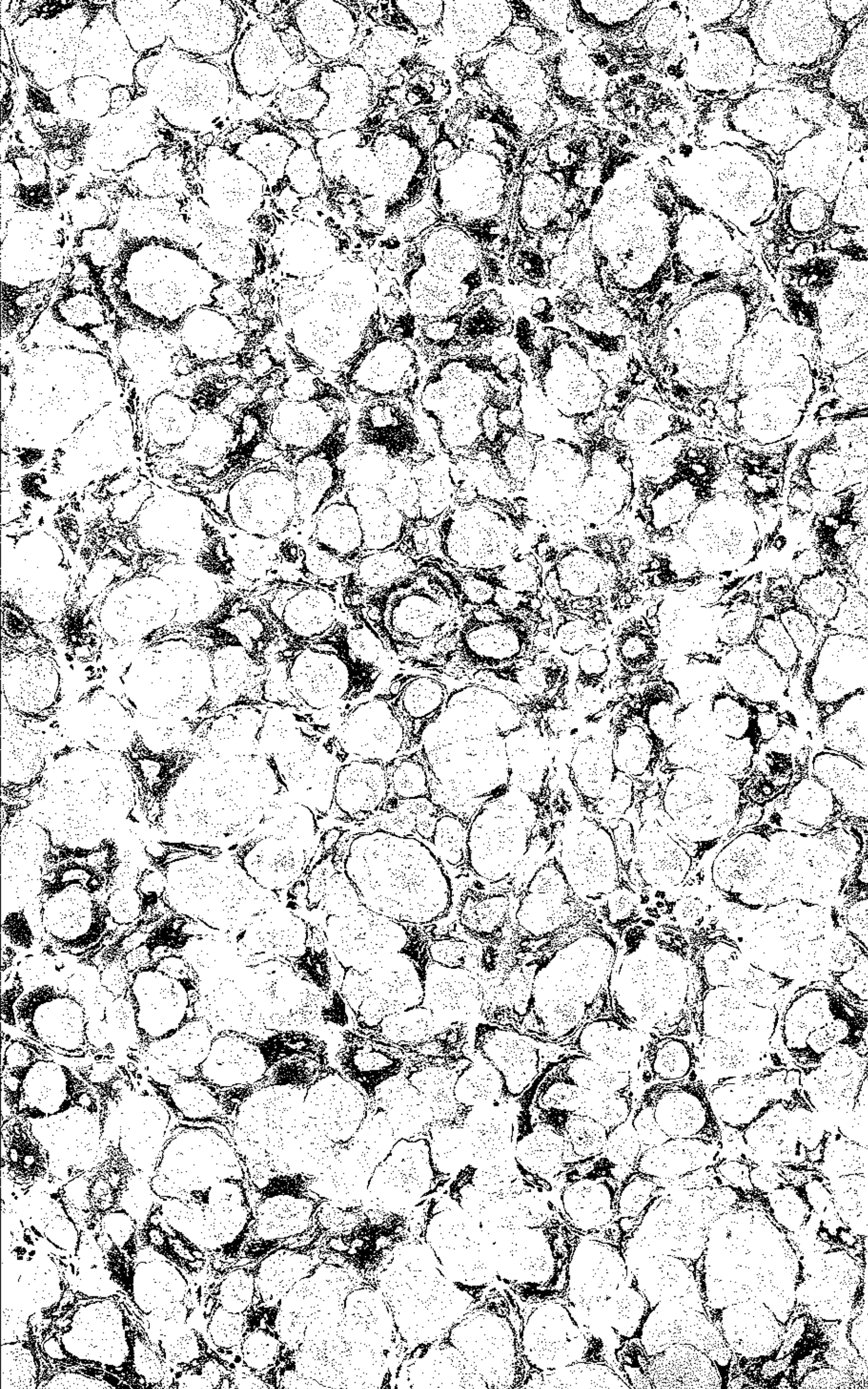
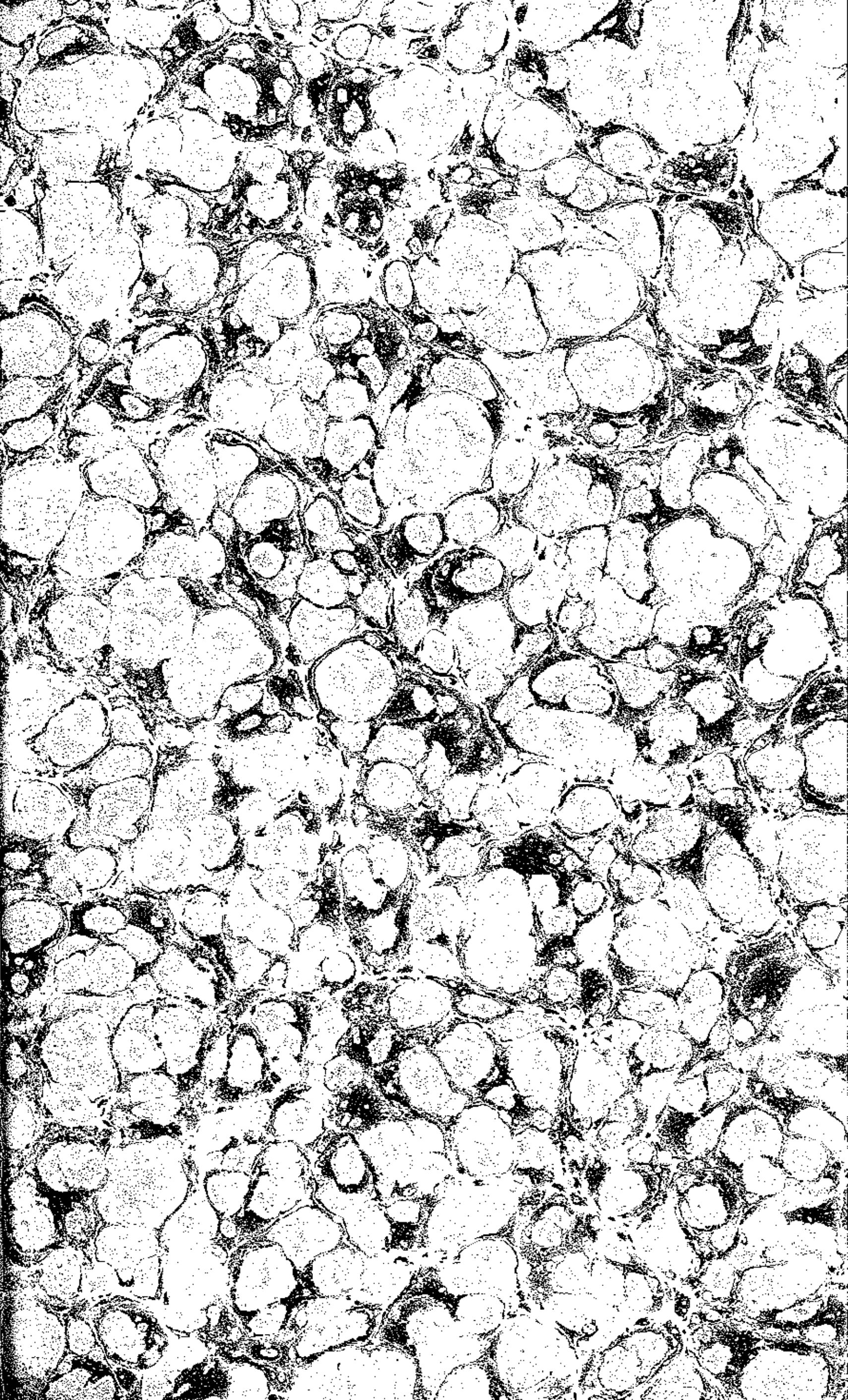
Cortázar.

GEOMETRIA ANALITICA.





TRATADO

DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA,

POR

Don Augusto Echevarría, y

DON JUAN CORTÁZAR,

Licenciado en ciencias, Ingeniero de puentes y caminos aprobado (con diploma) por la Escuela Central de París, Catedrático de álgebra superior y geometría analítica de la Universidad de Madrid, etc.

MADRID

IMPRENTA DE DON AGUSTIN ESPINOSA.

1855.

Al S.or D. Fausto dela Vega

su amigo y comp.º

Juan Cortázar

ÍNDICE.

Introduccion al estudio de la Geometría analítica.

Capítulos. Páginas.

Capítulos		Páginas
1	Nociones preliminares	1
2	Homogeneidad	2
3	Construcciones geométricas	6
4	Resolucion de problemas de geometría elemental	17

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA.

LIBRO I. — Ecuaciones de las líneas.

1	Determinacion de un punto de un plano	53
2	Representacion geométrica de las ecuaciones, y algébrica de líneas	55
3	Transformacion de las coordenadas	76
4	Clasificacion de las líneas	86
5	Líneas de primer órden	90

LIBRO II.—Líneas de segundo órden

1	Método general de tangentes á las curvas planas algébricas	111
2	Asíntotas de los curvas	122
3	Centro y diámetros de las líneas de segundo grado	133
4	Discusion de la ecuacion general de segundo grado $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$	147
5	Reduccion de la ecuacion de segundo grado á formas sencillas	169
6	Teoría de la elipse	174
7	Teoría de la hipérbola	221
8	Teoría de la parábola	258
9	Coordenadas polares	283
10	Secciones cónicas y cilíndricas	294
11	Cuadratura de las curvas de segundo grado	304
12	Semejanza de las curvas planas	313
13	Número de condiciones necesario para la determinacion algébrica de una curva de segundo grado	322

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO.

LIBRO I. — Ecuaciones de las superficies y líneas.

1 Determinacion de un punto del espacio. 331
2 Representacion geométrica de las ecuaciones, y algébrica de las superficies y líneas del espacio. 335
3 Problemas sobre la línea recta. 342
4 Ecuaciones de las superficies. 350
5 Problemas sobre el plano. 370
6 Transformacion de las coordenadas en el espacio 380

LIBRO II —Superficies de segundo grado.

7 Clasificacion de las superficies. 385
1 Planos tangentes á las superficies curvas algébricas 387
2 Centro y planos diametrales de las superficies de segundo grado. 394
3 Reduccion de la ecuacion general de las superficies de segundo órden á sus formas mas simples, siendo los ejes rectangulares. 404
4 Teoría del elipsoide. 412
5 Teoría del hiperboloide de una hoja. 425
6 Teoría del hiperboloide de dos hojas 435
7 Teoría del paraboloide elíptico. 440
8 Teoría del paraboloide hiperbólico. 443
9 Discusion de las ecuaciones numéricas de segundo grado con tres variables. 448
Nota primera. Teorema de Taylor estendido á las funciones algébricas de dos y tres variables. 458
Nota segunda. Construccion de las raices de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con una incógnita, ó resolucion geométrica de estas ecuaciones. 462

PRÓLOGO.

Nos proponemos en este prólogo dar una idea del objeto de la geometría analítica, y de la obra que con este título presentamos al público inteligente.

Ya se sabe que la geometría general es la ciencia cuyo objeto es la resolucion de los problemas de las líneas, de las superficies de los cuerpos, y de los espacios que estos ocupan. En el estudio de la geometría se debe principiar naturalmente por su parte elemental; pero este estudio pudiera restringirse mucho mas de lo que se acostumbra, para los que han de estudiar en adelante la geometría analítica.

Los problemas principales de la geometría plana son:

1.º Tangentes, 2.º asíntotas, 3.º centro y diámetros, 4.º semejanza, 5.º número de condiciones necesario á la determinacion algébrica de las líneas, 6.º curvatura, 7.º cuadratura, 8.º rectificacion.

Los de la geometría del espacio son:

1.º Planos tangentes, 2.º centro y planos diametrales, 3.º semejanza de las superficies, 4.º número de condiciones necesario á la determinacion algébrica de las superficies, 5.º curvatura, 6.º cuadratura de las superficies, 7.º cubatura de los espacios limitados.

El método que se seguia, antes que Descartes pusiese los fundamentos de la geometría analítica, en la resolucion de algunos de estos problemas, (pues los geómetras aun no se habian ocupado de todos ellos) era un método especial, es decir, diferente para cada línea, superficie ó cuerpo; de suerte que en cada caso particular habia que resolver el mismo problema, sin que su resolucion en otros casos evitase nuevo trabajo en el caso propuesto. Se trataba, por ejemplo, de tirar tangentes á la elipse; el método seguido para tirar tangentes al círculo era completamente inútil, y habia que hacer un estudio especial de la elipse para resolver dicho problema; el método seguido para la elipse, ya no se aplicaba á la hipérbola; en una palabra, cada curva exigia nuevo estudio para la resolucion del problema. Lo que acabamos de decir respecto del problema de las tangentes, sucedia idénticamente en los otros problemas.

La geometría analítica resuelve todos estos problemas por métodos generales, sin que la aplicacion de estos métodos generales á los diferentes casos particulares presente mas que dificultades secundarias.

Así, la ecuacion $y-y'=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}(x-x')$ resuelve generalmente los problemas de las tangentes á las curvas planas. La espresion $\int_a^b ydx$ nos da el área de una superficie plana cualquiera, comprendida entre el eje Ox, la curva y las dos ordenadas rectangulares cuyas abscisas correspondientes son a y b. La ecuacion $R=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ nos da el radio de curvatura de una curva plana en el punto (x, y). La ecuacion $f'_x\times m+f'_y\times n+f'_z=0$ nos da los planos diametrales de las superficies de segundo órden. Etc., etc.

Con lo que acabamos de decir, creemos, se habrá comprendido cuál es el objeto de la geometría analítica.

Respecto de nuestra obra diremos, que los problemas generales de geometría plana, de que nos hemos ocupado, son: el de las tangentes á las curvas algébricas; el de las asíntotas á las curvas algébricas y trascendentes; la teoría de los centros y diámetros para las curvas de segundo grado, pues para las demás esta teoría no presenta utilidad; la teoría de la semejanza, y el número de condiciones necesario para la determinacion algébrica de las líneas de segundo órden. En la geometría del espacio hemos sido mucho mas cortos; pues no nos hemos ocupado mas que de las teorías de los planos tangentes, centros y planos diametrales, suficientes para el estudio principal de las superficies de segundo órden.

Se ve, pues, que no hemos llenado, ni con mucho, el objeto de la geometría analítica: era necesario, para esto, valernos de los cálculos diferencial é integral. Asi que, el tratado que presentamos, y cuantos hoy llevan este nombre, deben considerarse como una parte de la geometría analítica, cuyo estudio se completa con las aplicaciones geométricas de los cálculos superiores.

Nota. Los números de nuestra obra que pueden omitirse en un curso de regular estension de geometría análitica son los siguientes:

11, 12, Nota 2.ª del 17, y los problemas del mismo número siguientes al 3.º; todos los problemas del núm. 18, escepto el primero; 38; la nota del tercer caso del número 43; 45, 50; 53, 2.ª solucion y las notas 1.ª y 2.ª; 54, dos de las tres soluciones; 56, la resolucion del problema 3.º con respecto á ejes oblicuángulos; 58, la resolucion geométrica, y su resolucion con respecto á ejes oblicuángulos; art. 3.º pág. 102; 67, 68; 70, la ecuacion de la normal referida á ejes oblicuángulos; el ejemplo 1.º pág. 126; 77, 91; algunos ejemplos del núm. 99; 104, 124, 125, 126, 127; la nota del núm. 133; el problema 4.º del núm. 136; la discusion de las fórmulas del problema 2.º núm. 162; 137, 168, 169;

problema 4.° del núm. 178; la construccion geométrica del problema núm. 204; artículo 6.° pág. 279; 231, 232, 240, 244, 245, 246, 247; capítulo XIII, pág. 322; 299, 327, 328, 329, 330, 350, 351, 352, 359, 360, 364, 365, 369, 384, 388, 391; y la nota 2.ª al fin de la obra

Los profesores modificarán, segun crean conveniente, esta indicacion nuestra.

36 páginas [illegible]

APLICACION

DEL

ALGEBRA A LA GEOMETRIA ELEMENTAL,

Ó

INTRODUCCION AL ESTUDIO

DE LA

GEOMETRÍA ANALÍTICA.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

1. Se llama *aplicacion del álgebra á la geometría elemental* la ciencia que trata de la resolucion de las cuestiones de la geometría elemental por medio del cálculo algébrico ordinario (1).

Para que las cuestiones de geometría puedan resolverse por medio del cálculo algébrico, es menester representar algébricamente las líneas, las superficies y los espacios que ocupan los cuerpos.

Una línea cualquiera se representará de una manera general por una letra, que será la razon comensurable ó incomensurable de dicha línea á otra que se haya tomado por unidad. Una superficie cualquiera se representará de un modo general por el producto de dos letras, valores numéricos

(1) Ya se supone que estas cuestiones han de tener alguna complicacion; pues seria ridículo, impropio é imposible resolver por el cálculo los problemas primeros ó fundamentales de la geometría elemental.

de sus dos dimensiones; siendo unidad lineal el lado del cuadrado tomado por unidad de superficie. Un espacio limitado cualquiera se representa de una manera general por el producto de tres letras, valores numéricos de sus tres dimensiones; siendo unidad lineal el lado del cubo que se toma por unidad de espacio.

Representado algébricamente tanto las líneas como las superficies y los espacios, se podrán resolver por medio del cálculo las cuestiones de geometría, es decir, las cuestiones en que se trate de hallar alguna longitud, área ó volúmen; ligando primeramente por medio de ecuaciones á las incógnitas con las cantidades conocidas, y despejando en seguida las incógnitas, segun las reglas del álgebra.

CAPITULO II.

Homogeneidad.

2. Se entiende por *grado* de un monomio racional y entero, el número de sus factores literales, ó mas bien factores variables; es decir, factores cuyos valores varían, variando la unidad á que se refieren.

Asi, el monomio πR^2, área del círculo, es de segundo grado, puesto que π es un factor constante, y R, radio del círculo, varía de valor, variando la unidad. El monomio $\frac{4}{3}\pi R^3$, volúmen de la esfera, es de tercer grado por igual razon.

Se llama *grado* de un polinomio homogéneo, racional y entero el grado de cada uno de sus términos.

Se llama *grado* de una espresion fraccionaria la diferencia de los grados del numerador y denominador.

Así, la espresion $\frac{4a^3b}{c}$, en que las letras representan cantidades que varían, variando la unidad, es de tercer grado. La espresion $\frac{4a^2b-3ab^2}{m+n}$ es de segundo grado, si las letras representan cantidades variables.

Se llama *grado* de una espresion radical el cociente que resulta, partiendo el grado de la cantidad que está bajo del radical por el índice del radical.

Así, la espresion $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$, en que a y b son cantidades variables, es del grado $\frac{1}{3}$. La espresion $\sqrt{\frac{3a^4b-5a^2b^2c,}{m+n}}$ es de segundo grado, suponiendo que las letras representen cantidades que varían, variando la unidad.

3. Ecuacion *homogénea* es aquella ecuacion cuyos términos son todos del mismo grado

Teorema *Si ninguna de las líneas, cuyos valores entran en una ecuacion, es unidad, la ecuacion es homogénea.*

Supongamos, para fijar las ideas, que los valores de las cuatro líneas rectas A, B, C y D esten ligados por medio de una ecuacion. Tomemos por unidad la línea recta D, y llamemos a, b y c á los valores numéricos que, en esta suposicion, tienen las otras tres rectas; y admitamos que la ecuacion, sin denominadores, ni radicales, sea entonces una ecuacion cualquiera

$$a-bc+a^2b=0 \quad [A].$$

Supongamos ahora que se tome por unidad una recta cualquiera U diferente de las cuatro A, B, C, D, y que los valores de estas cuatro rectas referidas á la unidad U sean respectivamente a', b', c', d'. Cuando la unidad es la recta D, las tres rectas A, B y C son respectivamente iguales á las tres rectas aD, bD y cD, esto es,

$$A=aD, \; B=bD, \; C=cD;$$

y cuando la recta U es la unidad, las cuatro rectas A, B, C y D son respectivamente iguales á las rectas $a'U$, $b'U$, $c'U$ y $d'U$, es decir:

$$A=a'U, \; B=b'U, \; C=c'U, \; D=d'U.$$

Sustituyendo el valor de la recta D en las igualdades anteriores, tendremos estas otras:

$$A=ad'U, \; B=bd'U, \; C=cd'U.$$

Por consiguiente serán iguales la recta $a'U$ y la $ad'U$, la

$b'U$ y la $bd\,U$, la $c'U$ y la $cd'U$; luego tambien serán iguales los números a' y ad', b' y bd', c' y cd', esto es, $a'=ad'$, $b'=bd'$, $c'=cd'$, de donde resultan

$$a=\frac{a'}{d'},\ b=\frac{b'}{d'},\ c=\frac{c'}{d'}\ (1),$$

lo que prueba que *los valores primitivos de las rectas son respectivamente iguales á los valores nuevos divididos por el nuevo valor de la recta que antes fué unidad.*

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [A], tendremos esta otra:

$$\frac{a'}{d'}-\frac{b'c'}{d'^2}+\frac{a'^2b'}{d'^3}=0,$$

cuyos términos son todos del grado cero, y por tanto esta ecuacion es homogénea; y no dejará de serlo, aun cuando se multipliquen todos sus términos por d'^3, para que todos sean enteros.

Queda pues demostrado que la nueva ecuacion, correspondiente al caso en que ninguna de las cuatro rectas A, B, C y D es unidad, es homogénea, conforme al enunciado del teorema.

Corolario. *Si la ecuacion, que liga los valores de varias rectas, no es homogénea, alguna de las rectas que debia entrar en ella se ha tomado por unidad; pues si no fuese así, la ecuacion seria homogénea.*

4. Dada una ecuacion no homogénea, conviene á veces

---

(1) Pueden obtenerse estas relaciones de un modo mas breve por el siguiente razonamiento: cuando la recta U es la unidad, el valor de la recta D es d'; luego la nueva unidad U es d' veces menor que la unidad primitiva D; luego los nuevos valores de las rectas A, B y C serán d' veces mayores que los primitivos, es decir que

$$a'=ad',\ b'=bd',\ c'=cd',$$

de donde $$a=\frac{a'}{d'},\ b=\frac{b'}{d'},\ c=\frac{c'}{d'}.$$

Pero este razonamiento no es general, porque en él hemos supuesto que d' es un número entero; siendo así que puede ser un número fraccionario, y aun incomensurable. En el número 24 de la trigonometría nos servimos de este razonamiento, porque allí era $d=10^{10}$

hallar la ecuacion correspondiente, no siendo unidad la recta que antes lo fué, ni ninguna de las otras, cuyos valores entran en la ecuacion, ó lo que es igual, siendo la unidad indeterminada: hemos visto en la demostracion del teorema [3], que los valores primitivos de las rectas son respectivamente iguales á los valores nuevos divididos por el nuevo valor de la recta que antes fué unidad; luego, para hallar la nueva ecuacion, no habrá mas que sustituir en la ecuacion propuesta, en vez de cada letra, representante de recta, su razon al nuevo valor de la unidad primitiva. Como despues de esta sustitucion resulta una ecuacion homogénea, pero cuyos términos son todos del grado 0, se hallará mas brevemente la nueva ecuacion, haciendo homogénea la primitiva, multiplicando los términos faltos de factores por potencias del nuevo valor de la recta que antes fué unidad.

Ejemplos 1.° Sea la ecuacion $a^2x-bx+c=0$, siendo a, b, c y x valores de cuatro rectas. La falta de homogeneidad de esta ecuacion proviene, segun queda demostrado, de que una recta, cuyo valor debia entrar en dicha ecuacion, se ha tomado por unidad. Supongamos ahora que no es unidad dicha recta, ni ninguna de las otras cuyos valores entran en la ecuacion, y que sea d el nuevo valor de la recta que antes fué unidad. La ecuacion correspondiente será, segun la primera regla,

$$\frac{a^2x}{d^3}-\frac{bx}{d^2}+\frac{c}{d}=0,$$

ó, multiplicando por d^3,

$$a^2x-bdx+cd^2=0.$$

Segun la otra regla se hallará inmediatamente

$$a^2x-bdx+cd^2=0.$$

No se pierda de vista que las letras de esta nueva ecuacion representan números iguales respectivamente á los que las mismas letras representan en la ecuacion propuesta multiplicados por d

2.° Representando x, a y b tres líneas rectas, supongamos que se haya hallado $x=\sqrt[3]{a^2-b}$. Desde luego vemos que esta ecuacion no es homogénea. Si queremos hallar la ecuacion correspondiente, no siendo unidad la recta que antes lo fué, y siendo d el valor nuevo de dicha recta, tendremos, segun la primera regla,

$$\frac{x}{d}=\sqrt[3]{\frac{a^2}{d^2}-\frac{b}{d}},\text{ ó } x=\sqrt[3]{a^2d-bd^2}.$$

Por la segunda regla hubiéramos hallado inmediatamente esta ecuacion, observando que, siendo el radical el valor de la recta x, debe ser una espresion de primer grado, y por tanto la cantidad que está bajo del radical, debe ser de tercer grado, puesto que el índice del radical es 3.

Nota. El teorema sobre la homogeneidad de las ecuaciones es de muchísima utilidad para la verificacion de los cálculos; pues, suponiendo la unidad indeterminada, las diferentes ecuaciones que se vayan obteniendo, deben ser siempre homogéneas; por lo que, si falta en alguna esta circunstancia, es prueba de que ha habido error. No debe, pues, fijarse la unidad en los cálculos, porque se perderia esta ventaja; únicamente en las líneas trigonométricas, que tan á menudo ocurren, conviene, para la sencillez de las fórmulas trigonométricas, que la unidad sea el radio; y en tal caso las líneas trigonométricas son cantidades que no varían, variando la unidad á que están referidas las rectas que entran en la ecuacion; y por consiguiente la ecuacion debe ser homogénea con respecto á las otras letras.

Asi, la ecuacion que da el teorema fundamental de la trigonometría rectilínea, que sabemos es

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A,$$

es homogénea, prescindiendo del factor $\cos A$ que no varía, aunque varíe la unidad á que están referidos los tres lados del triángulo.

CAPITULO III.

Construcciones geométricas.

ARTICULO 1.º

Nociones preliminares.

5. Las espresiones *lineales* ó de primer grado construibles por medio de la regla y el compás son las espresiones ente-

ras, las espresiones fraccionarias racionales, y las espresiones radicales cuyo índice es 2^n, siendo n entero y positivo, es decir, las cantidades radicales cuyo índice es 2, 4, 8, etc.

Supondremos en las construcciones que siguen, que las fórmulas son homogéneas; pues aunque, al hallar estas fórmulas, se suponga que algunas de las líneas que debia entrar en la ecuacion es unidad, la magnitud geométrica de las líneas, cuyos valores entran en la fórmula, no sufrirá alteracion ninguna, aunque se restablezca la homogeneidad.

Articulo 2.°

Construccion de espresiones lineales enteras.

6. Sea la espresion

$$x=a-b+c,$$

en la que las letras a, b y c son valores numéricos de tres rectas, y x es el valor numérico de la recta incógnita. Para obtener dicha recta, sin pasar por su valor numérico, ó lo que es igual, por medio de la regla y el compás, tomaremos sobre una recta indefinida las rectas aditivas, cuyos valores sean a y c, una á continuacion de otra, quitaremos de la suma de estas dos rectas la recta sustractiva b, y la parte de recta que quede, será la recta representada por x.

Articulo 3.°

Construccion de espresiones lineales fraccionarias.

7. Las espresiones fraccionarias lineales tienen necesariamente un factor mas en el numerador que en el denominador, puesto que su grado es 1.

Consideremos en primer lugar el caso en que los dos términos del quebrado son monomios.

1.° Sea la espresion $x=\frac{ab}{c}$,

en la que a, b y c son valores numéricos de tres rectas: se trata de construir, sin pasar por los números, la recta cuyo valor es x. De la fórmula propuesta sale

$$cx=ab,$$

y de aquí resulta la proporcion

$$c : a :: b : x.$$

Luego la recta x (1) es una cuarta proporcional á las rectas c, a y b [*Geom. probl.* 26].

2.° Sea $$x=\frac{a^2}{b}.$$

De esta ecuacion resulta
$$bx=a^2,$$
y por consiguiente
$$b : a :: a : x.$$

Luego la recta x es una tercera proporcional á las rectas b y a.

3.° Sea $$x=\frac{abc^2}{fgh}.$$

Escribo esta espresion de este modo:
$$x=\frac{ab}{f}\times\frac{c}{g}\times\frac{c}{h}.$$

Sea α la recta representada por el quebrado $\frac{ab}{f}$, que será una cuarta proporcional á las rectas f, a y b; tendremos
$$x=\frac{\alpha c}{g}\times\frac{c}{h}.$$

Sea β la recta representada por el quebrado $\frac{\alpha c}{g}$, que tambien será una cuarta proporcional á las rectas g, α y c; tendremos por consiguiente
$$x=\frac{\beta c}{g},$$
que es una cuarta proporcional á las rectas g, y c.

Vemos que, para construir una espresion fraccionaria cuyos dos términos son monomios, hay que hallar tantas cuartas proporcionales, cuantos son los factores del denominador: la última cuarta proporcional es la recta representada por dicha fraccion.

Supongamos ahora que el uno ó los dos términos del quebrado sean polinomios. Se igualará cada polinomio á un mo-

---

(1) En adelante, con objeto de abreviar, en lugar de decir *la recta cuyo valor es* a, b, *etc.* se dirá *la recta* a, b, *etc*

nomio cuyos factores sean todos conocidos menos uno: determinado este, y construida la recta que representa, quedará el quebrado reducido al caso en que sus dos términos son monomios.

Ejemplos. 1.° $x=\frac{abc-d^2e+f^3}{gh}$:

haremos

$$abc-d^2e+f^3=f^2\alpha,$$

siendo α el factor indeterminado; tendremos

$$\alpha=\frac{abc}{f^2}-\frac{d^2e}{f^2}+f,$$

espresion que ya sabemos construir; por consiguiente

$$x=\frac{f^2\alpha}{gh},$$

que tambien sabemos construir.

2.° $x=\frac{a^2b+c^2d-b^3}{mn-pq}$:

haremos

$$a^2b+c^2d-b^3=b^2\alpha,\ mn-pq=b\beta,$$

de donde

$$\alpha=\frac{a^2}{b}+\frac{c^2d}{b^2}-b,\ \beta=\frac{mn}{b}-\frac{pq}{b},$$

espresiones fáciles de construir. Por consiguiente

$$x=\frac{b^2\alpha}{b\beta}=\frac{b\alpha}{\beta},$$ cuarta proporcional.

La espresion $x=\frac{a^2-b^2}{c}$

puede construirse mas sencillamente, transformándola en

$$x=\frac{(a+b)\ (a-b)}{c},$$

que es una cuarta proporcional á las rectas c, $a+b$ y $a-b$.

Articulo 4.°

Construccion de espresiones lineales radicales, cuyo índice es 2^n, siendo n *entero y positivo.*

8. Consideremos en primer lugar las espresiones radicales de 2.° grado.

Si la espresion radical de 2.° grado, que representa una recta, es homogénea, la cantidad que está bajo del radical será de 2.° grado [2].

Tenemos que considerar cuatro casos: 1.° que la espresion que está bajo del radical sea un monomio, 2.° que dicha espresion sea un polinomio entero, 3.° que sea una fraccion cuyos términos sean monomios, 4.° que sea una fraccion de la cual el uno ó los dos términos sean polinomios.

1.° Sea $$x=\sqrt{ab},$$
siendo, como se ve, un monomio la cantidad que está bajo del radical.

Elevando ambos miembros al cuadrado, tendremos
$$x^2=ab,$$
de donde resulta la proporcion
$$a : x :: x : b;$$
luego x es una media proporcional entre a y b [*Geometría, probl.* 28].

2.° Si la espresion de 2.° grado que está bajo del radical es un polinomio, la igualaremos á un monomio de dos factores uno conocido y otro incógnito: determinada y construida la recta representada por este factor, quedará el caso actual reducido al anterior.

Sea $$x=\sqrt{ab+c^2-de}.$$
Hagamos $$ab+c^2-de=c\alpha,$$
de donde $$\alpha=\frac{ab}{c}+c-\frac{de}{c},$$
espresion fácil de construir. Por consiguiente
$$x=\sqrt{c\alpha},$$
que es una media proporcional entre las rectas c y α.

3.° Consideremos ahora el caso en que la espresion que está bajo del radical es una fraccion, cuyos dos términos son monomios.

Sea $$x=\sqrt{\frac{abc^2d}{fge}}.$$

Escribo esta espresion asi: $x=\sqrt{a\times\frac{bc^2d}{efg}}.$

Hago $\frac{bc^2d}{efg}=\alpha$ Construyo esta recta α, y será

$$x=\sqrt{a\alpha},$$

que es una media proporcional entre a y α.

4.° Si los términos de la fraccion que está bajo del radical, son polinomios, se iguala cada uno á un monomio cuyos factores sean todos conocidos menos uno: determinada y construida la recta representada por el factor incógnito, quedará la cuestion reducida al caso anterior.

Ejemplo. $$x=\sqrt{\frac{ab^3+cd^3}{b^2+c^2}}.$$

Hago $ab^3+cd^3=b^3\alpha$, de donde $\alpha=a+\frac{cd^3}{b^3}$; y $b^2+c^2=b\beta$, de donde $\beta=b+\frac{c^2}{b}$: será por consiguiente

$$x=\sqrt{\frac{b^3\alpha}{b\beta}}=\sqrt{\frac{b^2\alpha}{\beta}},$$

que ya sabemos construir.

Casos particulares.

1.° $$x=\sqrt{a^2+b^2}$$

puede construirse, considerando que x es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b.

2.° $$x=\sqrt{a^2-b^2}$$

es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a y el otro cateto b.

Esta última espresion puede tambien construirse transformándola en

$$x=\sqrt{(a+b)\,(a-b)},$$

que es una media proporcional entre las rectas $a+b$ y $a-b$.

3.° $$x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2-e^2}.$$

Fig. 1. Construyo un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos sean $AB=a$, $AC=b$; la hipotenusa BC será $\sqrt{a^2+b^2}$. Construyo un triángulo rectángulo BCD (por medio del semicírculo) cuya hipotenusa sea BC y uno de los catetos sea $CD=c$, será el otro cateto $BD=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. Construyo un triángulo rectángulo BDE cuyos catetos sean BD y ED, prolongacion de CD é igual á d, y tendré $BE=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Construyo finalmente un triángulo rectângulo BEF cuya hipotenusa sea BE y un cateto $EF=e$, y será $BF=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2-e^2}$.

9. Pasemos ahora á la construccion de las espresiones radicales de cuarto grado, las cuales deberán tener bajo del radical espresiones tambien de cuarto grado.

Consideraremos, como en el caso anterior, los cuatro casos siguientes: 1.° la cantidad que está bajo del radical es un monomio, 2.° un polinomio, 3.° un quebrado cuyos dos términos son monomios, 4.° un quebrado cuyos dos términos son polinomios, ó por lo menos uno de ellos.

1.° $$x=\sqrt[4]{abcd}:$$

hago $$ab=\alpha^2,\ \alpha=\sqrt{ab};\ cd=6^2,\ 6=\sqrt{cd},$$

que son dos medias proporcionales; y por consiguiente

$$x=\sqrt[4]{\alpha^2 6^2}=\sqrt{\alpha 6},$$

que es otra media proporcional.

Los demás casos se reducen, como en las radicales de segundo grado, al que acabamos de considerar.

Asi, siendo

$$x=\sqrt[4]{a^3b-c^3d+\frac{ef^4}{g}},$$

haremos $$a^3b-c^3d+\frac{ef^4}{g}=a^3\alpha,$$

$$\alpha=b-\frac{c^3d}{a^3}+\frac{ef^4}{ga^3},$$

espresion que sabemos construir: por consiguiente

$$x=\sqrt[4]{a^3\alpha}.$$

Para construir esta espresion, hago $a\alpha = 6^3$, $6 = \sqrt{a\alpha}$, será por consiguiente

$$x = \sqrt[4]{a^2 6^2} = \sqrt{a6}$$ media proporcional entre a y 6.

Con igual facilidad se construirán las cantidades radicales de 8.° grado, 16.° grado, etc.

Artículo 5.°

Construccion de las raices de las ecuaciones completas de 2.° grado y de las ecuaciones bicuadradas, sin resolverlas.

10. Resolviendo las ecuaciones de 2.° grado y las ecuaciones bicuadradas, resultan radicales de 2.° ó 4.° grado, que ya sabemos construir. Mas actualmente tratamos de construir las raices de estas ecuaciones sin resolverlas.

1.° Ecuaciones completas de 2.° grado.

Toda ecuacion completa de 2.° grado puede reducirse á la forma

$$x^2 + ax + b^2 = 0.$$

Poniendo en manifiesto los signos que pueden tener estos términos, tendremos las cuatro ecuaciones siguientes:

$$x^2 + ax + b^2 = 0,$$
$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0,$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

La primera de estas ecuaciones no puede tener raices positivas, pues la suma de tres cantidades positivas no puede ser igual á cero; y además la regla de los signos de Descartes lo prueba. La segunda es la transformada en $-x$ de la primera ecuacion [*Alg. super.* 292]; luego sabiendo construir las raices de la segunda ecuacion, estas raices, precedidas del signo $-$, serán las de la ecuacion primera.

Para construir las raices de la ecuacion segunda, podemos escribir dicha ecuacion así:

$$b^2 = x\,(a - x) \ldots [1],$$

y ahora vemos que b es una media proporcional entre las rectas x y $a - x$.

Fig. 2. Esto supuesto, sobre una recta $AB=a$ describo un semicírculo, en un estremo A del diámetro AB levanto una perpendicular $AC=b$, por el estremo C de esta perpendicular tiro una paralela CE al diámetro, y las dos rectas CD y CE serán las dos raices de esta ecuacion.

