'autre qui puiſſe devenir $= \infty$, à moins qu'elles ne ſe terminent par être obliques à l'axe. Cependant pour faire mieux voir que $dy = \frac{1}{\infty^3}$ ou $= \infty$ eſt toujours lié avec l'Aſymptotiſme,

Exemple dans l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

M.E.C.D. 2017

nous en allons donner encore quelques exemples dans des Courbes géométriques, quoique cette conſidération n'y ſoit pas abſolument néceſſaire pour juger de l'Aſymptotiſme, mais elle ſervira à faire voir ce que ſignifient ces valeurs extremes de dy, dont il ſemble qu'on a négligé juſqu'ici de rechercher l'effet.

EXEMPLE III.

Soit l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab = xy$. y eſt $= \frac{ab}{x}$. $dy = \frac{-abdx}{xx}$.

Si $x = \infty$, $dy = \frac{-abdx}{\infty^2}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^3}$ pour l'ordre.

Si $y = \infty$, ce qui emporte $x = dx = \frac{1}{\infty}$, dy eſt $= \frac{-abdx}{dx^2} = \frac{-ab}{dx} = \infty$. On ſupprime le $-$ dont ce ∞ eſt affecté, parce qu'il ne fait rien à l'ordre.

EXEMPLE IV.

Dans la Conchoïde.

961. Dans la Conchoïde priſe comme elle l'eſt, p. 65 de l'*An. des Inf. petits*, $dy = \frac{x^3dx + aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$. Donc ſi $x = dx$, $dy = \frac{dx^4 + aabdx}{dx^2\sqrt{aa - dx^2}} = \frac{aabdx}{adx^2} = \frac{ab}{dx} = \infty$. Donc la Conchoïde a un cours infini dans le ſens des y, & d'ailleurs elle a un cours ſeulement fini dans le ſens des x, puiſque x ne peut être plus grand que a. Donc elle a une Aſymptote.

EXEMPLE V.

*Dans une Courbe de l'*An. des Inf. petits.

962. Dans la Courbe $axx = xxy + aay$ (p. 63 & 64 de l'*An. des Inf. petits*) $dy = \frac{2a^3xdx}{xx + aa}$. Donc ſi $x = \infty$, $dy = \frac{2a^3 \infty \times \frac{1}{\infty^3}}{\infty^4} = \frac{2a^3}{\infty^4}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^4}$ eſt de trois ordres au deſſous de dx. Donc la Courbe a une Aſymptote.

M.E.C.D. 2017

EXEMPLE VI.

963. On verra aiſément que la Parabole ordinaire $ax = yy$ n'a point d'Aſymptote, car $dy = \frac{adx}{2y}$, & y étant $= \infty$, dy eſt $= \frac{adx}{2\infty} = \frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent n'eſt que d'un ordre au deſſous de dx. *Dans deux Paraboles.*

Mais dans la 1re Parabole cubique $a^2x = y^3$, & où par conſéquent $dy = \frac{a^2dx}{3y^2}$, $y = \infty$ rend $dy = \frac{a^2dx}{3\infty^2}$, & par conſéquent de deux ordres au deſſous de dx; donc il devroit y avoir une Aſymptote ſelon la Regle, cependant il eſt bien ſûr qu'il n'y en a point.

L'erreur vient de ce que y, ſuppoſée infinie, n'a pas été bien caractériſée ou bien exprimée. On voit par l'équation $a^2x = y^3$, que x & y ne peuvent devenir infinis qu'enſemble, & ſuppoſant $a^2 = 1$, on a donc $\infty = \infty^3$, ce qui ne ſe peut en mettant le même Infini dans les deux membres de l'équation. Il faut donc entendre par ∞^3 un Infini moindre que ∞, qui ſoit élevé au cube. Soit cet Infini $\propto$. Donc $\infty = \propto^3$, ce qui ſe peut. Donc $\infty^{\frac{1}{3}} = \propto = y$ infini. Donc dans l'Infini, $y^2 = \infty^{\frac{2}{3}}$. Donc $dy = \frac{a^2dx}{3y^2} = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\infty^{\frac{2}{3}}}$. Or $\infty^{\frac{5}{3}}$ eſt de l'ordre de ∞^2, donc $dy = \frac{1}{\infty \times 3\infty^{\frac{5}{3}}}$ n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{3\infty^{\frac{5}{3}}}$, & par conſéquent n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent n'eſt que de l'ordre potentiel immédiatement inférieur à celui de dx.

964. Il ne s'eſt point gliſſé d'erreur dans les exemples précédens, faute de cette attention de bien caractériſer les Infinis, parce que x & y n'y devenoient pas infinis en même temps, & que ce n'eſt qu'en ce cas-là qu'il faut conſidérer leur différent caractere. Mais de-là naît la Remarque générale, que quand deux ou pluſieurs grandeurs, qui ont rapport enſemble,

M.E.C.D. 2017

deviennent en même temps infinies, ou, ce qui eſt une ſuite néceſſaire du même raiſonnement, infiniment petites, il faut en juger, non par le caractere vague & indéterminé d'Infiniment grand ou petit, qu'elles prennent, mais par le caractere particulier que leur donne la néceſſité de leur rapport; & cela fait voir l'uſage de ces différens ordres potentiels & radicaux dont nous avons tant parlé.

Sans cette Théorie des Infinis radicaux, on trouveroit une difficulté inſurmontable dans l'équation même de la Parabole ordinaire, où $\dot{\div} a . y . x$. Car comment concevoir que y & x, croiſſant toujours enſemble, & ne devenant infinis qu'en même temps, il arrive cependant, quand ils le deviennent, que y ſoit infiniment moindre que x? Cette difficulté diſparoît entierement, quand on voit, ſelon l'art. précédent, qu'on ne peut avoir $\infty = \infty^2$, mais ſeulement $= \propto^2$, ce qui donne y infini $= \infty^{\frac{1}{2}}$, & la proportion $\dot{\div} a . y . x$, changée en $\dot{\div} 1 . \infty^{\frac{1}{2}} . \infty$.

Regle pour déterminer quand une Courbe arrive au paralléliſme, ou à la perpendicularité.

965. De toute la Section précédente réſulte la Regle générale pour le paralléliſme & la perpendicularité, que dans le paralléliſme dy eſt nul, & dans la perpendicularité, infini par rapport à dx, & ce qu'on a déja vû montre aſſez que le calcul différentiel doit donner auſſi-tôt ce rapport, & les cas où il arrive. Car le rapport de dy à dx ayant été tiré de l'équation de la Courbe géométrique, ou étant donné par celle de la méchanique, on voit auſſi-tôt s'il peut, & dans quels cas il peut devenir nul ou infini.

Voyons d'abord, ſelon l'ordre que nous avons toujours ſuivi, les cas où la Courbe arrive au paralléliſme ou à la perpendicularité par un cours infini, & premierement le paralléliſme. dx y ſubſiſte toujours tel qu'il a été par-tout ailleurs, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & égal au même $\frac{1}{\infty}$, & dy eſt nul par rapport à dx. Donc dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, ou d'un ordre inférieur. On vient de voir que s'il eſt d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$, la Courbe a une Aſymptote. Donc il ne reſte

M.E.C.D. 2017

à examiner que le cas où la Courbe arrive au paralléliſme par un cours infini ſans avoir d'Aſymptote.

En ce cas, je dis qu'il n'eſt point néceſſaire que dy, nul par rapport à dx, ſoit $= \frac{1}{\infty^2}$, mais qu'il ſuffit qu'il ſoit de cet ordre, ou, ce qui eſt le même, qu'il ſoit de quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, de ſorte que dy pourra ſe trouver indifféremment dans tout l'intervalle compris depuis $\frac{1}{\infty}$ excluſivement juſqu'à $\frac{1}{\infty^2}$ incluſivement.

Cela eſt clair par ſoi-même; car dy devant être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, il en ſera néceſſairement ſelon la Théorie des ordres potentiels & radicaux, s'il eſt de quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$. Mais on va le voir encore par des exemples.

EXEMPLE I.

966. Dans la Parabole ordinaire ou du 2^d degré, où $dy. dx :: 1. 2y$, on voit d'abord que la ſuppoſition de $y = \infty$ rend dy nul par rapport à $dx = \frac{1}{\infty}$. Il ſemble auſſi que dy devienne $= \frac{1}{\infty^2}$, parce que 1 eſt d'un ordre potentiel au deſſous de $2y = 2\infty$. Mais cela n'eſt pas ainſi.

Exemples dans le paralléliſme que les premieres Paraboles de chaque degré ont à leur extrémité infiniment éloignée, paralléliſme toujours croiſſant.

Car y infini eſt $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964). Donc alors $dy = \frac{dx}{2\infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty \times 2\infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc $dy. dx :: \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}. \frac{1}{\infty} :: \infty.$ $2\infty^{\frac{3}{2}}$. Or il s'en faut un ordre radical que $\infty^{\frac{3}{2}}$ ne ſoit $= \infty^{\frac{4}{2}} = \infty^2$. Donc dy, quoique nul par rapport à dx, & de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ par rapport au Fini, eſt cependant d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$, & n'eſt que de cet ordre au deſſous de dx.

EXEMPLE II.

967. Dans la 1re Parabole du 3me degré, $x = y^3$, dy à

M.E.C.D. 2017

l'extrémité eſt $= \frac{1}{{}^{3}\infty^{\frac{1}{3}}}$ (963). Donc il eſt encore d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{{}^{3}\infty^{\frac{6}{3}}} = \frac{1}{\infty^{2}}$, mais il eſt de deux ordres radicaux au deſſous de $dx = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{{}^{3}\infty^{\frac{5}{3}}}$.

EXEMPLE III.

968. De même dans la 1re Parabole du 4me degré, $x = y^4$, le dernier dy eſt $= \frac{1}{{}^{4}\infty^{\frac{3}{4}}}$ d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty^{2}}$, & de trois ordres radicaux au deſſous de dx.

969. Les derniers dy de chaque 1re Parabole de chaque degré étant $\frac{1}{{}^{2}\infty^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{{}^{3}\infty^{\frac{5}{3}}}$, $\frac{1}{{}^{4}\infty^{\frac{7}{4}}}$, (966, 967, 968), on voit aſſez, & on peut s'en aſſurer encore par une plus longue induction, que n étant le degré de la Parabole, le dernier dy de la 1re Parabole de chaque degré ſera $\frac{1}{{}^{n}\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$. D'où il ſuit que le dernier dy d'une 1re Parabole quelconque ſera toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{2}}$, & jamais $= \frac{1}{\infty^{2}}$, tant que n ſera fini, car l'expoſant $\frac{2n-1}{n}$ ne ſera jamais $= 2$. Or il eſt aiſé de voir que n ſera toujours fini, ou qu'une Parabole d'un degré infini eſt impoſſible.

970. Plus n eſt grand, plus 1 eſt petit par rapport à n, ou plus $\frac{2n-1}{n}$ approche d'être $= 2$. Donc plus le degré d'une 1re Parabole eſt élevé, plus le paralléliſme qu'elle a à ſon extrémité approche de ſe faire par un $dy = \frac{1}{\infty^{2}}$, c'eſt-à-dire, qu'elle en eſt d'autant plus parallele à ſon axe.

EXEMPLE IV.

Exemples 971. Au lieu des Paraboles précédentes qui étoient les 1res

M.E.C.D. 2017

1res de chaque degré, c'eſt-à-dire, celles où x n'a qu'une dimenſion, je prens maintenant les dernieres, c'eſt-à-dire, celles où x a toutes les dimenſions horſmis une.

dans le parallélisme que les dernieres Paraboles de chaque degré ont à leur extrémité, parallélisme toujours décroiſſant.

Soit donc $x^2 = y^3$, ſeconde ou derniere Parabole cubique, $dy = \frac{2xdx}{3y^2}$. L'équation $x^2 = y^3$ portée dans l'Infini, donne $x = \infty$ & $y = \infty^{\frac{2}{3}}$. Donc le dernier $dy = \frac{2\infty \times \frac{1}{\infty}}{3\infty^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, de deux ordres radicaux au deſſus de $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{\infty^2}$.

EXEMPLE V.

972. De même dans la 2de & derniere Parabole du 4me degré, $x^3 = y^4$, $dy = \frac{3x^2dx}{4y^3}$, & y infini étant $= \infty^{\frac{3}{4}}$, le dernier dy eſt $= \frac{3\infty^{2} \times \frac{1}{\infty}}{4\infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{3\infty}{4\infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{3}{4}\infty^{\frac{4}{4}-\frac{9}{4}} = \frac{3}{4}\infty^{-\frac{5}{4}} = \frac{3}{4\infty^{\frac{5}{4}}}$.

973. En général le dernier dy de la derniere Parabole de chaque degré n eſt $\frac{n-1}{\frac{n+1}{n}}$, d'où il ſuit encore qu'il eſt toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{n\infty}{1}}}$, mais jamais $= \frac{1}{\infty^2}$, car l'expoſant $\frac{n+1}{n}$ eſt toujours $= 1 + \frac{1}{n}$.

974. Plus n eſt grand, plus $\frac{n+1}{n}$ approche d'être $= 1$; & par conſéquent le dernier dy d'être $= \frac{1}{\infty}$, ou de cet ordre, auquel cas il n'y auroit plus de parallélisme. Donc plus le degré de ces dernieres Paraboles eſt grand, moins à leur extrémité elles ſont paralleles, ce qui eſt le contraire des 1res Paraboles (970).

975. Le dernier dy d'une 1re Parabole eſt au dernier dy

M.E.C.D. 2017

de la derniere Parabole du même degré :: $\frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$: $\frac{1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$, ou, en ne considérant que l'ordre, :: $\frac{1}{\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$: $\frac{1}{\infty^{\frac{n+1}{n}}}$:: $\infty^{\frac{n+1}{n}} . \infty^{\frac{2n-1}{n}}$. D'où il suit que le dernier dy d'une 1re Parabole est d'autant d'ordres radicaux au dessous du dernier dy d'une derniere du même degré qu'il y a d'unités depuis $n + 1$ jusqu'à $2n - 1$, les deux dy étant toujours compris dans l'intervalle qui est entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, ou, ce qui est le même, la 1re Parabole est infiniment plus parallele que la derniere, & infiniment plus parallele selon le rapport de deux différens ordres radicaux compris dans le même intervalle potentiel.

EXEMPLE VI.

Parallélisme des Paraboles moyennes de chaque degré.

976. Dans le 3me & 4me degré il n'y a que deux Paraboles, mais dans le 5me il commence à y en avoir de moyennes, & il y en a deux dans ce degré.

La 1re de ces moyennes est $x^2 = y^5 . dy = \frac{2x\,dx}{5y^4}$, & le dernier $dy = \frac{2}{5\infty^{\frac{8}{5}}}$.

La 2de des moyennes est $x^3 = y^5 . dy = \frac{3x^2\,dx}{5y^4}$, & le dernier $dy = \frac{3}{5\infty^{\frac{7}{5}}}$.

D'où il suit qu'aucune de ces Paraboles n'a un dernier $dy = \frac{1}{\infty^2}$, quoiqu'elles l'aient toutes de cet ordre.

977. Les derniers dy des quatre Paraboles du 5me degré étant $\frac{1}{5\infty^5}$ (969) $\frac{2}{5\infty^5}$. $\frac{3}{5\infty^5}$ (976) & $\frac{4}{5\infty^5}$ (973), on voit que les dy des deux Paraboles moyennes rempliſſent

M.E.C.D. 2017

l'intervalle que laiſſoient entr'eux ceux des deux extremes, d'où l'on voit qu'il en ira de même pour les Paraboles des degrés plus élevés, & que 1 étant toujours le numérateur de la fraction qui exprimera le dernier dy de la 1re Parabole d'un degré quelconque, & $n - 1$ le numérateur de celle qui exprimera le dernier dy de la derniere Parabole, les numérateurs des dy des Paraboles moyennes feront les nombres naturels qui ſeront entre 1 & $n - 1$, c'eſt-à-dire, ſeront en progreſſion arithmétique, auſſi-bien que les expoſans de ∞ qui ſera dans les dénominateurs.

978. Dans un même degré le paralléliſme des différentes Paraboles diſpoſées ſelon leur ordre, à commencer par celle où x n'a qu'une dimenſion, ira toujours en diminuant depuis cette 1re juſqu'à la derniere.

979. D'un degré à celui qui eſt immédiatement ſupérieur, par ex. du 5me au 6me, la 1re Parabole du 5 ſera moins parallele que celle du 6 (970), & la derniere Parabole du 5 ſera plus parallele que celle du 6 (974).

980. Donc en général la plus petite différence déterminée qui puiſſe être entre deux ordres radicaux, ou entre un radical & un potentiel, comme celle qui ſeroit entre $\infty^{\frac{99}{100}}$ & $\infty^{\frac{100}{100}}$, & toute autre plus petite à l'indéfini, ſuffit pour rendre dy nul par rapport à dx, autant qu'il le doit être dans le paralléliſme, qui n'eſt point accompagné d'Aſymptotiſme. Et dès que dy tombe au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$, ou eſt différent de dx de plus qu'un ordre potentiel, il y a paralléliſme avec Aſymptotiſme, parce que le moindre abaiſſement de dy au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$ doit ſuffire auſſi pour cela.

981. Maintenant examinons les cas où la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini. *Détermination de la perpendicularité des Courbes à leur extrémité infiniment éloignée.*

dx y eſt toujours nul par rapport à dy. On a vu que lorſque la Courbe a une Aſymptote, dy eſt toujours $= \infty$, & par conſéquent dx, toujours ſuppoſé $= \frac{1}{\infty}$, eſt de deux ordres potentiels au deſſous de dy. Lorſque le dernier dy de

M.E.C.D. 2017

la Courbe eſt $= 1$, elle n'a point d'Aſymptote, & $dx = \frac{1}{\infty}$ eſt d'un ordre potentiel au deſſous de dy. Juſques-là il n'y a nulle difficulté. Mais quand le dernier dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt poſſible (854), auquel cas il eſt viſible que la Courbe n'a point d'Aſymptote, il s'agit de ſavoir comment dx devient nul par rapport à dy.

Cela ne peut être que de deux manieres.

Ou dx n'exiſtera plus, ſelon l'idée de l'art. 851.

Ou il exiſtera encore, mais infiniment moindre que dy.

Le 1er cas paroît d'abord le ſeul poſſible. Alors $dx = 0$; ou $= \frac{1}{\infty^2}$ (857).

En cas que le 2^d^ le ſoit, il faut, puiſque dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & que dx exiſte, & par conſéquent eſt $= \frac{1}{\infty}$, que dy ſoit de quelque ordre radical du même ordre potentiel que $\frac{1}{\infty}$ par rapport au Fini, mais ſupérieur à $\frac{1}{\infty}$, & cet ordre ſera en général $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}}$, n étant moindre que m, de ſorte que dy ſera à $dx :: \frac{1}{\infty^{\frac{n}{m}}} . \frac{1}{\infty^{\frac{m}{m}}} :: \infty^{\frac{m}{m}} = \infty . \infty^{\frac{n}{m}}$, & d'autant d'ordres radicaux au deſſus de dx que m aura d'unités de plus que n.

Or je dis que cette 2de maniere eſt poſſible.

Le paralléliſme ou la perpendicularité d'une Courbe ſont réellement la même choſe, puiſque l'un devient l'autre par une ſimple tranſpoſition d'axe qui n'eſt rien de réel par rapport à la Courbe, & n'y change rien de ce qui étoit abſolu. Au cas où une Courbe eſt parallele, & a une Aſymptote, & où dy eſt de deux ordres potentiels au deſſous de dx, répond celui où une Courbe eſt perpendiculaire & a une Aſymptote, & où $dy = \infty$ eſt de deux ordres potentiels au deſſus de $dx = \frac{1}{\infty}$. Au cas où une Courbe eſt parallele ſans avoir d'Aſymptote, & a un dernier $dy = dy^2$, & par conſéquent d'un ordre potentiel au deſſous de dx, répond celui où une

M.E.C.D. 2017

Courbe perpendiculaire, ſans avoir d'Aſymptote, a un dernier $dy = 1$, & par conſéquent d'un ordre potentiel au deſſus de $dx = \frac{1}{\infty}$. Donc aux cas où des Courbes paralleles ſans Aſymptote ont des dy nuls par rapport à dx, quoiqu'ils ne ſoient que de quelques ordres radicaux au deſſous, & non d'un ordre potentiel entier, doivent répondre ceux où des Courbes perpendiculaires ſans Aſymptote auront des dy infinis par rapport à $dx = \frac{1}{\infty}$, quoiqu'ils ne ſoient que de quelques ordres radicaux, & non d'un ordre potentiel au deſſus de dx.

Il eſt vrai que dans le paralléliſme les dy qui ne ſeront au deſſous de dx que de quelques ordres radicaux, ſeront en même temps, par rapport au Fini, du 2^d ordre potentiel, dx étant du 1er, & que dans la perpendicularité les dy qui ſeront de quelques ordres radicaux au deſſus de $dx = \frac{1}{\infty}$, ſeront du même ordre potentiel que $\frac{1}{\infty}$ par rapport au fini, mais ce *par rapport au fini* ſignifie ſeulement que ces différences d'ordres radicaux nous échappent, & cela n'empêche pas que réellement & abſolument dy qui ſera d'un ordre radical au deſſus de dx, ne ſoit autant infini par rapport à dx, qu'il eſt infiniment petit ou nul par rapport à ce même dx, quand il eſt d'un ordre radical au deſſous, & que ſi dans le 2^d cas ſa petiteſſe infinie par rapport à dx ſuffit pour le paralléliſme, ſa grandeur infinie par rapport à dx dans le 1er cas ne doive ſuffire pour la perpendicularité.

982. dx peut n'exiſter plus dans la perpendicularité, & alors il eſt $= 0$, ou $= \frac{1}{\infty^2}$, ou à tel Infiniment petit qu'on voudra d'un ordre plus bas. Mais s'il exiſte, il ne peut jamais être d'un ordre plus élevé que $\frac{1}{\infty}$, non pas même plus grand que $\frac{1}{\infty}$, parce qu'il a été ſuppoſé conſtant. Donc toute ſuppoſition qui rendra dx plus grand que $\frac{1}{\infty}$ ſera impoſſible. Donc ſi une Courbe étant arrivée à la perpendicularité par un cours infini, la ſuppoſition de $dy = 1$, rend dx plus grand que $\frac{1}{\infty}$, il n'eſt point vrai que le dernier dy de cette

M.E.C.D. 2017

Courbe ſoit $=\infty$ 1, mais ſeulement de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & c'eſt alors qu'il faut voir de laquelle des deux manieres de l'art. précédent dx eſt nul par rapport à dy, car il eſt viſible que les deux ne peuvent pas être enſemble. Donc en ce cas ſi la ſuppoſition de $dx = \frac{1}{\infty^2}$ tombe dans l'impoſſible, la perpendicularité ſe fait de la 2de maniere.

EXEMPLE I.

Exemples dans la perpendicularité des premieres Paraboles de chaque degré tranſpoſées, perpendicularité toujours croiſſante.

983. Si on tranſpoſe l'axe de la Parabole ordinaire, ce qui la rendra perpendiculaire à ſon extrémité, au lieu qu'elle y étoit parallele, & changera les x en y, & les y en x, l'équation ſera $y = x^2$, d'où ſuit $dy = 2xdx$, ou $dy . dx :: 2x . 1$.

On voit d'abord que x infini rend dy infini par rapport à dx, & par conſéquent on voit, mais ſeulement d'une vue générale & confuſe, que la Courbe arrive à la perpendicularité par un cours infini.

Ici x infini eſt $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964).

Si $dy = 1$, ce qui ne paroît point impoſſible à la ſeule vue de l'équation, donc $2\infty^{\frac{1}{2}} (2x) . 1 :: 1 (dy) . \frac{1}{2\infty^{\frac{1}{2}}} (dx)$, & dx ſeroit d'un ordre radical au deſſus de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt impoſſible (982). Donc dy eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc la Courbe eſt dans le cas que dx y ſoit nul par rapport à dy de l'une des deux manieres de l'art. 981.

Si $dx = \frac{1}{\infty^2}$, donc $\frac{1}{\infty} (dy) . \frac{1}{\infty^2} (dx) :: 2\infty^{\frac{1}{2}} (2x) . 1$, donc $dy = \frac{2\infty^{\frac{1}{2}}}{\infty^2} = \frac{2}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Mais il étoit dans tout le cours de la Courbe de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc il étoit ce qu'il ſeroit devenu à l'extrémité $:: \infty^{\frac{3}{2}} . \infty^{\frac{2}{2}}$. Donc à l'extrémité du cours il ſeroit moindre d'un ordre radical, ou ſeroit décrû, ce qui eſt impoſſible dans une Courbe qui va à la perpendiculari-

M.E.C.D. 2017

té. Donc dx ſubſiſte, & la perpendicularité ſe fait de la ſeconde maniere.

Et comme dx exiſtant eſt conſtant, c'eſt à lui à régler la grandeur de dy. Donc 1. $2\infty^{\frac{1}{2}}(2x) :: \frac{1}{\infty}(dx) . \frac{2}{\infty^{\frac{1}{2}}}(dy)$.

Donc la perpendicularité ſe fait par un dy qui eſt à $dx :: \infty . \infty^{\frac{1}{2}}$, c'eſt-à-dire, du même ordre potentiel par rapport au fini, mais élevé d'un ordre radical.

EXEMPLE II.

984. Si l'on rend perpendiculaire à ſon extrémité la 1re Parabole cubique par la tranſpoſition de l'axe, l'équation ſera $y = x^3$, d'où ſuit $dy = 3x^2dx$, ou $dy . dx :: 3x^2 . 1$.

On trouvera, en faiſant les mêmes raiſonnemens que dans l'art. précédent,

Que dy ne peut être $= 1$, parce que dx deviendroit $= \frac{1}{3\infty^{\frac{2}{3}}}$ infiniment plus grand que $\frac{1}{\infty}$.

Que dy étant donc de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dx ne peut être $= \frac{1}{\infty^2}$, parce que dy ſeroit $= \frac{3}{\infty^{\frac{4}{3}}}$ d'un ordre au deſſous de $\frac{1}{\infty}$.

Et qu'enfin dx étant $= \frac{1}{\infty}$, dy ſera $= \frac{3}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, & par conſéquent l'ordre de dx à celui de $dy :: \infty^{\frac{1}{3}} . \infty^{\frac{3}{3}}$, ou dx de deux ordres radicaux au deſſous de dy, quoiqu'ils ſoient tous deux du même ordre potentiel par rapport au fini.

985. On voit aſſez par-là que n étant le degré des Paraboles, le dernier dy des 1res Paraboles de chaque degré rendues perpendiculaires à leur extrémité, ſera $\frac{n}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, ou, en négligeant le coëfficient n, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & que par conſéquent dx

M.E.C.D. 2017

étant toujours $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n}}}$, dx & dy de cette extrémité perpendiculaire seront toujours :: $\infty^{\frac{1}{n}} . \infty^{\frac{n}{n}}$, c'est-à-dire, que dx & dy étant toujours par rapport au fini de l'ordre potentiel de $\frac{1}{\infty}$, dx sera d'autant d'ordres radicaux au dessous de dy que 1 aura d'unités moins que n.

986. Puisque la perpendicularité consiste dans le rapport infini de dy à dx, plus ce rapport sera grand, plus la perpendicularité sera grande. Or plus n est grand, plus le rapport de $\infty^{\frac{n}{n}}$ à $\infty^{\frac{1}{n}}$, ou de dy à dx (985) est grand. Donc plus le degré est élevé, plus les 1res Paraboles de chaque degré sont perpendiculaires à leur extrémité, ce qui doit être en effet, puisqu'elles en étoient d'autant plus paralleles, lorsqu'elles étoient paralleles (970), & que le paralléliſme & la perpendicularité ne sont réellement que la même chose.

EXEMPLE III.

Exemples dans la perpendicularité des dernieres Paraboles de chaque degré transposées, perpendicularité toujours décroissante.

987. Soit la 2de Parabole cubique $y^2 = x^3$ rendue perpendiculaire à son extrémité.

On trouvera, en suivant les raisonnemens des deux Exemples précédens, que son dernier dy est $= \frac{3}{2\infty^{\frac{2}{3}}}$.

988. En général le dernier dy de la derniere Parabole de chaque degré, ainsi rendue perpendiculaire à son extrémité, est $\frac{n}{\overline{n-1} \times \infty^{\frac{n-1}{n}}}$ ou $\frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$. D'où il suit que dy dans ces dernieres Paraboles étant toujours de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, il approche d'autant plus de n'être que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ ou de l'ordre de dx que n est plus grand, & que par conséquent le rapport infini de dy à dx, ou la perpendicularité est

eſt toujours d'autant moindre que ces dernieres Paraboles ſont d'un degré plus élevé, ce qui revient à l'art. 974.

Il eſt aiſé d'appliquer aux Paraboles moyennes, rendues perpendiculaires à leur extrémité, ce qui en a été dit dans les art. 976, &c. 980, lorſqu'elles étoient paralleles.

Tout ce que nous avons dit ſur ces Paraboles paralleles ou perpendiculaires à leur extrémité, pourroit ſe démontrer par un calcul général, & ſans les tentatives que nous avons faites; mais nous avons cru que ces tentatives mêmes, quoique moins élégantes, feroient mieux entrer dans la nature de la choſe, & dans les principes eſſentiels.

Détermination du paralléliſme & de la perpendicularité à l'origine des Courbes.

989. Maintenant examinons le paralléliſme & la perpendicularité à l'origine des Courbes.

Pour avoir le point de cette origine, il faut ſuppoſer $x = 0$, ou, ce qui eſt le même, $= dx$; car l'étendue de l'axe à laquelle la Courbe ſe rapporte eſt nulle, quand la Courbe commence à s'y rapporter, ou commence ſon cours.

Si la ſuppoſition de $x = dx$ rend $y = 0 = dy$, non-ſeulement la Courbe ne commence à ſe rapporter à l'axe qu'au point où $x = dx$, mais elle part de l'axe en ce point-là.

Si $x = dx$ rend y finie, la Courbe ne part point d'un point de l'axe, mais d'un point élevé au-deſſus.

Si $x = dx$ rend $y = \infty$, ce n'eſt pas là proprement une origine de la Courbe, puiſqu'au point où $x = dx$, répond un cours vertical infini, par où il n'eſt pas naturel de concevoir que la Courbe ait commencé. Ainſi dans l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, $ab = xy$, la ſuppoſition de $x = dx$ rend $y = \infty$. En ce cas on fixe arbitrairement l'origine de la Courbe à quelque point où x ſera fini, afin d'avoir une y finie. Dans l'Hyperbole, par exemple, ſi $x = a$, $y = b$, & la Courbe à ſon origine a un point élevé au-deſſus de l'axe de la quantité b.

Si x n'entre point dans l'équation de la Courbe, y y entrera, & en le ſuppoſant $= dy$, on aura le point de ſon origine, & où elle part de ſon axe. Ainſi dans la Logarithmique, où $dy. dx :: y. a$, on a une origine de la Courbe, en

M.E.C.D. 2017

ſuppoſant $y = dy$. Ce n'eſt pas cependant une origine abſolue, car on peut ſuppoſer y de tel ordre d'Infiniment petit qu'on voudra (957).

990. Il faut juger du paralléliſme ou de la perpendicularité à l'origine d'une Courbe, comme on en a jugé à ſon extrémité infiniment éloignée. Le rapport de dy à dx ayant été tiré de l'équation de la Courbe géométrique, ou donné par celle de la méchanique, il doit devenir nul, ou infini: mais parce qu'il s'agit de l'origine de la Courbe, il faut que x ſoit $= dx$, & $y = dy$, s'ils peuvent l'être tous deux, ou du moins l'un des deux, après quoi on voit de quel ordre ſont dy & dx, l'un par rapport à l'autre, ce qui eſt la détermination préciſe du rapport.

991. Dans le paralléliſme, dx étant néceſſairement $= \frac{1}{\infty}$, c'eſt lui qui doit régler la valeur dont deviendra dy. Et ſi l'origine de la Courbe a donné $y = dy$, il faut prendre garde qu'alors ce dy eſt une Ordonnée infiniment petite, & non la différence de deux Ordonnées, comme il l'eſt par-tout ailleurs, & que le paralléliſme conſiſtant en deux Ordonnées égales, il y a donc alors deux Ordonnées $= dy$, qui ont leur différence infiniment plus petite que ces dy, ou $= ddy$.

EXEMPLE I.

Exemples dans le paralléliſme de l'origine des premieres Paraboles de chaque degré tranſpoſées, paralléliſme toujours croiſſant.

992. Si on tranſpoſe l'axe de la Parabole ordinaire, ou du 2d degré, on a $dy. dx :: 2x. 1$ (983), d'où l'on voit auſſi-tôt que ſi $x = dx$, ce qui détermine l'origine de la Courbe, dy eſt nul par rapport à dx, & par conſéquent la Courbe parallele à ſon origine.

993. Puiſque $dy = 2dxdx = 2dx^2$, dy eſt du 2d ordre d'Infiniment petit. Et parce que le dy de cette équation eſt toujours une différence, il faut concevoir à l'origine de la Courbe, où elle eſt parallele, deux Ordonnées égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ou $= dy$, dont la différence eſt $= \frac{1}{\infty_2} = ddy$ (991). Donc l'équation ou l'analogie eſt devenue $ddy. dx :: 2dx. 1$.

M.E.C.D. 2017

EXEMPLE II.

994. Si on transpose l'axe de la 1re Parabole cubique, on a $dy.\ dx :: 3x^2.\ 1$ (984). D'où suit à l'origine, $dy.\ dx :: 3dx^2.\ 1$, & par conséquent le parallélisme. Donc, selon le raisonnement de l'art. précédent, l'analogie devient $dddy.\ dx :: 3dx^2.\ 1$, c'est-à-dire, que la différence des deux Ordonnées égales & de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ qui causent le parallélisme à l'origine de la Courbe, est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & que par conséquent cette Courbe à son origine est plus parallele que la Parabole du 2d degré, de même qu'elle est plus perpendiculaire à son extrémité (986).

995. En général les 1res Paraboles de chaque degré auront toujours par la transposition de l'axe le dy de l'origine $= \frac{1}{\infty}$, n étant le degré.

996. Il n'y a point d'inconvenient que la Suite des dy, qui doivent dans tout le cours de ces Courbes être de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, commence par $dy^3 = \frac{1}{\infty^3}$, ou $dy^4 = \frac{1}{\infty^4}$, &c. car elle auroit pu commencer par o, c'est-à-dire, par la différence absolument nulle de deux Ordonnées absolument égales, à plus forte raison peut-elle commencer par un dy plus grand.

EXEMPLE III.

997. Dans la 2de Parabole cubique, dont l'axe est transposé, $dy.\ dx :: 3x^2.\ 2y$. D'où suit le parallélisme à l'origine.

998. De cette analogie suit, en négligeant les coëfficiens, $dy^2 = dx^3$; & parce que dx est $= \frac{1}{\infty}$, $dy^2 = \frac{1}{\infty^3}$. Donc $dy = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc dy n'est ici que d'un ordre radical au-dessous de $dx = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{2}}}$.

Exemples dans le parallélisme de l'origine des dernieres Paraboles de chaque degré transposées, parallélisme toujours décroissant.

999. De même dans la derniere Parabole transposée du 4me degré, $y^3 = x^4$, $dy.\ dx :: 4x^3.\ 3y^2$. D'où suit le dy de

M.E.C.D. 2017

l'origine $= \frac{1}{\frac{4}{3}}$. Et en général dans la derniere Parabole de chaque degré ∞ le *dy* de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, d'où il ſuit que ces Paraboles ſeront toujours à leur origine d'autant moins paralleles que le degré ſera plus élevé. Il eſt aiſé de voir le rapport de cet art. aux art. 974 & 987.

Détermination de la perpendicularité des Courbes à leur origine.

1000. Il reſte à voir les Courbes perpendiculaires à leur origine.

dy y eſt infini par rapport à *dx*, qui eſt ou zero, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Donc après avoir fait la ſuppoſition qui détermine l'origine de la Courbe, il faut toujours ſuppoſer $dy = \frac{1}{\infty}$, & l'équation donne enſuite ce que devient *dx*.

EXEMPLE I.

Exemples dans la perpendicularité de l'origine des premieres Paraboles de chaque degré, perpendicularité toujours croiſſante.

1001. Soit la Parabole ordinaire où $dy.\ dx :: 1.\ 2y$, on voit que la ſuppoſition de $y = dy$, qui détermine l'origine de la Courbe, rend *dy* infini par rapport à *dx*, & par conſéquent la Courbe perpendiculaire, & $dx = \frac{1}{\infty^2}$. Ou, ſi on veut tenir compte des coëfficiens, $\frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{\infty^2}$.

EXEMPLE II.

1002. Dans la 1re Parabole cubique où $dy.\ dx :: 1.\ 3y^2$, *dx* à l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^3}$. Et en général dans toutes les 1res Paraboles *dx* à l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$; d'où il ſuit qu'elles y ſont toujours d'autant plus perpendiculaires que leur degré eſt plus élevé.

EXEMPLE III.

Exemples dans la perpendicularité de l'origine des dernieres

1003. Dans la 2de Parabole cubique, $dy.\ dx :: 2x.\ 3y^2$, & à l'origine $dx^2 = \frac{1}{\infty^3}$, puiſque $dy = \frac{1}{\infty}$ (1000), donc $dx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$.

M.E.C.D. 2017

1004. De même dans la derniere Parabole du 4me degré, où $dy.\ dx :: 3x^2.\ 4y^3$, dx de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$. Et en général le dx de l'origine de la derniere Parabole de chaque degré eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, d'où il ſuit que dx eſt toujours, par rapport au fini, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & toujours d'un ordre radical ſeulement au-deſſous de dy, que le rapport infini de dy à dx eſt d'autant moindre que le degré n de ces Paraboles eſt plus élevé, & que par conſéquent elles en ſont à leur origine d'autant moins perpendiculaires.

Paraboles de chaque degré, perpendicularité toujours décroiſſante.

1005. Puiſque dans les 1res Paraboles de chaque degré tranſpoſées, le dy de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$ (995), que dans les dernieres Paraboles tranſpoſées de même, il eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$ (999), que dans les 1res & dernieres Paraboles priſes à l'ordinaire, le dx de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$, ou $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$ (1002 & 1004), il eſt aiſé de juger que dans les degrés qui auront des Paraboles moyennes, ces dy ou dx ſeront des $\frac{1}{\infty}$, où ∞ ayant toujours n pour numérateur de ſon expoſant, les dénominateurs ſeront la Suite des nombres naturels qui ſeront entre 1 & $n - 1$. Ainſi dans le 5me degré le dy ou dx des deux Paraboles extremes étant $\frac{1}{\infty^5} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{1}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, ceux des deux Paraboles moyennes ſeront $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{3}}}$.

1006. Nous avons vû tout ce qui appartient à la poſition des Courbes par rapport à un axe, tant à leur extrémité qu'à leur origine, c'eſt-à-dire, dans les cas extremes où elles vont dans l'Infini, ou tombent dans l'Infiniment petit, & ces cas ſont ceux qui par eux-mêmes peuvent avoir le plus de difficulté. Reſtent ceux où le cours de la Courbe n'étant

Regle des Tangentes, ou Soutangentes, appliquée ſeulement aux cas extremes.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

pris que fini, il s'agit de trouver sa position par rapport à l'axe, en quelque point que ce soit, ou, ce qui est le même, de tirer sa Tangente à un point quelconque, ou, ce qui est encore le même, de déterminer l'étendue de la Soutangente sur l'axe. Cela est compris, & même les cas extremes, dans la Formule générale des Soutangentes $\frac{y\,dx}{dy}$, présentement si connue par le Livre des *Infiniment petits*, & par l'usage que les Géometres en font tous les jours. Il seroit inutile d'en faire de nouvelles applications aux cas où il ne s'agit que de tirer des Tangentes à un point quelconque d'une Courbe pris dans un cours fini. Je considérerai seulement les Soutangentes dans les cas extremes, où l'on se contente de voir en gros que la Courbe se perd dans l'infiniment grand ou petit, sans rechercher les variétés de ces Infinis.

FIG. II. Un côté quelconque *Mm* étant prolongé jusqu'à l'axe en *T*, ce qui fait la Tangente *MT* au point *M*, la ligne *PT*, comprise entre le point *T* & *P* d'où part l'Ordonnée *PM* correspondante à *Mm*, est la Soutangente, & il est très-facilement démontré que $Rm\,(dy).\ MR = Pp\,(dx) :: PM\,(y) : PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)$. Donc le principe fondamental de la Théorie des Soutangentes est que le rapport de *dy* à *dx* est le même que celui de l'Ordonnée à la Soutangente.

Donc dans le paralléliſme, *dy* étant nul par rapport à *dx* ou *dx* infini par rapport à *dy*, la Soutangente est infinie par rapport à l'Ordonnée. Et dans la perpendicularité, *dy* étant infini par rapport à *dx*, l'Ordonnée est infinie par rapport à la Soutangente, & on le verra à l'œil, si on veut, par des Figures.

Voyons d'abord les Soutangentes dans le paralléliſme, & premierement celles de l'extrémité des Courbes.

EXEMPLE I.

Soutangentes infinies croiſ-

1007. Si l'on cherche quelle est la Soutangente de la Parabole ordinaire à son extrémité, où selon les idées ordinaires

M.E.C.D. 2017

$y = \infty$ à cauſe de l'extrémité, $dy = \frac{1}{\infty^2}$, & $dx = \frac{1}{\infty}$ à cauſe du paralléliſme, on aura $\frac{ydx}{dy} = \infty \times \frac{1}{\infty}$ diviſé par $\frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent la Soutangente $= \infty^2$. Il eſt bien vrai qu'elle doit être infinie, mais pourquoi du 2^d ordre ?

ſantes dans un ſeul ordre à l'extrémité parallele des premieres Paraboles.

On comprend bien qu'une partie de cette Soutangente étant l'axe même tiré depuis l'extrémité du cours de la Courbe juſqu'à ſon origine, la Soutangente eſt déja infinie, quand elle vient à l'origine de la Courbe, & que de-là elle doit encore avoir une étendue infinie, ce qui la rend un plus grand Infini que ſi, comme la Soutangente du point où le Cercle eſt parallele à ſon axe, elle n'étoit que finie, lorſqu'elle viendroit à l'origine de la Courbe : mais la Soutangente de la Parabole ne doit pas être pour cela d'un ordre ſupérieur. Auſſi n'en eſt-elle pas, & l'erreur eſt venue des Infinis mal caractériſés.

A l'extrémité de la Parabole $y = \infty^{\frac{1}{2}}$ (964), $dx = \frac{1}{\infty}$ à cauſe du paralléliſme, & $dy = \frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$ (966). Donc $\frac{ydx}{dy} = \infty^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\infty}$ diviſé par $\frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}}$, $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ diviſé par $\frac{1}{2\infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{\infty^{\frac{1}{2}}} = 2\infty$.

Et en effet la Soutangente de la Parabole eſt par-tout $= 2x$, & par conſéquent dans l'Infini $= 2\infty$.

Il eſt vrai qu'en appliquant à l'Infini la Formule de la Soutangente de la Parabole $= 2x$, on l'eût trouvée d'abord $= 2\infty$: mais cela ne ſe fût plus trouvé en appliquant immédiatement à l'extrémité de la Parabole la Formule générale $\frac{ydx}{dy}$, & l'on ſeroit tombé dans une difficulté.

EXEMPLE II.

1008. Dans toutes les 1res Paraboles y infini eſt $=$

M.E.C.D. 2017

$\infty^{\frac{1}{n}}$, $dy = \frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$ (969), & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cauſe du parallélifme de l'extrémité. Donc $ydx = \infty^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty^{\frac{1}{n}}}{\infty}$

$= \infty^{\frac{1n-1}{n}} = \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$, diviſé par $\frac{1}{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}$

$= \frac{n\infty^{\frac{2n-1}{n}}}{\infty^{\frac{1-n}{n}}} = n\infty$.

1009. Donc dans toutes les 1res Paraboles la Soutangente de l'extrémité eſt toujours de l'ordre de ∞, & toujours d'autant plus grande que le degré des Paraboles eſt plus élevé. Cela répond à ce que les Paraboles ſont d'autant plus paralleles à leur extrémité que leur degré eſt plus éleve (970). Car ſi le parallélifme rend la Soutangente infinie, un plus grand parallélifme la doit rendre un plus grand Infini. Et comme le parallélifme croiſſant de ces Paraboles eſt renfermé dans un ſeul ordre potentiel (970), auſſi leurs Soutangentes croiſſantes ſont renfermées toutes dans le ſeul ordre de ∞.

EXEMPLE III.

Soutangentes infinies décroiſſantes dans un ſeul ordre à l'extrémité parallelle des dernieres Paraboles.

1010. Dans toutes les dernieres Paraboles, y infini eſt $= \infty^{\frac{n-1}{n}}$. $dy = \frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$ (973) & $dx = \frac{1}{\infty}$. Donc $ydx = \frac{\infty^{\frac{n-1}{n}}}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ diviſé par $\frac{n-1}{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}$

$= \frac{n\infty^{\frac{n+1}{n}}}{n-1 \times \infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{n\infty}{n-1}$.

Par exemple, la Soutangente de la derniere Parabole du 5me degré à ſon extrémité eſt $\frac{5\infty}{4}$.

1011. Donc dans toutes ces Paraboles les Soutangentes infinies

M.E.C.D. 2017

infinies de l'extrémité ſont d'autant moindres que le degré des Paraboles eſt plus élevé ; ce qui répond à ce qu'elles en ſont d'autant moins paralleles (974). Il ne faut qu'appliquer ici l'art. 1009 renverſé.

1012. Il ſera aiſé de trouver les Soutangentes des Paraboles moyennes. Et en général la Soutangente d'aucune Parabole ne paſſera l'ordre de ∞.

1013. Lorſqu'une Courbe qui va en s'élevant au deſſus de ſon axe par un cours infini, & eſt parallele à ſon extrémité, a une Aſymptote, elle a donc une derniere Ordonnée finie, & dy d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{\infty^2}$ (800, &c. 809). Soit $dy = \frac{1}{\infty^3}$. Donc alors $dy\left(\frac{1}{\infty^3}\right)$. $dx\left(\frac{1}{\infty}\right)$ :: 1 (*y*). $\frac{\infty^3}{\infty} = \infty^2\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$. Donc la Soutangente eſt un Infini du 2d ordre. Et comme ce raiſonnement eſt général, & que les Courbes paralleles à leur extrémité & qui ont une Aſymptote, peuvent avoir un dernier dy d'un ordre d'Infiniment petit ſi bas qu'on voudra (808 & 809), la Soutangente en général ſera de l'ordre de ∞^n, n plus grand que 1 exprimant le nombre d'ordres dont dy eſt au deſſous de dx.

Soutangentes infinies de tous les ordres à l'extrémité parallele des Courbes Aſymptotiques, qui s'élevent au deſſus de l'axe.

EXEMPLE IV.

1014. Dans la Courbe de l'art. 962, $x = \infty$ rend $y = a$, & dy eſt alors $\frac{2a^3}{\infty^4}$. Donc $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a}{\infty}$ diviſé par $\frac{2a^3}{\infty^4} = \frac{a\,\infty^4}{2a^3\,\infty} = \frac{\infty^3}{2a^2}$, Soutangente du 3me ordre d'Infini, parce que dy étoit de trois ordres au deſſous de dx.

1015. Le paralléliſme qui ſe fait par dy^3 étant infiniment plus grand que celui qui ſe fait par dy^2, & toujours ainſi de ſuite, parce que dy^2 eſt infini par rapport à dy^3, &c. les Soutangentes qui répondent à ces paralléliſmes ſont auſſi infiniment plus grandes ſelon la même raiſon, ce qui fait une analogie parfaite avec l'art. 1009.

1016. On voit aſſez par l'art. 1013, & par l'Exemple qui le ſuit, qu'une Courbe qui auroit à ſon extrémité parallele

M.E.C.D. 2017

une Soutangente de l'ordre de ∞^2, auroit auſſi une Aſymptote, & par conſéquent qu'il n'y a que les Courbes à Aſymptotes qui à leur extrémité parallele aient des Soutangentes d'un ordre ſupérieur à ∞.

Soutangentes finies à l'extrémité parallele des Courbes, qui viennent joindre leur axe par un cours fini ou infini.

1017. Si une Courbe qui deſcend vers ſon axe, vient à le joindre, & lui eſt parallele à ſon extrémité, ou, ce qui eſt le même, à un dernier côté qui ſoit une partie infiniment petite de cet axe, ſes deux dernieres Ordonnées ſont néceſſairement au moins de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & leur dy de l'ordre immédiatement inférieur. C'eſt ſa valeur tirée de l'équation différentielle qui regle celle de y correſpondant, puiſqu'il eſt toujours de l'ordre immédiatement ſupérieur.

Si $dy = \frac{1}{\infty^2}$, donc $dy\left(\frac{1}{\infty^2}\right) . dx\left(\frac{1}{\infty}\right) :: y\left(\frac{1}{\infty}\right) . 1\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$.

Si $dy = \frac{1}{\infty^3}$, donc $dy\left(\frac{1}{\infty^3}\right) . dx\left(\frac{1}{\infty}\right) :: y\left(\frac{1}{\infty^2}\right) . 1\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$.

Et il eſt clair qu'il en ira toujours de même, & que quelque valeur qu'ait dy, la Soutangente ſera toujours finie, au lieu qu'elle eſt toujours infinie dans le paralléliſme des Courbes qui s'élevent au deſſus de leur axe, ſoit finiment, ſoit infiniment. Il faut entendre par 1, toujours égal à la Soutangente, l'unité indéterminée, c'eſt-à-dire, ſeulement une grandeur finie plus grande ou plus petite, ſelon les conditions de chaque Courbe particuliere.

1018. La Soutangente 1 eſt toujours infinie par rapport à l'Ordonnée, qui eſt $\frac{1}{\infty}$, ou $\frac{1}{\infty^2}$, &c.

1019. Si $dy = \frac{1}{\infty^2}$, la Courbe n'a point d'Aſymptote, & la Soutangente n'eſt que d'un ordre au deſſus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$. Mais ſi $dy = \frac{1}{\infty^3}$, ou inférieur, la Courbe a une Aſymptote qui eſt ſon axe, & la Soutangente eſt d'autant d'ordres au deſſus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty^2}$ ou $\frac{1}{\infty^3}$, &c. qu'il y a d'ordres, dont dy eſt au deſſous de dx, ce qui fait voir l'analogie parfaite de cet art. avec l'art. 1013.

M.E.C.D. 2017

EXEMPLE V.

1020. Soit l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes, où lorſque $x = \infty$, ce qui la rend parallele, dy eſt $= \frac{1}{\infty^3}$ (960). Donc $y = \frac{1}{\infty^2}$. Donc $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{\infty^3}{\infty^3} = 1$.

EXEMPLE VI.

1021. De même dans la Logarithmique, où $dy \,.\, dx :: y \,.\, a$, en ſuppoſant $dy = \frac{1}{\infty^3}$ pour donner à la Courbe un cours infini (955), & par conſéquent $y = \frac{1}{\infty^2}$, on a la Soutangente $= 1$, & cet 1 eſt $= a$ par la nature de la Logarithmique, dont la Soutangente eſt conſtante & $= a$.

1022. Si dans cette Courbe on n'avoit ſuppoſé dy que $= \frac{1}{\infty^2}$, ce qui étoit poſſible, on n'auroit eu la Soutangente $= 1 = a$ que d'un ordre au deſſus de l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$, mais auſſi la Courbe ainſi priſe, n'auroit pas eu un cours infini, ni une Aſymptote.

1023. Pour ſe repréſenter nettement ces Soutangentes finies de l'extrémité de l'Hyperbole & de la Logarithmique du côté qu'elles deviennent paralleles, il faut concevoir que ſi ces Courbes ſont tracées à la droite du point qu'on leur a donné pour origine, leurs Tangentes & par conſéquent leurs Soutangentes ſont toujours à la droite du point de la Courbe auquel elles appartiennent, & par conſéquent lorſque ces Courbes ſont devenues paralleles ou confondues avec l'axe à l'extrémité de cet axe infini, il faut concevoir encore au de-là une ligne finie ou prolongement fini de l'axe, qui eſt la Soutangente, & en même temps la Tangente, comme il eſt aiſé de le voir. Ainſi la Tangente de ces Courbes à leur extrémité n'eſt pas l'axe infini ou l'Aſymptote, ce qu'on auroit pu s'imaginer, car cette extrémité étant poſée ou conçue, l'axe infini eſt à ſa gauche, & la Tangente ou Soutangente doit être à la droite, & c'eſt effectivement une ligne finie qui y eſt. Il en ira de même des autres Courbes confondues

M.E.C.D. 2017

avec leur axe au bout d'un cours infini ; & il eſt aiſé de voir que la raiſon eſſentielle en eſt que par la ſuppoſition préſente elles deſcendent vers leur axe, & s'inclinent toujours vers cet axe, puiſqu'elles tendent au paralléliſme.

Soutangentes finies à l'origine parallele des Courbes.

1024. Si une Courbe à ſon origine eſt parallele à ſon axe, ou confondue avec une portion infiniment petite de cet axe, y ſera au moins $= \frac{1}{\infty}$, & dy au moins $= \frac{1}{\infty^2}$, & ce cas eſt entierement le même que celui de l'art. 1017, & en effet il doit l'être, puiſque ce n'eſt que le même paralléliſme qui ſe fait à l'origine ou à l'extrémité d'un cours. Toute la différence des deux cas eſt que dans le premier dy d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$ marque un Aſymptotiſme, parce qu'il s'agit de l'extrémité d'un cours infini, & ici il n'en marque point, parce qu'il s'agit de l'origine d'un cours. Donc ici comme là la Soutangente eſt finie.

EXEMPLE VII.

1025. Dans toutes les 1res Paraboles rendues à leur origine paralleles à leur axe, le dy de l'origine eſt $= \frac{1}{\infty^n}$ (995), donc $y = \frac{1}{\infty^{n-1}}$ (1017), donc $y\,dx = \frac{1}{\infty^{n-1}} \times \frac{1}{\infty}$ $= \frac{1}{\infty^n}$, & $\frac{y\,dx}{dy} = 1$.

EXEMPLE VIII.

1026. Dans toutes les dernieres Paraboles rendues à leur origine paralleles à leur axe, le dy de l'origine eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$ (998), donc $y = \frac{1}{\infty^{\frac{n-n+1}{n-1}}}$ (1017) $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$, donc $y\,dx$ $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n-1}}}$, donc $\frac{y\,dx}{dy} = 1$.

1027. Puiſque les Soutangentes des Paraboles extremes rendues paralleles à leur origine ſont finies, il eſt aiſé de juger que celles des Paraboles moyennes le ſeront auſſi.

M.E.C.D. 2017

1028. Dans les 1res Paraboles, les y de l'origine étant $= \frac{1}{\infty^{n-1}}$ (1025), plus le degré n de la Parabole eſt élevé, plus $y = \frac{1}{\infty^{n-1}}$ eſt d'un ordre inférieur à la Soutangente toujours finie, ou plus la Soutangente infinie, par rapport à l'Ordonnée, eſt d'un ordre élevé au deſſus de l'Ordonnée. Et en effet cela doit être, puiſque ces Paraboles à leur origine ſont d'autant plus paralleles que n eſt plus grand (970), & que de plus le paralléliſme qui ſe fait par dy^3 eſt infiniment plus grand que celui qui ſe fait par dy^2, & toujours ainſi de ſuite.

Soutangentes finies à l'origine parallele des premieres Paraboles tranſpoſées, toujours d'un ordre plus élevé par rapport à leurs Ordonnées correſpondantes.

1029. Dans les dernieres Paraboles $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n-1}}}$ (1026) eſt d'un ordre d'autant moins inférieur à la Soutangente finie, que n eſt plus grand, & cela, parce que ces Paraboles en ſont auſſi d'autant moins paralleles (974).

Soutangentes finies à l'origine parallele des dernieres Paraboles tranſpoſées, toujours d'un ordre moins élevé par rapport à leurs Ordonnées.

1030. Voyons maintenant les Soutangentes dans la perpendicularité, & premierement à l'extrémité du cours infini des Courbes.

y ſera toujours $= \infty$. dy ſera ou $= \frac{1}{\infty}$, ou $= 1$, ou $= \infty$ (981).

Si $dy = \frac{1}{\infty}$, & qu'en même temps dx exiſte, ce qui eſt poſſible (981), la Soutangente eſt infinie; car $y\,dx = \infty \times \frac{1}{\infty} = 1$, & $\frac{y\,dx}{dy} = 1$ diviſé par $\frac{1}{\infty} = \infty$.

Si $dy = 1$, la Soutangente eſt finie, car $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{1}{1} = 1$.

Si $dy = \infty$, la Soutangente eſt infiniment petite, car dy étant $= y$, $\frac{y\,dx}{dy} = dx = \frac{1}{\infty}$.

Soutangentes de l'extrémité perpendiculaire du cours infini des Courbes, qui peuvent être ou infinies, ou finies, ou infiniment petites.

1031. Il paſſe pour conſtant que la Soutangente eſt toujours nulle dans la perpendicularité, & la premiere des trois propoſitions précédentes paroîtra fort paradoxe. Mais 1°. l'idée commune s'eſt établie ſur ce qu'effectivement à l'origine des Courbes, ou à l'extrémité d'un cours fini, la Soutangente eſt nulle dans la perpendicularité, & ici il s'agit de

M.E.C.D. 2017

l'extrémité d'un cours infini. 2°. La grandeur infiniment grande ou petite de la Soutangente dans le paralléliſme ou dans la perpendicularité n'eſt point abſolue, mais relative à l'Ordonnée, & on va voir que quand la Soutangente eſt infinie dans la perpendicularité, elle eſt infiniment moindre que l'Ordonnée.

EXEMPLE I.

Soutangentes infinies & décroiſſantes de l'extrémité perpendiculaire des premieres Paraboles tranſpoſées.

1032. Dans les 1res Paraboles rendues perpendiculaires à leur extrémité, le dernier dy eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ (985). Donc $\frac{y\,dx}{dy} =$ 1 diviſé par $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \infty^{\frac{1}{n}}$.

Par exemple, dans la Parabole ordinaire, la Soutangente de ſon extrémité perpendiculaire eſt $\infty^{\frac{1}{2}}$, l'Ordonnée étant ∞.

1033. Et pour faire encore mieux voir la poſſibilité que cette Soutangente ſoit infinie malgré la perpendicularité, c'eſt que malgré la perpendicularité à laquelle tend la Courbe, les Soutangentes vont toujours en croiſſant.

Car l'équation de la Courbe étant $y = x^2$, d'où ſuit $dy = 2x\,dx$;

Si $y = 1$, donc $x = 1$, & $dy = 2\,dx$, & $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{1}{2}$.

Si $y = 2$, donc $x = \sqrt{2}$, & $dy = dx\,2\sqrt{2}$, & $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Or $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} \cdot 2$, donc les Soutangentes vont en croiſſant.

On trouvera de même que ſi $y = 3$, la Soutangente ſera $\frac{3}{2\sqrt{3}}$. Or $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} :: 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$ eſt moindre que $3\sqrt{2}$, ainſi qu'on le verra en quarrant ces grandeurs. Il en ira de même des autres valeurs plus grandes qu'on donnera à y. Donc puiſque les Soutangentes ſont croiſſantes malgré

M.E.C.D. 2017

la perpendicularité où la Courbe tend, il eſt naturel qu'elles arrivent à l'Infini, quand la Courbe arrive à la perpendicularité.

Mais en même temps que les Soutangentes ſont croiſſantes, elles ſont toujours plus petites par rapport aux Ordonnées. Par ex. la Soutangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eſt plus petite par rapport à ſon Ordonnée 2, que la Soutangente $\frac{1}{2}$ ne l'eſt par rapport à ſon Ordonnée 1. Car $\frac{1}{\sqrt{2}} . 2 :: 1 . 2\sqrt{2}$, & $\frac{1}{2} . 1 :: 1 . 2$.

De même $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ eſt moindre par rapport à 3, que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par rapport à 2. Car $\frac{3}{2\sqrt{3}} . 3 :: 3 . 6\sqrt{3} :: 1 . 2\sqrt{3}$.

1034. En pouſſant cette idée plus loin, on verra que ſi $y = 4$, $\frac{y\,dx}{dy} = 1$. Et comme $4 = 2\sqrt{4}$, on trouvera que les Ordonnées croiſſant comme les nombres naturels, le rapport de chaque Soutangente à ſon Ordonnée ſera celui de 1 à $2 = 2\sqrt{1}$, de 1 à $2\sqrt{2}$, de 1 à $2\sqrt{3}$, de 1 à $2\sqrt{4}$, &c. & en général celui de 1 à $2\sqrt{y}$.

1035. Donc le rapport de la derniere Soutangente à la derniere Ordonnée $= \infty$, ſera celui de 1 à $2\infty^{\frac{1}{2}}$, ou en négligeant le coëfficient 2, celui de 1 à $\infty^{\frac{1}{2}}$. Or $1 . \infty^{\frac{1}{2}} :: \infty^{\frac{1}{2}} . \infty$; & l'Ordonnée eſt $= \infty$. Donc la Soutangente malgré la perpendicularité eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{2}}$, ce qui revient à l'art. 1030, par une voie toute différente.

1036. Si on veut avoir non ſeulement l'ordre, mais encore la grandeur préciſe de cette derniere Soutangente, il faut la prendre $= \frac{\infty^{\frac{1}{2}}}{2}$. Et en effet dans l'art. 985, qui a produit l'art. 1032, dy eſt $= \frac{n}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & ce n'eſt qu'en ne conſidérant que l'ordre, qu'il eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

1037. Donc les dernieres Soutangentes des 1res Paraboles ſeront $\frac{\infty^{\frac{1}{2}}}{2}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{3}$, $\frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{4}$, &c. c'eſt-à-dire, toujours d'un

M.E.C.D. 2017

ordre radical inférieur, ou toujours moins infinies ou plus infiniment petites par rapport à la derniere Ordonnée toujours $= \infty$, & en même temps elles ſeront toujours moindres dans leur ordre, ce qui vient de ce que ces Paraboles ſont toujours à leur extrémité plus perpendiculaires (986).

EXEMPLE II.

Soutangentes infinies & croiſſantes de l'extrémité perpendiculaire des dernieres Paraboles tranſpoſées.

1038. Dans toutes les dernieres Paraboles rendues perpendiculaires à leur extrémité, le dernier dy eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{n-1}{n}}}$ (988), donc $\frac{y\,dx}{dy} = \infty^{\frac{n-1}{n}}$, Soutangente infinie toujours d'un ordre radical inférieur à ∞.

Par ex. dans la 2de Parabole cubique, la derniere Soutangente eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{2}{3}}$; & en remettant les coëfficiens finis de l'art. 988, ſa grandeur eſt $\frac{2\infty^{\frac{2}{3}}}{3}$.

1039. Et en effet ſi dans cette Parabole on prend ſucceſſivement $y = 1, = 2, = 3$, on aura pour Soutangentes correſpondantes $\frac{2}{3} = \frac{2\times 1^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{2\times 2^{\frac{2}{3}}}{3} \cdot \frac{2\times 3^{\frac{2}{3}}}{3}$. D'où l'on voit que l'expreſſion générale des Soutangentes de cette Parabole ſera $\frac{2\times y^{\frac{2}{3}}}{3}$, & que y étant $= \infty$, la Soutangente ſera $\frac{2\infty^{\frac{2}{3}}}{3}$.

Tout ce qui appartient à ces Soutangentes pourroit être prouvé par un calcul général, tiré de l'équation générale des Paraboles.

Il ſeroit inutile de s'arrêter aux réflexions qui naiſſent de-là. Elles ſe préſentent d'elles-mêmes.

1040. Les Soutangentes de toutes les Paraboles rendues paralleles à leur origine, & perpendiculaires à leur extrémité, commencent

M.E.C.D. 2017

commencent donc par être finies (1033 & 1039), & finiſſent par être infinies, de ſorte qu'elles forment des Suites toujours croiſſantes en elles-mêmes, mais décroiſſantes par rapport aux Suites des Ordonnées correſpondantes.

Soutangentes finies à l'extrémité perpendiculaire d'un cours infini.

1041. Si dans la Courbe qui arrive à la perpendicularité par un cours infini, le dernier dy eſt $= 1$, la Soutangente eſt finie (1030), & par conſéquent infiniment petite par rapport à l'Ordonnée, qui ne peut être qu'infinie, puiſque la Courbe eſt arrivée à la perpendicularité par un cours infini.

EXEMPLE III.

1042. Dans la Logarithmique, ſi $y = \infty$, $dy = 1$ (954). Donc $\frac{y\,dx}{dy} = 1$. Et en effet la Soutangente de cette Courbe eſt conſtante.

1043. C'eſt par ſa nature particuliere que cette Courbe, devenue perpendiculaire à ſon extrémité, a une Soutangente la même qu'elle avoit eue partout ailleurs, & par conſéquent finie, mais ce n'eſt pas par ſa nature particuliere qu'elle en a une finie, & par conſéquent une infinité d'autres Courbes auront auſſi une derniere Soutangente finie, pourvû que leur dernier dy ſoit $= 1$. Et comme la Suite des Soutangentes de la Logarithmique eſt compoſée de grandeurs toutes égales, mais toujours décroiſſantes par rapport aux Ordonnées, les Suites des Soutangentes de ces autres Courbes pourront être croiſſantes ou décroiſſantes en elles-mêmes, mais toujours néceſſairement décroiſſantes par rapport aux Ordonnées.

Soutangentes infiniment petites à l'extrémité perpendiculaire d'un cours infini Aſymptotique.

1044. Si le dernier $dy = \infty$, auquel cas ſeulement une Courbe, qui arrive à la perpendicularité, a une Aſymptote (864 & 865), la Soutangente eſt $= \frac{x}{\infty}$ (1030). On en verra aiſément un exemple dans l'Hyperbole, du côté qu'elle devient perpendiculaire.

1045. Dans ces Courbes, la Suite des Soutangentes ne peut être que décroiſſante, tant en elle-même que par rapport aux Ordonnées.

M.E.C.D. 2017

1046. En raſſemblant tout ce qui regarde les Courbes perpendiculaires à l'extrémité d'un cours infini, on voit que celles qui finiſſent par $dy = \infty$, étant infiniment plus perpendiculaires que celles qui finiſſent par $dy = 1$, & celles-ci infiniment plus que celles qui finiſſent par $dy = \frac{1}{\infty}$, leurs Soutangentes ſont auſſi, ſelon cette même raiſon, toujours infiniment plus petites.

Soutangentes de l'origine perpendiculaire des Courbes toujours infiniment petites.

1047. Il ne reſte plus que les Soutangentes des Courbes perpendiculaires à leur origine.

Alors y étant $= dy$, $\frac{y\,dx}{dy} = dx$. Et comme dx eſt ou zero, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$, la Soutangente ſera toujours abſolument nulle, ou de quelque ordre inférieur à $\frac{1}{\infty}$. Il ſeroit inutile d'en rapporter des exemples. Les différentes Paraboles priſes à l'ordinaire (1001, &c. 1005) en fourniront de toutes les variétés des Soutangentes infiniment petites, puiſqu'elles en fourniſſent de toutes les variétés de dx, nul par rapport à dy.

Soutangentes infinies de l'extrémité oblique des Courbes d'un cours infini.

1048. Quant aux Courbes obliques à leur axe à l'extrémité d'un cours infini, comme le rapport de dx à dy ſera fini à cauſe de l'obliquité, & que y ſera $= \infty$, la Soutangente $\frac{y\,dx}{dy}$ ſera un Infini multiplié & diviſé par deux coëfficiens finis.

EXEMPLE IV.

1049. Soit l'Hyperbole rapportée à ſon premier axe $2a$ (951), on aura à l'extrémité $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{a \times \infty}{b}$.

1050. Donc ſi l'Hyperbole eſt équilatere, la Soutangente eſt $= y = \infty$. Mais dans ce même cas, y infini eſt $= x$. Donc la Soutangente eſt $= x$. Cependant il eſt certain qu'elle eſt plus grande que x de a, mais a eſt une grandeur finie.

Soutangentes infiniment petites de l'origine oblique.

1051. Si une Courbe à ſon origine eſt oblique à ſon axe, il eſt clair que y étant alors $= dy$, la Soutangente eſt $= dx$.

M.E.C.D. 2017

1052. Venons préſentement à la conſidération des *plus grandes* ou *plus petites* Ordonnées des Courbes, quand elles en ont, car elles n'en ont pas toutes.

Détermination de la plus grande *ou* plus petite Ordonnée.

On n'appelle point *plus grande* Ordonnée, celle qui termine le cours infini d'une Courbe qui n'a qu'une variation ſans changement, & qui s'éleve toujours au deſſus de ſon axe, car il faut bien que cette derniere Ordonnée ſoit la plus grande de toutes, & la ſeule ſuppoſition de l'axe infini la donne auſſi-tôt; de plus, elle n'eſt point ſuivie par des Ordonnées plus petites.

On n'appelle point non plus de ce nom la derniere d'une Suite croiſſante des Ordonnées d'un cours fini, quand les Ordonnées ne continuent pas leur cours vers un même côté (881), car quoiqu'il y ait enſuite de plus petites Ordonnées, l'axe a manqué, & la ſeule ſuppoſition de l'axe égal à la plus grande grandeur finie qu'il puiſſe avoir de ce côté-là, donnera cette derniere Ordonnée.

C'eſt la même choſe pour la *plus petite* Ordonnée, à cela près qu'alors la Courbe deſcend vers ſon axe.

On n'appelle donc *plus grande* ou *plus petite* Ordonnée, que la derniere d'un cours fini qui continue enſuite à s'étendre ſur l'axe, toujours vers un même côté, comme dans la Fig. v.

Il eſt impoſſible qu'il y ait une *plus grande* Ordonnée ainſi conditionnée, à moins que la Courbe qui ſe ſera élevée par rapport à ſon axe, ne redeſcende enſuite, en continuant ſon cours vers un même côté. Or il eſt impoſſible qu'une Courbe, qui s'eſt élevée par rapport à ſon axe, redeſcende ſans paſſer par un Terme ou par un côté qui ne ſoit ni montant ni deſcendant, ou qui ſoit montant & deſcendant en même temps.

Si c'eſt le 1er, la Courbe paſſe par un côté parallele.

Si c'eſt le 2^d^, la Courbe peut paſſer par un côté oblique, qui ſera en même temps montant & deſcendant (875, &c. 887). Mais ce côté ſera néceſſairement rebrouſſant, de ſorte que le cours des Ordonnées rebrouſſera auſſi, & par conſéquent il n'y aura point de plus grande Ordonnée.

Mais ſi le côté montant & deſcendant en même temps eſt

M.E.C.D. 2017

FIG. V. perpendiculaire, il ſera auſſi rebrouſſant, mais de ſorte que le cours des Ordonnées ne le ſera pas.

Donc il n'y a point de *plus grande*, ou, ce qui revient au même, de *plus petite* Ordonnée, que dans le cas du côté parallele ou perpendiculaire, qui eſt le Terme moyen ou commun d'un changement.

1053. Et comme dans le paralléliſme & dans la perpendicularité le rapport $\frac{dy}{dx}$ eſt toujours nul ou infini, de-là s'enſuit, pour la détermination des points où ſe trouvent les *plus grandes* ou *plus petites* Ordonnées, la Regle générale ſi connue & ſi uſitée, qu'il faut égaler ce rapport $\frac{dy}{dx}$ à zero, ou à l'Infini.

1054. C'eſt le rapport $\frac{dy}{dx}$, & non, comme on le dit fauſſement, & pourtant ſans erreur, dy qui devient nul ou infini. dy devient toujours nul dans le paralléliſme, ou d'un ordre inférieur à celui dont il étoit, mais dans la perpendicularité il ne devient jamais infini, c'eſt-à-dire $= 1$, ou $= \infty$, ſi ce n'eſt à l'extrémité d'une Courbe infinie, ce qui eſt un cas particulier, & qui de plus n'appartient point à la Théorie des *plus grandes* Ordonnées ſelon le ſens qu'on donne à ce terme. Mais il eſt vrai que ſoit qu'on opere ſur $\frac{dy}{dx}$, qui doit toujours devenir infini dans la perpendicularité, ſoit qu'on opere ſur dy ſeul, qui ne le devient jamais pour une *plus grande* Ordonnée proprement dite, le calcul eſt toujours le même.

Car dy eſt alors toujours exprimé par $\frac{n\,dx}{m}$, n & m étant des grandeurs finies complexes, & par conſéquent $\frac{dy}{dx} = \frac{n\,dx}{m\,dx} = \frac{n}{m}$. Or toute l'opération conſiſte à égaler à zero la grandeur complexe n, quand cela ſe peut, ou la grandeur complexe m, d'où il ſuit que c'eſt la même choſe d'opérer ſur $\frac{n\,dx}{m}$ ou ſur $\frac{n\,dx}{m\,dx}$. Mais réellement ce n'eſt que le rapport $\frac{dy}{dx}$

M.E.C.D. 2017

qui devient nul ou infini. Il eſt bien vrai que quand il devient nul, dy devient réellement infiniment moindre qu'il n'étoit, mais il n'eſt pas vrai au contraire que quand ce rapport devient infini, dy devienne réellement infiniment plus grand qu'il n'étoit, il ſuffit qu'il demeure dans l'ordre dont il étoit, pourvû que dx ſoit $= 0$.

Il ſeroit inutile de donner des Exemples de *Maxima* ou de *Minima*, il y en a une infinité de connus.

1055. Il y en a une infinité de Suites de grandeurs, ſoit lignes, ſoit nombres, qui ſont croiſſantes dans une certaine étendue de leur cours, après quoi elles deviennent décroiſſantes, ou au contraire. Ces grandeurs, quelles qu'elles ſoient, peuvent toujours être conçues comme des Ordonnées de Courbes diſpoſées ſur un axe continu, entre leſquelles il y en aura une plus grande, ou plus petite, & par conſéquent il n'y a qu'à prendre leur différentielle dy, ce qui ſuffit (1054), & en égaler le numérateur ou le dénominateur à zero, ce qui donnera la plus grande ou plus petite de ces grandeurs. Ainſi la Regle eſt abſolument générale.

1056. Il n'y a plus rien qui appartienne à la poſition des Courbes, par rapport à un axe, que les inflexions & les rebrouſſemens. *Regle pour les Inflexions & les Rebrouſſemens.*

Les inflexions & les rebrouſſemens ſont toujours compliqués avec une courbure nulle ou infinie (924, &c. 927).

Dans le 1er cas, l'angle de contingence devient nul, & par conſéquent auſſi ſa baſe, qui eſt ddy, & en même temps la différence 2de de trois Ordonnées conſécutives (942). Donc alors $ddy = 0$, ou, plus exactement parlant, il devient d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{\infty^2}$, dont il étoit.

En effet on a vû dans les art. 832, 841, 846, que dans toutes les inflexions ou rebrouſſemens de cette eſpece, il y a toujours trois Ordonnées conſécutives, qui ſont ou en progreſſion ou en contre-progreſſion, ou en la moindre progreſſion ou contre-progreſſion arithmétique poſſible, ce qui donne toujours une différence 2^de^ $= 0$.

M.E.C.D. 2017

1057. Dans le 2^d cas, la courbure ne peut devenir infinie ſans avoir été croiſſante, & par conſéquent la Suite croiſſante des angles de contingence infiniment petits du 1er ordre, ou de leurs baſes ddy du 2^d, aboutiroit alors à un angle fini, ou à une baſe de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, infiniment plus grande qu'elle n'étoit, ou, ce qui eſt le même, à un ddy de l'ordre de dy. Mais parce qu'un angle de contingence fini eſt impoſſible, non en lui-même, mais dans une Courbe, & par conſéquent auſſi un ddy de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, il ſe ſubſtitue à ce Terme, qui eût fait la courbure infinie, un autre Terme, qui eſt un côté $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ (911). Cela cependant n'a pas dû, ni pu empêcher que la Suite des ddy, tirée de l'Equation de la Courbe, n'ait été croiſſante, & n'aboutiſſe réellement à un ddy de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, tout comme ſi l'angle de contingence fini étoit poſſible, & qu'en traçant dans la Courbe ſes ddy, on y en dût trouver un $= dy$. Seulement il ne faudra pas s'attendre à trouver dans cette Courbe aucune marque ſenſible de ſa courbure infinie (912) ni un $ddy = dy$. Mais par le calcul on trouvera toujours ce $ddy = dy$, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, puiſque la Suite des ddy eſt toujours telle qu'elle eſt indépendamment de ce que la Courbe admet, ou n'admet pas.

1058. Donc c'eſt une Regle générale, que dans les points d'inflexion, ou de rebrouſſement, ddy eſt $= 0$, ou $= \infty$, ou plutôt qu'il tombe au deſſous de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, dont il eſt naturellement, ou s'éleve au deſſus.

1059. M. le M. de l'Hopital a donné des Exemples de l'un & de l'autre cas. J'en prendrai ſeulement un pour faire voir que $ddy = \infty$ eſt lié avec la courbure infinie, car il eſt très-évident que $ddy = 0$ l'eſt avec la courbure nulle.

Dans la Courbe $y - a = \overline{x - a}^{\frac{3}{5}}$ (*p. 64 des Inf. petits*) on a $dy = \frac{3}{5}\overline{x - a}^{-\frac{2}{5}} dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x - a}^{-\frac{7}{5}} dx^2$, les dx étant conſtans. Or au point où $x = a$, on a ddy d'un ordre ſupérieur à $\frac{1}{\infty^2}$. Car $x - a$ eſt alors $= \frac{1}{\infty}$, &

M.E.C.D. 2017

ce $\frac{1}{\infty}$ est élevé à $-\frac{7}{5}$. Or un $\frac{1}{\infty}$ élevé à une puissance négative, est ∞ élevé à cette même puissance positive, comme ∞ élevé à une puissance négative, est $\frac{1}{\infty}$ élevé à cette même puissance positive. Donc $ddy = -\frac{6}{25}\infty^{\frac{7}{5}} \times \frac{1}{\infty^2} =$

$-\frac{6}{25}\frac{\infty^{\frac{7}{5}}}{\infty^2} = -\frac{6}{25}\infty^{-\frac{3}{5}} = \frac{-6}{25\infty^{\frac{3}{5}}}$, grandeur qui est même au dessus de $\frac{1}{\infty}$.

Or je dis que dans ce même point où $x - a = \frac{1}{\infty}$, le Rayon de la Développée est infiniment petit, & par conséquent la courbure infinie.

Car la Formule générale pour déterminer ce Rayon, ou plutôt une ligne qui le détermine, & est du même ordre, étant $\frac{dy^2 + dx^2}{-ddy}$, on a ici $dy^2 + dx^2 = \frac{\overline{\overline{9x-a}}^{-\frac{4}{5}} + 25 \times dx^2}{25}$

$= \frac{9\infty^{\frac{4}{5}}}{25\infty^2} = \frac{9\infty^{-\frac{6}{5}}}{25} = \frac{9}{25\infty^{\frac{6}{5}}}$. Et cette grandeur divisée par $-ddy$ est $\frac{9\infty^{\frac{3}{5}}}{6\infty^{\frac{6}{5}}} = \frac{3\infty^{-\frac{3}{5}}}{2} = \frac{3}{2\infty^{\frac{3}{5}}}$, grandeur infiniment petite. Donc, &c.

1060. On trouvera aussi qu'au point où $x - a = \frac{1}{\infty}$, ddy est du même ordre que dy. Car alors $dy = \frac{3}{5}\overline{\overline{x-a}}^{-\frac{2}{5}} dx$ est $= \frac{3\infty^{\frac{2}{5}}}{5\infty} = \frac{3\infty^{-\frac{3}{5}}}{5} = \frac{3}{5\infty^{\frac{3}{5}}}$, & ddy est $\frac{-6}{25\infty^{\frac{3}{5}}}$ (1059).

1061. S'il étoit possible que parmi les Courbes que nous connoissons, il y en eût dont tous les côtés fussent infiniment petits du 2^d^ ordre, & fissent entr'eux des angles de contingence du 1er, il est certain que la même courbure que nous

M.E.C.D. 2017

trouvons ici infinie dans les inflexions, & les rebrouſſemens, ſeroit nulle pour ces Courbes-là. Il faudroit, afin de leur trouver une courbure infinie, leur concevoir quelques côtés du 3me ordre. Mais ces ſortes de Courbes ne ſeroient ni deſcriptibles, ni de la nature de celles que nous connoiſſons (735). Nous en tranſportons ſeulement dans nos Courbes la maniere dont ſe feroient leurs inflexions & leurs rebrouſſemens avec une courbure nulle, & cela y produit une courbure infinie, par la raiſon de l'art. 921, & à cauſe de la différence des deux hipotheſes.

On va voir plus particulierement ce qui appartient à la Courbure.

SECTION

M.E.C.D. 2017

SECTION XII.

Regle générale pour déterminer, par le Calcul Différentiel, la courbure des Courbes.

1062. COMME nous n'avons conſidéré les Courbes qu'en elles-mêmes, nous allons tirer de leur nature ſeule la détermination de tout ce qui appartient à leur courbure, & à la variation de cette courbure, & nous n'emploierons point pour cela les Rayons des Développées qui y ont été employés juſqu'à preſent; car ces développées ſont des lignes étrangeres à celles dont on conſidere la courbure. *Regle générale pour la courbure des Courbes.*

Ici les côtés ſeront ſuppoſés conſtans (905), & la meſure de la courbure eſt le Sinus de l'angle de contingence, & ce Sinus eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (741).

Soient Mm & $m\mu$ deux côtés d'une Courbe qui tend au paralléliſme. Dans la ſuppoſition ordinaire des dx conſtans, on a $MR = mr$, & $m\mu$ moindre que Mm, parce que la Courbe tend au parallélisme. De-là il ſuit que Mm étant prolongé juſqu'à la rencontre de $r\mu$ prolongé en h, & l'arc de Cercle $K\mu$ infiniment petit du 2^d ordre étant décrit du centre m & du rayon $m\mu$, Kh eſt la quantité dont le côté Mm eſt plus grand que $m\mu$, & par conſéquent Kh eſt la différence des deux côtés. En même-temps $h\mu$ eſt la baſe de l'angle de contingence $hm\mu$, & eſt ddy, & $K\mu$ eſt le Sinus de cet angle: car à cauſe de l'infinie petiteſſe, l'arc qui meſure cet angle & ſon Sinus, ſont la même choſe. FIG. VIII.

Mais ſi maintenant on ſuppoſe les côtés conſtans, il ſe fait des changemens. Mm eſt $= m\mu$, & par conſéquent il n'y a plus de Kh, différence des deux côtés, & puiſqu'il n'y a plus de Kh, ddy n'eſt plus $h\mu$, mais quelqu'autre grandeur. Le côté $m\mu$ ſe termine toujours au point μ, mais il ne commence plus au point m, & puiſque $m\mu$, auparavant moindre

M.E.C.D. 2017

que Mm, lui eſt maintenant égal, le point m s'eſt reculé vers M, d'où il ſuit que mr, auparavant $= MR$, eſt devenue plus grande. Soit $dr = ddx$, la quantité dont mr eſt augmentée. Du point d je tire ſur mr une perpendiculaire dK juſqu'à la rencontre de mK, & par le point μ une ligne μc parallele à mr juſqu'à la rencontre de dK. $c\mu$ eſt $= dr = ddx$, & $dc = r\mu = dy$. Donc $Kc = ddy$. Donc $K\mu$ ſinus cherché $= \sqrt{Kc^2 + c\mu^2} = \sqrt{ddy^2 + ddx^2}$, Formule de la courbure dans la ſuppoſition des côtés conſtans.

Il eſt clair que ddy^2 & ddx^2 étant des Infiniment petits du 4me ordre, $\sqrt{ddy^2 + ddx^2}$ eſt du 2^d, comme doit être le Sinus de l'angle de contingence.

1063. Cette Formule ſeroit embaraſſante dans la pratique du calcul, & il faut la rendre plus ſimple & plus commode, en ramenant ddy & ddx à la même expreſſion.

J'appelle ds le côté $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. dy eſt $= \sqrt{ds^2 - dx^2}$, & ddy, puiſque ds eſt conſtant, eſt $= \frac{-dx\,ddx}{\sqrt{ds^2 - dx^2}}$. Donc $\frac{-dy\,ddy}{dx} = ddx$. Donc $\frac{dy^2\,ddy^2}{dx^2} = ddx^2$. Donc $ddy^2 + ddx^2 = \frac{dx^2\,ddy^2 + dy^2\,ddy^2}{dx^2} = \frac{dx^2 + dy^2 \times ddy^2}{dx^2} = \frac{ds^2\,ddy^2}{dx^2}$. Donc $\sqrt{ddx^2 + ddy^2} = \frac{ds\,ddy}{dx}$, Formule très-ſimple de la courbure.

1064. Puiſque le côté eſt conſtant, ſi on prend la différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & qu'on l'égale à zero, on trouvera auſſi $\frac{-dy\,ddy}{dx} = ddx$, d'où ſuivra la même conſéquence de l'art. précédent.

1065. On peut encore démontrer autrement la Formule, & directement.

Les raiſonnemens de l'art. 1062 ſur la Fig. VIII, étant faits, les Triangles $Kc\mu$ & μcg ſont ſemblables, à cauſe des

M.E.C.D. 2017

angles droits $K\mu g$ & $Kc\mu$. Les Triangles μcg & $mr\mu$ ſont ſemblables auſſi. Donc les Triangles $mr\mu$ & $Kc\mu$ ſont ſemblables. Donc $mr\ (dx).\ m\mu\ (ds) ::\ Kc\ (ddy).\ K\mu = \frac{ds\,ddy}{dx}$.

1066. Comme en appliquant la Formule $\frac{ds\,ddy}{dx}$, on trouvera toujours l'expreſſion de ddy mêlée de ddx, il faudra toujours ſubſtituer à ddx ſa valeur $\frac{-dy\,ddy}{dx}$, moyennant quoi non-ſeulement on n'aura plus que des ddy, mais encore l'opération portera eſſentiellement le caractere des ds ſuppoſés conſtans, puiſque ce n'eſt qu'en cette ſuppoſition que $ddx = \frac{-dy\,ddy}{dx}$ (1063).

EXEMPLE I.

1067. On a dans le Cercle $dy = \frac{a\,dx - 2x\,dx}{2y}$, a étant le diametre, & de-là on tire, en ne ſuppoſant rien de conſtant, $ddy = \frac{a\,y\,ddx - 2y\,dx^2 - 2y\,x\,ddx - a\,dy\,dx + 2x\,dy\,dx}{2yy}$, & en mettant au lieu de ddx, ſa valeur $\frac{-dy\,ddy}{dx}$, ce qui emporte les ds conſtans (1066), on a $ddy = \frac{2y\,dx + a\,dy - 2x\,dy \times dx^2}{-2y\,dx - a\,dy + 2x\,dy \times y}$.

Courbure du Cercle conſtante.

Or toutes les grandeurs du numérateur qui multiplient dx^2, étant les mêmes que celles du dénominateur qui multiplient y, mais avec des ſignes contraires, elles ſont toutes $= -1$, d'où ſuit $ddy = \frac{-dx^2}{y}$, & $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-ds\,dx}{y}$. Or on trouvera très-aiſément que dans le Cercle, ds étant ſuppoſé conſtant, $dx.\ y ::\ ds.\ \frac{a}{2}$, & que par conſéquent le rapport $\frac{dx}{y}$ eſt conſtant. Donc $\frac{-ds\,dx}{y}$ exprime une courbure conſtante; & on ſait aſſez que celle du Cercle l'eſt.

M.E.C.D. 2017

Quand le Sinus de la courbure eſt poſitif ou négatif.

1068. L'expreſſion $\frac{-dsdx}{y}$ de la courbure du Cercle eſt affectée du ſigne —, parce que c'eſt l'expreſſion du Sinus de l'angle de contingence, & que ce Sinus eſt néceſſairement du côté de la convexité du Cercle, au lieu que les dx & y ſont du côté de la concavité, & par conſéquent ce Sinus eſt négatif par rapport aux dx & y qu'on ſuppoſe poſitifs, & qui entrent dans ſon expreſſion.

1069. Et comme cette raiſon eſt générale, il s'enſuit que le Sinus de l'angle de contingence ſera négatif toutes les fois qu'il ſera, par rapport à la Courbe, du côté oppoſé à celui où ſeront les grandeurs qui entreront dans ſon expreſſion.

1070. Et parce que ce Sinus ne peut être que du côté de la convexité de la Courbe, il ſera négatif toutes les fois que ces autres grandeurs n'y ſeront pas, ou, ce qui eſt la même choſe, que la Courbe ſera concave vers l'axe auquel on la rapportera. Et dans le cas contraire, il ſera poſitif.

1071. Si on applique $\frac{-dsdx}{y}$, Formule de la courbure conſtante du Cercle, au point de ſon origine, où, à cauſe de l'origine $y = dy$, & à cauſe de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, on a $-ddx$ pour la courbure de ce point. Et ſi on applique la même Formule au point du Quart de Cercle, où $y = \frac{a}{2}$, & à cauſe du paralléliſme $ds = dx$, on a $\frac{-2ds^2}{a}$ pour la courbure de ce point. Mais ddx & $\frac{2ds^2}{a}$ ne paroiſſent pas d'abord égaux, comme ils doivent l'être, puiſque la courbure eſt conſtante. Ils le ſont cependant. Car on a par-tout dans le Cercle $2ydy = adx - 2xdx$, & par conſéquent $\frac{2dy^2 + 2dx^2 + 2yddy}{a - 2x} = ddx$. Or à l'origine du Cercle, $2dx^2 = 2ddx^2$ & $2yddy = 2dyddy$ diſparoiſſent dans le numérateur de cette fraction devant $2dy^2$, & $2x = 2ddx$ diſparoît dans le dénominateur devant a. Donc la fraction ſe réduit à $\frac{2dy^2}{a} = ddx$. Or à ce point, $\frac{2dy^2}{a} = \frac{2ds^2}{a}$,

M.E.C.D. 2017

1072. Puiſque a, diametre du Cercle, n'entre point dans $\frac{-dsdx}{y}$, expreſſion du Sinus des angles de contingence du Cercle, ce Sinus eſt indépendant du diametre, & par conſéquent les angles de contingence ſont les mêmes dans tous les différens Cercles. Et en effet, ſi l'on conçoit d'abord un Triangle équilatéral inſcrit au Cercle, enſuite un Exagone, enſuite un Dodécagone, & toujours ainſi, en doublant toujours le nombre des côtés du Polygone précédent, le Polygone deviendra enfin le Cercle, quand le nombre des côtés ſera infini. Et comme cette inſcription étant faite en deux différens Cercles, les Polygones correſpondans auront toujours les mêmes angles obtus, les deux derniers Polygones devenus les deux Cercles, auront auſſi les mêmes angles obtus, & par conſéquent des angles de contingence égaux.

Courbures de différens Cercles en raiſon renverſée de leurs diametres.

1073. Deux Cercles inégaux ſont deux Polygones formés d'un nombre infini de côtés égal : mais les côtés infiniment petits du plus grand ſont plus grands en même raiſon que ſon diametre. Donc le Point qui décrit un plus grand Cercle, faiſant de plus grands pas en ligne droite, & des détours qui ne ſont qu'égaux à ceux qu'il feroit en décrivant un plus petit Cercle, il décrit une ligne moins courbe, dans la raiſon que les côtés ſont plus grands. Donc la courbure de deux Cercles inégaux eſt en raiſon renverſée de leurs diametres.

Qu'un Cercle, qui paroît paſſer dans l'angle de contingence d'un plus petit, n'y paſſe point.

1074. Il eſt démontré qu'il ne peut paſſer aucune ligne droite entre la Tangente d'un Cercle & ſa circonférence. La raiſon eſſentielle en eſt que l'angle compris entre cette Tangente & la circonférence eſt un angle de contingence infiniment petit, qui par conſéquent eſt indéterminable, & ne peut être diviſé en parties déterminées : or ſi une droite paſſoit entre la Tangente & la circonférence, elle diviſeroit néceſſairement cet angle en deux parties déterminées. Cependant un Cercle quelconque étant poſé, un plus grand Cercle qui aura la même Tangente, paſſera dans l'angle de contingence. On demande comment cela eſt poſſible, & la difficulté paroît conſidérable. Car la portion infiniment petite du grand Cercle

M.E.C.D. 2017

qui paſſe dans l'angle eſt une droite, qui peut être prolongée tant qu'on voudra, & par conſéquent une droite y paſſe.

La Solution dépend de ce qui vient d'être dit. L'angle de contingence du grand Cercle & de celui du petit, tous deux ayant leur ſommet au point d'attouchement commun aux deux Cercles, ſont le même angle, & par conſéquent le grand Cercle ne paſſe point dans l'angle du petit. Mais le grand & le petit décrivent enſemble la même petite droite pendant un temps, après quoi le petit qui doit faire de plus petits pas, ſe détourne, tandis que le grand pourſuit encore la petite droite qui leur avoit été commune, & de-là vient que le petit devient intérieur au grand, & que le grand paroît paſſer entre le petit & la Tangente commune, quoique réellement il n'y paſſe pas.

Ce qui rend deux Courbes ſemblables.

1075. Par la même raiſon que deux Triangles, & en général deux Polygones quelconques d'un même nombre de côtés ſont ſemblables, lorſqu'ayant des côtés inégaux, ceux de l'un à ceux de l'autre, ils ont les angles correſpondans égaux, deux Cercles différens ſont toujours ſemblables, puiſque l'un ayant le même nombre infini de côtés que l'autre, & les côtés de chacun étant tous égaux, quoique ceux de l'un inégaux à ceux de l'autre, ils ont tous deux les mêmes angles de contingence.

1076. Et comme cette idée eſt générale, deux Courbes ſont ſemblables, lorſqu'étant conçues diviſées en un nombre infini égal de côtés égaux dans chacune, les angles de contingence correſpondans de l'un à l'autre ſont égaux, le 1er au 1er, le 2^{d} au 2^{d}, &c.

1077. Mais parce que cette diviſion en côtés infiniment petits égaux ne peut ſe faire que par la penſée, on fait réellement l'équivalent, en inſcrivant dans des Courbes des Polygones ſemblables, dont les côtés ſont finis, & celles où ils peuvent être inſcrits ſont ſemblables.

1078. La circonférence d'un plus grand Cercle eſt à celle d'un plus petit, comme le diametre du plus grand au diametre du plus petit, & en même-temps le plus petit eſt plus

M.E.C.D. 2017

courbe que le plus grand, en même raiſon que ſon diametre eſt plus petit (1073). Donc un plus grand diametre détermine en même-temps & une plus grande étendue ou longueur, & une moindre courbure de la circonférence circulaire, & au contraire.

Ce que c'eſt que les Parametres.

1079. Comme il faut un diametre pour régler la grandeur abſolue d'un Cercle, qui ſans cela pourroit être différente à l'infini, ainſi & par la même raiſon il faut, pour régler la grandeur abſolue de toute autre Courbe, quelque ligne conſtante que l'on appelle *Parametre*. Dans le Cercle, le diametre ou axe eſt diametre ou axe, parce qu'il porte les Ordonnées, & en même-temps parametre, parce qu'il regle la grandeur abſolue de la Courbe: mais dans les autres Courbes le diametre ou axe & le parametre ſont différens. Donc les étendues ou longueurs de deux Courbes ſemblables ſont entr'elles comme leurs parametres.

1080. Et comme ce qui fait qu'une Courbe eſt plus longue qu'une Courbe ſemblable, la rend auſſi moins courbe en même raiſon, les longueurs de deux Courbes ſemblables ſont en raiſon directe, & les courbures en raiſon renverſée des parametres. Ainſi ſi a & $2a$ ſont les parametres de deux Paraboles, la 1re eſt une fois moins longue, & une fois plus courbe que la 2de; car elle fait les mêmes détours après des pas une fois plus petits. Et en général les courbures de deux Courbes ſemblables ſont en raiſon renverſée de leurs longueurs.

Il eſt clair que cela doit s'entendre non-ſeulement de la courbure totale d'une Courbe comparée à celle de l'autre Courbe ſemblable, mais encore de la courbure d'un point quelconque de l'une comparée à la courbure du point correſpondant dans l'autre.

1081. Si la grandeur abſolue d'une Courbe ne peut être réglée par un ſeul parametre, elle le ſera par deux, & en ce cas-là la longueur d'une Courbe de cette eſpece ſera à celle d'une 2de Courbe ſemblable comme le produit des deux parametres de la 1re au produit des deux parametres de la 2de,

M.E.C.D. 2017

& leur courbures ſeront en cette même raiſon renverſée.

1082. Si on prend dans deux Cercles différens deux arcs infiniment petits, égaux en longueur, celui qui appartient au plus grand Cercle peut paſſer pour ligne droite, & l'autre ne le peut pas par rapport à lui. Car celui du grand Cercle pouvant toujours être un des côtés de ſon Cercle, celui du petit qui a la même étendue, ne peut être que plus d'un côté du ſien, & par conſéquent il contient un ou pluſieurs angles de contingence, & ne peut être conçu que comme courbe, étant comparé à l'autre.

Ce ſera la même choſe de deux arcs infiniment petits égaux de deux autres Courbes quelconques ſemblables.

EXEMPLE II.

Courbure de l'Ellipſe. 1083. Soit une Ellipſe, dont l'équation eſt $yy = \frac{abx - bxx}{a}$, a étant le grand axe. $dy = \frac{abdx - 2bxdx}{2ay}$, & ddy, après avoir ſubſtitué aux ddx, leur valeur $\frac{-dyddy}{dx}$, eſt $=$

$$\frac{4ab^2x - 4aby^2 - a^2b^2 - 4b^2x^2 \times dx^2}{4a^2y^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 \times y}.$$

Donc $\frac{dsddy}{dx} =$

$$\frac{4ab^2x - 4aby^2 - a^2b^2 - 4b^2x^2 \times dsdx}{4a^2y^2 + a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 \times y},$$

grandeur variable.

1084. A l'origine de l'Ellipſe, où à cauſe de l'origine $y = dy$, & $x = dx$, & à cauſe de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, toutes les grandeurs du numérateur de la fraction qui exprime $\frac{dsddy}{dx}$ diſparoiſſent devant $-a^2b^2$, & pareillement toutes celles du dénominateur devant a^2b^2, & par conſéquent il ne reſte que $\frac{-a^2b^2dsddx}{a^2b^2dy} = -ddx$. Il faut donc voir ce que vaut ddx.

On a par-tout dans l'Ellipſe $dx.\ y :: 2ady.\ ab - 2bx$. Donc à l'origine $ddx.\ dy :: 2ady.\ ab :: 2dy.\ b$. Donc $ddx = \frac{2dy^2}{b} = \frac{2ds^2}{b}$.

1085.

M.E.C.D. 2017

1085. Au quart de l'Ellipſe, où $x = \frac{a}{2}$, & par conſéquent $y = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, on a $ddy = \frac{-2bdx^2}{a\sqrt{ab}}$. Et comme en ce point, à cauſe du paralléliſme $dx = ds$, $\frac{dsddy}{dx}$ eſt $= ddy = \frac{-2bdx^2}{a\sqrt{ab}} = \frac{-2bds^2}{a\sqrt{ab}}$, courbure de ce point.

1086. Donc la courbure de l'origine eſt à celle du quart $:: -ddx = \frac{-2ds^2}{b} \cdot \frac{-2bds^2}{a\sqrt{ab}} :: \frac{2}{b} \cdot \frac{2b}{a\sqrt{ab}} :: a\sqrt{ab} \cdot bb$. *Décroiſſante depuis l'origine juſqu'au quart.*

Or $a\sqrt{ab}$ eſt plus grand que bb, a étant le grand axe, donc la courbure de l'origine eſt plus grande que celle du quart ſelon cette raiſon qui ſera connue. Si $a = 4$, & $b = 1$, la courbure de l'origine ſera à celle du quart :: 8 . 1.

1087. Donc l'origine de l'Ellipſe étant priſe à l'extrémité de ſon grand axe, ſa courbure va toujours en diminuant de-là juſqu'au quart, & depuis le quart elle va en croiſſant juſqu'à la demi-Ellipſe.

1088. Puiſque la courbure de l'origine eſt à celle du quart :: $a\sqrt{ab} \cdot bb$, plus a eſt grand par rapport à b, c'eſt-à-dire plus l'Ellipſe eſt allongée, plus la courbure de l'origine ſurpaſſe celle du quart, ou, ce qui en eſt une ſuite, plus la courbure eſt décroiſſante depuis l'origine juſqu'au quart. *Et d'autant plus décroiſſante que le grand axe eſt plus grand par rapport au petit.*

1089. Si $a = b$, les deux courbures ſont égales, & en effet l'Ellipſe eſt alors un Cercle.

1090. Si on compare deux Ellipſes ſemblables, c'eſt-à-dire, telles que les deux grandeurs A & B de la grande ſoient en même raiſon que les deux a & b de la petite, les longueurs ou étendues de leurs circonférences ſeront comme les produits AB & ab; par ex. ſi $A = 6$, $B = 2$, $a = 3$, $b = 1$, ces circonférences ſeront :: 12 . 3 :: 4 . 1, & les courbures ſeront en cette même raiſon renverſée. *Courbures de deux Ellipſes ſemblables en raiſon renverſée de leurs axes ou parametres.*

On a par-tout dans l'Ellipſe, $dy \cdot dx :: ab - 2bx \cdot 2ay$. Donc $dy^2 \cdot dx^2 :: a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 \cdot 4a^2y^2$. Donc

M.E.C.D. 2017

quand il ne s'agit que de rapports, je puis prendre $a^2b^2 - 4ab^2 x + 4b^2x^2$, au lieu de dy^2, & $4a^2y^2$, au lieu de dx^2. Donc $dy^2 + dx^2$ quarré du côté quelconque de l'Ellipſe eſt $= a^2 b^2 - 4ab^2 x + 4b^2x^2 + 4a^2y^2$. Et ſi je prens ce quarré pour celui d'un côté de la moindre de deux Ellipſes ſemblables, le quarré du côté de la grande ſera $A^2B^2 - 4AB^2 X + 4B^2X^2 + 4A^2Y^2$. Or ces deux quarrés ſont entr'eux :: $A^2B^2 . a^2b^2$.

Car à cauſe de la ſimilitude des Ellipſes, $X . x :: A . a$. Donc $AB^2X . ab^2x :: A^2B^2 . a^2b^2$. De même $X^2 . x^2 :: A^2 . a^2$. Donc $X^2B^2 . x^2b^2 :: A^2B^2 . a^2b^2$. Enfin $Y . y :: B . b$. Donc $A^2Y^2 . a^2y^2 . A^2B^2 . a^2b^2$. Donc $A^2B^2 - 4AB^2 X + 4B^2X^2 + 4A^2Y^2 . a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2y^2 :: A^2B^2 . a^2b^2$. Donc les côtés de chaque Ellipſe étant ſuppoſés conſtans, les côtés de deux Ellipſes ſemblables & les ſommes de ces côtés ou les circonférences elliptiques ſont :: $AB . ab$. Donc auſſi (1080) la courbure de la grande eſt à celle de la petite :: $ab . AB$.

1091. b n'a pas été ici le petit axe de l'Ellipſe, mais le parametre du grand axe a, c'eſt-à-dire, la 3me proportionnelle au grand axe & au petit, qui par conſéquent étoit $\sqrt{ab}$. Mais on verra aiſément, en comparant les deux Ellipſes ſemblables de l'art. précédent, que les deux produits du grand axe & du petit, qui ſont $A\sqrt{AB}$ & $a\sqrt{ab}$, ſont :: $AB . ab$. D'où il ſuit que les longueurs & les courbures de deux Ellipſes ſemblables ſe reglent auſſi par les produits de leurs axes, & qu'à cet égard on peut prendre les axes pour parametres des Ellipſes ſelon l'idée de l'art. 1081.

EXEMPLE III.

Courbure de la Parabole.

1092. Dans la Parabole $dy = \frac{a\,dx}{2y}$, & après les ſubſtitutions néceſſaires que nous ſuppoſerons toujours dans la ſuite, $ddy = \frac{-a^2\,dx^2}{4y^3 + a^2y}$ & $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-a^2\,ds\,dx}{4y^3 + a^2y}$.

M.E.C.D. 2017

1093. A ſon origine, où $y = dy = ds$, & $dx = ddx$, il vient $\frac{-a^2\,ds\,ddx}{a^2\,dy} = -ddx$, courbure de ce point.

On a par-tout dans la Parabole $dx . y :: 2\,dy . a$. Donc à l'origine $ddx . dy :: 2\,dy . a$. Donc $ddx = \frac{2\,dy^2}{a} = \frac{2\,ds^2}{a}$, ou $ddx = \frac{2}{\infty^2}$, parce que $ds = \frac{1}{\infty}$.

1094. Au point qui répond au Foyer, où $x = \frac{a}{4}$, & $y = \frac{a}{2}$, $dx = dy$, & par conſéquent $ds^2 = 2\,dx^2$, & $ds = dx\sqrt{2}$, ou $dx = \frac{ds}{\sqrt{2}}$, on a $ddy = \frac{-dx^2}{a}$, & $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-ds\,dx}{a} = \frac{-ds^2}{a\sqrt{2}}$, courbure de ce point.

1095. Donc la courbure du ſommet eſt à celle du Foyer $:: \frac{2\,ds^2}{a} . \frac{ds^2}{a\sqrt{2}} :: 2 . \frac{1}{\sqrt{2}} :: 2\sqrt{2} . 1$.

1096. A l'extrémité de la Parabole, où $y = \infty^{\frac{1}{2}}$, on a $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-a^2\,ds\,dx}{4\infty^{\frac{3}{2}}}$. Or à cauſe du paralléliſme $ds = dx$, & ds conſtant eſt toujours $= \frac{1}{\infty}$. Donc $\frac{-a^2\,ds\,dx}{4\infty^{\frac{3}{2}}}$, ou, en négligeant les coëfficiens finis & le ſigne négatif, $\frac{ds\,dx}{\infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\infty^2}$ diviſé par $\infty^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\infty^2 \times \infty^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$. Or $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$ eſt du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit par rapport au Fini, parce qu'il eſt d'un ordre radical au deſſous de $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{2}}} = \frac{1}{\infty^3}$. Donc la courbure eſt nulle & du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit.

1097. Tant que le Sinus de l'angle de contingence eſt du 2d ordre d'Infiniment petit, la courbure eſt ordinaire ou

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

finie. Donc dès qu'il tombe au deſſous de cet ordre, ſoit juſqu'à $\frac{1}{\infty^3}$, ſoit ſeulement dans quelque ordre radical compris entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty^3}$, la courbure eſt infiniment petite & nulle, du moins par rapport à une courbure finie & ſenſible. A plus forte raiſon, s'il tombe au deſſous de $\frac{1}{\infty^3}$.

Décroiſſante depuis l'origine juſqu'à l'extrémité où elle eſt nulle.

1098. Il eſt clair que la courbure de la Parabole va en décroiſſant depuis l'origine juſqu'à l'extrémité.

1099. Les courbures de deux différentes Paraboles ſont en raiſon renverſée de leurs parametres.

EXEMPLE IV.

Courbure de l'Hyperbole entre ſes Aſymptotes.

1100. Soit une Hyperbole équilatere entre ſes Aſymptotes, $aa = xy \cdot dy = \frac{-aadx}{xx} \cdot ddy = \frac{2a^2 x dx^2}{a^4 + x^4} \cdot \frac{dsddy}{dx}$

$= \frac{2a^2 x ds dx}{a^4 + x^4}$.

1101. On voit déja que ſelon les art. 1068, 1069, 1070, ce Sinus de l'angle de contingence n'eſt point négatif, comme dans les autres Courbes qu'on a conſidérées juſqu'ici, parce qu'elles étoient concaves vers leur axe, & que l'Hyperbole, ainſi qu'on la prend ici, eſt convexe.

1102. Au ſommet de cette Courbe $x = a$, donc $ddy = \frac{dx^2}{a}$. Or à ce même point $dx = -dy$, & par conſéquent $ds^2 = 2dx^2$, $ds = dx\sqrt{2}$, ou $dx = \frac{ds}{\sqrt{2}}$. Donc $\frac{dsddy}{dx} = \frac{ds^2}{a\sqrt{2}}$, courbure de ce point.

1103. Si on prend un autre point, comme celui qui répond à $x = 2a$, on a $ddy = \frac{4dx^2}{17a}$, & $\frac{dsddy}{dx} = \frac{4dsdx}{17a}$. Or à ce point $dy = \frac{-dx}{4}$, d'où ſuit $ds^2 = \frac{17dx^2}{16}$, $ds = \frac{dx\sqrt{17}}{4}$, & $dx = \frac{4ds}{\sqrt{17}}$. Donc $\frac{4dsdx}{17a} = \frac{16ds^2}{17a\sqrt{17}}$.

M.E.C.D. 2017

1104. Donc la courbure du ſommet eſt à celle du point où $x = 2a :: \frac{ds^2}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{16\,ds^2}{17a\sqrt{17}} :: \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{17\sqrt{17}} :: 17\sqrt{17} \cdot 16\sqrt{2}$, c'eſt-à-dire, plus que triple.

1105. A l'extrémité de l'Hyperbole où $x = \infty$, on a $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{2a^2\,ds\,dx}{\infty^3}$. Or puiſque dans cette Courbe $dy \cdot dx :: 1 \cdot x^2$, le dx de l'extrémité eſt $= \frac{1}{\infty}$, car alors dy étant $= \frac{1}{\infty^3}$ (960), on a $dy \cdot dx :: 1 \cdot \infty^2 :: \frac{1}{\infty^3} \cdot \frac{1}{\infty}$. Donc ds étant conſtant, & $= \frac{1}{\infty}$, $ds\,dx = \frac{1}{\infty^2}$. Cela ſuit auſſi de ce que la Courbe eſt alors parallele. Donc $\frac{2a^2\,ds\,dx}{\infty^3} = \frac{2a^2}{\infty^2}$ diviſé par ∞^3, $= \frac{2}{\infty^5}$, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$. Donc la courbure de l'extrémité de l'Hyperbole, du côté qu'elle devient parallele à ſon axe, eſt non ſeulement nulle, mais de trois ordres d'Infiniment petit au deſſous de la courbure ordinaire ou finie.

1106. L'Hyperbole a une Aſymptote, & par conſéquent eſt *cenſée* ligne droite dans une étendue infinie, & cela convient parfaitement avec ce qu'on vient de trouver, qu'à ſon extrémité ſa courbure eſt de trois ordres d'Infiniment petit au deſſous de la courbure finie. On peut déja juger par-là que quand la courbure nulle d'une Courbe à ſon extrémité, deſcend juſqu'au 5me ordre d'Infiniment petit, cette Courbe a une Aſymptote, & eſt droite dans une étendue infinie.

Décroiſſante depuis l'origine juſqu'à l'extrémité où elle eſt nulle, & plus que nulle.

1107. Si $x = \frac{1}{\infty}$, $\frac{2a^2\,x\,ds\,dx}{a^4 + x^4} = \frac{2x\,ds\,dx}{a^2}$. Or puiſque $dy \cdot dx :: 1 \cdot x^2$, on a alors $dy \cdot dx :: 1 \cdot \frac{1}{\infty^2}$. Doncà cauſe de la perpendicularité, dy étant $= ds$, & ds conſtant, & toujours $= \frac{1}{\infty}$, on a $ds \cdot dx :: 1 \cdot \frac{1}{\infty^2} :: \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty^3}$. Donc $\frac{2x\,ds\,dx}{a^2} = \frac{2}{a^2 \times \infty \times \infty \times \infty^3} = \frac{2}{\infty^5}$, même courbure que celle de l'autre branche de l'Hyperbole, ce qui effectivement doit être, puiſque l'Hyperbole eſt parfaitement la même dans ſes deux branches.

M.E.C.D. 2017

Ceci n'eſt point contraire à ce qui a été trouvé dans l'art. 960, que de ce côté-là de l'Hyperbole dy eſt $= \infty$. Car ici, à cauſe des ds conſtans, $dy = ds$ a dû être $= \frac{1}{\infty}$, ce qui n'empêche pas que ce même dy ne ſoit le dernier d'une infinité d'infinités de $dy = \frac{1}{\infty}$ poſés en ligne droite, qui font une ſomme $= \infty$.

EXEMPLE V.

Courbure de la Logarithmique.

1108. Soit la Logarithmique où $dy = \frac{y\,dx}{a}$, $ddy = \frac{y\,dx^2}{a^2+y^2}$, $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{y\,ds\,dx}{a^2+y^2}$.

1109. Si on prend l'origine au point où $y = \frac{1}{\infty}$, on a $dx = \frac{1}{\infty}$, & à cauſe du paralléliſme $ds = dx = \frac{1}{\infty}$. Donc alors $\frac{y\,ds\,dx}{a^2+y^2} = \frac{y\,ds\,dx}{a^2}$ eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Mais comme on peut dans cette Courbe ſuppoſer y de l'ordre d'Infiniment petit qu'on voudra, on voit que ſa courbure de ce côté-là deviendra d'un ordre d'Infiniment petit quelconque, & par conſéquent que la Courbe eſt ligne droite dans une étendue infinie, ce qui doit être, puiſqu'elle a une Aſymptote en ce ſens-là.

1110. Si $y = \infty$, $dx = \frac{1}{\infty^2}$, & ds toujours $= \frac{1}{\infty}$, Donc $\frac{y\,ds\,dx}{a^2+y^2} = \frac{1}{\infty^2}$ diviſé par ∞^2, $= \frac{1}{\infty^4}$. On ſait d'ailleurs que dans la ſuppoſition des dx conſtans, le dernier dy de la Logarithmique, du côté qu'elle eſt perpendiculaire, eſt $= 1$ (954), c'eſt-à-dire, qu'elle eſt à ſon extrémité ligne droite dans une étendue finie. Or c'eſt là une propriété réelle qui doit ſe retrouver toujours, de quelque maniere qu'on diviſe la Courbe. Donc on peut juger que comme la courbure de l'extrémité d'une Courbe, lorſqu'elle eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$, marque que cette Courbe eſt alors droite dans une étendue infinie (1106), ainſi la courbure de l'extrémité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$, marque que la Courbe n'eſt droite que dans une étendue finie.

M.E.C.D. 2017

Ici, quoiqu'à cauſe des ds conſtans on ait pris le dernier $ds = \frac{1}{\infty}$, il eſt clair qu'il a pû être précédé d'une infinité d'autres égaux, tous poſés bout à bout en ligne droite, ſelon l'art. 1107.

1111. La courbure de la Logarithmique étant nulle tant à ſon origine qu'à ſon extrémité, il faut que depuis l'origine elle ait été toujours en croiſſant juſqu'à un certain point, après quoi elle aura toujours décrû.

Croiſſante depuis l'origine juſqu'à un certain point, après lequel elle décroît.

Pour trouver ce *plus grand* de courbure, il faut (1055) différentier $\frac{y\,ds\,dx}{a^2+y^2}$, expreſſion de la courbure de la Logarithmique, & après les ſubſtitutions néceſſaires, on aura la différentielle de cette expreſſion ou grandeur, & cette différentielle étant égalée à zero, donnera $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, comme M. de l'Hopital l'a trouvé (*p.* 88) par une voie toute différente. C'eſt donc au point de la Courbe, qui répond à $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, que ſe trouve la plus grande courbure.

1112. Comme on ſait que la Logarithmique a un cours continu ſans inflexion ni rebrouſſement, & que par conſéquent elle ne peut arriver dans la ſuite de ce cours à un Terme naturel de courbure, elle n'arrive donc qu'à un Terme arbitraire, c'eſt-à-dire (931) à un angle de contingence plus grand que tous les précédens & les ſuivans.

EXEMPLE VI.

1113. Soit la Cycloïde (*p.* 91. *des Inf. petits*) dont le Cercle générateur a pour diametre $2a$, ce diametre étant auſſi l'axe de la Cycloïde. Une Ordonnée quelconque de la Cycloïde eſt toujours égale à l'arc u du Cercle générateur plus l'Ordonnée correſpondante du Cercle, qui eſt $z = \sqrt{2ax - xx}$.

Courbure de la Cycloïde.

Donc l'Ordonnée y de la Cycloïde eſt $= u + \sqrt{2ax - xx}$.

Donc $dy = du + \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Et comme du, qui eſt la

M.E.C.D. 2017

différentielle d'un arc fini du Cercle, en eſt par conſéquent un côté quelconque infiniment petit, & que le côté du Cercle eſt $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, on a pour la Cycloïde $dy = \frac{2adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$.

Donc $ddy = \frac{\overline{x-2a} \times dx^2}{4a-2x\sqrt{2ax-xx}}$, où je vois que $\frac{x-2a}{2a-x}$ ſeroit $= -1$, & que par conſéquent $\frac{x-2a}{4a-2x}$ eſt $= -\frac{1}{2}$, puiſque $4a-2x$ eſt double de $2a-x$. Donc $ddy = \frac{-dx^2}{2\sqrt{2ax-xx}}$.

Donc $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}}$.

1114. La Cycloïde à ſon origine ayant $x = dx$ à cauſe de l'origine, & $dx = ddx$ à cauſe de la perpendicularité, $\frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}}$ eſt alors $= \frac{-dsddx}{2\sqrt{2addx}} = \frac{-ds\sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}}$, courbure ordinaire & finie, puiſque ds & $\sqrt{ddx}$ ſont tous deux du 1er ordre d'Infiniment petit.

1115. On a par-tout dans la Cycloïde $dy . dx :: 2a - x . \sqrt{2ax-xx}$. Donc à l'origine $dy . ddx :: 2a . \sqrt{2addx}$. Donc alors $dy = \frac{2addx}{\sqrt{2addx}} = \sqrt{2addx}$. Et comme en ce point $dy = ds$, on a donc $\frac{-ds\sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}} = \frac{-\sqrt{2addx} \times \sqrt{ddx}}{2\sqrt{2a}} = \frac{-ddx}{2}$.

1116. Pour avoir en ds l'expreſſion de la courbure de la Cycloïde à ſon origine, il ne faut que tirer de $dy = \sqrt{2addx}$, $dy^2 = 2addx$, & $ddx = \frac{dy^2}{2a}$. Donc $\frac{-ddx}{2} = \frac{-dy^2}{4a} = \frac{-ds^2}{4a}$, puiſqu'alors $ds = dy$.

1117. Si $x = \frac{a}{2}$, $\frac{-dsdx}{2\sqrt{2ax-xx}} = \frac{-dsdx}{a\sqrt{3}}$.

1118.

M.E.C.D. 2017

1118. Pour comparer $\frac{-ds^2}{4a}$ & $\frac{-ds\,dx}{a\sqrt{3}}$, ou $\frac{ds}{4}$ & $\frac{dx}{\sqrt{3}}$, il faut avoir en ds la valeur de dx au point où $x = \frac{a}{2}$. On a à ce point $dy \,.\, dx :: \frac{3a}{2} \,.\, \frac{a\sqrt{3}}{2} :: 3 \,.\, \sqrt{3} :: \sqrt{3} \,.\, 1$. Donc $dy = dx\sqrt{3}$. $dy^2 = 3dx^2$. $dy^2 + dx^2 = 4dx^2 = ds^2$. Donc $dx = \frac{ds}{2}$. Donc $\frac{dx}{\sqrt{3}} = \frac{ds}{2\sqrt{3}}$. Donc la courbure de l'origine eſt à celle du point où $x = \frac{a}{2} :: \frac{ds}{4} \,.\, \frac{ds}{2\sqrt{3}} :: 2\sqrt{3} \,.\, 4 :: \sqrt{3} \,.\, 2$. Donc la courbure eſt croiſſante depuis l'origine juſqu'au point où $x = \frac{a}{2}$.

On trouvera de même, en donnant à x différentes valeurs toujours plus grandes que $\frac{a}{2}$, que la courbure ſera toujours croiſſante.

1119. A l'extrémité de la Cycloïde $\frac{-ds\,dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \frac{-ds\,dx}{2\,dz}$. *Infinie à ſon extrémité.*

Car la Cycloïde étant alors parallele à ſon axe, elle a un dx, & $\sqrt{2ax - xx}$ qui eſt l'Ordonnée du Cercle $= z$, devient dz, parce que le Cercle à ce point a une Ordonnée infiniment petite du 1er ordre. Or $\frac{-ds\,dx}{2\,dz}$, Sinus de l'angle de contingence de ce point, eſt un Infiniment petit du 1er ordre, donc cet angle ſeroit Fini, s'il étoit poſſible, & la courbure infinie. Mais comme un angle de contingence fini eſt impoſſible, il faut qu'à ce Terme naturel de courbure croiſſante il s'en ſubſtitue un autre, qui ne peut être qu'un côté nul, ou infiniment petit du 2^d^ ordre (911). *Et pourquoi.*

1120. Et en effet cela eſt néceſſaire par la génération de la Cycloïde, ou par ſa correſpondance avec le Cercle. Les Ordonnées du Cercle prolongées ſont celles de la Cycloïde, & par conſéquent deux Ordonnées quelconques infiniment proches comprennent entr'elles un arc infiniment petit ou côté tant du Cercle que de la Cycloïde. D'ailleurs ces Or-

M.E.C.D. 2017

données perpendiculaires à l'axe, tant du Cercle que de la Cycloïde, ſont paralleles à la baſe de la Cycloïde. A l'origine commune ces deux Courbes ſont perpendiculaires à leur axe, mais à l'extrémité le Cercle eſt encore perpendiculaire à l'axe, & la Cycloïde y eſt parallele, ou, ce qui revient au même, le Cercle eſt parallele à la baſe de la Cycloïde, & la Cycloïde y eſt perpendiculaire. De-là il ſuit que les Ordonnées de l'une & de l'autre Courbe étant toujours paralleles à la baſe de la Cycloïde, les deux dernieres Ordonnées n'ont point dans le Cercle, parallele alors à la baſe de la Cycloïde, & couché ſur cette baſe, de dx qui les ſépare, au lieu qu'il y en avoit un partout ailleurs, elles n'ont pour intervalle qu'un ddx, & par conſéquent au lieu que partout ailleurs deux Ordonnées conſécutives comprenoient entr'elles, étant prolongées, un côté de la Cycloïde de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, celles-là n'en peuvent plus comprendre qu'un qui ſoit nul, ou de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

1121. Si l'on veut ſuivre encore cela plus loin, on trouvera que le 1er côté de la Cycloïde étant plus grand que celui du Cercle, ceux de la Cycloïde vont toujours enſuite en décroiſſant par rapport à ceux du Cercle, de ſorte qu'il n'eſt pas étonnant qu'au dernier côté du Cercle $= \frac{1}{\infty}$ il en réponde un de la Cycloïde $= \frac{1}{\infty^2}$.

Car le côté du Cercle eſt toujours $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Donc à l'origine du Cercle le côté eſt $= \frac{a\,ddx}{\sqrt{2\,a\,ddx}}$. Et le 1er côté de la Cycloïde eſt $= dy = \frac{2\,a\,ddx}{\sqrt{2\,a\,ddx}}$ (1115), donc ddx étant le même de part & d'autre, le 1er côté de la Cycloïde eſt au 1er du Cercle :: 2 . 1.

Au point où $x = \frac{a}{2}$, le côté du Cercle eſt $= \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, & celui de la Cycloïde eſt $ds = 2dx$ (1118), donc dx étant

M.E.C.D. 2017

le même de part & d'autre, le côté de la Cycloïde eſt alors à celui du Cercle :: $2 . \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$ :: $2 . \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}$ :: $2 . \frac{2}{\sqrt{3}}$ :: $\sqrt{3} . 1$.

Donc le côté de la Cycloïde, quoiqu'encore plus grand que celui du Cercle, le ſurpaſſe moins qu'il ne le ſurpaſſoit à l'origine, il en ira de même des autres. Et comme les côtés de la Cycloïde ont été ſuppoſés conſtans, il faut concevoir que ceux du Cercle croiſſent toujours par rapport à ceux de la Cycloïde, de ſorte qu'à la fin le Cercle en a encore un de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, lorſque la Cycloïde n'en a plus, ou n'en a un que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$.

1122. Quand on a trouvé dans l'art. 1119, $\frac{-dsdx}{2dz}$, courbure infinie de l'extrémité de la Cycloïde, on a pris dx pour dx, & non pour ddx, comme on a trouvé depuis qu'il l'étoit, & de même ds pour ds, & non pour dds : mais il ne faut pas remettre à préſent dans l'expreſſion de la courbure infinie ddx pour dx, ni dds pour ds. La raiſon en eſt que $\frac{dsdx}{dz}$ ſignifie par ſoi-même le Sinus d'un angle de contingence fini, & le doit toujours ſignifier. Mais parce que cet angle fini eſt impoſſible, non par lui-même, mais dans une Courbe, il faut, ſans rien changer à cette expreſſion, entendre par-là une autre maniere équivalente dont la courbure eſt infinie.

1123. Dans toutes les Courbes qui à leur origine étoient perpendiculaires, on a toujours trouvé pour le Sinus de l'angle de contingence de l'origine ddx, ſoit ſans coëfficient comme dans le Cercle (1071), dans l'Ellipſe (1084), dans la Parabole (1093), ſoit avec un coëfficient comme ici dans la Cycloïde (1115). Il eſt aiſé d'en voir la raiſon générale.

Remarque ſur la courbure des Courbes perpendiculaires à leur origine.

Soit Mm le 1er côté d'une Courbe qui eſt perpendiculaire à ſon axe, & $m\mu$ le 2^d^. La petite ligne ma étant tirée du point m ſur l'axe, de ſorte qu'elle ne differe de Mm que parce qu'elle fait avec elle l'angle amM, dont la baſe aM eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, cette baſe aM eſt ddx, & la Courbe eſt

FIG. IX.

M.E.C.D. 2017

perpendiculaire, parce que aM ou ddx eſt infiniment petit par rapport à Mm ou dy. D'un autre côté, l'angle $Km\mu$ eſt le 1er angle de contingence de la Courbe, dont le Sinus eſt auſſi ce même ddx avec ou ſans coëfficient, puiſqu'on l'a trouvé pour meſure de ce 1er angle, & par conſéquent l'angle $Km\mu$ a toujours rapport à l'angle amM. Si le 2^d côté $m\mu$ prolongé tombe ſur la ligne ma, les deux angles $Km\mu$ & amM ſont égaux. Si $m\mu$ prolongé tombe entre ma & mM, l'angle de contingence $Km\mu$ eſt plus petit que l'angle amM, ſi c'eſt le contraire, il eſt plus grand.

Quand aM ſeroit du 1er ordre, elle pourroit être priſe pour un arc circulaire infiniment petit qui meſureroit l'angle amM, à plus forte raiſon étant du 2^d ordre par la ſuppoſition. Donc ſi $m\mu$ prolongé tombe ſur am, l'angle de contingence eſt meſuré par $aM = ddx$, & ſoit que $m\mu$ prolongé tombe entre am & Mm, ſoit le contraire, les angles de contingence ſeront toujours exprimés par $\frac{aM}{n}$ ou par $n \times aM$; n étant un coëfficient fini, c'eſt-à-dire par $\frac{ddx}{n}$, ou $nddx$.

1124. Donc dans la Cycloïde, où le Sinus de l'angle de contingence de l'origine eſt $= \frac{ddx}{2}$, la courbure de l'origine eſt la moitié moindre que ſi elle étoit exprimée par ddx. Et comme dans le Cercle elle eſt exprimée par ddx, qui eſt le même de part & d'autre, la courbure de la Cycloïde eſt donc la moitié moindre que celle du Cercle à leur origine commune.

1125. Donc ſi l'on imagine que le Cercle & la Cycloïde aient un même côté à leur origine, il faut que l'angle de contingence que fait le Cercle par ſon 2^d côté ſoit double de celui que fait la Cycloïde par le ſien, ce qui eſt poſſible, puiſque par-là le Cercle eſt intérieur à la Cycloïde, comme effectivement il doit l'être. Mais d'ailleurs cela n'eſt plus poſſible, quand on ſuppoſe les côtés de la Cycloïde conſtans, comme l'on fait ici en conſidérant ſa courbure, car ils ſeroient donc tous égaux à ce 1er côté du Cercle, & ſi le Cercle étoit auſſi

M.E.C.D. 2017

conçu diviſé en côtés tous égaux à ce 1er, les deux ſommes d'un nombre infini égal de grandeurs égales ſeroient égales, ou la circonférence du Cercle à celle de la Cycloïde, ce qui certainement n'eſt pas. Donc il faut concevoir une autre maniere dont la courbure de la Cycloïde ſera la moitié moindre que celle du Cercle à leur origine commune, & cette autre maniere conſiſtera néceſſairement en ce que le 1er côté de la Cycloïde ſera double de celui du Cercle, ce qui revient à l'art. 1121, moyennant quoi les deux Courbes auront leur 1er angle de contingence égal.

1126. Donc ce n'eſt pas ſeulement dans le cas de la courbure infinie qu'il faut tranſporter aux côtés ce qui devroit naturellement & ne peut cependant appartenir aux angles de contingence. Cela vient viſiblement de l'équivalence des deux manieres de meſurer la courbure.

EXEMPLE VII.

1127. Soit la 1re Parabole cubique $a^2 x = y^3$. $dy = \frac{a\,a\,dx}{3y^2}$ *Courbure de la premiere Parabole du 3me degré.*

$ddy = \frac{-2a^4 dx}{a^4 + 9y^5} \cdot \frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{-2a^4\,ds\,dx}{a^4 y + 9y^5}$.