En efecto, bajando la perpendicular DF, tendremos [*Geom. teor.* 68, *Corol.*]

$$DF^2=AF\times FB,\ \text{ó}\ b^2=CD\,(a-CD),$$

igualdad que resulta sustituyendo en la ecuacion [1] en lugar de x la línea CD; luego CD satisface á esta ecuacion, ó es raiz de la misma.

Del mismo modo se demuestra que la recta CE es la otra raiz.

Fig. 3. Si AC ó b fuese igual á $\frac{a}{2}$, la recta CE seria tangente á la circunferencia, y las dos raices serian iguales á CE; como debe ser, pues la ecuacion es entonces

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=0,\ \text{ó}\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0,$$

cuyas dos raices son iguales á $\frac{a}{2}$.

Si $b>\frac{a}{2}$, la paralela al diámetro AB no corta á la circunferencia, y por tanto la ecuacion no tendrá ninguna raiz real; y en efecto, entonces la ecuacion, llamando d^2 al esceso de b^2 sobre $\frac{a^2}{4}$, es

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+d^2=0,$$

ó

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+d^2=0,$$

es decir, la suma de dos cantidades positivas igual á cero; lo que es imposible, teniendo x valores reales.

Construyamos ahora las raices de la 3.ª ecuacion

$$x^2+ax-b^2=0.$$

Sabemos que estas raices no pueden ser imaginarias, pues el producto de dos cantidades imaginarias conjugadas $\alpha+6\sqrt{-1}$, $\alpha-6\sqrt{-1}$ es la cantidad positiva α^2+6^2; y tambien [*Alg.* 177], que una de dichas raices es positiva y la otra negativa; siendo la negativa la que tendrá mayor longitud, puesto que la suma de las dos es $-a$.

Fig. 4. De esta ecuacion resulta

$$b^2=x\,(a+x);$$

es decir que b es una media proporcional entre x y $a+x$.

Por lo tanto, describo un círculo cuyo diámetro sea a, en un punto A tiro una tangente $AB=b$, desde el estremo B tiro la secante BD que pase por el centro, y tendré que BE y $-BD$ serán las raices de la ecuacion propuesta.

En efecto, tenemos

$$AB^2=BE\times BD,$$

ó

$$b^2=BE\,(a+BE),$$

es decir que BE satisface á la ecuacion propuesta, ó es raiz de esta ecuacion. Para probar que $-BD$ es raiz de la misma, tengo $BE=BD-a$; y como

$$AB^2=-BE\times-BD,$$

será

$$AB^2=-BD\,(a-BD);$$

luego tambien $-BD$ satisface á la cuestion propuesta, ó es raiz de ella.

Las raices de la ecuacion cuarta solo se diferencian en el signo de las raices de la tercera ecuacion [*Alg. super.* 292].

11. *Ecuaciones bicuadradas*. Las ecuaciones bicuadradas, poniendo en manifiesto los signos de sus coeficientes, presentan los cuatro casos siguientes:

$$x^4+a^2x^2+b^4=0,$$
$$x^4-a^2x^2+b^4=0,$$
$$x^4+a^2x^2-b^4=0,$$
$$x^4-a^2x^2-b^4=0.$$

Las raices de la primera ecuacion son imaginarias, pues poniendo en vez de x una cantidad real, tendríamos en el primer miembro la suma de tres cantidades positivas, la cual no puede ser igual á cero.

Para construir, sin resolver, las raices de la segunda ecuacion, hagamos $x^2=ay$, y tendremos

$$a^2y^2-a^3y+b^4=0,$$

ó

$$y^2-ay+\frac{b^4}{a^2}=0,$$

ó, haciendo $\frac{b^2}{a}=\alpha$,

$$y^2-ay+\alpha^2=0.$$

Construyendo las raices de esta ecuacion, que podrán ser reales y positivas, ó imaginarias [*Alg.* 177], y llamándolas, si son reales y positivas, α y β, tendremos

$$x^2=a\alpha,\ x^2=a\beta,$$

y ahora se hallarán los cuatro valores de x, construyendo dos medias proporcionales entre las cantidades a y α, a y β, y tomando estas medias proporcionales positiva y negativamente.

Con tanta facilidad se construyen las raices de las dos últimas ecuaciones.

Artículo 6.°

Construccion de espresiones de 2.° y 3.er grado

12. Si se quisieran construir espresiones de 2.° grado, que ya sabemos, representan superficies, igualaríamos dicha espresion al producto de dos factores, uno conocido y otro incógnito; se construiria la recta representada por este último; y entonces la espresion propuesta representaria un paralelógramo, cuyas dimensiones son estos dos factores.

Ejemplo. Tratemos de construir la espresion

$$\frac{a^2b-c^2d}{f};$$

igualándola á $a\alpha$ será

$$\alpha=\frac{a^2b}{af}-\frac{c^2d}{af}=\frac{ab}{f}-\frac{c^2d}{af}.$$

Construida la recta α, la espresion propuesta representará un paralelógramo cuyas dimensiones son a y α.

Si la espresion es de 3.er grado, se igualará al producto de tres factores, dos conocidos y uno incógnito, se despejará y construirá este; y entonces la espresion propuesta representará un paralelepípedo, cuyas tres dimensiones son dichos tres factores.

Ejemplo. Sea la espresion

$$a^3-\frac{a^2b^2}{c}+bc^2.$$

Hago
$$a^3-\frac{a^2b^2}{c}+bc^2=a^2\alpha,$$

de donde
$$\alpha=a-\frac{b^2}{c}+\frac{bc^2}{a^2}.$$

Construida la recta α, la espresion propuesta representará un paralelepípedo, cuyas tres dimensiones son a, a y α.

CAPITULO III.

Resolucion de problemas de geometría elemental.

Articulo primero.

Nociones preliminares.

13. La resolucion de un problema gráfico por medio del cálculo algébrico consta de tres partes: 1.ª poner el problema en ecuacion, 2.ª despejar la incógnita ó las incógnitas, 3.ª construir los valores de las incógnitas, cuando sean construibles por medio de la regla y el compás.

Para poner en ecuacion un problema gráfico, se supone el problema resuelto, haciendo un croquis de la construccion que se pide; y se tiran en seguida las líneas auxiliares que se crean convenientes, á fin de ligar las incógnitas con los datos.

El despejo de las incógnitas corresponde al álgebra.

La construccion de las incógnitas debe hacerse sobre la figura misma del problema, aprovechando las líneas conocidas, de modo que la construccion sea lo mas sencilla posible, y al mismo tiempo la recta que resulte de la construccion para valor de la incógnita, ocupe, sin traslacion, el lugar mas conveniente: en esta doble condicion consiste la *elegancia* de la construccion.

Cuando los problemas gráficos se proponen fuera del papel, como en el terreno, la construccion geométrica de las incógnitas es inútil, y solo hay que hallar sus valores numéricos.

14. Los datos de un problema gráfico son todas las cantidades que se pueden medir desde un principio; y las incógnitas son todas aquellas magnitudes dependientes de la posicion que ha de tener la figura que se trata de construir. Entre todas las incógnitas debe tomarse por *principal*, es decir, debe hallarse la primera, aquella que dé una ecuacion de menor grado que las otras; y aun si varias de las líneas tomadas sucesivamente por incógnitas principales dan ecuaciones del mismo grado, debe preferirse la que dé una ecuacion mas sencilla. Si habiendo tomado una línea como incógnita principal del problema, se quiere luego tomar otra, se tendrá la ecuacion correspondiente á este último caso, hallando la relacion que hay entre las dos incógnitas, y eliminando en seguida la primera.

15. La resolucion de los problemas numéricos consta solo de las dos primeras partes de los gráficos. En los problemas numéricos los datos y las incógnitas estan indicados por su enunciado, y por eso su resolucion es, en general, mas fácil que la de los problemas gráficos.

16. Cuando al resolver un problema determinado, se halle una ecuacion que, ademas de la incógnita principal, contenga otra incógnita, se hallará en seguida otra ecuacion distinta de la primera entre las mismas dos incógnitas; y eliminando entre ambas ecuaciones la incógnita auxiliar, la ecuacion final que resulte, será la ecuacion del problema.

Articulo 2.°

Problemas gráficos.

17. Problema 1.° *Inscribir en un triángulo* ABC (Figura 5) *un cuadrado*, es decir, *construir un cuadrado que tenga dos de sus vértices sobre dos lados del triángulo, y los*

otros dos sobre el tercer lado, prolongado, si uno de los ángulos de la base es obtuso.

Fig. 5. Supongamos el problema resuelto, y sea $DEFG$ el cuadrado que se pide construir. Los datos de este problema son los tres lados del triángulo ABC, sus tres ángulos, la altura, los segmentos de la base, etc.: las incógnitas son las rectas EF, BF, AE, BE, AD, etc. Conocida una cualquiera de estas rectas incógnitas, las otras rectas incógnitas quedarán tambien conocidas.

Tomemos por incógnita principal el lado del cuadrado, y llamémosle x.

Los triángulos semejantes BEF y ABC nos dan la proporcion

$$\frac{EF}{BI}=\frac{AC}{BH}, \text{ ó } \frac{x}{BI}=\frac{AC}{BH}.$$

BI es tambien incógnita; pero es igual á $BH-HI=BH-x$; luego

$$\frac{x}{BH-x}=\frac{AC}{BH}.$$

Los únicos datos que entran en esta ecuacion, son BH y AC.

Hagamos, pues, para abreviar, $BH=a$, $AC=b$, y tendremos

$$\frac{x}{a-x}=\frac{b}{a},$$

de donde resulta $$x=\frac{ab}{a+b} \ldots\ldots [A].$$

Este valor de x, que es una cuarta proporcional á las rectas $a+b$, a y b, pudiera construirse fuera de la figura del problema: mas ya hemos dicho que la elegancia de una construccion consiste en hacerla en la misma figura, aprovechando las líneas conocidas del mejor modo posible, y obteniendo la recta, valor de la incógnita, sin traslacion, en la posicion mas conveniente á la resolucion del problema. Para obtener estas ventajas en la construccion actual, sea ABC (*fig.* 6) el triángulo dado; tiro la altura BH, tomo $HK=b$, y $KL=a$; tiro la BL, y la KI paralela á BL: HI será la cuarta proporcional ó el valor de x.

En efecto, los triángulos semejantes HIK, HBL nos dan la proporcion $$HL:HK::HB:HI,$$

ó $$a+b:b::a:HI=\frac{ab}{a+b}.$$

Tirando pues por el punto I la EF paralela á la base, y bajando desde los puntos de interseccion E y F dos perpendiculares á la misma, se tendrá el cuadrado $EFGD$ inscripto en el triángulo.

Aunque la solucion que acabamos de dar de este problema es muy sencilla, todavía se puede hallar otra que lo sea mas, tomando por incógnita principal la AD.

Llamemos y á la nueva incógnita: para llegar á conocerla, no tendremos mas que hallar la relacion que hay entre x é y, puesto que x queda conocida en la solucion anterior, y eliminando la x, se tendrá la ecuacion que nos dará el valor de y.

Para esto, tenemos la proporcion
$$BH:DE::AH:AD,$$
ó $$a:x::AH:y,$$
y llamando d al segmento AH, será
$$a:x::d:y.$$

Eliminando la x entre esta ecuacion y la [A], y despejando la y, resulta
$$y=\frac{bd}{a+b}.$$

Hé aquí un modo elegante de construir esta espresion, que es una cuarta proporcional á las rectas $a+b$, b y d. En el punto A levanto una perpendicular AM igual á la base b, junto el punto M con el B, y la recta AD, será el valor de y.

En efecto, los triángulos semejantes ADM, BDH nos dan la proporcion $$AM:BH::AD:DH,$$
ó $$b:a::AD:d-AD,$$
ó $$a+b:b::d:AD,$$
de donde $$AD=\frac{bd}{a+b},$$
que es el valor de y.

Levantando pues en el punto D la perpendicular DE, tirando la EF paralela á la AC, y bajando la perpendicular FG, tendré el cuadrado $EFGD$ inscripto en el triángulo.

NOTA 1.ª Hemos resuelto este problema con dos objetos: 1.° con el de presentar una construccion elegante, 2.° con el de hacer ver que una nueva incógnita principal puede dar una solucion mas sencilla que la primera.

NOTA 2.ª De la fórmula $x=\frac{\alpha b}{\alpha+b}$ se deduce el siguiente teorema:

Inscribiendo en un triángulo dos cuadrados, el mayor es el que insiste sobre el menor de los dos lados.

Fig. 7. En efecto, la fórmula $x=\frac{\alpha b}{\alpha+b}$ nos dice que *el lado del cuadrado inscripto en un triángulo es igual al lado sobre que insiste multiplicado por la altura correspondiente, dividido el producto por la suma de estas dos rectas.* Segun este teorema, el lado del cuadrado inscripto en el triángulo, é insistiendo sobre el lado $BC=a$, será, llamando β á la altura AE correspondiente del triángulo, $\frac{\beta a}{\beta+a}$. Supongamos que el lado b sea menor que el lado a: los dos numeradores αb y βa son iguales, porque cada uno es el duplo del área del triángulo. No sabemos todavía cuál de los denominadores $\alpha+b$ ó $\beta+a$ es el mayor, porque, como por su posicion es $b<a$, y por consiguiente de $\alpha b=\beta a$ resulta $\alpha>\beta$, en los dos denominadores $\alpha+b$ y $\beta+a$ hay una especie de compensacion: sin embargo, fácil es demostrar que $\alpha+b<\beta+a$. En efecto, los dos triángulos rectángulos BDC y AEC nos dan

$$\alpha=a \cos DBC,\ \beta=b \cos EAC=b \cos DBC,$$

por ser iguales los dos ángulos EAC y CBD; restando, será $\alpha-\beta=(a-b)\cos DBC$; luego $\alpha-\beta<a-b$, y por consiguiente $\alpha+b<\beta+a$. Habiendo demostrado que el denominador del quebrado $\frac{\alpha b}{\alpha+b}$ es menor que el del quebrado $\frac{\beta a}{\beta+a}$ se infiere que el primer quebrado es mayor que el segundo. Luego el cuadrado que insiste sobre el lado menor b es mayor que el cuadrado que insiste sobre el lado mayor a

Problema 2.° *Inscribir en un triángulo un rectángulo que tenga una área dada.*

***Fig.* 8.** Sea el triángulo ABC, siendo el lado AC, prolongado si uno de los ángulos A ó C es obtuso, aquel sobre el cual ha de insistir el rectángulo. Supongamos el problema resuelto, y sea $DEFG$ el rectángulo que se pide inscribir. Llamemos m^2 al área que ha de tener el rectángulo. Tomemos por incógnita principal la altura IH del rectángulo, á la cual llamaremos x.

Tenemos en primer lugar la ecuacion

$$IH\times DE=m^2,\ \text{ó}\ x\times DE=m^2 \ldots\ldots [1]:$$

como la recta DE es incógnita, tenemos ahora que hallar otra ecuacion distinta de la hallada entre las dos incógnitas x y DE.

Para esto, los triángulos semejantes ABC y DBE nos dan la proporcion

$$\frac{AC}{DE}=\frac{BH}{BI},$$

ó, llamando α á la altura BH y b al lado AC,

$$\frac{b}{DE}=\frac{\alpha}{\alpha-x}.$$

Eliminando ahora la incógnita auxiliar DE entre esta ecuacion y la [1], tendremos la ecuacion

$$\frac{bx\ (\alpha-x)}{\alpha}=m^2,$$

ó $$bx-\frac{bx^2}{\alpha}=m^2,\ \text{ó}\ x^2-\alpha x+\frac{\alpha m^2}{b}=0;$$

de donde resulta $$x=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha m^2}{b}}.$$

Vemos que x tiene dos valores, ambos positivos, y fáciles de construir; y que por tanto el problema tiene dos soluciones. Pueden, pues, inscribirse en un triángulo, é insistiendo sobre un mismo lado, dos rectángulos que tengan una misma área.

Discusion de los valores de x.

Los valores de x serán imaginarios, siempre que $\frac{\alpha m^2}{b}>\frac{\alpha^2}{4}$, ó $m^2>\frac{\alpha b}{4}$; y entonces el problema es imposible

Los dos valores de x serán reales, si $\frac{\alpha m^2}{b} \leqq \frac{\alpha^2}{4}$, ó $m^2 \leqq \frac{\alpha b}{4}$; luego *el mayor rectángulo inscriptible en un triángulo es aquel, cuya área es mitad de la del triángulo*.

Las dimensiones de este rectángulo máximo son

$$x = IH = \frac{\alpha}{2},\ DE = \frac{b}{2}.$$

Pasemos á la construccion geométrica de los valores de x; y construyámoslos sin resolver la ecuacion [10].

La ecuacion $$x^2 - \alpha x + \frac{\alpha m^2}{b} = 0$$

nos da $$\frac{\alpha m^2}{b} = x(\alpha - x) \ldots\ldots [2].$$

Fig. 9 Construyamos el rectángulo *ACPL* cuya área sea m^2, y tendremos

$$b \times HK = m^2,$$

y por consiguiente

$$\frac{m^2}{b} = HK$$

Luego la ecuacion [2] será

$$\alpha \times HK = x(\alpha - x) \ldots\ldots [3].$$

Hallemos ahora una media proporcional entre las rectas α y HK; para lo cual, considerando á BK como un diámetro, describo media circunferencia; y por consiguiente HM será la media proporcional: de suerte que la ecuacion [3] se transformará en

$$HM^2 = x(\alpha - x).$$

Teniendo la ecuacion esta forma, sabemos [10] que los dos valores de x se construirán describiendo un semicírculo sobre el diámetro BH y tirando la MN paralela al diámetro; y entonces los dos valores de x serán MN y MN'. Bajando, pues, desde los puntos N y N' dos perpendiculares al diámetro, y construyendo los rectángulos correspondientes, quedará el problema resuelto.

Nota. En este problema hemos tenido por objeto presentar una construccion elegante, adquiriendo de paso el conocimiento del máximo rectángulo inscriptible en un triángulo.

Problema 3.° *Dividir una recta en media y estrema razon.*

Fig. 10. Sea $AB=a$ la recta dada, y C el punto pedido; llamemos x á la parte mayor AC de la recta; por consiguiente la parte menor $BC=a-x$. Segun el enunciado del problema, tendremos la proporcion

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}\ldots\ldots [1],$$

de la cual resulta

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

Para construir estos dos valores de x, observaremos que el radical representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\frac{a}{2}$ y a.

Sea, pues, $AB=a$ la recta dada; levanto en B una perpendicular $OB=\frac{a}{2}$, y tirando la AO, se tendrá $AO=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$. Hago ahora centro en O, y describo con el radio OB un círculo; el valor positivo de x será AD, y el negativo $-AD'$: el primero corresponde al problema. Llevando, pues, la recta AD sobre la AB, quedará esta recta dividida en el punto C en media y estrema razon.

El valor negativo no corresponde á ningun problema; pero mudado de signo corresponderá á un nuevo problema análogo al actual. En efecto, mudando el signo de x en la ecuacion [1], la nueva ecuacion será

$$\frac{a}{-x}=\frac{-x}{a+x},$$

ó

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a+x},$$

ecuacion que corresponde á este problema:

Dados dos puntos A y B *sobre una recta indefinida* AB, *ha-*

llar un tercer punto sobre la misma, y fuera de los dos puntos dados, tal que su distancia al punto mas próximo sea media proporcional entre su distancia al mas lejano y la de los dos puntos dados.

En efecto, si suponemos que sea C' el punto pedido, y llamamos x á la distancia $C'A$, y por consiguiente $a+x$ á la distancia $C'B$, tendremos la proporcion

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a+x}.$$

Resolviendo esta ecuacion, los valores x serán los mismos hallados ya en la primera ecuacion, mudados los signos, pues la nueva ecuacion es la transformada en $-x$ de la primera. Construidos estos valores, el positivo será AD y el negativo $-AD$: luego haciendo centro en A y describiendo hácia la izquierda el arco $D'C'$, se tendrá el punto pedido C' (1).

Los dos problemas que acabamos de resolver estan comprendidos en este otro general.

Dados dos puntos sobre una recta indefinida, hallar sobre la misma recta un tercer punto, cuya distancia á uno de los dos puntos dados sea media proporcional entre su distancia al otro punto y la de los dos puntos dados.

Si quisiéramos resolver este problema general, podríamos suponer que el punto pedido era C, haríamos $AC=x$, y obtendríamos la misma ecuacion, y por consiguiente los mismos valores de x que hemos hallado en el primero de los dos problemas anteriores: el valor positivo AD llevado sobre la recta AB nos daria el punto C, y el valor AD' del negativo mudado el signo y llevado hácia la izquierda, nos daria otro punto C', que tambien satisface al nuevo problema.

Si al resolver el problema general, suponemos que el punto pedido sea C'; llamando x á la distancia $C'A$, hallaremos la misma ecuacion, y por consiguiente los mismos valo-

---

(1) Es fácil demostrar geométricamente que la recta $C'A$ es media proporcional entre las rectas AB y $C'B$.

En efecto, siendo

$$AD' : AB : : AB : AD,$$

será

$$AB+AD' : AD' : : AB+AD : AB,$$

ó

$$C'B : C'A : : C'A : AB.$$

res para x que al resolver el segundo problema particular: el valor positivo AD' nos daria el punto C', y el negativo $-AD$, mudado el signo y llevado hácia la derecha, nos daria el otro punto C.

Nota 1.ª Ya se conocerá que, al proponer el problema 3.°, no teníamos por objeto su resolucion material, que la conocíamos desde la geometría elemental, sino que nos proponíamos presentar un ejemplo, en el cual se verificase que el valor negativo de la incógnita de un problema particular ó de condiciones restrictivas, tomado positivamente, corresponde á otro problema análogo al propuesto, y tambien de condiciones restrictivas; 2.° que quitadas dichas condiciones restrictivas, resulta otro problema general, al cual corresponden los dos valores que tiene la incógnita en cualquiera de dichos problemas particulares, tomando el valor negativo, mudado el signo, en sentido contrario del positivo.

Podemos pues sentar este principio: *Si un problema es susceptible de soluciones de sentido contrario, los valores negativos de las incógnitas, mudados los signos y tomados en sentido contrario de los positivos, resolverán el problema.*

Nota 2.ª Este problema general es á propósito para manifestar que, si el valor de la incógnita es imaginario, no se puede asegurar, por solo él, que el problema sea imposible.

En efecto, supongamos que al resolver dicho problema general se tome el punto C'' por el punto pedido, debiendo ser $C''A$ media proporcional entre $C''B$ y AB. Bien se conoce que tal suposicion es inadmisible, puesto que, siendo $C''A$ mayor que $C''B$ y AB, no puede ser $C''A^2 = C''B \times AB$. Pero admitiremos que, pasando por alto esta observacion, se haya supuesto que C'' es el punto pedido: tendremos $C''A = x$, $C''B = x - a$, y por consiguiente

$$x^2 = (x - a)a,$$

ó

$$x^2 = ax - a^2,$$

ó

$$x^2 - ax = -a^2,$$

y por consiguiente $$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2},$$

ó

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3a^2}{4}},$$

valores imaginarios.

Vemos, pues, que siendo un problema posible, puede suceder que el valor de la incógnita sea imaginario; y esto, á causa de una mala suposicion hecha al poner el problema en ecuacion.

Problema 4.° *Dadas dos rectas indefinidas* XX′, YY′ *perpendiculares entre sí, y un punto* O *equidistante de las dos, tirar por este punto una recta tal, que su parte comprendida entre las dos rectas indefinidas tenga una magnitud determinada.*

Figura 11. Supongamos que la recta indefinida OA se mueva de izquierda á derecha: su parte comprendida entre las dos rectas AX y AY' crecerá desde 0, y pasará por todos los estados de magnitud, antes de que dicha recta OA llegue á ser paralela á la YY'. Si la recta indefinida OA se mueve de derecha á izquierda, su parte comprendida entre las dos rectas AY y AX' pasará por todos los estados de magnitud, antes de que dicha recta OA llegue á ser paralela á la XX'. Por consiguiente, cualquiera que haya de ser la magnitud de la parte de la recta que se pide tirar, comprendida entre las dos rectas indefinidas XX' é YY', estamos seguros de que existirán dos rectas, tales como OB''' y OC'' que satisfarán á la cuestion. Sabemos ahora que la menor recta que pasa por el punto O de la bisectriz de un ángulo YAX y está comprendida entre los dos lados AY y AX de dicho ángulo, es la perpendicular PQ á la bisectriz OA (1), la cual perpendicular PQ, vale evidentemente $2OA$; luego, si la perpendicular PQ, prolongada indefinidamente, se mueve al rededor del punto O, la parte de dicha recta comprendida entre los lados AY y AX, irá creciendo y pasará por todos los estados de magnitud, desde el valor mínimo $2OA$ hasta el ∞: si pues

---

(1) *Figura* 12. En efecto, siendo OA la bisectriz del ángulo A y BC la perpendicular á ella, será [*Geom.*, *teor.* 57]

$$AE : AD :: EO : OD;$$

y como $AE > AD$, será $EO > OD$. Las áreas de los dos triángulos BOE y DOC, que tienen igual un ángulo O, son entre sí como $OE \times OB$: $OD \times OC$, ó como $OE : OD$, y pues $OE > OD$, será la área del triángulo OEB mayor que la del triángulo DOC; y por consiguiente la área del triángulo AED es mayor que la del triángulo ABC; esto es, $\frac{1}{2} FA \times ED > \frac{1}{2} AO \times BC$; pero como $AF < AO$, por ser AO oblicua á la ED, será $ED > BC$.

se pide tirar por el punto O una recta tal, que su parte comprendida entre las rectas YY' y XX' sea mayor que $2OA$, existirá en el ángulo YAX una solucion tal como BC: pero si BC satisface á la cuestion, tambien, tomando $AB'=AC$, y tirando $B'OC'$, esta recta será igual á la BC, por la igualdad de los triángulos ABC y $AB'C'$, y por tanto tendremos dos soluciones de la cuestion en el ángulo en que se halla el punto dado. Si la parte de la recta que se pide tirar, comprendida entre los lados YY', XX', ha de ser igual á $2OA$, no habrá mas que una solucion PQ en el ángulo YAX. Si dicha parte comprendida ha de ser menor que $2OA$, no habrá ninguna solucion en el ángulo YAX.

Todo esto lo vamos á ver confirmado en la resolucion del problema.

Sea BC la recta que se pide tirar: tomemos por incógnita principal la distancia $RC=x$, y llamemos y á la incógnita SB, a al lado del cuadrado $AROS$, m á la magnitud que ha de tener la parte BC comprendida entre las dos rectas dadas: tendremos

$$RC : SO :: RO : SB,$$

ó
$$x : a :: a : y,$$

de donde
$$xy=a^2 \ldots\ldots [1]$$

Ahora en el triángulo rectángulo ABC es

$$(a+x)^2+(a+y)^2=m^2,$$

ó
$$x^2+y^2+2a(x+y)=m^2-2a^2 \ldots\ldots [2]$$

Esta ecuacion y la [1] nos darán los valores de las dos incógnitas (sin efectuar la eliminacion, que nos conduciria á una ecuacion de 4.° grado), como lo vamos á ver

Sumo la ecuacion [2] con el duplo de la ecuacion [1], y

tendré
$$(x+y)^2+2a(x+y)=m^2,$$

de donde
$$x+y=-a+\sqrt{a^2+m^2},$$
$$x+y=-a-\sqrt{a^2+m^2}$$

Conocemos ya la suma de las dos incógnitas x é y, y como tambien conocemos su producto por la ecuacion [1], x é y serán las raices de una ecuacion de 2.° grado de la forma $x^2+\alpha x+\beta=0$, en la que $-\alpha$ será la suma de las raices, y β será su producto; luego, como actualmente la suma de las raices es $-a+\sqrt{a^2+m^2}$, ó $-a-\sqrt{a^2-m^2}$, y su producto es a^2, las ecuaciones, que nos darán los valores de x é y, serán

$$u^2-(\sqrt{a^2+m^2}-a)\,u+a^2=0 \ldots\ldots [3],$$

$$u^2+(\sqrt{a^2+m^2}+a)\,u+a^2=0 \ldots\ldots [4].$$

Observemos ahora que las dos incógnitas x é y entran simétricamente en las dos ecuaciones [1] y [2], es decir, que estas ecuaciones no varían permutando x é y; luego los valores de x deben ser los mismos que los de y: luego los dos valores que tiene u en la ecuacion [3], que sabemos son uno de x, y otro de y, serán dos valores de la incógnita principal x, los cuales, si son reales, serán positivos, puesto que su suma $\sqrt{a^2+m^2}-a$ es positiva, y su producto a^2 es tambien positivo; y los dos valores de u de la ecuacion [4] serán otros dos valores de x, siempre reales y negativos, porque el tercer término a^2 es menor que el cuadrado de la mitad de $\sqrt{a^2+m^2}+a$, coeficiente de u.

Estos dos valores negativos tomados positivamente y en sentido contrario del que se ha supuesto para los valores positivos, corresponden á las dos soluciones que tiene el problema en los ángulos XAY', YAX', puesto que este problema se ha enunciado sin restriccion ninguna en las soluciones, ó del modo mas general posible.

Esto supuesto, vamos á construir las raices de las ecuaciones [3] y [4].

Ante todas cosas, construyamos las cantidades $\sqrt{a^2+m^2}-a$, y $\sqrt{a^2+m^2}+a$.

Fig. 13. Ya sabemos que $\sqrt{a^2+m^2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y m. Sea pues O el punto dado, tiro la perpendicular SO á la AY, y la prolongo indefinidamente en sus dos sentidos, levanto la perpendicular $OT=m$ á la SE, y tiro la ST que será $\sqrt{a^2+m^2}$: haciendo ahora centro en S, y describiendo con el radio ST el semicírculo ETE', tendremos evidentemente

$$OE=-a+\sqrt{a^2+m^2},\quad OE'=a+\sqrt{a^2+m^2}.$$

Luego las dos ecuaciones [3] y [4] serán

$$u^2-OE\times u+a^2=0,$$

$$u^2+OE'\times u+a^2=0.$$

Construyamos en primer lugar las raices de la primera. Para esto, escribiremos esta ecuacion asi:

$$a^2 = u\,(OE-u),$$

es decir, que a es media proporcional entre u y $OE-u$. Describo, pues, sobre el diámetro OE un semicírculo $OCC'E$, y los dos valores de x serán RC y RC' [10]; luego tirando las dos rectas COB y $C'OB'$, tendremos las soluciones que puede admitir el problema en el ángulo en que se halla el punto dado O.

Para construir las raices de la segunda ecuacion, que son siempre reales y negativas, ya hemos visto que debemos mudarlas el signo, y tomarlas en sentido contrario de las positivas. Para mudarlas el signo, no hay mas que mudar el signo de u en la ecuacion, y asi tendremos

$$u^2-(\sqrt{a^2+m^2}+a)u+a^2=0,$$

ecuacion cuyas dos raices serán positivas, pero iguales en valor absoluto á las de la ecuacion [4]: como ya hemos visto que $\sqrt{a^2+m^2}+a$ es OE', dicha ecuacion será

$$u^2-OE'\times u+a^2=0,$$

la que, para construir sus raices, escribiremos asi:

$$a^2=u\,(OE'-u),$$

y esto nos dice que sobre el diámetro OE' debemos describir el semicírculo $OC'''C''E'$, y que por tanto los dos valores de u serán RC''' y RC'', los cuales ocupan en la figura la posicion conveniente: tirando pues las dos rectas $OC'''B'''$ y $OB''C''$, se tendrán las dos soluciones del problema, siempre posibles; puesto que el rádio del semicírculo $OC'''C''E'$ es $\dfrac{a+\sqrt{a^2+m^2}}{2}$, cantidad mayor que a, y por consiguiente este semicírculo siempre cortará en dos puntos C''' y C'' á la recta XX'.

Nota. Las raices de la ecuacion [3] serán reales, si

$$4a^2<\left(\sqrt{a^2+m^2}-a\right)^2,\ \text{ó}\ \ 2a<\sqrt{a^2+m^2}-a,$$

de donde resulta $m>2a\sqrt{2}$, es decir, $m>2AO$: como en este caso el semicírculo $OCC'E$ tiene por radio $\frac{1}{2}\,OE=\frac{1}{2}$ $(\sqrt{a^2+m^2}-a)$, cantidad que es mayor que a, se infiere que dicho semicírculo corta á la recta AX en dos puntos; y por tanto el problema tiene en este caso cuatro soluciones.

Si las raices de la ecuacion [3] son reales é iguales, lo que sucederá cuando $4a^2=\left(\sqrt{a^2+m^2}-a\right)^2$, ó $m=2a\sqrt{2}$, el semicírculo tiene un radio igual á a, y por lo mismo dicho semicírculo tocará á la recta XX', y el problema no tendrá mas que tres soluciones.

Finalmente, si las raices de la ecuacion [3] son imaginarias, lo que sucederá cuando $4a^2>\left(\sqrt{a^2+m^2}-a\right)^2$, ó $m<2a\sqrt{2}$, el radio del semicírculo es menor que a, y por tanto el problema no tendrá mas que dos soluciones.

Todo lo que acabamos de hallar, al discutir las raices de la ecuacion [3], está acorde con lo que habíamos hallado por la inspeccion de la misma figura del problema.

Este problema puede resolverse de muchos modos; pero ninguno da una construccion mas elegante que el que acabamos de seguir. A esta construccion elegante puede llegarse por medio de un cálculo mas sencillo, tomando por incógnita del problema la distancia SE que hay entre el punto S y el estremo E del diámetro del círculo que pasa por los puntos O y C y tiene su centro sobre la recta SE: es claro que, cuando se llegue á conocer la SE, se conocerá la OE, diámetro del semicírculo $OCC'E$, cuyas intersecciones con la recta AX serán los puntos C y C'.

Llamando x á la distancia SE, y á la parte OC de la recta que se pide tirar, y por consiguiente $m-y$ á la otra parte OB; bajando la perpendicular CF y tirando la recta CE, tendremos, en primer lugar, que serán iguales los dos triángulos CFE y OSB; luego $CE=OB=m-y$.

Ahora, $$CF\times OE=OC\times CE,$$

puesto que cada uno de ambos productos es el doble del área del triángulo COE: sustituyendo, pues, en lugar de estas rectas sus valores, será

$$a(x-a)=y(m-y),$$

ó $$a(x-a)=my-y^2\ldots\ldots [5].$$

Necesitamos ahora hallar otra ecuacion entre x é y distinta de la última.

Tenemos evidentemente

$$(x-a)^2=y^2+(m-y)^2,$$

ó

$$(x-a)^2=2y^2-2my+m^2.$$

Para eliminar la y entre esta ecuacion y la [5] de un modo fácil, elimino primeramente entre ellas el cuadrado y^2 [*Alg.* 184, 2.° *caso*]; sucede aquí que al mismo tiempo se elimina la primera potencia de la y, y resulta

$$(x-a)^2+2a(x-a)=m^2.$$

Resolviendo esta ecuacion con respecto á $x-a$, se tendrá

$$x-a=-a\pm\sqrt{a^2+m^2},$$

ó

$$x=\pm\sqrt{a^2+m^2}.$$

Para construir estos dos valores de x, levanto en O la perpendicular $OT=m$ á la SE, y tiro la ST que será el valor del radical. Haciendo pues centro en S, y observando que, por estar el problema propuesto sin restriccion de ninguna especie, el valor negativo tomado en sentido contrario del positivo satisface al problema, describiremos con el radio ST media circunferencia, que cortará á la SO, prolongada indefinidamente, en los puntos E y E': describiendo ahora sobre OE y OE' dos semicircunferencias, los puntos de interseccion C, C', C'', C''' con la recta XX' serán los puntos por los cuales, y por el punto O, deben tirarse las secantes que resuelven el problema.

Es fácil ver, que, siendo el radio del semicírculo $OCC'E$ $\frac{1}{2}OE=\frac{\sqrt{a^2+m^2}-a}{2}$, este radio será mayor que a, si $m>2a\sqrt{2}$; igual á a, si $m=2a\sqrt{2}$; y menor que a, si $m<2a\sqrt{2}$; ó lo que es igual, que si $m \gtreqless 2a\sqrt{2}$, el problema tendrá respectivamente $\left\{\begin{array}{l}\text{dos soluciones,}\\ \text{una solucion,}\\ \text{ninguna solucion,}\end{array}\right\}$ en el ángulo en que se halla el punto dado O.

Nota. En este problema se ha presentado primeramente una construccion elegante, á la cual se ha llegado en seguida por un cálculo mucho mas sencillo que el primero, tomando nueva incógnita principal; y se ha visto que, por admitir este problema valores de la incógnita de sentido enteramente opuesto, los valores negativos mudados los signos y tomados en sentido contrario de los positivos, dan soluciones de la cuestion.

Problema 5.° *Dado un ángulo* BAC *y un punto* P *dentro de él, tirar por este punto una recta que forme con los dos lados del ángulo un triángulo que tenga una área dada.*

Fig. 14. Supongamos que la recta EC sea la recta pedida: tomemos por incógnita principal la recta $AC=x$; tiremos la recta PQ paralela á la AB, y llamemos a á la parte AQ, α á la perpendicular PG á la AC, y m^2 al área que ha de tener el triángulo EAC.

Tenemos [*Trigon.* 110]

$$AE \times x \operatorname{sen} A = 2m^2 \ldots\ldots [1]:$$

como AE es tambien incógnita, hallaremos otra ecuacion entre las incógnitas x y AE. Los triángulos semejantes AEC y PQC nos dan la proporcion

$$AE : PQ :: AC : QC,$$

ó, puesto que en el triángulo rectángulo PGQ es

$$PG = PQ \operatorname{sen} PQG, \text{ ó } \alpha = PQ \operatorname{sen} A,$$

y por consiguiente $\quad PQ = \dfrac{\alpha}{\operatorname{sen} A},$

será $\quad AE : \dfrac{\alpha}{\operatorname{sen} A} :: x : x-a,$

de donde $\quad AE = \dfrac{\alpha x}{\operatorname{sen} A (x-a)}$. Sustituyendo este valor en la ecuacion [1], tendremos

$$\frac{\alpha x^2}{x-\alpha} = 2m^2,$$

de donde resulta $x = \dfrac{m^2}{\alpha} \pm \sqrt{\dfrac{m^4}{\alpha^2} - 2\dfrac{m^2}{\alpha} a}.$

Discusion. Si $\dfrac{2m^2a}{\alpha} < \dfrac{m^4}{\alpha^2}$, ó $2a\alpha < m^2$, tendrá x dos valores positivos, y por consiguiente el problema tendrá dos soluciones.

Si $\frac{2m^2a}{\alpha}=\frac{m^4}{\alpha^2}$, ó $2a\alpha=m^2$, el radical se desvanece, la incógnita x no tiene mas que un valor $\frac{m^2}{\alpha}$ ó $2a$, y el problema una solucion. Si $\frac{2m^2a}{\alpha}>\frac{m^4}{\alpha^2}$, ó $2a\alpha>m^2$, ó $m^2<2a\alpha$, el radical será imaginario, y por consiguiente el problema imposible; y pues m^2 es el área del triángulo AEC, y $2a\alpha$ es doble del área del paralelógramo $ADPQ$, se infiere que *el menor triángulo que se puede formar, tirando por un punto* P *dentro de un ángulo una recta, es el triángulo* AYK, *cuya área es* $2a\alpha$, esto es, *doble del paralelógramo* ADPQ.

La base AY de este triángulo mínimo es $\frac{m^2}{\alpha}=2a$ doble de la base AQ del paralelógramo $ADPQ$.

Pasemos á la construccion de los dos valores de x, suponiendo que el problema tenga dos soluciones.

Construyamos el paralelógramo $DRSA$, cuya área sea igual á m^2; será por consiguiente $DR=\frac{m^2}{\alpha}$. Observo ahora que la cantidad que está bajo del radical consta de los dos primeros términos del cuadrado del binomio $\frac{m^2}{\alpha}-a$; completando dicho cuadrado, podemos escribir la cantidad radical de este otro modo: $\sqrt{\left(\frac{m^2}{\alpha}-a\right)^2-a^2}$; luego la cantidad radical es un cateto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es $\frac{m^2}{\alpha}-a$, y el otro cateto es a. Es evidente que la recta $QS=\frac{m^2}{\alpha}-a$; luego, para construir el cateto representado por el radical, describiré sobre la QS un semicírculo, desde el punto Q llevaré la cuerda $QH=QA=a$, y tirando la otra cuerda HS, esta será el valor del radical. Ahora, haciendo centro en S, y describiendo con el radio SH media circunferencia, tendré los valores AC y AF de x, tirando las rectas CPE y FPB, quedará el problema resuelto

NOTA. Este problema presenta tambien una construccion elegante, y su resolucion numérica puede ser importante en topografía.

Problema 6.° *Dado un círculo* ADB [fig. 15] *y una tangente* EE', *tirar por el estremo* A *del diámetro* AB, *perpendicular á dicha tangente, una recta tal, que su parte* DE *comprendida entre la circunferencia y la tangente tenga una magnitud determinada* m.

Fig. 15. Supongamos resuelto el problema, y sea AE la recta que se pide tirar tal, que su parte $DE=m$: sea $AE=x$, y $AB=2r$.

Tiro la cuerda BD, la cual será perpendicular á la recta AE, y por tanto [*Geom. teor.* 68]

$$AB^2=AE\times AD,$$

ó

$$4r^2=x\ (x-m).$$

Construyamos los valores de x, sin resolver esta ecuacion. Siendo $2r$ media proporcional entre x y $x-m$, tomaremos $BC=\frac{m}{2}$, y haciendo centro en C, describiremos una circunferencia, y tirando la secante AC, será AF el valor positivo de x, y $-AG$ el negativo.

Haciendo, pues, centro en A, y describiendo con el radio AF una circunferencia, esta cortará á la tangente en los puntos E y E'; tirando en seguida las dos rectas AE y AE', tendremos las dos soluciones que puede tener el problema.

Aquí vemos que un solo valor de la incógnita puede dar mas que una solucion.

En cuanto al valor absoluto AG del valor negativo de x, vamos á ver que en este problema nos dará las mismas soluciones que el valor positivo AF.

En efecto, mudemos el signo de x en la ecuacion anterior, y tendremos la nueva ecuacion

$$4r^2=x\ (x+m),$$

ecuacion cuyas raices se diferenciarán de las raices de la ecuacion primitiva en el signo; y que se hubiera hallado directamente, si se hubiese tomado por incógnita del problema AD.

En efecto, si $AD=x$, tendremos

$$AB^2=AD\times AE,$$

ó

$$4r^2=x\,(x+m).$$

Por consiguiente, siendo AG el valor positivo de la incógnita de la nueva ecuacion, haremos centro en A, y describiendo un arco, este cortará á la circunferencia dada en los dos puntos D y D'; tirando las dos rectas ADE y CDE', se tendrán las dos soluciones del problema, las mismas que las halladas en el primer caso.

NOTA. Obsérvese que el valor negativo, mudado el signo, puede no corresponder á otro problema diferente del propuesto, por no poder admitir el problema soluciones de sentido contrario.

Problema 7.° Fig. 16. *Dividir un triángulo en dos partes, que esten en una razon dada, por medio de una paralela á uno de sus lados.*

Sea el triángulo ABC, y DE la recta divisoria paralela al lado AC: tomemos por incógnita principal la $BD=x$.

Por suposicion tenemos $\frac{BDE}{ADEC}=\frac{m}{n}$, y por consiguiente

$$\frac{BDE}{ABC}=\frac{m}{m+n}.$$

Siendo semejantes los triángulos BDE y BDC, es

$$\frac{BDE}{ABC}=\frac{BD^2}{AB^2}=\frac{x^2}{c^2};$$

luego
$$\frac{x^2}{c^2}=\frac{m}{m+n}.$$

En esta ecuacion x tiene dos valores iguales y de signo contrario: el negativo no corresponde al problema, y no nos detendremos en averiguar á qué problema corresponderia, mudado el signo; pues actualmente nuestro único objeto es resolver el problema propuesto.

Para construir el valor positivo de x, dividiremos la recta $BA=c$ en dos partes BG y GA que estén en la razon de m á n; considerando en seguida á BA como un diámetro, describiremos un círculo, levantaremos la perpendicular GF á la BA, y tiraremos la cuerda BF, que será el valor de x.

En efecto, tenemos

$$BF^2=BA\times BG;$$

luego, dividiendo ambos miembros por BA^2,

$$\frac{BF^2}{BA^2}=\frac{BG}{BA};$$

y como tenemos por construccion

$$\frac{BG}{GA}=\frac{m}{n},$$

y por consiguiente $$\frac{BG}{BA}=\frac{m}{m+n},$$

será $$\frac{BF^2}{c^2}=\frac{m}{m+n},$$

es decir, que BF es el valor de x.

Llevando, pues, la cuerda BF sobre el lado BA, y tirando la paralela DE al lado AC, quedará el problema resuelto.

Problema 8.º *Dividir un trapecio en dos partes que estén en la razon* m : n *por medio de una paralela á las bases.*

Fig 17. Sea el trapecio $ABCD$, a su altura, B y b sus dos bases mayor y menor; sea ML la recta divisoria que tomaremos por incógnita principal x. Tenemos

$$\frac{BMLC}{ABCD}=\frac{m}{m+n},$$

ó bien $$\frac{OML-OBC}{OAD-OBC}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{\frac{OML}{OBC}-1}{\frac{OAD}{OBC}-1}=\frac{m}{m+n}.$$

Ahora, por ser semejantes los triángulos ABC, OML y OAD, es $$\frac{OML}{OBC}=\frac{x^2}{b^2},\quad \frac{OAD}{OBC}=\frac{B^2}{b^2},$$

luego $$\frac{\frac{x^2}{b^2}-1}{\frac{B^2}{b^2}-1}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{x^2-b^2}{B^2-b^2}=\frac{m}{m+n},$$

de donde $$x^2=\frac{mB^2+nb^2}{m+n}$$

Para construir con elegancia el valor de x, conviene en primer lugar que restemos ambos miembros de B^2, y entonces hallaremos la proporcion

$$\frac{B^2-x^2}{B^2-b^2}=\frac{n}{m+n}$$

Hagamos, por un momento, $B^2-x^2=y^2$, $B^2-b^2=c^2$, y tendremos

$$\frac{y^2}{c^2}=\frac{n}{m+n}$$

Observemos que c es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es B y el otro cateto b; luego, si sobre $AD=B$, como diámetro, describimos un semicírculo, y tiramos por uno de sus estremos A la cuerda $AE=b$, la cuerda ED será el cateto c. Bajemos ahora la perpendicular EF, y dividamos la parte DF en el punto G, de modo que tengamos la proporcion

$$DG : GF :: n : m,$$

ó

$$DG : DF :: n : m+n;$$

levantemos la GH perpendicular al diámetro, y tiremos la cuerda DH: esta será el valor de y. En efecto, tenemos por un teorema muy conocido de geometría las igualdades

$$DH^2=DA\times DG,\ DE^2=DA\times DF;$$

luego

$$\frac{DH^2}{DE^2}=\frac{DG}{DF},$$

ó

$$\frac{DH^2}{c^2}=\frac{n}{m+n};$$

es decir, que

$$DH=y.$$

Conociendo y, como x es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es B y el otro cateto es y, será AH el valor de x. Llevando, pues, la AH sobre la AD, y tirando por el estremo K la KL paralela á la AB, y en seguida la LM paralela á la AD, quedará el problema resuelto.

NOTA. Por elegante que sea la construccion que acabamos de emplear, y las que hemos empleado en los problemas anteriores, no se las debe dar mucha importancia; pues, aun cuando el problema sea propuesto en el papel, casi siempre es mas exacto hallar la magnitud de la línea incógnita por medio de su valor numérico.

Problema 9.° *Dividir un cono* VAB *en dos partes, cuyas* *áreas laterales estén en la razon* m : n, *por medio de un plano paralelo á la base.*

Fig. 18. Sea $VD=x$, l el lado VA del cono: tendremos, llamando VDC y $ADCB$ á las áreas laterales del cono entero VDC y del troncado $ADCB$,

$$\frac{VDC}{ADCB}=\frac{m}{n},$$

y por consiguiente $$\frac{VDC}{VAB}=\frac{m}{m+n}.$$

Ahora, los conos VDC y VAB semejantes tienen sus áreas proporcionales á los cuadrados de sus lados [*Geom.*, *teor.* 205]; es decir, $$\frac{VDC}{VAB}=\frac{VD^2}{VA^2}=\frac{x^2}{l^2};$$

luego $$\frac{x^2}{l^2}=\frac{m}{m+n}.$$

Como esta ecuacion es idéntica á la hallada en el problema 7.°, el valor de x puede construirse del mismo modo.

Problema 10. *Dividir un cono troncado de bases paralelas en dos partes, cuyas áreas laterales estén en la razon* m : n, *por medio de un plano paralelo á las bases.*

Fig. 18. Sea el cono troncado $ADCB$, R y r los radios de sus bases, l el lado DA, y el radio EH de la seccion intermedia la incógnita principal x.

Tenemos $$\frac{DEFC}{ADCB}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{VEF-VDC}{VAB-VDC}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{\frac{VEF}{VDC}-1}{\frac{VAB}{VDC}-1}=\frac{m}{m+n}.$$

Ahora, siendo semejantes los conos VDC, VEF y VAB, sus áreas laterales son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, esto es,

$$\frac{VEF}{VDC}=\frac{x^2}{r^2},\quad \frac{VAB}{VDC}=\frac{R^2}{r^2};$$

luego $$\frac{\frac{x^2}{r^2}-1}{\frac{R^2}{r^2}-1}=\frac{m}{m+n}, \text{ ó } \frac{x^2-r^2}{R^2-r^2}=\frac{m}{m+n},$$

de donde $$x=\sqrt{\frac{mR^2+nr^2}{m+n}}.$$

Si se quiere obtener el valor de otra incógnita mas cómoda para hallar el punto *D*, por ejemplo, de la $DE=y$, tendremos, tirando la *DL* perpendicular al plano *AB*, la proproporcion

$$\frac{DE}{DA}=\frac{EK}{AL}, \text{ ó } \frac{y}{l}=\frac{x-r}{R-r},$$

de donde $$y=\frac{l(x-r)}{R-r}.$$

Sustituyendo en esta espresion el valor de x, será

$$y=\frac{l}{R-r}\left(-r+\sqrt{\frac{mr^2+nR^2}{m+n}}\right)$$

Problema 11. *Dividir un cono en dos partes, cuyos volúmenes esten en la razon* m : n, *por medio de un plano paralelo á la base.*

Fig 18. Sea *DC* el plano que se pide tirar, paralelo á la base, $UG=x$, 6 la altura *VI* del cono. Como los conos son semejantes, sus volúmenes serán proporcionales á los cubos de sus alturas [*Geom*, *teor*. 226], es decir que tendremos la proporcion

$$\frac{VDC}{VAB}=\frac{x^3}{\alpha^3};$$

mas por suposicion $$\frac{VDC}{VAB}=\frac{m}{m+n};$$

luego $$\frac{x^3}{\alpha^3}=\frac{m}{m+n},$$

de donde $$x=\alpha\sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

Problema 12. *Dividir un cono troncado de bases paralelas* *en dos partes, que esten en la razon* m : *n*, *por medio de un plano parelo á las bases.*

Fig. 18. Sea el cono troncado $ABCD$, R y r los radios de las bases, x el radio del círculo EF, que ha de dividir al cono en dos partes que sean entre sí como $m : n$.

Tenemos $$\frac{EDCF}{ADCB}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{VEF-VDC}{VAB-VDC}=\frac{m}{m+n},$$

ó $$\frac{\frac{VEF}{VDC}-1}{\frac{VAB}{VDC}-1}=\frac{m}{m+n}.$$

ó $$\frac{\frac{x^3}{r^3}-1}{\frac{R^3}{r^3}-1}=\frac{m}{m+n}.$$

ó $$\frac{x^3-r^3}{R^3-r^3}=\frac{m}{m+n},$$

de donde $$x=\sqrt[3]{\frac{mR^3+nr^3}{m+n}}.$$

Si se quiere hallar el valor de otra incógnita, como el de la $DE=y$, tendremos, llamando l al lado AD, y tirando la DL paralela al eje,

$$y : l :: x-r : R-r,$$

de donde $$y=\frac{l}{R-r}(x-r);$$

y, poniendo en lugar de x su valor,

$$y=\frac{l}{R-r}\left(-r+\sqrt[3]{\frac{mR^3+nr^3}{m+n}}\right)$$

Articulo 3°

Problemas generales numéricos

18. Problema 1.° *Hallar el área de un triángulo, dados sus tres lados.*

Sea S el área del triángulo: sabemos que

$$S=\frac{bc}{2}\operatorname{sen} A;$$

luego la cuestion está reducida á hallar sen A en funcion de los tres lados.

Tenemos $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

de donde $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 A=1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

Queda hallado sen A, pero su valor puede simplificarse. Para esto, tenemos

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)=$$
$$\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)$$
$$(a-b+c).$$

Si ahora llamamos $2p$ al perímetro del triángulo, será

$$\operatorname{sen}^2 A=\frac{2p.2(p-a).2(p-b).2(p-c)}{4b^2c^2}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2},$$

ó $$\operatorname{sen} A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Sustituyendo este valor de sen A en la espresion del área del triángulo, será

$$S=\frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ó $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Problema 2.° *Hallar el área de un trapecio, considerado como diferencia de dos triángulos, y siendo conocida la regla del área del triángulo.*

Fig. 19. Sea B y b las bases del trapecio; a su altura FG, y x la altura EF del trapecio deficiente, S el área del trapecio.

Tendremos

$$S=\frac{(a+x)B}{2}-\frac{bx}{2}=\frac{Ba}{2}+\frac{(B-b)x}{2}.$$

Tenemos ahora, por ser semejantes los triángulos AED y BEC, la proporcion

$$AD : BC :: EG : EF,$$

ó

$$B : b :: a+x : x,$$

de donde

$$x=\frac{ab}{B-b}.$$

Por consiguiente

$$S=\frac{aB}{2}+\frac{B-b}{2}\times\frac{ab}{B-b},$$

ó

$$S=\frac{a}{2}(B+b).$$

Traduciendo este resultado al lenguage vulgar, tendremos la regla conocida para hallar el área del trapecio.

Problema 3.° *Hallar el área lateral de un cono troncado de bases paralelas, siendo conocida la regla para hallar el área lateral del cono entero.*

Fig. 18. Sean R y r los radios de las dos bases del cono troncado, l su lado DA, x el lado VD del cono deficiente y S la área lateral del cono troncado.

Tendremos $S=\pi R(l+x)-\pi rx=\pi(R-r)x+\pi Rl.$

Ahora, los triángulos semejantes VAI, VDG nos dan la proporcion $\qquad R : r :: l+x : x,$

de donde

$$x=\frac{lr}{R-r}:$$

luego

$$S=\pi(R-r)\frac{lr}{R+r}+\pi Rl=\pi rl+\pi Rl,$$

ó en fin

$$S=\pi l(R+r);$$

fórmula hallada en [*Geom.*, *teor.* 196].

Problema 4.° *Hallar el volúmen de un cono troncado de bases paralelas, conociendo la regla para hallar el volúmen del cono entero.*

Sean R y r los radios de las dos bases del cono, a su altura, x la del cono deficiente; V el volúmen del cono troncado: tendremos

$$V=\frac{\pi R^2}{3}(a+x)-\frac{\pi r^2}{3}x=\frac{\pi}{3}(R^2-r^2)x+\frac{\pi R^2 a}{3}.$$

Ahora los triángulos semejantes VAI, VDG nos dan la proporcion $\qquad R:r::a+x:x,$

de donde
$$x=\frac{ar}{R-r}.$$

Luego
$$V=\frac{\pi}{3}(R^2-r^2)\frac{ar}{R-r}+\frac{\pi R^2 a}{3},$$

ó
$$V=\frac{\pi a}{3}\Big((R+r)r+R^2\Big),$$

ó en fin
$$V=\frac{\pi a}{3}(R^2+r^2+Rr),$$

fórmula hallada en [*Geom.*, *teor.* 219, *nota*].

Problema 5.° *Hallar el volúmen de una pirámide troncada de bases paralelas, siendo conocida la regla para hallar el volúmen de la pirámide entera.*

Sean B^2 y b^2 sus dos bases, a su altura, x la de la pirámide deficiente y V el volúmen de la pirámide troncada: tendremos
$$V=\frac{a+x}{3}B^2-\frac{x}{3}b^2,$$

ó
$$V=\frac{aB^2}{3}+\frac{x(B^2-b^2)}{3}.$$

Ahora, [*Geom.*, *teor.* 186]
$$B^2:b^2::(a+x)^2:x^2.$$

ó
$$B:b::a+x:x,$$

de donde
$$x=\frac{ab}{B-b}.$$

Luego $\qquad V=\frac{aB^2}{3}+\frac{ab}{3}(B+b)=\frac{a}{3}(B^2+b^2+Bb).$

Problema 6.° *Conociendo la área lateral* A *de un cono y el radio* r *de su base, hallar la altura* α *de dicho cono.*

Tenemos primeramente, siendo l el lado del cono,
$$A=\pi rl \quad [\textit{Geom.}, \textit{teor.}\ 195],$$

de donde $$l=\frac{A}{\pi r}.$$

Pero evidentemente $a^2=l^2-r^2=\frac{A^2}{\pi^2 r^2}-r^2$;

luego $$a=\sqrt{\frac{A}{\pi^2 r^2}-r^2}.$$

Problema 7.° *Hallar el volúmen* V *de un cono, conociendo su lado* l *y el radio* r *de su base.*

Tenemos, llamando a á la altura del cono,

$$V=\frac{a}{3}\cdot\pi r^2;$$

pero actualmente no conocemos a. Para hallar a, el triángulo rectángulo formado por el lado, altura y radio, nos da

$$a^2=l^2-r^2;$$

luego $$V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}.$$

Problema 8.° *Hallar el radio del círculo circunscripto á un triángulo cuyos tres lados son conocidos.*

Tenemos [*Trig.* 110, 1.°]

$$S=\frac{bc \operatorname{sen} A}{2};$$

pero [*Trig. pág* 145], $\operatorname{sen} A=\frac{a}{2r}$;

luego $$S=\frac{abc}{4r},$$

de donde $$r=\frac{abc}{4S},$$

ó $$r=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Problema 9.° *Hallar el radio del círculo inscripto en un triángulo, cuyos tres lados son conocidos.*

Fig. 20. Sea O el centro del círculo inscripto, y r su radio: tiremos las tres rectas AO, BO, y CO, y los radios OF, OE, OD á los puntos de contacto: quedará el triángulo dividido en los tres triángulos AOB, BOC, AOC, cuyas áreas res-

pectivas son $\frac{rc}{2}$, $\frac{ra}{2}$, $\frac{rb}{2}$; luego llamando S al área del triángulo será
$$S=\frac{ra+rb+rc}{2}=rp,$$
de donde
$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Problema 10. *Hallar el volúmen de un segmento esférico de una base, conociendo su altura y el radio de la esfera.*

Fig. 20.* Sea BAC el segmento cuya altura $BP=a$, r el radio dela esfera: el volúmen de dicho segmento será la diferencia de los volúmenes del sector esférico $OABC$ y cono correspondiente OAC. El volúmen del sector esférico es $\frac{1}{3}r\times z$, siendo z el área de la zona ABC; pero $z=a\times 2\pi r$; luego el volúmen del sector esférico es $\frac{2}{3}\pi r^2 a$. El volúmen del cono OAC

es
$$\frac{1}{3}PO\times\pi AP^2=\frac{1}{3}(r-a)\pi(r^2-OP^2)=$$
$$\frac{\pi}{3}(r-a)\left(r^2-(r-a)^2\right)=\frac{\pi}{3}(r-a)(2ra-a^2)=$$
$$\frac{\pi a}{3}(r-a)(2r-a)=\frac{\pi a}{3}(2r^2-3ra+a^2)=\frac{2}{3}\pi r^2 a-\pi r a^2+\frac{\pi a^3}{3}$$

Por consiguiente, si llamamos V al volúmen del segmento esférico, será
$$V=\frac{2}{3}\pi r^2 a-\left(\frac{2}{3}\pi r^2 a-\pi r a^2+\frac{\pi a^3}{3}\right),$$
ó
$$V=\pi r a^2-\frac{\pi a^3}{3}=\pi a^2\left(r-\frac{a}{3}\right)$$

Luego *el volúmen de un segmento esférico de una base es igual al área del círculo, cuyo radio es la altura del segmento, multiplicado por la diferencia que hay entre el radio y el tercio de dicha altura.*

Problema 11. *Dividir una esfera por medio de un plano en dos segmentos que esten en la razon de* m : n ; ó lo que es igual, *dado el radio de una esfera, hallar la altura del segmento de una base, cuyo volúmen esté con el de la esfera en la razon de* m : m+n.

Sea y la altura del segmento: el volúmen de este segmento es, segun acabamos de hallar en el problema anterior, $\pi y^2\left(r-\dfrac{y}{3}\right)$, y el volúmen de la esfera $\dfrac{4}{3}\pi r^3$; luego

$$\frac{\pi y^2\left(r-\dfrac{y}{3}\right)}{\dfrac{4}{3}\pi r^3}=\frac{m}{m+n},$$

ó
$$3ry^2-y^3=\frac{4m}{m+n}r^3,$$

ó
$$y^3-3ry^2+\frac{4m}{m+n}r^3=0\ldots\ldots[1],$$

ecuacion de tercer grado que tiene por lo menos una raiz real negativa [*Alg. super.* 308].

Para averiguar con certeza la naturaleza de las otras dos raices, y aun poder hallar los valores de las tres raices, pongamos la ecuacion [1] bajo la forma

$$x^3+3px+2q=0 \text{ [Alg. super. 363].}$$

Para esto, quitaremos el segundo término de la ecuacion [1], haciendo $y=r+x$: sustituyendo este valor, y efectuando todas las reducciones posibles, resulta la ecuacion

$$x^3-3r^2x+\frac{2(m-n)}{m+n}r^3=0\ldots[2]$$

Comparada la ecuacion [2] con la

$$x^3+3px+2q=0,$$

es $p=r^2, q=\dfrac{m-n}{m+n}r^3$, y por consiguiente [*Alg. super.* 364]

$$q^2+p^3=\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}r^6-r^6,$$

cantidad negativa; luego la ecuacion [2] se halla en el caso irreducible, es decir, que sus tres raices son reales. Se vió [*Alg. super.* 367] que la ecuacion de tercer grado en el caso irreducible tiene la forma

$$x^3-3px+2q=0,$$

y que siendo φ un ángulo determinado por la fórmula

$$\cos\varphi = \frac{-q}{\sqrt{p^3}},$$

los valores de x son:

$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\frac{2\pi+\varphi}{3},$$

$$x = 2\sqrt{p}\,\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}.$$

Actualmente, como $p = r^2$ y $q = \frac{m-n}{m+n} r^3$, será

$$\cos\varphi = -\frac{m-n}{m+n};$$

$$x = 2r\,\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x = 2r\,\cos\frac{2\pi+\varphi}{3},$$

$$x = 2r\,\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}:$$

y por consiguiente

$$y = r\left(1 + 2\cos\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y = r\left(1 + 2\cos\frac{2\pi+\varphi}{3}\right),$$

$$y = r\left(1 + 2\cos\frac{2\pi-\varphi}{3}\right).$$

Discutamos ahora estos valores de y.

Supongamos primeramente que la razon $m:n<1$, ó lo que es igual que $m<n$.

Siendo $m<n$, $\cos\varphi = -\frac{m-n}{m+n} = \frac{n-m}{m+n}$ es positivo, y por consiguiente el ángulo φ tendrá un valor positivo menor que 90°: $\frac{\varphi}{3}$ endrá un valor positivo y menor que 30°, luego $\cos\frac{\varphi}{3}$

será mayor que $\cos 30^0$, y con mayor razon que $\cos 60^0=\frac{1}{2}$;

luego $2\cos\frac{\varphi}{3}>1$, y el primer valor de y, mayor que $2r$; resultado que, aunque positivo, es inadmisible en el problema actual.

Para el segundo valor de y, tenemos $\frac{2\pi+\varphi}{3}=120^0+\frac{\varphi}{3}$,

y $\cos\left(120^0+\frac{\varphi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)$; luego

$$y=r\left(1-2\operatorname{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Como $\operatorname{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)>\frac{1}{2}$, y por tanto $2\operatorname{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)>1$, se infiere que el segundo valor de y es negativo, é inadmisible por lo mismo.

Para el tercer valor de y, tenemos $\frac{2\pi-\varphi}{3}=120^0-\frac{\varphi}{3}$;

luego $$\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right),$$

y por consiguiente

$$y=r\left(1-2\operatorname{sen}\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Siendo $\operatorname{sen}\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right)$ cantidad positiva, pero menor que $\frac{1}{2}$, se infiere que este valor de y es positivo y menor que r, y es por lo tanto el único valor de la incógnita que resuelve el problema.

Supongamos ahora que la razon $m:n>1$, ó bien que $m>n$; $\cos\varphi=-\frac{m-n}{m+n}$ es negativo, y por consiguiente el ángulo φ tendrá un valor mayor que 90^0 y menor que 180^0; $\frac{\varphi}{3}$ será mayor que 30^0 y menor que 60^0, y por tanto $\cos\frac{\varphi}{3}$ será mayor que $\cos 60^0$, es decir, mayor que $\frac{1}{2}$; luego el primer valor de y es mayor que $2r$, valor inadmisible.

Para el segundo valor de y tenemos $\frac{2\pi+\varphi}{3}=120^0+\frac{\varphi}{3}$;

luego
$$y=r\left(1+2\cos\left(120^0+\frac{\varphi}{3}\right)\right),$$
ó
$$y=r\left(1-2\,\mathrm{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)\right).$$

Como $\mathrm{sen}\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right)$ es mayor que $\frac{1}{2}$, se infiere que el segundo valor de y es negatívo.

Para el tercer valor de y tenemos $\frac{2\pi-\varphi}{3}=120^0-\frac{\varphi}{3}$;

luego
$$\cos\left(120^0-\frac{\varphi}{3}\right)=-\,\mathrm{sen}\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right),$$
y por consiguiente
$$y=r\left(1-2\,\mathrm{sen}\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right)\right),$$
ó
$$y=r\left(1+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{3}-30^0\right)\right).$$

Siendo $\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{3}-30^0\right)$ cantidad positiva y menor que $\frac{1}{2}$, se infiere que este valor de y es positivo y menor que $2r$, y es por lo mismo el único valor que satisface al problema.

Problema 12. *Dados los cuatro lados de un cuadrilátero inscripto en un círculo, hallar el área del cuadrilátero, y las diagonales del mismo.*

Fig. 21. Sea el cuadrilátero inscripto $ABCD$; hagamos $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DE=d$: llamemos S al área del cuadrilátero, x é y á las diagonales AC y BD. Nos proponemos hallar S, x é y en funcion de los cuatro lados a, b, c y d.

El área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,B$, y la del triángulo ABC $\frac{1}{2} cd \operatorname{sen} D = \frac{1}{2} cd \operatorname{sen} B$, puesto que los dos ángulos B y D son evidentemente suplementarios: luego

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} B + \frac{1}{2} cd \operatorname{sen} B,$$

ó

$$S = \frac{1}{2} (ab + cd) \operatorname{sen} B.$$

Nos falta, para que S quede conocida, hallar $\operatorname{sen} B$ en funcion de los lados del cuadrilátero.

Para esto, los dos triángulos ABC y ADC nos dan las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos B, \\ x^2 &= c^2 + d^2 + 2cd \cos B, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots [K]$$

que contienen á las dos incógnitas x y $\cos B$. Eliminando la x, y despejando $\cos B$, resulta

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)};$$

por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B = \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$\frac{(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$\frac{\left((a + b)^2 - (c - d)^2\right)\left((c + d)^2 - (a - b)^2\right)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$\frac{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b)}{4(ab + cd)^2};$$

y llamando $2p$ al perímetro $a + b + c + d$, será

$$\operatorname{sen}^2 B = \frac{2(p - d).2(p - c).2(p - b).2(p - a)}{4(ab + cd)^2} =$$

$$\frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2};$$

por consiguente

$$\operatorname{sen} B = \frac{2}{ab + cd} \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

:

Sustituyendo este valor en la espresion de S, será

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Hallemos ahora la diagonal x.

Sustituyendo el valor de $\cos B$ en cualquiera de las ecuaciones [K], en la primera por ejemplo, será

$$x^2=a^2+b^2-2ab\times\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab+2cd},$$

que se reduce á

$$x^2=\frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}=$$

$$\frac{ac(ad+bc)+bd(bc+ad)}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

Para hallar el valor del cuadrado y^2 de la otra diagonal BD, no hay mas que permutar convenientemente las letras, y tendremos

$$y^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Corolario. Multiplicando x^2 por y^2, tendremos

$$x^2y^2=(ac+bd)^2,\text{ ó } xy=ac+bd;$$

es decir que *en todo cuadrilátero inscripto en un círculo el producto de las diagonales es igual á la suma de productos de los lados opuestos.*

Dividiendo x^2 por y^2, tendremos

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2},$$

ó

$$\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd},$$

es decir que *en todo cuadrilátero inscripto en un círculo las diagonales son proporcionales á las sumas de los productos de los lados que terminan en sus estremos.*

Estos dos teoremas pueden demostrarse fácilmente por geometría: el primero, que es el mas interesante, es conocido con el nombre de *teorema de Tolomeo.*

GEOMETRIA ANALITICA PLANA.

LIBRO I.

Ecuaciones de las líneas.

CAPITULO I.

Determinacion de un punto de un plano.

19. *Determinar la posicion de un punto de un plano con respecto á dos rectas que se cortan y se hallan en dicho plano.*

Para la resolucion de este problema conviene anteponer las nociones preliminares siguientes:

Fig. 22. Sean Ox, Oy las dos rectas indefinidas con respecto á las cuales se quiere determinar un punto cualquiera del plano, que pasa por ellas: señalemos en cada uno de los cuatro ángulos, formado por estas dos rectas, un punto, tal como M, M', M'', M''', y tiremos por estos puntos las rectas MP, $M'P'$, $M''P''$, $M'''P'''$ paralelas á la recta Oy.

Se llaman *ejes de coordenadas* las dos rectas indefinidas Ox, Oy con respecto á las cuales se determina la posicion de los puntos; el eje Ox se llama *eje de abscisas*, y el eje Oy *eje de ordenadas*; el punto O se llama *orígen de las coordenadas*.

Se llama *ordenada* de un punto la paralela al eje de ordenadas, contada desde dicho punto hasta el eje de abscisas. *Abscisa* de un punto es la parte del eje de abscisas comprendida entre el orígen y el pié de la ordenada.

La abscisa y la ordenada de un punto se llaman las *coor-*

denadas de dicho punto. Las abscisas se suelen representar por la letra x, y las ordenadas por la letra y; y por lo mismo el eje de abscisas suele llamarse tambien eje de las x, y el eje de ordenadas, eje de las y.

Recordemos el teorema de Descartes que enunciamos en el núm. 108 del álgebra; y que puede enunciarse en los términos siguientes:

Las ecuaciones entre los valores de varias cantidades concretas se conservan las mismas, aun cuando algunas de dichas cantidades reciban sentidos enteramente opuestos á los que antes tenian, con tal que se consideren como negativos los valores de las cantidades que muden de sentido

Para poder aplicar este teorema, indispensable en la geometría analítica, supondremos que las abscisas y ordenadas de los puntos situados en el ángulo superior de la derecha de los ejes son positivas, ó lo que es igual, que las abscisas contadas á la derecha del orígen y las ordenadas situadas por arriba del eje Ox son positivas; y por consiguiente que deben ir precedidas del signo —, ó ser negativas, las abscisas contadas á la izquierda del orígen y las ordenadas situadas por la parte de abajo del eje Ox.

Segun esto, la abscisa y ordenada, ó sean las coordenadas del punto M, son OP y MP. La abscisa y ordenada del punto M' son $-OP'$ y $M'P'$. La abscisa y ordenada del punto M'' son $-OP''$ y $-M''P''$. Finalmente las coordenadas del punto M''' son OP''' y $-M'''P'''$ (1).

Esto supuesto, *la posicion de un punto de un plano quedará determinada, con respecto á dos ejes que se hallen en dicho plano, conociendo su abscisa y su ordenada.*

En efecto, la abscisa del punto indica la paralela al eje de ordenadas en que debe hallarse dicho punto, y la ordenada del punto señala cuál de los puntos de la paralela es el punto pedido; pues es evidente que en dicha paralela no pueden existir dos puntos que tengan la misma ordenada.

Ejemplos 1.° *Fijar la posicion de un punto cuya abscisa sea 2, y su ordenada 3.*

---

(1) Téngase mucho cuidado con los signos que deben preceder á las coordenadas; pues por no estar seguros de esto algunos autores son á veces muy confusos.

Tomaremos sobre el eje de las x la abscisa $OP=2$, y tirando por el punto P hácia arriba la $MP=3$ paralela al eje Oy, el estremo M de esta paralela será el punto pedido.

2.° *Determinar el punto cuyas coordenadas son* -2 *y* -3.

Tomaremos sobre el eje Ox desde el orígen hácia la izquierda, la parte $OP=2$ (no digo la abscisa, que no es OP'' ó 2, sino $-OP''$ ó -2), y por el punto P'' tiraremos la $P''M''=3$ paralela al eje Oy, y el estremo M'' será el punto pedido.

3.° *Determinar el punto cuyas coordenadas sean* 3 *y* -2.

Tomaremos sobre el eje Ox desde el orígen hácia la derecha una parte $OP'''=3$, y por el punto P tiraremos hácia abajo un paralela $P'''M'''$ al eje de ordenadas, é igual á 2, y en el estremo M''' estará el punto pedido.

4.° *Señalar la posicion de un punto cuya abscisa sea* -3 *y su ordenada sea* 2.

Tomaremos desde el orígen hácia la izquierda una parte $OP'=3$, y tiraremos por el punto P' hácia arriba la paralela al eje de ordenadas $P'M'=2$, y el estremo M' de esta paralela será el punto pedido.

20. Los ejes de coordenadas pueden, ó no, ser perpendiculares entre sí: en el primer caso se llaman ejes *rectángulares*, y en el segundo, ejes *oblicuángulos*. Cuando los ejes son rectangulares, que es lo que sucede ordinariamente, *la ordenada de un punto es la distancia de dicho punto al eje de abscisas*; y *la abscisa*, se puede tambien decir, que *es la distancia de dicho punto al eje de ordenadas*; anteponiendo á estas distancias los signos convenientes.

CAPITULO II.

Representacion geométrica de las ecuaciones, y algébrica de las líneas.

21. Dada una ecuacion con dos incógnitas ó variables x é y, para hallar sus diferentes soluciones, se despeja una de las incógnitas, y por ejemplo, se dan á la otra, x, valores arbitrarios, y se hallan los valores correspondientes de la y.

Supongamos ahora que se construyan los puntos, cuyas coordenadas sean las diferentes soluciones halladas: como estos puntos pueden construirse tan próximos entre sí como se quieran, formarán una línea. Luego á toda ecuacion con dos variables corresponde (prescindiendo de los casos de escepcion, que mas adelante examinaremos) una línea plana, que se llama el *lugar geométrico* de la ecuacion.