1128. A l'origine, où $y = dy$, & à cauſe de la perpendicularité $dy = ds$, & $dx = ddx$, $\frac{-2a^4\,ds\,dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-2a^4\,ds\,ddx}{a^4\,dy}$

$= -2\,ddx$.

Or on a par tout, $dy . dx :: 1 . 3y^2$, & à l'origine, $dy . ddx :: 1 . 3\,dy^2$. Donc $dy = ds$ étant $= \frac{1}{\infty}$, ddx eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & $= \frac{3}{\infty^3}$. Donc $-2\,ddx = \frac{-6}{\infty^3}$. Donc la courbure eſt nulle.

1129. Il faut entendre par-là que la petite ligne $a\,M$ FIG. IX. qui détermine la perpendicularité, & qui ordinairement eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, eſt dans cette Parabole de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, ainſi qu'il eſt fort poſſible qu'elle en ſoit, & même de tous les ordres inférieurs, de ſorte que $m\mu$, 2^d^ côté de la Courbe, étant prolongé juſqu'à l'axe, tomberoit ſur le point a, dont

M.E.C.D. 2017

la distance au point M seroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, car on n'a point d'égard au coëfficient 6, qui se trouve ici, & de-là il suit que le Sinus de l'angle de contingence $K m \mu$ est un Infiniment petit de cet ordre, & que le côté $m \mu$ a la position mK, à cet angle près, qui n'est rien par rapport aux angles ordinaires de contingence, ou enfin que les deux 1ers côtés Mm & $m \mu$ sont *censés* posés bout à bout en ligne droite, & le sont sensiblement.

1130. Cette Parabole à son origine a une inflexion, parce que (940) à la droite du point de son origine elle n'a des Ordonnées qu'au dessus de l'axe, & à la gauche elle n'en a qu'au dessous, & comme l'inflexion produit ordinairement une courbure nulle, on auroit pû croire que c'est elle qui rend la courbure de l'origine nulle. Mais on voit par l'art. précédent que cela n'est point ainsi, puisqu'on n'a considéré que l'origine de la branche supérieure à l'axe, dont les deux 1ers côtés sont nécessairement posés en ligne droite. Donc la courbure nulle de cette Parabole à son origine est indépendante de l'inflexion qui se fait à cette même origine de la branche supérieure à l'inférieure. Donc en considérant l'inflexion, il faudra concevoir quatre côtés consécutifs de cette Courbe posés bout à bout en ligne droite, deux de la branche supérieure, & deux de l'inférieure.

1131. Si l'on prend dans cette Courbe $y = \frac{a}{2}$, on a $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-64 ds dx}{25a}$. Et si $y = a$, $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-ds dx}{5a}$.

1132. Pour comparer $\frac{64 ds dx}{25a}$ & $\frac{ds dx}{5a}$ ou $\frac{64 dx}{5}$ & dx, on peut, comme on a fait jusqu'ici, exprimer ces dx en ds, ou les laisser en dx, mais après les avoir égalés à ds, ce qui reviendra au même. En prenant ce dernier tour, je distingue ces dx, parce qu'ils sont différens, & j'appelle le 1er Dx. y étant $= \frac{a}{2}$, $dy^2 + Dx^2 = ds^2 = \frac{25 Dx^2}{9}$. Et y étant $= a$, $ds^2 = \frac{10 dx^2}{9}$. Donc les ds étant constans, $25 Dx^2 = 10 dx^2$.

M.E.C.D. 2017

Donc $Dx^2 . dx^2 :: 10 . 25$, & $Dx . dx :: \sqrt{10} . 5$. Donc, comme il ne s'agit ici que de rapports, en mettant au lieu de Dx & de dx, les nombres qui ont même rapport, $\frac{64\,Dx}{5} = \frac{64\sqrt{10}}{5}$, & $dx = 5$. Or $\frac{64\sqrt{10}}{5} . 5 :: 64\sqrt{10} . 25$, c'eſt-à-dire, que la courbure du point où $y = \frac{a}{2}$ eſt plus de huit fois plus grande que celle du point où $y = a$.

1133. La courbure nulle à l'origine ne va donc pas toujours en croiſſant depuis ce point-là, & il faut qu'il y ait plus près de l'origine que le point où $y = a$, un point où elle arrive à un Terme de grandeur, qui ne peut être qu'arbitraire, puiſque la Courbe n'a au deſſus de ſon axe qu'un cours continu ſans inflexion ni rebrouſſement.

Croiſſante depuis l'origine où elle eſt nulle, juſqu'à un certain point, & de-là décroiſſante.

Il faut trouver ce *plus grand* comme dans l'art. 1111, & il vient $y = \frac{a}{\sqrt[4]{45}}$.

Comme $\sqrt[4]{45}$ eſt entre 2 & 3, $y = \frac{a}{\sqrt[4]{45}}$ eſt plus petite, & par conſéquent plus proche de l'origine que $y = \frac{a}{2}$.

1134. Si dans cette Parabole $y = \infty$, ou plutôt $y = \infty^{\frac{1}{3}}$, car ſans cela il y auroit beaucoup d'erreur, $\frac{-2a^4 ds dx}{a^4 y + 9y^5} = \frac{-2a^4 ds dx}{9\infty^{\frac{5}{3}}}$. Et comme à cauſe du paralléliſme $dx = ds = \frac{1}{\infty}$, on a $\frac{-2a^4 ds dx}{9\infty^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\infty^2}$ diviſé par $\infty^{\frac{5}{3}}$, & en ne conſidérant que l'ordre $= \frac{1}{\infty^2 \times \infty^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{11}{3}}}$, courbure du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit par rapport au Fini, & de deux ordres radicaux au deſſous de $\frac{1}{\infty^{\frac{9}{3}}} = \frac{1}{\infty^3}$.

1135. Donc cette courbure nulle de l'extrémité eſt du

M.E.C.D. 2017

même ordre potentiel par rapport au Fini que celle de la Parabole du 2d degré (1096).

1136. De ce que la courbure de cette Parabole eſt nulle, tant à ſon origine qu'à ſon extrémité, il ſuit, indépendamment des art. 1132, 1133, qu'elle doit avoir un *plus grand* de courbure entre l'origine & l'extrémité.

EXEMPLE VIII.

Courbure de la 1re Parabole du 4me degré.

1137. Soit la 1re Parabole du 4me degré, $a^3 x = y^4$.

$$dy = \frac{a^3\,dx}{4y^3}.\ ddy = \frac{-3a^6\,dx^2}{a^6y+16y^7}.\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{3a^6\,ds\,dx}{a^6y+16y^7}.$$

1138. On trouvera, comme dans l'art. 1128, qu'à l'origine la courbure eſt $-3\,ddx = \frac{-12}{\infty^4}$.

Comparaiſon des courbures des 1res Paraboles à leur origine, où elles ſont toujours nulles, excepté dans la Parabole du 2d degré.

1139. Donc le ddx de l'origine étant dans la Parabole du 2d degré $\frac{2}{\infty^2}$ (1093) $= \frac{2\times1}{\infty^2}$, dans la 1re Parabole du 3me degré $\frac{6}{\infty^3}$ (1128) $= \frac{3\times2}{\infty^3}$, dans la 1re du 4me degré $\frac{12}{\infty^4} = \frac{4\times3}{\infty^4}$, il eſt aiſé de voir que dans chaque 1re Parabole il ſera en général $\frac{n\times\overline{n-1}}{\infty^n}$, c'eſt-à-dire, que toutes ces Paraboles ſeront d'autant plus perpendiculaires à leur origine que leur degré ſera plus élevé, ce qui revient à l'art. 1002, que leur courbure y ſera toujours nulle, excepté dans celle du 2d degré, & qu'étant nulle, elle ſera de l'ordre n d'Infiniment petit, & qu'en même temps le Sinus de l'ordre n ſera toujours plus grand dans ſon ordre.

1140. A l'extrémité de la 1re Parabole du 4me degré, où $y = \infty^{\frac{1}{4}}$, on trouvera $\frac{-3a^6\,ds\,dx}{a^6y+16y^7}$ de l'ordre de $\frac{-1}{\infty^{\frac{15}{4}}}$, & par conſéquent du 4me ordre potentiel d'Infiniment petit, comme dans les autres 1res Paraboles (1096, 1134). D'où il eſt aiſé de juger que la courbure de toutes les 1res Paraboles

à

M.E.C.D. 2017

à leur extrémité, ſera toujours nulle, & de ce même 4me ordre potentiel d'Infiniment petit.

1141. Donc toutes les 1res Paraboles, excepté celle du 2^d degré, auront un *plus grand* de courbure entre leur origine & leur extrémité.

1142. Si on raſſemble les expreſſions des courbures des extrémités des 1res Paraboles, en y remettant les coëfficiens finis qu'on avoit négligés, on aura $\frac{1}{4\infty^{\frac{7}{2}}}$ (1096), $\frac{2}{9\infty^{\frac{11}{3}}}$ (1134), $\frac{3}{16\infty^{\frac{15}{4}}}$ (1140), c'eſt-à-dire, en général $\frac{n-1}{nn\times\infty^{\frac{4n-1}{n}}}$. *Comparaiſon des courbures des 1res Paraboles à leur extrémité, où elles ſont auſſi toujours nulles.*

D'où il ſuit que plus n eſt grand, plus la courbure nulle de l'extrémité approche d'être $=\frac{1}{n\times\infty^4}$, que par conſéquent la courbure en eſt d'autant plus nulle, & ces Paraboles lignes droites dans une plus grande étendue finie, ou plus paralleles, ce qui revient à l'art. 970.

EXEMPLE IX.

1143. Soit la 2de & derniere Parabole cubique $ax^2=y^3$. $dy=\frac{2axdx}{3y^2}$. $ddy=\frac{-2adx^2}{9y^2+4ay}$. $\frac{dsddy}{dx}=\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay}$. *Courbure de la 2de & derniere Parabole du 3me degré.*

1144. A l'origine, où $y=dy=ds=\frac{1}{\infty}$, & $dx=ddx$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay}=\frac{-2adsddx}{4ady}=\frac{-ddx}{2}$. Mais il faut voir ce que vaut ce ddx.

1145. On a par-tout, en négligeant les coëfficiens, $dy.dx::x.y^2$, & à l'origine où $x=dx$, parce qu'il n'y a point d'autre x que dx, & où $dx=ddx$ à cauſe de la perpendicularité, on a $dy.ddx::ddx.dy^2$. Donc $ddx^2=dy^3=\frac{1}{\infty^3}$. Donc $ddx=\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$.

1146. $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}=ddx$ eſt d'un ordre radical au-deſſous de

M.E.C.D. 2017

$\frac{1}{\infty^{\frac{2}{2}}} = \frac{1}{\infty} = dy$, ce qui ſuffit pour la perpendicularité; car ce ddx eſt toujours nul par rapport à dy. Mais en même-temps ddx eſt la meſure du 1er angle de contingence (1123), ou l'arc circulaire qui le meſure, & cet arc, dans la courbure ordinaire ou finie, eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$. Or ici il n'eſt que $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc il eſt d'un ordre radical au-deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$, donc infiniment plus grand.

Il eſt vrai que $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ eſt du 2^d^ ordre potentiel par rapport au Fini: mais il eſt toujours en lui-même infiniment plus grand que $\frac{1}{\infty^2}$, & cela doit avoir un effet. Donc il faut concevoir le 1er angle de contingence de cette Parabole infiniment plus grand que ne ſeront les angles de contingence ſuivans.

Infinie à ſon origine.

1147. Et comme dès que les angles de contingence s'élevent plus haut qu'ils ne peuvent aller dans une Courbe, on doit rejetter en ſens contraire ſur les côtés de la Courbe ce qui leur auroit appartenu: il faut concevoir le 1er côté de cette Parabole comme nul, non abſolument, mais dans le rapport de $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ à $\frac{1}{\infty}$, qui ſera la grandeur de tous les autres côtés exiſtans & conſtans, & après ce 1er côté de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, il ſe fera un angle de contingence, dont le Sinus ſera à l'ordinaire de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & par conſéquent il ſe fera un détour ordinaire après un pas infiniment plus petit que ne ſeront tous les ſuivans, d'où s'enſuivra à l'origine une courbure infinie de la même maniere que ſi le 1er angle de contingence y avoit été infiniment plus grand que par-tout ailleurs.

1148. La 2de Parabole cubique a un rebrouſſement à

M.E.C.D. 2017

ſon origine, comme l'on verra ſelon l'art. 940. Mais ſelon le raiſonnement de l'art. 1130. Ce n'eſt point ce rebrouſſement que nous conſidérons ici, & ce n'eſt point lui qui rend la courbure infinie: elle ne l'eſt que parce que le 1er côté de la Courbe eſt infiniment petit par rapport aux autres. Mais parce qu'il l'eſt, & que l'autre poſé contre lui, & qui fait le rebrouſſement, lui eſt égal, ce rebrouſſement eſt accompagné d'une courbure infinie (911).

1149. Si $y = a$, d'où ſuit $x = a$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-2dsdx}{13a}$. Et ſi $y = 2a$, d'où ſuit $x = a\sqrt{8}$, on a $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} = \frac{-dsdx}{22a}$.

1150. Pour comparer $\frac{-2dsdx}{13a}$ & $\frac{-dsdx}{22a}$, ou ſelon l'art. 1132, $\frac{2Dx}{13}$ & $\frac{dx}{22}$, on a dans la ſuppoſition de $y = a = x$, $dy = \frac{2axDx}{3y^2} = \frac{2Dx}{3}$. Donc $dy^2 = \frac{4Dx^2}{9}$. $dy^2 + Dx^2 = \frac{13Dx^2}{9} = ds^2$. Donc $ds = \frac{Dx\sqrt{13}}{3}$, & $Dx = \frac{3ds}{\sqrt{13}}$. Et dans la ſuppoſition de $y = 2a$, on a $dy = \frac{dx\sqrt{8}}{6}$, $dy^2 = \frac{8dx^2}{36} = \frac{2dx^2}{9}$. $dy^2 + dx^2 = \frac{11dx^2}{9} = ds^2$. Donc $ds = \frac{dx\sqrt{11}}{3}$, & $dx = \frac{3ds}{\sqrt{11}}$. Donc la courbure du point où $y = a$ eſt à celle du point où $y = 2a :: 44\sqrt{11}. 13\sqrt{13}$, c'eſt-à-dire, que la courbure du point plus proche de l'origine eſt plus que triple de l'autre.

1151. A l'extrémité de cette Parabole $\frac{-2adsdx}{9y^2+4ay} =$ *Nulle à l'extrémité.* $\frac{-2adsdx}{4}$, car y infinie eſt $= \infty^{\frac{2}{3}}$. D'ailleurs à cauſe du paralléliſme $dx = ds = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$. Donc la courbure, en négligeant

M.E.C.D. 2017

les coëfficiens, eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ diviſé par $\infty^{\frac{4}{3}}$, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{10}{3}}}$. Donc elle eſt nulle, & paſſe le 3me ordre d'Infiniment petit ſans aller juſqu'au 4me, dont elle differe de deux ordres radicaux.

EXEMPLE X.

Courbure de la 2de & derniere Parabole du 4me degré, pareillement infinie à l'origine, & nulle à l'extrémité.

1152. Soit la 2de & derniere Parabole du 4me degré $ax^3 = y^4$. $dy = \frac{3ax^2dx}{4y^3}$. $ddy = \frac{-3axdx^2}{16y^3+9axy}$. $\frac{dsddy}{dx} = \frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy}$.

1153. A l'origine de cette Parabole, où $y = dy = ds = \frac{1}{\infty}$, & $dx = ddx$, on a $\frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy} = \frac{-dsdx}{3dy} = \frac{-ddx}{3}$. Et l'on trouvera, comme dans l'art. 1145, que ddx^3 eſt $= dy^4$. Donc $ddx = dy^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, c'eſt-à-dire, de cet ordre.

1154. Donc ſelon les art. 1146, 1147, la courbure de cette Parabole à ſon origine eſt infinie.

1155. A l'extrémité, où $y = \infty^{\frac{3}{4}}$, & $x = \infty$, on a $\frac{-3axdsdx}{16y^3+9axy} = \frac{-3a\infty\times dsdx}{16\infty^{\frac{9}{4}}}$, & pour l'ordre $= \frac{1}{\infty}$ diviſé par $\infty^{\frac{9}{4}} = \frac{1}{\infty\times\infty^{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{13}{4}}}$. Donc la courbure eſt nulle, & elle tombe d'un ordre radical au-deſſous de $\frac{1}{\infty^3}$, & ne va pas juſqu'à $\frac{1}{\infty^4}$.

Courbures infinies des dernieres Paraboles de chaque degré à leur origine.

1156. Le ddx de la 2de Parabole cubique à ſon origine eſt $= \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ (1145), & en lui rendant ſes coëfficiens, parce que $3dy^3 = 2ddx^2$ (1143 & 1144), il eſt $= \frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{2}\times\infty^{\frac{3}{2}}}$.

Et de plus, parce que la meſure de la courbure de cette

M.E.C.D. 2017

Parabole à ſon origine eſt, non pas ddx, mais $\frac{ddx}{2}$ (1144), il eſt, entant qu'il meſure cette courbure, $= \frac{\sqrt[2]{3}}{2\sqrt[2-]{2} \times \infty^{\frac{3}{2}}}$.

De même le ddx qui meſure la courbure de la 2de Parabole du 4me degré à ſon origine eſt, en lui rendant ſes coëfficiens, $= \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3-]{3} \times \infty^{\frac{4}{3}}}$. D'où l'on voit qu'en général le ddx qui meſurera la courbure de chaque derniere Parabole d'un degré quelconque n à ſon origine, ſera $\frac{\sqrt[n\ 1]{n}}{\overline{n-1} \times \sqrt[n-1]{n-1} \times \infty^{\frac{n}{n-1}}}$.

1157. Donc la courbure de chaque derniere Parabole à ſon origine ſera toujours infinie, car $\infty^{\frac{n}{n-1}}$ ne peut jamais être $= \infty^2$.

1158. De plus, cette courbure infinie ſera d'autant plus grande que le degré n ſera plus grand; car $\frac{n}{n-1}$ en approchera d'autant plus d'être $= 1$, auquel cas l'angle de contingence ſeroit fini, ou le 1er côté de la Courbe de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$. Mais comme n ne peut jamais être $= \infty$, ce qui ſeul rendroit $\frac{n}{n-1} = 1$, le 1er côté de la Courbe ne peut jamais être de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, ſeulement il en approche toujours de plus en plus par les ordres radicaux intermédiaires.

Et leurs rapports.

1159. Pour avoir l'expreſſion du ddx de l'origine des Paraboles moyennes dans les degrés qui en ont, il ne faut que comparer les ddx de l'origine des deux Paraboles extremes. Par exemple, dans le 5me degré le ddx de la 1re Parabole eſt $\frac{20}{\infty^5}$ (1139), & celui de la derniere eſt $\frac{\sqrt[4]{5}}{4\sqrt[4-]{4} \times \infty^{\frac{5}{4}}}$ (1156). Or il eſt aiſé de voir que $\frac{20}{\infty^5}$ eſt $= \frac{\sqrt[1]{4\ 5}}{1\sqrt[1-]{1} \times \infty^{\frac{5}{1}}}$

Courbures des Paraboles moyennes à leur origine.

M.E.C.D. 2017

& que $\frac{\overset{4}{V}5}{\overset{4}{V}4\times\infty^{\frac{5}{4}}} = \frac{1\overset{4}{V}5}{\overset{4}{V}4\times\infty^{\frac{5}{4}}}$.

Donc dans le numérateur de ces fractions, $\overset{1}{V}5$ eſt devenu de la 1re Parabole à la derniere $\overset{4}{V}5$, & le coëfficient 4 eſt devenu 1, ce qui marque que dans les fractions intermédiaires les numérateurs ont été $3\overset{2}{V}5$, & $2\overset{3}{V}5$. On trouvera de même que les dénominateurs ont été $2\overset{2}{V}2\times\infty^{\frac{5}{2}}$ & $3\overset{3}{V}3\times\infty^{\frac{5}{3}}$. Par conſéquent les *ddx* de toutes les Paraboles du 5me degré arrangés de ſuite, ſont $\frac{4\overset{1}{V}5}{\overset{1}{V}1\times\infty^{\frac{5}{1}}}$. $\frac{3\overset{2}{V}5}{\overset{2}{V}2\times\infty^{\frac{1}{2}}}$. $\frac{2\overset{3}{V}5}{\overset{3}{V}3\times\infty^{\frac{5}{3}}}$. $\frac{1\overset{4}{V}5}{\overset{4}{V}4\times\infty^{\frac{5}{4}}}$. D'où il ſeroit aiſé de tirer l'expreſſion générale des *ddx* de l'origine de toutes les Paraboles d'un degré quelconque.

1160. Mais ce qu'il y a de plus important à remarquer, c'eſt que les dénominateurs de ces fractions ayant toujours ∞, dont l'expoſant eſt n, degré de la Parabole, diviſé par tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à $n - 1$, tant que le quotient de la diviſion eſt plus grand que 2, la courbure des Paraboles à leur origine eſt nulle, qu'elle eſt finie quand ce quotient eſt $= 2$, & infinie quand il eſt moindre que 2.

Cela embraſſe en général ce que M. de l'Hopital a avancé ſans démonſtration (*p.* 86 & 87) ſur la courbure de quelques Paraboles particulieres à leur origine.

1161. S'il étoit reſté quelque ſcrupule ſur ce que nous avons établi pour marque d'une courbure infinie *ddx*, lorſqu'il eſt ſeulement de quelque ordre radical au-deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$ ce ſcrupule ſeroit levé par l'analogie de la courbure des différentes Paraboles d'un même degré, trouvée dans l'art. précédent. Car à compter de la 1re Parabole, la courbure de

M.E.C.D. 2017

l'origine étant nulle, & toujours d'un ordre moins bas jusqu'à une certaine Parabole moyenne, & ensuite finie, si le degré de la Parabole le permet, ce qui est très-certain, il faut après cela que la courbure devienne infinie, & toujours plus infinie.

1162. Les courbures des extrémités des dernieres Paraboles de chaque degré étant avec les coëfficiens $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$ (1096), $\frac{2}{\infty^{\frac{10}{3}}}$ (1151), $\frac{3}{\infty^{\frac{13}{4}}}$ (1155), on voit qu'en général la courbure de l'extrémité d'une derniere Parabole sera $\frac{n-1}{\infty^{\frac{3n+1}{n}}}$.

1163. D'un autre côté la courbure des extrémités des 1res Paraboles étant (1142) $\frac{n-1}{\infty^{\frac{4n-1}{n}}}$, il est aisé de voir que dans chaque degré la courbure de la 1re Parabole à son extrémité qui sera $\frac{n-1}{\infty^{\frac{4n-1}{n}}}$, ne différera de celle de la derniere $\frac{n-1}{\infty^{\frac{3n+1}{n}}}$ que par les numérateurs de l'exposant de ∞, & que quand il y aura des Paraboles moyennes, les numérateurs des exposans de leur ∞ feront les nombres naturels moyens entre $4n-1$, & $3n+1$. *Courbures nulles des Paraboles à leur extrémité, & leurs rapports.*

Par ex. dans le 5me degré, les courbures des extrémités des quatre Paraboles feront $\frac{4}{\infty^{\frac{19}{5}}}$. $\frac{4}{\infty^{\frac{18}{5}}}$. $\frac{4}{\infty^{\frac{17}{5}}}$. $\frac{4}{\infty^{\frac{16}{5}}}$.

Les conséquences sont aisées à tirer pour ce degré & pour tous les autres.

EXEMPLE XI.

1164. Dans la Courbe de l'art. 1059, on aura, les ds étant constans, $ddy = \frac{-6\sqrt{x-a^{-\frac{7}{5}}}dx^2}{9\sqrt{x-a^{-\frac{4}{5}}}+25}$ & $\frac{ds\,ddy}{dx} =$ *Courbure de la Courbe de l'art. 1059.*

M.E.C.D. 2017

$$\frac{-6\,\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}\,ds\,dx}{9\,\overline{x-a}^{-\frac{4}{5}}+25}.$$

1165. On a par-tout dans cette Courbe, $dy.\ dx :: 3\,\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}.\ 5$. Donc au point où se fait l'inflexion, & où la courbure est infinie, x étant $= a$, ou $x - a = \frac{1}{\infty}$, & $\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}} = \infty^{\frac{2}{5}}$ (1059), on a dans ce point $dy.\ dx :: 3\,\infty^{\frac{2}{5}}.\ 5$. Donc la Courbe y est perpendiculaire, & l'inflexion s'y fait par un côté perpendiculaire. Donc alors $dy = ds$, & dx tombe au-dessous de dy.

1166. Pour avoir la valeur de ce dx, il faut prendre $ds = \frac{1}{\infty}$, puisqu'il est constant, & faire cette analogie. $3\infty^{\frac{2}{5}}.\ 5 :: \frac{1}{\infty}.\ \frac{5}{3\,\infty\times\infty^{\frac{2}{5}}} = \frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}}$. Donc $dx = \frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}}$.

1167. Donc en ce point où $x = a$, le numérateur de l'expression de la courbure est $-6\,\infty^{\frac{7}{5}}\times\frac{1}{\infty}\times\frac{5}{3\,\infty^{\frac{7}{5}}} = \frac{-10}{\infty}$. Et le dénominateur est $9\,\infty^{\frac{4}{5}}$. Donc la courbure est $\frac{-10}{\infty\times 9\,\infty^{\frac{4}{5}}} = \frac{-10}{9\,\infty^{\frac{9}{5}}}$, d'un ordre radical au-dessus de $\frac{1}{\infty^{\frac{10}{5}}} = \frac{1}{\infty^2}$, donc elle est infinie, ainsi qu'on l'a trouvée par le Rayon de la Développée infiniment petit (1059).

1168. Et l'on peut remarquer la correspondance des deux méthodes, dont la 1re mesure la courbure par le Rayon de la Développée, & la 2de par le Sinus de l'angle de contingence. Dans la 1re la courbure étant finie tant que le Rayon est fini, ou de l'ordre de 1, elle devient infinie, quand ce Rayon tombe dans un ordre quelconque au-dessous de 1, potentiel ou radical. Dans la 2de, la courbure étant finie tant que le Sinus est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, elle devient infinie, quand

ce

M.E.C.D. 2017

ce Sinus s'éleve d'un ordre quelconque au deſſus de $\frac{1}{\infty^2}$. Selon la 1re, le Rayon eſt tombé dans le 1er ordre potentiel compris entre 1 & $\frac{1}{\infty}$, puiſqu'il a été $\frac{3}{2\infty^{\frac{3}{5}}}$ (1059), & ſelon la 2de, le Sinus s'eſt élevé dans le 1er ordre potentiel compris entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty}$, puiſqu'il eſt $\frac{=10}{9\infty^{\frac{9}{5}}}$. Toutes deux ne donnent qu'un Infini de courbure d'un ordre radical pur.

1169. Si $x = \frac{1}{\infty}$, on a $dy \cdot dx :: -3a^{-\frac{2}{5}} \cdot 5$, $:: \frac{=3}{a^{\frac{2}{5}}} \cdot 5$, ce qui fait voir que le rapport de dy à dx étant fini en ce point, la Courbe y eſt oblique à ſon axe. Donc alors dx, dy, & ds, ſont chacun de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

1170. La courbure de ce point eſt $\frac{-6\times-a^{-\frac{7}{5}}\times ds\,dx}{9\times-a^{-\frac{4}{5}}+25}$.

Le numérateur eſt $6a^{-\frac{7}{5}}\times\frac{1}{\infty^2}$ (1169) $= \frac{6}{a^{\frac{7}{5}}\infty^2}$. Le dénominateur eſt $-9a^{-\frac{4}{5}}+25 = \frac{-9+25a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}}$. Donc la courbure eſt $\frac{6a^{\frac{4}{5}}}{-9a^{\frac{7}{5}}+25a^{\frac{11}{5}}\times\infty^2} = \frac{6}{-9a^{\frac{3}{5}}+25a^{\frac{7}{5}}\times\infty^2}$, courbure finie.

1171. Si $x = \infty$, on a $dy \cdot dx :: 3\infty^{-\frac{2}{5}} \cdot 5$, $:: \frac{3}{\infty^{\frac{2}{5}}} \cdot 5$. Donc la Courbe à l'extrémité de ſon cours eſt parallele à ſon axe, & $ds = dx$.

1172. La courbure de ce point eſt $\frac{-6\infty^{-\frac{7}{5}}ds\,dx}{9\infty^{-\frac{4}{5}}+25}$. Le numérateur eſt $\frac{-6}{\infty^{\frac{7}{5}}\times\infty^2} = \frac{-6}{\infty^{\frac{17}{5}}}$. Le dénominateur eſt

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

$\frac{2'}{\infty^{\frac{4}{5}}} + 25 = 25$. Donc la courbure eſt $\frac{-6}{25\infty^{\frac{17}{5}}}$, courbure nulle, & qui eſt de plus d'un ordre potentiel au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$.

1173. Cette Courbe commence par être oblique à ſon axe, & là elle a une courbure finie (1169 & 1170), enſuite ſa courbure eſt croiſſante, puiſqu'elle doit devenir infinie au point où $x = a$ (1167), en même temps la Courbe arrive à une inflexion perpendiculaire (1165), donc les dy ont été croiſſans depuis l'origine auſſi-bien que les y, donc la Courbe a été convexe vers ſon axe. Auſſi le Sinus de l'angle de contingence eſt-il poſitif à l'origine ſelon l'art. 1070, car il eſt viſible que $-9a^{\frac{3}{5}} + 25a^{\frac{7}{5}}$ ne peut être qu'une grandeur poſitive. Donc dans l'inflexion la Courbe paſſe de la convexité à la concavité, & par cette raiſon le Sinus devient négatif en ce point (1167), après quoi il l'eſt toujours, tandis que la Courbe concave vers ſon axe va de la perpendicularité au paralléliſme par un cours infini (1171 & 1172).

EXEMPLE XII.

Courbure de la Courbe de l'art. 962.

1174. Soit la Courbe de l'art. 962, où dy étant $= \frac{2a^3 x\,dx}{x^2 + a^2}$, on a $\frac{ds\,ddy}{dx} = \frac{\overline{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2} \times \overline{ds\,dx}}{x^8 + 4a^2x^6 + 6a^4x^4 + 8a^6x^2 + a^8}$.

1175. Cette Courbe ayant à ſon origine $x = dx$, & de plus étant parallele, ce qui rend $dx = ds = \frac{1}{\infty}$, la Formule de ſa courbure pour ce point ſe réduit à $\frac{\overline{2a^7} \times \overline{ds\,dx}}{a^8} = \frac{2\,ds\,dx}{a} = \frac{2}{a \times \infty^2}$, courbure ordinaire & finie.

1176. M. de l'Hopital a démontré (*p.* 64) que cette Courbe a une inflexion au point où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Et en effet, ſi dans le numérateur de la Formule de ſa courbure on met, au lieu de x^4 & de x^2, les puiſſances 4 & 2 de $\frac{a}{\sqrt{3}}$, on aura

M.E.C.D. 2017

ce numérateur $= o$, ce qui fait voir que la courbure eſt alors abſolument nulle, or elle le peut devenir dans l'inflexion.

De-là il ſuit que tant que x eſt moindre que $\frac{a}{\sqrt{3}}$, la Formule de la courbure ou le Sinus de l'angle de contingence eſt poſitif, & au contraire négatif, quand x eſt plus grand que $\frac{a}{\sqrt{3}}$; & en effet, dans le 1er cas la Courbe eſt convexe vers ſon axe, & concave dans le 2^d^, ce qui confirme ce que nous avons déja remarqué ſur le ſigne dont eſt affecté le Sinus de l'angle de contingence.

1177. Si $x = \infty$, la Formule ſe réduit à $\frac{-6a^3 \infty^4 ds dx}{\infty 8} = \frac{-6a^3 ds dx}{\infty^4}$. Or la Courbe étant parallele à ſon extrémité auſſi-bien qu'à ſon origine, & par conſéquent $dsdx = \frac{1}{\infty^2}$, la courbure de l'extrémité eſt $\frac{6a^3}{\infty^2}$ diviſé par ∞^4, ou $\frac{6a^3}{\infty^6}$. Donc la courbure eſt du 6me ordre d'Infiniment petit, ou de quatre ordres au deſſous de la courbure ordinaire & finie.

1178. Puiſque la courbure eſt nulle au point où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, & nulle à l'extrémité, il faut qu'entre ces deux points il y ait un *plus grand* de courbure, ou Terme arbitraire.

1179. Si l'Hyperbole, dont la courbure à ſon extrémité n'eſt que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ (1105 & 1106), eſt ligne droite dans une étendue infinie, & a une Aſymptote, à plus forte raiſon cela appartiendra-t'il à cette Courbe, dont la courbure à ſon extrémité eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^6}$. En effet, on ſait d'ailleurs qu'elle a une Aſymptote (962).

1180. Ces Courbes, qui ne ſont courbes que vers leur origine dans une étendue finie indéterminable, & deviennent lignes droites vers leur extrémité dans des étendues infinies, ne le deviennent pas exactement, comme nous l'avons dit tant de fois. Elles ſont alors parfaitement dans le cas des art. 732, 733, 734.

M.E.C.D. 2017

Quelles Courbes le deviennent droites dans des étendues infinies.

1181. Par l'exemple de l'Hyperbole & de cette derniere Courbe, on voit assez que les Courbes dont le Sinus de l'angle de contingence est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$, & au dessous, deviennent, non exactement, mais sensiblement droites dans des étendues infinies, & ont des Asymptotes.

Quelles Courbes le deviennent dans des étendues finies.

1182. D'un autre côté la Logarithmique, dont le Sinus de la courbure est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$ complet, est ligne droite dans une étendue finie (1110), & n'a point d'Asymptote de ce côté-là, d'où il suit que toutes les Paraboles dont le Sinus de la courbure à leur extrémité est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^4}$ incomplet, ou dont tous ces Sinus sont compris entre $\frac{1}{\infty^4}$ & $\frac{1}{\infty^3}$ (1162 & 1163), feront aussi lignes droites dans des étendues finies: aussi n'ont-elles point d'Asymptote. Telle est encore la Courbe de l'art. 1164.

1184. Toutes ces Courbes, qui à leur extrémité sont lignes droites dans des étendues finies ou infinies, ne sont pas pour cela dans toutes ces étendues, ou paralleles, ou perpendiculaires, ou obliques à leur axe, comme seroient des lignes droites exactes. La raison en est qu'elles ne sont pas lignes droites exactes, & qu'elles varient encore de direction, quoiqu'infiniment moins qu'elles ne faisoient, lorsqu'elles étoient finiment & sensiblement courbes vers leur origine. De-là il suit qu'elles n'arrivent à leur position *finale* à l'égard de l'axe, qu'après une certaine étendue de leur rectitude imparfaite.

1185. Puisqu'il y a des Courbes qui deviennent lignes droites dans des étendues finies, & d'autres dans des étendues infinies, il faut qu'il y en ait qui ne le deviennent que dans des étendues infiniment petites. On l'a déja vû par celles qui ont deux côtés du 1er ordre posés bout à bout en ligne droite, ainsi qu'il arrive ordinairement dans l'inflexion; mais de plus il doit être possible que cela arrive aussi à l'extrémité du cours infini d'une Courbe, & alors il peut y avoir aussi plus de deux côtés posés bout à bout en ligne droite.

M.E.C.D. 2017

1186. L'analogie demande encore plus. Puiſqu'il y a des Courbes qui ne le ſont que dans des étendues finies indéterminables, & deviennent enſuite lignes droites dans des étendues infinies, & d'autres qui ſont Courbes dans des étendues infinies, & lignes droites ſeulement dans des étendues finies, il faut qu'il y en ait de moyennes qui ſeront courbes dans des étendues infinies, & droites dans des étendues infinies.

Quelles Courbes peuvent être Courbes dans des étendues infinies, & devenir droites dans des étendues infinies.

1187. Puiſque les Courbes, dont le Sinus de la courbure de l'extrémité eſt compris entre $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$ incluſivement, ſont courbes dans des étendues infinies, & droites ſeulement dans des étendues finies, & que celles dont le Sinus de la courbure eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^5}$ & au deſſous, ſont courbes dans des étendues finies indéterminables, & droites dans des étendues infinies, on peut juger que celles qui ſeront courbes dans des étendues infinies, & droites dans des étendues infinies, auront le Sinus de leur courbure compris entre $\frac{1}{\infty^4}$ & $\frac{1}{\infty^5}$. Elles n'auront point d'Aſymptote.

1188. Et pour achever la diſtribution des différentes eſpeces de Courbes à cet égard, celles dont le Sinus de la courbure ne ſera qu'entre $\frac{1}{\infty^2}$ & $\frac{1}{\infty^3}$ ne ſeront droites à leur extrémité que dans des étendues infiniment petites.

1189. Le plus ou le moins d'étendue quelconque dans laquelle une Courbe ſera droite, dépendra de ce que le Sinus de ſa courbure ſera plus ou moins bas dans l'ordre qui changera la Courbe en droite.

Conformité de la Théorie précédente de la courbure avec celle des Rayons des Développées.

1190. Il eſt très-aiſé de ramener à cette Théorie de la courbure celle des Rayons des Développées, que je ſuppoſe connue, & même d'en éclaircir quelques obſcurités par les principes qui ont été établis.

J'appelle *Développante*, la Courbe engendrée par le développement de celle qu'on appelle Développée.

Les Rayons de la Développée ſont des perpendiculaires tirées ſur les extrémités de chaque côté de la Développante du côté de ſa concavité, & les diſtances où concourent deux

M.E.C.D. 2017

de ces perpendiculaires conſécutives quelconques, déterminent les longueurs des Rayons de la Développée pour les points ou côtés correſpondans de la Développante.

1191. Soit un côté de la Développante $= \frac{1}{\infty}$. Si je tire deux perpendiculaires ſur ſes deux extrémités, elles y ſeront encore perpendiculaires ou paralleles entr'elles, quoique je les conçoive concourantes à une diſtance finie, car l'angle qu'elles feront entr'elles ſera infiniment petit à cauſe de la baſe $= \frac{1}{\infty}$. Donc je puis concevoir le Rayon de la Développée comme ayant une longueur finie.

1192. Mais ſi le côté de la Développante ou la baſe de l'angle infiniment petit des deux perpendiculaires eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, les deux perpendiculaires concourront à une diſtance infiniment petite du 1er ordre (708). Donc le Rayon de la Développée ſera infiniment plus petit qu'il n'étoit dans le cas précédent.

1193. Et comme la Théorie des Développées demande que l'on conçoive toujours les perpendiculaires à la Développante comme concourantes, le Rayon de la Développée eſt fini dans le 1er cas, & dans le 2^d^, infiniment petit.

1194. Or dans notre Théorie de la courbure, quand le côté d'une Courbe eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, la courbure eſt infinie, donc quand la courbure eſt infinie, le Rayon de la Développée eſt infiniment petit.

Cette concluſion, qui eſt une propoſition de la Théorie des Développées, ne ſeroit peut-être pas trop claire en elle-même, ou d'une vérité trop évidente, ſi on ne la fondoit ſur le côté $= \frac{1}{\infty^2}$, qui en eſt la véritable cauſe, & qui ne paroît pourtant point dans la Théorie ordinaire.

1195. On voit auſſi par-là une autre choſe démontrée dans cette Théorie, & peu évidente par elle-même. Une infinité de Développantes, la Parabole par ex. ne peuvent être engendrées que par une Développée dont l'origine ſoit à une certaine diſtance finie de celle de la Développante, ou, ce

M.E.C.D. 2017

qui eſt la même choſe, il a fallu, pour produire la Développante, laiſſer à la Développée un bout de fil fini qui allât au de-là de ſon origine, au lieu que pour d'autres Développantes la Développée n'a pas beſoin de cet excédent de fil, ce qui paroît plus naturel, & devroit vraiſemblablement appartenir à toutes les Courbes.

Cela vient de ce que quand le 1er côté de la Développante eſt $= \frac{1}{\infty}$, il eſt impoſſible que les deux perpendiculaires concourrent plutôt qu'à une diſtance finie, au lieu que quand ce 1er côté eſt $= \frac{1}{\infty^2}$, elles concourent à une diſtance infiniment petite.

1196. De-là vient auſſi que quand le 1er côté eſt $= \frac{1}{\infty}$, le Rayon de la Développée, ou l'excédent de fil qu'il a fallu laiſſer à la Développée, a toujours rapport au parametre de la Développante, ou eſt plus ou moins grand, ſelon que ce parametre l'eſt. Car c'eſt ce parametre qui regle la grandeur abſolue des côtés d'une Courbe, & par conſéquent celle du 1er côté $= \frac{1}{\infty}$, qui eſt la baſe de l'angle infiniment petit des deux perpendiculaires. Or plus cette baſe ſera grande, plus les deux perpendiculaires concourront loin, & au contraire. On en voit un exemple dans la Parabole, p. 80 & ſuiv. des *Inf. petits.*

1197. Si on conçoit deux côtés du 1er ordre poſés bout à bout en ligne droite, il eſt certain que toutes les perpendiculaires tirées ſur ces deux côtés doivent être paralleles, de quelque maniere qu'elles le ſoient. Si on conçoit celles d'un de ces côtés concourantes à une diſtance finie, le point de leur concours répondra au milieu de ce côté. Il en ira de même des deux perpendiculaires tirées ſur le 2^d^ côté, dont le milieu répondra à leur point de concours. Donc il y aura quatre perpendiculaires qui, priſes deux à deux, auront des points de concours différens. Donc les deux 1res perpendiculaires pourront être conçues comme paralleles entr'elles, & de même les deux dernieres entr'elles, mais non pas toutes

M.E.C.D. 2017

les quatre entr'elles, ce qui devroit pourtant être. Donc ce n'eſt pas là comme il faut concevoir le paralléliſme des perpendiculaires dans le cas préſent. Donc il ne reſte qu'une maniere, qui eſt de les concevoir exactement paralleles, moyennant quoi il n'y en a plus que trois.

1198. Donc ces trois perpendiculaires exactement paralleles ſont infinies, ou, comme elles n'en ſont qu'une à cauſe de leur proximité infinie, c'eſt un Rayon de la Développée infini, dans le cas où la courbure eſt nulle.

1199. Donc le Rayon de la Développée infiniment petit, répondant à la courbure infinie, & le Rayon de la Développée infini à la courbure nulle, il eſt aiſé de voir que des Rayons de la Développée finis répondront aux courbures finies, & de plus ſeront en raiſon renverſée de ces courbures, ou ces courbures en raiſon renverſée des Rayons.

Fin de la premiere Partie.

ELEMENS

M.E.C.D. 2017

ELEMENS
DE LA
GEOMETRIE
DE L'INFINI.

SECONDE PARTIE.

DIFFERENTES APPLICATIONS
OU
REMARQUES.

SECTION PREMIERE.

De l'exactitude du Calcul de l'Infini.

LE grand principe & le plus fécond du Calcul de l'Infini eſt de faire diſparoître toutes les grandeurs d'ordres inférieurs devant celles qui ſont d'un ordre ſupérieur. Cette méthode laiſſe toujours quelque ombre de difficulté dans l'eſprit ; on croit bien que les grandeurs que l'on ne compte point, on les néglige ſans erreur ſenſible, mais enfin n'y eût-il qu'une erreur infiniment petite, on ſoupçonne qu'il y en a, & on croit paſſer à la nouvelle Géométrie une ſorte de licence. C'eſt ce que je vais examiner.

M.E.C.D. 2017

L'exactitude demande que les grandeurs, qu'on néglige dans le Calcul de l'Infini, soient négligées comme elles le sont.

1200. Soit un Triangle rectangle isoscele, dont la hauteur & la base soient chacune, par ex. $= 4$, l'aire sera la moitié du quarré de 4, c'est-à-dire 8.

Je puis prendre cette aire autrement. Je divise la hauteur 4 en quatre parties égales, & par chaque point de division je mene des paralleles à la base, que j'appelle autant de bases. Elles croissent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4. De plus par l'extrémité où chaque base rencontre l'hypotenuse, je tire une perpendiculaire sur la base suivante, & je vois que l'aire du triangle est exactement remplie par trois parallélogrammes rectangles, & quatre petits triangles rectangles isosceles. Les parallélogrammes sont formés des bases 1, 2, 3, multipliées chacune par la hauteur 1, & par conséquent leur somme est celle des trois premiers nombres naturels, qui est $\frac{3^2+3}{2} = 6$. Les triangles sont chacun $= \frac{1}{2}$, ce qu'il est très-aisé de voir, & il y en a quatre. Donc leur somme est $\frac{1}{2} \times 4 = 2$. La somme totale qui fait l'aire du triangle est $6 + 2 = 8$. Les deux méthodes pour trouver l'aire, sont donc toutes deux exactes, & le sont également.

En général n étant dans la 2de méthode le nombre des divisions de la hauteur du triangle, ou celui de ses bases, on aura pour la somme des parallélogrammes $\frac{\overline{n-1}^2 + n-1}{2}$, & pour celle des petits triangles $\frac{n}{2}$, & pour l'aire totale $\frac{\overline{n-1}^2 + n-1}{2} + \frac{n}{2}$, que je laisse exprès sous cette forme, parce que la 1re partie de cette grandeur complexe appartient aux parallélogrammes seuls, & la 2de aux petits triangles seuls.

1201. Si ce triangle fini, qu'on vient de considérer, est conçu prolongé à l'infini, de sorte que sa hauteur & sa base soient chacune $= \infty$, il est certain que par la 1re méthode son aire $\frac{\infty^2}{2}$ est parfaitement exacte. Si on y applique la 2de, en y concevant à l'infini les parallélogrammes & les petits triangles, dont on a déja vu les premiers dans le Fini, l'aire

M.E.C.D. 2017

ſera $\frac{\overline{\infty-1}^2 + \overline{\infty-1}}{2} + \frac{\infty}{2}$. Or pour être exacte, il faut qu'elle ſoit $= \frac{\infty^2}{2}$, ce qui ne ſe peut, à moins que dans l'expreſſion de l'aire par la 2de méthode, on ne néglige 1° — 1 devant ∞^2 & ∞, 2° $\frac{\infty}{2}$ dans la 1re partie de la grandeur complexe, 3° encore $\frac{\infty}{2}$ dans la 2de. Il eſt donc vrai que loin que ce ſoit une eſpece de licence, & une inexactitude de négliger les grandeurs d'un ordre inférieur devant une grandeur d'un ordre ſupérieur, cela eſt abſolument néceſſaire pour la parfaite exactitude, du moins en cette occaſion.

1202. Il ſera bon d'examiner plus particulierement pourquoi l'exactitude demande que les grandeurs négligées le ſoient. Les parallélogrammes qui entrent dans le Triangle infini, & dont la ſomme eſt celle de la Suite naturelle, ont pour ſomme entiere $\frac{\infty^2 + \infty}{2}$, car j'y néglige déja le — 1, qui ne peut pas faire de difficulté, il n'y en peut avoir que ſur $\frac{\infty}{2}$ négligé. La Formule de la ſomme des nombres naturels étant $\frac{nn+n}{2}$, il eſt néceſſaire que $\frac{n}{2}$ ſoit toujours d'autant moindre par rapport à $\frac{nn}{2}$ que n eſt un plus grand nombre, & la ſomme ne peut avoir le caractere d'être pouſſée à l'infini, que quand n n'eſt rien par rapport à nn, ſans quoi elle ſeroit parfaitement de la même condition qu'une progreſſion arithmétique d'un nombre fini de termes. Ce ſeroit donc une contradiction, que n fût quelque choſe dans $nn + n$ pouſſée à l'infini, & rien n'eſt plus contraire à l'exactitude d'un calcul que d'y renfermer une contradiction avec la ſuppoſition qu'on a faite.

1203. Mais la ſomme exacte des parallélogrammes du triangle infini étant $\frac{\infty^2}{2}$, il ſemble que le 2^d^ $\frac{\infty}{2}$ y devient néceſſaire pour l'exactitude, & qu'il faut l'y joindre pour faire la ſomme des petits triangles, car chacun d'eux étant $= \frac{1}{2}$, & leur nombre $= \infty$, leur ſomme eſt juſtement $\frac{\infty}{2}$, & ces

M.E.C.D. 2017

petits triangles exiſtent réellement dans le triangle infini auſſi-bien que dans le fini, & pour avoir l'aire exacte, il faut y faire entrer tout ce qu'elle contient. Comment le ſera-t'elle davantage, ſi on en retranche quelque choſe de ce qu'elle contient réellement ?

Voici la Solution. Si l'on conçoit que dans la Figure du triangle fini qu'on a poſé d'abord, il n'y ait point d'hypotenuſe, & que par conſéquent il n'y reſte d'eſpaces tracés que ceux des trois parallélogrammes, il eſt certain que le tout n'eſt point une Figure triangulaire, mais une eſpece de Figure à échelons. Il lui manque, pour être triangulaire, une hypotenuſe actuellement tracée, qui paſsât par les extrémités des quatre baſes paralleles, & cette hypotenuſe tracée feroit naître quatre petits triangles iſoſceles. Si on diviſe la même hauteur en un nombre quelconque fini plus grand que 4, & que par tous les points de diviſion on tire des baſes paralleles croiſſantes ſelon la progreſſion des nombres naturels, & que l'on ne trace point d'hypotenuſe, la Figure n'eſt point plus un triangle qu'elle ne l'étoit, mais une Figure à un plus grand nombre d'échelons, & à un plus grand nombre de parallélogrammes croiſſans, & elle n'a point plus qu'elle ne les avoit ces petits triangles, qui la rendroient triangulaire, & qui ne lui peuvent être donnés que par une hypotenuſe actuelle. Mais ſi la hauteur, toujours la même, eſt diviſée en un nombre de parties $= \infty$, ce qui rend les baſes paralleles infiniment proches, alors ſans rien de plus la Figure eſt triangulaire, la ſuite des extrémités de ſes baſes lui fait ſeule une hypotenuſe, qui n'a pas beſoin d'être autrement tracée, comme elle en avoit beſoin quand les baſes étoient finiment diſtantes, & par conſéquent dans cette derniere ſuppoſition de l'infini, il n'eſt pas néceſſaire, afin que la Figure ſoit un triangle, de lui concevoir les petits triangles, comme il eût été néceſſaire dans toutes les ſuppoſitions du Fini.

Je dis qu'il n'eſt pas *néceſſaire* de les concevoir, car il eſt certain qu'on le peut, mais pour mettre une différence eſſentielle entre le cas du Fini, & celui de l'Infini, il ſuffit qu'une

M.E.C.D. 2017

même choſe ſoit néceſſaire dans l'un & non pas dans l'autre.

Tout ſe réduit donc à ceci, que dans le triangle fini la proximité infinie des baſes rend non-néceſſaire la conſidération des petits triangles, quoiqu'exiſtans. Or dans le Triangle infini ſuppoſé, les baſes finiment diſtantes ſont auſſi infiniment proches que celles du triangle fini, qui ont des diſtances $= \frac{1}{\infty}$. Donc dans le Triangle infini, la conſidération des petits Triangles ou de la ſomme $\frac{\infty}{2}$ n'eſt pas néceſſaire. Or ſi elle n'eſt pas néceſſaire, ce ſeroit une ſuperfluité que de l'employer, & toute ſuperfluité eſt contre l'exactitude. Donc, &c.

1204. La raiſon de l'art. précédent ſe joint encore à celle-ci. Quand on a fait une ſuppoſition d'Infini, il faut que tout ce qui en peut porter le caractere, le porte.

1205. Le raiſonnement qu'on vient de faire dans l'art. 1203, ſuppoſe que l'hypotenuſe du triangle fini étoit ſuffiſamment tracée par les extrémités des baſes paralleles infiniment proches, & cela eſt vrai en général. Une ligne quelconque eſt ſuffiſamment tracée, quand la poſition de tous ſes élémens eſt déterminée; ainſi ſi on avoit une Suite de points infiniment proches, également & finiment diſtans d'un même point, le Cercle ſeroit ſuffiſamment tracé, quoique les intervalles infiniment petits des points ne fuſſent pas remplis par de petites droites, mais la poſition de ces petites droites, élémens du Cercle, étant toujours déterminée par deux points conſécutifs, cela ſuffiroit, puiſqu'il ſeroit impoſſible qu'une autre ligne qu'un Cercle eût ſes élémens poſés entre ces points. Dans un Triangle fini, dont les baſes ſont finiment diſtantes, leurs extrémités, qui le ſont pareillement, ne déterminent point la poſition des élémens d'une hypotenuſe finie qui devroient être infiniment petits, & cette hypotenuſe n'eſt point par conſéquent ſuffiſamment tracée par les extrémités de ces baſes, mais dans le triangle infini l'hypotenuſe l'eſt ſuffiſamment par les extrémités des baſes paralleles, quoique finiment diſtantes, parce que les élémens de cette hypotenuſe infinie ſont finis.

M.E.C.D. 2017

1206. Soit un triangle fini rectangle isoscele, dont la hauteur & la base soient chacune $=$ 1. Son aire sera $= \frac{1}{2}$, & elle est exacte. Si l'on considere ce triangle comme formé d'une infinité de parallélogrammes infiniment petits, croissans selon la Suite naturelle, & de petits triangles isosceles tous égaux, la somme de ces parallélogrammes, qui sont les bases $\frac{1}{\infty}, \frac{2}{\infty}, \frac{3}{\infty}$, &c. 1, multipliées chacune par la hauteur $\frac{1}{\infty}$, sera $\frac{\infty^2}{2\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty^2}{2\infty^2} = \frac{1}{2}$, & la somme des petits triangles dont chacun est $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{2}$, sera $\frac{1}{2\infty^2} \times \infty = \frac{1}{2\infty}$, par conséquent l'aire totale sera $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\infty}$, où il faut négliger $\frac{1}{2\infty}$ pour l'exactitude. Il est aisé de voir que selon cette seconde idée, le triangle fini est formé d'une Suite infinie, qu'il devient un véritable Infini, & en prend les propriétés.

1207. Si les grandeurs, que le Calcul de l'Infini néglige dans la somme de la Suite naturelle, ou de toute autre progression semblable, y sont négligées, non par une espece de licence, mais pour la parfaite exactitude, il en ira de même de celles que ce Calcul néglige dans les sommes de toutes les autres progressions formées selon d'autres loix, par ex. dans celles des nombres naturels élevés au quarré, au cube, &c. comme on l'a vu dans les art. 211, 223, &c. & en général de toutes les grandeurs négligées par le même principe. Donc le Calcul de l'Infini est aussi exact que celui du Fini.

1208. Les bases infiniment proches du Triangle fini peuvent, en conservant cette même proximité, être conçues comme changées en d'autres lignes qui croîtront selon d'autres loix, & dès qu'elles ne seront plus en progression arithmétique, leurs extrémités traceront des Courbes, dont les aires pourront être calculées comme celle du Triangle, si on a les sommes des Suites que ces lignes suivront ou représenteront.

M.E.C.D. 2017

SECTION II.

Application de la Théorie des Infinis radicaux, & de celle des ſommes des Suites aux Eſpaces Hyperboliques.

1209. SOIENT toutes les Hyperboles poſſibles, c'eſt-à-dire toutes celles de tous les différens degrés, compriſes entre les mêmes Aſymptotes, qui faſſent entr'elles un angle droit, & dont l'une eſt l'axe commun de toutes les Hyperboles, & l'autre doit devenir leur derniere Ordonnée infinie. J'appelle par cette raiſon la premiere Aſymptote x, & l'autre y. L'origine ou ſommet de toutes ces Hyperboles eſt le même, & il eſt au point qui répond à $x = a$. Il s'agit de trouver quels ſont les eſpaces compris entre chaque Hyperbole & ſes deux Aſymptotes, à compter ces eſpaces depuis l'Ordonnée terminée à l'origine commune des Hyperboles juſqu'à l'extrémité de chaque Hyperbole de l'un & de l'autre côté.

Il eſt connu de tous les Géométres que $y\,dx$ eſt l'élément ou l'infiniment petit de tous les eſpaces curvilignes, de ſorte que tous les Eſpaces Hyperboliques ou Aſymptotiques ne ſont que la ſomme d'une Suite infinie de $y\,dx$.

Si, ſelon la ſuppoſition, on compte ces Eſpaces depuis l'origine commune des Hyperboles, les $y\,dx$ font une Suite infiniment infinie, lorſqu'on les prend depuis cette origine juſqu'à l'extrémité de l'Aſymptote x, qui eſt auſſi l'axe commun, car de ce côté-là $x = \infty$. Mais ſi on prend ces eſpaces de l'autre côté de l'origine des Hyperboles juſqu'au point de concours des Aſymptotes, qui eſt l'origine des x, la Suite des $y\,dx$ eſt ſimplement infinie, car de ce côté-là l'axe n'eſt que $x = a$.

1210. Toute Hyperbole a deux branches, dont l'une devient parallele à ſon axe, & l'autre perpendiculaire à ce même axe, toutes deux au bout d'un cours infini, ou, ce qui eſt la

M.E.C.D. 2017

même chose, toute Hyperbole au bout d'un cours infini, vient à se confondre d'un côté avec l'Asymptote x, qui est l'axe, & de l'autre avec l'Asymptote y, qui est une Ordonnée infinie. Donc d'un côté y devient infiniment petit, & de l'autre infiniment grand. Mais ces deux Infinis ont besoin d'être bien caractérisés.

1211. Je suppose dx constant, ou toujours $= \frac{1}{\infty}$, non seulement pour chaque Hyperbole en particulier, mais pour toutes, de sorte qu'il sera le même dans toutes. Du côté de l'Asymptote x, il est bien clair que dx sera $= \frac{1}{\infty}$ jusqu'à l'extrémité des Hyperboles, puisque là elles sont paralleles à cette Asymptote, mais de l'autre côté, où elles sont perpendiculaires, dx sera encore $= \frac{1}{\infty}$ dans la perpendicularité, parce que toute Hyperbole s'y confondant avec une Asymptote perpendiculaire, son dernier dy sera $= \infty$, ou de cet ordre (864, 865, 866), ce qui emporte qu'il suffit que le dernier dx soit de deux ordres au dessous de ce dy, c'est-à-dire $= \frac{1}{\infty}$.

1212. Au point de concours des Asymptotes, l'axe x est $= \frac{1}{\infty}$, donc (1211) $= dx$, qui répond à l'Asymptote ou Ordonnée perpendiculaire, & il est le même que ce dx.

1213. Comme nous déterminons par les derniers termes des Suites, si leurs sommes sont finies ou infinies, il faut voir quelle sera des deux côtés des Hyperboles la derniere grandeur $y\,dx$. Or pour avoir le dernier $y\,dx$ de l'un & de l'autre côté, il faut du côté où les Hyperboles arrivent au parallélisme, supposer $x = \infty$, ce qui est clair, & de l'autre $x = \frac{1}{\infty}$, puisque c'est à ce point qu'elles arrivent à la perpendicularité.

Calcul de la grandeur infinie ou finie des deux espaces Asymptotiques des Hyperboles de tous les degrés.

1214. Soit l'Hyperbole ordinaire, ou l'unique du 2d degré, ou $x \,.\, a :: a \,.\, y$.

Si $x = \infty$, $y = \frac{1}{\infty}$, & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cause du parallélisme, donc le dernier $ydx = \frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$. Or de ce côté-là la Suite des $y\,dx$ est infiniment infinie (1209), donc la somme des $y\,dx$ est infinie (635), ou l'espace asymptotique est infini.

Si

M.E.C.D. 2017

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y = \infty$, & $dx = \frac{1}{\infty}$, à cauſe de l'Aſymptote perpendiculaire (1211 & 1212), ou $dx = x = \frac{1}{\infty}$. Donc ydx eſt alors $= \infty \times \frac{1}{\infty} = 1$. Or la Suite des ydx eſt ſimplement infinie (1209), donc la ſomme en eſt infinie (610) ou l'eſpace eſt infini.

1215. Soit la 1re Hyperbole du 3me degré, où $x.\ a :: a^2.\ y^2$.

Si $x = \infty$, $y^2 = \frac{1}{\infty}$, & $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$. Donc (1209 & 635), l'eſpace eſt infini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y^2 = \infty$, & $y = \infty^{\frac{1}{2}}$. Donc $ydx = \infty^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. Donc (1209 & 609) l'eſpace eſt fini.

1216. Soit la 2de Hyperbole du 3me degré, où $x^2.\ a^2 :: a.\ y$.

Si $x = \infty$, $y = \frac{1}{\infty^2}$, $ydx = \frac{1}{\infty^3}$. Donc (636) l'eſpace eſt fini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y = \infty^2$, $ydx = \infty$. Donc l'eſpace eſt infini (611).

1217. Soit la 1re Hyperbole du 4me degré, où $x.\ a :: a^3.\ y^3$.

Si $x = \infty$, $y^3 = \frac{1}{\infty}$ $y = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$. $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$. Donc l'eſpace eſt infini.

Si $x = \frac{1}{\infty}$, $y^3 = \infty$, $y = \infty^{\frac{1}{3}}$, $ydx = \frac{\infty^{\frac{1}{3}}}{\infty} = \infty^{\frac{1-3}{3}}$ $= \infty^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$. Donc l'eſpace eſt fini.

1218. Soit la 2de Hyperbole du 4me degré, où $x^3.\ a^3 :: a.\ y$.

M.E.C.D. 2017

Si $x = \infty, y = \frac{1}{\infty^3}, ydx = \frac{1}{\infty^4}$. Donc l'eſpace eſt fini.

Si $x = \frac{1}{\infty}, y = \infty^3, ydx = \infty^2$. Donc l'eſpace eſt infini.

Que toutes les Hyperboles, excepté celle du 2^d degré, ont un de leurs eſpaces Aſymptotiques infini, ou $x = \infty$, que & l'autre fini.

1219. De même pour les quatre Hyperboles du 5me degré, on trouvera, en ſuivant le même ordre dans ce degré que dans les précédens, c'eſt-à-dire, en commençant par l'Hyperbole, où x n'a qu'une dimenſion, & commençant la comparaiſon des deux côtés de chaque Hyperbole par celui

Pour la 1re Hyperb. $\left\{\begin{array}{l} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}, \text{ eſpace infini.} \\ y = \infty^{\frac{1}{4}}. ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{4}}}, \text{ eſpace fini.} \end{array}\right.$

Pour la 2de..... $\left\{\begin{array}{l} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}, \text{ eſpace infini.} \\ y = \infty^{\frac{2}{3}}. ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}, \text{ eſpace fini.} \end{array}\right.$

Pour la 3me..... $\left\{\begin{array}{l} ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}, \text{ eſpace fini.} \\ y = \infty^{\frac{3}{2}}. ydx = \infty^{\frac{1}{2}}, \text{ eſpace infini.} \end{array}\right.$

Pour la 4me..... $\left\{\begin{array}{l} ydx = \frac{1}{\infty^3}, \text{ eſpace fini.} \\ y = \infty^4. ydx = \infty^3, \text{ eſpace infini.} \end{array}\right.$

Il eſt aiſé de juger qu'il en ira de même de toutes les autres Hyperboles des degrés ſupérieurs, & qu'elles auront toutes en général un de leurs eſpaces aſymptotiques fini, & l'autre infini. Il n'y a que l'Hyperbole ordinaire qui les ait tous deux infinis. Cela s'accorde avec ce que M. Varignon a démontré ſur cette matiere par une voie toute différente dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de l'année 1706.

M.E.C.D. 2017

1220. En obſervant dans les Hyperboles du 5me degré la Suite des derniers ydx, du côté où $x = \infty$, qui ſont $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{5}} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{1}}}$, on voit tout d'un coup qu'ils ſont tous des $\frac{1}{\infty}$, dans leſquels ∞ a toujours un expoſant fractionnaire, dont le numérateur eſt conſtant, & égal au nombre qui exprime le degré des Hyperboles, & les dénominateurs, à commencer par le 1er ydx de la Suite, ſont le nombre du degré des Hyperboles — 1, & après lui tous les nombres naturels juſqu'à 1 incluſivement. Cela ſe trouve ainſi dans les ydx correſpondans des Hyperboles du 3me degré, car ces ydx ſont $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$ & $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{1}}}$ (1215 & 1216). Par-là il ſemble d'abord que ces ydx dans le 4me degré devroient être $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{1}}}$, cependant il n'y en a que deux qui ſont $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$ & $\frac{1}{\infty^{4}}$ (1217 & 1218) & $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$ y manque. Mais cela vient de ce que l'Hyperbole $x^2 . a^2 :: a^2 . y^2$, qui ſeroit la moyenne de ce degré, y manque auſſi, parce qu'elle n'eſt que l'Hyperbole $x . a :: a . y$ du 2^d^ degré, & ſi on la remettoit dans ce 4me degré, $ydx = \frac{1}{\infty^{\frac{4}{2}}}$ s'y trouveroit auſſi. Donc l'ordre que ſuivent les derniers ydx de chaque degré pris du côté où $x = \infty$ eſt général avec la reſtriction que les ydx des Hyperboles réductibles, & qui auront été réduites y manqueront, & abſolument général ſi toutes les Hyperboles ont été irréductibles, ou ſi les réductibles n'ont pas été réduites. par exemple, ces ydx, dans les Hyperboles du 7me degré, ſeront $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{6}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{7}}$. Et dans le 6me degré ils ſeront $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{4}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{3}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{6}{2}}}$, $\frac{1}{\infty^{6}}$, ou ſeulement

M.E.C.D. 2017

$\frac{1}{\infty^{\frac{6}{5}}}$ & $\frac{1}{\infty^{6}}$, parce que tous les autres, ayant des expoſans réductibles, auront appartenu à des Hyperboles réductibles auſſi, & abaiſſées à des degrés inférieurs.