En general, para construir el lugar geométrico de una ecuacion, se despeja una de las variables (1), y por ejemplo, se dan á x valores arbitrarios, que vayan creciendo desde 0, se hallan los valores correspondientes de y, y se construyen los diferentes puntos cuyas coordenadas sean las soluciones halladas ya. Se dan en seguida á x valores que vayan creciendo negativamente desde 0, se hallan los valores correspondientes de y, y se construyen los puntos cuyas coordenadas sean estas últimas soluciones. Se juntan luego los puntos construidos por medio de una línea contínua, y se tendrá el lugar geométrico de la ecuacion, con tanta mas exactitud, cuanto los puntos construidos de la línea estén mas próximos entre sí.

Ejemplo. *Construir el lugar geométrico de la ecuacion* $y^2=2x$.

Despejando la y, tendremos $y=\pm\sqrt{2x}$.

Fig. 23. Haciendo $x=0$, resulta $y=0$, lo que nos dice que el punto cuyas coordenadas son 0 y 0, esto es el orígen, corresponde á la línea, ó que la línea pasa por el orígen.

Haciendo ahora

$$x= 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots\ldots$$

los valores correspondientes de y son

$$y=\pm\sqrt{2}, \pm 2, \pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{8}, \ldots\ldots$$

Demos ahora á x valores negativos: los valores correspondientes de y son imaginarios; lo que prueba que la línea no tiene punto alguno en la region de las abscisas negativas, ó lo que es igual, que la línea está enteramente comprendida en los ángulos superior é inferior de la derecha de los ejes.

Construyamos ahora los puntos M, M', M'', M'''....., N, N', N'', N'''....., cuyas coordenadas sean las diferentes solu-

(1) Esto es siempre posible en las ecuaciones de primero y segundo grado, de que nos vamos á ocupar principalmente en este tratado.

ciones halladas, y juntándolas por medio de una línea contínua, resultará la curva que indica la figura, y que será aproximadamente el lugar geométrico de la ecuacion propuesta.

22. Sucede comunmente que, cuando se tiene la ecuacion de una línea, no se necesita construirla en realidad, sino adquirir una idea aproximada de la forma de la línea; lo que se consigue observando los valores que van teniendo las ordenadas de la línea, ó lo que es igual, observando la posicion respectiva que tendrian los puntos, si se construyesen efectivamente. Mas adelante veremos varios ejemplos de esto.

23. Acabamos de ver cómo puede hallarse el lugar geométrico de una ecuacion. Al contrario, conociendo una definicion de una línea plana, ó alguna de sus propiedades características ó esclusivas, se puede hallar la ecuacion que indique la relacion que existe entre las coordenadas de un punto cualquiera de la línea: esta ecuacion se llama *la ecuacion de la línea*.

Diremos, pues, que *la ecuacion de una línea es la ecuacion que indica la relacion constante que hay entre las coordenadas de un punto cualquiera de dicha línea*.

Podemos ya definir la geometría analítica plana, diciendo *que es la ciencia que se ocupa del estudio de las líneas planas por métodos generales, representándolas antes por medio de ecuaciones*.

24. Segun la definicion de la ecuacion de una línea, si un punto cuyas coordenadas son x' é y' corresponde á una línea cuya ecuacion sea $f(x, y)=0$, tendremos $f(x', y')=0$; puesto que la ecuacion $f(x, y)=0$ es la relacion entre la abscisa y ordenada de un punto cualquiera de la línea. Por consiguiente, *siempre que un punto se halle en una línea*, cuya ecuacion se conozca, *las coordenadas particulares del punto sustituidas en la ecuacion en lugar de las generales, verifican esta ecuacion*.

25. Sean $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$ las ecuaciones de dos líneas, y supongamos que estas dos líneas se corten en uno ó varios puntos; y sean x' é y' las cordenadas de cualquiera de los puntos de interseccion: tendremos, en virtud del principio último, las dos ecuaciones $f(x', y')=0$, $\varphi(x', y')=0$.

Resolviendo estas dos ecuaciones, cada solucion nos dará las coordenadas de un punto de interseccion de las dos líneas.

Como las soluciones de las dos ecuaciones $f(x', y')=0$, $\varphi(x', y')=0$ son las mismas que las de las dos ecuaciones $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$, en las cuales las x tienen igual valor, como tambien las y, resulta que *para hallar los puntos de interseccion de dos líneas, dadas por sus ecuaciones, se igualarán las coordenadas*, ó lo que es igual, *se combinarán las dos ecuaciones*, es decir, *se considerarán* x *é* y *como dos incógnitas en ambas ecuaciones; y resolviendo dichas dos ecuaciones, sus diferentes soluciones serán las coordenadas de los diferentes puntos de interseccion de las dos líneas*

26. Para hallar las abscisas de los puntos, en que una línea corta al eje de abscisas, se hará $y=0$ en la ecuacion de la línea; y despejando la x, sus diferentes valores serán las abscisas de los puntos en que la línea corta al eje de abscisas.

En efecto, en dichos puntos de interseccion, y no en ningun otro punto de la línea, la ordenada es cero; y por consiguiente los valores de x correspondientes al valor 0 de y son las abscisas de los puntos de interseccion de la línea con el eje de abscisas.

27. Para hallar las ordenadas de los puntos en que una línea corta al eje de ordenadas, se hace $x=0$, y se despeja la y; y los diferentes valores de y serán las ordenadas de dichos puntos de interseccion.

En efecto, en los puntos en que la línea corta al eje de ordenadas es $x=0$, y no en ningun otro punto de la misma línea; luego los valores correspondientes de y al valor 0 de x son las ordenadas de los diferentes puntos de interseccion de la línea con el eje de ordenadas.

28. Presentemos algunos ejemplos, en que se trate de hallar la ecuacion de una línea.

ECUACION DE LA LINEA RECTA.

NOTA Para poder hallar la ecuacion de una línea, no solo se ha de conocer su definicion, ó alguna de sus propiedades características, sino la posicion de la línea, determinada por medio de datos suficientes

29. *Fig* 24. Consideremos, pues, á la recta AN en el caso mas general, que es aquel en que la recta no es paralela

á ninguno de los ejes, y tampoco pasa por el orígen; y supongamos que se conozcan la *ordenada en el orígen*, es decir, la ordenada del punto B, en que la recta corta al eje de ordenadas, y el ángulo NAX superior de la derecha que la recta forma con el eje Ox; datos que evidentemente determinan la posicion de la recta. Para hallar la ecuacion de la recta, señalemos las coordenadas $OP=x$, $MP=y$ de un punto M de la recta, punto cuyas coordenadas sean positivas: llamemos θ al ángulo YOX superior de la derecha que forman los ejes, α al ángulo NAx, y b á la ordenada del punto B, la cual podrá ser positiva ó negativa, segun la posicion de este punto. Tiremos ahora la recta BQ paralela al eje Ox, y tendremos en el triángulo MBQ la proporcion

$$\frac{MQ}{BQ}=\frac{\operatorname{sen} MBQ}{\operatorname{sen} BMQ},$$

ó, puesto que el ángulo $BMQ=MPx-MAx=\theta-\alpha$,

será $$\frac{y-b}{x}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)},$$

de donde $$y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x+b$$

Hemos hallado esta ecuacion en el supuesto de que x é y son las coordenadas de un punto de la recta tomado en el ángulo superior de la derecha, es decir, hemos hallado la ecuacion en el caso mas fácil: pues bien, en virtud del convenio sobre los signos que deben preceder á las coordenadas y á las líneas trigonométricas, el teorema de Descartes [19] nos dice que la ecuacion hallada es general.

Comprobémosla en un caso tomado á arbitrio.

Fig. 25. Sea M un punto cualquiera de la recta BAN, y sus coordenadas $-OP=x$, $-MP=y$, el ángulo $NAx=\alpha$, el ángulo $yOx=\theta$, y la ordenada en el orígen $-BO=b$. Haciendo la misma construccion que antes, es decir, tirando por el punto B la BQ paralela al eje Ox, tendremos en el triángulo BMQ la proporcion

$$\frac{MQ}{BQ}=\frac{\operatorname{sen} MBQ}{\operatorname{sen} BMQ};$$

como $MQ=BO-MP=-b+y$, $BQ=PO=-x$, $MBQ=BAO=180^\circ-\alpha$, $BMQ=MBO=NAX-AOB=\alpha-\theta$, será

$$\frac{y-b}{-x}=\frac{\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)};$$

y como $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)=-\operatorname{sen}(\theta-\alpha)$, será

$$\frac{y-b}{x}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)},$$

de donde $$y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x+b.$$

50. Habiendo hallado la ecuacion de la recta en el caso mas general, pasaremos á deducir de ella las ecuaciones correspondientes á los diferentes casos particulares que pueden ocurrir. Primeramente, si la recta pasa por el orígen, será $b=0$, y por consiguiente la ecuacion de la recta es en este caso

$$y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x,$$

que es fácil, y aun conviene, hallarla directamente.

Si la recta es paralela al eje de las x, será $\alpha=0$, y por consiguiente $\operatorname{sen}\alpha=0$; luego la ecuacion de la recta paralela al eje Ox es $y=b$; lo que por otra parte es evidente, pues en todos los puntos de dicha paralela la ordenada es constante.

Si la recta coincide con el eje de las x, se hallará su ecuacion por la general, haciendo en esta $\alpha=0$ y $b=0$, lo que da $y=0$; y tambien puede hallarse por la ecuacion $y=b$ de la paralela al eje de las x, suponiendo que b vaya disminuyendo hasta que se reduzca á cero, en cuyo caso coincide dicha paralela con el eje de las x: tenemos, pues, que la ecuacion del eje de abscisas es $y=0$; y esto es evidente, porque en todos sus puntos la ordenada es cero.

Fig. 24. Si la recta es paralela al eje de las y, tendremos $b=\infty$ y $\alpha=\theta$, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}=\infty$. Como en la ecuacion $y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x+b$ hay dos cantidades que se hacen infinitas en el caso actual, para hallar la ecuacion de la recta en términos finitos, reemplazaremos una de las dos cantidades $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$ y b en funcion de la otra: sea c la abscisa del punto A en que la recta corta al eje de las x, y consideremos á la recta AB en una de sus posiciones, antes de llegar á ser paralela al eje Oy: tenemos

$$\frac{AO}{OB}=\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ó
$$\frac{-c}{b}=\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha},$$

de donde
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}=-\frac{b}{c};$$

y por tanto la ecuacion de la recta puede escribirse así:

$$y=-\frac{b}{c}x+b,$$

ó, partiendo por b, $\quad \frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1.$

Supongamos ahora que la recta, moviéndose al rededor del punto A, llegue á ser paralela al eje Oy; entonces $b=\infty$, $\frac{y}{b}=0$, y por consiguiente la ecuacion de la recta paralela al eje Oy es $\frac{x}{c}=1$, ó $x=c$; como evidentemente debe ser, pues todos sus puntos tienen la misma abscisa c. Ahora, si esta recta se va aproximando al eje Oy, conservándose siempre paralela á este eje, y llega al fin á coincidir con él, tendremos que la ecuacion del eje de ordenadas será $x=0$; lo que tambien es evidente, pues todos los puntos del eje de ordenadas tienen por obscisa 0.

NOTA 1.ª Obsérvese que, cuando la recta no es paralela á ninguno de los ejes, su ecuacion contiene las dos variables x é y; y que, cuando es paralela á uno de los ejes, su ecuacion no contiene mas que una incógnita.

31. En todos los casos *la ecuacion de la linea recta es de primer grado con respecto á las variables.*

NOTA 2.ª El coeficiente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$ en la ecuacion

$$y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x+b$$

se llama el *coeficiente angular* de la recta (1).

Representemos, como se acostumbra, el coeficiente angular de la recta por a, y la ecuacion de la recta será entonces

$$y=ax+b$$

Si los ejes son rectangulares, es $\theta=90°$, y por consiguiente

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$$: luego, *cuando los ejes de coordenadas son rectangulares, el coeficiente angular de la recta es la tangente del ángulo superior de la derecha que la recta forma con el eje de abscisas.*

Acabamos de ver que la ecuacion de toda línea recta está comprendida en la ecuacion $y=ax+b$, es decir, que dicha ecuacion es de primer grado con respecto á las variables x é y.

Demostremos que, recíprocamente, *toda ecuacion de primer grado tiene por lugar geométrico una línea recta.*

Fig. 24. En efecto, la ecuacion general de primer grado con dos variables es

$$Ay+Bx+C=0,$$

de donde
$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A}.$$

Hallemos el punto A en que esta línea, cualquiera que ella sea, corta al eje de las x; para lo cual haremos $y=0$, y despejando x, resultará x ó $-AO=-\frac{C}{A}$. Tiremos ahora por

(1) Traduciendo al lenguaje vulgar esta espresion, se suele decir que *el coeficiente angular de una recta es la razon del seno del ángulo que la recta forma con el eje de abscisas al seno del ángulo que la recta forma con el eje de ordenadas:* pero esta traduccion no puede aplicarse al caso en que $\alpha>\theta$, es decir al caso en que la recta tiene partes comprendidas en los ángulos superior de la izquierda é inferior de la derecha; á no ser que se considere como negativo el ángulo que la recta forma con el eje de ordenadas.

este punto A y por el punto B, en que la línea corta al eje de ordenadadas (cuya ordenada $OB=-\frac{C}{A}$), una recta, y hallemos su ecuacion. El triángulo OAB nos da la proporcion

$$OB : OA :: \text{sen}\, BAO : \text{sen}\, ABO,$$

ó

$$-\frac{C}{A} : \frac{C}{B} :: \text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,(\theta-\alpha),$$

de donde $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\theta-\alpha)}=-\frac{B}{A}$. Conocemos, pues, el coeficiente angular de la recta AB y su ordenada en el orígen; luego su ecuacion será

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A},$$

ó

$$Ay+Bx+C=0;$$

es decir que esta ecuacion, que es la propuesta, tiene por lugar geométrico la recta AB, ó bien representa á la recta AB.

Fig. 26. Si la ecuacion fuese $Ay+Bx=0$, ó $y=-\frac{B}{A}x$, representaria una línea recta que pasa por el orígen, puesto que la ordenada en el orígen $-\frac{C}{A}$ de la recta representada es ahora 0; pero lo demostraremos directamente.

Para hallar un punto de la línea representada por esta ecuacion, demos á x el valor particular A, resulta $y=-B$. Esto supuesto, por el orígen y por el punto M cuyas coordenadas son A y $-B$ tiremos una recta, y hallemos su ecuacion: el triángulo OMP nos da la proporcion

$$\text{sen}\, MOP : \text{sen}\, OMP :: MP : OP,$$

ó

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\theta-\alpha)}=-\frac{B}{A}.$$

Por consiguiente la ecuacion de la recta OM es $y=-\frac{B}{A}x$, ó $Ay+Bx=0$, que es la ecuacion propuesta; luego esta ecuacion tiene por lugar geométrico una recta que pasa por el orígen.

ECUACION DEL CIRCULO.

33. Coloquemos, en primer lugar, el orígen en el centro y tomemos ejes rectangulares. Sea [*Fig.* 27] M un punto del círculo cuyas coordenadas son $OP=x$, $MP=y$: ti-

remos el radio OM. En el triángulo retangulo OMP es

$$OP^2+MP^2=OM^2,$$

ó

$$x^2+y^2=R^2.$$

Esta ecuacion, que indica la relacion constante entre las coordenadas de un punto cualquiera M de la circunferencia, es la ecuacion del círculo.

Fig. 28. Coloquemos ahora el orígen en un punto cualquiera diferente del centro, y supongamos que tambien los ejes sean rectángulares. La posicion y magnitud del círculo quedarán determinadas, conociendo las coordenadas $OA=a$, $CA=b$ del centro y el radio R. Sea M un punto cualquiera del círculo, y sus coordenadas $OP=x$, $MP=y$: tiremos el radio CM y la CQ paralela al eje Ox. El triángulo rectángulo CMQ nos da la ecuacion

$$CQ^2+MQ^2=CM^2,$$

ó

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$$

ecuacion del círculo en cualquiera de sus posiciones con respecto á los ejes Ox, Oy, y que por tanto se llama la *ecuacion general del círculo*, siendo los ejes rectangulares.

Aunque hemos hallado esta ecuacion suponiendo que las coordenadas del centro y las del punto M son positivas, dicha ecuacion se verifica siempre en virtud de los signos que preceden á las coordenadas. Comprobémosla en un caso cualquiera.

Tenemos [*Fig.* 29] $OA=a$, $-CA=b$, $OP=x$, $-MP=y$: haciendo la misma construccion anterior, tendremos

$$CQ^2+MQ^2=CM^2,$$

ó, puesto que $MQ=CA-MP=-b+y$, $CQ=OP-AO=x-a$, será

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

34. De la ecuacion general del círculo pueden deducirse las ecuaciones correspondientes á los diferentes casos particulares que pueden ocurrir.

1.° Si el orígen está en el centro, es $a=0$, $b=0$; y por consiguiente la ecuacion del círculo será entonces

$$x^2+y^2=R^2,$$

como la hemos hallado directamente

2.° Si el orígen está en el estremo O [*Fig.* 30] de un diámetro, eje de abscisas, será $a=R$, $b=0$, y la ecuacion del círculo será entonces

$$(x-R)^2+y^2=R^2;$$

que simplificada es $\quad y^2=2Rx-x^2,$

y es fácil hallarla directamente, en virtud de la propiedad del círculo de que la perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia al diámetro es media proporcional entre los segmentos del diámetro (1).

55. Acabamos de ver que la ecuacion general del círculo, siendo rectangulares los ejes de coordenadas, es

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

ó

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0,$$

Al contrario, *la ecuacion* $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ *referida á ejes rectangulares representa un círculo, un punto ó nada.*

En efecto, partiendo todos los términos de la ecuacion por A, será

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

Observemos ahora que $x^2+\frac{D}{A}x$ son los dos primeros términos del cuadrado del binomio $x+\frac{D}{2A}$, é igualmente $y^2+\frac{E}{A}y$ son los dos primeros términos del cuadrado del binomio $y+\frac{E}{2A}$: completando estos cuadrados, la ecuacion será

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{F}{A};$$

y ahora, si el segundo miembro es positivo, se ve que esta ecuacion es la de un círculo, cuyo centro tiene por coordenados $-\frac{D}{2A}$ y $-\frac{E}{2A}$, y cuyo radio es $\sqrt{\frac{D^2+E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}}$.

Si el segundo miembro es cero, la ecuacion será

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=0;$$

y como la suma de dos cantidades positivas variables no pue-

(1) Todo teorema particular puede demostrarse del mismo modo que el general en que está incluido; pero, á veces, los teoremas particulares pueden obtenerse por razonamientos tambien particulares, y no incluidos en el razonamiento general: esto sucede precisamente en el caso actual

de ser cero sino lo es cada una de dichas cantidades, será $y+\frac{D}{2A}=0$, $x+\frac{E}{2A}=0$, ó $x=-\frac{E}{2A}$, $y=-\frac{D}{2A}$; es decir que en este caso la ecuacion representa un punto cuyas coordenadas son $-\frac{D}{2A}$ y $-\frac{E}{2A}$.

Si el segundo miembro es negativo, la ecuacion es imposible, teniendo x é y valores reales (como es necesario para que x é y sean las coordenadas de uno ó varios puntos); pues la suma de dos cantidades positivas no puede ser igual á una negativa; luego en este caso la ecuacion no representa nada.

36. Hallemos ahora la ecuacion del círculo, siendo los ejes oblicuángulos.

Principiemos por el caso general.

Fig. 31. Llamando a y b á las coordenadas OA y CA del centro, R al radio y θ al ángulo de los ejes, señalando las coordenadas $OP=x$, $MP=y$ de un punto M de la curva, y tirando la CQ paralela al eje Ox, tendremos en virtud del teorema general de la trigonometría rectilínea

$$CQ^2+MQ^2-2CQ.MQ\cos CQM=CM^2,$$

ó $$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=R^2 \ldots\ldots [A].$$

Si el orígen estuviese en el centro, seria $a=0$, $b=0$, y por consiguiente la ecuacion seria

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=R^2,$$

la que es fácil hallar directamente.

(37. Nota. Desenvolviendo la ecuacion general [A], tendremos

$$\left.\begin{array}{l|l|l} x^2+2\cos\theta.xy+y^2-2a & x-2b & y+a^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad -2b\cos\theta & -2a\cos\theta & +b^2 \\ & & +2ab\cos\theta \\ & & -R^2 \end{array}\right\}=0.$$

(38. Recíprocamente *la ecuacion de segundo grado con dos indeterminadas* $x^2+2\cos\theta.xy+y^2+mx+ny+p=0$, *siendo* θ *el ángulo de los ejes, representa un círculo, un punto ó nada.*

Para demostrarlo, identifiquemos esta ecuacion con la general, para lo cual deberemos hacer

$$-2a-2b\cos\theta=m,$$
$$-2b-2a\cos\theta=n,$$
$$a^2+b^2+2ab\cos\theta-R^2=n;$$

y si de estas tres ecuaciones podemos deducir valores finitos y reales de a, b y R, la ecuacion representará un círculo, puesto que lo representa la ecuacion [A], á la cual es en tal caso idéntica la propuesta.

Las dos primeras ecuaciones dan para a y b los valores $a=\frac{n\cos\theta-m}{2\operatorname{sen}^2\theta}$, $b=\frac{m\cos\theta-n}{2\operatorname{sen}^2\theta}$. Sustituidos estos valores en la ecuacion tercera, y efectuando todas las reducciones, resulta

$$R=\sqrt{\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta}-p}.$$

Ahora bien, si el valor de R es real, como la ecuacion [A] representa un círculo, tambien la ecuacion propuesta idéntica á la [A] representará un círculo, cuyo centro tendrá por coordenadas $\frac{n\cos\theta-m}{2\operatorname{sen}^2\theta}$ y $\frac{m\cos\theta-n}{2\operatorname{sen}^2\theta}$, y su radio será

$$\sqrt{\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{4\operatorname{sen}^2\theta}-p}.$$

Si el valor de R es cero, la ecuacion [A] representa un círculo cuyo radio es 0, es decir, representa un punto; é igualmente la ecuacion propuesta idéntica á la [A] representa un punto cuyas coordenadas son $\frac{n\cos\theta-m}{2\operatorname{sen}^2\theta}$ y $\frac{m\cos\theta-n}{2\operatorname{sen}^2\theta}$.

Por último, si el valor de R es imaginario, la ecuacion [A], ó su idéntica la propuesta, representa un círculo de radio imaginario, es decir, que no representa nada.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera hallar el lugar geométrico de la ecuacion

$$x^2-xy+y^2-x-y+\frac{3}{4}=0,$$

formando los ejes un ángulo, cuyo coseno duplicado sea igual á -1, es decir, que $2\cos\theta=-1$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\cos(180°-\theta)=\frac{1}{2}=\cos 60°$; luego $180°-\theta=60°$, $\theta=120°$, ángulo de los ejes.

Sabemos que la ecuacion representa un círculo, un punto ó nada. Para decidir cuál de estos tres casos se verifica, hallemos el valor del radio por la espresion

$$R=\sqrt{\frac{m^2+n^2-2mn\cos\theta}{4\,\mathrm{sen}^2\theta}-p}.$$

Tenemos actualmente $m=-1$, $n=-1$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $p=\frac{3}{4}$; luego $R=\sqrt{\frac{1+1+1}{3}-\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Luego la ecuacion representa un círculo cuyo radio es $\frac{1}{2}$.

Para construir este círculo, hallaremos las coordenadas del centro por las fórmulas

$a=\frac{n\cos\theta-m}{2\,\mathrm{sen}^2\theta}$, $b=\frac{m\cos\theta-n}{2\,\mathrm{sen}^2\theta}$; que ahora valdrán

$$a=\frac{-1\times-\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=1,\quad b=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}}=1$$

Conocemos pues las coordenadas del centro y el radio, y por consiguiente es muy fácil construir el círculo.

59. Vamos á deducir de la ecuacion del círculo algunas de sus propiedades.

Fig. 32. Coloquemos el orígen en el centro, y despejemos la y en la ecuacion del círculo $y^2+x^2=R^2$: tendremos

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$

Segun esta ecuacion, á cada valor de x corresponden dos valores de y iguales y de signo contrario; luego, si damos á x el valor particular OP, los valores absolutos correspondientes de y, que son MP y NP, serán iguales; luego, si doblamos el círculo por el diámetro CB, caerá PM sobre PN, y por consiguiente el punto M caerá sobre el punto N. Por la misma razon todos los demas puntos del arco BMC caerán sobre el arco BNC. Luego: 1.° *Todo diámetro divide al círculo y circunferencia en dos partes iguales;* 2.° *el radio perpendicular á una cuerda divide á esta y á los dos arcos que ella subtiende en dos partes iguales.*

De la misma ecuacion resulta
$$y^2=R^2-x^2,$$
ó bien
$$y^2=(R+x)(R-x):$$
luego, si consideramos un punto cualquiera M de la circunferencia, tendremos
$$MP^2=CP\times PB;$$
lo que demuestra que *la perpendicular bajada desde un punto cualquiera de la circunferencia á un diámetro es media proporcional entre los segmentos del diámetro.*

Tirando la cuerda CM, tendremos
$$CM^2=y^2+(x+R)^2=y^2+x^2+2Rx+R^2;$$
pero como $y^2+x^2=R^2$, resultará
$$CM^2=2R^2+2Rx=2R(R+x);$$
y si en vez de x ponemos su valor OP, será
$$CM^2=CB\times CP:$$
luego *la cuerda tirada desde un estremo de un diámetro es media proporcional entre el diámetro y segmento adyacente.*

Demostremos ahora que *el ángulo inscripto cuyos lados comprenden media circunferencia es recto, y en general, que el ángulo inscripto es mitad del ángulo central correspondiente.*

1.° Llamando x é y á las coordenadas del punto M, tendremos [*Trigon.* 31] $tg\,MBP=\dfrac{y}{R-x}$, $tg\,CMP=\dfrac{R+x}{y}$; y como $(R+x)(R-x)=y^2$, será $\dfrac{R+x}{y}=\dfrac{y}{R-x}$; luego los dos ángulos MBP y CMP son iguales: mas, como el ángulo MBP es complemento del ángulo BMP, tambien el CMP es complemento de BMP, y por tanto el ángulo BMC es recto.

2.° Sea el ángulo inscripto AMB [*Fig.* 33], tiremos la cuerda AB que tomaremos por eje de abscisas, y la perpendicular Oy en su punto medio O por eje de ordenadas. Sean x é y las coordenadas OP y MP del punto M, y sea $OB=c$, $OC=b$: tendremos $tg\,MBP=\dfrac{y}{c-x}$, y por lo tanto $tg\,MBx=\dfrac{y}{x-c}$, y $tg\,MAP=\dfrac{y}{x+c}$. Como $M=MBx-A$, será [*Trig* 16]
$$tg\,M=\frac{tgMBx-tgA}{1+tgMBx.tgA},$$

ó
$$tg\,M=\frac{\frac{y}{x-c}-\frac{y}{x+c}}{1+\frac{y^2}{x^2-c^2}}=\frac{2cy}{x^2+y^2-c^2}.$$

Ahora, la ecuacion del círculo con respecto á los ejes Ox, Oy es
$$x^2+(y-b)^2=R^2,$$
ó
$$x^2+y^2-2by+b^2=R^2,$$
ó
$$x^2+y^2=2by+R^2-b^2=2by+c^2:$$
sustituyendo este valor en la espresion de $tg\,M$, será
$$tg\,M=\frac{2cy}{2by}=\frac{c}{b}.$$

Como el ángulo OCB mitad de ACB, tiene por tangente $\frac{c}{b}$, se infiere que el ángulo $M=OCB$; luego *todo ángulo inscripto es mitad del ángulo central correspondiente.*

Demostremos ahora: 1.° *que si dos cuerdas de un círculo se cortan, las partes de la una son recíprocamente proporcionales á las de la otra;* 2.° *que si desde un punto esterior al círculo se tiran dos secantes, que terminen en los segundos puntos de interseccion, las secantes están en razon inversa de sus segmentos esternos.*

1.° Sean las dos cuerdas AE y BD [*Fig.* 34], que las tomaremos por ejes de coordenadas. Llamando a y b á las coordenadas del centro y θ al ángulo de los ejes, la ecuacion del círculo tendrá la forma
$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+mx+ny+p=0.$$

Haciendo en ella $y=0$, tendremos $x^2+mx+p=0$. Las raices de esta ecuacion son OB y $-OD$; luego $OB\times-OD=p$.

Haciendo en la misma ecuacion $x=0$, resulta
$$y^2+ny+p=0,$$
y por consiguiente $\quad OA\times-OE=p.$

Luego $\quad OA\times OE=OB\times OD,$

ó bien $\quad OA : OB :: OD : OE.$

2.° La ecuacion del círculo, tomando por ejes de coordenadas las dos secantes OA y OB [*Fig.* 35], es
$$x^2+y^2+2xy\cos\theta+my+nx+p=0.$$

Haciendo sucesivamente $y=0$, $x=0$, resultan las dos ecuaciones

$$x^2+nx+p=0,$$
$$y^2+my+p=0;$$

luego $OB\times OD=p$, $OA\times OE=p$;

por consiguiente $OB\times OD=OA\times OE$,

de donde resulta la proporcion

$$OA : OB :: OD : OE.$$

Corolario. Moviéndose una de las dos secantes al rededor del punto O, el teorema anterior no dejará de ser cierto aun en el caso del límite, esto es, cuando los dos puntos de interseccion de la secante con la circunferencia se reunan en uno, y la secante pase á ser tangente; entonces el teorema se reduce al siguiente: *si desde un punto esterior se tiran una tangente, que termine en el punto de contacto, y una secante que termine en el segundo punto de interseccion con la circunferencia, la tangente es media proporcional entre la secante y segmento esterno.*

ECUACION DE LA ELIPSE Y FORMA DE ESTA CURVA.

40. *La elipse* es una curva en la que se verifica que la suma de las dos distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es una cantidad constante.

Para hallar la ecuacion de la *elipse* en virtud de esta definicion, los ejes mas convenientes son la recta $F'Fx$ [*Fig.* 56] que pasa por los dos puntos dados F y F', y la perpendicular Oy á la $F'x$ en el punto medio O de la distancia FF'.

Sean $OP=x$ y $MP=y$ las coordenadas de un punto cualquiera M de la curva; llamemos $2c$ á la distancia FF' entre los dos puntos dados, z y z' á las distancias variables MF y MF' del punto M á los dos puntos dados F y F', y $2a$ á la cantidad constante á que es igual la suma $z+z'$.

La definicion de la elipse nos da la ecuacion

$$z+z'=2a\ldots\ldots [1].$$

Para deducir de esta ecuacion la de la curva, espresaremos las variables z y z' en funcion de las coordenadas variables x é y. Tenemos evidentemente

$$z=\sqrt{y^2+(x-c)^2},$$
$$z'=\sqrt{y^2+(x+c)^2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [1], tendremos la ecuacion

$$\sqrt{y^2+(x-c)^2}+\sqrt{y^2+(x+c)^2}=2a,$$

que espresa la relacion que hay entre las coordenadas x é y de un punto cualquiera de la curva, y por tanto es la ecuacion de la elipse; y ahora la vamos á simplificar. Para hacerlo con brevedad, paso uno de los radicales al segundo miembro, y elevo en seguida la ecuacion al cuadrado, y haciendo las reducciones fáciles que se presentan, resulta

$$cx=a^2-a\sqrt{y^2+(x-c)^2}.$$

Para quitar ahora este radical, lo dejaremos solo en un miembro, y elevando la ecuacion al cuadrado, tendremos

$$a^2y^2+a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

ó

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

Observemos que, siendo $FF'<F'M+FM$, ó $2c<2a$, ó $c<a$, a^2-c^2 es cantidad positiva; representémosla por b^2, y la ecuacion de la elipse será

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Vamos ahora á hallar la forma de la elipse por medio de su ecuacion.

Despejando la y en la ecuacion de la elipse, tendremos

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Segun esta ecuacion, á cada valor OP de x corresponden dos de y, MP y $-M'P$, iguales y de signo contrario, es decir que $MP=M'P$: luego la elipse queda dividida por la recta AA' en dos partes iguales; ó, lo que es igual, la elipse consta de dos ramos ABA', $AB'A'$ simétricos respecto de la recta AA' que pasa por los dos puntos dados F y F'.

Si damos á x el valor 0, será $y=\pm b$; luego la curva corta al actual eje de ordenadas en dos puntos B y B' distantes del orígen la cantidad b ó $\sqrt{a^2-c^2}$.

Si x crece positiva ó negativamente, crecerá x^2, disminuirá a^2-x^2, disminuirán por consiguiente los valores absolutos de las ordenadas; y por tanto los dos ramos de la curva se van acercando por derecha é izquierda del orígen al eje de abscisas.

Si $x=\pm a$, es $x^2=a^2$ é $y=0$; luego la curva corta al eje de abscisas en dos puntos A y A distantes del orígen la cantidad a.

Si damos á x un valor positivo ó negativo, pero cuyo valor absoluto sea mayor que a, entonces será $x^2>a^2$, y por consiguiente los valores de y serán imaginarios; luego la curva está limitada por los puntos A y A'.

Vemos ya que la curva es limitada en todos sentidos.

Despejando la x en la ecuacion de la elipse, será

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

Segun este valor de x, á cada valor OQ de y corresponden dos de x, NQ y $-N'Q$ iguales y de signo contrario, es decir, que $NQ=N'Q$; luego la elipse consta de dos ramos BAB' $BA'B'$ simétricos respecto del actual eje de ordenadas.

Nos falta todavía, para tener una idea bastante exacta de la forma de esta curva, hacer ver que no tiene ondulaciones. Hallemos, para esto, los puntos en que una recta cualquiera corta á la curva: hemos visto que la ecuacion de una recta cualquiera es $y=\alpha x+\beta$, siendo α su coeficiente angular (ahora que los ejes son rectángulos, α es la tangente del ángulo que forma esta recta con el eje Ox) y β la ordenada en el orígen. Segun hemos visto en el núm.° 25, debemos combinar las dos ecuaciones de la elipse y de la recta, y despejar en ellas las dos incógnitas x é y. Eliminemos la y entre dichas dos ecuaciones: resulta la ecuacion de segundo grado,

$$a^2(\alpha x+\beta)^2+\beta^2x^2=a^2b^2,$$

que nos dará para x, á lo mas, dos valores m y n, y por consiguiente y tendrá otros dos correspondientes, á saber, $am+b$ y $an+b$; luego la recta no puede cortar á la elipse en mas que dos puntos; es decir, que esta curva no tiene ondulaciones, ó es enteramente convexa.

Queda pues suficientemente determinada la forma de la elipse.

Ecuacion de la hipérbola y forma de esta curva.

41. Se llama *hipérbola* una curva en la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es constante.

Para hallar la ecuacion de esta curva, en virtud de esta definicion, los ejes mas convenientes son la recta $F'Fx$ (*fig* 37) que pasa por los dos puntos dados F y F', y la perpendicular Oy á esta recta en el punto medio O de la distancia FF'.

Sean $OP=x$, $MP=y$ las coordenadas de un punto cualquiera M de la curva; llamemos $2c$ á la distancia FF' entre los dos puntos dados, $2a$ á la cantidad constante á que es igual la diferencia de las distancias $MF=z$ y $MF'=z'$.

La definicion de la hipérbola nos da la ecuacion

$$z'-z=2a\ldots\ldots [A].$$

Para deducir de esta ecuacion la ecuacion de la curva, espresaremos las variables z' y z en funcion de las coordenadas variables x é y.

Tenemos evidentemente

$$z'=\sqrt{y^2+(x+c)^2},$$

$$z=\sqrt{y^2+(x-c)^2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $[A]$, tendremos la ecuacion de la hipérbola

$$\sqrt{y^2+(x+c)^2}-\sqrt{y^2+(x-c)^2}=2a.$$

Simplificando esta ecuacion, como en el caso de la elipse, se hallará

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

En el triángulo FMF' es $F'M-FM<FF'$, ó $2a<2c$, ó $a<c$; luego a^2-c^2 es cantidad negativa; llamándola $-b^2$, la ecuacion de la hipérbola será

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

Pasemos ahora á hallar la forma de la hipérbola por medio de su ecuacion.

En primer lugar, segun esta ecuacion, á cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario, y á cada valor de y corresponden dos de x, tambien iguales entre sí y de signo contrario; luego la curva es simétrica, tanto respecto del eje Ox como del eje Oy.

Despejemos ahora la y, y tendremos

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Si $x=0$, es $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{-a^2}=\pm b\sqrt{-1}$; luego los valores correspondientes de y son imaginarios, es decir que la curva no corta al eje Oy: y serán imaginarios los valores de y, mientras el valor absoluto de x, positivo ó negativo, sea menor que a: luego entre los puntos A y A', cuyas distancias al orígen son iguales á a, no hay curva.

Si $x=\pm a$, es $y=0$; luego la curva corta al eje Ox en dos puntos A y A' distantes del centro la cantidad a.

Si el valor absoluto de x, positivo ó negativo, es mayor que a, el radical es real, y reales por consiguiente los valores de y; luego á la derecha del punto A y á la izquierda del punto A' hay curva.

Creciendo x indefinidamente hácia la derecha ó hácia la izquierda, crecen tambien indefinidamente los valores absolutos de las ordenadas; luego la curva va alejándose indefinidamente del eje Ox, tanto á la derecha como á la izquierda: ya vemos pues que la curva consta de dos ramas indefinidas, simétricas con respecto al eje Oy, y cada una de las cualès consta de dos ramos simétricos con respecto al eje Ox.

Ahora se demostrará del mismo modo que en la elipse, que la curva no tiene ninguna ondulacion, ó que es enteramente convexa; con lo que queda *determinada la forma de la hipérbola*.

ECUACION DE LA PARABOLA Y FORMA DE ESTA CURVA.

42. Se llama *parábola* una curva en la que se verifica que la distancia de uno cualquiera de sus puntos á un punto dado es igual á la distancia del mismo punto á una recta dada.

Para hallar, por medio de esta definicion, la ecuacion de la parábola, tomaremos por eje de abscisas la recta DFx [*Fig* 38], que pasa por el punto dado F y es perpendicular á la recta dada DR, y por eje de ordenadas la perpendicular Oy á la recta DFx en el punto medio O de la distancia FD.

Sea M uno de los puntos de la curva cuyas coordenadas $OP=x$, $MP=y$, y llamemos p á la distancia FD. Segun la definicion de la curva tendremos la ecuacion

$$MF=MR.$$

Para deducir de esta ecuacion la de la curva, espresaremos las dos cantidades variables MF y MR en funcion de las coordenadas variables x é y.

Es evidente que $$MF=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2},$$

y que $$MR=x+\frac{p}{2}:$$

luego la ecuacion de la parábola será

$$\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Para simplificarla, elevaremos ambos miembros al cuadrado, y tendremos

$$y^2+x^2-px+\frac{p^2}{4}=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

ó $$y^2=2px.$$

Hallemos ahora, por medio de esta ecuacion, la forma de la parábola.

De dicha ecuacion resulta $y=\pm\sqrt{2px}$; y ahora vemos que á cada valor de x corresponden dos valores de y, iguales y de signo contrario: luego la curva es simétrica respecto del eje Ox.

Si $x=0$, es $y=0$; luego la curva pasa por el orígen.

Creciendo x positiva é indefinidamente, crecen tambien indefinidamente los valores absolutos de las ordenadas; luego los dos ramos simétricos de que consta la curva se van alejando indefinidamente del eje Ox.

Si damos á x valores negativos, los correspondientes de y son imaginarios; luego á la izquierda del orígen no hay curva.

Ahora se demostrará fácilmente que la curva es enteramente convexa; y asi queda determinada *suficientemente la forma de esta curva.*

CAPITULO III.

Transformacion de las coordenadas

43. La ecuacion de una línea es mas ó menos simple, segun la posicion de la línea con respecto á los ejes y segun la naturaleza de estos: ejemplo de esta verdad tenemos en las diferentes ecuaciones que hemos hallado para el círculo.

El objeto de la transformacion de las coordenadas es el siguiente: *dada la ecuacion de una línea, hallar la ecuacion de la misma con respecto á otros ejes diferentes de los primeros.*

Este problema quedará resuelto, hallando los valores de las coordenadas primitivas de un punto cualquiera de la línea en funcion de las coordenadas nuevas del mismo punto, y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la línea: de este modo la ecuacion que resulte, será la ecuacion de la línea con respecto á los nuevos ejes, pues dicha ecuacion indicará la relacion entre las coordenadas nuevas de un punto cualquiera de la línea.

Tres casos pueden presentarse en la transformacion de las coordenadas: 1.° variacion del orígen, siendo los nuevos ejes paralelos á los primitivos, 2.° variacion de la direccion de los ejes, siendo el orígen el mismo, 3.° compuesto de los dos primeros, á saber, variacion del origen y de la direccion de los ejes.

Primer caso. *Dada la ecuacion de una línea con respecto á los ejes* Ox, Oy, *hallar la ecuacion de la misma línea con respecto á los ejes* O'x', O'y' *paralelos á los primeros.*

Fig. 39. La posicion de los nuevos ejes quedará determinada, conociendo las coordenadas $OB=a$, $O'B=b$ del nuevo origen O'. Sea M un punto cualquiera de la línea, $OP=x$, $MP=y$ sus coordenadas primitivas; $O'P=x'$, $MP'=y'$ sus coordenadas nuevas. Tenemos que hallar x é y en funcion de x' é y', ó lo que es igual, considerando á x' é y' como cantidades conocidas, tenemos que hallar las incógnitas x é y.

Es evidente que
$$OP=O'P'+OB,$$
$$MP=MP'+O'B;$$
luego
$$\left.\begin{array}{l} x=x'+a, \\ y=y'+b \end{array}\right\} \ldots\ldots [1].$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion propuesta, se tendrá la nueva ecuacion referida á los nuevos ejes.

Nota. Hemos hallado las dos fórmulas [1], suponiendo que son positivas, tanto las coordenadas del nuevo orígen, como las del punto M; pero segun el teorema de Descartes [19], y en virtud de los signos que deben preceder á las coordenadas, dichas fórmulas son generales.

Comprobémoslas en un caso cualquiera.

Fig. 40. Sean Ox, Oy los ejes primitivos, $O'x'$, $O'y'$ los nuevos paralelos á aquellos, M un punto cualquiera de la línea: tendremos $OB=a$, $-O'B=b$, $OP=x$, $-MP=y$, $O'P'=x'$, $MP'=y'$.

Ahora es evidente que

$$OP=OB+O'P',$$

y que

$$MP=O'B-MP';$$

luego

$$x=a+x',$$
$$-y=-b-y',$$

ó

$$y=y'+b.$$

Segundo caso. *Dada la ecuacion de una línea con respecto á los ejes oblicuángulos* Ox, Oy, *hallar la ecuacion de la misma con respecto á los nuevos ejes oblicuángulos* Ox', Oy', *que tienen el mismo orígen que los primeros.*

Fig 41. La posicion de los nuevos ejes quedará determinada, conociendo los ángulos $x'Ox=\alpha$, $y'Ox=\alpha'$: llamemos θ al ángulo de los ejes primitivos.

Sea M un punto cualquiera de la línea; sus coordenadas primitivas $OP=x$, $MP=y$, y sus coordenadas nuevas $OP'=x'$, $MP'=y'$.

Considerando á x' é y' como conocidas, tenemos que hallar las incógnitas x é y. Para esto, tiro por el punto P' las rectas $P'R$ y $P'Q$ paralelas á los ejes primitivos, y tendré evidentemente

$$\left.\begin{array}{l} OP=OQ+P'R, \\ MP=P'Q+MR \end{array}\right\} \ldots\ldots [A]$$

Tenemos, pues, que hallar los valores de las cuatro rectas OQ, $P'R$, $P'Q$ y MR.

El triángulo OQP' nos da, segun un teorema conocido, las dos proporciones

$$\frac{OQ}{\operatorname{sen} OP'Q}=\frac{OP'}{\operatorname{sen} OQP'}=\frac{QP'}{\operatorname{sen} QOP'},$$

ó, puesto que $OP'=x'$, $OP'Q=P'Qx-P'OQ=\theta-\alpha$, $OQP'=180^\circ-\theta$, $QOP'=\alpha$, las proporciones anteriores serán

$$\frac{OQ}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}=\frac{x'}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{QP'}{\operatorname{sen}\alpha},$$

de las cuales resultan

$$OQ=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},\quad QP'=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}.$$

El triángulo MRP' nos da tambien las proporciones

$$\frac{P'R}{\operatorname{sen} M}=\frac{MP'}{\operatorname{sen} MRP'}=\frac{MR}{\operatorname{sen} MP'R},$$

ó, puesto que $MP'=y'$, $M=yOy'=yOx'-y'Ox=\theta-\alpha'$, $MRP'=180^\circ-\theta$, $MP'R=\alpha'$, las dos proporciones anteriores serán

$$\frac{P'R}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}=\frac{y'}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{MR}{\operatorname{sen}\alpha'},$$

de donde

$$P'R=\frac{y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},\quad MR=\frac{y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones [A] los valores que acabamos de hallar, tendremos

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},\\ y&=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots [2].$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion de la línea, se tendrá la ecuacion de la misma línea con respecto á los nuevos ejes.

Nota. En el caso que acabamos de considerar están comprendidos los tres casos particulares siguientes: 1.° pasar de ejes oblicuángulos á ejes rectangulares del mismo orígen; 2.° pasar de ejes rectangulares á otros ejes rectangulares del mismo orígen; 3.° pasar de ejes ~~oblicuángulos~~ á ejes ~~rectangulares~~ del mismo orígen. rectangulares á oblicuos

Hallemos las fórmulas particulares correspondientes á estos tres casos.

1.° Las fórmulas correspondientes á este primer caso, se hallarán haciendo $\alpha'=90^\circ+\alpha$ en las fórmulas generales: tendremos pues

$$x=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-90^\circ-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}\theta};$$

pero $\operatorname{sen}(\theta-90^0-\alpha)=-\operatorname{sen}(90^0+\alpha-\theta)=-\cos(\theta-\alpha)$, y $\operatorname{sen}(90^0+\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; luego las fórmulas serán

$$x=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha}{\operatorname{sen}\theta}.$$

2.° Hallaremos las fórmulas correspondientes á este caso, suponiendo en las fórmulas generales $\alpha'=90+\alpha$ y $\theta=90^0$: tendremos

$$x=x'\operatorname{sen}(90^0-\alpha)+y'\operatorname{sen}(-\alpha),$$
$$y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}(90^0+\alpha),$$

ó

$$x=x'\cos\alpha-y'\operatorname{sen}\alpha,$$
$$y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\cos\alpha.$$

3.° Se hará $\theta=90^0$ en las fórmulas generales, y por consiguiente las fórmulas particulares de este caso serán:

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',$$

$$y'=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'.$$

Estas mismas fórmulas correspondientes á los tres casos particulares se hallan fácilmente, haciendo en cada caso particular la misma construccion que hemos hecho para el caso general [34 *nota*]. No hay necesidad de retener estas fórmulas particulares en la memoria, pues cuando nos hagan falta, las deduciremos de las generales del mismo modo que acabamos de hallarlas ahora.

Tercer caso. *Dada la ecuacion de una línea, hallar la ecuacion de la misma con respecto á nuevos ejes, cuyo orígen y direccion sean diferentes del orígen y direccion de los primitivos.*

Sean Oy y Ox los ejes primitivos $O'x'$ y $O'y'$ los nuevos: tiremos

Fig. 42. Por el nuevo orígen O' tiremos las rectas $O'x_1$ y $O'y_1$ paralelas á los ejes primitivos.

La posicion de los nuevos ejes quedará determinada, conociendo las coordenadas a y b del nuevo orígen, y los ángulos $x'O'x_1=\alpha$, $y'O'x_1=\alpha'$ que forman los nuevos ejes con la $O'x_1$ paralela á Ox.

Llamemos x_1 é y_1 á las coordenadas $O'Q$ y MQ del punto M

con respecto á los ejes auxiliares $O'x_1$, $O'y_1$: tendremos, segun el primer caso de transformacion,

$$x=x_1+a,$$
$$y=y_1+b;$$

pero las fórmulas del caso segundo nos dan

$$x_1=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y_1=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta};$$

luego

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}+a,\\ y&=\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}+b. \end{aligned}\right\}\cdots\ [3]$$

Estas son las fórmulas para el caso mas general de la transformacion de las coordenadas.

Obsérvese que, para tener las fórmulas de este tercer caso, no hay mas que añadir a y b á los valores de x é y del segundo caso.

Nota. Hemos hallado las fórmulas [2], ó las fórmulas [3], suponiendo: 1.° que el punto M de la línea tenia coordenadas positivas, tanto las antiguas como las nuevas, 2.° que las partes Ox', Oy' de los nuevos ejes estaban situados en la parte superior del eje Ox: segun el teorema de Descartes [19] dichas fórmulas serán generales, teniendo presentes los signos que deben preceder á las coordenadas del punto M y del nuevo orígen, y considerando á los ángulos α y α' como negativos, si las partes Ox' y Oy' de los nuevos ejes estan situadas en la parte inferior del eje Ox.

Comprobemos dichas fórmulas en un caso cualquiera.

Fig. 43. Sean Ox, Oy los ejes primitivos, Ox', Oy' los nuevos, M un punto cualquiera de la línea: tendremos $yOx=\theta$, $x'Ox=-\alpha$, $y'Ox=-\alpha'$ (1). Haciendo la misma construccion que en el caso que hemos considerado, es decir, tirando por el pie P' de la ordenada nueva una paralela $P'R$ al eje Ox prolongada hasta que encuentre á la ordenada antigua, y una

(1) Siendo α y α negativos, $-\alpha$ y $-\alpha'$ son positivos.

paralela $P'Q$ al eje Oy, prolongada, hasta que encuentre al eje Ox, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} OP=P'R-OQ, \\ MP=MR+P'Q \end{array}\right\} \ldots \quad [B]$$

Ahora, en el triángulo $P'MR$ tenemos la proporcion

$$\frac{P'R}{MP'}=\frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} MRP'},$$

ó, puesto que el ángulo $M=180^\circ-yOy'$ [*Geom. Teor.* 11, 3°.] $=180^\circ-\theta+\alpha'$, y $MRP'=yOx=\theta$, será

$$\frac{P'R}{y'}=\frac{\operatorname{sen}(180^\circ-\theta+\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},$$

de donde $$P'R=\frac{y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}.$$

En el mismo triángulo es

$$\frac{MR}{MP'}=\frac{\operatorname{sen} RP'M}{\operatorname{sen} P'RM},$$

ó, puesto que $RP'M=y'Ox=-\alpha'$,

$$\frac{MR}{y'}=\frac{\operatorname{sen}(-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},=-\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta},$$

de donde $$MR=-\frac{y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}$$

El triángulo $P'QO$ nos da las proporciones

$$\frac{OQ}{OP'}=\frac{\operatorname{sen} QP'O}{\operatorname{sen} OQP'},$$
$$\frac{P'Q}{OP'}=\frac{\operatorname{sen} QOP'}{\operatorname{sen} OQP'};$$

como $QP'O=QP'R-OP'R=\theta-(180^\circ-x'Ox)=\theta-(180^\circ+\alpha)$ $=-(180^\circ-\theta+\alpha)$, y $QOP'=180^\circ-x'Ox=180^\circ+\alpha$, la primera proporcion será

$$\frac{OQ}{x'}=\frac{-\operatorname{sen}(180^\circ-\theta+\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{-\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},$$

de donde $$OQ=-\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},$$

La segunda proporcion se convertirá en

$$\frac{P'Q}{x'}=\frac{\operatorname{sen}(180^\circ+\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta},$$

de donde $$P'Q=-\frac{x'\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Sustituyendo los valores de las cuatro rectas $P'R$, OQ, MR y $P'Q$ en las ecuaciones [B], resultan las fórmulas

$$x=\frac{y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')+x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$-y=-\frac{y'\operatorname{sen}\alpha'+x'\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta},$$

ó $$y=\frac{y'\operatorname{sen}\alpha'+x'\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta};$$

fórmulas idénticas á las [2].

44. Teorema. *La transformacion de las coordenadas no altera el grado de la ecuacion de una línea.*

Consideremos, para demostrarlo, la ecuacion general del grado m con dos indeterminadas

$$Ax^m+(By+C)x^{m-1}+(Dy^2+Ex+F)x^{m-2}+$$
$$\ldots+(ay^m+by^{m-1}+\ldots+k)=0.$$

Las fórmulas generales de transformacion de coordenadas son las siguientes:

$$x=a+\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y=b+\frac{x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta},$$

ó, haciendo para abreviar $\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}=a'$, $\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}=a''$, $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}=b'$, $\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}=b''$, dichas fórmulas serán:

$$x=a+a'x'+a''y',$$
$$y=b+b'x'+b''y'.$$

Observemos que x é y son funciones lineales de x' é y', es decir que x' é y' entran elevadas á la primera potencia en los valores de x é y: si pues sustituimos estos valores en los términos del grado m Ax^m, Byx^{m-1}, Cy^2x^{m-2}......, los resultados respectivos serán $(a+a'x+a''y')^m$, $B(b+b'x'+b''y')(a+a'x'+a''y')^{m-1}$, $C(b+b'x'+b''y')^2(a+a'x'+a''y')^{m-2}$........ Desarrollando estos términos, resultarán de cada uno varios términos del grado m, y es claro que no pueden resultar términos de grado mayor: luego la transformacion de las coordenadas no puede aumentar el grado de la ecuacion. Pero no sabemos si todos estos términos del grado m pueden destruirse entre sí, y resultar por consiguiente una ecuacion de grado menor: supongamos que asi se verifique, que se destruyan todos los términos del grado m. Observemos que para pasar de la nueva ecuacion á la propuesta, debemos sustituir los valores de x' é y' en funcion de x é y: los valores de x' é y' tendrán la forma

$$x'=a+a'x+a''y,$$
$$y'=b+b'x+b''y,$$

puesto que tambien este es un caso de transformacion de coordenadas; luego, sustituidos estos valores en la nueva ecuacion de grado menor que m, obtendríamos la ecuacion primera del grado m; es decir que esta transformacion de coordenadas aumentaria el grado de la ecuacion; lo que, ya hemos visto, no puede ser. Queda pues demostrado, que la transformacion de coordenadas no puede aumentar ni disminuir el grado de una ecuacion.

EJEMPLOS DE TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

45. *Dada la ecuacion del círculo con respecto á los ejes oblicuángulos* Ox, Oy [Fig. 44], *hallar la ecuacion de la misma línea con respecto á los ejes rectangulares* O'y', O'x'.

Hemos visto [36] que la ecuacion del círculo, con respecto á los ejes oblicuángulos Oy, Ox, es

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=R^2 \ldots [C].$$

Las fórmulas para pasar de los ejes oblicuángulos Oy, Ox á los rectangulares $O'y'$, $O'x'$, las deduciremos de las fórmulas generales

$$x=a+\frac{x'\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)+y'\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha')}{\mathrm{sen}\,\theta},$$

$$y=b+\frac{x'\,\mathrm{sen}\,\alpha+y'\,\mathrm{sen}\,\alpha'}{\mathrm{sen}\,\theta},$$

haciendo en ellas $\alpha'=90^\circ+\alpha$; y asi resultan

$$x=a+\frac{x'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\text{sen}\,\theta},$$

$$y=b+\frac{x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\cos\alpha}{\text{sen}\,\theta},$$

ó

$$x-a=\frac{x'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\text{sen}\,\theta},$$

$$y-b=\frac{x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\cos\alpha}{\text{sen}\,\theta}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [C], resulta

$$\frac{x'^2\,\text{sen}^2(\theta-\alpha)+y'^2\cos^2(\theta-\alpha)-2x'y'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\text{sen}\,\theta}+$$

$$\frac{x'^2\,\text{sen}^2\alpha+y'^2\cos^2\alpha+2x'y'\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\text{sen}^2\theta}+$$

$$2\frac{\left(x'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)\right)\left(x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\cos\alpha\right)\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}=R^2,$$

ó

$$x'^2\,\text{sen}^2(\theta-\alpha)+y'^2\cos^2(\theta-\alpha)-2x'y'\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+$$
$$x'^2\,\text{sen}^2\alpha+y'^2\cos^2\alpha+2x'y'\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha+$$
$$2x'^2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\cos\theta-2x'y'\,\text{sen}\,\alpha\cos(\theta-\alpha)\cos\theta$$
$$+2x'y'\,\text{sen}(\theta-\alpha)\cos\alpha\cos\theta-2y'^2\cos(\theta-\alpha)\cos\alpha\cos\theta=R^2\,\text{sen}^2\theta,$$

ó

$$x'^2\left(\text{sen}^2(\theta-\alpha)+\text{sen}^2\alpha+2\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\right)+$$
$$y'^2\left(\cos^2(\theta-\alpha)+\cos^2\alpha-2\cos(\theta-\alpha)\cos\alpha\cos\theta\right)+$$
$$x'y'\Big(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha-2\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)-$$
$$2\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta\cos(\theta-\alpha)+2\,\text{sen}\,(\theta-\alpha)\cos\alpha\cos\theta\Big)=R^2\,\text{sen}^2\theta.$$

Desenvolviendo estos coeficientes por las fórmulas del número 15 de la trigonometría, y reduciendo, se hallará

$$x'^2\,\text{sen}^2\theta+y'^2\,\text{sen}^2\theta=R^2\,\text{sen}^2\theta$$

ó

$$x'^2+y'^2=R^2$$

Al contrario, *dada la ecuacion* $x'^2+y'^2=R^2$ *del círculo con* *respecto á dos diámetros perpendiculares* O'x', O'y', *hallar su ecuacion con respecto á los ejes oblicuángulos* Ox, Oy.

Propuesta la cuestion en estos términos, entrarian en la ecuacion las coordenadas del nuevo orígen O con respecto á los ejes primitivos $O'x'$, $O'y'$, las cuales son $-O'K$ y $-OK$; pero para tener la ecuacion del círculo, entrando en ella las coordenadas del centro a y b respecto á los nuevos ejes Ox, Oy, es preferible pasar de los ejes rectangulares Ox', Oy' á los ejes Ox_1, Oy_1, paralelos á los nuevos y cuyo orígen no ha variado. Hecha esta transformacion, se pasará, segun las fórmulas correspondientes de transformacion (y teniendo mucho cuidado con los signos de las coordenadas del punto O con respecto á los ejes $O'x_1$, $O'y_1$) á los ejes Ox, Oy; y de este modo se hallará la ecuacion

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=R^2.$$

Si hubiésemos pasado inmediatamente de los ejes rectangulares $O'x'$, $O'y'$ á los oblicuángulos Ox, Oy, hubieran entrado, segun las fórmulas de transformacion, las coordenadas $-O'K$ y $-OK$ del nuevo orígen O con respecto á los ejes primitivos $O'x'$, $O'y'$; pero de la ecuacion que asi resultase, se puede pasar á la ecuacion final, hallando los valores de las rectas $O'K$ y OK en funcion de a y b, y sustituyendo dichos valores en la nueva ecuacion.)

CAPITULO IV.

Clasificacion de las líneas.

46. Las líneas planas se dividen en *algébricas y trascendentes*: las primeras son aquellas cuyas ecuaciones son algébricas, y las segundas aquellas cuyas ecuaciones son trascendentes.

Así, las líneas algébricas estan todas representadas por la ecuacion general del grado m con dos indeterminadas

$$Ay^m+(Bx+C)y^{m-1}+(Dx^2+Ex+F)y^{m-2}+\ldots+(ax^m+bx^{m-1}+\ldots+k)=0.$$

Las líneas algébricas se dividen en *órdenes* ó *grados*, segun el grado de sus ecuaciones: así, las líneas de *primer órden* ó de *primer grado* son las líneas representadas por la ecuacion general de primer grado $Ay+Bx+C=0$; y ya hemos visto que estas líneas son rectas.

Las líneas de *segundo órden* ó de *segundo grado* son aquellas cuyas ecuaciones son de segundo grado, es decir, las representadas por la ecuacion general de segundo grado

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

Las líneas de *tercer grado* ó de *tercer órden* son las líneas representadas por la ecuacion general de tercer grado

$$Ay^3+(Bx+C)y^2+(Dx^2+Ex+F)y+Gx^3+Hx^2+Kx+L=0;$$

y así sucesivamente.

(Esta division de las líneas algébricas seria defectuosa, si la transformacion de las coordenadas pudiese alterar el grado de la ecuacion de una línea; pero ya hemos visto [44] que la transformacion de coordenadas no altera el grado de una ecuacion.)

45. Una ecuacion del grado m, cuyo primer miembro puede descomponerse en factores racionales y enteros con respecto á x é y, no representa una línea del órden m, sino tantas líneas del órden que indican los factores, cuantos son dichos factores diferentes.

(*Ejemplos*. 1.° $x^2-xy=0$, puede escribirse así: $x(x-y)=0$, que se verificará cuando $x=0$, que representa el eje de ordenadas, y cuando $x-y=0$, ó $y=x$, que representa una recta bisectriz del ángulo de los ejes.

2.° $$y^3-x^2y+y^2+xy=0,$$

que puede escribirse así:

$$y(y^2-x^2+y+x)=0,$$

ó $$y\Big((y+x)\ (y-x)+(y+x)\Big)=0,$$

ó $$y(y+x)\ (y-x+1)=0,$$

representa tres líneas de primer órden, es decir, tres líneas rectas. En efecto, esta ecuacion se verificará, siendo $y=0$, siendo $y+x=0$, ó siendo $y-x+1=0$; ecuaciones de primer grado que representan tres líneas rectas, fáciles de construir.)

3.° La ecuacion $y^3-2xy=0$, que puede escribirse así:

$$y(y^2-2x)=0,$$

representa una recta y una línea de segundo órden; pues dicha ecuacion se verificará, siendo $y=0$, que representa el eje de abscisa, y siendo $y^2-2x=0$, ecuacion de una línea de segundo órden.

46. *Una ecuacion con una sola incógnita representa tantas paralelas á uno de los ejes, cuantas son las raices reales y desiguales de la ecuacion.*

Así, la ecuacion $y^3-2y^2-5y+6=0$, cuyas raices son 1, 3 y -2, representará tres paralelas al eje de las x. Para demostrarlo, descompondremos el primer miembro en el producto de los factores binomios correspondientes á las raices, y tendremos

$$(y-1)(y-3)(y+2)=0,$$

ecuacion que se verificará, siendo $y-1=0$, $y-3=0$ ó $y+2=0$; de suerte que representa tres paralelas al eje Ox distantes de él 1, 3 y -2.

47. *Una ecuacion homogénea con dos variables* x *é* y *representa tantas líneas rectas que pasan por el orígen, como raices reales desiguales tiene la ecuacion numérica correspondiente.*

Sea la ecuacion homogénea

$$y^m+py^{m-1}x+qy^{m-2}x^2+\ldots+vx^m=0,$$

en la cual los coeficientes p, q, ... v son números fijos. Para hallar la ecuacion numérica correspondiente á esta ecuacion, partamos por x^m, y tendremos

$$\left(\frac{y}{x}\right)^m+p\left(\frac{y}{x}\right)^{m-1}+q\left(\frac{y}{x}\right)^{m-2}+\ldots+v=0;$$

y si ahora hacemos $\frac{y}{x}=z$, será

$$z^m+pz^{m-1}+qz^{m-2}+\ldots+v=0,$$

que es la ecuacion que llamamos la *numérica correspondiente* á la ecuacion propuesta.

Supongamos ahora, para fijar las ideas, que esta ecuacion tenga las únicas raices reales α, α, β y γ: llamemos $f(z)$ al cociente de la division del primer miembro de la ecuacion por el producto de los factores binomios correspondientes á dichas raices reales, cociente que igualado á cero dará las raices imaginarias de la ecuacion; la cual podrá escribirse así: $$(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)f(z)=0.$$

Esta ecuacion se verificará siendo

$$z-\alpha=0,\ z-\beta=0,\ z-\gamma=0 \text{ ó } f(z)=0.$$

La última de estas ecuaciones no dá para z ó $\frac{y}{x}$ mas que valores imaginarios, y por tanto las ecuacion $f(z)=0$, ó $f\left(\frac{y}{x}\right)=0$ no representa nada. Las otras ecuaciones nos dan

$$z=\alpha,\ z=6,\ z=\gamma,$$

ó
$$\frac{y}{x}=\alpha,\ \frac{y}{x}=6,\ \frac{y}{x}=\gamma,$$

y por consiguiente $y=\alpha x,\ y=6x,\ y=\gamma x,$
que representan tres líneas rectas que pasan por el orígen.

Queda, pues, demostrado que la ecuacion homogénea representa tantas rectas que pasan por el orígen, cuantas son las raices reales desiguales de la ecuacion numérica correspondiente.

48. *Una ecuacion con dos variables puede representar varios puntos aislados, y puede tambien no representar nada.*

En efecto, la ecuacion de cuarto grado

$$(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=0$$

no puede verificarse, si no es cero cada uno de estos cuadrados; pues cualesquiera sean los valores reales que se den á x é y (y reales deben ser para que representen abscisas y ordenadas), cada uno de dichos cuadrados será siempre positivo ó cero: si los cuadrados fuesen cantidades positivas, la ecuacion no podria verificarse; luego es indispensable que dichos cuadrados sean ceros; esto es, que

$$(x^2-a^2)^2=0,\ (y^2-b^2)^2=0,$$

de donde $x=\pm a,\ y=\pm b.$

Combinando cada valor de x con cada valor de y, resultan las cuatro soluciones siguientes, únicas que satisfacen á la ecuacion propuesta:

$x=a,\ y=b;\ x=a,\ y=-b;\ x=-a,\ y=b;\ x=-a,\ y=-b.$

Como estas cuatro soluciones representan cuatro puntos aislados ó separados, queda demostrado que la ecuacion propuesta representa únicamente cuatro puntos aislados.

Si la ecuacion fuese

$$(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2+c^2=0,$$

dando á x é y valores reales cualesquiera, el primer miembro de la ecuacion propuesta seria siempre positivo; luego dicha ecuacion no representa nada.

49. *Una línea del órden* m *no puede ser cortada por una línea recta en mayor número de puntos que* m

La ecuacion general de las líneas del órden m es

$$Ay^m+(Bx+C)y^{m-1}+\ldots=0,$$

y la de una recta determinada por su coeficiente angular y ordenada en el orígen es $y=ax+b$.

Para hallar los puntos de interseccion de las dos líneas, combinaremos estas dos ecuaciones, y eliminaremos la y; para lo cual, sustituiremos su valor $ax+b$ en la ecuacion de la curva. Resulta

$$A(ax+b)^m+(Bx+C)(ax+b)^{m-1}+\ldots=0,$$

ecuacion del grado m, y que, á lo mas, dará para x m valores reales α, β, γ, ...: los valores correspondientes de y serán $a\alpha+b$, $a\beta+b$, $c\gamma+b$, ...; de suerte que las dos ecuaciones tendrán á lo mas las siguientes soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=a\alpha+b \end{array}\right| \begin{array}{l} x=\beta \\ y=a\beta+b \end{array} \left| \begin{array}{l} x=\gamma \\ y=a\gamma+b \end{array}\right| \ldots,$$

y pues el número de valores α, β, γ.... no puede ser mayor que m, el número de estas soluciones tampoco puede ser mayor que m; y como cada solucion nos da un punto de interseccion de las dos líneas, resulta al fin que el número de puntos de interseccion de la recta y la curva no puede ser mayor que m.

Corolario. *Una recta no puede cortar á una curva de segundo grado en mayor número de puntos que dos.*

Por consiguiente las líneas de segundo orden son enteramente convexas, ó lo que es igual, no tienen ninguna ondulacion.

CAPITULO V.

Líneas de primer órden.

ARTICULO 1.°

Discusion de la ecuacion general de primer grado con dos indeterminadas

50. Ya queda demostrado [32] que la ecuacion general de primer grado

$$Ay+Bx+C=0$$

representa una recta. Ahora tratamos de demostrar esto mismo, sin fundarnos, como allí, en la forma que sabíamos tenia la ecuacion de la línea recta; y por tanto esta teoría, tal como ahora la vamos á presentar, pudiera esponerse, siguiendo un órden diferente del que nosotros seguimos, antes de hallar la ecuacion de la línea recta.

Consideremos en primer lugar el caso particular en que $C=0$, y la ecuacion es por lo tanto

$$Ay+Bx=0,$$

de la cual resulta $y=-\frac{B}{A}x$, ó haciendo $-\frac{B}{A}=a$, $y=ax$.

Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.° que el coeficiente a sea positivo, 2.° que sea negativo.

Fig. 45. 1.er caso. Si hacemos $x=0$, resulta $y=0$; luego la línea representada por esta ecuacion pasa por el orígen. Si damos á x valores positivos, los correspondientes de y son positivos, y si damos á x valores negativos, los correspondientes de y son negativos; luego la línea se halla comprendida en el ángulo superior de la derecha é inferior de la izquierda.

De la ecuacion $y=ax$ resulta

$$\frac{y}{x}=a,$$

es decir, que en esta línea la razon de la ordenada á la abscisa es constante: si pues tomamos varios puntos M, M', N, N' en la línea, y señalamos sus coordenadas, tendremos

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-NQ}{-OQ}=\frac{-N'Q'}{-OQ'}\ldots\ldots,$$

ó

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{NQ}{OQ}=\frac{N'Q'}{OQ'}\ldots\ldots;$$

por consiguiente los triángulos MOP, $M'OP'$, NOQ, $N'OQ'$,.... que tienen los ángulos P, P', Q, Q'... iguales, y proporcionales los lados que forman estos ángulos, son semejantes; y por tanto los ángulos MOP, $M'OP'$, NOQ, $N'OQ'$...., opuestos á los lados correspondientes, son iguales; luego coinciden las rectas OM, OM', ON, ON'.... , y por tanto los puntos M, M', N, N'.... están en línea recta.

Queda, pues, demostrado que todos los puntos de la línea representada por la ecuacion propuesta, están en línea recta, ó, lo que es igual, que la línea representada por la ecuacion propuesta es una línea recta, la cual pasa por el orígen.

Fig. 46. Supongamos ahora que a sea una cantidad negativa $-a'$: la ecuacion será $y=-a'x$. Haciendo $x=0$, resulta $y=0$, y por tanto la línea representada por esta ecuacion pasa por el orígen. Si damos á x valores positivos, los correspondientes de y son negativos, y si damos á x valores negativos, los correspondientes de y son positivos; luego la línea está comprendida en los ángulos superior de la izquierda é inferior de la derecha.

De dicha ecuacion resulta

$$\frac{y}{x}=-a',$$

es decir, que la razon de la ordenada á la abscisa es constante.

Sean M, M', N, N'.... varios puntos de la línea representada por la ecuacion, y señalemos sus coordenadas: tendremos

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{M'P'}{-OP'}=\frac{-NQ}{OQ}=\frac{-N'Q'}{OQ'}\ldots\ldots$$

ó $$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{NQ}{OQ}=\frac{N'Q'}{OQ'}\ldots\ldots:$$

luego los triángulos MOP, $M'OP'$, NOQ, $N'OQ'$.... son semejantes, y por tanto los puntos M, M', N, N'.... están en línea recta, es decir que todos los puntos de la línea, representada por la ecuacion, están en línea recta, ó lo que es igual, que la línea representada por la ecuacion propuesta es una recta, la cual pasa por el orígen.

Pasemos ahora al caso general.

$$Ay+Bx+C=0,$$

de donde

$$y=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A},$$

ó haciendo, para abreviar,

$$-\frac{B}{A}=a,\ -\frac{C}{A}=b,$$

será

$$y=ax+b,$$

en la cual a y b podrán tener signos cualesquiera $+$ y $-$

Fig. 47. Traslademos el orígen á un punto del eje de ordenadas, cuya ordenada sea b, y tomemos ejes paralelos á los primitivos: haremos, segun las fórmulas del primer caso de la transformacion de coordenadas,

$$x=x', \; y=y'+b.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion propuesta, la ecuacion de la línea con respecto á los nuevos ejes será $y'=ax'$; y ya hemos demostrado que la línea representada por esta ecuacion es una recta que pasa por el orígen B. Luego queda demostrado que la ecuacion $y=ax+b$ ó $Ay+Bx+C=0$ representa una línea recta.

51. Esto supuesto, para construir la recta representada por una ecuacion de primer grado, se hallarán dos puntos de dicha recta, dando á x dos valores particulares, hallando los valores correspondientes de y, y construyendo los dos puntos cuyas coordenadas sean estas dos soluciones de la ecuacion: tirando por estos dos puntos una recta, esta será el lugar geométrico de la ecuacion propuesta. Pero, si la recta pasa por el orígen, lo que sucede cuando en la ecuacion no existe término independiente de x é y, bastará un solo punto, además del orígen, para que la recta quede determinada. Si la recta no pasa por el orígen, los dos puntos suyos que deben preferirse, tanto para la sencillez del cálculo, como para su construccion, son los dos puntos en que corta á los dos ejes.

Ejemplos. Construir la recta representada por la ecuacion

$$2y-3x=0.$$

Esta recta pasa por el orígen: dando ahora á x el valor 2, resulta $y=3$, y por consiguiente, construido el punto cuyas coordenadas son 2 y 3, y tirando por el orígen y por este punto una recta, se tendrá el lugar geométrico de la ecuacion propuesta.

Construir la recta representada por la ecuacion

$$3y-2x+5=0.$$

Haciendo $x=0$, resulta $y=-\frac{5}{3}$; haciendo $y=0$, resulta $x=\frac{5}{2}$: construidos estos dos puntos, y tirando por ellos una recta, esta será la representada por la ecuacion propuesta.

Artículo 2.°

Problemas sobre la línea recta.

52. La posicion de una recta queda siempre determinada por dos condiciones, á saber: 1.° conociendo un punto por donde pasa y la direccion de la recta; 2.° dados dos puntos por donde pasa; 3.° dado un punto por donde pasa, y siendo perpendicular á una recta dada; etc. Por consiguiente, siempre que se tengan los datos enunciados en cualquiera de estos casos, se podrá hallar la ecuacion de la recta [28, *nota*].

53. Problema 1.° *Hallar la ecuacion de una recta conociendo las coordenadas* x′, y′ *de un punto por donde pasa, y su direccion, ó sea el ángulo que la recta forma con el eje de las* x.