1221. Les ydx, pris du côté où $x = \frac{1}{\infty}$, ne ſuivent point d'ordre ſenſible, mais les y en ſuivent un qui l'eſt beaucoup, & c'eſt pour cela qu'on les a marquées dans la petite Table des Hyperboles du 5me degré, & non les y qui répondoient aux autres ydx. L'Aſymptote y eſt pour les deux Hyperboles du 3me degré $\infty^{\frac{1}{2}}$ & ∞^{2} (1215 & 1216), pour les deux du 4me $\infty^{\frac{1}{3}}$ & ∞^{3} (1217 & 1218), pour les quatre du 5me $\infty^{\frac{1}{4}}$, $\infty^{\frac{2}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{2}}$, & ∞^{4} (1219). D'où l'on voit que ces Aſymptote y ſont toujours dans chaque degré ∞ avec un expoſant fractionnaire, dont les numérateurs ſont les nombres naturels depuis 1 juſqu'au nombre du degré des Hyperboles moins 1, & les dénominateurs les mêmes nombres dans un ordre renverſé. Ces y étant ainſi trouvés, il eſt aiſé d'avoir les ydx, puiſqu'il n'y a qu'à multiplier chaque y par $\frac{1}{\infty}$. Par exemple, dans le 7me degré les Aſymptotes y ſeront $\infty^{\frac{1}{6}}$, $\infty^{\frac{2}{5}}$, $\infty^{\frac{3}{4}}$, $\infty^{\frac{4}{3}}$, $\infty^{\frac{5}{2}}$, $\infty^{\frac{6}{1}}$ & par conſéquent les ydx, $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{6}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{5}}}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, $\infty^{\frac{1}{3}}$, $\infty^{\frac{3}{2}}$, ∞^{5}.

1222. Ces ydx ſont toujours ou infiniment petits, ou infinis. Les infiniment petits répondent aux y infinis, dont l'expoſant eſt une pure fraction, & les infinis répondent aux y, dont l'expoſant eſt une fraction mixte, ou un entier. Or quand les ydx ſont infiniment petits, l'eſpace eſt fini, & il eſt infini, quand ils ſont infinis. Donc quand les Aſymptotes y ſont des Infinis purs radicaux, l'eſpace eſt fini de ce côté-là, & infini quand ce ſont des Infinis radicaux mixtes ou potentiels.

1223. Et comme quand l'eſpace eſt fini ou infini de ce

M.E.C.D. 2017

côté-là, il eſt le contraire de l'autre côté, la connoiſſance de l'ordre d'Infini, dont eſt l'Aſymptote y, ſuffit donc pour juger de quel côté eſt l'eſpace fini & l'infini.

1224. Du côté où $x = \infty$, on peut juger immédiatement par les ydx ſi l'eſpace eſt fini ou infini. Car ces ydx étant tous infiniment petits, & ſuivant toujours l'ordre de l'art. 1219, tant que le dénominateur de l'expoſant de leur ∞, toujours moindre que le numérateur & toujours décroiſſant, n'eſt contenu qu'une fois plus une fraction dans le numérateur, l'eſpace de ce côté là eſt infini, & fini quand ce dénominateur eſt contenu dans le numérateur plus de deux fois. Il faut remarquer que ce dénominateur ne peut jamais être contenu deux fois ſans reſte dans le numérateur, car alors l'expoſant auroit été réductible, & l'Hyperbole correſpondante n'appartiendroit plus au degré ſuppoſé, mais ſeroit toujours celle du 2^{d} où cet $ydx = \frac{1}{\infty^2}$ (1214), & produit un eſpace infini.

1225. Il eſt aiſé de voir par la néceſſité du calcul & par l'ordre qu'il doit tenir, que tous les cas où l'Aſymptote y eſt un Infini radical, mixte ou potentiel, ou ceux où ydx eſt un $\frac{1}{\infty}$, dont l'expoſant eſt tel que le dénominateur eſt contenu dans le numérateur plus de deux fois, qui ſont tous les cas de l'eſpace fini du côté où $x = \infty$, viennent & doivent venir d'Hyperboles où x a plus de dimenſions que y, & que les cas oppoſés viennent d'Hyperboles où x a moins de dimenſions que y. Donc en comparant enſemble toutes les Hyperboles d'un degré quelconque, toutes celles où x a plus de dimenſions que y, ont leur eſpace du côté de l'Aſymptote x fini, & celui du côté de l'Aſymptote y infini, & c'eſt le contraire pour les Hyperboles où x a moins de dimenſions que y.

1226. En concevant toutes les Hyperboles compriſes entre les deuxmêmes Aſymptotes, on eſt porté à croire que ces Aſymptotes ſont deux lignes infinies égales, mais on voit par tout ce qui a été dit que l'Aſymptote x étant conſtante, l'Aſymptote y eſt toujours variable, & plus ou moins grande

BIBLIOTECA DEL OBSERVATÒRIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

que $x = \infty$ dans toutes les Hyperboles, excepté dans celle du 2d degré. Elle eſt toujours plus grande ou plus petite que ∞, au moins de quelque ordre radical, & par conſéquent toujours infiniment plus grande ou plus petite.

1227. Toute Hyperbole étant par ſa branche parallele terminée à l'Aſymptote x conſtante, & par ſa branche perpendiculaire à l'Aſymptote y, toujours infiniment plus ou moins grande que x, elle a donc ſes deux branches terminées à un infini infiniment plus ou moins grand, ou infiniment plus ou moins grandes l'une que l'autre. Il n'y a d'exception que pour l'Hyperbole ordinaire, dont les deux branches ſont égales, ce qui vient de l'égalité des dimenſions de x & de y, qui ne ſe retrouve dans aucune autre Hyperbole.

1228. Dans un même degré l'Aſymptote y de la 1re Hyperbole eſt d'un ordre radical d'Infini d'autant plus bas, & celle de la derniere Hyperbole d'un ordre potentiel d'Infini d'autant plus élevé, que le degré eſt plus élevé. Car le degré étant n, l'une eſt toujours $\infty^{\frac{1}{n-1}}$, & l'autre ∞^{n-1} (1221).

1229. Donc afin que toutes les Hyperboles poſſibles puiſſent ſe terminer à différens points d'une même Aſymptote y, il faut la concevoir $= \infty^{\infty}$, l'Aſymptote x étant toujours $= \infty$.

1230. Les extrémités de toutes les Hyperboles étant conçues comme arrangées ſur cette Aſymptote $= \infty^{\infty}$, celles de deux Hyperboles conſécutives d'un même degré n'y ſont pas conſécutives: mais les extrémités de quelques autres Hyperboles d'autres degrés ſe placent entr'elles. Il eſt aiſé de ſe faire quelques exemples de cet entrelacement, & il ſeroit inutile de le conſidérer plus en détail.

1231. Les dx ont été ſuppoſés les mêmes pour toutes les Hyperboles. Le premier ydx de toutes les Suites de ydx, qui ſont pour les deux côtés de chaque Hyperbole, eſt toujours le même à cauſe de l'origine commune. De-là il ſuit que pour comparer les eſpaces Aſymptotiques de deux diffé-

M.E.C.D. 2017

rentes Hyperboles pris du même côté, il ne faut considérer que les y, & que ces espaces seront comme les sommes des y, bien entendu que l'on compare espace fini à espace fini, ou infini à infini. De plus le 1er terme de toutes les Suites de ydx, ou y étant toujours le même, les sommes seront d'autant plus grandes ou plus petites, que le dernier terme sera plus grand ou plus petit, car le nombre des termes est toujours le même. Ce n'est pas la peine d'entrer dans le détail de cette considération.

M.E.C.D. 2017

SECTION III.

Sur les Rencontres de différentes Courbes, ou de différentes Branches d'une même Courbe.

Ce que c'eſt que l'interſection & l'attouchement.

1232. JE me ſers du mot de *Rencontre* pour avoir un terme général qui comprenne les *Interſections* & les *Attouchemens*.

Deux Courbes ne peuvent ſe rencontrer ſans avoir quelque partie commune, ou au moins ſans être dans quelque partie infiniment proches l'une de l'autre. Le 2^d^ cas ſemble retomber dans le 1er, c'eſt-à-dire, que deux Courbes qui ſont en quelque partie infiniment proches l'une de l'autre, ſemblent avoir cette même partie commune, du moins à l'œil & ſenſiblement, mais il eſt certain que les deux cas ſont différens en eux-mêmes, & peuvent être très-nettement diſtingués par la penſée. Le 1er eſt l'*interſection* & le 2^d^ l'*attouchement*.

1233. L'interſection eſt donc une rencontre plus intime & plus parfaite que l'attouchement.

Que l'interſection ſe fait par un ſeul point.

1234. La moindre partie commune que deux Courbes puiſſent avoir, auſſi-bien que deux droites eſt un point abſolu, & alors les deux Courbes ſe coupent. Ce ſont proprement deux côtés infiniment petits des deux Courbes qui ſe coupent préciſément comme deux droites, puiſqu'ils ſont lignes droites, & ils ont ce point commun.

1235. Un point abſolu n'a point de poſition, & par conſéquent ce point commun aux deux Courbes ne leur donne aucune poſition commune par rapport à un même axe auquel on les rapporte, & elles conſervent dans l'interſection, comme feroient deux droites, les deux poſitions différentes qu'elles avoient.

1236. L'effet néceſſaire de l'interſection eſt que les deux Courbes étant rapportées à un même axe, celle qui étoit

extérieure

M.E.C.D. 2017

extérieure à l'autre par rapport à cet axe devienne *intérieure*, & au contraire, ainſi qu'il arriveroit à deux droites. Il eſt viſible que cela vient des deux poſitions différentes des deux Courbes, & ne pourroit ſubſiſter ſi les deux poſitions étoient la même.

1237. Réciproquement, toutes les fois que la Courbe extérieure devient intérieure, il y a interſection.

1238. Les Courbes étant conçues comme formées de côtés droits infiniment petis du 1er ordre, ſi l'on vouloit que la partie commune à deux Courbes dans une interſection fût un Infiniment petit du 2^d^ ordre, cette partie, qui ne ſeroit pas un point abſolu, auroit donc une étendue & une poſition, & la même poſition que le côté du 1er ordre dont elle ſeroit partie, car une droite a la même poſition dans toute ſon étendue, donc les deux Courbes auroient dans leur interſection la même poſition par rapport à l'axe, donc l'extérieure ne deviendroit pas néceſſairement intérieure, donc il n'y auroit pas néceſſairement d'interſection (1236 & 1237), ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc il y a contradiction que l'interſection ſe faſſe par une partie commune qui ſoit un Infiniment petit du 2^d^ ordre. Et comme ce ſera le même raiſonnement pour tout autre Infiniment petit d'un ordre inférieur, l'interſection ne peut donc ſe faire que par un point abſolu.

1239. Quand même on concevroit les Courbes formées de côtés du 2^d^ ordre, ou du 3me, &c. ce ſeroit encore la même choſe.

1240. Si deux Courbes ſe coupent, elles ont chacune au point d'interſection leur Tangente particuliere & différente, car ce ſont deux côtés différemment poſés par rapport à l'axe commun, qui n'ont de commun qu'un point abſolu (1238). Ces deux Tangentes ſe trouvent par l'Equation de chaque Courbe. Il en iroit de même de tel nombre qu'on voudroit de Courbes qui ſe couperoient.

Comment la nouvelle Géométrie conſidere comme

1241. Une Ordonnée terminée à une Courbe, ne ſe termine naturellement, & ſelon l'ancienne Géométrie, qu'à un point abſolu de cette Courbe, & comme ce point n'a

M.E.C.D. 2017

une étendue ce qui n'étoit qu'un point dans l'ancien-

point de position, on ne peut avoir par là la position de l'Ordonnée par rapport à la Courbe, ou, ce qui est le même, l'angle sous lequel elle la rencontre. Mais parce qu'il seroit extremement avantageux de l'avoir, la nouvelle Géométrie a imaginé une Ordonnée comme en étant deux paralleles entr'elles & à toutes les autres, toutes deux infiniment proches, & terminées aux deux extrémités d'un côté de la Courbe, qui est une droite infiniment petite, moyennant quoi ces deux Ordonnées, qui n'en valent qu'une, ont une position par rapport à la Courbe.

Il est clair que, selon cette Hipothese, les droites ou côtés dans lesquels la Courbe est divisée, & la distance infiniment petite qu'on donne à deux Ordonnées qui n'en valent qu'une, doivent être du même ordre d'infiniment petit. Si l'on avoit conçu les Courbes comme formées de droites infiniment petites du 2^{d} ordre, il auroit fallu concevoir les deux Ordonnées, qui n'en auroient valu qu'une, comme n'étant séparées que par un intervalle infiniment petit du 2^{d} ordre, & toujours ainsi de suite si les côtés avoient été d'un ordre plus bas que le 2^{d}. Mais il a suffi de les concevoir du 1er, & dans cette Hipothése les deux Ordonnées en font *suffisamment* une, quand elles sont séparées par un intervalle du 1er ordre.

Je dis *suffisamment*, car elles ne sont point exactement & rigoureusement une. Elles le seroient davantage si elles n'étoient separées que par un intervalle du 2^{d} ordre, encore plus si l'intervalle étoit du 3me, &c. Mais elles ne le seroient point encore exactement & rigoureusement, & cela ne peut être que quand elles partiront du même point absolu, & ne seront séparées par aucun intervalle. Mais alors elles se termineroient aussi à un point absolu de la Courbe, & n'auroient aucune position par rapport à elle. On perdroit donc un avantage, & le seul moyen de le conserver est de concevoir toujours deux Ordonnées d'une proximité non absolue, mais telle qu'elles soient suffisamment une.

Quelle est la

1242. La Regle de cette *suffisance* est qu'elles soient in-

M.E.C.D. 2017

finiment plus proches que deux autres que l'on eſt néceſſairement obligé de prendre pour deux, tant qu'elles ne ſont que d'une certaine proximité déterminée. Ainſi parce que deux Ordonnées étant ſéparées par un intervalle fini, quelque petit qu'il ſoit, il eſt indiſpenſable de les prendre pour deux; elles ſeront ſuffiſamment une, lorſqu'on les concevra infiniment rapprochées, ou ſéparées ſeulement par un intervalle infiniment petit du 1er ordre, & il ne ſera point néceſſaire de leur donner un intervalle d'un ordre inférieur.

Regle de cette nouvelle idée, ou ſuppoſition.

1243. De-là il ſuit que s'il y a des cas où deux Ordonnées ſéparées par un intervalle du 1er ordre, doivent néceſſairement être priſes pour deux, elles ne ſont point ſuffiſamment une malgré leur proximité infinie, & qu'il faut encore les rapprocher infiniment; que ſi elles ſont encore néceſſairement deux, il faut encore les rapprocher infiniment ou ne les concevoir ſéparées que par un intervalle du 3me ordre, &c.

1244. Il en ira de même en général de toutes les choſes qui ſont deux, & que l'on veut prendre ſans erreur pour une, en les rapprochant ſeulement de l'unité, & ſans les pouſſer à l'unité parfaite. Car étant infiniment rapprochées, elles ſont infiniment moins *deux*, & ſi alors elles ont perdu ce qui les rendoit deux, elles ſont ſuffiſamment une, & il ſeroit inutile & même vicieux d'aller à d'autres approximations infiniment plus grandes. Cela poſé,

Application de cette Regle aux interſections d'un nombre quelconque de Courbes.

1245. Quoiqu'une Ordonnée, qui ſe termine à l'interſection de deux Courbes, ſe termine à un point abſolu (1238), & par conſéquent n'ait point de poſition par rapport à ces deux Courbes, on peut cependant la concevoir comme en ayant une, auſſi-bien que toute autre Ordonnée quelconque qui, ſelon l'ancienne Géométrie, ſe termine à un point abſolu, & ſelon la nouvelle, ne laiſſe pas d'avoir une poſition. Mais il faudra concevoir l'Ordonnée terminée à l'interſection comme en étant deux, & il s'agit de ſavoir quelles ſeront ces deux.

L'Ordonnée devenue double doit conſerver, autant qu'il eſt poſſible, la nature d'Ordonnée terminée à un point d'in-

M.E.C.D. 2017

terſection. Etant unique, elle ſe terminoit à un point commun aux deux Courbes, qui eſt abſolument & réellement tout ce qu'elles ont de commun. Quand il y aura deux Ordonnées, on ne peut concevoir autre chofe, ſinon que l'une ſe terminera encore à ce même point, & l'autre à deux points, l'un appartenant à une Courbe, l'autre à l'autre, mais tous deux ſi proches l'un de l'autre, & en même temps ſi proches du premier point abſolu de l'interſection, qu'ils pourront tous trois être pris pour le même, moyennant quoi l'Ordonnée ſera double, & ne ſe terminera qu'à ce qui eſt ſuffiſamment commun aux deux Courbes.

FIG. X. Soient Mm & $M\mu$ les côtés des deux Courbes qui ſe coupent au point M, en faiſant entr'eux l'angle $mM\mu$, que je ſuppoſe fini, puiſqu'étant formé par interſection de deux Courbes différentes, rien ne l'oblige à être infiniment petit. Je dis que les points m & μ, extrémités des deux côtés qui ſe coupent en M, ne ſont aſſez proches ni l'un de l'autre, ni du point M, pour pouvoir être cenſés confondus, ſelon ce qui vient d'être dit, & entr'eux, & avec le point M; & qu'en l'état où ils ſont tous trois, ils ſont trois points diſtincts, par rapport à ce qu'ils doivent être pour une interſection. Car quoique m & μ n'aient entr'eux que la diſtance infiniment petite du 1re ordre $m\mu$, & qu'ils ne ſoient éloignés chacun de M que d'une diſtance pareille, cette proximité ne ſuffit pas pour l'interſection, qui ne ſe fait que quand m & μ ſont venus en M, & les points m & μ n'appartiendroient pas à l'interſection. Il faut donc rapprocher infiniment m & μ l'un de l'autre, & de M, ſans que tous trois cependant deviennent le point abſolu M, & c'eſt ce qui ſera ſi l'on conçoit que les deux Ordonnées PM & $pm\mu$, au lieu d'être ſéparées par un intervalle $Pp = dx$, ne le ſoient plus que par un $Pp = ddx$. Alors les deux Ordonnées, PM terminée au point M, & $pm\mu$ terminée aux deux points m & μ proches l'un de l'autre & de M d'une proximité infinie du 2d ordre, pourront être priſes pour une ſeule terminée à un point d'interſection, & cette Ordonnée double aura une poſition

M.E.C.D. 2017

par rapport aux deux Courbes, puiſqu'elle ſe terminera au côté $M\mu$ de la Courbe extérieure infiniment petit du 2^d^ ordre, & au côté Mm de l'intérieure de ce même ordre, car la grandeur des côtés ſuit toujours celle des Pp (1241), & tous les côtés d'un ordre quelconque ont une étendue & une poſition. FIG. XI.

1246. PM & $p\,m\,\mu$ étant ainſi infiniment rapprochées, & les côtés Mm, $m\mu$, étant devenus du 2^d^ ordre, ſi l'on ſuppoſe les deux 1res Courbes coupées encore au point M par une 3me exterieure aux deux, dont le côté Mr, compris entre PM & $p\,m\,\mu r$, ſera néceſſairement du 2^d^ ordre, je dis que quoique les points m & μ fuſſent aſſez confondus pour une interſection & entr'eux & avec M, lorſqu'il n'y avoit que deux Courbes, il faut rapprocher infiniment les Ordonnées PM & $pm\mu r$, lorſqu'il ſurvient une 3me Courbe, non que les points m & μ ne ſoient aſſez confondus entr'eux & avec M, mais à cauſe d'un 4me point r, qui par la ſuppoſition même que l'on fait, eſt eſſentiellement diſtinct de m & de μ, car Mr eſt néceſſairement conçu comme un côté appartenant à la 3me Courbe, & diſtinct de $M\mu$ & de Mm; ſans cela cette 3me n'en ſeroit point une 3me, & ne ſeroit que l'une des deux 1res. Il faut donc rapprocher infiniment r de μ, ou de m confondu avec μ, & pour cela il faut concevoir $Pp = dddx$, au moyen de quoi les quatre points M, m, μ & r, ſeront ſuffiſamment confondus pour une interſection de trois Courbes, & il y aura une Ordonnée compoſée de deux, dont l'une PM ſe terminera toujours au point M, & l'autre $p\,m\,\mu r$ à trois côtés infiniment petits du 3me ordre, chacun appartenant à l'une des trois Courbes, & l'Ordonnée double aura une poſition par rapport à chacune de ces Courbes

1247. Si une 4me Courbe coupoit ces trois au point M, ce ſeroit encore le même raiſonnement, & il faudroit concevoir $Pp = ddddx$, & ainſi de ſuite. Donc en général ſi l'on veut qu'une Ordonnée terminée au point d'interſection de tel nombre de Courbes qu'on voudra, ait une poſition par rapport à toutes ces Courbes, il faut la concevoir formée de

M.E.C.D. 2017

deux Ordonnées infiniment proches d'une proximité qui ſoit d'un degré égal au nombre des Courbes, & en même temps il faut la concevoir terminée à des côtés de ces Courbes qui ſoient de ce même ordre d'Infiniment petit.

Attouchement de deux Courbes.

1248. Après le point abſolu, qui eſt la ſeule partie que deux Courbes ayent commune dans l'interſection réellement & abſolument, la moindre partie qu'elles puiſſent avoir commune eſt un côté du 1er ordre, puiſqu'elles ne peuvent ſe couper dans un côté d'un ordre inférieur (1238). Si elles ont donc un côté commun, ou plûtôt (1232) ſi elles ſont infiniment proches chacune par un côté, elles ſe *touchent*.

1249. Les dx étant ſuppoſés conſtans à l'ordinaire, ces deux côtés ſont égaux. Car tout côté eſt $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, or ici dy eſt le même, ce qui eſt évident.

1250. Si les deux Courbes ſont, l'une concave, l'autre convexe vers l'axe commun, il eſt clair qu'après le côté commun elles ne peuvent plus avoir rien de commun. Elles vont chacune de deux côtés différens après leur rencontre.

Attouchement ſimple.

1251. Mais cela peut être, ou n'être pas, ſi elles ſont toutes deux concaves vers l'axe.

FIG. XII. Soit le côté commun Mm, la Courbe non ponctuée l'extérieure, & la ponctuée l'intérieure. Le côté commun étant Mm ponctué & non ponctué, il eſt clair qu'immédiatement avant ce côté commun, l'angle de contingence de la Courbe extérieure a été néceſſairement moindre que celui de l'intérieure, car ſans cela l'extérieure n'auroit pas été extérieure. Après ce côté commun, ſi l'angle de contingence de l'extérieure eſt encore moindre que celui de l'intérieure, l'extérieure a le côté $m\mu$, & l'intérieure le côté mr, l'extérieure demeure extérieure comme elle l'étoit, & les deux Courbes n'ont abſolument rien de commun que le côté Mm, comme dans le cas où elles auroient été, l'une concave, l'autre convexe vers l'axe. C'eſt là un *ſimple attouchement*.

Attouchement avec interſection.

1252. Mais ſi après le côté commun Mm, l'angle de contingence de l'extérieure eſt plus grand que celui de l'inté-

M.E.C.D. 2017

rieure, l'extérieure a le côté *mp*, & l'intérieure le côté *mr*, c'eſt-à-dire, que l'extérieure devient intérieure. Or cela ne ſe peut, à moins que le côté *mp* de l'extérieure, devenue intérieure, n'ait coupé le côté *mr* dans le point qui a ſuivi immédiatement le point *m*, extrémité du côté commun *Mm*. Donc alors les deux Courbes ont, outre le côté *Mm*, un point abſolu commun qu'il faut compter. C'eſt la un *attouchement accompagné d'interſection*. Ce cas eſt rare, & on en voit aiſément la raiſon. Il peut paroître ſurprenant, quand il n'eſt pas approfondi, parce qu'il eſt paradoxe que deux Courbes ſe touchent & ſe coupent en même temps. L'interſection qui eſt viſible, en ce que l'extérieure devient intérieure, empêche de reconnoître l'attouchement qui n'eſt pas ſi ſenſible.

1253. Donc en général, quand deux Courbes concaves vers un même axe ſe touchent, leur attouchement eſt ſimple, ſi la courbure de l'extérieure eſt encore immédiatement après l'attouchement la moindre, comme elle l'étoit auparavant, & l'attouchement eſt accompagné d'interſection, ſi la courbure de l'extérieure devient la plus grande immédiatement après l'attouchement.

1254. Il y a encore un autre cas poſſible, c'eſt qu'immédiatement après l'attouchement, les deux courbures ſoient égales. *Attouchement double ſans interſection.*

En ce cas, ou elles ſont abſolument & rigoureuſement égales, ou elles le ſont, parce qu'elles n'ont qu'une différence infiniment petite par rapport à elles.

Si c'eſt le 1er, le côté *mμ* de la Courbe extérieure ſe couche ſur le côté *mr* de l'intérieure, & par conſéquent l'extérieure demeure extérieure, & il y a un *double* attouchement ſans interſection.

1255. Alors il faut que la courbure de l'intérieure qui avant l'attouchement a toujours été la plus grande (1251), ait toujours été plus grande de moins en moins par rapport à l'autre, puiſque la différence des deux courbures, devenue nulle dans l'attouchement, a dû auparavant être décroiſſante. Après l'attouchement, il faut que cette différence devienne

M.E.C.D. 2017

croiſſante, & c'eſt tout ce que le Terme de l'Egalité exige; il permet que la courbure, qui étoit croiſſante par rapport à l'autre, le ſoit encore, ou qu'elle devienne décroiſſante, pourvu qu'elle ſoit l'un ou l'autre de plus en plus.

1256. Si c'eſt le 1er, c'eſt-à-dire, ſi la courbure de la Courbe intérieure eſt encore après l'attouchement croiſſante par rapport à l'autre, la Courbe intérieure demeure toujours intérieure, & par conſequent il n'y a point d'interſection, & de plus comme la courbure eſt croiſſante de plus en plus par rapport à l'autre, elle devient toujours plus intérieure, c'eſt-à-dire, qu'elle s'écarte toujours davantage de l'extérieure.

1257. Si au contraire après l'attouchement la courbure de la Courbe intérieure devient décroiſſante par rapport à l'autre, ou, ce qui eſt le même, ſi la Courbe extérieure a une plus grande courbure, c'eſt la même choſe que dans l'art. 1252, & il y a interſection. Mais de plus la Courbe extérieure devenue intérieure s'écarte toujours davantage de l'autre.

1258. Donc après un attouchement double, il peut y avoir une interſection auſſi-bien qu'après un attouchement ſimple, ou de deux ſeuls côtés.

1259. Maintenant ſoit le 2^d^ cas de l'art. 1254, c'eſt-à-dire, celui où les deux Courbes qui ſe touchent, arrivent en même temps à une égalité de courbure non abſolue. La meſure de la courbure eſt un Infiniment petit du 2^d^ ordre, donc une différence de courbure qui n'empêchera pas l'égalité ou qui ſera infiniment petite, ſera un Infiniment petit du 3me ordre. Donc l'une des deux courbures aura ſur l'autre un excès de cet ordre.

1260. Si l'excès appartient à la courbure de la Courbe intérieure, elle demeure intérieure comme elle l'étoit, ſeulement les deux 2^ds^ côtés qui ſe touchent, & par leſquels ſe fait l'égalité de courbure, ne ſont pas exactement poſés l'un ſur l'autre, mais ils font entr'eux un angle infiniment petit, dont la baſe ou le Sinus eſt du 3me ordre, puiſque c'eſt là la différence de courbure (1259), & cet angle étant infiniment

plus

M.E.C.D. 2017

plus petit que tous ceux de contingence, les deux côtés ſont aſſez poſés l'un ſur l'autre pour n'être qu'une même droite. Il y a donc alors un double attouchement ſans interſection, & c'eſt la même choſe que le cas de l'art. 1256. à cela près, que les deux 2^ds côtés font entr'eux un angle infiniment plus petit que ceux de contingence.

1261. En ce cas la Courbe intérieure demeure toujours intérieure.

1262. Si l'excès de courbure appartient à la Courbe extérieure, il faut qu'après le 1er côté Mm, où ſe fait le 1er attouchement, la Courbe extérieure devienne intérieure au point m, & par conſéquent la coupe à ce point. Ce même point eſt auſſi le ſommet d'un angle infiniment petit que font entr'eux $m\mu$ ponctué & $m\mu$ non ponctué, dont la baſe eſt un Infiniment petit du 3me ordre, & qui n'empêche pas les deux côtés $m\mu$ d'être une même droite. Il y a alors un *double attouchement avec une inſection entre les deux attouchemens.*

Attouchement double avec une interſection entre les deux attouchemens, ou Oſculation.

FIG. XIII.

1263. Il eſt viſible que le cas du double attouchement avec une interſection entre les deux attouchemens eſt celui de l'*oſculation* ou *baiſement*, & le fondement de toute la Théorie des Développées. Si la Courbe ponctuée eſt un Cercle, c'eſt le Cercle *oſculateur*, & la Courbe non ponctuée eſt la *Développante*, ou celle qui eſt née du développement de la Développée. La différence infiniment petite de courbure, que nous avons ſuppoſée au point m, répond à la différence infiniment petite des Rayons oſculateurs, dont l'un auroit décrit le côté ponctué ou arc circulaire Mm, & l'autre l'arc circulaire ponctué $m\mu$. Et même cette différence de courbure & celle des Rayons oſculateurs, c'eſt la même choſe, puiſque les différens Rayons oſculateurs ſont la meſure de la courbure de la Développante.

1264. La Courbe extérieure, devenue intérieure, ne peut redevenir extérieure immédiatement après l'oſculation. Ou, ce qui eſt la même choſe, après le côté commun $m\mu$ un 3me côté non ponctué ne peut devenir extérieur à un ponctué,

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

car l'excès de courbure au point *m*, appartenant à la Courbe qui étoit extérieure ou non ponctuée, lui appartiendra encore dans la ſuite, & par conſéquent la Courbe non ponctuée, devenue intérieure, continuera de l'être.

M. Varignon a démontré dans les Mém. de l'Acad. de 1713. pag. 123 & ſuiv. un entrelacement de Courbes dans une oſculation, tel qu'on prouve ici qu'il eſt impoſſible : mais cet entrelacement ſe fait avec trois Courbes, ce qui n'a rien de contraire à ce que nous diſons.

1265. Cela même nous donne lieu de faire appercevoir ici en général ce qui arriveroit à trois Courbes ou à un plus grand nombre qui ſe rencontreroient de toutes les différentes manieres dont nous avons vû que ſe rencontreroient deux Courbes. Mais après ce qui a été dit, ces différens cas n'en feroient que plus compliqués, & n'auroient aucune difficulté nouvelle. Ainſi il ſeroit inutile de s'y arrêter.

Principe du Calcul des Tangentes dans les points où ſe rencontrent différentes branches d'une même Courbe.

1266. Venons aux rencontres des différentes Branches d'une même Courbe.

Il ſemble d'abord qu'il n'y ait qu'à regarder ces différentes branches d'une même Courbe comme différentes Courbes, & cela eſt vrai, pourvû qu'on prenne l'équation particuliere de chaque branche, ſi on la peut avoir. Tout revient à ce qui a été dit.

Mais comme réellement ces différentes branches appartiennent à une même Courbe, & ſont compriſes dans une équation totale, qui d'ailleurs n'eſt pas toujours aiſée à diviſer, il faut pouvoir les prendre telles qu'elles ſont.

Elles ne peuvent ſe rencontrer que comme feroient différentes Courbes. Mais les Tangentes des points de rencontre qui n'ont nulle difficulté en différentes Courbes, parce qu'on prend chaque Tangente à part, ni en différentes branches d'une même Courbe, quand on les regarde, & qu'on les peut regarder comme différentes Courbes, ont de la difficulté, quand on regarde ou qu'on eſt obligé de regarder les différentes branches comme appartenant à une même Courbe, & qu'il faut tirer ces Tangentes de l'Equation totale. C'eſt là de quoi il s'agit préſentement.

M.E.C.D. 2017

Ce que nous avons établi dans les art. 1241, &c. 1247, ſur l'Ordonnée qui ſe termine au point d'interſection de différentes Courbes, étoit inutile par rapport au calcul des Tangentes de ces Courbes au point d'interſection, mais non par rapport à la Théorie générale ; & préſentement cela eſt néceſſaire & pour la Théorie, & pour le calcul des Tangentes au point d'interſection de différentes branches d'une Courbe.

Quand une Courbe a différentes branches par rapport à une même partie de l'axe, il lui eſt eſſentiel que chaque Ordonnée, puiſque ſelon la nouvelle Géométrie les Ordonnées ont une poſition par rapport à la Courbe, ait autant de poſitions qu'il y a de différentes branches auxquelles elle ſe termine. Donc l'Ordonnée terminée au point d'interſection de différentes branches, a autant de poſitions qu'il y a de branches qui ſe coupent. Or alors il faut la concevoir comme formée de deux Ordonnées infiniment proches d'une proximité qui ſoit d'un degré égal au nombre des branches, & en même temps il faut concevoir ces deux Ordonnées comme terminées à des côtés qui ſoient de ce même ordre d'Infiniment petit (1247). Donc la formule des Soutangentes étant $\frac{y\,dx}{dy}$, elle devient alors, ſi deux branches ſe coupent, $\frac{y\,ddx}{ddy}$, ou $\frac{y\,dddx}{dddy}$ s'il y en a trois, & ainſi de ſuite.

1267. Donc pour avoir les Tangentes du point d'interſection de différentes branches d'une même Courbe, il faut autant de différentiations ſucceſſives de x & de y, qu'il y a de branches. S'il n'y a qu'une branche, auquel cas il ne peut y avoir d'interſection, il ne faut différentier x & y qu'une fois, ce qui donne la formule ordinaire $\frac{y\,dx}{dy}$, mais s'il y a deux branches qui ſe coupent, elle devient $\frac{y\,ddx}{ddy}$, &c.

1268. On voit aſſez que cela vient, ſelon tout ce qui a été dit, de ce que dans le cas de l'interſection de pluſieurs branches, & même plus généralement dans celui de l'interſection de pluſieurs Courbes, il faut regarder le côté de chaque

M.E.C.D. 2017

branche ou Courbe comme étant de l'ordre d'Infiniment petit déſigné par le nombre des branches ou Courbes. Or la poſition d'un côté par rapport à l'axe dépend néceſſairement du rapport de grandeur de l'Infiniment petit de l'axe & de l'Infiniment petit de l'Ordonnée, & le côté eſt néceſſairement du même ordre que ces deux Infiniment petits. Donc s'il faut regarder ce côté comme étant du 1er ordre, la Soutangente eſt $\frac{y\,dx}{dy}$, s'il faut le regarder comme étant du 2^d, elle eſt $\frac{y\,ddx}{ddy}$, &c.

1269. Je ne prends dans la ſuite, pour plus de facilité, qu'une Courbe à deux branches, ce qui en ſera dit s'appliquera de ſoi-même aux Courbes qui en auront pluſieurs.

Puiſque $\frac{y\,ddx}{ddy}$ eſt la Soutangente de deux branches au point d'Interſection, $\frac{y\,dx}{dy}$ ne doit donner pour ce point aucune Soutangente. Car cette formule $\frac{y\,dx}{dy}$ ſuppoſe qu'une Ordonnée y, formée de deux Ordonnées ſéparées ſeulement par un intervalle $= dx$, ſe termine aux deux différentes branches de la Courbe, ce qui alors n'eſt pas vrai. Et en effet $\frac{y\,dx}{dy}$ ne donne point de Soutangente. Alors il arrive que les grandeurs finies, qui expriment le rapport $\frac{dx}{dy}$, ſont $= 0$ tant dans le numérateur que dans le dénominateur de la fraction, ce qui ne donne rien, mais ces deux zero ne ſont que relatifs, & non pas abſolus, & en différentiant les grandeurs qui exprimoient le rapport $\frac{dx}{dy}$, on leur trouve un rapport fini, qui eſt $= \frac{ddx}{ddy}$, & qui donne la Soutangente cherchée.

1270. Il eſt aiſé de voir par quelle raiſon il arrive ſi juſte en ce cas, que la fraction qui exprimoit par des grandeurs finies le rapport $\frac{dx}{dy}$, a alors ſon numérateur & ſon dénominateur

M.E.C.D. 2017

néceſſairement égaux à zero. C'eſt que par la nature de l'Ordonnée, terminée en même temps à l'interſection des deux branches, dx & dy deviennent chacun infiniment plus petits qu'ils n'étoient, donc il eſt impoſſible qu'il n'en arrive autant aux deux grandeurs finies qui les exprimoient. Cela même prouve auſſi que ces deux grandeurs finies, devenues zero, ne ſont pas des zero abſolus.

1271. Les côtés des deux branches devenus infiniment petits du 2^{d} ordre au point d'interſection, n'ont que la même poſition qu'ils auroient eue, étant infiniment petits du 1er, car ils ſont une partie infinitieme d'une droite. Ils ont auſſi entre eux le même rapport de grandeur.

1272. Il en va de même des ddy, qu'il faut concevoir dans la Formule $\frac{y\,ddx}{ddy}$, non pas comme les différences des dy d'une même Courbe, mais ſeulement comme des dy devenus infiniment plus petits qu'ils n'étoient. Quant aux ddx, cela eſt clair.

1273. Si deux branches d'une Courbe ſe touchent, il ne faut que concevoir que les points m & μ ſe ſont infiniment rapprochés, ou, ce qui revient au même, que l'angle $m\,M\,\mu$ eſt infiniment petit : mais il n'eſt nullement néceſſaire de concevoir, comme dans le cas de l'interſection, qu'ils ſe ſoient auſſi infiniment rapprochés du point M, car l'interſection demande la confuſion de m & de μ entr'eux, & avec M, & l'attouchement ne demande que la confuſion de m & de μ. Donc il n'eſt point néceſſaire de concevoir PM & $p\,m\,\mu$ comme infiniment rapprochées, & ſéparées ſeulement par $Pp = ddx$. FIG. X.

1274. Cependant ſi l'on veut conſerver l'idée ou le caractere de ce que, quand deux branches appartiennent à une même Courbe, chaque Ordonnée a deux poſitions différentes, il faut concevoir $p\,m\,\mu$ comme terminée à la Courbe intérieure en m, & à l'extérieure en μ, de ſorte que $m\,\mu$ ſoit un Infiniment petit du 2^{d} ordre, ce qui permet que $p\,m\,\mu$ demeure à la place qu'elle a dans la Fig. x, ou qu'elle ſe rapproche infiniment de PM.

M.E.C.D. 2017

1275. Il ne ſera donc pas néceſſaire, pour avoir la Soutangente de ce point d'attouchement, de changer $\frac{ydx}{dy}$ en $\frac{yddx}{ddy}$, & on aura cette Soutangente comme ſi les deux branches avoient été deux Courbes différentes ; & parce que les deux branches ſe touchent, elles auront toutes deux la même Tangente en ce point, ou la même Soutangente, & par conſéquent une Soutangente trouvée ſera la même que l'autre.

1276. Mais ſi on veut trouver en même temps les deux Soutangentes, c'eſt-à-dire, une Soutangente telle qu'elle ait deux valeurs égales, ce qui eſt plus préciſément le cas de deux branches qui ſe touchent, alors il faut aller juſqu'à $\frac{yddx}{ddy}$, ce qui eſt permis (1274).

1277. La différence des deux cas d'interſection & d'attouchement ne paroîtra, qu'en ce que l'un donnera deux Soutangentes inégales, & l'autre deux égales.

1278. En général ce n'eſt donc que pour avoir enſemble & en même temps toutes les Soutangentes, tant des points d'attouchement que d'interſection de différentes branches d'une même Courbe, qu'il faut également pour les uns & pour les autres cas pouſſer la différentiation de $\frac{dx}{dy}$ juſqu'à un nombre égal à celui des branches, car je ſuppoſe que tout ce qui a été dit de deux branches, s'entend d'un nombre quelconque.

Tout cela revient à ce que M. Saurin a démontré ſur cette matiere dans les Mémoires de l'Acad. de 1716, p. 59 & 275.

M.E.C.D. 2017

SECTION IV.

Sur les Figures isoperimetres.

1279. LE *Perimetre* d'une Figure eſt la ſomme des lignes qui la terminent. Les Figures *iſoperimetres* ſont celles en qui cette Somme eſt égale, quoique les lignes dont elle eſt formée puiſſent être en nombre différent, & différemment diſpoſées entr'elles. Et comme ſelon ces différences les Figures iſoperimetres ont des *aires* ou *capacités* plus ou moins grandes, c'eſt là ce que nous allons conſidérer, pour donner un exemple de propriétés, dont la naiſſance apperçue dans l'Infiniment petit, donne lieu de les ſuivre dans le Fini où l'on en trouve l'accompliſſement; & même dans l'exemple que nous allons prendre, c'eſt l'Infiniment petit qui eſt la ſource naturelle de la démonſtration.

1280. Soit un Fil ſans largeur, dont la longueur eſt déterminée, & connue, & $= a$. Ce ſera le perimetre conſtant de toutes les Figures qu'on en formera.

D'abord ſi je couche les deux moitiés du Fil exactement l'une ſur l'autre, l'aire eſt abſolument nulle, & il eſt viſible que cela vient de ce que je n'ai formé ni côtés ni angles. Il faut donc, pour avoir une aire, former au moins un Triangle, le moindre des Poligones.

1281. Pour m'écarter le moins qu'il ſe puiſſe du cas précédent, je forme le Triangle abc, dont la baſe ac eſt infiniment petite, & les deux côtés ab, bc, ſont chacun $= \frac{a}{2}$; la baſe eſt donc $\frac{a}{\infty}$, & le perimetre $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{\infty} = a$ comme il doit être. Il eſt clair qu'en abaiſſant du ſommet b ſur la baſe, la perpendiculaire bd qui eſt encore $= \frac{a}{2}$, le Triangle bad eſt $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2\infty} \times \frac{1}{2} = \frac{aa}{8\infty}$, & par conſéquent

Triangle infiniment petit dont le perimetre eſt fini. FIG. XIV.

M.E.C.D. 2017

le Triangle total *abc* eſt $= \frac{aa}{4\infty}$, aire infiniment petite.

Second Triangle infiniment petit iſopérimetre.

1282. Je puis encore avec le même Fil *a*, former un autre Triangle *ABC* infiniment petit, dont l'angle obtus *ABC* ſera infiniment petit différent de 180, & les deux angles ſur la baſe infiniment petits. En faiſant auſſi ce Triangle iſoſcele, ce qui eſt ſa formation la plus naturelle, *AC* ſera $= \frac{a}{2}$, & *AB* & *BC* chacune $= \frac{a}{4}$, à cauſe de la différence infiniment petite de *AB* & de *AD* moitié de *AC*. Si l'on nomme *dx* la perpendiculaire *BD*, l'aire ſera $\frac{a\,dx}{4}$.

FIG. XV.

1283. En cherchant ce qui rend ces deux aires infiniment petites, je vois que le Triangle *abc* a deux côtés infiniment plus grands que le troiſieme, & un angle infiniment plus petit que les deux autres, & que le Triangle *ABC* a un angle infiniment plus grand que les deux autres. D'où je vois que c'eſt l'inégalité infinie, ſoit entre les angles, ſoit entre les côtés, qui rend les aires infiniment petites; & en effet, ſi l'on ôte cette inégalité infinie, c'eſt-à-dire, ſi l'on forme des Triangles, dont tous les côtés & les angles ſoient finis, on aura des aires finies, infiniment plus grandes par conſéquent qu'elles n'étoient.

FIG. XIV. & XV.

1284. Une baſe *ac* ou *AC* étant déterminée pour être la baſe d'un Triangle, & la ſomme des deux autres côtés étant déterminée auſſi, le Triangle n'aura jamais une plus grande aire que quand il ſera iſoſcele. Car la perpendiculaire *bd* ou *BD* ſera plus grande en ce cas qu'en tout autre, ce qu'il eſt aiſé de voir, & de-là ſuit le reſte. Cela confirme déja que l'égalité des côtés fait à la grandeur de l'aire, & je commence à préſumer que le Triangle équilatéral ſera le plus grand de tous les iſopérimetres.

Que le Triangle iſoſcele eſt plus grand que tous les Scalenes de même baſe, & iſopérimetres.

1285. Il ſuit de l'art. précédent, que ſi je forme ſucceſſivement différens Triangles avec le fil *a*, à chaque fois que j'en ai déterminé une portion quelconque pour être la baſe, le Triangle iſoſcele que j'en pourrai former ſera plus grand que tous les Scalenes poſſibles.

1286.

M.E.C.D. 2017

1286. Si je conçois que le Triangle infiniment petit ABC, demeurant toujours iſoſcele, augmente toujours par la diminution ſucceſſive & graduée de l'angle obtus ABC infiniment peu différent de 180, il deviendra tous les Triangles amblygones, tant que l'angle ABC ſera plus grand que 90, enſuite un Triangle rectangle, quand ABC ſera de 90, & après cela tous les Triangles oxygones, juſqu'à ce qu'enfin il devienne le Triangle abc infiniment petit. Je ſuppoſe tous ces Triangles iſoſceles, parce qu'ils ſeront toujours plus grands que les Scalenes correſpondans qui auront même baſe (1285). Cette Suite de Triangles iſoſceles d'abord croiſſante commencera donc par un Infiniment petit, & ſe terminera par un Infiniment petit, d'où il ſuit néceſſairement qu'elle aura dans ſon cours un *plus grand* juſqu'auquel elle croîtra, & après lequel elle décroîtra. De plus, ce *plus grand* ſera un Terme naturel, & non pas arbitraire, ce qui eſt évident, & par conſéquent ce ſera un Triangle unique & ſingulier en ſon eſpece. Or dans toute cette Suite, il n'y en a que deux ainſi caractériſés, le Triangle rectangle iſoſcele, & l'équilatéral, ce ſera donc l'un des deux.

1287. Je dis que c'eſt l'équilatéral, & quoique la préſomption ſoit déja forte pour lui, je m'en aſſure abſolument par le calcul.

Chaque côté de cet équilatéral eſt $= \frac{a}{3}$. Donc la perpendiculaire, menée du ſommet ſur la baſe, eſt $\sqrt{\frac{aa}{9} - \frac{aa}{36}}$ $= \sqrt{\frac{3\,aa}{36}} = \sqrt{\frac{aa}{12}} = \frac{a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Donc l'un des deux Triangles égaux, dans leſquels le Triangle total a été diviſé, eſt $\frac{1}{2} \times \frac{a}{2\sqrt{3}} \times \frac{a}{6} = \frac{aa}{24\sqrt{3}}$, & le Triangle total $= \frac{aa}{12\sqrt{3}}$.

Pour avoir l'aire du Triangle rectangle iſoſcele, j'appelle x un de ſes petits côtés. Son périmetre eſt donc $2x + x\sqrt{2}$ $= a$. Donc $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Donc $xx = \frac{aa}{4+4\sqrt{2}+2} = \frac{aa}{6+4\sqrt{2}}$.

M.E.C.D. 2017

Or la moitié de cette grandeur eſt l'aire du Triangle, qui eſt donc $\frac{aa}{12+8\sqrt{2}}$.

Donc le Triangle équilatéral eſt au rectangle iſoſcele :: $\frac{aa}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{aa}{12+8\sqrt{2}} :: 12+8\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{3} :: 3+2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}$.

Or en quarrant ces grandeurs, on trouvera que la 1re eſt un peu moindre que 34, & la 2de = 27. Donc le Triangle équilatéral eſt plus grand que le rectangle, quoique de fort peu.

Que le Triangle équilatéral eſt le plus grand de tous les iſopérimetres.

1288. Donc le Triangle équilatéral eſt le plus grand de tous les iſopérimetres poſſibles, puiſqu'il eſt plus grand que tous les iſoſceles, & qu'il n'y a aucun Scalene qui ne ſoit plus petit qu'un iſoſcele de même baſe, ſelon l'art. 1285.

1289. Pour concevoir diſtinctement la maniere dont la Suite des Triangles iſoſceles iſopérimetres, commençant par l'amblygone *ABC*, & terminée par l'oxygone *abc*, peut être graduée, il faut concevoir que le Triangle rectangle eſt préciſément au milieu de cette Suite, & fait la ſéparation des amblygones & des oxygones. L'amblygone qui précede immédiatement ce rectangle a ſon angle obtus ou du ſommet d'une certaine quantité plus grand que 90, & l'oxygone qui ſuit immédiatement le rectangle a ſon angle du ſommet de la même quantité moindre que 90, & toujours ainſi de ſuite, de ſorte que l'angle *abc* du ſommet d'un oxygone quelconque eſt toujours par là néceſſairement double de l'angle *BAD* ou *BCD* de la baſe de l'amblygone correſpondant. Tant que les Triangles ſont finis, on peut prendre un degré pour la quantité dont l'angle obtus de chaque amblygone croît à chaque pas, à compter depuis le Triangle rectangle, & pour la quantité dont l'angle du ſommet de chaque oxygone décroît auſſi à chaque pas. Dans l'Infiniment petit cette égalité d'éloignement, à l'égard du Triangle rectangle, ſubſiſte encore, & l'angle *abc* eſt double de *BAD* par la même raiſon que dans le Fini.

1290. On peut donc concevoir la Suite des Triangles ainſi diſpoſée. *ABC*, amblygone infiniment petit, amblygones

M.E.C.D. 2017

finis, amblygone dont l'angle du ſommet eſt de 120, correſpondant de l'Equilatéral, amblygones dont l'angle du ſommet eſt moindre que 120, Rectangle au milieu de la Suite, oxygones dont l'angle du ſommet eſt plus grand que 60, Equilatéral le plus grand de tous, oxygones dont l'angle du ſommet eſt moindre que 60, *abc* infiniment petit.

1291. La perpendiculaire *bd*, qui eſt néceſſairement plus grande dans les Triangles oxygones que dans les amblygones, eſt plus grande dans l'oxygone infiniment petit *abc* qu'elle ne peut être dans aucun oxygone fini, car elle eſt $= \frac{a}{2}$ (1281), & il eſt viſible que ni cette perpendiculaire, ni même le côté *ab* qui eſt plus grand, ne peut être dans aucun Triangle fini égal à la moitié du Fil *a*.

1292. De même dans l'amblygone infiniment petit *ABC*, la baſe $AC = \frac{a}{2}$ (1282) eſt plus grande qu'elle ne peut jamais être dans aucun Triangle fini.

1293. Dans toute la Suite des Triangles, depuis *ABC* juſqu'à *abc*, les baſes vont toujours en décroiſſant, & les perpendiculaires en croiſſant.

1294. Dans les deux Triangles extremes infiniment petits, on peut, à cauſe de l'infinie petiteſſe, prendre *BD* pour l'arc circulaire décrit du centre *A* & ſur le rayon *AB*, qui meſure l'angle *BAD*, & de même *ac* pour l'arc circulaire décrit du centre *b* ſur le rayon *ba*, qui meſure l'angle *abc*. Or l'angle *abc* eſt double de *BAD* (1289), donc l'arc *ac* ſeroit double de l'arc *BD* s'ils étoient décrits ſur le même rayon. Mais de plus le rayon $ba = \frac{a}{2}$, eſt double de *AB* $= \frac{a}{4}$ (1282), donc $ac . BD :: 4 . 1$, d'ailleurs $bd = \frac{a}{2} = AC$. Donc $ac \times bd . BD \times AC :: 4 . 1$. Or $ac \times bd$ eſt à $BD \times AC$ comme l'aire du Triangle *abc* à celle du Triangle *ABC*.

1295. Dans toute la Suite ſuppoſée des Triangles, aucun

M.E.C.D. 2017

oxygone fini ne peut avoir un auſſi grand rapport à l'amblygone correſpondant, que celui de l'oxygone extreme *abc* à l'amblygone extreme *ABC*. Car 1°, dans le Fini *ac* eſt la corde de l'arc qui meſure l'angle *abc* dans un Cercle décrit ſur le rayon *ba*, & *BD* eſt le Sinus de l'angle *BAD* dans un Cercle dont le rayon eſt *AB*. Donc l'angle *abc* étant double de *BAD*, *ac* ſeroit double de *BD*, ſi *ba* & *AB* étoient des rayons égaux, puiſque dans un même Cercle la corde du double d'un arc eſt double du Sinus de cet arc. Mais *ba* & *AB* ne ſont pas des rayons égaux. Il eſt bien vrai que *ba*, côté d'un oxygone, eſt toujours plus grand que *AB*, côté d'un amblygone, ce qui rend le rapport de *ac* à *BD* plus que double, mais cela ne peut le rendre quadruple dans le Fini, car il faudroit que *ba* fût double de *AB* comme dans l'Infiniment petit. Or le côté *ba* eſt toujours dans le fini moindre que $\frac{a}{2}$ (1291), & le côté *AB* toujours plus grand que $\frac{a}{4}$, puiſque la baſe $AC = \frac{a}{2}$ dans l'Infiniment petit y eſt la plus grande qu'elle puiſſe être (1292). Donc *ac* ne peut jamais dans le fini être quadruple de *BD*.

2°. Depuis l'amblygone extreme *ABC* juſqu'à l'oxygone extreme *abc*, les perpendiculaires *BD* ou *bd* ont toujours crû, & les baſes *AC* ou *ac* toujours décrû (1293), & la plus grande perpendiculaire *bd*, qui eſt celle du Triangle extreme *abc*, n'eſt qu'égale à la baſe *AC* de l'autre Triangle extreme. Donc dans tout le Fini la perpendiculaire *bd* d'un oxygone quelconque a été moindre que la baſe *AC* de l'amblygone correſpondant.

Donc les aires de deux Triangles correſpondans étant toujours :: $ac \times bd . AC \times BD$, *ac* ne pouvant jamais dans le fini être quadruple de *BD*, & *bd* étant toujours moindre que *AC*, il eſt impoſſible que dans le fini $ac \times bd$ ſoit quadruple de $AC \times BD$.

1296. De-là il ſuit que plus deux Triangles correſpondans finis ſont proches des deux extremes, plus l'aire de

M.E.C.D. 2017

l'oxygone eſt grande par rapport à celle de l'amblygone, quoiqu'elle n'en puiſſe jamais être quadruple.

1297. Les Triangles correſpondans étant toujours pris deux à deux, à commencer par les deux extremes, leurs aires approchent d'autant plus de l'égalité, qu'ils approchent plus de part & d'autre du Triangle rectangle qui fait la ſéparation des oxygones & des amblygones.

1298. Cependant les deux Triangles les plus proches de part & d'autre du Rectangle n'arrivent point à l'égalité, car le Triangle équilatéral, qui eſt un oxygone, eſt le plus grand de toute la Suite (1288); or en commençant toujours la Suite par l'amblygone infiniment petit *A B C*, l'équilatéral eſt au de-là du rectangle. Donc dans tout l'eſpace où ſont compris les oxygones, depuis l'équilatéral juſqu'au rectangle, & les amblygones depuis le rectangle juſqu'à l'amblygone, dont l'angle obtus eſt 120, qui eſt le correſpondant de l'équilatéral, chaque amblygone eſt plus petit que l'oxygone correſpondant. De-là il ſuit que les Triangles correſpondans ſont ſeulement d'autant moins inégaux qu'ils ſont pris plus proches du Rectangle.

1299. On peut même voir que les Triangles pris, non plus deux à deux de part & d'autre du Rectangle, mais de ſuite depuis l'amblygone *A B C*, en allant vers l'Equilatéral, ſont d'autant moins inégaux entr'eux, qu'ils ſont plus éloignés de ce Triangle *A B C* ou de l'origine de la Suite. Ainſi on trouvera, par exemple, que l'amblygone dont l'angle obtus eſt de 120, & qui eſt le correſpondant de l'Equilatéral, ayant une aire qui eſt $\frac{\sqrt{3}}{28 \times 16\sqrt{3}}$ égale à très-peu près à $\frac{\sqrt{3}}{55}$, eſt beaucoup plus petite par rapport à celle du Rectangle qui eſt $\frac{1}{12 \times 8\sqrt{2}}$ (1287) que celle du Rectangle ne l'eſt par rapport à celle de l'Equilatéral qui eſt $\frac{1}{12\sqrt{3}}$. Car les quarrés de la grandeur qui exprime l'aire de l'Amblygone, & de celle qui exprime le Rectangle, ſont :: 1587 . 3025. Et les

M.E.C.D. 2017

quarrés des grandeurs qui expriment les aires du Rectangle & de l'Equilatéral, ſont :: 27 . 34 (1287).

1300. De-là il ſuit que les différences des Triangles vont en décroiſſant, depuis l'Amblygone infiniment petit, du moins juſqu'à l'Equilatéral; & pour voir ſi elles paſſent au de-là en décroiſſant encore, il faut concevoir une Courbe dont les Ordonnées infiniment proches repréſentent par leurs rapports, ceux des aires de tous les Triangles poſſibles infiniment peu différens, depuis l'Amblygone *ABC* juſqu'à l'Oxygone *abc*. Les différences des Ordonnées ſeront donc décroiſſantes depuis l'Amblygone *ABC* juſqu'à l'Equilatéral. Mais comme cet Equilatéral eſt un *plus grand*, la différence y deviendra néceſſairement nulle ſelon la Loi des Courbes, & par conſéquent depuis l'Equilatéral juſqu'à l'Oxygone *abc*, les différences des Ordonnées, ou des Triangles ſeront croiſſantes.

1301. Cette Courbe ſera concave vers ſon axe dans tout ſon cours, puiſque depuis ſon origine juſqu'à ſa plus grande Ordonnée, ſes Ordonnées ſeront croiſſantes, & leurs différences décroiſſantes, & que depuis ſa plus grande Ordonnée juſqu'à l'extrémité, les Ordonnées ſeront décroiſſantes, & leurs différences croiſſantes. La Courbe ſera parallele à ſon axe au point de ſa plus grande Ordonnée.

1302. Par la formation de cette Courbe qui monte & redeſcend, & qui par conſéquent aura une infinité d'Ordonnées du cours montant égales à d'autres du cours deſcendant, il eſt clair qu'il y aura une infinité de Triangles iſopérimetres égaux, mais ils ne ſeront pas correſpondans.

1303. On peut penſer que le Triangle oxygone extreme a une plus grande aire que l'amblygone correſpondant, parce qu'il a une plus grande égalité, ou moindre inégalité de côtés & d'angles. Cela paroît d'abord paradoxe: car l'oxygone ayant un angle infiniment petit & deux finis, un côté infiniment petit & deux finis, il y a une inégalité infinie tant entre deux côtés & le 3me, qu'entre deux angles & le 3me, au lieu que dans l'amblygone, les trois côtés étant finis, il n'y

M.E.C.D. 2017

a entr'eux qu'une inégalité finie, & il n'en reſte une infinie qu'entre un de ſes angles qui eſt fini, & les deux autres infiniment petits. Mais c'eſt par cette raiſon là même que l'amblygone eſt plus inégal, puiſqu'il n'a pas comme l'oxygone la même inégalité entre ſes côtés qu'entre ſes angles.

1304. Maintenant ſi avec le Fil *a* on fait un Quadrilatere, que je ſuppoſe être un parallélogramme ou Rhomboïde, dont le côté *ab* eſt plus grand que *bc*, il eſt clair que la ſomme de *ab* & de *bc* eſt $= \frac{a}{2}$, & que l'aire du parallélogramme eſt $ab \times af$, *af* étant une perpendiculaire qui meſure la diſtance de *ab* & de *dc*. *Qnadrilateres iſopérimetres aux Triangles précédens.* FIG. XVI.

1305. Si je fais l'angle *b a d* infiniment petit, ce qui rend *af* infiniment petite, & ſi en même temps les 4 côtés du Rhomboïde ſont finis, l'aire ſera $dx \times \frac{a}{n}$, la perpendiculaire *af* étant appellée *dx*, & $\frac{a}{n}$ étant l'expreſſion du côté *ab*, dans laquelle *n* eſt un nombre indéterminé qui dépend du rapport que *ab* aura à *bc*. Donc l'aire eſt infiniment petite, & en effet deux côtés conſécutifs *ab* & *bc* ne ſont alors que couchés ſur les deux autres preſque exactement en ligne droite.

1306. Si je fais le côté *AD* infiniment petit, les quatre angles étant finis, *AF* eſt encore infiniment petite, & *AB* eſt $= \frac{a}{2}$. Donc l'aire eſt $dx \times \frac{a}{2}$, infiniment petite. Il eſt évident que ce ſont là les deux ſeules manieres dont je puiſſe faire deux Rhomboïdes infiniment petits. FIG. XVII.

1307. Si je prends celui de la Figure XVI, & qu'en laiſſant les côtés finis & de la même grandeur, j'augmente toujours également l'angle infiniment petit *b a d*, & que je continue toujours de même après qu'il ſera devenu Fini, la perpendiculaire *af* augmentera toujours, le côté *ab* demeurant le même, & par conſéquent le produit $af \times ab$ ſera toujours plus grand, juſqu'à ce qu'enfin l'angle *b a d* ſoit droit. Donc le parallélogramme rectangle eſt plus grand que tous les

M.E.C.D. 2017

Rhomboïdes iſopérimetres précédens, qui avoient les mêmes côtés.

1308. Si je continue à augmenter dans la même ſuppoſition l'angle *bad* devenu droit, je ne fais que tranſporter en *a* l'angle obtus qui étoit en *b*, & ce ne ſont que les mêmes Rhomboïdes qu'on avoit eus dans la premiere variation. Donc en général & abſolument le parallélogramme rectangle eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres, qui ont les mêmes côtés que ce parallélogramme.

1309. Si dans le Rhomboïde de la Figure XVII, je laiſſe les angles finis tels qu'ils ſont, & que j'augmente toujours le côté infiniment petit AD, lors même qu'il ſera devenu Fini, la perpendiculaire AF augmente toujours, & en même temps le côté AB diminue. Mais à cauſe des angles conſtans le rapport de la perpendiculaire AF au côté AD eſt toujours le même, de ſorte qu'au lieu du produit $AF \times AB$, on peut prendre $AD \times AB$ qui croîtra comme l'aire. Or puiſque AD, plus petit que AB, croît tandis que AB décroît, & que AD ayant été d'abord infiniment petit par rapport à AB, le produit $AD \times AB$ a été alors infiniment petit, & le plus petit poſſible, ce produit ne ſera jamais plus grand que dans le cas le plus oppoſé à l'inégalité infinie de AD & de AB; c'eſt-à-dire, lorſque AD ſera $= AB$. Donc la plus grande aire que l'on ait encore eue eſt lorſque $AD = AB$. Or quand cela eſt, chaque côté eſt $= \frac{a}{4}$, & le Rhomboïde eſt devenu Rhombe. Donc le Rhombe eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres précédens qui avoient les mêmes angles.

1310. Si on continue d'augmenter le côté AD, on ne fera que rendre à la fin le côté AB infiniment petit par rapport à AD, au lieu qu'auparavant AD l'étoit par rapport à AB, & l'on aura repaſſé par les mêmes Rhomboïdes qu'on avoit eus dans la premiere variation. Donc abſolument le Rhombe eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres, qui ont les mêmes angles que le Rhombe.

1311.

M.E.C.D. 2017

1311. Donc les Rhomboïdes, qui ont les mêmes côtés, ſont d'autant plus grands que leurs deux angles, l'obtus & l'aigu, ſont moins inégaux (1307), & les Rhomboïdes qui ont les mêmes angles, ſont d'autant plus grands que leurs côtés ſont moins inégaux (1309). Donc l'égalité, ſoit des côtés, ſoit des angles du Quadrilatere, fait à la grandeur de l'aire.

Que le Quarré eſt le plus grand de tous les Quadrilateres iſopérimetres.

1312. A meſure que je rendrai moins inégaux les côtés du parallélogramme rectangle, qui eſt plus grand que tous les Rhomboïdes iſopérimetres qui ont les mêmes côtés (1307), ou à meſure que je rendrai moins inégaux les angles du Rhombe qui eſt plus grand que toutes les Rhomboïdes qui ont les mêmes angles (1310), j'aurai de plus grandes aires. Donc enfin j'aurai un Quarré, dont l'aire $= \frac{aa}{16}$ ſera plus grande que celle de tout autre Quadrilatere.

Et plus grand que le Triangle équilatéral iſopérimetre.

1313. Si je compare à l'aire du Quarré celle du Triangle équilatéral qui eſt $\frac{aa}{12\sqrt{3}}$ (1287), je vois qu'elles ſont :: $12\sqrt{3}$. 16 :: $3\sqrt{3}$. 4. Or le quarré de la 1re eſt 27, & celui de la 2de 16, d'où il eſt aiſé de voir que l'aire du Quarré eſt la plus grande, & qu'elle eſt à celle du Triangle comme un peu plus de 5 à 4.

1314. Si je cherche pourquoi l'aire du Quarré eſt plus grande que celle du Triangle équilatéral, les côtés & les angles étant égaux dans l'une & dans l'autre Figure, je ne vois nul autre principe d'augmentation que le nombre des côtés du Quarré plus grand que celui des côtés du Triangle, d'où je commence à juger que la multitude des côtés fait à la grandeur de l'aire auſſi-bien que l'égalité des côtés & des angles.

Et en effet, cela doit être ainſi. Le Fil *a* ne peut embraſſer un eſpace, s'il ne s'écarte de lui-même, & par conſéquent ne ſe diviſe en parties : car s'il demeure étendu en ligne droite, il n'embraſſera pas d'eſpace, & non pas même encore s'il n'eſt diviſé qu'en deux parties égales ou inégales. Puiſqu'il faut que pour embraſſer un eſpace il ſe diviſe en parties, & en plus de deux, il faut pour embraſſer un plus grand eſpace, qu'il ſe

M.E.C.D. 2017

diviſe en un plus grand nombre de parties, car moins il y en auroit, plus auſſi ces parties auroient de grandes étendues en ligne droite, & plus elles tiendroient de la diſpoſition où le Fil *a* ne peut embraſſer d'eſpace. On voit auſſi par là que le nombre des parties étant le même, elles embraſſent un plus grand eſpace quand elles ſont égales; car ſi elles ne le ſont pas, les grandes qui ſont de grandes étendues en lignes droites, tiennent trop de la diſpoſition deſavantageuſe. Enfin le nombre des parties égales étant le même, il eſt clair que plus elles s'écarteront les unes des autres, plus elles embraſſeront un plus grand eſpace. Or elles ne s'écarteront jamais davantage les unes des autres qu'en s'écartant toutes également. Car autrement celles qui s'écarteroient le plus dans la 1re moitié du Fil *a*, par exemple, obligeroient celles de la 2de moitié à ſe rapprocher non-ſeulement les unes des autres, mais encore de celles de la 1re moitié. Donc en raſſemblant tout, la multitude des côtés, leur égalité, & l'égalité des angles font la plus grande aire.

Que le Pentagone régulier eſt plus grand que le Quarré iſopérimetre.

1315. Et pour m'en aſſurer encore par le calcul, je cherche l'aire du Fil *a*, devenu Pentagone régulier.

Le côté d'un Pentagone inſcrit dans un Cercle, dont le rayon eſt r, eſt $\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$. Pour la facilité du calcul, ſoit $\sqrt{10-2\sqrt{5}}=x$. Donc le côté du Pentagone eſt $\frac{rx}{2}=\frac{a}{5}$. Donc le rayon du Cercle dans lequel ſeroit inſcrit le Pentagone, dont le côté eſt $\frac{a}{5}$, eſt $\frac{2a}{5x}$. La perpendiculaire menée du centre de ce Cercle ſur le côté du Pentagone eſt $\frac{a\sqrt{16-xx}}{10x}$, & l'aire du Triangle iſoſcele dont ce côté du Pentagone eſt la baſe, eſt $\frac{a\sqrt{16-xx}}{10x}\times\frac{a}{10}=\frac{aa\sqrt{16-xx}}{100x}$, & cinq fois ce Triangle où l'aire du Pentagone eſt $\frac{aa\sqrt{16-xx}}{20x}$. Or $x=$

M.E.C.D. 2017

$= \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, & $xx = 10 - 2\sqrt{5}$, & par conſéquent $\frac{aa\sqrt{16 - xx}}{20x} = \frac{aa\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{20\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$. Donc $\frac{aa}{16}$, aire du Quarré, eſt à celle du Pentagone :: $\frac{1}{16} . \frac{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}{20\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$. En quarrant ces deux grandeurs on a $\frac{1}{256}$ & $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{400 \times 10 - 2\sqrt{5}}$. Si je prens $\sqrt{5} = 2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$, je fais $\sqrt{5}$ trop petite, comme il ſera aiſé de le voir, & par conſéquent la grandeur $\frac{6 + 2\sqrt{5}}{400 \times 10 - 2\sqrt{5}}$, qui repréſente le Pentagone, ſera trop petite, puiſque ſon numérateur ſera trop petit, & ſon dénominateur trop grand. Cependant dans cette ſuppoſition on a $6 + 2\sqrt{5} = 6 + \frac{22}{5}$ $= \frac{52}{5}$, & $400 \times 10 - 2\sqrt{5} = 400 \times \frac{28}{5} = 2240$, & $\frac{52}{5}$ diviſé par $2240 = \frac{52}{11200}$. Et l'on trouvera $\frac{1}{256} . \frac{52}{11200}$ :: 175 . 208. Donc les quarrés des nombres qui expriment les rapports des aires du Quarré & du Pentagone ſont :: 175 . 208, & ces aires :: $\sqrt{175} . \sqrt{208}$, c'eſt-à-dire, comme un nombre un peu plus grand que 13 à un autre un peu plus grand que 14, & d'ailleurs encore un peu plus grand, parce que $\sqrt{5} > \frac{11}{5}$.

1316. De même on trouvera que l'aire de l'Exagone eſt $\frac{aa}{2\sqrt{48}}$ ou $\frac{1}{2\sqrt{48}}$. Le quarré du nombre qui exprime celle du Pentagone eſt $\frac{52}{11200}$ (1315) $= \frac{13}{2800}$. Donc l'aire de l'Exagone eſt à celle du Pentagone :: $\frac{1}{2\sqrt{48}} . \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{700}}$ :: $2\sqrt{700} . 2\sqrt{624}$ :: $\sqrt{700} . \sqrt{624}$, c'eſt-à-dire, comme un nombre entre 26 & 27 eſt à 25, à très peu-près. Tout cela avec le raiſonnement de l'art. 1314, m'aſſure ſuffiſamment que j'augmenterai toujours les aires à meſure que je

Et l'Exagone plus grand que le Pentagone.

M.E.C.D. 2017

multiplierai le nombre des côtés, en conſervant leur égalité & celle des angles.

Que le Cercle eſt plus grand que tous les Polygones iſopérimetres.

1317. Donc la plus grande aire que je puiſſe former avec le Fil a, eſt celle d'un Polygone infini qui aura tous ſes côtés & tous ſes angles égaux, c'eſt-à-dire, celle d'un Cercle.

1318. La circonférence du Cercle étant a, le rayon eſt un peu moindre que $\frac{a}{6}$. Donc l'aire du Cercle eſt un peu moindre que $\frac{aa}{12}$. Or l'aire du Triangle équilatéral, moindre que celle de tous les Polygones réguliers iſopérimetres qui ont plus de 3 côtés, eſt exactement $\frac{aa}{12\sqrt{3}}$. Donc l'aire du plus petit Polygone régulier eſt à celle du plus grand :: 12. $12\sqrt{3}$ :: 1. $\sqrt{3}$, ou un peu moins que $\sqrt{3}$, puiſque l'aire du Cercle a été poſée trop grande. Donc l'aire du Polygone, qui a le plus de côtés, eſt aſſez éloignée d'être double de celle du Polygone qui en a le moins.

1319. Donc dans tout le chemin que font les aires des Polygones réguliers iſopérimetres, en croiſſant depuis le Triangle équilatéral juſqu'au Cercle par l'augmentation ſucceſſive du nombre de leurs côtés, elles ne vont point de 1 juſqu'à 2; & comme cet eſpace fini, diviſé par une infinité de Polygones, ne le peut être qu'en un nombre fini de parties finies, & en un infini d'infiniment petites, il n'y a qu'un nombre fini de Polygones réguliers qui aient des différences finies à l'aire du Cercle, & il y en a une infinité dont le nombre des côtés eſt toujours plus grand, qui n'ont à cette aire que des différences infiniment petites. Donc la confuſion ou l'identité d'un Polygone infini avec le Cercle, conçue & ſuppoſée par les Géometres, eſt infiniment mieux fondée & plus légitime qu'ils n'ont peut-être eux-mêmes penſé.

1320. A compter depuis le Triangle équilatéral juſqu'au Cercle, les aires croiſſantes des Polygones réguliers iſopérimetres ont des différences décroiſſantes, & après un nombre fini indéterminable de différences finies, elles en ont une infinité d'infiniment petites.

M.E.C.D. 2017

1321. Il eſt bon de remarquer que quand les Géometres ont conçu l'identité du Cercle avec un Polygone infini, ç'a été en inſcrivant ſucceſſivement dans un même Cercle différens Polygones dont le nombre des côtés étoit toujours plus grand, & le périmetre plus grand auſſi. Ici le périmetre des Polygones eſt toujours égal, & les Cercles où ils ſeroient inſcrits, ſeroient toujours plus petits, comme il ſera aiſé de le voir. Mais cela n'empêche pas que ce qui vient d'être dit ſur l'indentité des Polygones infinis & du Cercle ne ſoit toujours vrai. On trouvera même que ſelon la premiere maniere de la concevoir, l'aire de l'Exagone ſera à celle du Cercle :: $\sqrt{3} . 2$ plus quelque petite grandeur, d'où ſuit tout le raiſonnement de l'art. 1319.

1322. L'avantage qu'un Polygone tire de la multiplication infinie de ſes côtés n'eſt pas infini, & il eſt bien éloigné de l'être. Donc il peut être égalé, & même ſurpaſſé par celui qu'un autre Polygone d'un nombre fini de côtés tirera de l'égalité de ſes côtés ou de ſes angles. Donc une Courbe peut avoir une aire moindre qu'une Figure rectiligne iſopérimetre. Et en effet, il eſt aiſé de concevoir une Ellipſe ſi allongée, que l'aire d'un Triangle, même ſcalene, ſeroit beaucoup plus grande.

1323. Une Courbe pouvant toujours être conçue comme diviſée en côtés égaux, & par conſéquent deux Courbes iſopérimetres qui enferment toutes deux un eſpace, étant conçues comme diviſées en un nombre infini égal de côtés égaux, & entr'eux, & ceux de l'une à ceux de l'autre, il n'eſt plus queſtion pour l'aire que de conſidérer les angles de contingence des deux Courbes, ou leurs courbures, & celle qui d'une extrémité de ſon cours à l'autre aura la courbure la moins inégale, aura la plus grande aire.

Et plus que toutes les Courbes iſopérimetres.

1324. Donc de toutes les Courbes iſopérimetres, le Cercle eſt celle qui a la plus grande aire.

Que l'aire de l'Ellipſe eſt

1325. *a* étant le grand axe d'une Ellipſe, & *b* le parametre de *a*, la courbure de l'origine de l'Ellipſe ſurpaſſe d'autant plus celle du quart, ou, ce qui eſt la même choſe, la

M.E.C.D. 2017

d'autant moindre que ſa courbure eſt plus inégale, & au contraire.

courbure de l'Ellipſe eſt d'autant plus inégale, que *a* eſt plus grand par rapport à *b* (1088), ou, ce qui revient au même, quand le grand axe eſt plus grand par rapport au petit. Donc de deux Ellipſes iſopérimetres, celle où le grand axe eſt plus grand par rapport au petit, eſt celle qui a la plus petite aire, & elle l'a d'autant plus petite, que le grand axe eſt plus grand par rapport au petit.

1326. Si le petit axe étoit, non pas abſolument nul, ce qui empêcheroit l'Ellipſe d'être Ellipſe, mais infiniment petit, l'Ellipſe ſeroit une ligne qui auroit d'abord dans une étendue infiniment petite une courbure elliptique, & enſuite ne ſeroit qu'une droite couchée le long de ſon grand axe juſqu'à ſon extrémité, où elle auroit une courbure pareille à celle de l'origine. Il eſt viſible que par-là il arriveroit en même temps qu'elle auroit & une aire infiniment petite, & une inégalité infinie de courbure, puiſqu'ayant eu d'abord une courbure ordinaire & finie, elle n'en auroit enſuite qu'une qui ſeroit nulle. Donc l'inégalité infinie de courbure, & l'aire infiniment petite ſont deux choſes néceſſairement liées dans l'Ellipſe.

1327. On ne pourroit pas faire ſur le Cercle cette ſuppoſition d'un axe infiniment petit, l'autre étant fini, parce qu'il lui eſt eſſentiel d'avoir ſes deux axes égaux : mais on la pourra faire ſur toutes les Courbes qui, comme l'Ellipſe, renferment un eſpace par leur circonférence ſeule, & qui ont leurs axes inégaux, ou, ce qui eſt le même, une plus grande Ordonnée & l'Abſciſſe correſpondante inégales. Donc en général dans toutes ces Courbes l'inégalité infinie de courbure produira une aire infiniment petite.

Et de même pour toutes les Courbes qui renferment ſeules un eſpace.

1328. Donc en général, ces Courbes étant iſopérimetres, plus leur courbure ſera inégale, plus leur aire ſera petite, & au contraire.

Que dans les eſpaces renfermés en partie par des

1329. Si les Courbes ne renferment pas ſeules un eſpace, mais qu'elles ne le renferment qu'avec une Abſciſſe & une Ordonnée, comme une Parabole, une Hyperbole, &c. ce qui eſt le plus ordinaire, il faut, au lieu de ſuppoſer les Courbes entieres iſopérimetres, en prendre des Arcs qui ſoient de

M.E.C.D. 2017

part & d'autre d'une même longueur, les prendre avec les Abſciſſes & les Ordonnées qui leur appartiennent, & voir quelles ſont les aires.

Courbes, une courbure moins inégale produit un plus grand eſpace, le reſte étant égal.

Si l'on compare l'aire d'un Quart de Cercle à celle du Triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſeroit la Corde de 90 degrés, & les deux autres côtés, les deux rayons du Cercle qui font l'angle droit, il eſt bien clair que l'aire du Quart de Cercle eſt plus grande que celle du Triangle, mais auſſi l'hypotenuſe du Triangle eſt moindre que l'arc de 90. Faiſons la égale à cet arc. Si la circonférence du Cercle eſt $= a$, cette hypotenuſe ſera $= \frac{a}{4}$, & ſon quarré $\frac{aa}{16}$ ſera quadruple de l'aire du Triangle rectangle iſoſcele, dont elle eſt l'hypotenuſe. Donc l'aire de ce Triangle eſt $\frac{aa}{64}$. Si l'on prend l'aire du Cercle pour exactement $= \frac{aa}{12}$, celle du Quart eſt $\frac{aa}{48}$, & elle eſt à celle du Triangle :: 64.48 :: 4.3. Mais il eſt vrai que $\frac{aa}{12}$ eſt une quantité un peu plus grande que l'aire du Cercle, ou que cette aire eſt aa diviſé par un nombre un peu plus grand que 12, ce qui rendra le rapport du Quart de Cercle au Triangle moindre que celui de 4 à 3 : mais il ſera toujours certainement très-éloigné de l'égalité.

Il eſt de plus à remarquer que dans ce Triangle rectangle iſoſcele, dont l'hypotenuſe eſt $\frac{a}{4}$, chacun des deux côtés égaux eſt $\frac{a}{\sqrt{32}}$, le rayon du Cercle ſuppoſé étant $\frac{a}{6}$, ou un peu moindre. Or $\frac{a}{\sqrt{32}} \cdot \frac{a}{6} :: 6 . \sqrt{32}$. Donc un des petits côtés du Triangle eſt plus grand que le rayon du Cercle. Donc le Triangle dont le périmetre total ſont l'hypotenuſe égale à l'arc de 90, & deux côtés égaux plus grands que le rayon du Cercle, a un plus grand périmetre total que le Quart de Cercle, & cependant il a une moindre aire, ce qui ne peut venir que de l'avantage que donne au Quart de Cercle, le nombre infini des côtés de ſon arc de 90, tandis que l'hypotenuſe du Triangle égale à cet arc n'eſt qu'une ligne droite.

M.E.C.D. 2017

Donc en général deux Trilignes étant posés, l'un mixtiligne formé d'une Courbe avec son Abscisse & son Ordonnée, l'autre rectiligne formé d'une droite égale à cette Courbe, & de deux autres droites, si ces droites sont égales à celles du Triligne mixtiligne, celui-ci aura une plus grande aire que l'autre; & quand même les deux droites du rectiligne seront plus grandes que celles du mixtiligne, ce qui donnera au rectiligne un plus grand périmetre total, l'aire du mixtiligne pourra encore être plus grande; & tout le reste étant égal, l'aire du mixtiligne sera d'autant plus grande par rapport à celle du rectiligne, que la Courbe du mixtiligne aura une courbure moins inégale.

Ce que produit par rapport à l'aire des Courbes d'un cours infini & d'une égale longueur l'inégalité de leur courbure, lorsqu'elle devient nulle à leur extrémité.

1330. S'il s'agit des aires de Courbes d'une égale longueur, mais qui aient un cours infini, on peut déja conjecturer que le plus ou le moins d'inégalité de leur courbure fera à leur aire, car le nombre infini de côtés étant égal, ne sera plus à considérer; & qu'une inégalité infinie de courbure produira, non plus une aire infiniment petite, ce qui n'est plus possible ici, mais la plus petite aire qu'il se puisse. Cela demande des considérations plus détaillées.

L'inégalité de courbure ne peut être infinie, que quand la courbure ayant été ordinaire & finie, elle devient nulle ou infinie. Je ne vais prendre d'abord pour inégalité infinie de courbure que celle qui consiste en ce que la courbure ayant été finie devient nulle.

Un espace quelconque est formé de deux dimensions, & jamais il ne peut être plus grand que quand elles sont toutes deux à la fois les plus grandes qu'il se puisse, & jamais elles ne sont plus grandes toutes deux à la fois, que quand elles sont égales. Un espace mixtiligne ou curviligne a ses deux dimensions, dont l'une est dans le sens de l'axe ou des Abscisses, l'autre dans celui des Ordonnées; & jamais il n'est plus grand que quand les Abscisses approchent le plus qu'il est possible d'être égales aux Ordonnées correspondantes, ou, ce qui est le même, le mouvement horisontal de la Courbe au vertical.

Si

M.E.C.D. 2017

Si la courbure de la Courbe devient nulle dans une étendue finie, c'eſt-à-dire, ſi la Courbe dans cette étendue devient droite, cette droite eſt ou parallele ou perpendiculaire ou oblique à l'axe. Si elle eſt parallele, alors le mouvement horiſontal ſubſiſte, & le vertical ceſſe, & l'eſpace curviligne ne croît plus que ſelon une dimenſion, & par conſéquent moins que s'il avoit crû ſelon les deux. C'eſt la même choſe, mais ſeulement en ſens contraire, ſi la droite eſt perpendiculaire. Si elle eſt oblique, l'eſpace a crû ſelon les deux dimenſions.

La condition, que la Courbe devienne droite dans une étendue au moins finie, eſt néceſſaire par rapport à la diminution de l'eſpace curviligne : car la Courbe devenue droite dans une étendue infiniment petite, ou de pluſieurs côtés en nombre fini, ne produiroit dans l'aire qu'une diminution infiniment petite, qui ne ſeroit point à compter.

Une Courbe peut devenir droite dans une étendue infinie auſſi-bien que dans une finie (1179, &c. 1182).

L'inégalité infinie de courbure ne produit une diminution d'aire que dans les Courbes qui, dans des étendues au moins finies, deviennent des droites paralleles ou perpendiculaires à l'axe : car ce n'eſt qu'alors que l'un des deux mouvemens devient nul par rapport à l'autre.

La courbure nulle dans une étendue finie ou infinie, ne peut arriver qu'à la fin du cours infini des Courbes. Tout cela poſé,

1331. Je ſuppoſe 1° que la variation de la courbure ait été ſans changement de l'origine à l'extrémité, ou, ce qui eſt le même, que la courbure ait toujours été décroiſſante. Je ſuppoſe, 2° que les aires formées d'une Courbe infinie, de ſon axe & de ſa derniere Ordonnée, ſont croiſſantes depuis l'origine juſqu'à l'extrémité. Toutes les Courbes d'un cours infini étant conçues ici d'une même longueur, ou égales à la même droite infinie, il eſt viſible, par tout ce qui vient d'être dit, que celles qui ont une inégalité infinie de courbure, & en même temps deviennent à leur extrémité paralleles ou

M.E.C.D. 2017

perpendiculaires à leur axe dans une étendue finie, ont une moindre aire que ſi leur poſition extreme à l'égard de l'axe demeurant la même, elles ne l'avoient pas eue dans une étendue finie, ou, ce qui eſt le même, n'avoient pas eu l'inégalité infinie de courbure, telle qu'on la prend ici. Car leur aire devient plus petite par deux cauſes; la 1re, parce que de leurs deux dimenſions, l'horiſontale ou parallele, & la verticale ou perpendiculaire, l'une ceſſe de croître, tandis que l'autre croît, & que par conſéquent elles s'éloignent de l'égalité. La 2de, parce que dans l'étendue finie où ces Courbes ſont droites, elles perdent, par rapport à la grandeur de l'aire, l'avantage qui réſulte de la multitude des côtés.

1332. Plus l'inégalité infinie de courbure eſt grande dans les Courbes paralleles ou perpendiculaires à l'extrémité, plus l'aire eſt petite; & par conſéquent l'inégalité infinie de courbure qui change la Courbe en droite dans une étendue infinie, étant infiniment plus grande que celle qui ne la change en droite que dans une étendue finie, l'aire doit être alors infiniment plus petite. Car ſi une Courbe à ſon extrémité n'eſt parallele à ſon axe que dans une étendue finie, il n'y a que cette étendue où le mouvement vertical ait ceſſé, & il a cru avec l'horiſontal dans une étendue infinie: mais ſi la Courbe parallele eſt droite dans une étendue infinie, ſon mouvement vertical a ceſſé dans cette étendue, l'horiſontal continuant de croître, & ils n'ont crû tous deux enſemble que dans une étendue finie, ce qui doit faire une différence d'ordre entre les deux différentes aires. En effet, ſi on compare l'aire de la Parabole, qui n'eſt droite que dans une étendue finie (1182), & qui a une derniere Ordonnée $= \infty^{\frac{1}{2}}$ (964), & l'aire d'une Courbe Aſymptotique droite par conſéquent dans une étendue infinie, parallele à ſon extrémité, & dont la derniere Ordonnée ne pourra être que finie, ſelon la 2de ſuppoſition de l'art. 1331, on trouvera que leurs axes étant néceſſairement infinis, les deux aires ſeront, quant à l'ordre, $:: \infty \times \infty^{\frac{1}{2}} . \infty \times 1 :: \infty^{\frac{1}{2}} . 1$.

M.E.C.D. 2017

1333. L'Hyperbole rapportée à ſon premier axe, ou axe traverſant, n'eſt point dans le cas des Courbes, dont l'inégalité infinie de courbure diminue infiniment l'aire, quoiqu'elle ait cette inégalité infinie de courbure, & une Aſymptote. Cela vient de ce que l'Hyperbole ſe termine par être ligne droite infinie oblique à ſon axe d'une certaine obliquité déterminée par le rapport de ſes deux axes conjugués (953); ainſi ſes deux mouvemens, l'horiſontal & le vertical, ſont toujours ſubſiſtans, & ſa derniere Ordonnée infinie auſſi-bien que ſon axe. Son aire eſt donc un Infini du 2d ordre.

Qu'entre toutes les Hyperboles de même longueur, & du 2d degré, l'Equilatere eſt celle qui a la plus grande aire infinie.

1334. Mais entre toutes les Hyperboles de même longueur, j'entens celles du 2d degré, & dont les axes conjugués auront tous les différens rapports finis poſſibles, celle qui aura la plus grande aire infinie du 2d ordre ſera l'Hyperbole équilatere, parce que ſes deux axes conjugués étant égaux, ſa derniere Ordonnée & ſon axe le ſeront auſſi, & par conſéquent les deux dimenſions horiſontale & verticale, ou les deux mouvemens par où elle ſe terminera.

1335. Plus les deux axes conjugués ſeront inégaux, plus ſeront petites les aires infinies des Hyperboles de même longueur.

Que l'Hyperbole équilatere étant diviſée en arcs égaux, certains eſpaces qu'ils détermineront, ſeront croiſſans depuis l'origine juſqu'à l'extrémité.

1336. Ce n'eſt que la derniere Ordonnée de l'Hyperbole équilatere qui devient exactement égale à ſon axe infini, juſque là les Ordonnées ont toujours été moindres que les Abſciſſes, mais elles ont toujours tendu à leur être égales, & leur ont été toujours moins inégales depuis l'origine de l'Hyperbole juſqu'à ſon extrémité. Donc ſi l'on prend, à commencer à l'origine, un arc Hyperbolique quelconque avec ſon Abſciſſe & ſon Ordonnée; ſi enſuite on prend l'arc ſuivant de la même longueur, & que par le premier point de ce 2d arc on tire une parallele à l'axe juſqu'à ce qu'elle rencontre l'Ordonnée de l'extrémité de ce 2d arc, on aura un 2d eſpace Hyperbolique compris entre le 2d arc, la parallele à l'axe, & la différence finie des deux Ordonnées extremes des deux arcs; & je dis que ce 2d eſpace ſera plus grand que le 1er, puiſque le mouvement vertical n'y ſera pas ſi inégal à l'horiſontal que

M.E.C.D. 2017

dans le 1er. Donc ſi l'on conçoit toute l'Hyperbole équilatere diviſée en arcs égaux, qui ſervent à former des eſpaces pareils à ceux qu'on vient de déterminer, ces eſpaces iront toujours en croiſſant juſqu'au dernier, qui ne ſera que rectiligne, puiſque l'Hyperbole eſt alors ligne droite, & ſera un triangle rectangle iſoſcele.

1337. Quoique l'hypotenuſe de ce Triangle n'ait pas la multitude infinie des côtés qu'avoient les arcs Hyperboliques égaux dans d'autres Trilignes pareils, ce deſavantage ſera ſurpaſſé par l'avantage qu'il tire de l'égalité de ſes deux dimenſions.

Et de même dans les autres Hyperboles.

1338. Il en ira de même des Hyperboles non équilateres. Leurs eſpaces ainſi pris, moindres que les correſpondans de l'Hyperbole équilatere, ſeront toujours croiſſans, parce qu'ils tendront toujours & arriveront enfin à la moindre inégalité poſſible, entre une Abſciſſe & une Ordonnée, ou, plus exactement parlant, entre le mouvement horiſontal & le vertical.

Que ce ſera le contraire dans la Parabole.

1339. Ce ſera le contraire de la Parabole où l'on prendra des eſpaces de cette même maniere. Son parametre étant a, tant que l'on prendra des Abſciſſes x moindres que a, les Ordonnées ſeront plus grandes que ces Abſciſſes, mais les unes & les autres tendront à l'égalité, & y arriveront lorſque x ſera $= a$, après quoi les Ordonnées ſeront toujours moindres que les Abſciſſes. Donc ſi l'on prend un 1er arc Parabolique, tel que x ſoit $= a = y$, & qu'on prenne l'arc ſuivant de la même longueur, & que par le premier point de ce 2^d arc, on tire une parallele à l'axe juſqu'à la rencontre de l'Ordonnée extreme de ce 2^d arc, ce 2^d eſpace ſera moindre que le 1er, le 3me déterminé de même moindre que le 2^d, & toujours ainſi de ſuite. Et en effet, la Parabole devenant à ſon extrémité une ligne droite finie parallele à ſon axe, le dernier eſpace ne pourra être qu'infiniment petit.

1340. L'eſpace Parabolique déterminé par un arc tel que $x = y = a$, eſt plus grand que tout eſpace Hyperbolique déterminé par un arc de même longueur, & pris comme celui de la Parabole, à l'origine de la Courbe, car nul arc Hyperbolique n'aura cette égalité de x & de y.

M.E.C.D. 2017

1341. S'il faut courber le Fil *a* en un arc ou Parabolique ou Hyperbolique, à commencer à l'origine de la Courbe, & tel que l'eſpace qu'il déterminera ſoit le plus grand qu'il ſe puiſſe, il faut le courber en arc Parabolique, tel que l'on y ait $x = y$.

1342. Si avec la même condition du plus grand eſpace, il ne faut courber le Fil qu'en arc Hyperbolique, à commencer à l'origine de la Courbe, il faut le courber en arc d'Hyperbole équilatere.

1343. S'il faut le courber en arc Parabolique, qui ne commence pas à l'origine de la Courbe, il faut le courber en arc qui en ſoit le plus près qu'il ſe pourra; & au contraire, s'il s'agit de le courber en arc Hiperbolique.

Que l'inégalité d'une courbure qui ſe termine par être infinie, ne produit rien préciſément par rapport à l'aire.

1344. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que ce que produit par rapport à l'aire, l'inégalité infinie de la courbure devenue nulle à l'extrémité dans une étendue au moins finie. On pourroit juger d'abord que l'inégalité infinie de la courbure devenue infinie comme à l'extrémité de la Cycloïde (1119, 1120), devroit produire auſſi quelque effet par rapport à l'aire. Mais elle n'en produit abſolument aucun. La courbure infinie de l'extrémité de la Courbe vient de ce que ſon dernier côté n'eſt qu'un Infiniment petit du 2[d] ordre (911), ou nul par rapport à tous les précédens, & ce manquement ſubit d'un côté ne fait rien ni au perimetre ni à l'aire, & n'empêche pas que la Courbe n'ait eu dans ſon cours une courbure comparable à celle de toute autre Courbe, & plus ou moins inégale.

Que la Cycloïde qui à ſon extrémité a une courbure infinie, à une aire plus grande ou plus petite que différentes demi-Ellipſes de même longueur qu'elle.

1345. Pour m'en aſſurer par le calcul, je compare l'aire d'une Cycloïde à une aire Elliptique; & parce que la Cycloïde eſt terminée par ſa baſe comme une demi-Ellipſe le ſeroit par un de ſes deux axes, je ne prens qu'une aire de demi-Ellipſe.

La baſe de la Cycloïde eſt $= c$, circonférence du Cercle générateur, dont le diametre eſt $\frac{c}{x}$, x étant un nombre inconnu un peu plus grand que 3. Il eſt démontré que la

M.E.C.D. 2017

circonférence de la Cycloïde eſt quadruple du diametre du Cercle générateur, donc elle eſt $= \frac{4c}{x}$, donc la circonférence d'une demi-Ellipſe iſopérimetre eſt auſſi $\frac{4c}{x}$, & elle eſt à celle du Cercle générateur :: $\frac{4c}{x} . c$ :: $4 . x$. La circonférence de l'Ellipſe entiere ſeroit donc à celle du Cercle générateur :: $8 . x$.

Si un Cercle avoit la même circonférence que l'Ellipſe entiere, ſon aire ſeroit à celle du Cercle générateur :: $64 . xx$, & l'aire du demi-Cercle à celle du Cercle générateur :: $32 . xx$. Or nulle demi-Ellipſe iſopérimetre à ce demi-Cercle ne peut avoir une auſſi grande aire que lui. Donc toute demi-Ellipſe iſopérimetre à la Cycloïde aura une aire dont le rapport à l'aire du Cercle générateur ſera moindre que celui de 32 à xx.

L'aire de la Cycloïde eſt à celle du Cercle générateur :: $3 . 1$. Donc x étant un nombre ſeulement un peu plus grand que 3, il peut y avoir une infinité de rapports moindres que celui de 32 à xx, ou dans leſquels il entre un nombre moindre que 32, & qui cependant ſoient plus grands que celui de 3 à 1, c'eſt-à-dire, qu'il peut y avoir une infinité de demi-Ellipſes iſopérimetres à la Cycloïde, & qui auront de plus grandes aires.

Mais par la même raiſon il y aura une infinité beaucoup plus grande de demi-Ellipſes qui auront de moindres aires que la Cycloïde.

Donc quoique la Cycloïde ait de ſon ſommet à ſes deux extrémités une inégalité infinie de courbure, elle n'a pas par cette raiſon une moindre aire que les Courbes iſopérimetres, & quand elle en a une moindre, c'eſt parce que ſon inégalité de courbure eſt plus grande dans tout ſon cours, où le dernier côté n'eſt point compté.

1346. De toutes les demi-Ellipſes, celle qu'il eſt le plus naturel de comparer à la Cycloïde, eſt celle qui aura pour grand axe la baſe c de la Cycloïde, & pour la moitié du petit,

M.E.C.D. 2017

le diametre $\frac{c}{x}$ du Cercle générateur. L'Ellipſe entiere ſeroit circonſcrite à un Cercle dont le diametre ſeroit $\frac{2c}{x}$, & par conſéquent l'aire Elliptique ſeroit à celle du Cercle inſcrit $:: c . \frac{2c}{x} :: x . 2$, & la moitié de l'aire Elliptique à l'aire de ce Cercle $:: x . 4$. Or ce Cercle inſcrit eſt au générateur de la Cycloïde $:: 4 . 1$. Donc l'aire de la demi-Ellipſe eſt à celle du Cercle générateur $:: x . 1$, & à celle de la Cycloïde $:: x . 3$, c'eſt-à-dire, de bien peu plus grande.

On trouvera en même temps que la demi-Ellipſe eſt à très-peu près iſopérimetre à la Cycloïde. L'aire Elliptique entiere étant à celle du Cercle inſcrit $:: x . 2$, ſi cette aire, au lieu d'être celle d'une Ellipſe, étoit celle d'un nouveau Cercle que j'imagine, la circonférence de ce nouveau Cercle ſeroit à celle du Cercle inſcrit à l'Ellipſe $:: \sqrt{x} . \sqrt{2}$. Donc la circonférence du nouveau Cercle ſeroit à celle du Cercle générateur la moitié moindre que celle de l'inſcrit $:: 2\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2}$ exprimant la circonférence du Cercle générateur, $\frac{\sqrt{2}}{x}$ exprimera ſon diametre. Donc la circonférence du nouveau Cercle ſera au diametre du Cercle générateur $:: 2\sqrt{x} . \frac{\sqrt{2}}{x} :: 2x\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Et comme on ne veut comparer à la Cycloïde qu'une demi-Ellipſe, il ne faut prendre que la demi-circonférence du nouveau Cercle qui tient la place de l'Ellipſe. Donc cette demi-circonférence ſeroit au diametre du Cercle générateur $:: x\sqrt{x} . \sqrt{2}$. Si x n'étoit que 3, les quarrés de $x\sqrt{x}$ & de $\sqrt{2}$ ſeroient 27 & 2, & s'ils avoient été 32 & 2, ou 16 & 1, la demi-circonférence du nouveau Cercle & le diametre du Cercle générateur auroient été $:: 4 . 1$, ce qui eſt le rapport de la Cycloïde au diametre du Cercle générateur, & par conſéquent la demi-circonférence du nouveau Cercle auroit été égale à la Cycloïde. Mais il eſt certain que $x > 3$, ce qui rapproche x^3 de 32; & de plus il faut remettre une demi-Ellipſe à la place de la demi-circonférence du

M.E.C.D. 2017

nouveau Cercle. Or comme on avoit ſuppoſé l'aire Elliptique & la Circulaire égales, la circonférence Elliptique eſt néceſſairement plus grande, & par cette raiſon x^3 s'approche encore plus de 32. Donc la demi-Ellipſe eſt à peu-près iſopérimetre à la Cycloïde.

1347. On voit par-là en général que deux arcs égaux de Courbes différentes, approchent fort d'avoir des aires égales, quand leurs Abſciſſes & leurs Ordonnées ſont égales, ce qui revient aux art. 1330, 1334, &c.

1348. Si deux arcs égaux de Courbes différentes ſont tels que leurs courbures extremes aient le même rapport aux courbures de l'origine, c'eſt la même choſe que ſi deux Suites d'un nombre égal de termes étoient compriſes entre les mêmes extremes: celle qui approcheroit le plus d'une progreſſion arithmérique, diviſeroit l'intervalle plus également, & celle qui approcheroit le plus d'une progreſſion géométrique, le diviſeroit plus inégalement. Donc en examinant ſelon cette vûe la variation de la courbure des deux arcs, on verroit laquelle ſeroit la moins inégale, & par conſéquent lequel des deux arcs contiendroit avec ſon Abſciſſe & ſon Ordonnée la plus grande aire.

Par toute cette Théorie, on voit pourquoi dans l'excellent Mémoire que l'illuſtre M. Bernoulli a donné à l'Académie des Sciences ſur cette matiere, dans les Mém. de l'Acad. de 1706, il détermine les plus grandes aires des Courbes iſopérimetres par un certain rapport conſtant des Sinus des courbures.

SECTION

M.E.C.D. 2017

SECTION V.

De la formation des Lignes par des Points, des Plans par des Lignes, & des Solides par des Plans.

QUOIQU'IL paroiſſe par le titre de cette Section que nous n'y pouvons dire que des choſes très-communes, & trop élémentaires pour mériter d'être dites, nous eſpérons ne pas tomber tout-à-fait dans ce défaut. On conçoit ordinairement les Lignes comme formées par des Points, les Plans par des Lignes, les Solides par des Plans, rien de tout cela n'eſt exactement vrai.

1349. Un Point n'a aucune étendue, c'eſt zero d'étendue. Or $0 \times \infty = 0$. Donc un point, quoiqu'infiniment répété, ne peut faire une étendue ou une ligne.

1350. Mais $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$. Donc il faut concevoir la ligne finie comme formée, non par des points, mais par une infinité de lignes infiniment petites.

1351. Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe concevoir le point, & qu'on ne doive même le ſuppoſer en Géométrie : mais il ne faut pas le concevoir comme élément ou partie infinitieme de la ligne ; & ſi la ligne eſt réellement compoſée de points, elle l'eſt d'une maniere qui nous échappe, & qui ne tombe pas ſous notre calcul. La Géométrie eſt toute intellectuelle, & a pour objet, non la Grandeur Phyſique préciſément, mais la Grandeur telle que nous ſommes obligés de la concevoir.

Que les Courbes ne ſont pas compoſées de points, ou que les Courbes rigoureuſes ne ſont pas réelles.

1352. S'il y a quelque ligne qu'il faille concevoir comme compoſée de points, c'eſt la Courbe. La nouvelle Géométrie qui conſidere les Courbes comme formées de droites infiniment petites, paſſe pour ne donner qu'une ſuppoſition infiniment approchante du vrai, une approximation infinie des Courbes réelles, qui n'ont aucunes parties droites, & par conſéquent ne ſont formées que de points. Ceux même qui ont fait naître, ou le plus perfectionné cette Géométrie,

M.E.C.D. 2017

ſemblent en convenir, & ils ſe contentent d'avoir donné un grand nombre de Méthodes infiniment avantageuſes, fondées ſur cette ſuppoſition. Cependant j'oſe avancer que les Courbes réelles ne ſont point compoſées de points, ou du moins ne peuvent être conçues ſous cette idée.

Une droite n'eſt point par elle-même diviſée en parties, elle n'a que celles que lui donne une diviſion arbitraire : mais la nature de la Courbe réelle conſiſtant dans une *flexion* continuelle, elle a par elle-même pour parties élémentaires & compoſantes, celles que cette flexion rend diſtinctes les unes des autres. Or il s'agit de ſavoir ſi ces parties ſont des points ou des droites infiniment petites.

Tous les Géometres conviennent qu'une Courbe eſt toujours différemment inclinée à ſon axe, ou, ce qui revient au même, que ſes parties élémentaires ſont toutes différemment poſées par rapport à cet axe. Ce ne ſont donc pas des points, car des points n'ont aucune poſition par rapport à une droite, ce ſont donc des lignes infiniment petites.

1353. Tout le monde convient auſſi que toutes les Courbes peuvent être décrites par des mouvemens, & il y en a un grand nombre, telles que les Spirales, les Cycloïdes, &c. que l'on conçoit néceſſairement comme décrites de cette maniere, & l'on convient de même que ces mouvemens, qui tracent des Courbes, doivent changer de direction à chaque inſtant. Or un mouvement ne peut changer de direction à chaque inſtant, s'il n'en a une pendant chaque inſtant, & pour en avoir une, il faut qu'il ſuive une ligne droite, qui ſera infiniment petite, puiſque la durée du mouvement, ſelon cette direction, ſera un inſtant infiniment petit. Donc, &c.

1354. Les Courbes réelles ne ſont donc que des Poligones rectilignes infinis, & les Courbes *rigoureuſes* ou *exactes*, qu'on oppoſoit à ces Courbes Polygones, ne ſont point réelles.

1355. Les Courbes rigoureuſes ne ſeroient en aucunes de leurs parties ni perpendiculaires, ni paralleles, ni inclinées à leur axe. Il eſt bien vrai que leurs Tangentes, tirées à leurs différens points, pourroient avoir ces différentes poſitions,

M.E.C.D. 2017

mais elles ne les auroient pas, parce qu'elles les auroie nt priſes de la Courbe, & ainſi elles ne repréſenteroient pas, comme tout le monde le conçoit, les différentes poſitions de la Courbe par rapport à ſon axe, elles auroient leurs poſitio ns quelconques par la ſeule néceſſité de paſſer par un cert ain point de la Courbe, & d'éviter tous les autres, & il y auroit des cas, où cette néceſſité ceſſant de leur déterminer une poſition, une Tangente pourroit avoir des poſitions différentes, ce qui certainement eſt abſurde. Par ex. ſoit une Courbe qui ne paſſe point au deſſous de ſon axe, & qui à ſon origine lui ſoit perpendiculaire, la Tangente pourra, avec une infinité de poſitions différentes, paſſer par ce ſeul point de l'origine de la Courbe ſans entrer dans ſon plan, ou être Sécante.

Il eſt vrai que dans toutes ces poſitions elle ne fera pas toujours avec la Courbe un angle de contingence infiniment petit. Mais d'où vient la néceſſité abſolue de faire cet angle? Elle le fera, quand il ſera néceſſaire qu'elle le faſſe pour ne pas devenir Sécante, ainſi qu'il arrive dans le Cercle : mais quand elle pourra ne le pas faire, & n'être pas Sécante, comme dans la préſente hypotheſe, elle ne laiſſera pas d'être toujours Tangente.

Il eſt évident que cet inconvénient n'a pas lieu à l'égard des Courbes Polygones, & que leurs côtés qui ont toujours une poſition, aſſujettiſſent les Tangentes qui ſont leurs prolongemens à avoir toujours celle qu'ils ont.

1356. On peut à cette occaſion faire une remarque. Selon la nouvelle Géométrie où les Courbes ſont Poligones, deux côtés contigus quelconques étant poſés, le prolongement de l'un d'eux eſt une Tangente de la Courbe au point qui eſt commun à ces deux côtés, ou qui eſt le ſommet de l'angle de contingence. Selon l'ancienne Géométrie, qui a conçu les Courbes comme rigoureuſes, la Tangente du même point ſera tirée par le point commun aux deux côtés, de ſorte qu'elle les laiſſera tous deux au deſſous d'elle. De-là il ſuit que l'angle de contingence, toujours infiniment petit dans l'une & l'autre hypotheſe, ſera deux fois plus grand dans la nouvelle

M.E.C.D. 2017

hypotheſe que dans l'ancienne, & par conſéquent auſſi ſa baſe, dont la détermination eſt fort importante dans la Théorie des Rayons des Développées, des Forces Centrales, &c. Il faut faire attention à cela pour ſe conduire ſelon l'hypotheſe qu'on a priſe, mais laquelle des deux que ce ſoit, elle ne jette point dans l'erreur, pourvu qu'on la ſuive bien, & qu'on ne paſſe pas ſans s'en appercevoir de l'une dans l'autre.

1357. Des Courbes formées de droites infiniment petites du 1er ordre, ſont eſſentiellement différentes des lignes droites finies formées des mêmes élémens, mais toujours poſés bout à bout ſelon la même direction, au lieu que dans les Courbes ils en changent toujours; par conſéquent il ſuffit de poſer pour élémens des Courbes de petites droites du 1er ordre ſans aller à des ordres inférieurs, ſi ce n'eſt que dans certains cas, comme dans celui de la courbure infinie, il faille paſſer le 1er ordre. On en a vû pluſieurs exemples. Nous pouvons ajouter en paſſant, que ce cas de la courbure infinie ſeroit inexprimable dans l'hypotheſe des Courbes rigoureuſes formées de points.

Que les lignes droites & les Courbes ne doivent être conçues que comme formées de droites infiniment petites.

1358. Si les Courbes ne ſont pas formées de points, mais de petites droites, les droites finies ne ſont formées non plus que de petites droites, car les Courbes & les droites ne different pas par la nature de leurs parties élémentaires, mais par la poſition ſeule de ces parties.

Que les Plans ne doivent être conçus que comme formés de plans infiniment petits.

1359. Venons aux Plans. Je dis qu'ils ne ſont pas formés préciſément de lignes. S'ils l'étoient, il faudroit concevoir un parallélogramme fini comme formé d'une infinité de lignes poſées ſur un de ſes côtés parallelement à l'autre, & toutes égales, dont la ſomme feroit l'aire du parallélogramme. Or la ſomme de toutes ces lignes finies égales, ſeroit infinie. Donc cette idée n'eſt pas vraie.

1360. Si on veut concevoir l'aire du Cercle comme formée par le nombre infini de ſes Rayons, il eſt certain que cette idée embarraſſe l'imagination: car on ne peut concevoir les rayons du Cercle que trop ſerrés vers le centre, poſés les uns ſur les autres, & ſe pénétrans, & au contraire trop

M.E.C.D. 2017

écartés vers la circonférence, & laiſſant entr'eux des vuides, qui ſont partie de l'aire, & n'y ſont pourtant pas comptés dans cette hypotheſe. De plus, ſi les rayons ſont l'aire du Cercle, les aires de deux Cercles concentriques inégaux, ſeront comme le rayon d'un Cercle au rayon de l'autre, puiſque les rayons ſont de part & d'autre en même nombre infini, & ne different que par leurs longueurs. Or tout le monde ſait que cela eſt faux.

1361. Le dénoûment de ces difficultés, eſt qu'il faut concevoir les Plans comme formés, non par des Lignes préciſément, mais par d'autres Plans élémentaires infiniment petits par rapport à ceux dont ils ſont élémens. Ainſi un parallélogramme fini, étant conçu comme formé par une infinité de plans, dont un des côtés eſt toujours une ligne finie $=1$, ſi l'on veut, & l'autre une ligne infiniment petite conſtante $=\frac{1}{\infty}$, la ſomme de cette infinité de plans élémentaires, ou l'aire du parallélogramme, ne ſera que finie, comme elle doit l'être.

1362. Que le parallélogramme ſoit formé de plans infiniment petits, tels qu'on vient de les poſer, ou de lignes égales, qui aient une longueur finie, & une largeur infiniment petite, c'eſt la même choſe: mais toujours on ne doit pas le concevoir comme formé de lignes mathématiques.

1363. Cette formation des Plans ſe concevra peut-être encore mieux dans l'Infini. Soit une ligne $=\infty$; ſon quarré ſera ∞^2, & par conſéquent l'aire du quarré infini, ne ſera que la ligne $=\infty$ répétée un nombre de fois $=\infty$, ou poſée parallelement à un côté ce nombre de fois. Or pour ne la poſer que ce nombre de fois, il faut néceſſairement laiſſer entr'elle poſée une 1re fois, & elle-même poſée une 2de des intervalles finis, & tous, ſi on le veut, pour plus de facilité, égaux à 1, car autrement on la poſeroit un nombre de fois $=\infty$ ſur une partie finie quelconque du côté infini auquel elle eſt perpendiculaire. Il reſtera donc entre la ligne $=\infty$, poſée un nombre de fois $=\infty$, un nombre $=\infty$ d'inter-

M.E.C.D. 2017

valles vuides finis, qui n'appartiendront point à l'aire du quarré infini, puiſqu'elle n'eſt formée que par la ligne répétée. Cependant ces intervalles finis en nombre $= \infty$, font un eſpace infiniment plus grand que celui qui eſt rempli par la ligne mathématique infiniment répétée ; on néglige donc dans l'aire du quarré une quantité infiniment plus grande que celle qu'on y compte, ce qui eſt une abſurdité inſoutenable.

Il faut donc concevoir l'aire du quarré infini comme formée par des plans tous égaux, dont un des côtés eſt $= \infty$, & l'autre $= 1$, qui ſont infiniment petits par rapport à ∞^2, & qui étant en nombre $= \infty$ font la ſomme ∞^2, moyennant quoi il ne reſte point de vuides dans le quarré, & toutes les difficultés s'évanouiſſent.

1364. Cette multiplication d'une ligne mathématique par $\frac{1}{\infty}$ dans le Fini, & par 1 dans l'Infini pour avoir les plans élémentaires, n'eſt néceſſaire, que quand on veut avoir l'aire abſolue des plans totaux, ou s'en former une idée juſte : mais elle n'eſt pas néceſſaire pour avoir le rapport d'un plan à un autre du même ordre, car étant toujours la même, elle ne change rien au rapport des ſommes infinies des lignes mathématiques dans les cas qu'on vient de voir. C'eſt pour cela qu'on a pu croire que ces ſommes faiſoient ſeules les aires.

1365. Mais cette même idée qui ſeroit quelquefois ſans conſéquence, conduiroit à une erreur groſſiere dans le Cercle conçu comme formé par ſes rayons (1360), il faut le concevoir formé d'une infinité de Triangles iſoſceles, qui ont leur ſommet au centre, y font un angle infiniment petit, compris entre deux rayons, & dont la baſe eſt un arc infiniment petit de la circonférence. La circonférence étant nommée c, & le rayon r, un arc infiniment petit eſt $\frac{c}{\infty}$, & un Triangle élémentaire eſt $\frac{cr}{2\infty}$, & la ſomme des triangles, ou l'aire du Cercle eſt $\frac{cr}{2\infty} \times \infty = \frac{cr}{2}$.

1366. Soit un plus grand Cercle, dont la circonférence

M.E.C.D. 2017

soit C, & le rayon R, on aura pour les deux aires $\frac{CR}{2}$ & $\frac{cr}{2}$, & parce que $C.c :: R.r$, leur rapport sera celui de CC à cc, ou de RR à rr.

C'est dans ce cas du Cercle, ou en général des plans formés par des lignes concourantes en un point, que la nécessité de concevoir les plans comme formés par des plans élémentaires, est la plus sensible. Les lignes mathématiques ne donneroient ni les aires sans pénétration de lignes & sans vuides, ni les rapports des aires.

Et pareillement les Solides.

1367. Puisque les lignes sont formées par des lignes, & les plans par des plans, l'analogie conduit nécessairement à conclurre que les Solides seront formés par des Solides qui seront pareillement élémentaires, & ce n'est pas la peine de le prouver par les inconvéniens qui naîtroient des plans mathématiques conçus comme élémens des Solides. Un Cylindre est donc la somme d'une infinité de Cylindres infiniment petits, dont la base est le Cercle du Cylindre total, & la hauteur est une partie infiniment petite de sa hauteur. Un Cone est la somme d'une infinité de Cercles croissans depuis son sommet, dont chacun est multiplié par une partie infiniment petite de l'axe du Cone.

1368. Que si l'on concevoit le Cylindre comme formé par une infinité de parallélogrammes qui concourroient à son axe, & l'auroient pour commune Section, ainsi que l'on fait quelquefois, cette idée seroit fausse en elle-même, & pour la rectifier, il faut concevoir des Prismes Triangulaires, dont l'angle sera infiniment petit, & qui concourront à l'axe du Cylindre, de la même maniere qu'on a conçu des Triangles comme formans le Cercle.

1369. Pareillement si l'on veut concevoir le Cone comme formé par des élémens concourans à son axe, ce ne doivent point être des Triangles, mais des Prismes Triangulaires infiniment petits, coupés par un plan diagonal, ce qui est très-aisé à imaginer.

1370. De tout cela on peut tirer cette réflexion : puisque

M.E.C.D. 2017

nous ſommes obligés de concevoir les lignes comme formées par de moindres lignes, les plans par de moindres plans, &c. nous connoiſſons les lignes, les plans, &c. tout formés, mais non pas leurs véritables élémens. Et ſi nos connoiſſances ſont ſi bornées ſur l'être ſimplement Géométrique des Corps, à plus forte raiſon le ſeront-elles ſur le Phyſique, ou plutôt c'eſt parce qu'elles ſont extrememement bornées ſur le Phyſique, qu'elles le ſont tant ſur le Géométrique.

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

SECTION

M.E.C.D. 2017

SECTION VI.

Sur les Eſpaces Aſymptotiques en général, & les Solides qui en ſont produits.

LEs premiers Géometres qui ont trouvé des Aſymptotes, ont dû être étonnés de voir des Courbes qui s'approchoient à l'infini de ces lignes droites, & ne les pouvoient joindre.

Quand on eſt venu à conſidérer les eſpaces Aſymptotiques, & qu'on les a trouvés infinis, on n'en a point été étonné, parce que ces eſpaces étant toujours d'une étendue infinie, il a paru naturel qu'ils euſſent auſſi une aire infinie. Tels ſont les deux eſpaces Aſymptotiques de l'Hyperbole ordinaire.

Mais quand on a trouvé ces eſpaces finis, quoiqu'infiniment étendus, comme l'eſt toujours l'un des deux de toute Hyperbole qui paſſe le 2^d^ degré, & comme le ſont ceux de la Logarithmique, de la Ciſſoïde, de la Conchoïde, on en a été ſurpris.

Et on l'a été encore plus, quand on a vû qu'en faiſant tourner l'eſpace Aſymptotique infini de l'Hyperbole ordinaire autour de l'Aſymptote immobile, ce qui produit un Solide d'une certaine courbure, ce Solide étoit fini. Car apparemment on s'attendoit, & on devoit s'attendre à le trouver infini.

Toutes ces merveilles apparentes ne viennent que de la nature de l'Infini peu approfondie: on va voir qu'elles diſparoiſſent abſolument dès qu'on remonte aux principes que nous avons établis, & qu'il n'y auroit rien de ſurprenant, que le contraire de ce qui l'a paru.

1371. Il n'y a point d'eſpace Aſymptotique qui ne puiſſe être conçu comme égal à un parallélogramme rectangle, dont l'Aſymptote, qui eſt une ligne infinie, ſera un des côtés, que j'appelle la baſe. Ainſi tout ce qui peut convenir à ce rectangle, peut convenir auſſi à l'eſpace Aſymptotique.

Qu'un Eſpace infiniment étendu n'eſt point pour cela déterminé à être un infini de

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE E. TORROJA

M.E.C.D. 2017

l'ordre dont eſt cette étendue, mais qu'il peut être ou infini d'un ordre quelconque, ou fini, ou infiniment petit d'un ordre quelconque.

Si cette baſe eſt déterminée à être de l'ordre de ∞, la hauteur du rectangle étant abſolument indéterminée, il eſt clair que ſelon l'ordre dont ſera cette hauteur, c'eſt-à-dire, ſelon que je multiplierai ∞ par n, nombre fini indéterminé, ou par ∞^n, ou par $\frac{1}{\infty^n}$, j'aurai dans le 1er cas un rectangle infini du 1er ordre, dans le 2^d^ un infini d'un ordre quelconque, dans le 3me un fini, ſi $n = 1$, & pour toutes les autres valeurs de $n > 1$, un infiniment petit d'un ordre quelconque. Ainſi le rectangle, quoiqu'infinimentétendu à cauſe de ſa baſe, eſt indifférent d'ailleurs à tous les ordres poſſibles de grandeur.

1372. Si la baſe du rectangle n'eſt point déterminée à être $= \infty$, mais qu'elle puiſſe être $= \infty^2$, $= \infty^3$, &c. il eſt évident que, ſelon les différentes hauteurs, j'aurai encore des rectangles de tous les ordres poſſibles.

Et pareillement un Solide, dont la hauteur, ou la baſe ſera infinie.

1373. Il en ira de même d'un Parallélépipede, dont la baſe plane ſera d'un ordre quelconque d'Infini, car ſelon les différentes hauteurs il pourra être de tous les ordres poſſibles; & ce ſera la même choſe pour un Solide que l'on concevra comme formé par la révolution d'une baſe plane infinie quelconque autour d'un axe ou ligne immobile; car ce Solide ſera un Cylindre, dont la baſe circulaire étant telle qu'on voudra, il pourra être d'un ordre quelconque ſelon la hauteur qu'il aura. Il en ira de même ſi la hauteur étant un Infini quelconque, ſa baſe eſt indéterminée. Ainſi l'on voit déja en général que ni les Parallélogrammes pour avoir un côté infini, ni les Solides pour avoir des baſes ou des hauteurs infinies, ne doivent pas être plutôt infinis que finis, ou même infiniment petits.

Mais avant que de pouvoir rien déterminer en détail ſur la grandeur ou l'ordre des différens Eſpaces ou Solides Aſymptotiques, il faut avoir approfondi, plus que nous n'avons encore fait, la nature de l'Aſymptotiſme.

Conſideration particu-

1374. Soit la Courbe MC, Aſymptotique quelconque, qui a pour axe, & pour Aſymptote $AB = \infty$, & lui devient

M.E.C.D. 2017

parallele. De tout ce qui a été établi dans les art. 799, &c. 809, 1106, 1109, il ſuit que toute Courbe Aſymptotique n'eſt Courbe que dans une étendue finie indéterminable, que je ſuppoſe qui ſe termine au point μ, & qu'après cela elle eſt droite dans tout le cours infini μC, mais droite non exacte (1184). Sa rectitude conſiſte en ce qu'après des pas finis elle ne fait que des détours infiniment petits, & ſa rectitude non exacte, en ce qu'elle les fait. Si l'on conçoit donc que la partie infinie pB de l'axe, correſpondante au cours μC, ſoit diviſée en parties finies égales, il faut concevoir qu'à chacune de ces parties répond dans μC, une ligne finie exactement droite, qui s'eſt détournée infiniment peu de celle qui la précédoit, & dont celle qui la ſuit ſe détourne auſſi infiniment peu. Et pour concevoir la Courbe totale $M\mu C$ diviſée uniformément, il faudra concevoir que Ap, portion finie indéterminable de l'axe, qui répond au cours $M\mu$, où la Courbe eſt véritablement Courbe, eſt auſſi diviſée en mêmes parties finies égales que pB.

liére de la nature de l'Aſymptotiſme.

FIG. XVIII.

De-là il ſuit que toutes les Ordonnées AM, pm, $p\mu$, &c. à l'infini ſont finiment diſtantes, & que celles qui répondent au cours $M\mu$, où la Courbe eſt véritablement Courbe, ont entr'elles des différences finies, mais que celles qui paſſent le point μ, ou répondent au cours μC, n'ont que des différences infiniment petites, puiſqu'alors la Courbe a changé de nature, & qu'à cauſe du détour infiniment petit après un pas fini en ligne droite, deux Ordonnées conſécutives du cours μC, finiment diſtantes, ſont dans le même cas que deux conſécutives du cours $M\mu$, qui ſeroient infiniment proches.

1375. Comme μC eſt ligne droite dans ſon étendue infinie, elle a dans toute cette étendue la même poſition à l'égard de l'axe AB, & puiſque la Courbe eſt ſuppoſée lui devenir parallele, elle l'eſt donc dans toute l'étendue μC. Mais en même-temps comme elle n'eſt pas ligne droite exacte, elle n'a pas exactement cette égalité de poſition. Son paralléliſme eſt non abſolu, & il eſt néceſſairement toujours croiſſant dans la ſuppoſition préſente, dès qu'il eſt non abſolu.

M.E.C.D. 2017

1376. Il peut être croiſſant de grandeur & d'ordre. Il ne l'eſt que de grandeur, tant que les différences toujours néceſſairement décroiſſantes, ne décroiſſent que de grandeur; & il eſt croiſſant de grandeur & d'ordre, quand les différences viennent à décroître auſſi d'ordre. Ainſi la Courbe ou droite non exacte μC, toujours parallele à AB, aura autant de paralléliſmes différens en ordre, & toujours plus grands, que les différences toujours infiniment petites des Ordonnées auront de différens ordres.

1377. La courbe n'eſt pas ſeulement toujours plus parallele à ſon axe, ou Aſymptote, mais elle en eſt toujours auſſi plus proche. Cette proximité eſt croiſſante de grandeur & d'ordre comme le paralléliſme, c'eſt-à-dire, que ſi la Courbe dans une certaine étendue eſt à une diſtance finie de l'axe, elle en ſera enſuite à une diſtance de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, enſuite à une diſtance de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, &c. C'eſt la nature, ou l'Equation de la Courbe qui détermine la plus grande proximité finale, auſſi-bien que le plus grand paralléliſme final.

1378. La proximité dépend de la grandeur des Ordonnées, comme le paralléliſme dépend de la grandeur des différences; & la Courbe qui doit arriver à une certaine proximité finale, & à un certain paralléliſme final, y arrive par des Ordonnées, & par des différences de tous les ordres qui ſont depuis le fini, par où ces ſuites commencent toujours, juſqu'à l'ordre qui doit produire & cette proximité & ce paralléliſme.

1379. L'Aſymptotiſme, qui demande que dans l'étendue infinie μC la Courbe ſoit ligne droite, & ſelon la ſuppoſition préſente, ligne droite parallele à l'Aſymptote, demande auſſi que cette même Courbe ſe confonde avec l'Aſymptote, & arrive au moins à n'en être qu'à une diſtance infiniment petite du 1er ordre. La confuſion de la Courbe avec l'Aſymptote, ou ſa proximité infinie, eſt auſſi néceſſaire que la rectitude de la Courbe, ou ſon égalité de poſition par rapport à l'Aſymptote; & par conſéquent la Courbe tend non-ſeule-

M.E.C.D. 2017

ment en même-temps, mais encore également à l'un & à l'autre de ces Termes, & par conſéquent lorſque ſa tendance à l'un change d'ordre, ſa tendance à l'autre en change auſſi, c'eſt-à-dire, que les Ordonnées & les différences baiſſent d'ordre en même-temps dans le cours μC, où ſe paſſe tout ce qui appartient préciſément à l'Aſymptotiſme.

1380. Le paralléliſme final de la Courbe n'eſt d'un certain ordre, que parce que deux Ordonnées conſécutives y ont une différence de l'ordre correſpondant d'infiniment petit. Or alors il faut néceſſairement concevoir que les deux Ordonnées ſont de l'ordre immédiatement ſupérieur. Donc en remontant toujours vers l'origine de la Courbe dans le cours μC, ou trouvera toujours les Ordonnées d'un ordre immédiatement ſupérieur à celui des différences, puiſque les unes & les autres ont changé d'ordre en même-temps (1379). Donc les différences qui ſont après le point μ, étant toutes infiniment petites (1374), & celles qui le ſuivent immédiatement étant du 1er ordre, puiſque les différences paſſent par tous les ordres depuis le fini (1378), les Ordonnées ſont encore alors finies. Donc la Courbe procéde ainſi après le point μ. Des Ordonnées finies, & des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & des différences de celui de $\frac{1}{\infty^2}$, &c. juſqu'aux plus petites Ordonnées ou la plus grande proximité, & juſqu'au plus petites différences, ou le plus grand paralléliſme que la Courbe puiſſe avoir.

Que l'Aſymptotiſme eſt ſuſceptible de plus & de moins, & à l'infini.

1381. Comme la proximité finale, & le paralléliſme final ne ſont pas les mêmes dans toutes les Courbes Aſymptotiques, ainſi qu'on l'a déja vû pluſieurs fois, l'Aſymptotiſme n'y eſt donc pas le même, & il ſera ſuſceptible de plus & de moins. Une plus grande proximité finale, & un plus grand paralléliſme final, feront un plus grand Aſymptotiſme, & même infiniment plus grand, s'ils ſont plus grands en ordre.

1382. Il eſt évident qu'un Aſymptotiſme ne peut devenir infiniment plus grand par le paralléliſme final, ſans le devenir

M.E.C.D. 2017

en même-temps par la proximité finale, & réciproquement, mais il faut qu'il le devienne en même-temps par les autres paralléliſmes, & par les autres proximités par où il le peut devenir; car tout eſt lié dans le cours μC, qui fait l'Aſymptotiſme. Mais cela va être mieux développé.

1383. Une Courbe Aſymptotique rapportée à ſon axe, ou Aſymptote, à laquelle elle devient parallele, a ſon dernier dy de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ au moins, les dx étant de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & conſtans (800 & 808). Donc la Courbe qui n'aura ſon dernier dy, que de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, aura le moindre Aſymptotiſme poſſible, car je ne conſidererai d'abord les Aſymptotiſmes que ſelon les ordres potentiels. Ici où les dx, c'eſt-à-dire, les intervalles des Ordonnées, ſont finis, les différences ou les dy hauſſent par tout d'un ordre, & par conſéquent la Courbe qui aura le moindre Aſymptotiſme, aura ſa derniere différence, ou, ſi l'on veut, ſes dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & ſes dernieres Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc avant cela il y aura eu dans le cours μC des Ordonnées finies, dont les différences étoient de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & rien de plus dans tout le cours μC.