1.ª *Solucion.* Hemos visto que la ecuacion de la línea recta determinada por la ordenada en el orígen y por su coeficiente angular es

$$y=ax+b,$$

y en esta ecuacion es actualmente incógnita la b. Para hallar el valor de esta incógnita, observaremos que, por estar el punto (x',y') sobre la recta, sus coordenadas particulares verificarán la ecuacion de la recta, esto es

$$y'=ax'+b,$$

de donde

$$b=y'-ax';$$

y por consiguiente la ecuacion de la recta es

$$y=ax+y'-ax',$$

ó

$$y-y'=a(x-x').$$

2.ª *Solucion.* Sean Oy, Ox [*fig.* 48] los ejes de coordenadas, M' el punto por donde debe pasar la recta MA cuya ecuacion se pide. Señalemos las coordenadas $OP=x$, $MP=y$ de un punto cualquiera M, y tiremos la recta $M'Q$ paralela al eje Ox: el triángulo $MM'Q$ nos da la proporcion

$$\frac{MQ}{M'Q}=\frac{\operatorname{sen} MM'Q}{\operatorname{sen} M'MQ};$$

ó

$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)},$$

de donde

$$y-y'=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}(x-x'),$$

ó, si se representa por a el coeficiente angular $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$,
la ecuacion de la recta será

$$y-y'=a(x-x').$$

Nota 1.ª En esta ecuacion está incluida, como caso particular, la ecuacion $y=ax+b$, que es la de una recta que pasa por un punto $(0, b)$, y cuya direccion es conocida.

Nota 2.ª Hemos hallado la ecuacion de la recta AB colocada en la posicion mas conveniente, y tambien hemos tomado los puntos M y M' cuyas coordenadas son positivas: la ecuacion hallada es general segun el principio de Descartes [19], y puede comprobarse en un caso cualquiera, no perdiendo de vista los signos, tanto de las coordenadas, como de las líneas trigonométricas.

54. Problema 2.º *Hallar la ecuacion de una recta que pasa por dos puntos dados* (x', y'), (x'', y'').

1.ª *solucion.* Siendo a el coeficiente angular de la recta, y b su ordenada en el orígen, la ecuacion de la recta es

$$y=ax+b,$$

y actualmente a y b son incógnitas. Para hallar los valores de estas dos incógnitas, tendremos que, por estar sobre la recta los dos puntos, sus coordenadas verificarán la ecuacion de la recta, es decir,

$$y'=ax'+b,$$
$$y''=ax''+b,$$

ecuaciones que nos darán los valores de las dos incógnitas a y b. Restándolas, para eliminar la b, y despejando en seguida la a, resulta

$$a=\frac{y'-y''}{x'-x''},$$

y por consiguiente $$b=y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}x'.$$

Luego la ecuacion de la recta será

$$y=\frac{y'-y''}{x'-x''}x+y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}x':$$

pasando el término y' al primer miembro, y separando en el segundo el factor comun $\frac{y'-y''}{x'-x''}$, resulta

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

2.ª *solucion*. Siendo a el coeficiente angular de la recta, y pasando esta recta por un punto (x', y'), hemos visto en el problema precedente que la ecuacion de la recta es

$$y-y'=a\,(x-x'),$$

en la que actualmente es a la incógnita.

Para llegar á conocer esta incógnita, tenemos, por pasar la recta por el segundo punto (x'', y''), la relacion

$$y''-y'=a(x''-x'),$$

de donde
$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'};$$

luego la ecuacion pedida será

$$y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}\,(x-x').$$

3.ª *solucion*. Sean M' y M'' [*Fig*. 49] los dos puntos dados por donde pasa la recta ABM; sus coordenadas $OP'=x'$, $M'P'=y'$, $OP''=x''$, $M''P''=y''$. Sea M un punto cualquiera de la recta, x é y sus coordenadas OP y MP; tiremos las paralelas $M'Q$, $M''Q'$ al eje Ox. Los triángulos semejantes MQM', $M'Q'M''$ nos dan la proporcion

$$\frac{MQ}{M'Q}=\frac{M'Q'}{M''Q'},$$

ó
$$\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{y'-y''}{x'-x''},$$

de donde
$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}\,(x-x') \ldots\ldots [A],$$

ecuacion de la recta, hallada en el caso mas fácil, pero que, ya sabemos, es general.

55. Nota 1.ª Obsérvese con cuidado que el valor de a es $\frac{y'-y''}{x'-x''}$; es decir, que *cuando la recta pasa por dos puntos, su coeficiente angular es igual á la diferencia de las ordenadas de los dos puntos dividida por la diferencia de las abscisas de los mismos puntos;* siendo el minuendo en las dos diferencias la ordenada y la abscisa de un mismo punto.

Nota 2.ª Si los dos puntos dados son los dos puntos de interseccion de la recta con los ejes, y llamamos b á la ordenada y c á la abscisa de dichos dos puntos de interseccion, hallaremos la ecuacion de la recta, haciendo en la ecuacion

$[A]$ $y'=b$, $x'=0$, $y''=0$, $x''=c$; y por consiguiente la ecuacion de la recta será

$$y-b=-\frac{b}{c}x, \text{ ó } \frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1,$$

como la hallamos en el núm.° 30.

56. Problema 3.° *Hallar la ecuacion de una recta que pasa por un punto dado* (x', y'), *y es perpendicular á una recta dada.*

Para resolver este problema, conviene en primer lugar *hallar la relacion que hay entre los coeficientes angulares de dos rectas perpendiculares entre sí.*

Supondremos primeramente que los ejes sean rectangulares.

Fig. 50. Sean PQ y MR las dos rectas perpendiculares entre sí, α y α' los ángulos que forman respectivamente con el eje Ox: tenemos

$$\alpha'=90°+\alpha,$$

y por consiguiente

$$\operatorname{tg}\alpha'=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

luego $$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'=-1;$$

es decir, que *el producto de las tangentes de los ángulos que dos rectas perpendiculares entre sí forman con el eje de abscisas, es igual á* **—1**.

Hemos supuesto, para hallar esta relacion, que existian los dos ángulos α y α'; pero si uno de ellos, α' por ejemplo, fuese cero, ó lo que es igual, si la recta MR fuese paralela al eje Ox, la relacion $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'=-1$ nos daria $\operatorname{tg}\alpha=\infty$, es decir, que el ángulo α seria recto, lo que es cierto: luego la relacion $\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'=-1$ se verifica aun cuando uno de los dos ángulos sea cero.

Esto supuesto, la ecuacion de la recta MR que pasa por el punto dado $M(x',y')$ es

$$y-y'=\operatorname{tg}\alpha'(x-x'),$$

y actualmente $\operatorname{tg}\alpha'$ es desconocida: pero, siendo la recta MR perpendicular á la PQ, tenemos la relacion

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'=-1,$$

de donde $$\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

luego la ecuacion de la recta MR es

$$y-y'=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(x-x'),$$

y si se quiere llamar a á la tangente del ángulo α, será

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

No se pierda de vista que la a es la tangente del ángulo que la otra recta forma con el eje de las x.

Resolvamos el mismo problema, suponiendo que los ejes sean oblicuángulos, caso de poca ó ninguna utilidad ulterior.

Primeramente hallaremos la relacion entre los coeficientes angulares a y a' de las dos rectas PQ y MR.

Fig. 51. Tenemos $\alpha'=90^\circ+\alpha$, y por consiguiente, del mismo modo que en el caso anterior,

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'+1=0.$$

La cuestion está, pues, reducida á hallar $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha'$ en funcion de los coeficientes angulares a y a'.

Sabemos que $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}=a$: quitando el denominador y desenvolviendo $\operatorname{sen}(\theta-\alpha)$, será

$$\operatorname{sen}\alpha=a\operatorname{sen}\theta\cos\alpha-a\cos\theta\operatorname{sen}\alpha,$$

ó $$\operatorname{sen}\alpha(1+a\cos\theta)=a\operatorname{sen}\theta\cos\alpha,$$

y por consiguiente $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\operatorname{sen}\theta}{1+a\cos\theta}.$$

Igualmente $$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{a'\operatorname{sen}\theta}{1+a'\cos\theta};$$

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion

$$\operatorname{tg}\alpha\,.\operatorname{tg}\alpha'+1=0,$$

será $$\frac{aa'\operatorname{sen}^2\theta}{1+a\cos\theta+a'\cos\theta+aa'\cos^2\theta}+1=0,$$

ó $$aa'\operatorname{sen}^2\theta+1+a\cos\theta+a'\cos\theta+aa'\cos^2\theta=0,$$

ó $$aa'+1+(a+a')\cos\theta=0,$$

que es la relacion pedida.

Hemos supuesto, para hallar esta relacion, que los dos ángulos α y α' existian: si uno de estos ángulos fuese 0, por ejemplo el ángulo α', ó bien si la recta MR fuese paralela á la Ox, y por consiguiente la MR perpendicular á la Ox, tendriamos $\operatorname{sen}\alpha'=0$, y por tanto $\frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}=a'=0$: luego la relacion $aa'+1+(a+a')\cos\theta=0$, nos da $1+a\cos\theta=0$, de la cual resulta $a=-\frac{1}{\cos\theta}$. Sustituyendo este valor en la espresion $a=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$, tendremos

$$\frac{-1}{\cos\theta}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)},$$

de donde $\cos\alpha=0$, $\alpha=90^0$, lo que es cierto. Luego la relacion

$$aa'+1+(a+a')\cos\theta=0$$

se verifica aun en el caso en que una de las dos rectas, sea paralela al eje Ox.

Ahora bien, la ecuacion de la recta MR perpendicular á la PQ, y que pasa por el punto M, es

$$y-y'=a'(x-x'),$$

en la que a' es desconocida: su valor se hallará por la ecuacion $\quad aa'+1+(a+a')\cos\theta=0,$

que nos da $\quad a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta};$

y por tanto la ecuacion de la recta MR será

$$y-y'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}(x-x')$$

57. *Hallar la espresion de la distancia de dos puntos en funcion de las coordenadas de dichos puntos.*

Fig. 52. Supongamos en primer lugar que los ejes sean rectangulares. Sean los dos puntos dados M y M', á cuyas coordenadas llamaremos respectivamente x é y, x' é y'; tiremos la $M'Q$ paralela á Ox, y llamemos δ á la distancia MM': tendremos en el triángulo rectángulo $MM'Q$

$$MM'^2=M'Q^2+MQ^2,$$

ó

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2,$$

fórmula que traducida al lenguaje vulgar nos da el teorema siguiente: *el cuadrado de la distancia de dos puntos es igual al cuadrado de la diferencia de las abscisas de dichos puntos, mas* *el cuadrado de la diferencia de las ordenadas de los mismos puntos.*

Nota. Hemos hallado esta fórmula, suponiendo que los dos puntos dados tenian coordenadas positivas, es decir, en el caso mas fácil; pero estamos seguros por el principio de Descartes [19], que la fórmula hallada es general.

Comprobémosla en un caso cualquiera.

Fig. 53. Sean M y M' los dos puntos dados, x é y, x' é y' sus coordenadas, esto es, $OP=x$, $-MP=y$, $-OP'=x'$, $M'P'=y'$. Haciendo la misma construccion que en el caso anterior, tendremos $MM'^2=M'Q^2+MQ^2$,

ó, puesto que $M'Q=OP+OP'=x-x'$,

y $MQ=MP+M'P'=-y+y'$,

será $\delta^2=(x-x')^2+(y'-y)^2$,

ó $\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2$.

Caso particular. Supongamos ahora que uno de los dos puntos dados, M' por ejemplo, sea el orígen: sus coordenadas x' é y' serán iguales á cero; y por consiguiente la fórmula será en tal caso

$$\delta^2=y^2+x^2,$$

que es fácil hallar directamente.

Supongamos ahora que los ejes sean oblicuángulos.

Fig. 54. El teorema general de los triángulos rectilíneos nos da la ecuacion

$$MM'^2=M'Q^2+MQ^2-2M'Q\ \ MQ\cos M'QM,$$

ó, puesto que $M'Q=P'P=x-x'$, $MQ=y-y'$, y que el ángulo $M'QM$ es suplemento de θ, y por tanto $\cos M'QM=-\cos\theta$, será

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta;$$

y se puede comprobar fácilmente su generalidad en cualquier caso.

Caso particular. Si el punto M' coincide con el orígen, será $x'=0$, $y'=0$, y la fórmula de la distancia del punto M al orígen será

$$\delta^2=x^2+y^2+2xy\cos\theta,$$

que es fácil hallar directamente.

58. *Hallar la espresion de la distancia de un punto dado á una recta dada.*

Supondremos en la resolucion de este problema que los ejes son rectangulares, único caso que puede servir en adelante.

Fig. 50. Sean x' é y' las coordenadas del punto dado M,

$$y=ax+b \quad \ldots\ [A]$$

la ecuacion de la recta dada PQ, y la de la MP perpendicular á la PQ, hemos visto, es

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x') \ldots\ [B].$$

Igualando coordenadas entre estas dos ecuaciones, x é y serán las coordenadas del punto P de interseccion de las dos rectas; y despejando estas dos incógnitas en dichas dos ecuaciones, se conocerán las coordenadas del punto P. Conociendo las coordenadas de los puntos M y P, la fórmula de la distancia de dos puntos nos dará la distancia MP.

Este cálculo puede abreviarse un poco, observando que en la fórmula $\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2 \ldots [C]$ entran la diferencia de las abscisas y la diferencia de las ordenadas de los dos puntos, y estas dos diferencias pueden hallarse brevemente. Estas dos diferencias entran esplícitamente en la ecuacion $[A]$, mas no en la ecuacion $[B]$. Para que se presenten tambien con evidencia en esta ecuacion, llamemos á dichas dos diferencias, por un momento, α y β, esto es $x-x'=\alpha$, $y-y'=\beta$, ó $x=\alpha+x'$, $y=\beta+y'$: sustituyendo los valores de x é y en las dos ecuaciones $[A]$ y $[B]$, estas serán

$$\beta+y'=a(\alpha+x')+b;\ \beta=-\frac{\alpha}{a};$$

de las cuales resultan fácilmente

$$\alpha=a\ \frac{y'-ax'-b}{a^2+1},\ \beta=-\ \frac{y'-ax'-b}{a^2+1}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula $[C]$, que es actualmente

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2,$$

será

$$\delta^2=a^2\ \frac{(y'-ax'-b)^2}{(a^2+1)^2}+\frac{(y'-ax'-b)^2}{(a^2+1)^2},$$

ó $$\delta^2=\frac{(y'-ax'-b)^2}{(a^2+1)^2}(a^2+1)=\frac{(y'-ax'-b)^2}{(a^2+1)};$$

y por último $$\delta=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{a^2+1}}.$$

De estos dos signos deberá tomarse el conveniente para que el valor de δ sea positivo.

A esta misma fórmula puede llegarse geométricamente con mucha facilidad.

En el triángulo rectángulo MTP es

$$MP=MT\cos M,$$

ó $$\delta=(y'-TS)\cos\alpha.$$

Ahora, siendo la ecuacion de la recta QP

$$y=ax+b,$$

las coordenadas del punto T deben verificar esta ecuacion, y por tanto

$$TS=ax'+b.$$

Tenemos además

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+a^2}};$$

luego, sustituyendo estos valores en el de δ, resulta

$$\delta=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La resolucion de este problema, siendo los ejes oblicuángulos, no tiene ningun uso en adelante: hé aquí, sin embargo, la fórmula, por si algun lector quiere ejercitarse en hallarla

$$\delta=\frac{(y'-ax'-b)\operatorname{sen}\theta}{\pm\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}.$$

Articulo 3.°

Aplicacion de la ecuacion de la línea recta á la demostracion de algunos teoremas de geometría de elemental.

Teorema 1.° *Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo se cortan en un mismo punto.*

Fig. 55 La cuestion está reducida á hallar las ecuaciones de las dos rectas QO y RO perpendiculares á los lados

AB y BC en sus puntos medios, á hallar la abscisa de su punto de interseccion, y ver si esta abscisa es $AP=\frac{b}{2}$; pues si asi resulta, las dos perpendiculares QO y RO se encontrarán en un punto O de la perpendicular PO, es decir, que las tres perpendiculares se encontrarán en un mismo punto.

Hallemos la ecuacion de la recta QO: para esto, escribiremos la de una recta que pasa por un punto dado, y es perpendicular á una recta dada, que es

$$y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

Tenemos pues que hallar en primer lugar las coordenadas del punto Q, y la tangente del ángulo A. Llamando x' é y' á las coordenadas AD y BD del punto B, tendremos evidentemente $AE=\frac{x'}{2}$, $QE=\frac{y'}{2}$: la tangente del ángulo BAD es

$$\frac{BD}{AD}=\frac{y'}{x'}.$$

Luego la ecuacion de la recta QO será

$$y-\frac{y'}{2}=-\frac{x'}{y'}\left(x-\frac{x'}{2}\right)\ldots\ldots [E].$$

Para hallar la ecuacion de la perpendicular RO, tenemos primeramente

$$AF=AD+DF=x'+\frac{b-x'}{2}=\frac{x'+b}{2},\ RF=\frac{y'}{2},$$

y [35]

$$\operatorname{tg} BCx=\frac{y'}{x'-b}:$$

luego la ecuacion de la RO es

$$y-\frac{y'}{2}=\frac{b-x'}{y'}\left(x-\frac{x'+b}{2}\right)\ldots\ldots [F].$$

Igualando las coordenadas de las dos ecuaciones [E] y [F], y eliminando la y, tendremos

$$-x'\left(x-\frac{x'}{2}\right)=(b-x')\left(x-\frac{x'+b}{2}\right),$$

y despejando la x, resulta $x=\frac{b}{2}$

NOTA. Ya se sabe que el punto O de interseccion de las tres perpendiculares es el centro del círculo circunscripto.

Teorema 2.° *Las perpendiculares bajadas desde los vértices de un triángulo á los lados opuestos se encuentran en un mismo punto.*

Fig. 56. La cuestion está reducida á hallar las ecuaciones de las dos perpendiculares AE y CF, y en seguida la abscisa del punto de encuentro que debe ser AD.

Sean x' é y' las coordenadas del punto B: la tangente del ángulo BCx será [55]

$$\frac{BD}{AD-AC}=\frac{y'}{x'-b};$$

luego la ecuacion de la AE será

$$y=\frac{b-x'}{y'}x\ldots\ [P].$$

La tangente del ángulo BAC será $\frac{BD}{AD}=\frac{y'}{x'}$; luego la ecuacion de la CF, que pasa por el punto $C\,(b,0)$ y es perpendicular á la AB, será

$$y=-\frac{x'}{y'}(x-b)\ (1)\ldots\ [Q].$$

Igualando las coordenadas de las dos ecuaciones $[P]$ y $[Q]$, y eliminando la y, tendremos

$$(b-x')x=(b-x)\,x',$$

de donde

$$x=x'.$$

Problema 3.° *Las rectas tiradas desde los vértices de un triángulo á los puntos medios de los lados opuestos se encuentran en un mismo punto.*

Fig. 57. Sea el triángulo ABC; BD, CF y AE las rectas tiradas desde los vértices del triángulo á los puntos medios de los lados opuestos; tomo por eje de abscisas uno de los lados AC del triángulo, y por eje de ordenadas la Ay pa-

---

(1) Para hallar esta ecuacion se tiene presente en la imaginacion ó en el papel la ecuacion $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$.

ralela á la BD. La cuestion se reduce á hallar la abscisa del punto de interseccion de las dos rectas AE y CF, y ver si esta abscisa es AD.

Sean x' é y' las coordenadas AD y BD del vértice B: las coordenadas del punto F serán evidentemente $\frac{x'}{2}$ é $\frac{y'}{2}$, y las del punto E serán $\frac{3x'}{2}$ é $\frac{y'}{2}$. El coeficiente angular de la recta AE es [55] $\frac{EH}{AH}=\frac{\frac{y'}{2}}{\frac{3x'}{2}}=\frac{y'}{3x'}$; y por consiguiente la ecuacion de la AE, que pasa por el orígen, es

$$y=\frac{y'}{3x'}x\ldots\ldots [M].$$

El coeficiente angular de la recta CF es [55] $\frac{FG}{AG-AC}=\frac{\frac{y'}{2}}{\frac{x'}{2}-2x'}=-\frac{y'}{3x'}$; y por consiguiente la ecuacion de la CF, que pasa por el punto C $(2x',0)$, es

$$y=-\frac{y'}{3x'}(x-2x')\ldots\ldots [N].$$

Igualando coordenadas entre las dos ecuaciones [M] y [N], eliminando la y, y despejando la x, se halla $x=x'$.

Nota. El punto O de interseccion de las tres rectas se llama el *centro de gravedad* del triángulo, y este punto se halla en cualquiera de las tres rectas á los $\frac{2}{3}$ de dicha recta distante del vértice; es decir que $OB=\frac{2}{3}BD$, $OA=\frac{2}{3}AE$, $OC=\frac{2}{3}CF$.

En efecto, $\qquad AO : AE :: AD : AH$,

y como $AD=\frac{2}{3}AH$, tambien $AO=\frac{2}{3}AE$. Igualmente se ve que $CO=\frac{2}{3}CF$. Tirando ahora la DK paralela á la CF, se halla con igual facilidad $BO=\frac{2}{3}BD$.

Teorema 4.° *El centro* O *del círculo circunscripto á un triángulo* ABC [Fig. 57*], *su centro de gravedad* G *y el punto* O' *de interseccion de las tres perpendiculares tiradas desde los vértices á los lados opuestos estan en línea recta; y la distancia* GO *entre los dos primeros puntos es mitad de la distancia* GO' *entre los dos segundos*.

Para demostrar este teorema, hallaremos primeramente la ordenada del punto O.

Siendo x' é y' las coordenadas del punto B, las del punto E son evidentemente $x'+\frac{b-x'}{2}$ é $\frac{y'}{2}$, ó $\frac{x'+b}{2}$ é $\frac{y'}{2}$. La tangente del ángulo BCx es [55] $\frac{BF}{AF-AC}=\frac{y'}{x'-b}$; y por consiguiente la ecuacion de la EO será

$$y-\frac{y'}{2}=\frac{b-x'}{y'}\left(x-\frac{x'+b}{2}\right).$$

La ecuacion de la OD es $x=\frac{b}{2}$; luego eliminando la x entre estas dos ecuaciones, y despejando la y, resultará

$$y \text{ ú } OD=\frac{y'}{2}+\frac{b-x'}{y'}\times-\frac{x'}{2}=\frac{y'}{2}-\frac{(b-x')x'}{2y'}=\frac{y'^2-bx'+x'^2}{2y'}.$$

Señalando las coordenadas del punto G, tendremos que $AK=AF+FK=x'+\frac{2}{3}DF=x'+\frac{2}{3}\left(\frac{b}{2}-x'\right)=\frac{x'+b}{3}$, $GK=\frac{BF}{3}=\frac{y'}{3}$. El coeficiente angular de la recta que pasa por estos dos puntos es [55]

$$\frac{GK-OD}{AK-AD}=\frac{\frac{y'}{3}-\frac{y'^2-bx'+x'^2}{2y'}}{\frac{x'+b}{3}-\frac{b}{2}}=\frac{3bx'-3x'^2-y'^2}{2x'y'-by'}.$$

Es fácil hallar la ecuacion de la AH, $y=\frac{b-x'}{y'}x$; luego $O'F=\frac{bx'-x'^2}{y'}$. El coeficiente angular de la recta GO' es

$$\frac{O'F-GK}{AF-AK}=\frac{\frac{bx'-x'^2}{y'}-\frac{y'}{3}}{x'-\frac{x'+b}{3}}=\frac{3bx'-3x'^2-y'^2}{2x'y'-by'}.$$

Resulta que la recta OG y la GO' tienen igual coeficiente angular; y como ademas pasan por un mismo punto G, estas dos rectas coinciden; ó lo que es igual, los tres puntos O, G y O' estan en línea recta.

Ahora los triángulos semejantes OGD y $BO'G$ nos dan la proporcion $$\frac{OG}{GO'}=\frac{GD}{GB};$$

y pues $GD=\frac{1}{2}GB$, tambien $OG=\frac{1}{2}GO'$.

Teorema 5.° *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto á dicho ángulo en dos partes proporcionales á los lados adyacentes al mismo.*

Fig. 58. Sea el triángulo ABC, y AD la bisectriz del ángulo A: tomemos por ejes de coordenadas los lados AC y AB. La ecuacion de la AD es evidentemente

$$y=x \ldots [K];$$

y si se quiere puede hallarse por medio de la ecuacion $y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}x$, pues actualmente $\theta=2\alpha$; luego $y=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}x=x$.

El coeficiente angular de la BC es [55] $\frac{BA}{-AC}=-\frac{c}{b}$; luego la ecuacion de la BC, que pasa por el punto C [60], será $$y=-\frac{c}{b}(x-b) \ldots [L].$$

Igualando las coordenadas entre las dos ecuaciones [K] y [L], y eliminando la x, será

$$y=-\frac{cy}{b}+c,$$

de donde $$y \text{ ó } DP=\frac{bc}{b+c}.$$

Los triángulos semejantes DPC y CBA nos dan la proporcion $$CD : CB :: DP : BA,$$

ó $$CD : CB-CD :: DP : BA-DP,$$

ó $$CD : BD :: \frac{bc}{b+c} : c-\frac{bc}{b+c} :: \frac{b}{b+c} : \frac{c}{b+c} :: b : c$$

Es decir, que la bisectriz AD divide al lado opuesto en dos partes proporcionales á los lados adyacentes.

Teorema 6.° *Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un mismo punto.*

Fig. 58*. Sea el triángulo ABC; AE, CF y BD las tres bisectrices: tomo un lado AC por eje de las x, y la paralela Ay á la BD por eje de las y. La cuestion está reducida á hallar la abcisa del punto de interseccion de las dos bisectrices AE y CF, y ver si esta abscisa es la AD.

Sean x' é y' las coordenadas del punto B: las coordenadas del punto E se hallarán del modo siguiente:

$$EI : BD :: EC : BC :: b : b+c;\ EI=\frac{by'}{b+c}$$

$$DI : DC :: BE : BC :: c : b+c,\ DI=\frac{(b-x')\,c}{b+c},$$

y por consiguiente $$AI=\frac{b(c+x')}{b+c}.$$

Hallemos ahora las coordenadas del punto F

$$FH : BD :: AF : AB :: b : a+b;\ FH=\frac{by'}{a+b},$$

$$AH : AD :: FH : BD :: \frac{by'}{a+b} : y';\ AH=\frac{bx'}{a+b}$$

La ecuacion de la AE es

$$y=\frac{EI}{AI}x=\frac{y'}{c+x'}x. \dots [T]$$

El coeficiente angular de la CF es $\dfrac{FH}{AH—AC}=\dfrac{\dfrac{by'}{a+b}}{\dfrac{bx'}{a+b}-b}$

$=\dfrac{by'}{bx'-ab-b^2}=\dfrac{y'}{x'-a-b}$. Luego la ecuacion de la CF es

$$y=\frac{y'}{x'-a-b}(x-b) \dots\ [V].$$

Igualando las coordenadas de las dos ecuaciones $[T]$ y $[V]$, y eliminando la y, tendremos

$$\frac{y'x}{c+x'}=\frac{y'(x-b)}{x'-a-b},$$

ó

$$\frac{x}{c+x'}=\frac{x-b}{x'-a-b},$$

ó

$$x(a+b+c)=b(c+x'),$$

de donde

$$x=\frac{b(c+x')}{a+b+c}.$$

Poniendo en lugar de x' su valor $\dfrac{bc}{a+c}$, será

$$x=\frac{b\left(c+\dfrac{bc}{a+c}\right)}{a+b+c}=\frac{bc(a+b+c)}{(a+c)(a+b+c)}=\frac{bc}{a+c}=x'.$$

NOTA. Ya se sabe que el punto de interseccion de las tres bisectrices es el centro del círculo inscripto en el triángulo.

Problema. *Hallar el área de un triángulo dadas las coordenadas rectangulares de sus tres vértices.*

Fig. 59. Sean x' é y' las coordenadas del vértice A, x'' é y'' las del vértice B, y x''' é y''' las del vértice C.

Considerando á la BC como la base, será la AD la altura: tenemos pues que hallar estas dos rectas en funcion de las coordenadas de los vértices.

Sabemos que $BC=\sqrt{(y''-y''')^2+(x''-x''')^2}$.

Para llegar á conocer la AD, hallaremos primeramente la ecuacion de la BC que es

$$y-y''=\frac{y'''-y''}{x'''-x''}(x-x''),$$

ó
$$y=\frac{y'''-y''}{x'''-x''}x+\frac{y''x'''-y'''x''}{x'''-x''}.$$

Hemos visto [58] que, siendo a el coeficiente angular y b la ordenada en el orígen de la recta BC, la distancia $AD=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{a^2+1}}$: como ahora $a=\frac{y'''-y''}{x'''-x''}$, y $b=\frac{y''x'''-y'''x''}{x'''-x''}$,

será
$$AD=\pm\frac{y'-\frac{y'''-y''}{x'''-x''}x'-\frac{y''x'''-y'''x''}{x'''-x''}}{\sqrt{\frac{(y'''-y'')^2}{(x'''-x'')^2}+1}},$$

ó
$$AD=\pm\frac{y'x'''-y'x''-y'''x'+y''x'-y''x'''+y'''x''}{\sqrt{(y'''-y'')^2+(x'''-x'')^2}}.$$

Por consiguiente el área S del triángulo será

$$S=\pm\frac{1}{2}(y'x'''-y'''x'+y''x'-y'x''+y'''x''-y''x'''),$$

debiendo tomar el signo conveniente para que este valor sea positivo.

LIBRO II.

Líneas de segundo órden.

CAPITULO I.

Método general de tangentes á las curvas planas algébricas.

59. Definicion general de la tangente á una curva.

Se llama *tangente* á una curva en uno de sus puntos la posicion que toma una secante, que pasa por este punto, cuando otro de sus puntos de interseccion con la curva coincide con el primero, en virtud del movimiento de la secante al rededor de este punto.

Fig. 60. Asi, si la secante SMM' se mueve al rededor del punto M, de manera que el punto M' se vaya acercando al punto M, hasta que llegue á coincidir con él, la posicion TM, que entonces toma la secante SMM', es la tangente á la curva en el punto M.

60. *Hallar la ecuacion de la tangente á una curva algébrica en un punto dado en la misma curva.*

Fig. 60. Siendo x' é y' las coordenadas del punto dado M, y a el coeficiente angular de la tangente, la ecuacion de esta recta será $$y-y'=a(x-x'),$$ en la que a es una incógnita. La cuestion está pues reducida á hallar el valor del coeficiente angular a en funcion de las coordenadas x' é y' del punto dado M.

La ecuacion general de las curvas algébricas es
$$f(x,y)=Ay^m+(Bx+C)y^{m-1}+(Dx^2+Ex+F)y^{m-2}+\ldots\ldots+(ax^m+bx^{m-1}+\ldots\ldots+k)=0.$$

Tiremos por el punto de contacto M una secante SMM', y llamemos $x'+h$, $y'+k$ á las coordenadas del punto M': el coeficiente angular de la secante sera [55] $\dfrac{k}{h}$.

Por corresponder los dos puntos M y M' á la curva, tendremos
$$f(x',y')=0\,,\;\; f(x'+h,y'+k)=0.$$

Desenvolviendo el primer miembro de esta última ecuacion por el teorema de Taylor para las funciones de dos variables

[*Nota primera al fin de la Geometría analítica*], y observando que $f(x',y')=0$, será

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x'}\cdot h+f''_{x'^2}\cdot\dfrac{h^2}{2} \\ f'_{y'}\cdot k+f''_{xy}\cdot hk \\ \quad +f''_{y'^2}\,\dfrac{k^2}{2}+\text{etc.} \end{array}\right\}=0,$$

ó $$k\left(f'_{y'}+f''_{x'y'}\,h+f''_{y'^2}\cdot\frac{k}{2}\right)+h\left(f'_{x'}+f''_{x'^2}\cdot\frac{h}{2}+\ldots\right)=0,$$

de donde $$\frac{k}{h}=-\frac{f'_{x'}+f''_{x'^2}\cdot\dfrac{h}{2}+\ldots}{f'_{y'}+f''_{x'y'}\cdot h+f''_{y'^2}\cdot\dfrac{k}{2}+\ldots}.$$

Ahora, es evidente que, á medida que el punto M' se vaya acercando al punto M, k y h irán disminuyendo, y se acercarán á cero cuanto se quiera; luego en el caso en que el punto M' llegue á coincidir con el punto M, ó en que la secante pase á ser tangente, k y h serán iguales á cero, pero su razon toma el valor determinado $-\dfrac{f'_{x'}}{f'_{y'}}$, coeficiente angular de la tangente, ó valor de a.

Por consiguiente la ecuacion de la tangente será

$$y-y'=-\frac{f'_x}{f'_y}(x-x').$$

(61. Esta ecuacion prueba que por un punto de una curva no se la puede tirar mas que una tangente; pues una sola ecuacion de primer grado no puede corresponder á dos rectas diferentes. Esto se deduce tambien de la definicion de la tangente; pues la secante no puede tener dos posiciones diferentes en el momento en que dos de sus puntos de interseccion con la curva coinciden.)

62. Cuando la ecuacion de la curva tiene la forma $y=f(x)$, el coeficiente angular de la tangente toma una forma mas sencilla.

En efecto, la ecuacion propuesta puede escribirse así:

$$y-f(x)=0,$$

y por consiguiente, para las coordenadas del punto de contacto, tendremos la relacion

$$y'-f(x')=0.$$

La derivada con respecto á x' es $-f'(x')$, y la derivada con respecto á y' es 1; luego el coeficiente angular de la tangente es $\frac{f'(x')}{1}=f'(x')$; y la ecuacion de la tangente

$$y-y'=f'(x').(x-x'),$$

que es muy fácil obtenerla directamente.

En efecto, tenemos, por hallarse el punto M' sobre la curva,

$$y'+k=f(x'+h);$$

ó, desenvolviendo el segundo miembro por el teorema de Taylor,

$$y'+k=f(x')+f'(x').h+f''(x').\frac{h^2}{2}+\ldots\ldots$$

Hallándose el punto M sobre la curva, tenemos

$$y'=f(x');$$

luego la ecuacion anterior se reduce á

$$k=f'(x').h+f''(x').\frac{h^2}{2}+\ldots\ldots$$

De aquí resulta

$$\frac{k}{h}=f'(x')+f''(x').\frac{h}{2}+\ldots\ldots;$$

luego, cuando k y h se reducen á cero, que es cuando la secante pasa á ser tangente, su coeficiente angular será $f'(x')$; y por tanto la ecuacion de la tangente es

$$y-y'=f'(x').(x-x').$$

63. Apliquemos á las curvas de segundo grado la fórmula de la ecuacion de la tangente.

Tenemos

$$f(x',y')=Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F,$$

$$f'_{x'}=By'+2Cx'+E,$$

$$f'_{y'}=2Ay'+Bx'+D;$$

luego la ecuacion de la tangente será

$$y-y'=-\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D}(x-x').$$

64. Hallemos directamente la ecuacion general de la tangente á las curvas de segundo grado.

Fig. 60. Sea a el coeficiente angular de la tangente á una curva de segundo grado en el punto $M(x',y')$. La ecuacion de la tangente será

$$y-y'=a(x-x):$$

se trata pues de hallar a.

Tiro por el punto M la secante SMN, y sean las coordenadas del punto N, $x'+h$ é $y'+k$: tendremos, por pertenecer este punto N á la curva cuya ecuacion es

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

la relacion

$$A(y'+k)^2+B(x'+h)\,(y'+k)+C(x'+h)^2+D(y'+k)+$$
$$E(x'+h)+F=0$$

Desenvolviendo este primer miembro, resulta [*Nota primera al fin de la Geom. anal.*]

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+2Ak & y'+2Ch & x'+Ak^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad +Bh & \quad +Bk & \quad +Bhk \\ \qquad\qquad\qquad\quad +D & \quad +E & \quad +Ch^2 \\ & & \quad +Dk \\ & & \quad +Eh \\ & & \quad +F \end{array}\right\}=0 \ldots \quad [1]$$

Por hallarse el punto M sobre la curva, es

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F=0;$$

luego la ecuacion anterior queda reducida á

$$\left.\begin{array}{l|l|l} 2Ak & y'+2Ch & x'+Ak^2 \\ +Bh & \quad +Bk & \quad +Bhk \\ & & \quad +Ch^2 \\ & & \quad +Dk \\ & & \quad +Eh \end{array}\right\}=0.$$

Separando los factores comunes k y h, tendremos

$$k(2Ay'+Bx'+Ak+Bh+D)+h(By'+2Cx'+Ch+E)=0,$$

de donde

$$\frac{k}{h}=-\frac{By'+2Cx'+Ch+E}{2Ay'+Bx'+Ak+Bh+D}.$$

Supongamos ahora que la secante se mueva alrededor del punto M, de manera que el punto N se acerque indefinidamente al punto M, en cuyo caso k y h van acercándose indefinidamente á cero: cuando esto último se verifique, pasará la secante á ser tangente; y por tanto el coeficiente angular de la tangente será

$$a=-\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D}.$$

Luego la ecuacion de la tangente á las curvas de segundo grado será

$$y-y'=-\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D}(x-x'),$$

ó mas brevemente

$$y-y'=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}(x-x').$$

65. Resolvamos ahora algunos problemas.

Problema 1.º *Tirar una tangente á una curva, cuya ecuacion se conoce, por un punto dado en la misma curva.*

Teniendo la ecuacion de la curva, se tendrá por consiguiente la de la tangente: por medio de esta ecuacion se hallará un punto de la tangente, diferente del punto de contacto (debe preferirse el punto en que la tangente corta al eje de las x ó al eje de las y), y juntando dicho punto y el de contacto por medio de una recta, esta será la tangente pedida.

Vemos que para resolver este problema, no se necesita que la curva esté construida; basta que se conozca la posicion de los ejes de coordenadas, y la ecuacion de la curva con respecto á estos ejes.

66. Problema 2.º *Desde un punto dado tirar una tangente á una curva, conociendo su ecuacion y la posicion de los ejes de coordenadas, estando ó no construida dicha curva.*

Sean α y β las coordenadas del punto dado, x' é y' las del punto de contacto, que actualmente son las incógnitas del problema. La ecuacion de la curva es

$$f(x,y)=0,$$

y la de la tangente á esta curva en el punto (x', y')

$$y-y'=-\frac{f'_x}{f'_{y'}}(x-x').$$

Las coordenadas α y β del punto dado deben verificar esta ecuacion; luego

$$\beta-y'=-\frac{f'_{x'}}{f'_y}(\alpha-x') \quad\ldots\quad [1];$$

y las coordenadas del punto de contacto deben verificar la ecuacion de la curva; por tanto

$$f(x',y')=0 \quad \ldots [2]$$

Estas dos ecuaciones, que contienen á las dos incógnitas x' é y', nos darán los valores de estas incógnitas; y se podrán tirar á la curva desde el punto (α, β) tantas tangentes, como soluciones tengan dichas dos ecuaciones.

Para resolver este problema geométricamente, suponiendo que la curva sea de segundo grado y esté construida, observaremos en primer lugar que la ecuacion

$$\beta - y = -\frac{f'_x}{f'_y}(\alpha - x) \qquad [3]$$

representa una línea que pasa por los puntos de contacto; pues poniendo en lugar de x é y las coordenadas x' é y' de cualquiera de dichos puntos, resulta la igualdad cierta [1]. La ecuacion [3], reemplazando f'_x y f'_y por sus valores $2Cx+By+E$ y $2Ay+Bx+D$, quitando el denominador y pasando todo al primer miembro, es

$$\beta(2Ay+Bx+D)+\alpha(2Cx+By+E)-2Ay^2-2Bxy-2Cx^2-Dy-Ex=0:$$

sumando ordenadamente esta igualdad con la

$$2Ay^2+2Bxy+2Cx^2+2Dy+2Ex+2F=0,$$

resulta $\beta(2Ay+Bx+D)+\alpha(2Cx+By+E)+Dy+Ex+F=0$, ecuacion de primer grado. Queda pues demostrado que la ecuacion [3] representa una recta que pasa por los puntos de contacto. Luego construyendo esta recta, los puntos en que corte á la curva, serán los puntos de contacto pedidos

Apliquemos esta teoría al círculo

67. Tomando por ejes de coordenadas dos diámetros perpendiculares, la ecuacion del círculo es

$$y^2+x^2=R^2;$$

por consiguiente, hallándose el punto de contacto en la circunferencia, será

$$y'^2+x'^2=R^2 \quad \ldots [4]$$

Tenemos ahora $\qquad f'_{x'}=2x',\ f'_{y'}=2y';$

luego el coeficiente angular de la tangente al círculo, que, por ser los ejes de coordenadas rectangulares, es la tangente del ángulo que la tangente forma en el eje de las x, es

$$-\frac{2x'}{2y'}=-\frac{x'}{y'};$$

y por tanto la ecuacion de la tangente al círculo será

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'),$$

ó
$$yy'-y'^2=-xx'+x'^2,$$
ó
$$yy'+xx'=y'^2+x'^2,$$
ó
$$yy'+xx'=R^2.$$

Siendo α y β las coordenadas del punto dado, será

$$\beta y'+\alpha x'=R^2 \ldots\ldots [5]$$

Esta ecuacion y la ecuacion [4] nos darán los valores de las dos incógnitas x' é y'.

Para resolver estas dos ecuaciones, despejaremos en la ecuacion [5] una de las incógnitas, y' por ejemplo; será

$$y'=\frac{R^2-\alpha x'}{\beta},$$

y sustituyendo su valor en la ecuacion [4], resulta

$$x'^2(\alpha^2+\beta^2)-2R^2\alpha x'+R^4-R^2\beta^2=0,$$

de donde

$$x'=\frac{R^2\alpha\pm R\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-R^2}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

El valor correspondiente de y' se hallará en seguida por la ecuacion $y'=\dfrac{R^2-\alpha x'}{\beta}$.

Estos valores de x' serán reales, y por consiguiente tambien los valores correspondientes de y', si el punto dado está fuera del círculo, pues entonces $\alpha^2+\beta^2-R^2>0$; y por tanto desde un punto esterior al círculo se le pueden tirar dos tangentes.

Si el punto dado está en la circunferencia, es $\alpha^2+\beta^2-R^2=0$, y por consiguiente los valores de x' é y' son entonces $x'=\dfrac{R^2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=\alpha$, $y'=\beta$: luego por un punto dado en la circunferencia de un círculo no se puede tirar al círculo mas que una tangente.

Finalmente, si el punto dado está dentro del círculo, $\alpha^2+\beta^2-R^2<0$, y los valores de x' é y' imaginarios; luego desde un punto interior á un círculo no se le puede tirar ninguna tangente. Todo lo cual está acorde con lo que sabíamos ya.

La construccion geométrica de estos valores de x, cuando el punto dado está fuera del círculo, seria bastante complicada.

68. Consideremos en la ecuacion

$$\beta y'+\alpha x'=R^2$$

á x' é y como coordenadas variables: quitemos con este objeto, para mayor claridad, los acentos, esto es, tomemos la ecuacion

$$\beta y+\alpha x=R^2,$$

y construyamos la recta representada por esta ecuacion, recta que sabemos pasa por los dos puntos de contacto. Haciendo sucesivamente $x=0$, $y=0$, tendremos $y=\frac{R^2}{\beta}$, $x=\frac{R^2}{\alpha}$. Construidas estas dos terceras proporcionales, y tomándolas respectivamente sobre el eje de las y, y sobre el eje de las x, se tendrán los puntos en que la recta que pasa por los puntos de contacto, corta á los ejes; tirando en seguida esta recta, se tendrán los puntos de contacto.

(*Fig.* 61. Tambien se puede en este problema hallar por el cálculo la misma construccion que se sigue en la geometría elemental para tirar una tangente al círculo desde un punto dado fuera.

En efecto, sea M el punto dado: tomemos por eje de abscisas una recta Ox que pase por este punto, y por eje de ordenadas un diámetro perpendicular al eje de abscisas; y sea α la abscisa del punto M. La ecuacion de la tangente es $yy'+xx'=R^2$; luego, como el punto M se halla en la tangente, será $\alpha x'=R^2$, de donde $x'=\frac{R^2}{\alpha}$; es decir, que x' es una tercera proporcional á α y R. Para construir este valor de x', nos serviremos, porque aquí conviene, del teorema de que *cada cateto de un triángulo rectángulo es medio proporcional entre la hipotenusa y segmento adyacente*. Considerando, pues, á $OM=\alpha$ como diámetro, describo un semicírculo OTM, tirando ahora la OT, y la ordenada TH, será evidentemente, en virtud de dicho teorema, OH el valor de x; y por tanto el punto T será un punto de contacto. Como del mismo modo puede hallarse el otro punto de contacto T', resulta, para la solucion geométrica de este problema, la misma construccion que se sigue en la geometría elemental.)

69. Problema 3.° *Tirar á una curva una tangente cuya direccion sea dada,* ó lo que es igual, *una tangente paralela á una recta dada.*

Sea $f(x, y)=0$ la ecuacion de la curva, a' el coeficiente angular de la recta dada. Como la tangente debe ser paralela á la recta dada, será

$$-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}=a' \ldots\ldots [K],$$

y por hallarse el punto (x', y') en la curva, será

$$f(x', y')=0 \ldots\ldots [L].$$

De las dos ecuaciones $[K]$ y $[L]$ se deducirán los valores de las dos incógnitas x' é y'.

Nota. La resolucion de este problema tampoco exige que la curva esté construida; basta que se conozca su ecuacion y la posicion de los ejes de coordenadas.

70. *Fig.* 62. Se llama *normal* á una curva la perpendicular MN á la tangente MT en el punto de contacto M.

Problema. *Hallar la ecuacion de la normal á una curva.*

Supongamos en primer lugar, que los ejes de coordenadas sean rectangulares; y llamemos a' á la tangente del ángulo MNx que forma la normal MN con el eje Ox: tendremos

[56] $a'\times-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}=-1$, de donde $a'=\frac{f'_{y'}}{f'_{x'}}$. Conociendo el punto (x', y') por donde pasa la normal y su coeficiente angular, su ecuacion será

$$y-y'=\frac{f'_{y'}}{f'_{x'}}(x-x').$$

(Supongamos ahora que los ejes sean oblicuángulos: sabemos que entre los coeficientes angulares a y a' de dos rectas perpendiculares existe la relacion

$$1+aa'+(a+a')\cos\theta=0,$$

de donde $$a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}$$

ó, puesto que actualmente es $a=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}$, será

$$a'=\frac{1-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}\cos\theta}{-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}+\cos\theta},$$

ó $$a'=\frac{f'_{x'}\cos\theta-f'_{y'}}{f'_{y'}\cos\theta-f'_{x'}};$$

y por consiguiente la ecuacion de la normal es

$$y-y'=\frac{f'_{x'}\cos\theta-f'_{y'}}{f'_{y'}\cos\theta-f'_{x'}}(x-x').$$

CAPITULO II.

Asíntotas de las curvas.

---

71. *Asíntota* de una curva, que tiene una ó varias ramas infinitas, es una recta que puede acercarse á la curva indefinidamente, sin llegar nunca á alcanzarla.

Fig. 63. Asi, si la diferencia de las ordenadas MP y NP va disminuyendo y tiene por límite 0, creciendo x indefinidamente, la distancia MQ entre el punto M de la curva y la recta BQ, irá tambien disminuyendo, y tendrá con mayor razon por límite cero; luego la recta BQ será asíntota de la curva.

72. Tratemos de hallar, dada la ecuacion de una curva algébrica ó trascendente que tenga una ó varias ramas infinitas, las ecuaciones de sus asíntotas.

Supongamos en primer lugar que las asíntotas, cuyas ecuaciones queremos hallar, no sean paralelas al eje de las y: sus ecuaciones tendrán la forma

$$y=cx+d;$$

y en esta ecuacion c y d serán cantidades finitas é incógnitas del problema.

Sean x é y las coordenadas de un punto cualquiera M de la curva, V la diferencia MN de las ordenadas de la curva y la asíntota, correspondiente á una misma abscisa; V será una cantidad variable, que disminuirá, creciendo x positiva ó negativamente, y que cuando $x=\pm\infty$, será 0.

Tenemos $$MP=NP+MN;$$
y pues $NP=cx+d$, y $MN=V$, será
$$y=cx+d+V \ldots [R],$$
ecuacion de la cual deduciremos los valores de c y d, en virtud de que V es cero, cuando $x=\pm\infty$.

Dividamos los dos miembros de esta ecuacion por x, y tendremos $$\frac{y}{x}=c+\frac{d+V}{x}:$$
demos ahora á x el valor $\pm\infty$; y como entonces $V=0$, y por ser d cantidad finita, es $\frac{d}{\pm\infty}=0$, será, representando por $lím. \frac{y}{x}$ el valor que toma $\frac{y}{x}$ cuando $x=\pm\infty$,
$$lím. \frac{y}{x}=c.$$

Luego el coeficiente angular de la asíntota es el valor que toma $\frac{y}{x}$ cuando $x=\pm\infty$.

Habiendo hallado c, para hallar d, la despejaremos en la ecuacion [R], y tendremos
$$d=y-cx-V;$$
y si ahora hacemos $x=\pm\infty$, será $V=0$, y por consiguiente
$$d= lím. (y-cx).$$

Luego la ordenada en el orígen de la asíntota es el valor que toma $y-cx$, cuando $x=\pm\infty$.

Halladas las asíntotas de la curva no paralelas al eje de las y, las asíntotas paralelas á este eje se obtendrán, hallando los valores finitos $\alpha, \beta, \ldots$ de x, correspondientes á valores infinitos de y; y entonces las ecuaciones de las asíntotas paralelas al eje de las y serán $x=\alpha$, $x=\beta$, ...

73. Tambien se pueden hallar las asíntotas paralelas al eje de las y, hallando las ecuaciones de todas las asíntotas no paralelas al eje de las x; y para esto, se permutarán las letras x é y en las fórmulas del caso general, es decir,

se hallarán *lím.* $\frac{x}{y}$, y en seguida *lím.* $(x-cy)$, cuando $y=\pm\infty$; y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la asíntota $x=cy+d$, se tendrán todas las asíntotas de la curva no paralelas al eje de las x.

74. *Reglas para hallar el coeficiente angular* lím. $\frac{y}{x}$, *y la ordenada en el orígen* lím. (y—cx) *de las asíntotas en las curvas algébricas.*

La ecuacion general del grado m de las curvas algébricas, reuniendo todos los términos del grado m, todos los del grado $m-1$, todos los del grado $m-2$, etc., puede escribirse así:

$$Ax^m+Bx^{m-1}y+Cx^{m-2}y^2+\ldots+A'x^{m-1}+B'x^{m-2}y+C'x^{m-3}y^2+\ldots$$
$$+A''x^{m-2}+B''x^{m-3}y+C''x^{m-4}y^2+\ldots+\text{etc.}=0,$$

ó, separando en los primeros x^m como si fuese factor comun, en los segundos x^{m-1}, en los terceros x^{m-2}, etc., dicha ecuacion será

$$x^m\left(A+B\frac{y}{x}+C\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots\right)+x^{m-1}\left(A'+B'\frac{y}{x}+C'\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots\right)+$$
$$x^{m-2}\left(A''+B''\frac{y}{x}+C''\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots\right)+\text{etc.}=0,$$

ó haciendo

$$A+B\frac{y}{x}+C\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots=F\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$A'+B'\frac{y}{x}+C'\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots=f\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$A''+B''\frac{y}{x}+C''\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$
etc.,

la ecuacion propuesta será

$$x^mF\left(\frac{y}{x}\right)+x^{m-1}f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{m-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots=0 \quad [1];$$

y partiendo esta ecuacion por x^m, tendremos

$$F\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots=0$$

Haciendo ahora $x=\pm\infty$, en cuyo caso $\frac{y}{x}$ toma el valor finito $lím. \frac{y}{x}$ ó c, será

$$F(c)=0,$$

ó

$$A+Bc+Cc^2+\ldots=0,$$

ecuacion que nos dará los valores de c.

Luego, *para hallar los valores del coeficiente angular de las asíntotas de una curva algébrica, se hará* x=1, y=c *en la suma de todos los términos del grado* m, *se igualará en seguida á cero esta suma, y los valores de* c *que resulten, serán los coeficientes angulares de las asíntotas.*

Para hallar d ó $lím. (y-cx)$, hagamos $y-cx=v$, de donde

$$\frac{y}{x}=c+\frac{v}{x}$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta [1], tendremos

$$x^mF\left(c+\frac{v}{x}\right)+x^{m-1}f\left(c+\frac{v}{x}\right)+x^{m-2}\varphi\left(c+\frac{v}{x}\right)+\ldots=0;$$

desenvolviendo estas funciones por el teorema de Taylor, será

$$\left.\begin{array}{l} x^m\ F(c)+x^m\ F'(c)\,.\,\frac{v}{x}+x^m\ \frac{F''(c)}{2}\left(\frac{v}{x}\right)^2+\ldots\ldots \\ +x^{m-1}\ f(c)+x^{m-1}\ f'(c)\,.\,\frac{v}{x}+x^{m-2}\ \frac{f''(c)}{2}\left(\frac{v}{x}\right)^2+\ldots\ldots \\ +x^{m-2}\ \varphi(c)+x^{m-2}\ \varphi'(c)\ \frac{v}{x}+x^{m-2}\ \frac{\varphi''(c)}{2}\left(\frac{v}{x}\right)^2+\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}=0.$$

Como ya hemos visto que $F(c)$ es cero, esta ecuacion se reduce á

$$\left.\begin{array}{l} +x^{m-1}\ F'(c)\,.\,v+x^{m-2}\ \frac{F''(c)}{2}\,v^2+\ldots\ldots \\ +x^{m-1}\ f(c)\quad +x^{m-2}\ f'(c)\,.\,v+\ldots\ldots \\ +x^{m-2}\ \varphi(c)\quad +x^{m-3}\ \varphi'(c)\,.\,v+\ldots\ldots \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}=0,$$

é, partiendo por x^{m-1},

$$\left.\begin{array}{l} F'(c)\cdot v+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{F''(c)}{2}\cdot v^2+\cdots\cdots \\ +f(c)\quad+\dfrac{1}{x}\cdot f'(c)\quad v+\cdots\cdots \\ +\dfrac{1}{x}\,\varphi(c)+\dfrac{1}{x^2}\cdot\varphi'(c)\quad v+\cdots\cdots \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}=0.$$

Haciendo ahora $x=\pm\infty$, en cuyo caso v toma el valor finito d, será

$$F'(c)\cdot d+f(c)=0,$$

de donde

$$d=-\frac{f(c)}{F'(c)}=-\frac{A'+B'c+C'c^2+\ldots}{B+2Cc+\ldots\ldots}$$

Luego *para hallar los valores de la ordenada en el orígen de las asíntotas de una curva algébrica, se hace (en la suma de los términos del grado* m *y del grado* m—1) x=1, y=a, *se parte la segunda cantidad por la derivada de la primera, y se sustituyen en esta espresion, cambiada de signo, los diferentes valores de* c: *los cocientes que resulten, son los valores de la ordenada en el orígen de las asíntotas.*

Ejemplo 1.° *Hallar las asíntotas de la curva representada por la ecuacion*

$$y^2(x+a)-x^3+(a+b)x^2-abx=0.$$

Para hallar el coeficiente angular c, haremos $x=1$, $y=c$ en todos los términos de tercer grado, y tendremos, igualando á cero el resultado, la ecuacion

$$c^2-1=0,$$

de donde

$$c=\pm1.$$

Para hallar d, tendremos

$$d=-\frac{ac^2+a+b}{2c}.$$

Sustituyendo sucesivamente los dos valores 1 y —1 de c, tendremos los dos correspondientes de d, á saber:

$$1.^\circ\ d=-\frac{a+a+b}{2}=-\frac{2a+b}{2},$$

$$2.^\circ\ d=-\frac{a+a+b}{-2}=\frac{2a+b}{2}.$$

Luego la curva tiene dos asíntotas no paralelas al eje de las y, cuyas ecuaciones son

$$y=x-\frac{2a+b}{2},\ y=-x+\frac{2a+b}{2}.$$

Veamos ahora, si la curva tiene alguna asíntota paralela al eje de las y.

Para esto, partamos la ecuacion por la potencia mas alta de y, que en este caso es y^2, y tendremos

$$x+a-\frac{x^3}{y^2}+\frac{(a+b)x^2}{y^2}-\frac{abx}{y^2}=0.$$

Como ninguna de las tres asíntotas de la curva es paralela al eje de las x, se pudieran hallar las tres, obteniendo los valores de $c=lím.\ \frac{x}{y}$, $d=lím.\ (x-cy)$, y sustituyendo los valores de estos coeficientes en la ecuacion $x=cy+d$.

Efectuemos este cálculo.

Para hallar $c=lím.\ \frac{x}{y}$, haremos $x=c$, $y=1$ en la suma de los términos de tercer grado de la ecuacion, y tendremos $c-c^3=0$, de donde $c=0$, $c=1$, $c=-1$.

Para hallar los valores correspondientes de d, hagamos en los términos de segundo grado $x=c$, $y=1$, y el valor de d será $d=-\frac{f(c)}{F'(c)}=-\frac{a+ac^2+bc^2}{1-3c^2}$: sustituyendo ahora los valores de c, los correspondientes de d serán

$$d=-a,\ d=\frac{2a+b}{2},\ d=-\frac{2a+b}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $x=cy+d$, resultarán las de las tres asíntotas:

$$x=-a,\ x=y+\frac{2a+b}{2},\ x=-y+\frac{2a+b}{2},$$

que son las mismas que las halladas antes.

Ejemplo 2.° *Hallar las asíntotas de las líneas de segundo órden.*

La ecuacion general de las líneas de segundo órden es

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Para hallar c, haremos en los términos de segundo grado $y=c$, $x=1$, y tendremos

$$F(c)=Ac^2+Bc+C,$$

é igualando á 0 esta espresion, y despejando c, será

$$c=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Para hallar d, haremos en los términos de primer grado $y=c$, $x=1$, y tendremos $f(c)=Dc+E$; luego, segun la fórmula $d=-\frac{f(c)}{F'(c)}$, tendremos $d=-\frac{Dc+E}{2Ac+B}$.

Sustituyendo en esta espresion sucesivamente los dos valores de c, se hallarán los dos correspondientes de d; pero, para abreviar esta sustitucion, efectuemos primeramente la particion de $Dc+E$ por $2Ac+B$, y tendremos

$$d=-\frac{D}{2A}+\frac{BD-2AE}{2AB+4A^2c}.$$

Sustituyendo ahora el primer valor de c, que es $\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, resulta

$$d=-\frac{D}{2A}-\frac{2AE-BD}{2A\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Sustituyendo el segundo valor de c, que es $\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$,

resulta $$d=-\frac{D}{2A}+\frac{2AE-BD}{2A\sqrt{B^2-4AC}}.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las asíntotas de las líneas de segundo órden son:

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x-\frac{D}{2A}-\frac{2AE-BD}{2A\sqrt{B^2-4AC}},\\ y&=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}x-\frac{D}{2A}-\frac{2AE-BD}{2A\sqrt{B^2-4AC}}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ [M]$$

Estas ecuaciones de las asíntotas de las líneas de segundo órden nos dicen, que si $B^2-4AC<0$, esto es, si la ecuacion representa una elipse (1), el coeficiente angular y la ordenada en el orígen son imaginarios, y por tanto la elipse no tiene asíntotas; que si $B^2-4AC=0$, esto es, si la curva es una parábola, la ordenada en el orígen es infinita, y por tanto la parábola tampoco tiene asíntotas. Finalmente, si $B^2-4AC>0$, es decir, si la curva es una hipérbola, los dos valores del coeficiente angular y los dos de la ordenada en el orígen son reales, y por lo mismo la hipérbola tiene dos asíntotas.

Veamos si la hipérbola tiene, además de estas dos asíntotas, alguna otra que sea paralela al eje de las y.

La ecuacion general de segundo grado con dos variables puede escribirse asi:

$$Ay^2+(Bx+D)y+(Cx^2+Ex+F)=0,$$

que, dividiéndola por y^2, será

$$A+(Bx+D)\frac{1}{y}+(Cx^2+Ex+F)\frac{1}{y^2}=0;$$

y haciendo $y=\pm\infty$, resulta $A=0$: luego la hipérbola no tiene mas asíntotas que las dos representadas por las ecuaciones [M]; y ninguna de ellas será paralela al eje Oy, mientras exista en la ecuacion de la curva el término Ay^2.

Nota. Hemos hallado las ecuaciones de las asíntotas de las líneas de segundo órden, determinando las espresiones $c=lím.\,\frac{y}{x}$, $d=lím.\,(y-cx)$, y sustituyendo estos valores en la ecuacion $y=cx+d$. Pero pudiéramos haber hallado los valores de $c=lím.\,\frac{x}{y}$, $d=lím\,(x-cy)$, y sustituir sus valores en la ecuacion $x=cy+d$. Las ecuaciones de las asíntotas, que asi hubiésemos hallado, hubieran sido necesariamente las mismas que las halladas ya; pero como del nuevo cálculo al efectuado no hay mas diferencia que la permutacion de las letras x é y, A y C, D y E, efectuando esta per-

(1) Mas adelante veremos que, cuando la ecuacion de segundo grado representa una curva [48], y es $B^2-4AC<0$, la curva es una elipse; si $B^2-4AC=0$, representa una parábola; y si $B^2-4AC>0$, una hipérbola: lo decimos desde ahora, no por necesidad, sino para fijar mejor las ideas.

mutacion en las ecuaciones halladas de las asíntotas, tendremos las ecuaciones que nos hubiera dado el nuevo cálculo, á saber:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}y-\frac{E}{2C}-\frac{2CD-BE}{2C\sqrt{B^2-4AC}},\\ x&=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2C}y-\frac{E}{2C}+\frac{2CD-BE}{2C\sqrt{B^2-4AC}}.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ [N]$$

Las ecuaciones [M] y [N] de las asíntotas de la hipérbola pueden escribirse asi:

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(\sqrt{B^2-4AC}\,.\,x+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right),$$

$$x=-\frac{B}{2C}y-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left(\sqrt{B^2-4AC}\,.\,y+\frac{BE-2CD}{\sqrt{B^2-4AC}}\right).$$

Resolviendo la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

primeramente con respecto á y, y despues con respecto á x, tendremos

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\,x^2+2(BD-2AE)\,x+D^2-4AF},$$

$$x=-\frac{B}{2C}y-\frac{E}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)\,y^2+2(BE-2CD)\,y+E^2-4CF}.$$

75. *Por consiguiente se hallarán brevemente las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola, cuando la ecuacion esté resuelta con respecto á cualquiera de las variables cuyo cuadrado entre en la ecuacion primitiva, reemplazando el radical por el binomio que resulta estrayendo la raiz cuadrada del primer término del trinomio que esté bajo del radical, y dividiendo en seguida el segundo término del mismo trinomio por el duplo de esta raiz.*

76. Esta regla no puede aplicarse cuando en la ecuacion faltan los dos cuadrados en y^2 y en x^2, en cuyo caso la ecuacion de la curva tiene la forma

$$Bxy+Dy+Ex+F=0$$

Pero siguiendo el método general, se hallará fácilmente que las ecuaciones de las asíntotas son actualmente

$$x=-\frac{D}{B},\ y=-\frac{E}{B};$$

luego en este caso las dos asíntotas de la hipérbola son paralelas á los ejes de coordenadas.

77. Nota. Sucede á veces que el valor de d se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$: entonces, aunque pudiera hallarse una regla general para determinar el valor de d, es preferible hacer $y-cx=v$ ó $y=cx+v$, introducir este valor en la ecuacion propuesta, y ver en seguida, partiendo por la potencia mas alta x, cuál es el valor de v correspondiente al infinito de x.

Ejemplos 1.º Sea la ecuacion

$$xy^2+ay^2-a^2x+a^3=0.$$

Para hallar c, haremos en los términos de tercer grado $x=1$, $y=c$, y tendremos $c^2=0$, de donde $c=0$.

Para hallar d, haremos en los términos de segundo grado $y=c$, $x=1$, y tendremos ac^2 que es 0; y como la derivada $2c$ de la cantidad c^2 es tambien 0, el valor de d se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$. Para hallar, pues, el valor de d, haremos $y=cx+v$, ó, puesto que $c=0$, será $y=v$; y hallaremos el valor que toma v para $x=\pm\infty$. Tendremos

$$xv^2+av^2-a^2x+a^3=0,$$

y partiendo por la potencia mas alta de x, que ahora es x, será

$$v^2+\frac{av^2}{x}-a^2+\frac{a^3}{x}=0,$$

y haciendo $x=\pm\infty$, en cuyo caso v toma el valor finito d, será

$$d^2-a^2=0,\ d=\pm a;$$

luego sustituyendo los valores de c y d en la ecuacion $y=cx+d$, tendremos las dos ecuaciones de las asíntotas

$$y=a,\ y=-a,$$

que son paralelas al eje de las x.

Veamos si la curva representada por la ecuacion propuesta tiene alguna asíntota paralela al eje de las y: para esto, partiremos por la potencia mas alta de la incógnita, que ahora es y^2, y tendremos

$$x+a-\frac{a^2x}{y^2}+\frac{a^3}{y^2}=0,$$

y haciendo $y=\pm\infty$, es $x+a=0$, ó $x=-a$; luego la curva tiene una asíntota paralela al eje de las y.

Ejemplo 2.º Sea la ecuacion

$$(y^2-x^2)^2+y^2+x^2-1=0,$$

ó
$$y^4-2y^2x^2+x^4+y^2+x^2-1=0.$$

Para hallar c, tenemos la ecuacion

$$c^4-2c^2+1=0,\ c^2=1,\ c=\pm 1$$

Para hallar d, tenemos $f(c)=0$, $F'(c)=4c^3-4c=0$ Luego d toma la forma $\frac{0}{0}$.

Para hallar su verdadero valor, haremos $y=\pm x+v$, y sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, tendremos

$$(x^2\pm 2vx+v^2-x^2)^2+x^2\pm 2vx+v^2+x^2-1=0,$$

ó
$$4v^2x^2\pm 4v^3x+v^4+2x^2\pm 2vx+v^2-1=0.$$

Partiendo por la potencia mas alta de x, que es x^2, será

$$4v^2\pm\frac{4v^3}{x}+\frac{v^4}{x^2}+2\pm\frac{2v}{x}+\frac{v^2-1}{x^2}=0,$$

y haciendo ahora $x=\pm\infty$, y por consiguiente $v=d$, será

$$4d^2+2=0,$$

de donde $d=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$; es decir, que los valores de d son imaginarios, y por tanto la curva no tiene asíntotas que prolongadas encuentren al eje de las y.

Veamos ahora si la curva tiene alguna asíntota paralela al eje de las y.

Partamos la ecuacion por la potencia mas alta de y, que es y^4, y tendremos

$$1-\frac{2x^2}{y^2}+\frac{x^4}{y^4}+\frac{1}{y^2}+\frac{x^2-1}{y^4}=0.$$

Haciendo $y=\pm\infty$, resulta $1=0$, es decir que tampoco tiene la curva asíntotas paralelas al eje de las y.

CAPITULO III.

Centro y diámetros de las curvas de segundo grado

ARTICULO 1.º

Centro de las curvas de segundo grado

78. Llámase *centro* de una curva cualquiera el punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él.

Si la ecuacion de una curva de segundo grado carece de los términos lineales, la curva tendrá centro, y el orígen estará en él.

Fig 64. La ecuacion general de las líneas de segundo órden, que carece de los términos lineales, es

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0:$$

tiremos por el orígen una cuerda MN, y sea $y=ax$ su ecuacion. Para hallar los valores de las abscisas OP y $-OQ$ de los puntos de interseccion de esta recta con la curva, combino las dos ecuaciones, y elimino la y; y resultará la ecuacion

$$(Aa^2+Ba+C)x^2+F=0,$$

la cual nos dará para x dos valores iguales y de signo contrario; es decir, que las abscisas OP y $-OQ$ son iguales y de signo contrario; luego $OP=OQ$. Por consiguiente los triángulos OMP, ONQ son iguales, y por tanto $OM=ON$. Queda pues demostrado que el orígen de las coordenadas divide en dos partes iguales á toda cuerda que pasa por él, ó lo que es igual, que el orígen es centro de la curva.

Recíproco. *Si el orígen de las coordenadas está en el centro de una curva de segundo grado, la ecuacion de la curva carecerá de los términos lineales.*

La ecuacion general de las líneas de segundo órden es

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0:$$

digo que, si el orígen está en el centro de la curva representada por esta ecuacion, será $D=0$, $E=0$.

En efecto, tiremos por el orígen (centro por suposicion) una cuerda MN que no coincida con ninguno de los dos ejes, y tendremos, segun la difinicion del centro, $OM=ON$: por consiguiente los triángulos OMP y ONQ serán iguales, y por tanto $OP=OQ$, $MP=NQ$. Esto supuesto, la ecuacion de la recta MN es $y=ax$: combinando esta ecuacion con la de la curva, y eliminando la y, tendremos

$$(Aa^2+Ba+C)x^2+(Da+E)x+F=0.$$

Los valores de x son OP y $-OQ$, y la suma de estos valores es cero; luego $\frac{Da+E}{Aa^2+Ba+C}=0$, y como a es un número finito, puesto que la cuerda MN no coincide con ninguno de los ejes, será $\quad Da+E=0 \ldots\ldots [1].$

Tirando por el centro la cuerda cuya ecuacion sea $y=a'x$, se hallará igualmente

$$Da'+E=0 \ldots\ldots [2].$$

Restando las dos igualdades [1] y [2], tendremos

$$D(a-a')=0;$$

pero como a y a' son desiguales, y por tanto el factor $a-a'$ no es cero, será $D=0$, y por consiguiente $E=0$

Corolarios. 1.° *Si la ecuacion de segundo grado contiene algun término lineal, el orígen no está en el centro de la curva.*

2.° *Si el orígen no está en el centro de una curva de segundo grado, la ecuacion de esta curva contendrá los dos términos lineales, ó por lo menos uno.*

79. *Hallar las coordenadas del centro de la curva representada por la ecuacion* $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$.

Sean a y b las coordenadas del centro: traslademos el orígen á este punto, siendo los nuevos ejes paralelos á los primitivos; para lo cual, haremos $x=x'+a, y=y'+b$, y sustituyendo, tendremos (*Nota primera al fin de la Geometría analítica*) la ecuacion

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+\left.\begin{matrix}2Ab\\+Ba\\+D\end{matrix}\right|y'+\left.\begin{matrix}Bb\\+2Ca\\+E\end{matrix}\right|x'+f(a,b)=0.$$

Ahora, para que el nuevo orígen sea centro, es necesario y suficiente que los términos lineales en y' y en x' no existan en la ecuacion, es decir, que sus coeficientes sean iguales á cero; luego las ecuaciones que nos darán las coordenadas a y b del centro, son

$$\left.\begin{matrix}2Ab+Ba+D=0,\\Bb+2Ca+E=0\end{matrix}\right\}\ldots\ldots [P],$$

que son las dos derivadas de la ecuacion con respecto á y y á x, y cambiando en ellas x en a é y en b.

De ellas resultan

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \\ b=\dfrac{2CD-BE}{B^2-4AC} \end{array}\right\} \ldots\ldots [Q]$$

Estos valores serán reales y finitos, si $B^2-4AC \gtrless 0$, es decir, si la curva es una elipse ó hipérbola; y por consiguiente entonces la curva tendrá centro, y un solo centro, puesto que a y b no tienen mas que un solo valor. Pero si $B^2-4AC=0$ (no siendo cero ninguno de los numeradores), los valores de a y b son infinitos, las ecuaciones [P] del centro son incompatibles, y por tanto la curva no tiene centro; es decir, que la parábola no tiene centro.

80. Si uno de los numeradores de los quebrados [Q] es cero al mismo tiempo que lo es B^2-4AC, es decir, si tenemos las dos ecuaciones

$$B^2-4AC=0,\ 2AE-BD=0,$$

el otro numerador será tambien cero [*Alg.* 95].

En efecto, de las dos ecuaciones supuestas sacamos

$$B^2=4AC.$$
$$2AE=BD,$$

las cuales, multiplicándolas ordenadamente, nos dan

$$BE=2CD,\ \text{ó}\ 2CD-BE=0.$$

Por consiguiente los valores de a y b se reducen á

$a=\dfrac{0}{0}$, $b=\dfrac{0}{0}$, es decir, que son indeterminados, ó tienen infinitos valores.

Luego la línea representada en este caso por la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

tiene una infinidad de centros. Mas no es línea curva la que actualmente representa esta ecuacion.

En efecto, resolviendo dicha ecuacion con respecto á y, para lo cual reduzco en primer lugar su primer miembro á la forma

$$Ay^2+(Bx+D)y+Cx^2+Ex+F=0,$$

tendremos

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF},$$

que por ser $B^2-4AC=0$ y $BD-2AE=0$, será

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\sqrt{D^2-4AF}}{2A},$$

ecuacion que representa dos rectas paralelas, si $D^2-4AF>0$; una sola recta, si $D^2-4AF=0$; y no representa nada, si $D^2-4AF<0$.

Queda pues demostrado que si $B^2-4AC\gtrless 0$, las curvas de 2.º grado tienen un solo centro, y que si $B^2-4AC=0$, las curvas de segundo grado no tienen centro.

81. Si solo se quisiere hallar la posicion del centro, y no los valores de sus coordenadas, observaríamos que las rectas representadas por las ecuaciones

$$f'_y(x,y)=0,\ f'_x(x,y)=0,$$

ó

$$2Ay+Bx+D=0,\ By+2Cx+E=0$$

contendrian al centro, puesto que las coordenadas a y b de este punto verifican á estas ecuaciones: construidas, pues, estas rectas, su punto de interseccion seria el centro.

Ejemplo. Sea la ecuacion $y^2-2xy+3x^2-2y-6x+7=0$. Comparándola con la general, es $A=1$, $B=-2$, $C=3$, $D=-2$, $E=-6$, $F=7$; $B^2-4AC=-8$; luego la curva representada por la ecuacion propuesta tiene centro. Hallaremos los valores de las coordenadas del centro por las fórmulas [Q], ó mejor, para no tener necesidad de recordarlas, resolviendo las dos ecuaciones que resultan igualando á cero las dos derivadas de la ecuacion con respecto á y y á x, las cuales son ahora

$$x-2-1=0,\ y-3x+3=0\ \ldots\ [1]:$$

y resueltas nos dan $\qquad x=2,\ y=3.$

Pero si solo quisiéramos hallar el centro, construiríamos las dos rectas representadas por las dos ecuaciones [1], y el punto de interseccion de dichas rectas seria el centro.

82. *Las asíntotas de la hipérbola pasan por el centro de esta curva.*

En efecto, sabemos que las curvas de segundo órden tienen dos asíntotas cuando $B^2-4AC>0$; en cuyo caso tienen tambien centro, segun se acaba de demostrar. Las ecuaciones de las asíntotas, segun la regla [75], serán

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right),$$

ó separándolas,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}+\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right),$$

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}-\frac{1}{2A}\left(x\sqrt{B^2-4AC}+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}\right).$$

Hallemos el punto de interseccion de estas dos rectas: para esto, igualemos coordenadas, y eliminemos la y entre sus dos ecuaciones, y despejando la x en la ecuacion resultante, será

$$x=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}.$$

Por consiguiente

$$y=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}:$$

valores que son precisamente las coordenadas del centro de la curva.

Articulo 2.°

Diámetros de las curvas de segundo grado.