1384. Une Courbe eſt terminée dès qu'elle arrive aux plus grandes ou aux plus petites grandeurs, dont ſon Equation la rende capable. Donc celle-ci eſt terminée dès qu'elle arrive à une différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & à deux Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$; & en effet, ſi on la conçoit pouſſée plus loin par des Ordonnées décroiſſantes de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & des différences pareillement décroiſſantes de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, il n'y aura nulle raiſon de la concevoir terminée, que quand elle aura deux Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, dont la différence ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, or cela eſt impoſſible par ſon Equation, donc elle eſt terminée où nous diſons. Cependant ſon cours μC

M.E.C.D. 2017

eſt néceſſairement infini, donc il eſt entierement rempli par des Ordonnées finies décroiſſantes, qui ont des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ces deux Suites aboutiſſant l'une à deux Ordonnées de l'orde de $\frac{1}{\infty}$, & l'autre à une différence $= \frac{1}{\infty^2}$.

1385. Il eſt clair que c'eſt là en effet le moindre Aſymptotiſme poſſible en ordre, car jamais une Courbe ne peut être moins proche de ſon axe, que quand elle en eſt toujours à une diſtance finie pendant tout ſon cours infini, & jamais étant parallele elle ne peut l'être moins, que quand des différences d'Ordonnées finiment diſtantes ne ſeront que des $\frac{1}{\infty}$, & cela dans tout ſon cours infini & Aſymptotique, excepté le dernier point de ce cours.

1386. Si la derniere différence de la Courbe, priſe toujours de la même maniere, eſt $\frac{1}{\infty^3}$, ce qui rendra les deux Ordonnées correſpondantes, par où elle ſe terminera (1384), de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, elle aura donc précédemment des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty^2}$, & avant celles-là encore juſqu'au point μ des Ordonnées finies, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty}$. Mais il eſt important de ſavoir ſi le nombre des termes de différens ordres ſera dans toutes ces deux Suites infini, ou fini dans l'une, & infini dans l'autre.

L'Aſymptotiſme de cette 2de Courbe eſt infiniment plus grand que n'étoit celui de la 1re, puiſque la 2de ſe termine par une proximité, & un paralléliſme infiniment plus grand que dans la 1e. La 1re avoit le moindre Aſymptotiſme poſſible, parce que dans un cours infini elle avoit une infinité d'Ordonnées finies, & dont les différences n'étoient que des $\frac{1}{\infty}$ (1385), donc la 2de ne doit pas avoir ce défaut, & elle en doit être infiniment éloignée, donc elle n'aura après le point μ, qu'un nombre fini d'Ordonnées finies, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty}$, car il faut qu'elle ait toujours après le point μ, des Ordonnées finies (1380). Après ces Ordonnées

M.E.C.D. 2017

finies, il en viendra donc un nombre infini de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont les différences ſeront des $\frac{1}{\infty^2}$, & enfin viendront deux Ordonnées de l'ordre $\frac{1}{\infty^2}$, dont la différence ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, & la Courbe ſe terminera là. On voit aſſez comment cela ſatisfait à tout, & éclaircit l'art. 1382.

1387. Il eſt très-aiſé de voir, en ſuivant ces idées, que ſi la derniere différence de la Courbe eſt $\frac{1}{\infty^4}$, elle aura après le point μ un nombre fini d'Ordonnées finies, enſuite un nombre encore fini, mais plus grand, d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, enſuite une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, & enfin deux dernieres de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. On ne pourroit héſiter d'abord que ſur le nombre fini des Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, mais on verra ſans peine que le nombre infini d'Ordonnées de cet ordre étoit le défaut de l'Aſymptotiſme de la Courbe de l'art 1386, & qu'il faut que la Courbe du preſent art. s'en éloigne infiniment. Au reſte ce nombre fini d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ doit être plus grand dans la preſente Courbe que le nombre fini précédent des Ordonnées finies, car le nombre des grandeurs de différens ordres eſt croiſſant de l'origine vers l'extrémité, puiſque le dernier ordre a toujours un nombre infini de grandeurs, les deux dernieres qui ſont d'un ordre inférieur ne devant être conçues que comme le Terme auquel ce dernier ordre tendoit, & eſt arrivé.

1388. Donc en général la derniere différence de la Courbe étant $\frac{1}{\infty^n}$, ou ſes deux dernieres Ordonnées $\frac{1}{\infty^{n-1}}$, il y aura toujours après le point μ des Ordonnées d'autant d'ordres, à commencer par le Fini, & toujours en nombre fini, mais croiſſant, dans chaque ordre, qu'il pourra y avoir d'ordres depuis $\frac{1}{\infty^{n-n}} = \frac{1}{\infty^0} = 1$ juſqu'à $\frac{1}{\infty^{n-2}}$, qui contiendra un nombre infini d'Ordonnées, & ſe terminera par les deux dernieres $= \frac{1}{\infty^{n-1}}$. n ne peut être ici moindre que

M.E.C.D. 2017

que 2 (1383), & s'il lui eſt égal, le premier ordre, qui eſt $\frac{1}{\infty^{n-n}}$, ſera auſſi le dernier, qui eſt $\frac{1}{\infty^{n-2}}$, & par conſéquent il aura une infinité d'Ordonnées, & comme il eſt $=1$, ces Ordonnées ſeront finies, & les deux dernieres $=\frac{1}{\infty}$, ce qu'on a trouvé dans les art. 1383 & 1384. Si $n=4$, il y aura des Ordonnées en nombre fini croiſſant dans les ordres $\frac{1}{\infty^{n-4}}=1$, & $\frac{1}{\infty^{n-3}}=\frac{1}{\infty}$, & en nombre infini dans l'ordre $\frac{1}{\infty^{n-2}}=\frac{1}{\infty^2}$, qui ſe terminera par deux Ordonnées $=\frac{1}{\infty^3}$, ainſi qu'on l'a vû dans l'art. 1387.

1389. n peut être ſi grand qu'on voudra, car il y a des Courbes Aſymptotiques, telles que la Logarithmique (957), dont on peut prendre la derniere différence ou Ordonnée d'un ordre d'infiniment petit ſi bas qu'on voudra. Donc l'Aſymptotiſme peut aller à l'infini de Courbe en Courbe, croiſſant toujours d'ordre, ou devenant toujours infini par rapport à ce qu'il étoit précédemment.

1390. A meſure que n ſera plus grand, la Courbe aura, après le point μ, un plus grand nombre de différens ordres d'Ordonnées toujours conſécutifs, & ſans ſauts; d'où il ſuit que le nombre des grandeurs contenues dans ces différens ordres ſera toujours moindre, l'axe étant ſuppoſé le même pour toutes les Courbes Aſymptotiques. Et en effet, puiſqu'elles commencent toutes, après le point μ, par avoir des Ordonnées finies, & des différences $=\frac{1}{\infty}$, c'eſt-à-dire, par la moindre proximité & le moindre paralléliſme poſſible, & que tout doit enſuite être conduit par degrés, l'Aſymptotiſme croiſſant d'ordre demande qu'elles aient toujours un plus grand nombre de proximités toujours plus grandes en ordre, & de paralléliſmes plus grands en ordre.

Quelle eſt la Courbe du plus grand Aſymptotiſme poſſible.

1391. Le dernier ordre d'Ordonnées qui en contient une infinité, doit en contenir toujours une moindre infinité à meſure que n eſt plus grand. Cette infinité qui diminue

M.E.C.D. 2017

toujours, doit devenir enfin un nombre fini, & même elle n'eſt que 1, quand $n = \infty$, car alors la Courbe a des Ordonnées de tous les ordres, & comme elle n'en a dans la ſuppoſition préſente qu'un nombre $= \infty$, elle n'en peut avoir qu'une dans chaque ordre.

Cette Courbe ſeroit une Logarithmique, dont les Ordonnées ſeroient $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{\infty^0} = 1.\ \frac{1}{\infty^1}.\ \frac{1}{\infty^2}$, &c. $\frac{1}{\infty^\infty}$. Il eſt clair que cette Logarithmique ſeroit la plus baſſe de toutes les Logarithmiques poſſibles, que par ex. elle le ſeroit plus que $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{2^0}.\ \frac{1}{2^1}.\ \frac{1}{2^2}$, &c. $\frac{1}{2^\infty}$, ou que $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{3^0}.\ \frac{1}{3^1}.\ \frac{1}{3^2}$, &c. $\frac{1}{3^\infty}$, ou que, &c. Ce ſeroit donc la Courbe du plus grand Aſymptotiſme poſſible.

Et celle du plus petit.

1392. Le moindre Aſymptotiſme, j'entens toujours en ordre potentiel, eſt celui de la Courbe des art. 1383, 1384 & 1385, qui peut être une Hyperbole ordinaire (960), dont les Ordonnées, paſſé le point μ, ſeront toutes finies décroiſſantes, juſqu'aux deux dernieres $= \frac{1}{\infty}$. Donc en comparant cette Hyperbole avec la Logarithmique de l'art. précédent, on aura les deux Aſymptotiſmes extremes, & il ſera facile de juger de tout l'entre-deux.

1393. Le point μ de la Courbe générale eſt celui où la Courbe commence à être parallele de ſon moindre paralléliſme, parce que les différences y deviennent $= \frac{1}{\infty}$. Si on conçoit que la Logarithmique de l'art. 1391 ſoit décrite, elle ne ſera point parallele, mais inclinée à l'axe par ſa 1re & ſa 2de Ordonnée, qui ſont 1 & $\frac{1}{\infty}$, & dont la différence eſt 1. Mais elle deviendra parallele par ſa 2de & ſa 3me Ordonnée, qui ſont $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$, & dont la différence eſt $\frac{1}{\infty}$. Donc le point μ ſeroit à une diſtance finie déterminable de l'origine de la Logarithmique. D'un autre côté il eſt certainement à une diſtance finie indéterminable de l'origine de l'Hyperbole. Donc, dans toutes les Courbes Aſymptotiques intermédiaires, le point μ s'eſt toujours approché de leur origine à meſure que leur Aſymptotiſme étoit plus grand. Il convient effectivement

M.E.C.D. 2017

que des Courbes plus Aſymptotiques commencent plutôt à l'être, c'eſt-à-dire, ſoient plutôt paralleles à l'axe.

1394. De l'Hyperbole à la Logarithmique, le point μ ne fait qu'un chemin fini.

1395. Le dernier ordre des Ordonnées d'une Courbe Aſymptotique ne ceſſe d'en contenir une infinité, que quand dans l'expoſant de la derniere différence $= \frac{1}{\infty^n}$, n eſt un Fini indéterminable, ce qui ne ſe peut trouver dans aucune Courbe connue.

1396. Toute cette Théorie ſera confirmée par les Suites de nombres $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, $\frac{1}{A^3}$, &c. que l'on a vues dans la Sect. IV. Tant que leur expoſant eſt Fini déterminable, elles repréſentent parfaitement les Courbes Aſymptotiques, dont la derniere différence eſt $\frac{1}{\infty^n}$, n étant Fini déterminable.

Confirmation de la Théorie précedente par les Suites $\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{A^3}$, *&c.*

$\frac{1}{A}$ qui eſt $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$, & en général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, n étant ſucceſſivement tous les nombres naturels, a pour formule générale de ſes différences $\frac{1}{nn+n}$, qui devient $= \frac{1}{\infty^2}$, lorſque $n = \infty$. Donc $\frac{1}{A}$ a ſa derniere, ou ſes dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, auxquelles répondent des nombres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc elle aura auſſi des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, auxquelles répondront des nombres finis, & en effet, dès que n eſt un nombre fini indéterminable ſi grand, qu'étant quarré il devient infini, les deux nombres $\frac{1}{n}$ & $\frac{1}{n+1}$ ſont finis, & leur différence $\frac{1}{nn+n}$ devient $\frac{1}{nn} = \frac{1}{\infty}$. On a déja vu un cas tout pareil dans les art. 523 & 524.

Il eſt donc évident que $\frac{1}{A}$ ayant à ſon origine des nombres finis, dont les différences ſont finies, arrive enſuite à un nombre fini indéterminable n, qui n'eſt par conſéquent qu'à une diſtance finie indéterminable de l'origine, & tel que lui & les ſuivans n'ont plus que des différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$.

Ce nombre n repréſente le point μ d'une Courbe Aſympto-

M.E.C.D. 2017

tique. Les différences $= \frac{1}{\infty}$ qui viennent après n, repréſentent le premier & moindre paralléliſme, que la Courbe prend après le point μ, n'étant alors encore qu'à une proximité finie de l'axe, parce qu'elle a des Ordonnées finies.

Comme A a une infinité de nombres qui, étant quarrés, deviennent infinis, $\frac{1}{A}$ en a une infinité de finis qui ont des différences $= \frac{1}{\infty}$, & le paralléliſme de la Courbe repréſentée par $\frac{1}{A}$, tient donc une étendue infinie.

Enfin $\frac{1}{A}$ a une infinité de termes infiniment petits de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, qui ont des différences $= \frac{1}{\infty^2}$, & c'eſt là pour la Courbe un ſecond paralléliſme plus grand que le premier, infiniment étendu auſſi, & même plus étendu, car les ∞ de A, & par conſéquent les $\frac{1}{\infty}$ de $\frac{1}{A}$ ſont en nombre infini plus grand que les finis. Mais cette 2de & derniere infinité de termes de $\frac{1}{A}$, qu'il eſt bon de conſidérer dans $\frac{1}{A}$ priſe ſimplement comme Suite de nombres, n'eſt plus à conſidérer dans la Courbe repréſentée par $\frac{1}{A}$, & il ne faut prendre par la raiſon de l'art. 1384, que les deux premiers $\frac{1}{\infty}$ de leur nombre infini.

Il ne faut pas oublier de remarquer que dans $\frac{1}{A}$, dès que n, quoique fini, eſt ſi grand qu'il deviendroit infini par l'élévation au quarré, les différences deviennent $= \frac{1}{\infty}$, & que dès-que n eſt $= \infty$, les différences deviennent $= \frac{1}{\infty^2}$, ce qui confirme l'art. 1379.

1399. On raiſonnera de même ſur $\frac{1}{A^2}$, qui eſt en général $\frac{1}{nn}$, $\frac{1}{nn+2n+1}$, & dont les différences ſont $\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}$.

Dès que n eſt un fini indéterminable, qui par l'élévation à la 4me puiſſance, il faut ſouſentendre, *& non par une moindre élévation*, devient infini, la différence eſt $\frac{2n+1}{\infty}$, de l'ordre

M.E.C.D. 2017

de $\frac{1}{\infty}$. C'eſt là où eſt le point μ, & il eſt plus près de l'origine de $\frac{1}{A^2}$ qu'il n'étoit de celle de $\frac{1}{A}$, car un nombre n de la Suite naturelle A, qui ne devient infini qu'étant élevé à la puiſſance 4, eſt plus petit que celui qui devient infini, étant élevé à la puiſſance 2. Ce qui revient à l'art. 1393, & le confirme. Quand n eſt ſi grand qu'il devient infini, étant élevé à la puiſſance 2, il devient donc un infini du 2^d ordre, étant élevé à la puiſſance 4, & $n^4 = \propto^2$, donc la différence eſt alors $\frac{2n+1}{\propto^2}$, de l'ordre de $\frac{1}{\propto^2}$, & les nombres correſpondans ſont des $\frac{1}{nn} = \frac{1}{\propto}$. Enfin quand $n = \infty$, les nombres ſont $\frac{1}{\propto^2}$ ou $\frac{1}{\infty^2}$, & les différences ſont $\frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3} = \frac{2}{\infty^3}$, ce qui eſt la même choſe que la Courbe de l'art. 1386, pourvû que l'on retranche les $\frac{1}{\infty^2}$ de $\frac{1}{A^2}$ qui ſont en nombre infini, & que l'on n'en conſerve que les deux premiers. $\frac{1}{A^2}$ ayant une infinité de nombres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ (364), il reſte à la Courbe $\frac{1}{A^2}$ un cours infini parallele cauſé par une infinité de différences $= \frac{1}{\infty^2}$, & terminé par une ſeulement de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ qui fait le plus grand, & dernier paralléliſme. D'un autre côté la Suite $\frac{1}{A^2}$ n'a qu'un nombre Fini de termes finis à ſon origine (363), comme la Courbe n'a qu'un nombre fini d'Ordonnées finies.

On voit ici, comme dans l'art. précédent, qu'après le point μ, où les Ordonnées finies commencent à avoir des différences $= \frac{1}{\infty}$, les Ordonnées & les différences baiſſent toujours d'ordre en même temps.

1398. Il en eſt de même de la Suite $\frac{1}{A^3}$, qui eſt $\frac{1}{n^3}$, $\frac{1}{n^3+3n^2+3n+1}$, & dont les différences ſont $\frac{3n^2+3n+1}{n^6+3n^5+3n^4+n^3}$.

Quand $n^6 = \propto$, n^3 eſt encore Fini, & par conſéquent les

M.E.C.D. 2017

nombres $\frac{1}{n^3}$ ſont finis, & leurs différences $\frac{3n^2+3n+1}{\infty}$ ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Quand $n^3 = \infty$, les nombres ſont $\frac{1}{\infty}$, & les différences $\frac{3n^2+3n+1}{\infty^2}$ de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, car ſi $n^3 = \infty$, $n^6 = \infty^2$. Quand $n^{\frac{3}{2}} = \infty$, $n^3 = \infty^2$, & les nombres ſont $\frac{1}{\infty^2}$, & les différences ſont $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{\infty^4}$, car alors $n = \infty^{\frac{2}{3}}$, $n^2 = \infty^{\frac{4}{3}}$, & $n^6 = \infty^4$. Or $\frac{\infty^{\frac{4}{3}}}{\infty^4} = \frac{1}{\infty^{\frac{8}{3}}}$, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Enfin quand $n = \infty$, les nombres ſont $\frac{1}{\infty^3}$, & les différences $\frac{\infty^2}{\infty^6} = \frac{1}{\infty^4}$.

Ce ſera encore la même choſe pour $\frac{1}{A^4}$, dont les nombres ſont $\frac{1}{n^4}$, $\frac{1}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1}$, & les différences $\frac{4n^3+6n^2+4n+1}{n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4}$, & pour toutes les autres $\frac{1}{A^n}$ ſuivantes, leur expoſant n étant Fini déterminable.

1399. Quelque nombre fini déterminable que ſoit n, les A^n n'ont un nombre infini de grandeurs que dans leurs deux derniers ordres (227), & par conſéquent auſſi les $\frac{1}{A^n}$. Quand ces $\frac{1}{A^n}$ repréſentent des Courbes Aſymptotiques, il en faut retrancher les grandeurs du dernier ordre, en ne conſervant que les deux premieres, & alors les Courbes $\frac{1}{A^n}$ n'ont qu'un dernier ordre où le nombre des Ordonnées ſoit infini ſelon l'art. 1388.

Détermination des eſpaces Aſymptotiques infinis, ou finis, & plus ou moins grands dans leur ordre. Li-

1400. Tout cela poſé, il eſt très-facile de voir quand les Eſpaces Aſymptotiques ſeront finis ou infinis.

Je diviſe l'eſpace total $ABCMA$ en deux parties, l'une $ApμMA$, que j'appelle P, parce qu'elle eſt la premiere, l'autre $pBCμp$, ou la ſeconde, que j'appelle S. P eſt toujours un eſpace fini, égal à quelque rectangle, qui auroit pour

M.E.C.D. 2017

baſe Ap, & pour hauteur quelque Ordonnée moyenne entre AM & $p\mu$. S eſt toujours un eſpace infiniment étendu à cauſe de ſa baſe $pB = \infty$, reſte à ſavoir quelle eſt ſa hauteur, ou plutôt quels ſeront les eſpaces partiaux dont il peut être compoſé.

mites où ſont compris les eſpaces Aſymptotiques infinis.

Après le point μ, viennent toujours des Ordonnées finies. Si elles ſont en nombre infini, comme dans la Courbe des art. 1383, 1384, & 1385, elles tiennent tout l'eſpace S, car les deux dernieres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ ne ſont pas à compter ici. Donc S eſt égal à un rectangle, dont la baſe ſeroit ∞, & la hauteur quelque Ordonnée moyenne entre toutes les Finies décroiſſantes. Donc $S = \infty \times 1 = \infty$. Donc $P + S = S$.

Si après le point μ, les Ordonnées finies ne ſont qu'en nombre fini, & qu'enſuite il en vienne une infinité de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, comme dans la Courbe de l'art. 1386, S ſera compoſé de deux eſpaces partiaux, le premier ayant une baſe finie, qui répondra au nombre fini des Ordonnées, & une hauteur finie, & par conſéquent cet eſpace ſera fini, le ſecond aura une baſe infinie, car ce ſera $pB = \infty$ moins quelque grandeur finie, & ſa hauteur ſera moyenne entre toutes les Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent ſera de cet ordre. Donc ce ſecond eſpace partial de S ſera $\infty \times \frac{1}{\infty} = 1$. Donc les deux eſpaces partiaux qui compoſeront S, étant finis, S le ſera auſſi, & $P + S$ fini.

Si comme dans la Courbe de l'art. 1387, il y a après le point μ, un nombre ſeulement fini, tant d'Ordonnées finies, que d'Ordonnées de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & un nombre infini de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, S ſera compoſé de 3 eſpaces partiaux, le $1^{er} = 1 \times 1$, le $2^d = 1 \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$, le $3^{me} = \infty \times \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Donc S fini, & $P + S$ auſſi.

On voit, ſans aller plus loin, que S, & par conſéquent l'eſpace total Aſymptotique, ne ſera infini que dans le 1er cas,

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE A. CORUÑA

M.E.C.D. 2017

où les Ordonnées finies ſont en nombre infini, & que dans tous les autres *S* ſera fini, parce que ſon 1er eſpace partial ſera toujours fini, les ſuivans n'étant que des infiniment petits, toujours d'ordres plus bas & conſécutifs.

1401. Il eſt bon de remarquer qu'il ſuit de-là que quand même on donneroit aux Courbes Aſymptotiques repréſentées par les Suites $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^2}$, &c. deux dernieres infinités d'Ordonnées correſpondantes aux deux dernieres infinités de nombres de ces Suites, on ne changeroit rien à l'ordre trouvé de *S*. Car quand dans la Courbe $\frac{1}{A}$ on conſerveroit une derniere infinité d'Ordonnées $= \frac{1}{\infty}$, on auroit ſeulement un 2^d^ eſpace partial de *S*, qui ſeroit $\propto \times \frac{1}{\infty}$ de l'ordre du Fini, ce qui ne changeroit rien à l'ordre de l'eſpace partial précédent, qui ſeroit toujours $\propto \times 1$, ou de l'ordre de ∞. On verra aiſément la même choſe pour les autres cas.

1402. Du 1er ordre potentiel d'Aſymptotiſme, qui eſt celui où les Ordonnées finies ſont en nombre infini, au 2^d^ où les Ordonnées finies ſont en nombre fini, *S*, d'infini qu'il étoit, devient Fini, & l'eſt toujours enſuite, ce qui marque que *S* infini ne doit être qu'un très-petit Infini. On en a un exemple dans la Suite $\frac{1}{A}$, qui repréſente une Courbe où *S* eſt infini. Car dès que $\frac{1}{A}$ a des nombres Finis, dont les différences ſont $= \frac{1}{\infty}$, ce qui eſt le commencement du cours Aſymptotique, les nombres toujours moindres que 1, dont elle eſt compoſée, ſont des $\frac{1}{x}$ en nombre infini, tels que x deviendroit infini par l'élévation au quarré (363). Donc les $\frac{1}{x}$ ſont de très-petits nombres Finis, & par conſéquent auſſi le nombre $\frac{1}{x}$, moyen entr'eux tous, qui ſera la hauteur d'un rectangle, dont la baſe $= \infty$. Donc ce rectangle eſt $\infty \times \frac{1}{x} = \frac{\infty}{x}$, très-petit Infini. Quand dans l'art. 1400, nous avons

poſé

M.E.C.D. 2017

posé ce rectangle $= \infty \times 1$, nous n'avons entendu par 1 qu'une grandeur Finie indéterminée.

1403. *S* infini est d'autant plus petit, que la derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ est plus petite dans son ordre, car les Ordonnées finies en nombre infini en sont plus petites, ou la Courbe plus proche de son axe.

1404. *S* fini est d'autant plus petit, que la derniere différence d'un ordre inférieur à $\frac{1}{\infty^2}$ est d'un ordre plus bas, & plus petite dans son ordre. Car le nombre des différens ordres d'Ordonnées en est plus grand (1390), & par conséquent le nombre des Ordonnées finies moindre, & elles sont moindres aussi.

1405. L'espace *P* est aussi d'autant moindre, que la derniere différence est d'un ordre plus bas, car le point μ approche davantage de l'origine *M* (1393), & *Ap* base de *P* en est plus petite, & l'Ordonnée moyenne qui sera sa hauteur plus petite.

1406. Donc l'espace total Asymptotique est toujours d'autant plus petit, que la derniere différence est d'un ordre plus bas, & plus petite dans son ordre.

1407. Plus l'Asymptotisme est grand, selon l'idée de l'art. 1381, plus l'espace Asymptotique est petit, & au contraire, & cela tant en ordre qu'en grandeur.

1408. Il reste les Courbes Asymptotiques, qui étant toujours prises de la maniere dont elles le sont ici, auroient leur derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet. Telles sont les 1res Hyperboles de chaque degré passé le 2^d^. La 1re du 3me a pour sa derniere différence $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, la 1re du 4me $\frac{1}{\infty^{\frac{4}{3}}}$, la 1re du 5me $\frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$, &c. c'est-à-dire, que ces différences sont des ordres $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. d'infiniment petit. On a négligé les coëfficiens inutiles à l'ordre. Il est clair que si les Courbes, dont la derniere différence est de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$

M.E.C.D. 2017

ont un eſpace Aſymptotique infini, à plus forte raiſon celles-ci, dont l'Aſymptotiſme eſt moindre, & par conſéquent l'eſpace Aſymptotiſme plus grand (1407).

1409. Quelles que ſoient leurs différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, comme leur expoſant ſera toujours 1 plus une fraction pure, en retranchant cet 1 pour avoir l'ordre des deux dernieres Ordonnées qui ont ces différences, on aura la fraction pour expoſant des Ordonnées, qui ſeront donc des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$.

1410. Ces deux dernieres Ordonnées ne peuvent être précédées que d'une infinité d'Ordonnées finies, puiſque les autres Courbes, immédiatement inférieures, en ont bien auſſi une infinité, quoiqu'elles aient un plus grand Aſymptotiſme, ou ſoient plus proches de l'axe, mais ici les Ordonnées ſeront plus grandes.

1411. Il y aura Aſymptotiſme tant que la derniere différence ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, c'eſt-à-dire, quelque grande qu'elle ſoit ſans ſortir de cet ordre. Mais ſi on conçoit qu'elle aille juſqu'à $\frac{1}{\infty}$, il n'y a plus d'Aſymptotiſme, il eſt devenu nul en décroiſſant toujours. Car ſi la derniere différence eſt $= \frac{1}{\infty}$, le paralléliſme de la Courbe n'eſt donc que là, ce qui eſt impoſſible dans une Courbe Aſymptotique. Mais dans ce cas impoſſible toutes les Ordonnées, & même les deux dernieres, étant finies, l'eſpace ſeroit $\infty \times 1$, toujours de l'ordre de ∞, & par conſéquent du même ordre que l'eſpace Aſymptotique des Courbes qui ont leur derniere différence de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ complet. Donc dans toute cette étendue l'eſpace Aſymptotique infini de toutes les différentes Courbes, qui y ſont compriſes, ne change point d'ordre, & il faut bien remarquer qu'il y a pourtant un ∞ extreme juſqu'où il ne peut aller.

1412. Cependant ſi l'on conçoit toutes ces Courbes diſpoſées de ſuite, à commencer par celle qui aura ſa derniere

M.E.C.D. 2017

différence plus approchante de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, ou, ce qui eſt le même, ſes deux dernieres Ordonnées d'un ordre d'infiniment petit radical pur (1409), le moindre qu'il ſoit poſſible, juſqu'à la Courbe de l'art. précédent où l'Aſymptotiſme ceſſeroit ; il eſt clair que l'Aſymptotiſme iroit toujours en décroiſſant par des ordres radicaux, puiſque le dernier parallélíſme des Courbes décroîtroit par des ordres radicaux, & par conſéquent (1407) l'eſpace Aſymptotique croîtroit en même temps par des ordres radicaux. Mais cet accroiſſement de l'eſpace par des ordres radicaux n'a rien de contraire à l'art. précédent, puiſque ſelon ce même art. cet accroiſſement ſe fera dans le ſeul ordre potentiel de ∞, & ſans aller juſqu'à ∞ complet, pourvû que ces ordres radicaux ſoient radicaux purs.

1413. Donc dans l'intervalle que nous conſidérons ici, & qui eſt celui où les plus grands eſpaces Aſymptotiques ſont néceſſairement, les plus grands eſpaces Aſymptotiques infinis ne ſont que des Infinis radicaux purs ; & comme c'eſt là la moindre eſpece d'Infinis, les plus petits eſpaces infinis ne ſeront auſſi que de cette eſpece, mais d'ordres radicaux inférieurs, & un eſpace Aſymptotique infini ne pourra être infiniment plus grand qu'un autre infini, que de quelques ordres radicaux purs.

Que les plus grands eſpaces Aſymptotiques infinis, ne ſont que des infinis radicaux purs.

1414. Ces Courbes, dont la derniere différence eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, ſont analogues aux Suites $\frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$. Il ſuffira d'en donner un exemple dans la Suite $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, dont les nombres ſont $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{1}{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}}}$, & les différences $\frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} \times n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{nn+n}^{\frac{1}{2}}}$.

$\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ a une infinité de termes finis, & une infinité moindre

M.E.C.D. 2017

d'infiniment petits de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ (254). La Courbe correſpondante eſt terminée, dès qu'elle arrive aux deux 1ers nombres de ce dernier ordre, qui repréſentent ſes deux dernieres Ordonnées ſelon l'art. 1409.

La différence générale de $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ eſt la différence des $\sqrt[2]{}$ de deux nombres conſécutifs de la Suite naturelle, diviſée par la $\sqrt[2]{}$ du produit de ces deux nombres. La différence $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ eſt beaucoup moindre que 1, puiſque 1 eſt la différence des quarrés 2 & 1. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ eſt encore moindre, puiſque les quarrés 3 & 2 approchent plus de l'égalité que 2 & 1, & toujours ainſi de ſuite. Donc la différence des $\sqrt{}$ de deux nombres conſécutifs peut être exprimée par $\frac{1}{x}$, x étant un nombre toujours croiſſant, & comme les deux 1ers $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ de $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$ feront arrivés à l'égalité $\frac{1}{x}$ ſera $= \frac{1}{\infty}$. Le produit de ces deux nombres ſera $\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty^{\frac{1}{2}} = \infty$, dont la $\sqrt{}$ ſera $\infty^{\frac{1}{2}}$. Donc la derniere différence ſera $\frac{1}{\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, ainſi que l'analogie propoſée le demandoit.

Quand n eſt ſi grand, que par l'élévation au quarré il devient infini, la différence générale $\frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{\overline{nn+n}^{\frac{1}{2}} - \overline{nn}^{\frac{1}{2}}}$ eſt $= \frac{\overline{n+1}^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{n} = \frac{1}{xn}$. Or ſi alors x, qui a toujours crû, & doit devenir $= \infty$, eſt égal à n, ou plus grand, $\frac{1}{xn}$ eſt $= \frac{1}{n^2}$, qui ſeroit $= \frac{1}{\infty}$, ou bien $\frac{1}{xn}$ eſt encore moindre dans ce même ordre. Si x eſt moindre que n, x croiſſant toujours trouvera bien-tôt un autre n plus grand auſſi, avec

M.E.C.D. 2017

lequel il fera un produit $= n^2 = \infty$, & la différence de deux nombres finis ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, ce qui eſt toujours le commencement du cours vraiement Aſymptotique.

1415. Il reſte encore les Courbes dont la derniere différence ſeroit entre l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$, qui donne l'eſpace Aſymptotique infini, & l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, qui le donne fini (1400), c'eſt-à-dire, que cette derniere différence ſeroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet, telle que $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{3}}}$, qui eſt celle de la 4me Hyperbole du 7me degré. Dans le préſent intervalle l'eſpace *S* pourroit ou continuer d'être infini, on devenir fini, ou paſſer de l'Infini au Fini vers le milieu de l'intervalle. Mais il eſt aiſé de voir par analogie, que ſi les dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet donnent des eſpaces infinis auſſi-bien que celles de cet ordre complet, des dernieres différences de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet ne donneront que des eſpaces finis, puiſque tels ſont ceux que donnent les dernieres différences de cet ordre complet. En général on a toujours vû que les ordres incomplets ont les mêmes propriétés que les complets, & la raiſon eſſentielle en eſt que les incomplets ſont toujours des parties finies, & par conſéquent du même ordre que les complets conſidérés comme des Touts. Donc dans le cas préſent, *S* eſt toujours fini.

1416. On peut le voir encore plus préciſément. La derniere différence de ces Courbes aura pour expoſant $2\frac{1}{2}$, ou $2\frac{1}{3}$, ou $2\frac{1}{4}$, &c. & en général $2 + \frac{1}{n}$. Il en faut retrancher un ordre pour avoir les deux dernieres Ordonnées, encore un ordre pour avoir les Ordonnées en nombre infini qui précederont les deux dernieres. Donc ces Ordonnées en nombre infini ſeront des infiniment petits de quelque ordre radical pur. Et en effet cela doit être, puiſque les Ordonnées en nombre infini étoient finies dans les Courbes ſupérieures (1410), & qu'elles ſeront de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ dans les Courbes

M.E.C.D. 2017

immédiatement inférieures, dont la derniere différence ſera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ complet (1386). Or la baſe pB étant du même ordre dans les Courbes du préſent art. & dans les ſupérieures, les deux eſpaces S ſeront pour l'ordre comme les hauteurs, qui ſont dans celles-ci des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & dans les autres des grandeurs finies. Donc dans celles-ci, S ſera infiniment petit par rapport à S dans les autres, donc S dans celles-ci ſera fini, puiſqu'il eſt infini dans les autres.

1417. Il auroit pû ſe préſenter ici une difficulté. Dans les Courbes préſentes, l'Ordonnée moyenne, hauteur du rectangle égal à S, eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & on trouveroit $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \infty^{\frac{n-1}{n}}$, infini radical pur, ce que S n'eſt pourtant pas. Mais il faut prendre garde que comme pour les Courbes ſupérieures, la même maniere de prendre le produit égal à S, a donné $\infty \times 1$ (1400) infini potentiel, que l'on a reconnu enſuite être toujours infiniment plus grand que S, puiſque S ne peut être qu'un infini radical pur (1412) : ainſi dans le cas préſent le produit $\infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$ donne S infiniment plus grand qu'il ne doit être : mais ces deux produits conſervés tels qu'ils ſont, donnent le rapport des deux S, qui ſont $:: 1 . \frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$. Or le 1er S eſt un infini radical pur, donc le 2d eſt fini.

On pourroit dire que comme il y a une infinité d'ordres radicaux purs, toujours infiniment grands les uns par rapport aux autres, le 1er S peut être un infini radical pur, & le 2d un inférieur. Mais cela ne peut avoir lieu ici. Car tous les infinis radicaux purs étant renfermés dans le ſeul ordre potentiel de ∞, les Courbes, dont la derniere différence ſeroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ juſqu'à celle excluſivement où elle ſeroit de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ (1411 & 1412), auront pour leurs S tous les

M.E.C.D. 2017

infinis radicaux purs poſſibles, & il n'en reſtera point pour les Courbes inférieures.

1418. Les préſentes Courbes, dont les deux dernieres Ordonnées ſeront toujours des infiniment petits de l'ordre de $1 + \frac{1}{2}$, ou $1 + \frac{1}{3}$, &c. (1416), ou en général de l'ordre de $\frac{n}{n-1}$, ſeront analogues aux Suites $\frac{1}{A^{\frac{n}{n-1}}}$ des art. 279, 280, 281, il ſera aiſé de le voir plus en détail, ſelon la méthode qu'on a tenue dans cette Section.

1419. Nous avons toujours ſuppoſé ici, pour plus de facilité, que les grandeurs radicales pures, ſoit infinies, ſoit infiniment petites, étoient de l'ordre de $\frac{1}{n}$, mais il eſt bien ſûr qu'il y en a encore d'autres ordres, & quoique ce qui eſt vrai des uns, le ſoit auſſi des autres, & que la ſuppoſition que nous avons faite ne conduiſe à aucune erreur, il ſera bon d'approfondir un peu plus cette matiere.

Les fractions pures ſe partagent en deux eſpeces oppoſées. La 1re eſt celle des fractions compriſes dans la Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. & en général $\frac{1}{n}$. La 2de eſt celle des fractions compriſes dans la Suite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & en général $\frac{n}{n+1}$. Ces deux Suites ſont oppoſées, en ce que la 1re eſt décroiſſante & aboutit à $\frac{1}{\infty}$, la 2de croiſſante & aboutit à 1. Toute fraction pure, qui n'appartiendra pas à l'une des deux, ſera moyenne entre deux fractions, dont l'une appartiendra à la Suite $\frac{1}{n}$, & l'autre à la Suite $\frac{n}{n+1}$. Ainſi $\frac{2}{5}$ eſt moyenne entre $\frac{1}{5}$, qui appartient à $\frac{1}{n}$, & $\frac{4}{5}$ qui appartient à $\frac{n}{n+1}$. Il ſuffira donc de raiſonner ſur les deux Suites oppoſées.

$\frac{1}{n}$ eſt toujours moindre que $\frac{n}{n+1}$, donc $\infty^{\frac{1}{n}} < \infty^{\frac{n}{n+1}}$, & $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} > \frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$. D'ailleurs $\frac{1}{2}$ eſt la plus grande des $\frac{1}{n}$ &

M.E.C.D. 2017

la moindre des $\frac{n}{n+1}$. Donc $\infty^{\frac{1}{2}}$ eſt toujours moyen entre tous les Infinis radicaux purs, & $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ entre les Infiniment petits correſpondans.

1420. Donc tous les eſpaces Aſymptotiques infinis étant des infinis radicaux purs, un eſpace $= \infty^{\frac{1}{2}}$ ſera le moyen entr'eux tous. Ils commenceront par un $\infty^{\frac{1}{n}}$, tel que n y ſoit la dénomination de la plus grande $\surd$ poſſible, qui ne change point ∞ en fini. Or cette dénomination ou ce nombre n eſt indéterminable. Cependant il eſt certain que les Courbes dont la derniere différence eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, ont un eſpace infini de cet ordre radical indéterminable, & le moindre de tous. D'un autre côté le plus grand eſpace infini poſſible ſera un $\infty^{\frac{n}{n+1}}$, tel que n ſoit le plus grand qu'il ſe puiſſe ſans être infini par rapport à 1, car alors on auroit $\infty^{\frac{n}{n}} = \infty$, ce qui eſt impoſſible (1411). Or ce n eſt pareillement indéterminable.

1421. Les Courbes, dont la derniere différence eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet, ayant toutes leurs dernieres Ordonnées en nombre infini, de quelque ordre d'infiniment petit radical pur, & des eſpaces Aſymptotiques finis (1416), ces eſpaces ſeront d'autant plus grands, que ces Ordonnées ſeront de grands infiniment petits radicaux, & au contraire. Celle qui aura ſes Ordonnées de l'ordre $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, aura ſon eſpace fini moyen entre tous les autres, & il eſt aiſé de voir par l'art. précédent, que les Ordonnées qui détermineroient les eſpaces extremes ſeroient d'un ordre indéterminable.

1422. Il eſt clair que toutes les Courbes inférieures à celles que nous avons vues, n'auront plus que des eſpaces Aſymptotiques finis toujours décroiſſans.

1423.

M.E.C.D. 2017

1423. Donc il y a infiniment plus d'espaces Asymptotiques finis que d'infinis.

1424. Un rectangle formé de la base AB & de la 1re Ordonnée AM de la Courbe MC, est $AM \times \infty$, infini du 1er ordre potentiel, & par conséquent infiniment plus grand que tout espace Asymptotique, même infini. On pourroit dire que cela se voit à l'œil. C'est une espece de représentation de ce que sont les Infinis radicaux purs par rapport à l'Infini potentiel du 1er ordre, ce que les expressions en nombres ne font pas si bien appercevoir.

1425. Et même comme on peut supposer que les mêmes lignes AB & AM soient, l'une l'axe ou Asymptote, & l'autre la 1re Ordonnée de toutes les Courbes Asymptotiques, le même rectangle $AM \times \infty$ comprendra tous les espaces Asymptotiques possibles, tant finis qu'infinis, & l'on verra qu'ils doivent être assez peu différens les uns des autres, non-seulement les infinis supérieurs des supérieurs en ordre mais même les infinis des Finis. Le plus grand espace Asymptotique infini sera celui de la 1re Hyperbole d'un degré le plus élevé qu'il soit possible (1408), & le plus petit espace fini possible sera celui de la Logarithmique de l'art. 1391.

1426. Toute cette Théorie suppose pour plus de facilité que la Courbe générale MC ait son Asymptote pour axe, & lui devienne parallele. On voit qu'il sera très-aisé de ramener à ces deux conditions les Courbes qui ne les auront pas. Par exemple, si l'on veut juger quel est l'espace Asymptotique de la 1re Hyperbole du 3me degré, du côté où $x = \frac{1}{\infty}$ (1215),

c'est-à-dire, du côté où elle est perpendiculaire à son axe, qui n'est point alors son Asymptote, cette Hyperbole, qui est $x . a :: a^2 . y^2$, deviendra par une simple transposition d'axe, $y . a :: a^2 . x^2$, & sera parallele à son axe ou Asymptote x. Alors sa derniere différence, prise comme on les prend toujours ici, sera $\frac{1}{\infty^3}$, & par conséquent l'espace Asymptotique fini, comme on l'a trouvé directement (1215). En effet $y . a :: a^2 . x^2$ est la même chose que la 2de Hyperbole du 3me

M.E.C.D. 2017

degré, dont l'eſpace Aſymptotique eſt fini du côté où $x = \infty$. (1216).

Les Courbes Aſymptotiques obliques à leur axe, comme l'Hyperbole ordinaire rapportée à ſon axe traverſant, ſe rameneront auſſi très-facilement à notre Théorie. On en voit un exemple dans cette Hyperbole même.

Toutes les Hyperboles de tous les degrés fourniront autant d'exemples qu'on voudra de la Théorie préſente. En voici encore quelques-uns.

Eſpace Aſymptotique de la Ciſſoïde fini.

1427. La Ciſſoïde étant priſe comme elle l'eſt, p. 24 & 25 des *Inf. petits*, & dans la même Fig. XIV, on peut lui donner pour axe ſon Aſymptote, qui ſera une droite infinie tirée perpendiculairement ſur l'extrémité B du diametre FB (a) du demi-Cercle générateur FAB, & la Ciſſoïde deviendra parallele à cet axe. Alors la 1re & plus grande Ordonnée de la Ciſſoïde eſt BF (a), après laquelle toutes les autres qui ſeront paralleles & égales aux parties BL, BG, BE, &c. du diametre BF, iront toujours en décroiſſant. Si l'on conçoit dans la Fig. la ligne LM tirée juſqu'au demi-Cercle, elle en ſera une Ordonnée y, & l'expreſſion de BL égale à l'Ordonnée correſpondante de la Ciſſoïde ſera $\frac{yy}{LF}$, & cette expreſſion ſera générale, pourvu que l'on conçoive LF variable & croiſſante. Or LF ne peut être plus grande que a, donc $\frac{yy}{a}$ eſt la derniere Ordonnée de la Ciſſoïde. Or alors y, derniere Ordonnée du demi-Cercle, eſt $= \frac{1}{\infty}$. Donc la derniere, ou plutôt les deux dernieres Ordonnées de la Ciſſoïde ſont $= \frac{1}{a\infty^2}$. Donc les Ordonnées précédentes en nombre infini ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$. Donc l'eſpace Aſymptotique Ciſſoïdal eſt fini.

Celui de la Conchoïde fini auſſi.

1428. Si l'on prend l'Aſymptote d'une Conchoïde pour ſon axe, & que l'on conçoive une infinité de droites tirées du Pole à la Courbe, & coupant par conſéquent l'Aſymptote, chaque Ordonnée de la Courbe ſera le Sinus de l'angle que

M.E.C.D. 2017

fera chacune de ces lignes avec l'Asymptote, le Sinus total étant la partie de ces lignes compriſe entre l'Asymptote & la Courbe. Et comme par la nature de la Conchoïde cette partie eſt conſtante, & que tous les angles de ces lignes avec l'Asymptote depuis le 1er qui eſt droit, ſont aigus & décroiſſans, les Ordonnées de la Conchoïde ſont des Sinus toujours décroiſſans, pris dans un même Cercle fini. Donc une Ordonnée infiniment petite de la Conchoïde ſera le Sinus d'un angle infiniment petit pris dans ce Cercle. Mais rien ne détermine la Conchoïde à ſe terminer au point où ſe fait ſur ſon Asymptote un angle infiniment petit du 1er ordre ; & l'on peut encore tirer du Pole des lignes qui feront avec l'Asymptote des angles de tous les ordres inférieurs d'infiniment petit. Donc la Conchoïde, auſſi-bien que la Logarithmique, a des Ordonnées infiniment petites de tous les ordres, donc ſon eſpace Asymptotique eſt fini.

1429. Il ſera bon de prévenir ici une difficulté, qui n'auroit pourtant pas de rapport à la Théorie des eſpaces Asymptotiques. Pourquoi la Ciſſoïde n'a-t'elle pas par la même raiſon que la Conchoïde des Ordonnées infiniment petites d'ordres quelconques ? Car les Ordonnées de la Ciſſoïde ſe rapportent auſſi à celles d'un Cercle, qui peuvent être d'un ordre ſi bas qu'on voudra. Mais il faut prendre garde que l'Ordonnée de la Ciſſoïde en général étant $\frac{yy}{LF}$, & que LF, qui croît toujours, ne pouvant être plus grande que a, la Courbe eſt néceſſairement terminée, quand cela arrive ; & alors il n'eſt néceſſaire de concevoir y que $= = \frac{1}{\infty}$. Il n'en eſt pas de même de la Conchoïde.

1430. Il ſera utile pour fixer mieux les idées, & même par rapport à ce qui va ſuivre, de raſſembler ſous un ſeul coup d'œil le réſultat de tout ce qui a été dit.

Les Ordonnées des Courbes Asymptotiques étant exprimées en nombres, ce ſont toujours des fractions $\frac{1}{x}$ décroiſſantes, la 1re Ordonnée ayant été priſe pour 1.

M.E.C.D. 2017

Si au lieu de prendre leur derniere différence, comme nous avons fait ordinairement, on ne prend que les deux dernieres Ordonnées égales dont elle eſt la différence, & qui ſont toujours d'un ordre potentiel ſupérieur, ou plutôt la derniere Ordonnée ſeule, ce qui ſuffit, on a vû

Que quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{r}{\infty}$ incomplet, ou, ce qui eſt le même, d'un ordre d'infiniment petit radical pur, les Ordonnées précédentes en nombre infini ſont finies, & l'eſpace Aſymptotique infini (1408, 1409 & 1410).

Que quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, les Ordonnées précédentes ſont encore finies, & l'eſpace Aſymptotique infini (1400).

Quand la derniere Ordonnée eſt de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, comme $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, les Ordonnées précédentes en nombre infini ſont des infiniment petits radicaux purs, & l'eſpace Aſymptotique fini (1415 & 1416), après quoi les eſpaces Aſymptotiques ne peuvent être que Finis.

Solides formés par deux différentes révolutions d'un même eſpace Aſymptotique.

1431. Venons maintenant aux Solides formés par la révolution des eſpaces Aſymptotiques. On ne peut faire tourner l'eſpace ou plan $ABCMA$ que de deux manieres, ou autour de AM, 1re Ordonnée de la Courbe, ce que j'appelle 1re *révolution*, ou autour de l'Aſymptote AB, 2de *révolution*.

Il eſt clair d'abord que les Solides de chacune de ces deux révolutions ſeront décroiſſans entr'eux, auſſi-bien que les Eſpaces qui les auront produits.

1432. Commençons par la 1re révolution. J'appelle P *la* partie du Solide produite par la révolution du plan $AM\mu pA$ autour de AM, & S la partie formée par la révolution du plan $pBC\mu p$.

P eſt égal à un Cylindre qui auroit pour baſe un Cercle dont le rayon ſeroit Ap, & pour hauteur quelque Ordonnée moyenne entre AM, & $p\mu$, toutes deux Finies.

M.E.C.D. 2017

S peut être composé d'autant de Solides partiaux qu'il y aura dans la Courbe après le point μ d'ordres différens d'Ordonnées. Mais comme il n'y a d'Ordonnées en nombre infini que celles qui précédent la derniere, & sont de l'ordre immédiatement supérieur, on ne peut concevoir de Cylindre partial dans *S* qui ait pour base un Cercle dont le rayon soit $= \infty$, que celui qui aura pour rayon de sa base la derniere portion infinie de l'axe où seront les dernieres Ordonnées en nombre infini; & la hauteur de ce Cylindre sera une Ordonnée moyenne entre toutes celles-là. S'il y a plusieurs Cylindres partiaux dans *S*, le premier sera toujours fini, parce qu'il n'aura pour rayon de sa base qu'une étendue finie de l'axe, & pour hauteur une Ordonnée moyenne entre des Ordonnées Finies. Ainsi le Solide total *S* sera toujours au moins Fini. La détermination de son ordre fini ou infini dépendra du dernier Cylindre, qui peut être aussi le seul. Tout cela convient avec ce qui a été dit dans l'art. 1400, & en est une suite. Nous appellerons desormais *S* ce dernier Cylindre, soit qu'il soit précédé de quelques autres, soit qu'il soit seul.

Limites où sont compris les Solides infinis de la 1re révolution.

1433. *S* égal à un Cylindre qui auroit pour rayon de sa base un Cercle dont le rayon $= \infty$, a donc une base de l'ordre de ∞^2. Donc il ne peut être fini que quand il aura une hauteur $= \frac{1}{\infty^2}$, & il ne l'aura que quand la derniere Ordonnée sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$. Donc pour toutes les Courbes dont la derniere Ordonnée sera au dessus de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, le Solide Asymptotique de la 1re révolution sera infini.

1434. Donc pour toutes les Courbes dont la derniere Ordonnée sera de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$, ou de tous les ordres inférieurs, ce Solide ne sera que Fini.

Qu'il y a des Solides infinis produits par des espaces finis.

1435. L'espace Asymptotique cesse d'être infini dès que la derniere Ordonnée est au dessous de $\frac{1}{\infty}$ (1430), donc il y a deux intervalles potentiels, celui de $\frac{1}{\infty}$ exclusivement à $\frac{1}{\infty^2}$, & celui de $\frac{1}{\infty^2}$ à $\frac{1}{\infty^3}$ exclusivement, où les espaces Finis donnent des Solides Infinis.

M.E.C.D. 2017

1436. Trois intervalles comprennent les dernieres Ordonnées auxquelles répondent les Solides infinis. Le 1er intervalle commence par des dernieres Ordonnées de l'ordre d'infiniment petit radical pur, le plus élevé qu'il ſoit poſſible, & finit par celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, & par conſéquent comprend toutes celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ incomplet, ou qui ne ſont des infiniment petits radicaux purs. Le 2^d^ commence par celles de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet, & finit par celle de $\frac{1}{\infty^2}$ complet, & par conſéquent comprend toutes celles de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet. Le 3me commence par celles de $\frac{1}{\infty^2}$ incomplet, & finit par celles de $\frac{1}{\infty^3}$ complet, & comprend toutes celles de $\frac{1}{\infty^3}$ incomplet. Les *S* infinis doivent, à commencer par le plus grand, décroître ſelon ce même ordre, & avec analogie à cet ordre.

La baſe de *S* eſt toujours de l'ordre de ∞^2. Quand la derniere Ordonnée eſt $= \frac{1}{\infty}$, il faut multiplier ∞^2 par la même grandeur $\frac{1}{x}$ qui dans l'art. 1402 a donné l'eſpace Aſymptotique. Or cet eſpace $\frac{\infty}{x}$ n'eſt qu'un infini radical pur (1413), ou, ce qui eſt le même, n'eſt que de l'ordre de ∞ incomplet. Donc le Solide $\frac{\infty^2}{x}$ ne ſera que de l'ordre de ∞^2 incomplet, comme eſt, par exemple, $\infty^{\frac{3}{2}}$. Mais une derniere Ordonnée de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$ complet eſt la grandeur qui finit le 1er des 3 intervalles poſés. Donc à cette grandeur répond un *S* de l'ordre de ∞^2 incomplet, & cet *S* eſt unique dans cet intervalle, comme l'étoit l'Ordonnée $= \frac{1}{\infty}$. Donc à toutes les Ordonnées ſupérieures ont répondu des *S* de l'ordre de ∞^2 complet.

Enſuite dans le 2^d^ intervalle il n'y aura que des *S* de l'ordre de ∞^2 incomplet, & décroiſſans juſqu'au dernier qui ſera de l'ordre de ∞. Et dans le 3me intervalle ſeront des *S*

M.E.C.D. 2017

infinis radicaux purs décroiſſans juſqu'au dernier qui ſera Fini.

1437. Les Solides Aſymptotiques infinis de la 1re révolution ne paſſent point l'ordre de ∞^2 complet.

1438. Soit maintenant la 2de révolution. S y eſt égal à un Cylindre dont la hauteur ſera toujours $= \infty$, & la baſe le quarré de l'Ordonnée moyenne entre celles qui précedent la derniere, & ſont en nombre infini.

S'il y a des S infinis, ils ſeront au moins dans le 1er des 3 intervalles de l'art. précédent. Dans cet intervalle les Ordonnées en nombre infini ſont toujours Finies, & ſont des $\frac{1}{x}$ (1430), non-ſeulement toujours décroiſſantes dans une même Courbe, mais encore d'une ſupérieure ou moins Aſymptotique à une inférieure ou plus Aſymptotique. Par conſéquent leurs dénominateurs x ſont croiſſans de la même façon.

Dans cet intervalle $S = \infty \times \frac{1}{x^2} = \frac{\infty}{x^2}$, ſera infini, x^2 étant fini: mais il ne ſera que fini, ſi x^2 peut être infini. Les x étant toujours croiſſans des Courbes ſupérieures de cet intervalle aux inférieures, les x des Courbes les plus ſupérieures peuvent être trop petits pour devenir infinis par l'élévation au quarré, mais ils pourront être aſſez grands pour cela dans quelques Courbes inférieures. La derniere Courbe de cet intervalle eſt celle dont la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty}$ complet. Or il eſt certain que dans cette Courbe analogue à $\frac{1}{A}$ (1396), les x du cours Aſymptotique ſont tels qu'ils deviennent infinis par l'élévation au quarré. Donc dans cette Courbe $S = \frac{\infty}{\infty}$ grandeur finie (188).

1439. Je dis en même temps que toutes les Courbes de ce même intervalle, ſupérieures à la derniere, doivent avoir leurs S infinis Car cet intervalle comprend toutes les Courbes, dont les dernieres Ordonnées ſont des infiniment petits radicaux purs, qui deſcendent par tous les ordres radicaux poſſibles ſupérieurs à $\frac{1}{\infty}$, & tous compris dans le ſeul ordre

Limites où ſont compris les Solides infinis de la 2de révolution.

M.E.C.D. 2017

potentiel qui eſt entre 1 & $\frac{1}{\infty}$. Donc les *S* correſpondans, dont la Suite ſe termine par un *S* Fini (1438), doivent être tous compris dans le ſeul ordre potentiel qui eſt entre ∞ & 1. Et comme la Suite des dernieres Ordonnées n'eſt compoſée que de différens ordres d'infiniment petits radicaux purs, qui ſe terminent par $\frac{1}{\infty}$, la Suite des *S* n'eſt compoſée que d'infinis radicaux purs, qui ſe terminent par 1. Donc, &c.

Que les Solides infinis de la 2de révolution ne ſont que des Infinis radicaux purs.

1440. La même correſpondance ou analogie des deux Suites fait voir que comme celle des dernieres Ordonnées ne peut commencer par 1, 1er terme de l'ordre potentiel qui s'étend depuis 1 juſqu'à $\frac{1}{\infty}$, puiſque jamais la derniere Ordonnée d'une Courbe Aſymptotique ne peut être Finie dans l'hypotheſe de toute cette Sect. de même la Suite des *S* ne peut commencer par ∞ potentiel, 1er terme de l'ordre qui s'étend depuis ∞ juſqu'à 1. Donc tous les *S* infinis de la 2de révolution, ne ſont que des infinis radicaux purs.

1441. Donc depuis le dernier *S* incluſivement du 1er intervalle, qui eſt en même temps le 1er *S* du 2d, tous les *S* ſont finis ou infiniment petits pour toutes les Courbes inférieures, & par conſéquent les Solides totaux de la 2de révolution toujours Finis.

1442. Mais il ſera bon d'approfondir davantage ce qui arrive dans le 2d intervalle, où l'on pourroit trouver de la difficulté. Les Ordonnées en nombre infini, dont la moyenne détermine l'ordre de *S*, ſont des infiniment petits radicaux purs, dont les plus grands ſont des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & les moindres des $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$, & le moyen $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$ (1419). Si l'on prend le *S* d'une Courbe, dont les Ordonnées en nombre infini ſoient des $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}}$, on aura $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2n}{n+1}}} = \infty^{\frac{1-n}{n+1}}$. Si $n = 1$;

auquel

M.E.C.D. 2017

auquel cas $\frac{1}{\infty^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, on aura $S = \infty^{\frac{0}{n+1}} = 1$, &

enſuite n étant plus grand que 1, on aura toujours S infiniment petit. Cela quadre avec l'art. précédent, & fait juger que pour les Courbes ſupérieures, dont les Ordonnées en nombre infini ſeront des $\frac{1}{\infty^{1}}$, S ſera fini. Cependant on trouve $S = \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2}{n}}} = \infty^{\frac{n-2}{n}}$, qui n'eſt $= 1$ que dans le cas, où $n = 2$, qui eſt celui où $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, & pour tous les autres cas où $n > 2$, $\infty^{\frac{n-2}{n}}$ eſt un infini radical pur. Or il n'eſt pas poſſible que cela ſoit, puiſque le 1er S de ce 2^d^ intervalle n'eſt que Fini. Mais voici d'où eſt venue l'erreur.

Les Ordonnées en nombre infini d'une Courbe Aſymptotique quelconque ſont décroiſſantes dans leur ordre, quel qu'il ſoit. Si elles ſont de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{n}}}$, & par exemple, de l'ordre de $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{3}}}$, il faut, pour les concevoir décroiſſantes, concevoir que ce ſont des $\frac{1}{z\infty^{\frac{1}{3}}}$, z étant un nombre fini variable, toujours croiſſant. Ce z ne fait rien à l'ordre des Ordonnées, tant qu'on ne les prend qu'à leur 1re puiſſance: mais ſi on les quarre, on a $\frac{1}{z^2\infty^{\frac{1}{3}}}$, & z^2 peut être devenu un infini qui élevera l'ordre de $\infty^{\frac{2}{3}}$, & il n'a beſoin pour

BIBLIOTECA DEL
M.E.C.D. 2017

cela que d'être un très-petit infini. Ici, où il faut quarrer une Ordonnée moyenne, il ne la faut pas prendre ſimplement $= \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, mais $= \frac{1}{z^2 \infty^{\frac{2}{3}}}$, ce qui donnera S, non pas $= \infty \times \frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$, mais $= \frac{\infty}{z^2 \infty^{\frac{2}{3}}}$, & cette grandeur ſera finie, pourvu que z^2 ſoit un petit infini : or il peut l'être, & il le ſera néceſſairement, puiſque S ne peut être alors infini, un S ſupérieur étant fini (1438).

1442. On voit par-là que dans le 2d intervalle le dernier S fini ne ſera pas préciſément celui du milieu qui appartient aux Courbes, dont les Ordonnées en nombre infini ſont des $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, mais qu'il ſera un peu plus haut, ce qui eſt indéterminable.

Qu'il y a des Solides finis produits par des eſpaces infinis.

1443. Le 1er S de cet intervalle étant fini, & par conſéquent le Solide total de toutes les Courbes Aſymptotiques, dont la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty}$, & ces Courbes ayant leur eſpace Aſymptotique infini (1430), il y a donc des Solides finis formés par des eſpaces infinis, ce qui eſt le cas oppoſé à celui de l'art. 1435.

1444. Le cas de l'art. 1435 arrive dans l'étendue de deux ordres potentiels, au lieu que celui-ci n'arrive qu'à l'extrémité d'un ſeul.

Exemples de Solides des deux révolutions en différentes Courbes.

1445. L'Hyperbole du 2d degré a ſon ſolide de la 1re révolution, infini, & celui de la 2de, fini.

1446. Et pour donner un exemple de toutes les Hyperboles dans un ſeul degré, qui fera ſuffiſamment juger de tous les autres, je prens les quatre Hyperboles du 5me degré. La derniere Ordonnée de la 1re eſt $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{4}}}$, de la 2de, $\frac{1}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, de la 3me, $\frac{1}{\infty^{\frac{3}{2}}}$, de la 4me, $\frac{1}{\infty^4}$. Donc la 1re aura ſes deux Solides infinis, la 2de pareillement, la 3me aura celui de la 1re

M.E.C.D. 2017

révolution, infini, & celui de la 2de, fini, la 4me, tous deux finis.

1447. La derniere Ordonnée de la Ciſſoïde étant $\frac{y}{\infty^2}$ (1427), ſon Solide de la 1re révolution ſera infini, & celui de la 2de, fini.

1448. La Conchoïde les a tous deux finis, & pareillement la Logarithmique.

M.E.C.D. 2017

SECTION VII.

Sur la Communication ou non-Communication des Rapports entre l'Infini & le Fini.

1449. DEs Grandeurs du même ordre quelconque ne peuvent avoir entr'elles que des rapports finis, & tous les ordres étant parfaitement analogues les uns aux autres, dès que certains rapports finis ſont dans un ordre, ils doivent être néceſſairement dans un autre ordre quelconque; il y a dans tous les ordres des grandeurs qui ſont comme 1 à 2, & comme 1 à 3, &c. cela eſt bien ſûr, & ce n'eſt pas ce que nous voulons traiter ici. Mais il y a des grandeurs infinies entre leſquelles on ne trouve des rapports finis que par le moyen du Calcul de l'Infini, & par les principes qui lui ſont particuliers. Par ex. on ne ſait que par le Calcul de l'Infini, que la ſomme des Quarrés naturels eſt $\frac{\infty^3}{3}$, car pour avoir cette ſomme, il a fallu négliger des grandeurs (580) que l'on n'eût pas négligées dans le Fini, & ſi l'on conçoit une autre Suite formée du même nombre de grandeurs toutes égales à ∞^2, dernier Quarré naturel, ſa ſomme ſera ∞^3, & les ſommes des deux Suites :: 1 . 3, rapport fini, que je dis qui ſe retrouvera entre deux autres ſommes pareilles, quoique finies. C'eſt là ce que j'appelle *Communication des rapports entre l'Infini & le Fini*, parce que ces rapports ne ſe trouvent dans le Fini que conſidéré comme Infini, & quelquefois ne ſe trouveroient pas autrement, ou du moins, pas ſi aiſément, & d'une maniere ſi naturelle.

1450. Une Suite croiſſante d'un nombre infini de grandeurs, que je ſuppoſe toujours $= \infty$, étant poſée, j'appelle Suite *pleine*, par rapport à celle-là, celle qui ſeroit formée du même nombre de grandeurs toutes égales à la derniere de la Suite croiſſante.

M.E.C.D. 2017

1451. Toutes les Suites croiſſantes de nombres, telles que les A, A^n, $A^{\frac{1}{n}}$, &c. pouvant être conçues comme des Lignes diſpoſées ſur un axe $= \infty$, & diviſé en une infinité de parties toutes $= 1$, elles forment ou rempliſſent un certain eſpace, & la Suite pleine correſpondante en forme un autre qui eſt un parallélogramme, dont un des côtés eſt l'axe $= \infty$, & l'autre la plus grande ligne de la Suite croiſſante. J'appelle ce parallélogramme *circonſcrit* à l'eſpace rempli par les Lignes croiſſantes, ou à l'eſpace *croiſſant*.

1452. Le rapport du parallélogramme circonſcrit à l'eſpace croiſſant eſt le même que celui de la ſomme de la Suite pleine à celle de la Suite croiſſante.

Que les Parallélogrammes circonſcrits à des Eſpaces croiſſans, ont le même rapport à ces Eſpaces, tant dans le fini que dans l'infini.

1453. Si le rapport d'une de ces ſommes infinies à l'autre, & par conſéquent celui des deux eſpaces, eſt fini, il demeurera encore le même, quand les intervalles finis égaux, qu'on a ſuppoſés entre les Lignes, & qui ne faiſoient rien au rapport de ces Lignes, ſeront devenus des infiniment petits égaux, & quand en même temps les Lignes de chaque ordre différent ſeront devenues de l'ordre immédiatement inférieur, en conſervant le même rapport entr'elles. Or alors les eſpaces infinis ſont devenus Finis. Donc le rapport fini du parallélogramme circonſcrit à l'eſpace croiſſant ſera le même dans l'Infini & dans le Fini, dans les deux Touts, & dans leurs parties quelconques correſpondantes.

1454. Quand le dernier terme d'une Suite infinie croiſſante eſt $\infty^{\frac{n}{m}}$, quelques nombres que ſoient n & m, & que la ſomme de cette Suite eſt $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, de quelques coëfficiens finis $\frac{r}{p}$ que ſoit affecté cet $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, la ſomme de la Suite pleine, qui eſt le dernier terme de la Suite croiſſante multiplié par ∞, ou $\infty^{\frac{n}{m}+1}$, a toujours un rapport fini à la ſomme

M.E.C.D. 2017

de la Suite croiſſante qui eſt $\frac{r\infty^{\frac{n}{m}+1}}{p}$, car la 1re eſt à la 2de :: 1 . $\frac{r}{p}$. Donc il y aura toujours un parallélogramme circonſcrit qui aura ce rapport à l'eſpace croiſſant, tant dans le Fini que dans l'Infini.

Détermination du rapport des Eſpaces Paraboliques aux parallélogrammes circonſcrits.

1455. La Parabole ordinaire ou du 2d degré étant $x = y^2$, où x eſt un axe ou infini ou fini, diviſé en une infinité de parties égales finies ou infiniment petites, & par conſéquent croiſſant ſelon la Suite des nombres naturels, la Suite des Ordonnées y eſt croiſſante comme les $\sqrt[2]{}$ des nombres naturels. Or la ſomme de la Suite de ces $\sqrt[2]{}$ eſt $\frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{3}$ (584) qui eſt à $\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \infty^{\frac{3}{2}}$, ſomme de la ſuite pleine :: 2 . 3. Donc tout eſpace de cette Parabole fini ou infini eſt à ſon parallélogramme circonſcrit :: 2. 3.

1456. De même dans la 1re Parabole du 3me degré $x = y^3$, les y étant croiſſantes comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{3\infty^{\frac{4}{3}}}{4}$ (584), & celle de la Suite pleine étant $\infty^{\frac{1}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{4}{3}}$, l'eſpace croiſſant eſt au parallélogramme circonſcrit :: 3 . 4.

1457. Dans la 2de Parabole du même degré $x^2 = y^3$, les y étant croiſſantes comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$, dont la ſomme eſt $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$, & la ſomme de la Suite pleine étant $\infty^{\frac{2}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{5}{3}}$, les deux eſpaces ſont :: 3 . 5.

1458. En général on trouvera toujours que les y de toutes les Paraboles croiſſant toujours comme les nombres naturels élevés à $\frac{1}{n}$ ou $\frac{n}{m}$, n étant $< m$, les eſpaces Paraboliques croiſſans finis ou infinis auront à leurs parallélogrammes

M.E.C.D. 2017

circonſcrits les mêmes rapports finis que les ſommes des Suites des nombres naturels, ainſi élevés, aux ſommes des Suites pleines.

1459. Les eſpaces Paraboliques que nous trouvons ici, ſont les eſpaces intérieurs, c'eſt-à-dire, pris du côté que les Paraboles ſont concaves vers leur axe, mais il reſte les extérieurs, ceux qui ſont de l'autre côté, toujours compris les uns & les autres dans le même parallélogramme circonſcrit, auquel, pris tous deux enſemble, ils ſont égaux. Donc le rapport de l'eſpace intérieur au parallélogramme étant connu, celui de l'extérieur, complément du parallélogramme, l'eſt auſſi. Par exemple, dans la Parabole du 2d degré, l'eſpace intérieur étant les $\frac{2}{3}$ du parallélogramme, l'extérieur en eſt $\frac{1}{3}$. Mais cela ſe peut trouver encore directement, en tranſpoſant les axes des Paraboles, c'eſt-à-dire, en mettant dans leur équation x au lieu de y, & y au lieu de x, x repréſentant toujours la Suite des nombres naturels. Par exemple, dans la Parabole du 2d degré on aura $x^2 = y$, & par conſéquent les Ordonnées croiſſantes comme les Quarrés des nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{\infty^3}{3}$ (580). Le parallélogramme ſera $\infty^2 \times \infty = \infty^3$, & l'eſpace Parabolique au parallélogramme :: 1 . 3.

1460. Il peut ſe préſenter ici une difficulté apparente. Lorſqu'on a conſidéré l'eſpace intérieur de cette Parabole, on a eu $x = \infty$, & $y = \infty^{\frac{1}{2}}$; or en la tranſpoſant, on doit ſeulement trouver que ce qui étoit x eſt devenu y, & réciproquement, donc ici $x = \infty^{\frac{1}{2}}$, & non pas $= \infty$, & $y = \infty$, & non pas $= \infty^2$, ce qui donnera ſeulement pour le parallélogramme circonſcrit $\infty^{\frac{3}{2}}$, comme on l'avoit eu d'abord, & non pas ∞^3. Mais il faut obſerver que quand dans l'hypotheſe de la tranſpoſition on ne prendra x que $= \infty^{\frac{1}{2}}$, cela n'empêchera pas qu'il ne ſoit diviſé en une infinité de parties finies égales, & qu'il ne croiſſe ſelon la Suite des nombres naturels, ſeulement ſesparties égales ſeront moindres que

M.E.C.D. 2017

l'unité qu'on ſuppoſoit dans la premiere hypotheſe, & les y croîtront toujours comme les Quarrés naturels, ce qui donne toujours le même rapport du parallélogramme circonſcrit à l'eſpace Parabolique; or il ne s'agit ici que de rapports.

1461. On trouvera très-aiſément de la même maniere que les Ordonnées extérieures de toutes les Paraboles quelconques ſont les Suites infinies des nombres naturels élevés à n, ou à $\frac{m}{n}$, m étant $> n$, & comme on a les ſommes de toutes ces Suites (584), on aura auſſi directement tous les eſpaces Paraboliques extérieurs par leurs rapports aux parallélogrammes circonſcrits.

1462. On peut regarder le Triangle comme la Parabole du 1er degré, & en effet il eſt la ſomme des nombres naturels élevés à 1, il eſt donc $\frac{\infty^2}{2}$, & ſon parallélogramme circonſcrit eſt ∞^2, ce qui donne le rapport ſi connu de 1 à 2.

1463. S'il étoit impoſſible d'avoir ou tous ces rapports, ou quelques-uns d'entr'eux, par des méthodes qui ne ſuppoſaſſent point l'Infini, on les auroit par celles qui le ſuppoſent, mais du moins les a-t'on par celles-ci d'une maniere plus courte, plus générale, & plus lumineuſe. Il eſt même certain qu'on les prend ici dans leur véritable ſource, car réellement tout Fini eſt un Infini.

Que le rapport d'un Eſpace Aſymptotique infini ou fini à ſon parallélogramme circonſcrit, ne peut ſe retrouver dans le fini.

1464. Les eſpaces Aſymptotiques peuvent toujours avoir un parallélogramme circonſcrit, puiſqu'ils ſont étendus le long d'un axe $= \infty$, & qu'il y a une 1re, & plus grande Ordonnée finie de la Courbe, ce qui fait le rectangle $1 \times \infty = \infty$. Mais tout eſpace Aſymptotique eſt fini ou infini, & s'il eſt Infini, il ne peut être qu'un Infini radical pur (1413); or le rapport de ∞ ſoit au Fini, ſoit à un Infini radical pur, ne peut jamais être dans le Fini; donc il n'eſt pas poſſible qu'il y ait dans le Fini un eſpace qui ait à un autre le rapport d'un eſpace Aſymptotique à ſon parallélogramme circonſcrit. C'eſt là ce que j'appelle la *non-Communication des rapports entre l'Infini & le Fini.*

1465.

M.E.C.D. 2017

1465. Il eſt viſible que cela n'empêche pas qu'un eſpace Aſymptotique fini n'ait un rapport fini à quelqu'autre eſpace que ſon parallélogramme circonſcrit. Ainſi l'eſpace Aſymptotique Ciſſoïdal eſt triple du demi-Cercle générateur. De même il eſt poſſible qu'un eſpace Aſymptotique infini ait un rapport fini à quelqu'autre eſpace infini que ſon parallélogramme.

1466. Il n'y a point de portion finie d'un eſpace Aſymptotique, qui puiſſe avoir à ſon parallélogramme circonſcrit le même rapport que l'eſpace Aſymptotique entier a au ſien; car ce rapport eſt celui de 1 ou de $\infty \frac{1}{n}$ à ∞, & ce rapport ne peut être entre deux grandeurs Finies. C'eſt là le contraire de ce qu'on a vû dans les eſpaces Paraboliques.

Que les Eſpaces Aſymptotiques de toutes les Hyperboles ſont repréſentés par les ſommes des Suites $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{\frac{A}{2}}$, &c.

1467. Au défaut du rapport de l'eſpace Aſymptotique à ſon parallélogramme circonſcrit, on peut trouver l'ordre dont eſt cet eſpace, qui eſt toujours ou Fini ou Infini radical pur, ſon parallélogramme étant ∞, & cela ſe trouve tout d'un coup, quand les Ordonnées de la Courbe ſont repréſentées par des Suites de nombres, dont on connoît l'ordre des ſommes, l'axe ou Aſymptote x croiſſant toujours comme les nombres naturels. Ainſi parce que l'Hyperbole ordinaire ou du 2$^{d.}$ degré, priſe entre ſes Aſymptotes, eſt $xy = 1$, on a $y = \frac{1}{x}$, c'eſt-à-dire, les Ordonnées décroiſſantes comme la Suite $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. qui eſt celle des nombres naturels réduits en fractions, dont la ſomme eſt infinie (362 & 600).

De même de ce que la 1re Hyperbole du 3me degré eſt $xy^2 = 1$, il ſuit $y = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, & par conſéquent la Suite des Ordonnées eſt celle des $\sqrt[2]{}$ desnombres naturels réduites en fractions, or la ſomme en eſt infinie (366).

La 2de Hyperbole du 3me degré eſt $x^2 y = 1$, & par conſéquent $y = \frac{1}{x^2}$, & la Suite des Ordonnées eſt celle des

BIBLIOTECA DEL
M.E.C.D. 2017

Quarrés naturels réduits en fractions, dont la ſomme eſt finie (363).

1468. Nous n'avons conſidéré ici les eſpaces Hyperboliques que du côté où l'une des Aſymptotes a été priſe pour l'axe $x = \infty$. Si l'on veut conſidérer dans chaque Hyperbole l'eſpace qui eſt de l'autre côté, il n'y a qu'à prendre pareillement l'autre Aſymptote pour l'axe $x = \infty$, & pour cela changer en x ce qui étoit y dans l'équation des Hyperboles, & en y ce qui étoit x. On trouvera que dans l'Hyperbole du 2d degré, ce changement ne fera rien à l'eſpace, que la 1re du 3me deviendra la 2de du même degré, & que par conſéquent l'eſpace qu'elle avoit infini deviendra fini, & toujours ainſi de ſuite. Ce qui revient à l'art. 1426.

Comme les Eſpaces Paraboliques le ſont par les ſommes des A, *ou* $A^{\frac{1}{2}}$, *ou* A^2, *&c.*

1469. De tout cela il ſuit, & on le pourra voir plus en détail, ſi l'on veut, que tous les eſpaces Paraboliques étant des ſommes de Suites infinies des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques parfaites ou imparfaites (1455, &c. 1461), les eſpaces Aſymptotiques des Hyperboles ſont les ſommes de ces mêmes Suites réduites en fractions, dont 1 eſt le numérateur conſtant. Ainſi puiſqu'on a les ſommes de toutes les Suites des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques (580, &c. 584), & l'ordre des ſommes de toutes ces Suites réduites en fractions (366, 367, 368), on a par les propriétés des nombres naturels la quadrature de tous les eſpaces Paraboliques finis ou infinis, & l'ordre de tous les eſpaces Aſymptotiques Hyperboliques, de ſorte que ſur les ſommes ou ſur l'ordre des ſommes des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques, ſoit entiers, ſoit réduits en fractions, il ne reſte rien qui ne ſoit pris, pour ainſi dire, par les eſpaces Paraboliques, ou Hyperboliques.

Que les ſommes infinies des $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$, *&c. ne ſont que des Infinis radicaux purs.*

1470. Quand ces Suites fractionnaires ont des ſommes infinies, comme le ſont celles de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. ou de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, &c. ces ſommes ne ſont que des Infinis radicaux purs, car elles repréſentent des eſpaces Aſymptotiques, qui quand ils ſont infinis, ne peuvent être que de cette eſpece

M.E.C.D. 2017

d'Infinis. C'eſt là une connoiſſance ſur ces Suites que l'on n'auroit pas eue, en ne les conſidérant qu'en elles-mêmes, & ſans les appliquer à des eſpaces Hyperboliques. On eût pû croire que leurs ſommes toujours néceſſairement moindres que ∞, ſomme des Unités, en étoient quelque partie d'une dénomination Finie.

1471. Donc le rapport de ces ſommes infinies à ∞ ne peut jamais être déterminé, car c'eſt celui d'un infini radical pur à ∞.

1472. Par la même raiſon ces ſommes, quoiqu'infinies, & de l'ordre potentiel de ∞, ſont infiniment moindres que ∞. La ſomme infinie de $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. $\frac{1}{\infty}$ eſt infiniment moindre que celle des Unités.

Que l'on trouve par la voie de l'Infini les quadratures de toutes les Courbes, dont les Ordonnées ſuivront le rapport des nombres Polygones quelconques.

1473. Comme on a les ſommes de toutes les Suites infinies de nombres Polygones (572), & par conſéquent leurs rapports finis aux ſommes des Suites pleines, on aura les quadratures des eſpaces infinis des Courbes, dont les Ordonnées ſeroient ces nombres Polygones, & par conſéquent auſſi les quadratures des eſpaces curvilignes finis. Ainſi la ſomme infinie des Triangulaires étant $\frac{1\infty^3}{6}$, celle des Quarrés $\frac{2\infty^3}{6}$, des Pentagones $\frac{3\infty^3}{6}$, &c. & les ſommes pleines étant $\frac{1\infty^3}{2}$, $\frac{2\infty^3}{2}$, $\frac{3\infty^3}{2}$, &c. parce que les derniers des Triangulaires, des Quarrés, des Pentagones, &c. ſont $\frac{1\infty^2}{2}$, $\frac{2\infty^2}{2}$, $\frac{3\infty^2}{2}$, &c. on aura toujours le rapport de 1 à 3 pour celui de l'eſpace infini croiſſant à ſon parallélogramme circonſcrit, & pour celui de tout eſpace curviligne fini de la Courbe qui exprimera les nombres Polygones quelconques à ſon parallélogramme.

1474. La Courbe des nombres Quarrés eſt évidemment la Parabole priſe du côté qu'elle eſt convexe vers un axe diviſé en parties égales, ou croiſſant ſelon la Suite des nombres naturels, car alors ſes Ordonnées croiſſent comme les Quarrés de ces nombres. On a vû auſſi que ſon eſpace curviligne eſt au parallélogramme circonſcrit :: 1. 3 (1459).

M.E.C.D. 2017

1475. n étant un nombre naturel quelconque, le Triangulaire correſpondant eſt $\frac{nn+n}{2}$, & par conſéquent l'équation de la Courbe des Triangulaires eſt $2ay = xx + ax$, x étant l'axe qui croît ſelon la Suite naturelle. On voit par cette équation que la Courbe des Triangulaires eſt encore la Parabole, mais dont il faut retrancher une certaine portion ſelon que feu M. Carré l'a enſeigné dans les Mém. de l'Acad. de 1701. La portion reſtante infinie, & qui eſt la Courbe des Triangulaires, eſt encore convexe vers l'axe, il n'eſt plus le même, & ne part plus du même point que celui de la Parabole entiere, Courbe des Quarrés. Ses diviſions ne répondent point à celles de l'autre, & les Ordonnées qui en partent, terminées à d'autres points de la Courbe, croiſſent ſelon d'autres rapports.

1476. L'équation différentielle de la portion Parabolique ou Courbe des Triangulaires eſt $2ady = 2xdx + adx$, ce qui donne $dy.\ dx :: 2x + a.\ 2a$, & au point où $x = 0$, $dy.\ dx :: a.\ 2a :: 1.\ 2$. La Courbe à ſon origine eſt donc oblique à ſon axe, ce qu'on voit qui ne conviendroit pas à la Parabole entiere.

Que ces Courbes ſeront toujours ou la Parabole du 2d degré, ou des portions de cette Parabole.

1477. En prenant de ſuite les formules des Polygones (572), on verra que l'équation de la Courbe des Pentagones ſera $2ay = 3xx - ax$, de celle des Exagones, $2ay = 4xx - 2ax$, ou $ay = 2xx - ax$, &c. Et comme ces équations ne ſortent point du 2d degré, & qu'elles ſont toujours à la Parabole de ce degré, on voit que les Courbes des nombres Polygones ſeront toujours ou la Parabole de ce degré, ou des portions de cette Parabole, mais différentes, & qui appartiendront ou à une même Parabole, ou à des Paraboles de différens parametres, ce qu'il ſeroit inutile ici d'examiner plus en détail.

Que l'on aura auſſi par la voie de l'Infini les quadratures

1478. On doit raiſonner des Nombres Figurés comme des Polygones.

Le dernier des Naturels étant ∞, & leur ſomme $\frac{\infty^2}{2}$.

M.E.C.D. 2017

Le dernier des Triangul. étant $\frac{\infty^2}{2}$, & leur ſomme $\frac{\infty^3}{6}$

Le dernier des Pyramidaux étant $\frac{\infty^3}{6}$, & leur ſomme $\frac{\infty^4}{24}$

Le dernier des Triang. Pyr. étant $\frac{\infty^4}{24}$, & leur ſomme $\frac{\infty^5}{120}$, &c.

de toutes les Courbes, dont les Ordonnées ſuivroient le rapport des Nombres Figurés.

Le Parallélogramme circonſcrit à la Courbe des Naturels, qui ne ſera qu'un Triangle, ſera ∞^2, dont le rapport à la ſomme des Naturels ſera $\frac{2}{1}$.

Le parallélogramme circonſcrit à la Courbe des Triangulaires ſera $\frac{\infty^3}{2}$, dont le rapport à l'eſpace curviligne des Triangulaires ſera $\frac{3}{1}$.

Le Parallélogramme circonſcrit à la Courbe des Pyramidaux ſera $\frac{\infty^4}{6}$, dont le rapport à l'eſpace curviligne des Pyramidaux ſera $\frac{4}{1}$, & toujours ainſi de ſuite.

Donc auſſi dans toutes les Courbes, dont les Ordonnées repréſenteront les différens ordres des nombres Figurés, les eſpaces curvilignes finis ſeront à leurs parallélogrammes circonſcrits : : 1. 2, à compter le Triangle parmi ces Courbes, ou : : 1. 3, ou : : 1. 4, &c.

1479. La quadrature des Courbes des nombres Figurés priſe de ſuite, à commencer par celle des nombres Naturels, eſt donc la même, ou conſiſte dans le même rapport que celle des 1res Paraboles de chaque degré priſes de ſuite, à commencer par le Triangle, & conſidérées du côté qu'elles ſont convexes vers leur axe (1459, 1461 & 1462).

1480. De-là, & de ce que les quadratures des deux 1ers ordres de nombres Figurés ſont effectivement celles de deux Paraboles des deux 1ers degrés, le Triangle, & la Parabole ordinaire, on peut conjecturer que les quadratures des ordres ſuivans de nombres Figurés, ſont celles des 1res Paraboles des degrés ſuivans. Et en effet l'équation de la Courbe des Pyramidaux étant $6a^2y = x^3 + 3ax^2 + 2a^2x$, celle des Triang. Pyram. $24a^3y = x^4 + 6ax^3 + 11a^2x^2 + 6a^3x$ (126), &c. on voit que toutes ces équations ſont toujours à des Paraboles de tous les degrés conſécutifs, mais

Que ces Courbes ſeront les 1res Paraboles de chaque degré, ou des portions de ces Paraboles.

M.E.C.D. 2017

différemment prises, de la maniere dont on a donné l'idée dans l'art. 1475.

Que des Espaces Asymptotiques Hyperboliques, mais modifiés, seront représentés par les sommes des Polygones ou Figurés réduits en fractions.

1481. L'analogie conduit à croire que si on réduit en fractions les différentes Suites de nombres Polygones, & de Figurés, les espaces curvilignes formés de ces différentes Suites d'Ordonnées décroissantes seront des espaces Hyperboliques Asymptotiques, ceux qui seront formés par des nombres Poligones appartenant tous à une même Hyperbole, & ceux qui seront formés par des nombres Figurés appartenant de suite à des Hyperboles de degrés consécutifs. C'est ce qui se trouve en effet.

Il est sûr déja qu'entre les Polygones les nombres Quarrés réduits en fractions appartiennent à la 2de & derniere Hyperbole du 3me degré, prise du côté où $x = \infty$ (1216), car x étant tous les nombres Naturels de suite, dont les Quarrés réduits en fractions sont $\frac{1}{xx}$, l'équation de cette Hyperbole est $y = \frac{1}{xx}$. De même l'équation de la Courbe des Triangulaires étant $y = \frac{xx+ax}{2a}$ (1475) elle devient, lorsqu'elle est réduite en fractions, $y = \frac{2a}{xx+ax} = \frac{1}{xx+x}$, qui est encore une équation à cette même Hyperbole, mais modifiée. Il en ira de même des autres nombres Polygones, qui ne sortent point d'un même degré.

Il est sûr aussi que les 1ers des Figurés, c'est-à-dire, les Naturels réduits en fractions, forment l'espace Asymptotique de l'Hyperbole ordinaire ou du 2^d degré. Nous venons de voir que les Triangulaires, les 2^ds des Figurés réduits en fractions appartiennent à la 2de Hyperbole du 3me degré, ce qui doit déterminer tous les Figurés suivans à appartenir aux Hyperboles des degrés suivans, & même à la derniere de chaque degré. Cette derniere circonstance paroîtra encore plus clairement, si l'on considere que les derniers termes des Figurés s'élevant toujours d'un ordre potentiel, & par conséquent s'abaissant toujours aussi d'un ordre, lorsqu'ils sont réduits en fractions, les dernieres Ordonnées des dernieres Hyperboles

M.E.C.D. 2017

de chaque degré s'abaiſſent toujours préciſément de même (1215, 1216, 1217, &c.)

1482. Donc les eſpaces Paraboliques & Hyperboliques Aſymptotiques répondent non-ſeulement à toutes les Suites poſſibles de Nombres Naturels entiers, ou réduits en fractions élevés à des puiſſances quelconques, mais encore à toutes les Suites de nombres Polygones ou Figurés entiers ou réduits en fractions.

Quadrature de tous les Eſpaces Spiraux par l'infini.

1483. S'il s'agiſſoit de plans formés, non par des lignes paralleles entr'elles, mais par des lignes concourantes en un point, on en auroit les quadratures par la même communication de rapports entre l'Infini & le Fini. Soit, par exemple, la Spirale d'Archimede, telle que c étant la circonférence du Cercle, dans lequel elle ſe décrit, r le rayon, x l'arc indéterminé de la circonférence correſpondant au mouvement, par lequel une portion de la Spirale a été décrite, & y le rayon de la Spirale correſpondant à x, on ait toujours $c. x :: r. y$, je dis que la quadrature de la Spirale, ou le rapport de l'eſpace Spiral au circulaire ſe trouvera par l'Infini.

Il faut imaginer un Cercle dont le rayon ſoit $= \infty$, & dont l'aire (1365) ſoit remplie par une infinité de Triangles égaux iſoſceles, infiniment petits par rapport à elle. Il faut d'un autre côté imaginer dans ce Cercle une Spirale pareillement infinie, dont l'aire ſoit remplie d'uu même nombre infini de Triangles, infiniment petits auſſi par rapport à elle, & croiſſans. Ils ne ſont pas iſoſceles comme ceux du Cercle; car la Spirale s'éloignant toujours du centre du Cercle à meſure qu'elle croît, ou s'étend, un Triangle Spiral quelconque, dont la baſe eſt un arc fini de la Spirale, a toujours un de ſes côtés plus grand que l'autre. Mais on doit concevoir que du centre du Cercle, où ſont les ſommets de tous les Triangles, il ſoit décrit par l'extremité du plus petit côté d'un Triangle Spiral, un arc circulaire fini, qui rendra chaque Triangle iſoſcele, en y négligeant la partie retranchée du plus grand côté, ou plutôt l'eſpace mixtiligne qui ſe formera à l'extremité de chaque Triangle; car cet eſpace qui eſt fini, eſt infiniment

M.E.C.D. 2017

petit par rapport au Triangle, qui eſt de l'ordre de ∞, & quoiqu'exiſtant, l'exactitude demande qu'on le néglige, comme dans l'exemple de l'art. 1203.

Tous les Triangles Spiraux ſont donc iſoſceles, & parce qu'ils ont tous le même angle au ſommet, ils ſont ſemblables. D'un autre côté le dernier, & plus grand Triangle Spiral eſt égal à un des Circulaires qui ſont tous égaux entr'eux. Donc tout Triangle Spiral eſt ſemblable à un Circulaire.

L'aire du Cercle eſt la ſomme des aires de tous les Triangles Circulaires, & l'aire de la Spirale eſt la ſomme des aires de tous les Triangles Spiraux, tous ſemblables aux Circulaires. Or les aires de deux Triangles ſemblables ſont comme les Quarrés de leurs côtés homologues, donc la ſomme des aires de tous les Triangles circulaires ſera à la ſomme des aires de tous les Spiraux, comme la ſomme des Quarrés des rayons du Cercle infini à la ſomme des Quarrés des y de la Spirale, qui ſont des côtés des Triangles Spiraux homologues à ceux des Circulaires.

Or la ſomme des Quarrés des rayons du Cercle eſt $\infty^2 \times \infty = \infty^3$, & les y de la Spirale croiſſent comme les nombres naturels, parce qu'ils croiſſent toujours comme les x, qui ſont toujours ſuppoſés croître comme ces nombres. La ſomme des Quarrés naturels eſt $\frac{\infty^3}{3}$. Donc l'eſpace Circulaire eſt au Spiral :: 3. 1. Et de-là ſuit le même rapport dans le Fini.

1484. Si dans une autre Spirale que celle d'Archimede, on avoit $c.\ x :: r^2.\ y^2$, les y ou côtés des Triangles infiniment petits de cette Spirale, priſe dans le Fini, ſeroient donc tels que leurs Quarrés croîtroient comme les nombres naturels. Or des grandeurs dont les Quarrés croiſſent comme les nombres naturels, ne peuvent être que comme les $\sqrt[2]{}$ de ces nombres. Donc les y ſont repréſentés par les $\sqrt[2]{}$ des nombres naturels. Donc l'eſpace Spiral, qui eſt comme la ſomme des Quarrés des y, eſt comme la ſomme des nombres naturels

M.E.C.D. 2017

rels $=\frac{\infty^2}{2}$. D'un autre côté la ſomme des quarrés de tous les côtés des Triangles égaux du Cercle, ſera comme $\infty \times \infty = \infty^2$. Donc l'eſpace Circulaire ſera au Spiral :: 2. 1.

1485. Si on a $c . x :: r^3 . y^3$, les y de la Spirale croiſſent donc comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, & ces y étant quarrés, on a pour l'eſpace Spiral la ſomme des nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$. Or cette ſomme eſt $\frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$ (584), la ſomme des quarrés de tous les côtés des Triangles égaux du Cercle, ſera $\infty^{\frac{2}{3}} \times \infty = \infty^{\frac{5}{3}}$. Donc l'eſpace Circulaire ſera au Spiral :: 5. 3.

1486. En général, ſi on a $c . x :: r^{\frac{n}{m}} . y^{\frac{n}{m}}$, les y de la Spirale ſont donc tels, qu'élevés à $\frac{n}{m}$ ils croiſſent comme les nombres naturels. Or les ſeuls nombres qui élevés à $\frac{n}{m}$ croiſſent comme les naturels, ſont les naturels élevés à $\frac{n}{m}$ car $x^{\frac{m}{n}}$ élevé à $\frac{n}{m}$, eſt $x^{\frac{m\,n}{n\,m}} = x$. Donc il faut prendre les quarrés des nombres naturels élevés à $\frac{m}{n}$, c'eſt-à-dire, élever les naturels à $\frac{2\,m}{n}$, & leur ſomme repréſentera l'eſpace Spiral. Par exemple, ſi on a $c . x :: r^{\frac{2}{3}} . y^{\frac{2}{3}}$, l'eſpace Spiral ſera comme la ſomme des naturels élevés à $\frac{3 \times 2}{2} = 3$. Or cette ſomme eſt $\frac{\infty^4}{4}$. Donc l'eſpace Circulaire ſera au Spiral :: 4. 1.

1487. Si on a $c^n . x^n :: r^m . y^m$, on a en tirant de ces 4 grandeurs la $\sqrt[n]{}$, $c . x :: r^{\frac{m}{n}} . y^{\frac{m}{n}}$. Ce qui retombe dans l'art. précédent.

1488. Donc le rapport des eſpaces des Spirales de tous

BIBLIOTECA DEL
M.E.C.D. 2017

les degrés aux Cercles circonſcrits, dépend des ſommes infinies des nombres naturels élevés à des puiſſances quelconques, ainſi que le rapport des eſpaces Paraboliques aux parallélogrammes circonſcrits. On voit que ces Cercles auſſi-bien que ces parallélogrammes repréſentent les Suites pleines, & que les premieres & véritables ſources des rapports finis de ces Figures ſont dans l'Infini.

Rapports de différens Conoides aux Cylindres circonſcrits, trouvés par l'infini.

1489. On trouvera dans les Solides la même communication des rapports entre l'Infini & le Fini. Il faut les concevoir comme formés de Solides élémentaires en nombre infini, dont ils ſeront les ſommes. Les Solides finis ou infinis croiſſans auront des Solides pleins circonſcrits, qui auront la même hauteur, & toujours la même baſe que la plus grande des Solides croiſſans, les rapports des ſolidités ſeront des rapports de ſommes infinies, & quand on conſiderera des Solides finis, il ne ſera point beſoin de paſſer par les infinis correſpondans: mais on pourra tout d'un coup tranſporter dans le fini les rapports des ſommes infinies.

Soit un Priſme dont la baſe eſt un polygone quelconque fini, & une Pyramide qui ait la même baſe, & la même hauteur ou axe. Le Priſme eſt le Solide plein circonſcrit à la Pyramide, Solide croiſſant. L'axe commun étant diviſé en une infinité de parties égales de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, la ſolidité du Priſme eſt la ſomme d'une infinité de polygones égaux, & ſemblables à celui de la baſe, dont chacun eſt multiplié par $\frac{1}{\infty}$, & la ſolidité de la Pyramide eſt la ſomme d'une même infinité de polygones ſemblables à celui de la baſe, mais dont les rayons, à les compter depuis le ſommet de la Pyramide, croiſſent comme les nombres naturels, & chacun d'eux eſt multiplié par $\frac{1}{\infty}$, ce qui fait que cette multiplication, la même de part & d'autre, n'eſt point à conſidérer. Donc le Priſme eſt à la Pyramide, comme la ſomme des aires de tous les polygones du Priſme eſt à la ſomme des aires de tous les polygones de la Pyramide. Les aires des polygones ſemblables

M.E.C.D. 2017

ſont comme les quarrés de leurs rayons, donc la ſomme des aires des polygones de la Pyramide eſt repréſentée par la ſomme des quarrés des nombres naturels, qui eſt $\frac{\infty^3}{3}$. En même temps la ſomme des aires des polygones du Priſme ne peut être repréſentée que par ∞^3, car chacune de ces aires eſt repréſentée par ∞^2, & elles ſont en nombre $= \infty$. Donc le Priſme eſt à la Pyramide :: 3. 1.

1490. Le Cylindre aura le même rapport au Cone, puiſque la démonſtration précédente laiſſe le polygone de la baſe indéterminé; ce polygone peut donc devenir infini, ou un Cercle, & alors le Priſme eſt un Cylindre, & la Pyramide un Cone.

1491. Si on conçoit qu'un eſpace Parabolique fini du 2d degré tourne autour de ſon axe, ce qui produit un Solide ou Conoïde parabolique, tous les plans qui le formeront ſeront des Cercles croiſſans depuis le ſommet, dont les rayons ſeront les Ordonnées de la Parabole. Or ces Ordonnées étant les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels, les aires de ces Cercles ſeront comme les nombres naturels, dont la ſomme eſt $\frac{\infty^2}{2}$. Le Cylindre circonſcrit au Conoïde ſera repréſenté par ∞^2. Donc il ſera au Conoïde :: 2. 1.

1492. On trouvera de même que les Ordonnées de la 1re Parabole du 3me degré croiſſant comme les $\sqrt[3]{}$ des nombres naturels (1456), les aires des Cercles qui feront le Conoïde de cette Parabole, ſeront comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$. Donc leur ſomme infinie $= \frac{3\infty^{\frac{5}{3}}}{5}$ repréſentera ce Conoïde, auquel le Cylindre circonſcrit ſera :: 5. 3. Pour la 2de Parabole du même degré, ſes Ordonnées croiſſant comme les nombres naturels élevés à $\frac{2}{3}$, & par conſéquent les aires des Cercles comme ces nombres élevés à $\frac{4}{3}$, la ſomme de ces aires $= \frac{3\infty^{\frac{7}{3}}}{7}$, repréſentera le Conoïde Parabolique auquel le Cylindre ſera :: 7. 3.

M.E.C.D. 2017

Il ſera aiſé d'en faire, ſi l'on veut, une formule générale.

1493. Les Conoïdes Paraboliques formés par la révolution des eſpaces extérieurs autour de l'axe des Paraboles, pris avec les Conoïdes formés par les eſpaces intérieurs, font le Cylindre circonſcrit, & par conſéquent, ſi dans la Parabole du 2^d degré le Conoïde intérieur eſt au Cylindre :: 1 . 2, le Conoïde extérieur lui eſt en même raiſon, & les deux Conoïdes ſont égaux; ſi dans la 1re Parabole du 3me degré le Conoïde intérieur eſt au Cylindre :: 3 . 5, l'extérieur lui eſt :: 2, 5, & ils ſont l'un à l'autre :: 3 . 2. &c. Mais pour avoir cela directement, il auroit fallu prendre un autre tour dans la même méthode.

Si dans la Parabole du 2^d degré on conſidere l'eſpace extérieur qui tourne autour du même axe, autour duquel tournoit l'eſpace intérieur, la Parabole eſt tranſpoſée, & ſon équation eſt $x^2 = y$, x étant une tangente au ſommet qui devient ſon axe, diviſé en parties égales, & dont les Abſciſſes croiſſent comme les nombres naturels. Les Ordonnées ne décrivent plus des aires de Cercles par la révolution, mais des ſurfaces Cylindriques toujours croiſſantes, qui multipliées chacune par une des parties égales de l'axe, font les Solides élémentaires, dont le Conoïde eſt compoſé. Il eſt inutile de conſidérer cette multiplication. Les ſurfaces Cylindriques ſont en raiſon compoſée des rayons des Cylindres, & de leurs hauteurs. Ici les rayons ſont les Abſciſſes croiſſantes comme les nombres naturels, & les hauteurs ſont les Ordonnées (y) de la Parabole égales à x^2, ou croiſſantes comme les quarrés des nombres naturels. Donc la ſomme infinie des ſurfaces Cylindriques eſt repréſentée par celle des nombres naturels élevés au Cube, qui eſt $\frac{\infty^4}{4}$. D'un autre côté le Cylindre circonſcrit eſt la ſomme d'une infinité de ſurfaces Cylindriques, dont les rayons ſont croiſſans comme les nombres naturels, & les hauteurs toutes égales à ∞^2, la plus grande des hauteurs des ſurfaces du Conoïde croiſſant. Donc ce Cylindre eſt repréſenté par une ſomme $= \frac{\infty^2}{2} \times \infty^2 = \frac{\infty^4}{2}$. Or $\frac{\infty^4}{2} \cdot \frac{\infty^4}{4}$ :: 2 . 1.

M.E.C.D. 2017

De même dans la 1re Parabole du 3me degré, on trouvera que les ſurfaces Cylindriques croiſſantes du Conoïde extérieur auront pour rayons les nombres naturels, & pour hauteurs ces nombres élevés au cube. Donc leur ſomme ſera repréſentée par $\frac{\infty^5}{5}$, ſomme des nombres naturels élevés à la puiſſance 4. Toutes les hauteurs des ſurfaces du Cylindre circonſcrit ſeront $= \infty^3$, & leurs rayons comme les nombres naturels. Donc ce Cylindre ſera repréſenté par $\infty^3 \times \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^5}{2}$, & $\frac{\infty^5}{2} \cdot \frac{\infty^5}{5} :: 5 \cdot 2$. Il en ira de même de tous les autres.

1494. En général de ce que 1° tout Fini eſt réellement un Infini, 2° tous les Finis n'ont entr'eux que des rapports finis, 3° les Infinis peuvent avoir des rapports finis, il ſuit que tous les Infinis qui ont des rapports finis, ont des Finis correſpondans qui ont les mêmes rapports, & que quand des rapports ſont communs à des Infinis & à des Finis conſidérés comme l'aſſemblage de toutes leurs parties, les ſources de ces rapports ſont dans l'Infini, & non dans le Fini, parce que le Fini eſt un Infini, & que l'Infini n'eſt pas un Fini.

Ordres des Solides Aſymptotiques trouvés par des ſommes infinies.

1495. On voit aſſez, par ce qui a été dit, qu'il ne faut pas eſpérer de trouver des rapports finis entre les Solides Aſymptotiques quelconques, & leurs Cylindres circonſcrits. Mais on pourra trouver l'ordre des Solides Aſymptotiques quelconques, en les conſidérant comme formés d'une infinité de Cylindres élémentaires.

Soit la Courbe Aſymptotique $M\mu C$, dont l'eſpace Aſymptotique tourne autour de AM, 1re révolution (1431). Le Solide qui ſe forme, eſt compoſé 1° d'un Conoïde qui a pour baſe Rm, & pour hauteur RM, 2° d'un Conoïde tronqué, qui a pour baſe $r\mu$, & pour hauteur rR, & toujours ainſi de ſuite de pareils Conoïdes tronqués. Il eſt clair que le 1er Conoïde & les Conoïdes tronqués ſuivans ſeront du même ordre que des Cylindres de même baſe & de même hauteur: & comme il ne s'agit ici que d'ordre, je les prends tous pour des Cylindres, & le Solide pour la ſomme de ces FIG. XVIII.

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

Cylindres posés tous les uns sur les autres parallelement à la base AB, & de sorte que leurs axes soient dans la même ligne MA.

Les rayons de ces Cylindres élémentaires seront AP, Ap, &c. c'est-à-dire, les nombres naturels, & leurs hauteurs ou axes seront RM, $rR = sm$, &c. c'est-à-dire, les différences des Ordonnées. Il est vrai que le dernier Cylindre aura pour hauteur la derniere Ordonnée, & non une différence, mais la Suite des Cylindres ne laissera pas d'être très-réguliere : car il faut concevoir la Courbe MC terminée à la 1re Ordonnée de son dernier ordre (1384), & comme les différences sont toujours de l'ordre immédiatement inférieur à celui des Ordonnées (1380), & qu'elles changent d'ordre en même temps que les Ordonnées (1379), la derniere Ordonnée est de l'ordre des différences qui ont été les hauteurs des Cylindres précédens, car quoiqu'il y ait toujours deux dernieres Ordonnées égales à cause du paralléliſme supposé de la Courbe, on peut ici n'en considérer qu'une.

Dans une Courbe Asymptotique terminée à la 1re Ordonnée de son dernier ordre, il y a toujours une infinité d'Ordonnées de l'ordre immédiatement supérieur (1388 & 1389), donc aussi une infinité de différences de l'ordre de la derniere Ordonnée. D'un autre côté AB est infinie pendant un cours infini de la Courbe. Donc il y a une infinité de Cylindres qui ont pour rayon AB de l'ordre de ∞, ou pour base ∞^2, & pour hauteur une grandeur de l'ordre de la derniere Ordonnée, & c'est de cette hauteur que dépend l'ordre du Solide Asymptotique total.

1496. Si la derniere Ordonnée est $\frac{1}{\infty}$, il y a une infinité de Cylindres élémentaires dont la hauteur est de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, & la base de l'ordre de ∞^2, & qui par conséquent sont de l'ordre de ∞. Leur somme seroit $= \infty^2$, si toutes les bases étoient $= \infty^2$, mais parce qu'il n'y a que la derniere qui le soit, & qu'elles sont toutes moindres, & enfin la premiere égale au moindre $\propto^2$ possible, que d'ailleurs le nombre infini

M.E.C.D. 2017

de ces Cylindres n'eſt pas $= \infty$, leur ſomme ne peut être qu'entre ∞^2 & ∞. Donc le Solide total Aſymptotique eſt d'un ordre moyen entre ∞^2 & ∞.

1497. Si la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty^2}$, il y a une infinité de Cylindres, qui ſont $\frac{1}{\infty^2} \times \infty^2$, ou Finis, & leur ſomme ou le Solide total eſt de l'ordre de ∞.

1498. Si la derniere Ordonnée eſt $\frac{1}{\infty^3}$, il y a une infinité de Cylindres de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, dont la ſomme eſt Finie.

1499. Il eſt aiſé de voir par là ce que ſeront les Solides de la 1re révolution pour des Courbes, dont les dernieres Ordonnées ſeront des Infiniment petits radicaux, ou purs, ou compris entre $\frac{1}{\infty}$ & $\frac{1}{\infty^2}$.

1500. Quant aux Solides Aſymptotiques de la 2de révolution, leurs Cylindres élémentaires auront tous une hauteur $= 1$, & une baſe qui ſera le quarré de chaque Ordonnée. La Courbe étant terminée à la 1re Ordonnée de ſon dernier ordre, il y aura une infinité d'Ordonnées de l'ordre immédiatement ſupérieur, dont les quarrés détermineront l'ordre du Solide total. Ces quarrés rendront cette conſidération un peu plus difficile, mais ce ne ſera au fond que ce qu'on a vu dans la Sect. précédente, & il ſeroit inutile de le répéter ici.

1501. Juſqu'ici en conſidérant dans les Solides la communication de rapports entre l'Infini & le Fini, nous n'avons conçu les Solides que comme formés par des Solides élémentaires, ou par des Cylindres équivalens tous poſés parallelement les uns ſur les autres. Mais ſi l'on veut concevoir les Solides comme formés par des Solides élémentaires concourans en une ligne commune, tel que ſeroit le Cylindre formé par des Priſmes triangulaires infiniment petits concourans à ſon axe, ſelon l'idée de l'art. 1369., on retrouveroit la même communication de rapports entre l'Infini & le Fini, par exemple, le même rapport du Cylindre au Cone. Car l'élément du Cone ſeroit un Priſme triangulaire coupé en deux du haut en bas par un plan diagonal, & ce Priſme

M.E.C.D. 2017

ſeroit la ſomme d'nne infinité de triangles iſoſceles & ſemblables, dont les côtés croîtroient comme les nombres naturels, & les aires comme les quarrés de ces nombres. Donc le Priſme élémentaire du Cone ſeroit repréſenté par $\frac{\infty^3}{3}$. En même temps ce Priſme entier eſt l'élément du Cylindre qui eſt repréſenté par ∞^3, puiſque l'aire de chacun de ſes Triangles tous égaux eſt repréſentée par ∞^2, & qu'ils ſont en nombre $= \infty$. Donc l'élément du Cylindre eſt à celui du Cone, ou le Cylindre au Cone :: 3 . 1, cet exemple ſuffira.

Qu'il y a une infinité de grandeurs finies abſolument inconnues, & telles que leur rapport aux grandeurs finies connues ne peut être déterminé ni en nombres, ni en lignes.

1502. Nous conclurrons cette Théorie par une eſpece de non-communication de rapport entre l'Infini & le Fini, qui pourroit paroître ſurprenante, ſi les principes n'en étoient déja répandus dans tout cet ouvrage. Il y a entre des grandeurs Finies des rapports finis, qui parce qu'ils viennent de l'Infini, nous ſont abſolument inconnus.

On a vu (460, &c. 464) qu'il y a quatre eſpeces de nombres Finis incommenſurables.

Les 1ers ſont les $\sqrt[n]{\ }$ de tous les nombres tels qu'ils ne ſont points la puiſſance n.

Les 2^ds ſont tous les nombres $n^{\frac{\propto}{\infty}}$ tels que dans l'expoſant $\frac{\propto}{\infty}$, $\propto$ & ∞ n'ont qu'une différence Finie.

Les 3mes ſont les $\infty^{\frac{n}{\infty}}$, n numérateur de l'expoſant étant un nombre Fini.

Les 4mes ſont les $\infty^{\frac{\propto}{\infty}}$, le numérateur & le dénominateur de l'expoſant ayant une différence Infinie.

Les Incommenſurables de la 1re eſpece ſont les ſeuls qui aient été connus juſqu'à préſent. Leur nature fait qu'il eſt impoſſible de les exprimer en nombres, on ne peut qu'en approcher toujours de plus en plus, mais il n'y en a aucun qui ne ſe détermine exactement en lignes, par exemple, $\sqrt[2]{2}$, qui ne ſe peut déterminer exactement en nombres, eſt

la

M.E.C.D. 2017

la diagonale de tout quarré. La raiſon de cette différence eſt que les nombres ſont des quantités *diſcretes*, qui laiſſent toujours entr'elles des intervalles, & que les lignes ſont des quantités *continues*. Pour avoir $\sqrt[2]{2}$ en nombres, il faudroit remplir actuellement par une infinité de nombres l'intervalle qui eſt entre 1 & 2, ce qui eſt impoſſible : mais pour avoir $\sqrt[2]{2}$ en ligne, il ne faut que tracer la diagonale d'un quarré, parce qu'on ſait que le quarré de cette diagonale ſera double du quarré dont elle eſt diagonale.

Ce rapport ou d'autres pareils des Incommenſurables de la 1re eſpece à des nombres exacts & commenſurables, font que quoiqu'on ne les puiſſe exprimer en nombres, on les exprime toujours en lignes : mais cette raiſon ceſſe entierement à l'égard des Incommenſurables des trois autres eſpeces ; ils n'ont à des nombres commenſurables aucun rapport qu'on puiſſe connoître, & qui puiſſe ſervir à les déterminer en lignes.

Cela prouve ſeulement que ces Incommenſurables ne pourront être déterminés en lignes, & non pas qu'il n'y aura pas de lignes qui expriment ces Incommenſurables. Il y en aura certainement, mais telles que leur rapport à toute grandeur commenſurable ſera éternellement inconnu.

1503. Il eſt bien ſûr qu'il y a quelque ligne droite égale à la circonférence du Cercle, & qui par conſéquent a un rapport fini au diametre. Si cette droite tant cherchée eſt ou commenſurable, ou un Incommenſurable de la 1re eſpece, il ſera poſſible de la trouver, & de la déterminer, quelque compliquée que puiſſe être la conſtruction dont elle dépendra : mais ſi elle eſt un Incommenſurable de quelqu'une des trois autres eſpeces, on ne la déterminera jamais. Et ſi on peut démontrer qu'elle n'eſt ni commenſurable, ni incommenſurable de la 1re eſpece, il eſt démontré que la Quadrature du Cercle eſt impoſſible, & par conſéquent le Probleme eſt réſolu.

BIBLIOTECA

M.E.C.D. 2017

1504. Comme on n'a connu juſqu'ici que des commenſurables, ou la 1re eſpece d'Incommenſurables, on a crû la Quadrature du Cercle poſſible en elle-même, & tant d'efforts employés inutilement pour la trouver n'ont été une preuve que de la difficulté du Probleme, ou du défaut de l'art. Mais les trois nouvelles eſpeces d'Incommenſurables font voir que cette Quadrature pourroit être impoſſible en elle-même, du moins pour l'eſprit humain.

1505. Il y a même toute apparence qu'elle eſt impoſſible par cet endroit. $\infty^{\frac{1}{\infty}}$ eſt un Incommenſurable de la 3me eſpece, plus grand que 1, dont la différence à 1 eſt finie, mais finie indéterminable en petiteſſe, ou telle que ſon quarré eſt infiniment petit (357). Je ſuppoſe que le diametre du Cercle étant 1, ſa circonférence ſoit $3\infty^{\frac{1}{\infty}}$, je dis qu'on trouvera tout ce qu'on trouve préſentement dans ce Probleme. La circonférence ſera un peu plus que triple du diametre : mais on ne pourra déterminer la fraction qu'il faudroit ajouter à 3 pour avoir la circonférence. Car quelque fraction qu'on trouve, elle ſera déterminable, puiſqu'elle ſera déterminée ; or il en faudroit une indéterminable : car $\infty^{\frac{1}{\infty}} = 1 + \frac{1}{x}$, x étant un fini indéterminable en grandeur, & $3\infty^{\frac{1}{\infty}} = 3 + \frac{3}{x}$.

1506. Il ſera même impoſſible en ce cas là de démontrer directement l'impoſſibilité de la Quadrature, c'eſt-à-dire de démontrer que le diametre eſt à la circonférence :: 1 . $3\infty^{\frac{1}{\infty}}$, d'où s'enſuivroit l'impoſſibilité de trouver une ligne $= 3\infty^{\frac{1}{\infty}}$; car il pourra ſeulement n'être pas impoſſible de démontrer, que la circonférence ne ſoit ni commenſurable au diametre, ni incommenſurable de la 1re eſpece, mais parmi les trois autres eſpeces d'Incommenſurables, dont elle ſera

M.E.C.D. 2017

néceſſairement une des grandeurs, il ſera impoſſible de déterminer, ni de quelle eſpece elle ſera, ni quelle elle ſera, puiſque ces trois eſpeces ſont abſolument inconnues.

1507. Il eſt bon de ſavoir que ces trois eſpeces exiſtent, & que comme elles contiennent une infinité d'infinités de grandeurs finies, dont les rapports à toutes les grandeurs commenſurables ou incommenſurables de la 1re eſpece, ne peuvent abſolument être connus, on doit trouver en Geométrie des lignes qui aient à d'autres ces rapports indéterminables, que même on en doit trouver ſouvent, qu'il ne ſeroit point du tout étonnant que le rapport de la circonférence du Cercle au diametre fût de ce nombre, qu'il y a même toute apparence qu'il en eſt, & que toutes les autres rectifications ou quadratures qu'on ne trouve point, pourroient bien avoir une impoſſibilité priſe dans la même cauſe.

M.E.C.D. 2017

SECTION VIII.

Sur les forces des Corps en général.

Ce que c'eſt que la force des Corps.

1508. UN Corps n'a de force que par le mouvement, ou, ce qui eſt le même, il n'a de force qu'autant qu'il eſt en mouvement, de ſorte que quand il a plus de mouvement, il a plus de force, & au contraire.

1509. La quantité de mouvement d'un corps, qu'on appelle auſſi ſa force, eſt le produit de ſa maſſe par ſa viteſſe. Car il eſt d'autant plus capable d'un grand effet, ou a d'autant plus de force qu'il eſt plus grand, & ſe meut plus vîte, ou au contraire.

1510. Comme deux produits formés de différentes grandeurs peuvent être égaux, deux Corps inégaux en maſſe & en viteſſe peuvent avoir des quantités de mouvement ou des forces égales. Ainſi ſi le Corps $A > a$ a pour viteſſe $u < V$, & que $A . a :: V . u$, Au eſt $= aV$.

1511. Si de plus, ces deux Corps ſont diſpoſés de maniere que l'un ne puiſſe exercer ſa force ſans ſurmonter celle de l'autre, ils demeureront tous deux immobiles, quoiqu'avec une tendance au mouvement, parce qu'une force égale n'en peut ſurmonter une égale. C'eſt là le principe général de tout Equilibre, qui eſt par conſéquent un Repos produit par deux forces égales qui tendent à des effets oppoſés.

1512. Une viteſſe infiniment petite peut être priſe pour le Repos. On la peut exprimer par $\frac{u}{\infty}$, u étant une viteſſe finie quelconque.

1513. $a \times \frac{u}{\infty}$ eſt donc une force infiniment petite ou nulle par rapport à toute force $a \times u$.

1514. De-là vient qu'on dit que la force de la Percuſſion eſt infinie par rapport à celle de la ſimple Peſanteur

M.E.C.D. 2017

Car lorſqu'un corps, quelque peſant qu'il ſoit, eſt en repos, ſa force eſt $\frac{au}{\infty}$, & ſi le moindre corps donne un choc, ou fait une percuſſion, il a une viteſſe finie, quelque petite qu'elle ſoit, & ſa force eſt au.

Viteſſe.

1515. La viteſſe eſt le rapport de l'Eſpace parcouru au Temps pendant lequel il a été parcouru, de ſorte que plus l'eſpace eſt grand, & le temps petit ou court, plus la viteſſe eſt grande, ou au contraire. Donc e étant l'eſpace, & t le temps, $u = \frac{e}{t}$.

Viteſſes finies, ou infinies, ou infiniment petites dans des temps, ſoit finis, ſoit infiniment petits.

1516. Donc dans un temps fini la viteſſe ne peut être infinie, ſi l'eſpace n'eſt infini, ni infiniment petite, ſi l'eſpace n'eſt infiniment petit ou de.

1517. De même dans un temps infiniment petit dt, la viteſſe ne peut être infinie, ſi l'eſpace n'eſt fini, ni infiniment petite, ſi l'eſpace n'eſt infiniment petit du 2^{d} ordre ou $d\,de$.

Directions des Forces.

1518. Puiſque dans le cas de l'Equilibre une force demeure ſans action (1511), on voit en général qu'il doit y avoir d'autres cas où une force perdra une partie de ſon action; c'eſt-à-dire, qu'elle ſera dans des circonſtances où elle fera moins que ce qu'elle eût pu par elle-même. Pour ce qui eſt de faire plus, il eſt clair que nulles circonſtances ne lui en ſauroient donner le pouvoir, & qu'il y auroit contradiction. Seulement pluſieurs forces peuvent ſe joindre enſemble, & faire plus qu'une ſeule. Ainſi ſi une force, c'eſt-à-dire, un corps mû avec une certaine viteſſe, frappe un autre corps perpendiculairement, il y fait toute l'impreſſion qu'il y peut jamais faire, étant mû de cette viteſſe : mais il en fait une moindre, s'il frappe obliquement avec la même viteſſe. Il en va de même de toutes les impulſions ou tractions, où il faut toujours conſidérer ſelon quel angle ou quelle direction la force s'applique au corps qui doit être mû.

1519. Quand la force agit pleinement, ſon effet la repréſente, c'eſt-à-dire, peut être pris pour ſa meſure, puiſque c'eſt tout ce qu'elle peut; & quand deux forces différentes

M.E.C.D. 2017

agiſſent ainſi, leurs effets les repréſentent, ou les meſurent, ou leur ſont proportionnels.

1520. Mais quand deux forces ou cauſes ont leurs actions diminuées par les circonſtances, les effets ne ſont proportionnels qu'aux forces ou cauſes modifiées comme elles doivent l'être. Ainſi ſi de deux forces différentes l'une donne un choc perpendiculaire, & l'autre un oblique, les deux effets ou impreſſions ſont comme la maſſe de la 1re, multipliée par ſa viteſſe, & par le Sinus de l'angle droit, & la maſſe de la 2de multipliée par ſa viteſſe, & par le Sinus de l'angle aigu qu'on aura ſuppoſé. Et ſi les deux forces, c'eſt-à-dire, les deux maſſes & les deux viteſſes ſont égales, & les chocs différens, les effets ſeront comme les deux Sinus correſpondans.

Force ſimplement motrice, & Force accélératrice.

1521. Outre la maniere de l'application de la force au corps mû, en quoi conſiſte la *direction* de la force, il y a encore la durée de l'application. Ou la force ne s'applique au corps qui doit être mû, qu'autant de temps préciſément qu'il en faut pour le choc, après quoi le corps ſe ſépare de la force motrice; ou cette force s'applique continuellement au corps, le pourſuit dans ſon mouvement, & renouvelle toujours ſon impreſſion ſur lui. Dans le 1er cas, le mouvement du corps eſt *uniforme*, c'eſt-à-dire, qu'il a toujours, & à l'infini, une viteſſe égale, ſuppoſé qu'il ne rencontre point d'obſtacles qui la diminuent. Dans le 2d, le mouvement eſt *accéléré*, parce que la force qui meut, augmente dans le ſecond inſtant l'effet du premier, & toujours ainſi de ſuite, tant qu'elle eſt appliquée. C'eſt de cette 2de maniere que l'on conçoit qu'agit la force de la Peſanteur, quelle qu'elle ſoit, toujours appliquée aux corps qu'elle meut vers le centre de la Terre. Au mouvement accéléré s'oppoſe le *retardé*, tel que celui d'une Pierre que j'aurois jettée en l'air de bas en haut.

1522. J'appelle force *ſimplement motrice*, celle qui n'eſt appliquée qu'autant qu'il faut pour le choc, & force *accélératrice* celle qui l'eſt toujours; car il ſuffit de conſidérer le mouvement accéléré, puiſque le retardé n'eſt que le même, renverſé. Je cherche la meſure de l'une & de l'autre de ces forces,

M.E.C.D. 2017

qui doit être l'effet de chacune, en ſuppoſant que chacune agiſſe pleinement.

Il eſt clair d'abord que l'effet de la force ſimplement motrice, eſt un certain eſpace parcouru en un certain temps par le corps qu'elle a mû, & qu'elle eſt d'autant plus grande que cet eſpace eſt plus grand, & ce temps plus court, ou au contraire. Donc ſa meſure ou ſon expreſſion eſt $\frac{e}{t}$.

1523. Une force ſimplement motrice n'eſt ni variable, puiſqu'elle n'agit qu'un inſtant, ou pendant le moindre temps poſſible, ni, à proprement parler, conſtante, & cela par la même raiſon, car il faudroit qu'elle agît également pendant tous les inſtans de ſon action: or elle n'en a qu'un. Mais la force accélératrice qui agit pendant pluſieurs inſtans peut être ou conſtante, ou variable; conſtante, ſi ſon action eſt égale pendant des inſtans égaux; variable, ſi c'eſt le contraire. *Force accélératrice conſtante. Propriétés du mouvement qu'elle produit.*

1524. Je la ſuppoſe conſtante, comme on conçoit d'ordinaire qu'eſt la Peſanteur. En ce cas, ſi pendant le 1er inſtant elle a imprimé au corps un certain degré de viteſſe, elle lui en imprime un égal dans un 2^d^ inſtant égal, & toujours ainſi de ſuite. Donc la ſomme des viteſſes, ou la viteſſe totale acquiſe par le corps au bout d'un certain temps déterminé, ſera toujours comme la ſomme des inſtans qui compoſeront ce temps déterminé, ou comme ce temps, & les différentes viteſſes totales acquiſes au bout de différens temps ſeront comme ces temps.

1525. Ce qui meſurera la force accélératrice, ou exprimera combien elle eſt plus grande ou plus petite, doit être auſſi bien que pour la force ſimplement motrice, un rapport de l'eſpace au temps, puiſque toutes deux font parcourir un eſpace dans un temps, & que toutes deux ſont d'autant plus grandes qu'elles font parcourir un plus grand eſpace dans un temps plus court, ou au contraire. Mais puiſqu'elles ſont différentes, il doit y avoir une différence, & une différence tirée de leur nature. La force accélératrice étant toujours appliquée au corps, & l'effet de cette application continuelle étant un

M.E.C.D. 2017

certain eſpace parcouru : plus la force accélératrice ſera grande, plus l'eſpace parcouru ſera grand, & le temps court pendant lequel l'eſpace ſera parcouru, & pendant lequel la force aura eu beſoin d'être appliquée au corps pour le lui faire parcourir. Donc cette force comme motrice enferme l'idée du temps pendant lequel un eſpace a été parcouru, & comme accélératrice l'idée de ce même temps pendant lequel elle a été appliquée ; & il eſt clair que l'idée du temps n'entre pas de cette 2de maniere dans la force ſimplement motrice. Donc la meſure de la force ſimplement motrice étant l'eſpace diviſé par le temps, ou $\frac{e}{t}$, celle de la force accélératrice ſera l'eſpace diviſé par le quarré du temps, ou $\frac{e}{tt}$.

1526. Puiſque la force accélératrice eſt ſuppoſée conſtante, $\frac{e}{tt}$ eſt donc un rapport conſtant. Donc E étant plus grand que e, & T plus grand que t, on a toujours $\frac{E}{TT} = \frac{e}{tt}$, ou $E.e :: TT.tt$; c'eſt-à-dire, que les eſpaces parcourus en différens temps ſont comme les quarrés des temps.

1527. Donc ſi l'on conçoit le temps total diviſé en parties égales, par exemple, en Minutes, & que l'eſpace parcouru pendant la 1re Minute ſoit 1, celui qui ſera parcouru pendant 2 Minutes ſera 4, pendant 3 Minutes 9, &c. Et ſi on prend ſéparément l'eſpace parcouru pendant chaque Minute, celui de la 1re eſt 1, de la 2de 3, de la 3me 5, &c. & ainſi de ſuite ſelon les nombres impairs.

1528. Les viteſſes acquiſes pendant le cours de chaque temps égal, ſont égales, la force accélératrice étant conſtante (1370) : donc ſi la viteſſe acquiſe pendant la 1re Minute a fait parcourir 1, la viteſſe acquiſe pendant la 2de aura auſſi fait parcourir 1. Mais l'eſpace parcouru pendant cette 2de Minute eſt 3 (1527) ; donc ſi cet eſpace 3 eſt conçu diviſé en 1 & 2, 1 étant néceſſairement parcouru en vertu de la viteſſe acquiſe pendant la 2de Minute, il faut que 2 ait été parcouru en vertu de la viteſſe qui étoit toute acquiſe à la

fin

M.E.C.D. 2017

fin de la 1re Minute. Donc ſi à la fin de la 1re Minute la force accélératrice avoit ceſſé d'être appliquée au corps, il n'auroit parcouru que 2, eſpace double de celui qu'il avoit parcouru pendant la 1re par un mouvement accéléré. Or ſi à la fin de la 1re Minute il eût été abandonné par la force accélératrice, ſon mouvement ſeroit devenu uniforme, puiſqu'un mouvement n'eſt accéléré ou uniforme, que parce que la force eſt ou n'eſt pas toujours appliquée au corps. Donc dans la 2de Minute il auroit parcouru par un mouvement uniforme un eſpace double de celui qu'il avoit parcouru dans la 1re par un mouvement accéléré.

1529. Et comme un eſpace quelconque peut être pris pour 1, il ſuit en général que ſi au bout d'un eſpace quelconque un corps eſt abandonné par la force accélératrice, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi avec la viteſſe qu'il a acquiſe lorſqu'il eſt parvenu au bout de cet eſpace, il vient à ſe mouvoir d'un mouvement uniforme, il parcourra dans un même temps un eſpace double de celui qu'il avoit parcouru par un mouvement accéléré.

1530. Par là on change aiſément tout mouvement accéléré en uniforme; car au lieu de l'eſpace *e* parcouru en un certain temps par le mouvement accéléré, il n'y a qu'à prendre 2*e* qui ſeroit parcouru dans le même temps d'une viteſſe uniforme égale à celle que le corps avoit acquiſe au dernier inſtant de ſon mouvement.

1531. Toute viteſſe uniforme eſt d'un certain degré déterminé, & par conſéquent elle eſt telle qu'elle pourroit avoir été originairement la viteſſe accélérée d'un corps tombant, qui étant parvenue à ce degré, ſeroit devenue uniforme ſelon l'idée préſente. Or en ce cas l'eſpace *e* étant celui que le corps auroit parcouru, ou *h* la hauteur d'où il ſeroit tombé, 2*e* ou 2*h* ſeroit l'eſpace que la viteſſe devenue uniforme lui feroit parcourir dans un temps égal à celui de ſa chûte. Donc ſi on prend *h* pour la hauteur, d'où un corps aura dû tomber pour acquerir un certain degré de viteſſe, 2*h* ſera l'eſpace que ſera

M.E.C.D. 2017

parcourir à un corps dans le même temps une viteſſe uniforme de ce même degré.

1532. Donc, que dans un certain temps le corps ait parcouru l'eſpace e ou h par un mouvement accéléré, ou $2e$ ou $2h$ par un mouvement uniforme, dont la viteſſe ſoit égale à celle qu'il aura acquiſe au dernier inſtant du mouvement accéléré, c'eſt la même choſe.

1533. Puiſque E ou H. e ou h :: TT. tt (1526), on a T. t :: $\sqrt{H}$. $\sqrt{h}$. Et puiſque les viteſſes acquiſes au bout de différens temps, ſont comme ces temps (1524), ces viteſſes ſont donc comme les racines des hauteurs correſpondantes.

1534. Donc les hauteurs ſont comme les quarrés des viteſſes correſpondantes, ou les repréſentent.

1535. Et puiſque ce qu'eſt h dans la viteſſe accélérée, $2h$ l'eſt dans la viteſſe uniforme égale à la derniere viteſſe acquiſe par une chûte faite de la hauteur h (1532), $2h$ repréſentera le quarré de cette viteſſe uniforme, comme h repréſente celui de la viteſſe accélérée (1534).

Voilà tout le Siſteme de Galilée ſur la Peſanteur démontré *à priori*, par les ſeules définitions néceſſaires de force ſimplement motrice & accélératrice, & indépendamment de toute expérience.

Il eſt vrai que nous avons ſuppoſé avec Galilée, & avec preſque tous les Philoſophes la peſanteur ou ſon action conſtante, & que cette ſuppoſition peut avoir quelque difficulté. Car quoiqu'une force ſoit toujours appliquée à un corps, il paroît que dans le 1er inſtant où elle le trouve en repos, & lui donne un coup, elle lui doit imprimer une plus grande viteſſe que dans le 2^d inſtant où elle le trouve fuyant devant elle, & ſe dérobant à ſon action. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner cette difficulté, il ſuffit que le Siſteme de Galilée ſoit généralement reçu, & nous l'allons porter dans l'Infini, où il peut être utile de le conſidérer.

Force accélératrice, & Force ſimplement motrice, conſidérées dans l'Infini.

1536. Il ne s'agit que de forces Finies, ſoit ſimplement motrices, ſoit accélératrices. Elles ſont toujours Finies dans quelque temps qu'elles agiſſent, ſoit infiniment petit, ſoit

M.E.C.D. 2017

fini, ſoit infini; car certainement le temps de la durée de leur action ne change rien à leur nature de force, il ne peut que modifier leur action. Donc $\frac{e}{t}$ étant l'expreſſion d'une force ſimplement motrice, & $\frac{e}{tt}$ celle d'une force accélératrice, finies l'une & l'autre, ces deux expreſſions doivent toujours être celles de deux forces Finies, quelque différence ou quelque modification que puiſſe y apporter la ſuppoſition des temps.

1537. Je commence par la force accélératrice, quoique moins ſimple que l'autre, agiſſante dans un temps infiniment petit ou inſtant, qui ſera dt, infiniment petit de t, temps Fini. Cette force eſt non-ſeulement toujours Finie, mais elle eſt toujours accélératrice, même dans l'inſtant dt; car le temps n'étant pas moins diviſible que l'eſpace, l'inſtant dt peut être conçu comme formé d'une infinité de ddt, temps infiniment petits du 2^{d} ordre, pendant leſquels la force accélératrice a été toujours appliquée au corps ſur lequel elle agiſſoit. Or dans $\frac{e}{tt}$, expreſſion de la force accélératrice, e eſt un eſpace fini total, qu'elle a fait parcourir pendant tout le temps fini t, dont il faut prendre le quarré, parce que la force eſt accélératrice. Donc le temps total étant ici dt, il en faut prendre auſſi le quarré dt^2, qui ſera néceſſairement le dénominateur de la fraction qui exprimera la force. Et comme cette force eſt toujours finie, le numérateur de la fraction ou l'eſpace total parcouru ne peut être que dde, eſpace infiniment petit du 2^{d} ordre. Donc l'expreſſion de la force accélératrice agiſſante dans un inſtant dt, eſt $\frac{dde}{dt^2}$.

1538. Donc un corps qui tombe par ſa ſeule peſanteur, ne parcourt dans le 1er inſtant dt de ſa chûte, qu'un eſpace infiniment petit du 2^{d} ordre.

1539. Tous les inſtans étant ſuppoſés égaux, le corps dans le 2^{d} inſtant parcourt $3dde$, dans le 3me $5dde$, &c. ou, ce qui revient au même, l'eſpace total parcouru au bout du

BIBLIOTECA DEL OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

2^d instant est $4dde$, au bout du 3me $9dde$, &c. jusqu'à ce qu'enfin le coëfficient de dde étant le moindre infini possible de la Suite des quarrés, il change le dde en de, c'est-à-dire, que l'espace total parcouru sera infiniment petit du 1er ordre. La $\sqrt{}^2$ de ce coëfficient infini de dde, sera le nombre des instans dt, pendant lesquels de a été parcouru : or ce coëfficient infini étant le moindre infini possible de la Suite des quarrés, sa $\sqrt{}^2$ est finie. Donc de espace infiniment petit du 1er ordre a été parcouru pendant un nombre Fini, mais indéterminable en grandeur, d'instans dt, ou absolument dans un temps infiniment petit du 1er ordre.

1540. Le nombre fini indéterminable en grandeur des instans dt, pendant lesquels de a été parcouru, étant x, & $x^2 = \propto$, on aura donc l'espace $x^2 dde = \propto dde = de$ parcouru dans le temps $x\,dt$, & pour l'expression de la force, $\frac{x^2 dde}{x^2 dt^2} = \frac{\propto dde}{\propto dt^2} = \frac{de}{\propto dt^2} = \frac{de}{dt}$, grandeur Finie.

1541. Quand le nombre des dt est devenu $= \propto$, on a l'espace $\propto^2 dde$ parcouru pendant le temps $\propto dt$, or $\propto^2 dde = e$, & $\propto dt = t$. Donc un espace total Fini a été parcouru dans un temps Fini, & l'expression de la force est $\frac{e}{tt}$, déja trouvée.

1542. Dans le 1er instant de la chûte du corps, la viteſſe n'a été qu'infiniment petite du 1er ordre, puisqu'un espace dde a été parcouru dans un temps dt. Ensuite $3dde$ étant parcouru dans un 2^d dt égal, $5dde$, dans un 3me dt, &c. la viteſſe est toujours infiniment petite, jusqu'à ce que le coëfficient de dde soit $\propto$, car alors $\propto dde = de$ étant parcouru dans un dt, la viteſſe est Finie. Or le coëfficient qui exprime le nombre des dde parcourus dans un dt, étant toujours un terme de la Suite des Impairs, il ne peut devenir Infini, que quand cette Suite a eu un nombre infini de termes, ce qu'il est aisé de voir, ou après qu'il y a eu un nombre Infini égal de dt, c'est-à-dire, après un temps Fini. Donc

M.E.C.D. 2017

ce n'eſt qu'après un temps Fini qu'un eſpace *de* infiniment petit du 1er ordre vient à être parcouru dans un inſtant *dt* du même ordre.

1543. Donc il faut à la force accélératrice un temps Fini pour imprimer au corps une viteſſe finie, ou, ce qui eſt le même, elle a beſoin d'être appliquée pendant un temps Fini.

1544. Quand l'eſpace parcouru dans un *dt* eſt $\propto dde$, l'eſpace total parcouru eſt le produit de *dde* par la ſomme de la progreſſion arithmétique des Impairs, depuis 1 juſqu'à $\propto$, ſon premier terme infini. Or le nombre des termes qu'elle a dans cette étendue eſt la moitié moindre que celui des termes de la Suite naturelle, qui commenceroit par 1, & ſe termineroit par le même $\propto$. Le nombre des termes de la Suite naturelle ſeroit $\propto$, donc celui de la Suite des Impairs eſt $\frac{\propto}{2}$. Sa différence eſt 2. Donc la ſomme cherchée eſt $2 \times \frac{\propto}{2} \times \frac{\propto}{2} = \frac{\propto^2}{2}$, & l'eſpace total parcouru $\frac{\propto^2 dde}{2}$, grandeur finie.

1545. Donc quand la force accélératrice imprime une viteſſe finie, il s'eſt paſſé un temps fini, quelque petit qu'il ſoit, & un eſpace fini a été parcouru.

1546. Puiſque les viteſſes d'inſtans égaux paſſent de l'Infiniment petit au Fini, elles ſont croiſſantes, ainſi qu'il eſt indiſpenſable dans un mouvement accéléré.

1547. Si la force accélératrice eſt ſuppoſée conſtante, elle a la même action & le même effet dans tous les inſtans égaux, & par conſéquent ce qu'elle a produit dans le premier, elle le produit dans tous. Dans le premier elle a imprimé au corps une viteſſe infiniment petite du 1er ordre, donc dans tous les inſtans ſuivans elle lui en imprime une égale. Ainſi les viteſſes de chaque inſtant ſont inégales & croiſſantes (1546), & les augmentations de viteſſe toujours égales.

1548. Comme dans chaque inſtant une viteſſe infiniment petite égale, s'ajoute toujours à la ſomme des viteſſes déja acquiſes, l'augmentation eſt du même ordre que la ſomme,

M.E.C.D. 2017

tant que la ſomme n'eſt qu'un infiniment petit. Or cette ſomme eſt un infiniment petit, tant que le temps total de la chûte du corps ou l'eſpace total parcouru n'eſt pas encore fini (1543) : mais depuis l'inſtant incluſivement où cela arrive, la viteſſe de chaque inſtant ſuivant étant finie, l'augmentation de viteſſe n'eſt plus à compter par rapport à elle, & l'on peut prendre la viteſſe de chaque inſtant pour uniforme, & l'exprimer comme telle par le rapport de l'eſpace *de* de cet inſtant à *dt*. Ainſi ce n'eſt qu'en ſuppoſant un temps fini déja écoulé, & un eſpace fini parcouru qu'on peut prendre la viteſſe de chaque inſtant pour uniforme.

1549. Si la force accélératrice agit pendant un temps $= \infty$, le dénominateur de ſon expreſſion eſt ∞^2, & pour avoir une force toujours Finie, il faut que le numérateur, c'eſt-à-dire, l'eſpace total parcouru ſoit auſſi ∞^2. Donc pendant un temps infini un eſpace total infini du 2^d ordre eſt parcouru.

1550. Mais quand un eſpace total infini du 1er ordre eſt-il donc parcouru ? Car il eſt impoſſible que la force vienne à faire parcourir un ∞^2 dans un temps $= \infty$, ſans avoir paſſé par faire parcourir un ∞ dans un temps, ſoit fini, ſoit infini : or dans un temps fini il ne paroît pas que cela ſe puiſſe. La ſolution de cette difficulté eſt ce que nous avons vû tant de fois. L'eſpace étant ∞, l'expreſſion de la force ſera $\frac{\infty}{tt}$, quelque temps que ſoit t, & il faut que cette expreſſion ſoit finie. Donc $tt = \infty$, donc t eſt un temps fini indéterminable en grandeur, tel que ſon quarré eſt infini. Donc tant que le temps eſt fini déterminable, l'eſpace total parcouru eſt fini, ſi le temps devient fini indéterminable en grandeur, l'eſpace eſt infini du 1er ordre, ſi le temps eſt infini du 1er ordre, l'eſpace eſt du 2^d.

1551. Donc l'eſpace total parcouru commence par être de l'ordre immédiatement inférieur au temps total, enſuite il eſt du même ordre, après cela de l'ordre immédiatement ſupérieur, enſuite d'ordres toujours plus ſupérieurs.

1552. Quand le temps total eſt devenu infini du 1er

M.E.C.D. 2017

ordre, la viteſſe de chaque inſtant eſt infinie du même ordre, car elle eſt la ſomme d'autant de viteſſes infiniment petites égales qu'il y a eu d'inſtans dt : or dans un temps infini du 1er ordre, il y a un nombre de $dt = \infty^2$, & un nombre d'infiniment petits, qui eſt ∞^2, fait une ſomme de l'ordre de ∞.

1553. Puiſqu'alors la viteſſe de chaque inſtant eſt de l'ordre de ∞, l'augmentation de viteſſe toujours égale & infiniment petite, l'empêche encore infiniment moins d'être uniforme, que quand cette viteſſe étoit finie.

1554. Conſidérons maintenant la force ſimplement motrice. Tout le monde dit que c'eſt celle qui ne fait que frapper le corps dans un temps indiviſible, & l'on en prétend faire une force toute différente de l'accélératrice. Mais il me ſemble qu'il y a beaucoup à démêler dans cette idée.

La force ſimplement motrice & l'accélératrice ont néceſſairement quelque choſe de commun, & l'accélératrice qui s'applique toujours au corps ne ſera que motrice, ſi ayant frappé le corps, & s'y étant appliquée pendant le temps, quel qu'il ſoit, néceſſaire à la motrice, elle ceſſe de s'y appliquer. Or je demande quel eſt ce temps néceſſaire à la motrice.

Un temps indiviſible n'exiſte point, non plus qu'un eſpace indiviſible. Ce temps eſt donc infiniment petit, un dt. La force ſimplement motrice eſt donc dans le même cas que l'accélératrice agiſſant dans un dt, & ceſſant enſuite de s'appliquer au corps. Or l'accélératrice agiſſant dans un temps infiniment petit, ne peut imprimer au corps qu'une viteſſe infiniment petite du 1er ordre (1542); & ſi après cela la force ceſſoit de s'appliquer au corps, il n'auroit que cette viteſſe avec laquelle il ne pourroit parcourir qu'un eſpace infiniment petit dans un temps fini, ſon mouvement étant devenu uniforme, c'eſt-à-dire, qu'il demeureroit phyſiquement & ſenſiblement en repos. Il n'y auroit donc nulle force ſimplement motrice, qui pût mouvoir ou déplacer un corps, ce qui eſt bien éloigné des phénomenes.

Comme toutes les forces ſimplement motrices impriment

M.E.C.D. 2017

des viteſſes finies, on ne peut donc concevoir autre choſe, ſinon que ce ſont des forces qui pendant un temps fini, ſi court que l'on voudra, ont été accélératrices, ou appliquées au corps, après quoi elles ont ceſſé de l'être. Il eſt aiſé de voir que de-là les phénomenes s'enſuivent.

1555. Donc tout corps qui imprime à un autre une viteſſe finie, ne la lui imprime qu'en un temps fini, par degrés, & ſelon les regles du mouvement accéléré.

Que toute force ſimplement motrice, eſt accélératrice pendant un temps fini.

1556. Si deux corps, dont l'un a choqué l'autre en repos, vont tous deux enſemble après le choc, le choquant a employé un temps fini à communiquer à l'autre ce qu'il devoit lui donner de ſa viteſſe, & a été pendant ce temps force accélératrice qui lui étoit toujours appliquée, après quoi lorſqu'ils vont enſemble d'une même viteſſe, il eſt vrai que le choquant eſt encore appliqué à l'autre, mais non en qualité de force accélératrice comme il étoit auparavant; il ne le meut plus du tout, & n'eſt qu'une partie d'une maſſe totale qui ſe meut.

1557. Ce même raiſonnement ſubſiſte, ſoit que les deux corps ſoient parfaitement durs, ou qu'ils ne le ſoient pas. S'ils ne le ſont pas, le corps choquant applatit le choqué aux endroits voiſins du choc, & en eſt réciproquement applati; & ce n'eſt que pendant cet applatiſſement mutuel, qui augmente par degrés, que le corps choquant eſt force accélératrice. Après cela les deux corps applatis vont enſemble, s'il n'y a rien de plus. On voit bien que nous voilà arrivés au Reſſort, mais il n'en eſt pas queſtion ici.

On pourra voir combien tout ceci s'accorde avec ce qui a été dit dans l'Hiſt. de l'Acad. en 1722 (*p.* 109 *& ſuiv.*) d'après M. de Mairan, qui a expliqué la Réflexion des Corps d'une maniere nouvelle, & beaucoup plus préciſe que l'on n'avoit encore fait. Si quelque impreſſion finie de mouvement ſe pouvoit faire dans un inſtant indiviſible, il ſemble que la Réflexion en devroit être un exemple.

1558. La force, d'abord accélératrice, ayant ceſſé d'agir ſur le corps, ſon mouvement devient uniforme, & la viteſſe

en

M.E.C.D. 2017

en eſt la derniere viteſſe acquiſe par l'accélération, de ſorte que dans un temps fini égal à celui pendant lequel l'accélération a duré, il parcourra un eſpace double de celui qu'il avoit parcouru, & toujours ainſi.

1559. Si ce mouvement devenu uniforme, eſt comparé à lui-même, qui eût continué d'être accéléré, il ſuit de l'art. 1551, que plus le temps de l'un & de l'autre ſera long, plus l'eſpace parcouru par le mouvement accéléré ſera grand par rapport à l'eſpace parcouru par le mouvement uniforme.

1560. Dès que la force accélératrice eſt parvenue à imprimer au corps une viteſſe finie, & quand la force, que nous appellions ſimplement motrice, a ceſſé d'être accélératrice, l'expreſſion de la viteſſe de chaque inſtant, ſoit du mouvement accéléré, ſoit de l'uniforme, eſt $\frac{de}{dt}$, le temps pendant lequel ſe font les deux mouvemens étant ſuppoſé fini. Dans l'uniforme le rapport de de à dt eſt conſtant, dans l'accéléré il eſt variable, & toujours croiſſant.

1561. Dans l'accéléré l'augmentation de viteſſe à chaque inſtant eſt $\frac{dde}{dt}$, & $\frac{de}{dt} + \frac{dde}{dt} = \frac{de}{dt}$ rend la viteſſe inſtantanée uniforme, & la viteſſe totale au bout de chaque temps fini eſt formée d'une infinité de viteſſes inſtantanées uniformes pendant chaque inſtant, & croiſſantes d'un inſtant à l'autre.

1562. Si la force accélératrice n'étoit point conſtante, l'augmentation de viteſſe de chaque inſtant, ou $\frac{dde}{dt}$, ne ſeroit plus une grandeur conſtante, mais elle n'en diſparoîtroit pas moins dans la ſomme $\frac{de}{dt} + \frac{dde}{dt}$, & par conſéquent la viteſſe accélérée ſe réduiroit toujours à des viteſſes inſtantanées uniformes. Ce ſeroit la même choſe, ſi la force accélératrice étant conſtante par elle-même, ſon action étoit inégale par les circonſtances, comme le ſeroit l'action de la Peſanteur conſtante ſur un corps qu'elle feroit tomber le long de la

BIBLIOTECA
DEL
OBSERVATORIO DE S. FERNANDO

M.E.C.D. 2017

concavité d'une Courbe différemment inclinée à l'horiſon en tous ſes points, ou côtés.

1563. Si la force accélératrice n'eſt pas conſtante en elle-même, ou ſi, étant conſtante, elle a une action inégale à cauſe des circonſtances, ou ſi une force conſtante eſt différente d'une autre conſtante auſſi, il eſt clair que la viteſſe inſtantanée $\frac{de}{dt}$, qui pareillement eſt toujours néceſſairement variable d'inſtant en inſtant, le ſera différemment dans tous ces différens cas, mais toujours uniforme dans chaque inſtant.

De-là il ſuit que la variation quelconque des $\frac{de}{dt}$, ſera toujours celle des Infiniment petits de quelque Courbe, qui pareillement ne ſont conſtans ou n'ont un rapport conſtant que pendant un pas infiniment petit de la Courbe. Et cette réduction des mouvemens accélérés à des Courbes, qui les expriment ou les repréſentent, eſt l'avantage qu'on tire de l'uniformité inſtantanée des élémens de ces mouvemens, ce qui n'auroit pas été poſſible ſi dans chaque inſtant infiniment petit l'augmentation de viteſſe avoit dû être comptée.

Par exemple, ſi on ſuppoſe la Peſanteur conſtante, on voit que dans cette hipotheſe, les eſpaces étant comme les quarrés des temps (1526), & dans la Parabole $x = yy$, les Abſciſſes x de la Parabole repréſenteront ou ſeront les hauteurs d'où un corps peſant ſera tombé, & que les Ordonnées y repréſenteront les temps, ou, ce qui eſt le même, qu'une Ordonnée quelconque repréſentant la durée de la chûte d'un corps, l'Abſciſſe correſpondante repréſentera l'eſpace qu'il aura parcouru, ou la hauteur d'où il ſera tombé. Et comme dans cette hipotheſe les viteſſes acquiſes au bout des différens temps, ou, ce qui eſt la même choſe, les viteſſes uniformes $\frac{de}{dt}$ de chaque inſtant infiniment petit, ſont comme les temps (1524), ces viteſſes ſeront comme les y de la Parabole ou les $\sqrt[2]{x}$, puiſque $y = \sqrt[2]{x}$. Donc $\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt[2]{x}}{1}$. Or dans la Pa-

M.E.C.D. 2017

rabole $dx . dy :: 2y . 1 :: 2\sqrt[2]{x} . 1$. Donc $\frac{de}{dt} = \frac{2\sqrt[2]{x}}{1} = \frac{dx}{dy}$ de la Parabole, car ici, où il ne s'agit que de rapports, $\sqrt[2]{x}$ & $2\sqrt[2]{x}$, c'eſt la même choſe.

Réciproquement, s'il étoit donné que $\frac{de}{dt} = \frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt[2]{x}}{1}$ d'une Courbe, & qu'il fallût trouver quelle hipotheſe a été faite ſur la Peſanteur, on verroit auſſi-tôt que cette Courbe cherchée eſt la Parabole où $dx . dy :: 2\sqrt[2]{x} . 1$. Donc les Abſciſſes étant priſes pour les eſpaces parcourus, les viteſſes ſont comme les racines de ces eſpaces, ce qui emporte que la Peſanteur ſoit conſtante.

Forces Centrifuges, ou Centripetes.

1564. On peut concevoir la Peſanteur comme une force inhérente au centre de la Terre, & qui retire toujours les corps vers ce centre, & quoique cette idée ne ſoit pas phyſique, elle eſt ſuffiſante pour le deſſein préſent, & plus facile à ſaiſir que toute autre. Si l'on a donné à un corps une impulſion ſelon une ligne droite Tangente du globe de la Terre, & que le mouvement commence au point d'attouchement, ce corps, s'il ſuivoit cette impulſion, décriroit cette Tangente à l'Infini, & s'éloigneroit toujours du centre de la Terre. Mais la Peſanteur, qu'on ſuppoſe qui agit toujours, le retire toujours vers ce centre, & par conſéquent le retire dès le 1er inſtant infiniment petit de ſon mouvement. Dans ce 1er inſtant il ne pouvoit décrire par ſon mouvement propre ou d'impulſion, qu'une partie infiniment petite de la Tangente, & il ne ſe ſeroit écarté du globe ou du Cercle que de l'étendue de la baſe d'un angle de contingence, mais la Peſanteur qui le retire vers le centre, l'empêche de faire un écart de cette étendue, de ſorte qu'à la fin de l'inſtant il eſt encore ſur la circonférence du Cercle. Dans le 2^d^ inſtant, ſi la Peſanteur ceſſoit d'agir, il ſuivroit par ſon mouvement propre la direction du côté droit infiniment petit du Cercle qu'il a décrit dans le 1er inſtant, & feroit un écart égal à la baſe

M.E.C.D. 2017

d'un angle de contingence : mais la Peſanteur le retire encore, & le retient ſur une circonférence circulaire, & toujours ainſi de ſuite.

La Peſanteur ainſi conçue, & toute autre force pareille s'appelle force *centrale*.

Si on conçoit la force par laquelle le corps eſt toujours retiré vers un centre comme inhérente au corps, elle s'appelle force *centripete*, & à cette force s'oppoſe la *centrifuge*, par laquelle le corps qui a une impulſion en ligne droite tend à la ſuivre, & à s'écarter d'une circonférence circulaire.

Mais comme tout cela revient au même, il ſuffit de conſidérer la force Centrale, du moins pour l'ordinaire.

1565. En général un corps qui a reçu une impulſion ne peut ſe mouvoir qu'en ligne droite, ſelon la direction déterminée de cette impulſion. Il décrira cette droite à l'Infini, & s'il s'en détourne, il faut que ce ſoit par une cauſe étrangere. S'il s'en détourne continuellement, ou, ce qui eſt le même, décrit une Courbe, il faut que ce ſoit par une cauſe étrangere toujours appliquée à ce corps. Si cette cauſe le détourne toujours vers un même point, c'eſt une force centrale.

1566. Donc tout mouvement curviligne qui ſe rapporte à un point fixe, doit être conçu comme compoſé d'un mouvement rectiligne d'impulſion, & d'un mouvement rectiligne de traction, cauſé par une force centrale toujours agiſſante, & inhérente au point fixe ſuppoſé.

Meſure de la force Centrale, & ſes propriétés.

1567. Pour conſidérer la force centrale dans une Courbe quelconque qu'elle fait décrire, il faut donc concevoir un corps qui a reçu une impulſion, ſelon la direction de laquelle il décriroit une ligne droite à l'Infini, dont il eſt perpétuellement détourné par la force centrale inhérente à un point fixe, pris dans le plan de la Courbe. Les lignes de traction par leſquelles agit cette force pour retirer ſans ceſſe le corps, le détourner de la ligne droite qu'il tend à ſuivre, & le retenir ſur la circonférence de la Courbe, ſont des droites tirées du point fixe ou centre ſuppoſé, & terminées à tous les côtés infiniment petits de la Courbe. On les appelle auſſi *Rayons*.

M.E.C.D. 2017

Il eſt clair que ces Rayons ſont différemment inclinés aux différens arcs de la Courbe, & que par conſéquent ces arcs étant les petites droites que le corps décrit à chaque inſtant, les lignes par leſquelles la force centrale agit ſur le corps, ſont toujours différemment inclinées à celles par leſquelles le corps ſe meut, ou, ce qui eſt la même choſe, que l'action de la force centrale ſur le corps eſt toujours inégale. Mais comme il peut y avoir encore d'autres inégalités, nous allons chercher en général, quelle eſt la meſure de la force centrale, qui fait décrire une Courbe quelconque, en y faiſant entrer tout ce qu'il eſt imaginable qui y entre. Nous ſuppoſons la force centrale finie, & conſtante en elle-même, quoique ſon action puiſſe être inégale.

1568. Puiſque l'effet continuel de la force centrale eſt de détourner le corps de la droite qui tend à décrire, elle a beſoin d'être d'autant plus grande que ce corps eſt par lui-même plus difficile à détourner de la ligne droite. Or il eſt par lui-même d'autant plus difficile à détourner de cette ligne, qu'il a une plus grande quantité de mouvement avec laquelle il tend à la décrire. Sa quantité de mouvement eſt le produit de ſa maſſe, ou poids p par ſa viteſſe u. Donc il eſt d'autant plus difficile à détourner de la ligne droite que pu eſt plus grand. Donc de ce chef la meſure de la force centrale eſt pu.

1569. Mais la force centrale eſt appliquée avantageuſement au corps, ou, ce qui eſt le même, plus le rayon par lequel elle agit dans un inſtant quelconque eſt incliné au côté de la Courbe, que le corps décrit en cet inſtant, plus la force a beſoin d'être grande pour agir malgré ce déſavantage.

Si l'on conçoit deux rayons infiniment proches tirés du point fixe aux deux extrémités d'un côté ds de la Courbe, & du même point fixe pris pour centre, un arc circulaire infiniment petit dx décrit ſur le moindre des deux rayons, de ſorte qu'il détermine leur différence dy; il eſt viſible que plus le grand rayon $y + dy$ ſera oblique à ds, plus ds ſera grand par rapport à dx. Donc $\frac{ds}{dx}$ meſure l'inégalité de l'action

M.E.C.D. 2017

de la force centrale ſur le corps. Donc de ce chef ſa meſure eſt $\frac{ds}{dx}$, & elle eſt d'autant plus grande que ds eſt plus grand par rapport à dx, parce que ſon application eſt moins avantageuſe, car il s'agit uniquement de la grandeur de la force, & non de celle de ſon action.

1570. Plus la force centrale fait faire de grands détours au corps, plus elle eſt grande. Or puiſque ce corps décrit une Courbe, la grandeur des détours qu'il fait à chaque inſtant eſt la même que celle des angles de contingence, ou de la courbure de la Courbe. Or les différentes courbures ſont en raiſon renverſée des Rayons de la Développée que j'appelle r. Donc de ce chef la meſure de la force centrale eſt $\frac{1}{r}$.

1571. Plus la force centrale fait faire de détours en un même temps, plus elle eſt grande. Or plus la viteſſe d'impulſion u d'un Corps eſt grande, plus il faut que la force centrale lui faſſe faire en même temps un grand nombre de détours, pour le tenir toujours ſur la Courbe. Donc de ce chef la meſure de cette force eſt u.

1572. Et comme il n'eſt pas poſſible d'imaginer rien de plus, on a, en raſſemblant tout, pour meſure ou pour expreſſion de la force centrale pu (1568) $\times \frac{ds}{dx}$ (1569) $\times \frac{1}{r}$ (1570) $\times u$ (1571) $= \frac{pu^2 ds}{r dx}$.

1573. Le quarré de toute viteſſe uniforme peut être exprimé par $2h$, h étant la hauteur d'où le corps ſera tombé pour acquérir cette viteſſe (1535). Donc $\frac{pu^2 ds}{r dx} = \frac{2phds}{r dx}$, ce qui eſt une des formules que feu M. Varignon a données ſur ce ſujet en 1706 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, & celle qui m'a paru la plus propre à être déduite immédiatement & naturellement des premieres notions.

1574. Si la Courbe décrite eſt un Cercle, on a $ds = dx$, & par conſéquent $\frac{2ph}{r}$, ce qui eſt la formule des forces

M.E.C.D. 2017

centrales dans le Cercle, donnée par feu M. le M. de l'Hôpital en 1700 dans les Mémoires de l'Académie. r exprime encore ici le Rayon de la Développée, qui dans le Cercle eſt le même que le Rayon.

1575. Des quatre principes qui entrent dans la meſure ou dans la formule de la force centrale, il y en a deux, le poids du corps & ſa viteſſe, qui ne peuvent jamais aller ni dans l'Infini, ni dans l'infiniment petit. Mais les deux autres y peuvent aller, & c'eſt ce que nous allons examiner.

Si un Rayon, par lequel agit la force centrale, eſt tel qu'il concourre avec le côté de la Courbe, l'autre Rayon terminé à l'autre extrémité de ce côté concourra auſſi avec lui, & par conſéquent ces deux Rayons ne ſeront que la même droite, nul intervalle infiniment petit du 1er ordre ne les ſéparera, & on aura $dx = 0$, ds ſubſiſtant. Donc alors $\frac{2phds}{rdx}$ eſt une grandeur infinie.

Cependant la force centrale eſt toujours ſuppoſée finie, auſſi-bien que la peſanteur. Mais $\frac{ds}{dx} = \infty$ ſignifie ſeulement que ſi ce cas étoit poſſible, la force centrale ſeroit infinie; car ſa fonction perpétuelle étant de détourner le corps de la ligne droite, & de lui faire décrire une Courbe, il faudroit qu'elle eût cette vertu à un degré infini pour la pouvoir encore exercer, lorſqu'elle ne combat plus du tout par ſa direction celle du corps, & qu'au contraire elle le met elle-même ſur la même ligne droite. Mais comme la force centrale ne peut être infinie, le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$ eſt phyſiquement impoſſible, quoique géométriquement poſſible. Auſſi n'arrive-t'il jamais dans aucun phénomene, que la force centrale ait dans aucun point la même direction que la Courbe qu'elle fait décrire, ou agiſſe par une Tangente de cette Courbe. On peut imaginer que les Planetes mues d'une premiere impulſion en ligne droite décrivent des Courbes autour du Soleil, parce qu'une force centrale inhérente dans le Soleil les retire per-

M.E.C.D. 2017

pétuellement vers lui, mais quelles que ſoient ces Courbes, Cercles, ou Ellipſes, telles qu'on voudra, la force centrale n'agira jamais par une Tangente, parce qu'on ne peut tirer à aucune de ces Courbes une Tangente d'un point pris au-dedans de leur circonférence. Que ſi par une eſpece de jeu géométrique, on imagine que la force centrale réſide dans un point pris au-dehors de quelqu'une de ces Courbes, il s'enſuivra néceſſairement que quand la Planete ſera arrivée à un point où la direction de la force centrale ſera Tangente, cette force, parce qu'elle n'eſt pas infinie, ne pourra continuer davantage à faire mouvoir la Planete ſur la Courbe.

1576. Quoique dans le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$ on imagine, du moins géométriquement, la force centrale comme infiniment grande, il n'y a point de cas oppoſé où l'on puiſſe l'imaginer comme infiniment petite dans le même ſens, c'eſt-à-dire, comme appliquée ſi avantageuſement que, quoiqu'infiniment petite, elle pût encore agir. Sa direction, & celle du corps pendant quelque inſtant, peuvent dans le ſens qu'on vient de voir être la même ou infiniment peu différentes, mais elles ne peuvent jamais être infiniment différentes, car elles ne peuvent l'être davantage que lorſqu'elles ſont perpendiculaires l'une à l'autre, ce qui n'eſt que fini, & a une meſure finie. Et en effet, $\frac{ds}{dx} = 0$ eſt impoſſible, car il eſt aiſé de voir que ds ne peut être $= 0$, dx ſubſiſtant.

1577. Le cas le plus oppoſé à celui de $\frac{ds}{dx} = \infty$ eſt donc $\frac{ds}{dx} = 1$, c'eſt-à-dire, celui de $ds = dx$, ou de la force centrale agiſſante dans un Cercle au centre duquel elle réſide (1574), alors elle agit toujours perpendiculairement à la direction du corps, & avec tout l'avantage poſſible de ce chef.

1578. La direction perpendiculaire de la force centrale donne lieu d'imaginer aiſément un effet des directions obliques, ſelon qu'elles ſont poſées d'un côté ou de l'autre de la direction

M.E.C.D. 2017

direction perpendiculaire. Le corps décrit un côté quelconque de la Courbe d'un certain ſens déterminé ; ſi la direction oblique de la force centrale tire le corps en ce même ſens, elle hâte ſon mouvement, ſi elle le tire du ſens contraire, elle retarde ſon mouvement : or le ſens dont les directions obliques tirent, dépend de leur poſition d'un côté ou d'autre d'une direction perpendiculaire. Elles hâtent ou retardent d'autant plus le mouvement qu'elles ſont plus obliques, quoiqu'en même temps elles aient moins d'effet pour détourner le corps, ou lui faire décrire une Courbe. Quant aux directions perpendiculaires, elles n'ont nul effet par rapport à l'accélération, ou au retardement du mouvement.

1579. De-là il ſuit que dans le cas de $\frac{ds}{dx} = \infty$, la force centrale, dont la direction concourroit avec celle du corps, n'auroit d'autre effet que de hâter ou de retarder ſon mouvement, ſelon qu'elle le tireroit, ou du même ſens dont il iroit, ou du ſens contraire.

1580. Si dans $\frac{2phds}{rdx}$, r, Rayon de la Développée, eſt $= \infty$, c'eſt-à-dire, ſi la Courbe au point ſuppoſé eſt infiniment peu courbe, ou à quelqu'étendue en ligne droite, comme il arrive ordinairement dans les inflexions, rdx eſt une grandeur finie, & $2phds$ une infiniment petite, & par conſéquent $\frac{2phds}{rdx} = 0$, c'eſt-à-dire, que la force centrale agit infiniment peu : car elle ne peut être infiniment petite, ou, ce qui revient au même, c'eſt-à-dire, que quand elle ſeroit infiniment petite, elle n'agiroit pas moins. En effet, il n'eſt pas beſoin d'une force centrale pour donner un mouvement en ligne droite, que le corps a de lui-même. Et comme il eſt impoſſible que la force centrale, dont l'effet eſſentiel eſt de détourner le corps, ait réellement contribué à ce mouvement en ligne droite, ce cas eſt phyſiquement impoſſible, auſſi-bien que celui de $\frac{ds}{dx} = \infty$, c'eſt-à-dire, qu'une force centrale ne peut jamais faire décrire une Courbe qui ait une étendue en ligne

M.E.C.D. 2017

droite plus grande que celle d'un de ſes côtés.

1581. Si $r = 0$, ou la Courbe infiniment courbe, $\frac{2phds}{rdx} = \infty$: mais la force centrale ne pouvant être infinie, ni par conſéquent ſon action, ce cas eſt phyſiquement impoſſible.

1582. Donc il eſt phyſiquement impoſſible que des Courbes décrites par des corps en vertu de forces centrales, aient des Tangentes qui concourrent avec aucun de leurs points, du côté où réſide la force centrale, ni une courbure nulle ou infinie.

1583. Au lieu de concevoir un Corps qui décrit une Courbe en vertu d'une premiere impulſion en ligne droite, & de l'action continuelle d'une force centrale inhérente à un point fixe pris au dedans de cette Courbe, ſi l'on conçoit ce même Corps tombant par ſa peſanteur le long d'une Courbe, du côté qu'elle eſt concave, comme le long d'un Canal qui le conduiroit, il eſt clair que le mouvement de ce Corps, qui par la peſanteur ſeule ne ſeroit que rectiligne, devient curviligne à cauſe de la Courbe ſuppoſée, qu'elle l'empêche à chaque moment de prendre le mouvement rectiligne qu'il tend à prendre, & que par conſéquent cette tendance eſt une certaine force qu'il exerce à chaque moment contre la Courbe qui lui réſiſte. Si la Courbe manquoit au Corps, ou finiſſoit, & je ſuppoſe que ce fût par un petit côté incliné à l'horiſon, le Corps devenu libre ſuivroit la direction de ce dernier petit côté, ou de la derniere Tangente de la Courbe, & par conſéquent ce petit côté étant conçû comme un arc circulaire infiniment petit, décrit ſur un certain Rayon, & d'un certain centre, le Corps s'éloigneroit toujours de ce centre. Et comme c'eſt évidemment la même choſe pour tous les petits côtés de la Courbe, la force que le Corps exerce à chaque moment ſur chacun d'eux, peut être appellée *centrifuge*, par rapport aux différens centres de tous ces petits côtés pris pour des arcs circulaires infiniment petits.

1584. Donc ſi une Courbe quelconque eſt différemment inclinée à l'horiſon en tous ſes points, & qu'un Corps tombe

M.E.C.D. 2017

le long de ſa concavité, il exerce contre chacun de ſes petits côtés deux différentes forces. L'une eſt celle de ſa peſanteur, car chaque petit côté de la Courbe ſoutient ce Corps, & porte une partie plus ou moins grande de ſa peſanteur abſolue, ſelon qu'il eſt plus ou moins incliné à l'horiſon. L'autre force eſt la centrifuge par laquelle il tend à s'éloigner en ligne droite du centre de chaque petit côté ou arc qu'il décrit. Nous ne parlerons point de la 1re force, qui eſt extrêmement connue, il ne s'agit que de la 2de.

1585. Dans le cas ſuppoſé, la force centrifuge agit à chaque inſtant comme dans un Cercle, & d'un inſtant à l'autre comme dans un Cercle différent, de ſorte que r eſt le rayon variable de ces Cercles, & le rayon de la Développée de la Courbe à un point quelconque. Donc la force centrifuge de chaque inſtant s'exprime par $\frac{2ph}{r}$ (1577).

1586. Sur cela on peut faire une remarque, qui ſervira à confirmer l'uſage de notre Théorie des différens Infinis.

Application de la Théorie précédente au Calcul d'une Courbe.

Dans les Mém. de l'Acad. de 1700 (*p. 9 & ſuiv.*) feu M. de l'Hopital a trouvé $dx = \frac{dy \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ pour l'équation différentielle d'une Courbe, telle qu'un Corps qui tomberoit librement le long de ſa concavité, & qui par conſéquent la preſſeroit différemment à chaque point, tant par la peſanteur que par ſa force centrifuge, toutes deux toujours différemment combinées enſemble, la preſſeroit toujours avec une force égale à la peſanteur abſolue.

Cette Courbe a un dernier côté horiſontal, & parallele à l'axe, auquel répond une Ordonnée infinie, qui eſt auſſi une hauteur infinie d'où le Corps eſt tombé. Le Corps arrivé à ce dernier côté le preſſe par toute ſa peſanteur abſolue, & par conſéquent la force centrifuge doit alors être nulle, car autrement le Corps preſſeroit alors la Courbe par une force plus grande que ſa peſanteur abſolue. D'ailleurs parce que la force centrifuge doit être nulle à ce dernier côté, le rayon

M.E.C.D. 2017

de la Développée y doit être infini, & il l'eſt en effet par la nature de la Courbe. Donc ſi on applique là la formule $\frac{2phb}{r}$, on a $h = \infty$, $r = \infty$, & par conſéquent $\frac{2phb}{r} = 2p$, force centrifuge, qui non-ſeulement n'eſt pas nulle, mais eſt double de la peſanteur abſolue.

Il y a donc là de l'erreur, & elle vient, comme nous l'avons vû bien des fois, des infinis mal caractériſés.

Je prens le rayon de la Développée de cette Courbe ſelon la formule ordinaire $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$.

Puiſque dans cette Courbe $dy = \frac{\sqrt{2\sqrt{ay} - a \times dx}}{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$, on a $dy^2 = \frac{2\sqrt{ay} - a \times dx^2}{y - \sqrt{ay} + a}$ & $dy^2 + dx^2 = \frac{2\sqrt{ay} - a + y - 2\sqrt{ay} + a \times dx^2}{y - 2\sqrt{ay} + a}$ $= \frac{y\,dx^2}{\sqrt{y} - \sqrt{a}^2}$. On a par le calcul $ddy = \frac{-dy\,dx\sqrt{a}}{2\sqrt{2\sqrt{ay} - a \times \sqrt{y} - \sqrt{a}^2}}$.

Donc $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{2y\,dx \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}}{dy\sqrt{a}}$, & en mettant au lieu de dx, ſa valeur $\frac{dy \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, il vient $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{2y \times \sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$.

Si $y = \infty$, on a donc pour le Rayon de la Développée en ce point $r = \frac{2\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} = \frac{2\infty^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$.

Donc dans la Courbe d'égale preſſion, y ou h étant $= \infty$, $\frac{2phb}{r}$ ſe réduit pour l'ordre à $\frac{\infty}{\infty^{\frac{3}{2}}} = \infty^{\frac{2-3}{2}} = \infty^{-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$, force centrifuge infiniment petite.

1587. Puiſqu'à l'extrémité de cette Courbe le rayon de la Développée eſt infini, la courbure eſt alors infiniment petite, & c'eſt effectivement ce qui rend la force centrifuge

M.E.C.D. 2017

nulle malgré la viteſſe infinie, car il n'y a point de force centrifuge dans un mouvement fait en ligne droite, quelle qu'en ſoit la viteſſe.

1588. Mais puiſque le rayon de la Développée eſt de l'ordre de $\infty^{\frac{3}{2}}$, ou au deſſus du Fini de plus qu'un ordre potentiel, il faut que la courbure ſoit plus qu'infiniment petite, ou, ſelon la Théorie de la Sect. XIII, au deſſous de $\frac{1}{\infty^2}$, de plus qu'un ordre potentiel; & pour voir plus préciſément ce qui en eſt, on peut prendre cette courbure de l'extrémité ſelon cette Théorie.

On aura, après les ſubſtitutions néceſſaires, $ddy = \frac{-dy^2 \times \overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}{2y \times 2\overline{\sqrt{y} - \sqrt{a}}}$, ce qui ſeul donne la courbure de l'extrémité, puiſqu'alors $ds = dx$, le dernier côté étant parallele à l'axe.

y étant auſſi alors $= \infty$, on a $\frac{-dy^2}{4y} = \frac{-dy^2}{4\infty}$. Reſte à ſavoir ce que vaut dy^2.

On a par-tout $dy . dx :: \sqrt{2\sqrt{ay} - a} . \sqrt{y} - \sqrt{a}$, & dans l'Infini, $dy . dx :: \sqrt{2\sqrt{ay}} . \sqrt{y}$, & pour l'ordre $:: \infty^{\frac{1}{4}} . \infty^{\frac{1}{2}}$. Donc en ſuppoſant $dx = \frac{1}{\infty}$, puiſqu'il ſubſiſte dans le parallélifme, on aura $dy . \frac{1}{\infty} :: \infty^{\frac{1}{4}} . \infty^{\frac{1}{2}}$, ou $dy = \frac{\infty^{\frac{1}{4}}}{\infty \times \infty^{\frac{1}{2}}} = \infty^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{4}}}$. Donc $dy^2 = \frac{1}{\infty^{\frac{5}{2}}}$, & $\frac{-dy^2}{\infty} = -\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$, courbure qui eſt entre l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$.

1589. On peut remarquer ici que comme à la courbure de l'ordre de $\frac{1}{\infty^2}$ que nous appellons ordinaire & finie, répond un rayon de la Développée fini, il doit répondre à une cour-

M.E.C.D. 2017

bure de l'ordre de $\frac{1}{\infty^3}$ un rayon de la Développée de l'ordre de ∞, & à une courbure qui paſſe $\frac{1}{\infty^3}$ ſans aller juſqu'à $\frac{1}{\infty^4}$, un rayon de la Développée qui ſoit entre ∞ & ∞^2, & c'eſt effectivement ce qui ſe trouve ici. De plus $\infty^{\frac{3}{2}}$ eſt préciſément moyen géométrique entre ∞ & ∞^2 comme $\frac{1}{\infty^{\frac{7}{2}}}$ l'eſt entre $\frac{1}{\infty^3}$ & $\frac{1}{\infty^4}$.

1590. Il eſt très-aiſé de voir par la nature de la Courbe d'égale preſſion qu'elle n'a point d'Aſymptote, & ſelon la courbure qu'on lui trouve ici à ſon extrémité, elle n'en doit pas avoir (1182). Cette Courbe eſt du nombre de celles qui ſont Courbes dans une étendue infinie, & enſuite droites dans une étendue finie (1182), c'eſt alors que la force centrifuge y devient nulle.

1591. On peut prendre une idée de cette Courbe, en conſidérant ſeulement les expreſſions de la force centrifuge variable à chaque point, & de l'action de la peſanteur variable auſſi, ſelon que la Courbe eſt plus ou moins inclinée à l'horiſon. Je ſuppoſe qu'un côté quelconque de la Courbe étant ds, il eſt prouvé que cette action de la peſanteur eſt $\frac{p\,dx}{ds}$.

Le Corps eſt ſuppoſé tomber librement. Donc il ne tombe que le long de la concavité de la Courbe, car il eſt viſible qu'il ne ſuivroit jamais ſa convexité.

Il eſt naturel de penſer d'abord que la Courbe dans toute ſon étendue tournera ſa convexité vers l'horiſon, comme feroit un Quart de Cercle poſé ſur un plan horiſontal auquel il ſeroit perpendiculaire par ſon extrémité ſupérieure. En ce cas le Corps ſera toujours ſoutenu par la Courbe, & il la preſſera tant par la force centrifuge que par la peſanteur.

Mais parce que tout ce qui peut être conçû ſans contradiction eſt poſſible & néceſſaire en fait de Courbes, il eſt poſſible que cette Courbe ait dans une partie de ſon étendue ſa concavité tournée vers l'horiſon, comme l'auroit le Quart

M.E.C.D. 2017

de Cercle dont on vient de parler, devenu demi-Cercle. Alors il eſt vrai que dans la moitié ſupérieure de ce demi-Cercle concave vers l'horiſon, le Corps ne ſeroit pas ſoutenu par la Courbe, à ne conſidérer que ſa peſanteur, & par conſéquent ne la preſſeroit pas, qu'au contraire ſa peſanteur ne tendroit qu'à le faire tomber verticalement : mais la force centrifuge peut être telle qu'elle tendra à appliquer le Corps contre cette même partie de la Courbe, d'où la peſanteur tendra à le détacher.

Donc la force centrifuge concourant tantôt avec la peſanteur, & tantôt la combattant, il faut exprimer en général la ſomme de leurs actions par $\frac{2ph}{r} \pm \frac{pdx}{ds}$, & cette grandeur complexe doit toujours par la ſuppoſition être $= p$. Ou en prenant pour p une ligne conſtante a qui la repréſentera, & entrera dans l'équation de la Courbe, on aura $\frac{2ah}{r} \pm \frac{adx}{ds} = a$.

Pour trouver l'origine de la Courbe, je vois qu'il y faut ſuppoſer la hauteur h d'où le Corps tombe, la moindre qu'il ſoit poſſible. Je prens $h = 0$. Donc $\frac{adx}{ds} = a$. Donc la force centrifuge n'agit point, & de plus $dx = ds$; c'eſt-à-dire, que la Courbe a ſon premier côté parallele à l'axe ou à l'horiſon. Donc alors le Corps ne peut que tomber verticalement par ſa peſanteur, & il n'y a nulle preſſion. Donc le cas de $h = 0$ eſt impoſſible. Donc à l'origine de la Courbe h eſt une grandeur finie, ou le Corps a déja une viteſſe telle qu'il l'auroit acquiſe en tombant en ligne droite de cette hauteur h.

h étant finie à l'origine, $\frac{2ah}{r}$ n'y peut être $= 0$ autrement que par $r = \infty$; mais alors il n'y auroit point de courbure, & le Corps continueroit à tomber en ligne droite ſans faire de preſſion, ce qui eſt contre la ſuppoſition de l'origine de la Courbe, & de toute l'étendue de la Courbe.

Par la même raiſon $\frac{adx}{ds}$ ne peut à cette origine être $= 0$,

M.E.C.D. 2017

car cela marqueroit un premier côte vertical, & le Corps ne feroit encore que continuer à tomber selon la ligne droite *h*.

Donc à l'origine la grandeur complexe $\frac{2ah}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ subsiste.

On y peut supposer, comme on a fait d'abord, $dx = ds$, c'est-à-dire, le côté horisontal, ce qui donne $\frac{2ah}{r} \pm a = a$, & nécessairement $\frac{2ah}{r} - a = a$, puisque $\frac{2ah}{r}$ n'est pas $= 0$. De-là suit $h = r$. Donc à ce premier côté horisontal supposé la force centrifuge est double de la pesanteur qui tend à faire tomber verticalement le Corps que la Courbe ne soutient nullement, la force centrifuge applique le Corps contre la Courbe, & cause seule la pression; & elle ne la cause qu'avec un effort égal à la pesanteur absolue du Corps, puisque la moitié de son effort ou de son action est détruite par la pesanteur qui agit directement contr'elle. De plus à ce premier côté horisontal la hauteur, d'où le Corps doit être tombé pour avoir la viteſſe qu'il a, est égale au rayon de la Développée de la Courbe.

dx ayant été pris arbitrairement $= ds$, & sans aucun rapport nécessaire à l'origine, elle n'est point encore nécessairement déterminée: mais si en la supposant on trouve que toutes les variations possibles de la Courbe s'y lient, elle le sera effectivement.

dx ayant commencé par être $= ds$, ne peut varier qu'en devenant plus petit, car il ne peut pas être plus grand. Si enfin $dx = 0$ ou $\frac{adx}{ds} = 0$, on a $\frac{2ah}{r} = a$, c'est-à-dire, que la Courbe ayant eu un côté horisontal, vient à en avoir un vertical le long duquel le Corps tombe sans causer aucune pression par sa pesanteur, que la force centrifuge seule cause la pression en appliquant ce Corps contre le côté vertical, & comme il faut que ce soit avec une force égale à la pesanteur absolue, il faut que $2h$ soit $= r$.

Donc dans la variation qui a été depuis le côté horisontal jusqu'au vertical, la force centrifuge de double qu'elle étoit de

la

M.E.C.D. 2017

la peſanteur abſolue, lui eſt devenue égale. Donc elle a toujours décrû.

Et puiſqu'elle agiſſoit ſeule au commencement de cette variation, & qu'elle agit encore ſeule à la fin, elle a toujours agi ſeule pendant toute la variation, j'entens quant à la preſſion. Donc la peſanteur l'a toujours combattue, & a toujours diminué ſon effort. Donc la grandeur générale $\frac{2ab}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ a toujours été dans cette variation $\frac{2ab}{r} - \frac{adx}{ds}$.

Donc la Courbe y a toujours été concave vers l'horiſon, puiſqu'elle ne ſoutenoit nullement le Corps.

En même temps il eſt viſible que la hauteur h ne peut qu'avoir augmenté. Et comme r, qui étoit d'abord $= h$, eſt devenu $= 2h$, cela veut dire que par rapport à la hauteur d'où le Corps étoit tombé ou à ſa viteſſe, le rayon de la Développée a été deux fois plus grand, ou la courbure de la Courbe deux fois moindre à la fin de la variation qu'au commencement, ce qui a diminué de moitié la force centrifuge priſe en elle-même.

Après $dx = 0$ ou $\frac{dx}{ds} = 0$, dx ne peut que recommencer à croître par rapport à ds. Et après que la grandeur générale $\frac{2ab}{r} \pm \frac{adx}{ds}$ a été pendant une variation $\frac{2ab}{r} - \frac{adx}{ds}$, il faut qu'elle devienne $\frac{2ab}{r} + \frac{adx}{ds}$. C'eſt-à-dire, que la Courbe recommence à avoir des côtés inclinés à l'horiſon, & que la force centrifuge commence à cauſer la preſſion conjointement avec la peſanteur. Donc alors le Corps eſt ſoutenu en partie par la Courbe qui tourne ſa concavité vers l'horiſon.

Comme $\frac{adx}{ds}$ croît toujours par l'augmentation continuelle que dx prend par rapport à ds, il faut que $\frac{2ab}{r}$ décroiſſe pour conſerver l'égalité eſſentielle à la Courbe. Donc dans cette ſeconde variation le Corps preſſe toujours la Courbe par une plus grande partie de ſa peſanteur abſolue, & moins par ſa

M.E.C.D. 2017

force centrifuge qui concourt alors avec la peſanteur.

A la fin de la variation, il faut que dx ſoit $= ds$, ou qu'il y ait un côté horiſontal, qui ſera donc preſſé par toute la peſanteur du Corps. Alors $\frac{adx}{ds} = a$. Donc $\frac{2ah}{r} = 0$. Ce qui ne ſe pourroit, h étant alors néceſſairement infinie, ſi r n'étoit un Infini d'un ordre ſupérieur, ainſi que nous avons vû.

Il ſuit de tout cela que l'origine de la Courbe, que nous avons ſuppoſée, étoit effectivement la vraie.

REFLEXION SUR LES SOMMES DES SUITES,

Qui a été faite trop tard pour être inſérée dans le corps du Livre.

SOIT la Suite $A^2 + A$, qui eſt $1 + 1 = 2.4 + 2 = 6.9 + 3 = 12.20.30.42$, &c. à l'Infini.

Je dis que quoique $A^2 + A$ ait ſes termes plus grands que les correſpondans de A^2, elle n'a que la même ſomme que A^2, car la ſomme de A^2 eſt $\frac{\infty^3}{3}$ (580), & celle de $A^2 + A$ eſt donc $\frac{\infty^3}{3} + \frac{\infty^2}{2} = \frac{\infty^3}{3}$, concluſion qui ſera reçue de tous ceux qui admettent l'Infini.

Mais afin que cela ſoit, il faut néceſſairement que tous les termes de $A^2 + A$ n'aient pas été plus grands que ceux de A^2, comme ils l'étoient à l'origine de leur Suite, & qu'ils aient commencé à un certain endroit à n'être qu'égaux à ceux de A^2.

Il faut de plus que tous les termes de $A^2 + A$, plus grands que ceux de A^2, n'entrent point dans la ſomme de $A^2 + A$, & pour cela il faut que la ſomme de ces termes, plus grands que leurs correſpondans dans A^2, diſparoiſſe devant ceux d'un ordre ſupérieur qui les ſuivent dans $A^2 + A$, & pour diſparoître, il faut qu'ils ne ſoient qu'en nombre Fini.

Or tout cela arrive ſelon les principes qui ont été établis.

M.E.C.D. 2017

n étant ſucceſſivement tous les Nombres Naturels, $nn+n$ eſt l'expreſſion générale de A^2+A. Quand n eſt un nombre fini indéterminable ſi grand que par l'élévation au quarré il devient Infini, on a $nn+n=nn$, & à plus forte raiſon tous les $nn+n$ ſuivans ne ſont que nn, & A^2+A n'eſt plus que A^2. Et le premier $nn+n=nn$ n'eſt qu'à une diſtance Finie de l'origine de la Suite, & par conſéquent tous les termes précédens Finis ne ſont qu'en nombre fini, & leur ſomme finie diſparoît devant les Infinis qui ſuivent, & ils ſont tous inutiles à la ſomme.

De même tous les nn finis de A^2, qui ſont en même nombre que les $nn+n$ Finis de A^2+A, & plus petits, ſont inutiles à la ſomme (211). D'où il ſuit que quant à la ſomme A^2+A n'eſt exactement que A^2.

Je ne vois pas qu'on pût expliquer autrement *à priori* la cauſe de l'égalité des deux ſommes.

Il eſt viſible qu'il en ira de même de A^2-A.

Le même raiſonnement ſubſiſtera ſur les Suites de Figurés comparés aux A^n qui leur répondent, c'eſt-à-dire, ſur la Suite des Triangulaires que j'appelle T, comparée à A^2, ſur la Suite des Pyramidaux que j'appelle P, comparée à A^3, &c.

Un nombre Triangulaire quelconque étant $\frac{nn+n}{2}$ (126), T commence à n'avoir plus que des $\frac{nn}{2}$ dès que nn eſt Infini, & à commencer de ce point là les termes de T ne ſont que ceux de A^2 diviſés par 2, & par conſéquent la ſomme de T ſera la ſomme de A^2, qui aura 2 pour diviſeur. Or la ſomme totale de A^2 eſt $\frac{\infty^3}{3}$, & la ſomme totale de T eſt $\frac{\infty^3}{6}$ (576) $=\frac{\infty^3}{3\times 2}$. Donc la ſomme totale de A^2, & celle de T ne ſont que les mêmes que ſi ces deux Suites ne commençoient qu'au premier nn Infini. Donc tous les termes qui ont précédé cet nn dans l'une & l'autre Suite ſont inutiles à leurs ſommes.

Ils ne pourroient l'être, s'ils étoient en nombre infini, car étant finis ils feroient une ſomme de l'ordre de ∞ qui

M.E.C.D. 2017

ſe joindroit d'un côté aux ∞ de A^2, & de l'autre aux ∞ de T, & de plus comme tous les termes de T ſont moindres que ceux de A^2, & tous les Finis de T moindres que ceux de A^2 dans un plus grand rapport que celui de 1 à 2, ce rapport ne venant que dans l'Infini, ce nombre infini de termes finis qui entreroient de part & d'autre dans les deux ſommes totales, & dont les ſommes auroient un autre rapport que celui de 1 à 2, empêcheroit que le rapport de la ſomme totale de T à celle de A^2 ne fût exactement, comme il l'eſt, celui de 1 à 2.

Donc le premier nn infini de T & de A^2 n'eſt qu'à une diſtance finie de leur origine, & n eſt un Fini indéterminable.

On en dira autant de P comparée à A^3. Chaque Pyramidal étant $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$ (126), la ſomme de $A^3 = \frac{\infty^4}{4}$, & celle de $P = \frac{\infty^4}{24}$ (576) $= \frac{\infty^4}{4\times 6}$, on voit que dès que n^3 eſt Infini, chaque terme de P eſt $\frac{1}{6}$ du terme correſpondant de A^3, que par là la ſomme totale de P eſt $\frac{1}{6}$ de celle de A^3, d'où tout le reſte ſuit.

Les ſommes de tous les ordres des Figurés ne ſont donc que les ſommes des A^n correſpondantes diviſées par le diviſeur de la formule de chaque ordre, & quoique les Suites de Figurés, priſes dans tout leur cours fini, ſoient fort différentes des A^n correſpondantes, elles ne ſont plus, dès qu'elles ont atteint l'Infini, que ces mêmes A^n diviſées par le nombre conſtant qui leur convient, & tous leurs termes finis, qui ſont les ſeuls que nous connoiſſions, & qui les caractériſent à notre égard, n'entrent pour rien dans leurs ſommes.

Il ſuit de-là qu'il ne faut pas juger les Suites, ſur tout à l'égard des ſommes, par leurs termes finis ſeuls, & qu'il eſt néceſſaire de les ſuivre dans l'Infini, où il arrive ſouvent des changemens conſidérables, & qu'on n'eût pas prévus.

FIN.

M.E.C.D. 2017

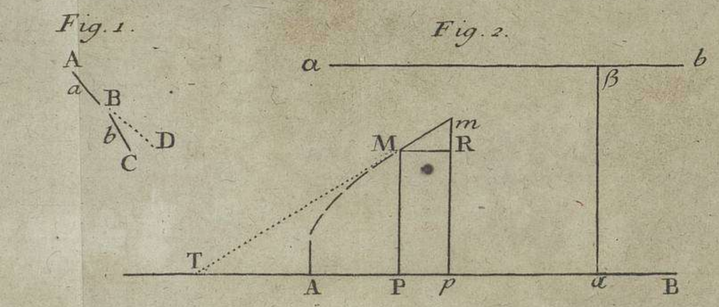

Fig. 1.

Fig. 2.

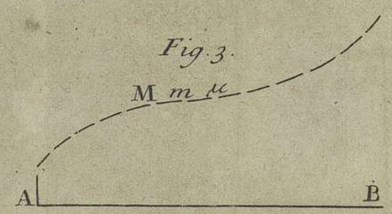

Fig. 3.

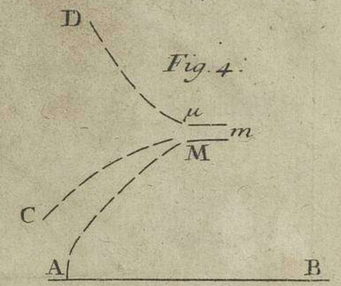

Fig. 4.

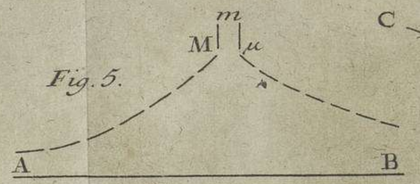

Fig. 5.

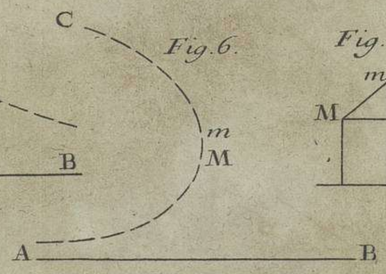

Fig. 6.

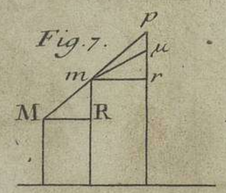

Fig. 7.

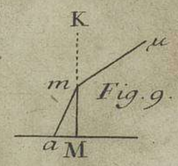

Fig. 9.

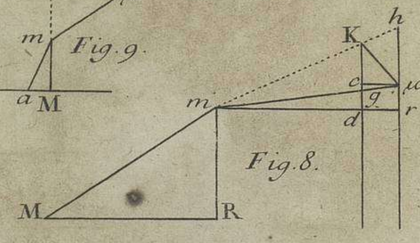

Fig. 8.

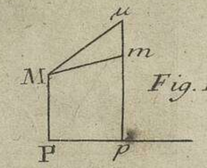

Fig. 10.

Fig. 11.

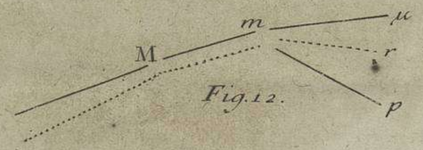

Fig. 12.

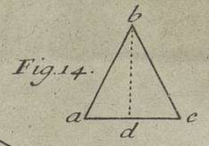

Fig. 14.

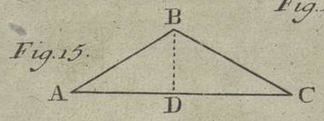

Fig. 15.

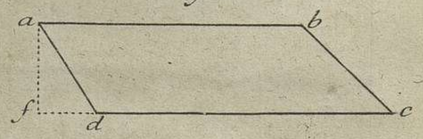

Fig. 16.

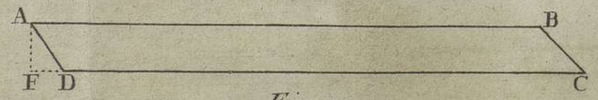

Fig. 17.

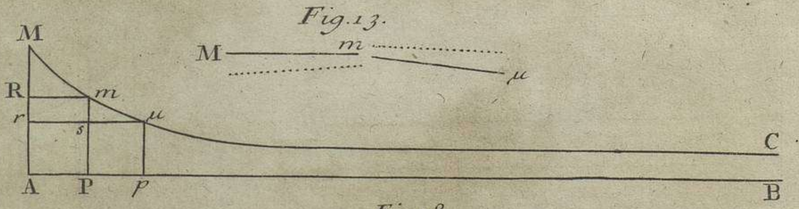

Fig. 18.

Fig. 13.

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA
DEL
DESEMBARCADERO DE C. VENEZUELA

M.E.C.D. 2017

BIBLIOTECA

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

M.E.C.D. 2017

788

GEOMET
DE
LENFINI

SUITE
DE
1725.

Real Observatorio de la Armada
BIBLIOTECA

01216

.....

M.E.C.D. 2017