83. *La abscisa del punto medio de una recta es igual á la semisuma de las abscisas de los estremos de la misma recta; y la ordenada del punto medio de una recta es igual á la semisuma de las ordenadas de sus estremos.*

Fig. 65. En efecto,

$$OS=OQ+QS,$$
$$OS=OR-RS:$$

sumando estas dos igualdades, y observando que $QS=RS$, será

$$2OS=OQ+OR,$$

$$OS=\frac{OQ+OR}{2}.$$

Hemos demostrado este teorema en el caso mas fácil, en que las coordenadas de los tres puntos eran positivas; pero ya se sabe, en virtud del principio de Descartes [19], que el teorema será siempre cierto. Comprobémosle en un caso cualquiera.

Fig. 66. Tenemos

$$OS=RS-OR,$$
$$OS=OQ-QS:$$

como $RS=QS$, será

$$2OS=OQ-OR,$$
$$-2OS=OR-OQ,$$

$$-OS=\frac{OR+(-OQ)}{2},$$

esto es, la abscisa del punto P igual á la semisuma de las abscisas de los puntos N y Q.

Del mismo modo se demuestra que la ordenada del punto medio de una recta es igual á la semisuma de las ordenadas de los estremos de la recta.

84. Se llama *diámetro* de una curva cualquiera la línea recta ó curva que pasa por los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas.

85. *Hallar la ecuacion de los diámetros de las líneas de segundo órden.*

Fig. 67. Sean P un punto cualquiera de un diámetro QPP' de una línea de segundo órden, x_1, y_1 sus coordenadas, MPN la cuerda que pasa por dicho punto P y corresponde al sistema bisecado por el diámetro, $y=mx+\alpha$ la ecuacion de esta cuerda: es evidente que el coeficiente angular m de dicha cuerda será constante para todas las cuerdas MN, $M'N'$, etc. del sistema bisecado, pero α variará de una cuerda á otra. Igualando las coordenadas entre la ecuacion de la cuerda MN y la de la curva, que es

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

y eliminando la y, resultará la ecuacion

$$\left.\begin{array}{l|l|l} Am^2 & x^2+2Am\alpha & x+A\alpha^2 \\ +Bm & +\ B\alpha & +D\alpha \\ +C & +\ Bm & +F \\ & +\ E & \end{array}\right\}=0.$$

En esta ecuacion x representa las abscisas de los dos puntos de interseccion de la cuerda MN con la curva.

Sean x', x'' las abscisas de los dos puntos M, N: tendremos $x'+x''=-\dfrac{2Am\alpha+B\alpha+Dm+E}{Am^2+Bm+C}$, y como $x_1=\dfrac{x'+x''}{2}$,

será $$x_1=-\frac{2Am\alpha+B\alpha+Dm+E}{2(Am^2+Bm+C)} \quad \ldots\ldots [A].$$

Habiendo hallado la abscisa x_1 del punto medio P de la cuerda MN, hallaremos su ordenada y_1 en virtud de que las coordenadas x_1 é y_1 deben verificar la ecuacion de la cuerda; y por tanto

$$y_1=mx_1+\alpha \quad \ldots\ldots [B].$$

Eliminemos ahora entre las ecuaciones $[A]$ y $[B]$ la variable α; para lo cual sustituiremos en la ecuacion $[A]$ el valor y_1-mx_1 de α deducido de la ecuacion $[B]$; y resultará la ecuacion

$$(2Ay_1+Bx_1+D)\,m+(By_1+2Cx_1+E)=0 \quad \ldots\ldots [C],$$

que es la relacion entre las coordenadas x_1 é y_1 de un punto cualquiera P del diámetro; y por tanto esta ecuacion es la del diámetro.

Suprimiendo en la ecuacion $[C]$ los índices de las variables, los cuales son inútiles ya, la ecuacion de los diámetros de las líneas de segundo órden será

$$\left.\begin{array}{c}(2Ay+Bx+D)\,m+(By+2Cx+E)=0,\\ \text{ó} \qquad f'_y\,m+f'_x=0.\end{array}\right\}\ \ldots\ldots [D]$$

Ejemplo. Hallar la ecuacion de los diámetros de la curva representada por la ecuacion

$$4y^2-8xy+2x^2-4y+8x-3=0.$$

La ecuacion de los diámetros de esta curva será

$$(2y-2x-1)m+(x-2y+2)=0.$$

86. De la ecuacion $[D]$ sacaremos las consecuencias siguientes:

1.ª Consecuencia. *Los diámetros de las curvas de segundo grado son líneas rectas*; puesto que su ecuacion es de primer grado.

Luego si una recta pasa por los puntos medios de dos cuerdas paralelas, será un diámetro; el cual dividirá en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas á las dos primeras.

87. 2ª. Consecuencia. 1.º *Los diámetros de la elipse é hipérbola pasan por el centro.* 2.º *Todos los diámetros de la parábola son paralelos.*

1.º Si en la ecuacion del diámetro ponemos en vez de x é y las coordenadas particulares a y b del centro de la elipse é hipérbola, resulta

$$(2Ab+Ba+D)m+(2Ca+Bb+E)=0,$$

igualdad cierta, pues hemos hallado [79] para las coordenadas a y b del centro las dos igualdades

$$2Ab+Ba+D=0,$$
$$2Ca+Bb+E=0;$$

por lo tanto las coordenadas del centro de la elipse ó hipérbola satisfacen á la ecuacion del diámetro; luego todo diámetro de la elipse ó hipérbola pasa por el centro (1).

2.º En la parábola es $B^2-4AC=0$, de donde $C=\frac{B^2}{4A}$.

Resolviendo lo ecuacion [D] con respecto á y, es

$$y=-\frac{Bm+2C}{2Am+B}x-\frac{Dm+E}{2Am+B},$$

lo que prueba que, siendo m el coeficiente angular de las cuerdas bisecadas por un diámetro, $-\frac{Bm+2C}{2Am+D}$ es el coefi-

---

(1) Esta 2.ª consecuencia puede deducirse inmediatamente de la definicion del diámetro. En efecto, el diámetro debe dividir en dos partes iguales á un sistema de cuerdas paralelas: entre estas cuerdas hay una que pasa por el centro; luego el diámetro tiene que pasar por el centro.

ciente angular de dicho diámetro. Sustituyendo en la espresion del coeficiente angular del diámetro el valor $\frac{B^2}{4A}$ de C, resulta $-\frac{B}{2A}$, cantidad independiente de m ó de la direccion de las cuerdas bisecadas: luego todos los diámetros de la parábola tienen el mismo coeficiente angular, ó bien son paralelos entre sí.

88. 3.ª Consecuencia. *La tangente* TT′ [fig. 67] *tirada por el punto* Q *de interseccion de un diámetro con la curva es paralela á las cuerdas bisecadas por dicho diámetro* (1).

En efecto, si llamamos x' é y' á las coordenadas del punto Q; como dicho punto corresponde al diámetro, sus coordenadas verificarán la ecuacion de esta recta; y así tendremos

$$(2Ay'+Bx'+D)m+(By'+2Cx'+E)=0,$$

de donde $$m=-\frac{By'+2Cx'+E}{2Ay'+Bx'+D};$$

que [63] es precisamente el valor del coeficiente angular de la tangente TT' tirada á la curva por el punto Q (x', y'): teniendo pues esta tangente y las cuerdas bisecadas por el diámetro iguales coeficientes angulares, se infiere que la tangente es paralela á dichas cuerdas.

Si se quiere, se puede emplear la ecuacion abreviada y decir: por estar el punto (x', y') sobre el diámetro, tendremos

$$f'_{y'}\times m+f'_{x'}=0,$$

de donde $$m=-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}},$$

---

(1) Esta consecuencia puede deducirse de la definicion del diámetro. En efecto, si la tangente no fuese paralela al sistema de cuerdas bisecadas por el diámetro, por el punto de interseccion del diámetro con la curva se podria tirar una paralela á las cuerdas bisecadas; esta paralela seria una cuerda, puesto que por un punto de la curva no se puede tirar mas que una sola tangente; luego existiria una cuerda paralela al sistema, la cual no estaria bisecada por el diámetro; lo que es contrario á la definicion del diámetro, y por consiguiente absurdo.

que es, segun hemos visto [64], el coeficiente angular de la tangente á la curva en el punto (x', y').

Corolario. *Si un diámetro corta en dos puntos á una curva de segundo grado, las tangentes tiradas por los puntos de intersección serán paralelas á las cuerdas bisecadas, y por consiguiente paralelas entre sí.*

89. Se llaman *diámetros conjugados*, en las líneas de segundo órden, dos diámetros tales que cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro.

Segun esta definicion, la parábola no puede tener diámetros conjugados; pues siendo todos sus diámetros paralelos entre sí, las cuerdas bisecadas por un diámetro no pueden ser paralelas al otro.

90. Fig. 68. *En la elipse é hipérbola si un diámetro* OQ *biseca todas las cuerdas, tales como* MM', *paralelas á otro diámetro* OR, *este biseca tambien las cuerdas* MN *paralelas al primero; y por tanto los dos diámetros son conjugados.*

Llamemos m al coeficiente angular del diámetro OR ó de las cuerdas MM', m' al del diámetro OQ ó de las cuerdas MN, y sea OS el diámetro que biseca al sistema de cuerdas MN paralelas á OQ. Coloquemos el orígen de las coordenadas en el centro O de la curva, cuya ecuacion será en tal caso

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0.$$

La ecuacion del diámetro OQ la deduciremos de la general $f'_y \times m + f'_x = 0$,

y como actualmente $f'_y = 2Ay+Bx$, $f'_x = By+2Cx$, dicha ecuacion será

$$(2Ay+Bx)m+(By+2Cx)=0,$$

de donde
$$y=-\frac{Bm+2C}{2Am+B}x.$$

Por consiguiente, como hemos llamado m' al coeficiente angular del diámetro OQ, será

$$m'=-\frac{Bm+2C}{2Am+B} \quad\ldots\ldots [1].$$

La ecuacion del diámetro OS que biseca las cuerdas MN paralelas al diámetro OQ, será

$$(2Ay+Bx)m'+(By+2Cx)=0$$

ó
$$y=-\frac{Bm'+2C}{2Am'+B}x,$$

es decir que el coeficiente angular del diámetro OS es

$$-\frac{Bm'+2C}{2Am'+B}.$$

Mas la ecuacion [1] nos da $m=-\frac{Bm'+2C}{2Am'+B}$; luego, como m es el coeficiente angular del diámetro OR, las dos rectas OR y OS tienen igual coeficiente angular; y como, además, las dos pasan por el centro O de la curva, coinciden: luego la OR biseca á las cuerdas paralelas al diámetro OQ.

91. Se llama *eje* de una línea de segundo órden todo diámetro perpendicular á las cuerdas que él mismo biseca.

Hallar las ecuaciones de los ejes de las líneas de segundo órden, suponiendo rectangulares los ejes de coordenadas.

Siendo m el coeficiente angular de las cuerdas bisecadas y m' el del diámetro que las biseca, tenemos

$$m'=-\frac{Bm+2C}{2Am+B}.$$

Si el diámetro ha de ser perpendicular á las cuerdas bisecadas, tendremos, por ser rectangulares, segun la suposicion, los ejes de coordenadas,

$$m\,m'=-1:$$

eliminando la m entre estas dos ecuaciones, resulta la ecuacion

$$m'^2-\frac{2(A-C)}{B}m'-1=0,$$

de donde $$m'=\frac{(A-C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{B},$$ valores siempre reales, puesto que $(A-C)^2+B^2$ es una cantidad positiva. Como el producto de estos dos valores es -1, los dos son recíprocos y de signo contrario: luego las curvas de segundo grado tienen en general dos ejes, los cuales son perpendiculares entre sí, puesto que el producto de las tangentes de los ángulos que forman con el eje Ox es igual á -1.

Sin embargo, en la parábola, uno de estos dos ejes se aleja al infinito.

En efecto, eliminemos la m' entre las dos ecuaciones $m'=-\frac{Bm+2C}{2Am+B}$, $mm'=-1$, y resultarán para m los mismos valores que resultaron para m', los cuales, por ser $B^2=4AC$, se reducen á $m=\frac{2A}{B}$, $m=-\frac{2C}{B}$: la ecuacion de uno de los ejes de la parábola será por lo tanto

$$(2Ay+Bx+D)\frac{2A}{B}+(By+2Cx+E)=0,$$

de donde

$$y=-\frac{2B(A+C)}{4A^2+B^2}x-\frac{2AD+BE}{4A^2+B^2};$$

y sustituyendo en el denominador del coeficiente de x en lugar de B^2 $4AC$, dicha ecuacion será

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{2AD+BE}{4A^2+B^2}.$$

La ecuacion del otro eje será

$$(2Ay+Bx+D)\times\frac{-2C}{B}+(By+2Cx+E)=0,$$

que se reduce á $0\times y+0\times x=2CD-BE$, y por tanto esta ecuacion representa una recta que corta á los ejes en el infinito. Luego la parábola no tiene mas que un eje.

Esta última proposicion se puede demostrar con mayor sencillez, hallando directamente las ecuaciones de los ejes de la parábola.

En efecto, si llamamos m' al coeficiente angular del diámetro de la parábola, la ecuacion de este diámetro será

$$y=m'x-\frac{Dm+E}{2Am+B};$$

actualmente $m'=-\frac{B}{2A}$ [87, 2.º]; y como este diámetro ha de ser perpendicular á las cuerdas que biseca, tendremos

$mm'=-1$, $m=-\frac{1}{m'}=\frac{2A}{B}$. Sustituyendo en la ecuacion del diámetro los valores de m' y m, resulta

$$y=-\frac{B}{2A}x-\frac{2AD+BE}{4A^2+B^2} \quad \ldots\ldots [P].$$

Luego *la parábola tiene un solo eje*, cuya ecuacion es la $[P]$.

CAPITULO IV.

Discusion de la ecuacion general de segundo grado

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

---

92. *Discutir* la ecuacion general de segundo grado con dos variables es determinar las diferentes líneas que esta ecuacion puede representar segun los valores de los coeficientes, y hallar las formas de dichas líneas.

Para discutir la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

conviene resolverla con respecto á una de las variables, á y por ejemplo: para esto, reduzco en primer lugar la ecuacion á tres términos, y tendré

$$Ay^2+(Bx+D)y+(Cx^2+Ex+F)=0,$$

de donde

$$y=\frac{-(Bx+D)\pm\sqrt{(Bx+D)^2-4A(Cx^2+Ex+F)}}{2A},$$

ó

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm$$

$$\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF} \ldots [A].$$

Fig. 69. Sean Ox, Oy los ejes á que está referida esta ecuacion. Construyamos en primer lugar la recta AB representada por la ecuacion $y_1=-\frac{Bx+D}{2A}$: es claro que los dos valores de y correspondientes á un valor de x se hallarán añadiendo y quitando á la ordenada respectiva de la recta AB el valor que tome el radical. Demos pues á x el valor particular $OP=x'$, levantemos la ordenada indefinida PM, tomemos desde el punto R hácia arriba y abajo la parte

$$RM=RM'=\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x'^2+2(BD-2AE)x'+D^2-4AF},$$

y los puntos M y M' serán dos puntos de la curva.

En efecto, tenemos

$$PM = PR + RM =$$

$$-\frac{Bx'+D}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x'^2+2(BD-2AE)x'+D^2-4AF},$$

$$PM' = PR - RM' =$$

$$-\frac{Bx'+D}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x'^2+2(BD-2AE)x'+D^2-4AF}.$$

Vemos que las coordenadas de los puntos M y M' satisfacen á la ecuacion de la curva, y por tanto los puntos M y M' corresponden á la curva. Dando, pues, á x diferentes valores que hagan real al radical, por cada uno de estos valores tendremos dos puntos de la curva; y asi se podrán hallar tantos puntos de la curva como se quieran.

Obsérvese que la recta AB divide en dos partes iguales á un sistema de cuerdas paralelas al eje de las ordenadas, y que por tanto dicha recta AB es un diámetro de la curva (1).

Las raices del trinomio $(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF$ igualado á cero son las abscisas de los puntos en que el diámetro AB corta á la curva.

En efecto, igualando las coordenadas de la ecuacion [A] de la curva y la del diámetro AB, y eliminando la y, resulta

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0,$$

---

(1) Hemos hallado [85] para la ecuacion de los diámetros de las líneas de segundo grado la ecuacion

$$f'_y \times m + f'_x = 0,$$

ó $$(2Ay+Bx+D)m+(By+2Cx+E)=0.$$

Veamos si de esta ecuacion puede deducirse la ecuacion del diámetro AB. Siendo m el coeficiente angular de las cuerdas bisecadas, es actualmente $m = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\theta-\alpha)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,0} = \infty$: por consiguiente, partiendo la ecuacion por m, y haciendo en seguida $m=\infty$, resulta que la ecuacion del diámetro AB es

$$2Ay+Bx+D=0,$$

de donde

$$y = -\frac{Bx+D}{2A}.$$

y en esta ecuacion, que es dicho trinomio igualado á cero, ya se sabe, que x representa la abscisa del punto comun á las dos líneas.

Esto supuesto, si B^2-4AC no es cero, serán en general dos las raices de esta ecuacion, y por consiguiente el diámetro AB cortará en dos puntos á la curva: pero si $B^2-4AC=0$, la ecuacion que nos dará la abscisa del punto de interseccion del diámetro con la curva, será

$$2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0;$$

y por lo tanto el diámetro AB solo cortará en un punto á la curva. Deben pues ser curvas muy diferentes las que representa la ecuacion, cuando $B^2-4AC\lessgtr 0$, y cuando $B^2-4AC=0$.

Segun esto, tenemos que considerar los tres casos: 1.° $B^2-4AC<0$, 2.° $B^2-4AC>0$, 3.° $B^2-4AC=0$.

1.er caso. $B^2-4AC<0$.

Llamemos $-\delta^2$ á la cantidad B^2-4AC, x' y x'' á las raices del trinomio que está bajo el radical igualado á cero, raices que, ya hemos visto, son las abscisas de los puntos de interseccion del diámetro con la curva: dicho trinomio podrá transformarse en el producto $-\delta^2(x-x')(x-x'')$ [*Algebra elemental* 179]. Tendremos, pues,

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')(x''-x)}.$$

Ahora pueden suceder tres casos: 1.° que x' y x'' sean reales y desiguales, 2.° que sean reales é iguales, 3.° que sean imaginarias.

Fig. 70. 1.° Si x' y x'' son reales y desiguales, supondremos que x' es la menor de las dos.

Dando á x un valor mayor que $x'=OP$, y menor que $x''=OQ$, el radical será real.

Dando á x un valor mayor que x'', y á fortiori mayor que x', el radical será imaginario; como tambien si damos á x un valor menor que x', y con mayor razon menor que x''.

Vemos en este caso que, entre las paralelas PR y QS al eje de ordenadas hay curva, y no la hay fuera de dichas paralelas; es decir, que la curva es limitada en el sentido de las abscisas positivas y negativas. Tambien la curva es limitada en el sentido de las ordenadas; pues á valores finitos de x corresponden valores de y tambien finitos.

Hallemos los límites de la curva en el sentido de las ordenadas: para lo cual, hallaremos el valor de x correspondiente al máximo valor que tiene la cantidad radical $\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')(x''-x)}$, que representa la semicuerda de la curva. Tenemos que hallar el valor de la variable correspondiente al máximo valor del producto $(x-x')(x''-x)$. Segun la regla esplicada en el número 191 del álgebra elemental, haremos

$$(x-x')(x''-x)=y,$$

de donde $$x=\frac{x'+x''}{2}\pm\sqrt{\frac{(x''-x')^2}{4}-y}.$$

Ya se vé ahora que el máximo valor de y es $\frac{(x''-x')^2}{4}$, el del radical $\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')(x-x'')}$ será $\frac{\delta}{2A}\cdot\frac{(x''-x')}{2}$, y el valor correspondiente de la variable x es $\frac{x'+x''}{2}$, es decir la semisuma de las abscisas de los estremos del diámetro, ó sea la abiscisa del centro C de la curva; puesto que las curvas representadas por la ecuacion general de segundo grado tienen centro cuando $B^2-4AC\lesseqgtr 0$, y el punto medio de un diámetro cualquiera es el centro de la curva.

Tomando pues en la recta HK, que pasa por el centro, las partes $CH=CI=\frac{\delta}{2A}\cdot\frac{x''-x'}{2}$, y tirando por los puntos H é I las paralelas EF y DG al diámetro AB, la curva quedará asi limitada dentro del paralelógramo $EFGD$.

Es casi evidente que los lados del paralelógramo $EFGD$ son tangentes á la curva; vamos sin embargo á demostrarlo.

La recta PE es paralela á toda cuerda, tal como la MN, bisecada por el diámetro RS; mas la tangente á la curva tirada por el punto R es paralela á las cuerdas bisecadas; luego la PE y la tangente tirada por el punto R coinciden. Del mismo modo se demuestra que la FQ es tangente á la curva Los dos diámetros RS y HI, de los que el primero biseca todas las cuerdas paralelas al segundo, son conjugados [89]; por consiguiente [88] las tangentes á la curva tiradas por los puntos H é I son paralelas al diámetro RS; luego dichas tangentes son las paralelas EF y DQ al mismo diámetro RS.

Estando limitada la curva por el paralelógramo $EFGD$, y siendo ademas convexa [49, *Corol.*], por ser línea de segundo órden, si se construyen varios de sus puntos, y se unen en seguida por una línea contínua, veremos que su figura es la misma que la de la curva elipse [40]; y mas adelante veremos que efectivamente la ecuacion de la curva representada por la general de segundo grado se reduce, cuando $B^2-4AC<0$, á la ecuacion $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, que es la de la elipse.

Así, pues, cuando $B^2-4AC<0$, y las raices de la ecuacion

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF=0$$

son reales y desiguales, la ecuacion de segundo grado representa una elipse; y mas adelante veremos tambien el modo fácil de construir esta curva, conociendo sus diámetros conjugados y el ángulo que ellos forman.

2.° Si x' y x'' son reales é iguales, tendremos

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{6}{2A}\sqrt{-(x-x')^2},$$

ó $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta(x-x')}{2A}\sqrt{-1},$$

ecuacion que no puede verificarse por valores reales de x é y, sino en el único caso en que $x=x'$, y por consiguiente $y=-\dfrac{Bx'+D}{2A}$. Luego en este caso la ecuacion representa un solo punto, cuyas coordenadas son x' y $-\dfrac{Bx'+D}{2A}$.

Nota. Puede demostrarse de otro modo que la ecuacion representa en este caso un punto único.

En efecto, pasemos al primer miembro la cantidad

$-\frac{Bx+D}{2A}$, y elevemos en seguida ambos miembros al cuadrado: tendremos

$$\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2=-\frac{\delta^2}{4A^2}(x-x')^2,$$

ó
$$\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2+\frac{\delta^2(x-x')^2}{4A^2}=0:$$

para que esta ecuacion se verifique por valores reales de x é y, es indispensable que cada uno de sus dos términos se reduzca á cero; pues sino, tendríamos en el primer miembro la suma de dos cantidades positivas, la cual no podria ser igual á cero. Por consiguiente

$$y+\frac{Bx+D}{2A}=0,\ \ x-x'=0,$$

de donde
$$x=x',\ \text{é}\ y=-\frac{Bx'+D}{2A}.$$

3.º Si las raices x y x'' son imaginarias, tendrán la forma $x'=\alpha+6\sqrt{-1}$, $x''=\alpha-6\sqrt{-1}$; y por consiguiente la cantidad que está bajo del radical, será

$$\left(x-\alpha-6\sqrt{-1}\right)\left(\alpha-6\sqrt{-1}-x\right),$$

ó
$$-\left(x-\alpha-6\sqrt{-1}\right)\left(x-\alpha+6\sqrt{-1}\right),$$

ó
$$-\left((x-\alpha)^2+6^2\right):$$

luego
$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-\alpha)^2+6^2}\cdot\sqrt{-1}.$$

Ahora, cualquiera que sea el valor real de x, $(x-\alpha)^2+6^2$ es una cantidad positiva, $\sqrt{(x-\alpha)^2+6^2}$ es una cantidad real, y los valores de y son imaginarios; luego en este caso la ecuacion no representa nada.

Nota. De otro modo se puede demostrar esto mismo.

Pasemos $-\frac{Bx+D}{2A}$ al primer miembro, elevemos en seguida ambos miembros al cuadrado, y pasemos todo despues al primer miembro: tendremos

$$\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2+\frac{\delta^2}{4A^2}(x-\alpha)^2+\frac{\delta^2 6^2}{4A^2}=0,$$

ecuacion en que, siendo x é y reales, su primer miembro consta de tres cuadrados positivos, y uno de ellos constante; luego no puede esta ecuacion verificarse por valores reales de x é y; es decir, que no representa nada.

Nota. Segun esta discusion, la ecuacion de segundo grado representa una elipse, un punto ó nada, cuando $B^2-4AC<0$.

94. 2.° *Caso.* $B^2-4AC>0$.

Llamando δ^2 á la cantidad B^2-4AC, y x', x'' á las raices del trinomio $(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF$ igualado á cero, este trinomio podrá transformarse en el producto $\delta^2(x-x')(x-x'')$; y por tanto

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-x')(x-x'')};$$

y aquí tambien tendremos que considerar los tres casos: 1.° x' y x'' reales y desiguales; 2.° x' y x'' reales é iguales; 3.° x' y x'' imaginarias.

Fig. 71. 1.° Si x' y x'' son reales y desiguales, y es $x'<x''$, construyendo el diámetro AB, tomando $OP=x'$, $OQ=x''$, y tirando las paralelas PR y QS al eje Oy, los puntos R y S serán los de interseccion del diámetro con la curva. Si damos á x un valor mayor que x'', y á fortiori mayor que x', el radical es real; y como creciendo x, crecen los dos factores del producto $(x-x')(x-x'')$, se infiere que la semicuerda ML crece indefinidamente, y por tanto la curva tiene á la derecha de la QS dos ramos indefinidos SM y SN, que van alejándose cada vez mas é indefinidamente del diámetro RL.

Si damos á x valores menores que x', y con mayor razon menores que x'', mudando los signos á los dos factores del producto $(x-x')(x-x'')$, este producto será $(x'-x)(x''-x)$; y así se ve fácilmente que, si x es menor que x' y por consiguiente que x'', los dos factores son positivos, aun cuando x' y x'' sean negativos; el producto es positivo y el radical es real; y como disminuyendo el sustraendo x de las dos diferencias $x'-x$, $x''-x$, estas diferencias positivas van creciendo, aun cuando x' y x'' sean negativas, se infiere tambien que á la izquierda de la recta PR la curva tiene dos ramos indefinidos que van alejándose sin límite del diámetro RL.

Las dos rectas PR y QS son tangentes á la curva, porque son paralelas á las cuerdas bisecadas por el diámetro SL.

Sabemos que las curvas representadas por la ecuacion de 2.° grado tienen asíntotas en el caso en que $B^2-4AC>0$, y que estas rectas pasan por el centro [82]: el centro es el punto medio C de la cuerda RS. Determinando, pues, un punto (diferente del centro) de cada una de las dos asíntotas, se podrán construir en seguida estas rectas, á las cuales los cuatro ramos de la curva se irán aproximando indefinidamente. Sabiendo ademas que esta curva, siendo de segundo grado, es convexa, vemos que tiene la misma forma que la hipérbola [41]: y efectivamente mas adelante veremos que la ecuacion de la curva representada por la ecuacion de segundo grado se reduce, cuando $B^2-4AC>0$, á la ecuacion $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, que es la de la hipérbola.

Así, pues, cuando $B^2-4AC>0$, y las raices x' y x'' son reales y desiguales, la ecuacion representa una hipérbola, en que el diámetro AB corta á la curva; y mas adelante veremos tambien con qué facilidad se construye la hipérbola dadas las asíntotas y un punto S de la curva.

2.° Si las raices x' y x'' son reales é iguales, será

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta}{2A}(x-x'):$$

aquí están incluidas dos ecuaciones de primer grado, que por lo tanto representan dos líneas rectas. Como el coeficiente angular de la primera es $-\frac{B-\delta}{2A}$, el de la segunda $-\frac{B+\delta}{2A}$, cantidades que son desiguales, se infiere que las dos rectas, representadas por estas dos ecuaciones, se cortan.

3.° Siendo imaginarias las raices x', x'', tendrán la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; y por tanto

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta}{2A}\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Fig. 72. Segun esta ecuacion, cualquiera que sea el valor real de x, positivo ó negativo, el radical es real, y reales los dos valores de y; luego la curva se estiende indefinidamente á derecha é izquierda del eje de la y; y como creciendo x positiva ó negativamente, crece el radical, se infiere que las dos ramas separadas por el diámetro AB (puesto que este diámetro no encuentra á la curva) van alejándose cada vez mas y sin límite de este diámetro

Hallemos el mínimo valor de la semicuerda ó del radical. Es evidente, por el valor de y, que este mínimo valor es el correspondiente al valor α de la variable: tomando, pues, en la ordenada CK del diámetro AB, correspondiente (dicha ordenada) al valor α de x, las partes $CS=CR=\frac{\delta\epsilon}{2A}$, y tirando por los puntos S y R las paralelas SQ y RP al diámetro AB, la curva se hallará fuera del espacio comprendido entre estas dos paralelas.

Para limitar en algun modo á la curva, nos conviene construir sus asíntotas: estas rectas tienen por ecuaciones actualmente [75]

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\delta(x-\alpha)}{2A};$$

su punto de interseccion, que es el centro, tendrá por abscisa α; y como el centro debe tambien hallarse sobre el diámetro AB, se infiere que C es el centro: determinando otro punto de cada asíntota, se podrán construir estas dos rectas; con lo que, y sabiendo que la curva es convexa, se ve que tiene la forma de una hipérbola, con cuya curva veremos que coincide efectivamente la representada por la ecuacion de segundo grado en el caso actual.

Obsérvese que aun en el caso en que las abscisas de los estremos del diámetro sean imaginarias, la abscisa del centro es la semisuma de las abscisas de los estremos.

Así, pues, cuando $B^2-4AC>0$, y las raices x' y x'' son imaginarias, la ecuacion representa una hipérbola en que el diámetro cuya ecuacion es $y_1=-\frac{Bx+D}{2A}$ no corta á la curva.

NOTA. Segun esta discusion, la ecuacion de segundo grado, cuando $B^2-4AC>0$, representa una hipérbola ó dos rectas que se cortan

3.^{er} *caso* $B^2-4AC=0$.

El valor de y es en este caso

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

Igualando á cero la cantidad que está bajo del radical, y llamando x' al valor que tenga x en esta ecuacion, que ya hemos demostrado es la abscisa del punto de interseccion del diámetro con la curva, será

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)(x-x')};$$

y ahora podrá suceder que el coeficiente $2(BD-2AE)$ sea cantidad positiva ó negativa.

Fig. 73. 1.° Si $2(BD-2AE)$ es cantidad positiva, tomando $OP=x'$, y tirando la PR paralela al eje Oy, será R el punto de interseccion del diámetro con la curva.

Si damos á x un valor mayor que x', el radical sera real; y creciendo x indefinidamente, crecerá el radical indefinidamente; luego la curva tiene dos ramos infinitos á la derecha de la recta PR, los cuales van alejándose sin límite del diámetro RS.

Si damos á x un valor menor que OP ó x', el radical es imaginario; luego á la izquierda de la recta PR no hay curva. Como ademas la curva, por ser de segundo grado, es convexa, se ve que tiene la misma forma que la parábola [42], con la que veremos mas adelante que coincide, demostrando que su ecuacion puede reducirse á la $y^2=2px$, que es la ecuacion de la parábola.

Fig. 74. 2.° Si $2(BD-2AE)$ es negativo, mudando los signos á los dos factores del producto bajo el radical, se podrá escribir este producto así:

$$2(2AE-BD)(x'-x);$$

y por consiguiente

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(2AE-BD)(x'-x)}.$$

Asi se ve fácilmente que, dando á x un valor mayor que x', el radical es imaginario, y por consiguiente no hay curva á la derecha de la recta PR. Dando á x valores menores que x', el radical es real; y como, cuanto menor sea x, tanto mayor es la diferencia $x'-x$, se infiere que la curva tiene dos ramos que se alejan indefinidamente del diámetro RA. Luego la curva es tambien una parábola.

La recta PR es tangente á la parábola, por ser paralela á las cuerdas que el diámetro RS biseca. Mas adelante veremos el modo de construir esta curva, conociendo la posicion de uno de sus diámetros, la tangente á la curva en su estremo y ademas un punto de la curva.

Casos particulares.

Si $$2(BD-2AE)=0,$$

será $$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF};$$

luego si $D^2-4AF=0$, la ecuacion representará la recta cuya ecuacion es $y=-\dfrac{Bx+D}{2A}$: si $D^2-4AF>0$, representa dos rectas paralelas; y si $D^2-4AF<0$, la ecuacion no representa nada.

NOTA 1.ª Hemos visto que si $B^2-4AC=0$, la ecuacion representa una parábola, dos rectas paralelas, una sola recta ó nada.

NOTA 2.ª Si $B^2-4AC=0$, ó $B^2=4AC$, los tres términos $Ay^2+Bxy+Cx^2$ forman el cuadrado de un binomio [*Algebra* 143]; y al contrario, si estos términos forman un cuadrado, se verificará que

$$B^2=4AC, \text{ ó } B^2-4AC=0.$$

96. En toda la discusion que precede hemos supuesto que la ecuacion era de segundo grado con respecto á y. Si la ecuacion fuese de segundo grado con respecto á x, resolviendo la ecuacion considerando como incógnita á esta variable, los valores de x solo se diferenciarian de los de y en que estarian permutadas las letras x é y, A y C, D y E; y por tanto los valores de x serian

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+E^2-4CF}.$$

Como el coeficiente de y^2 es el mismo en esta ecuacion que el que tiene x^2 en la ecuacion [A] n.º 92, discutiendo la nueva ecuacion, resultarian los mismos casos que en la discusion anterior; refiriendo actualmente al eje de las y todo lo que antes se referia al eje de las x, y al contrario.

97. Asi, cuando en la ecuacion particular que se proponga con objeto de determinar su lugar geométrico, entren los dos cuadrados de las dos variables, puede resolverse la ecuacion con respecto á cualquiera de ellas; pero será preferible resolverla con respecto á aquella variable cuyos coeficientes sean mas sencillos. Si solo entra en la ecuacion uno

de los cuadrados, se resolverá la ecuacion con respecto á la variable cuyo cuadrado entra en la ecuacion.

98. Nos falta ahora discutir el caso en que faltan los dos cuadrados, y la ecuacion tiene por consiguiente la forma

$$Bxy+Dy+Ex+F=0.$$

En este caso se verifica que B^2-4AC se convierte en la cantidad positiva B^2: y por tanto si esta ecuacion representa una curva, esta curva tendrá asíntotas (74, *ejemplo* 2.°).

El método general, para hallar las ecuaciones de las asíntotas, nos da

$$y=-\frac{E}{B},\ x=-\frac{D}{B}$$

para ecuaciones de estas dos rectas en el caso actual; y por tanto las asíntotas son paralelas á los ejes, y fáciles de construir.

Fig. 75. Si tomamos estas dos rectas $O'x'$, $O'y'$ por ejes de coordenadas; como el punto O' es el centro de la curva [82], la ecuacion de esta, referida á los nuevos ejes, será [*Nota primera al fin de la Geom. anal.*]

$$Bx'y'+f(a,b)=0,$$

ó

$$\left.\begin{array}{l} Bx'y'+Bab \\ \quad\ \ +Db \\ \quad\ \ +Ea \\ \quad\ \ +F \end{array}\right\}=0.$$

Poniendo aquí los valores de a y b, que son $a=-\frac{D}{B}$, $b=-\frac{E}{B}$, tendremos

$$Bx'y'+\frac{BF-DE}{B}=0$$

ó

$$x'y'=\frac{DE-BF}{B^2}.$$

Llamemos á la cantidad del 2.° miembro $\pm m^2$, y entonces la ecuacion de la curva será

$$x'y'=\pm m^2;$$

separando las dos ecuaciones, tendremos

$$x'y'=m^2,\ x'y'=-m^2.$$

La primera ecuacion nos dice que á valores positivos de x' corresponden valores positivos de y', y á valores negativos de x' corresponden valores negativos de y': luego la curva está comprendida en el ángulo $y'O'x'$ y en su opuesto por el vértice. Despejando y', es $y'=\frac{m^2}{x'}$: creciendo x' positiva ó negativamente, el valor absoluto de y' disminuye; luego la curva se va aproximando indefinidamente al eje $O'x'$, tanto á la derecha como á la izquierda del orígen, y cuando $x'=\pm\infty$, resulta $y'=0$; luego la curva tiene dos ramos infinitos, el uno AB en el ángulo $y'O'x'$, y el otro $A'B'$ en su opuesto, de las cuales es asíntota la recta $O'x'$. Despejando x' en la ecuacion $x'y'=m^2$, es $x'=\frac{m^2}{y'}$: creciendo y' positiva ó negativamente, el valor absoluto de x' vá disminuyendo, y cuando $y'=\pm\infty$, es $x'=0$; luego tambien la curva tiene dos ramos infinitos, el uno AC en el ángulo $y'O'x'$, y el otro $A'C'$ en su opuesto, de los cuales es asíntota la recta $O'y'$. Como por ser de segundo grado la ecuacion, es esta curva enteramente convexa, se ve que su forma es la de una hipérbola, y se demostrará mas adelante que efectivamente lo es.

Discutiendo la segunda ecuacion del mismo modo, se verá que representa una hipérbola, comprendida en el ángulo superior de la izquierda é inferior de la derecha.

Puede suceder que $m^2=0$; entonces la ecuacion de la línea, con respecto á los ejes $O'x'$, $O'y'$, es $x'y'=0$, ecuacion que solo se verificará cuando $x'=0$ é $y'=0$, es decir, que en tal caso la ecuacion representa los ejes $O'x'$, $O'y'$, ó sean dos paralelas á los ejes primitivos; y las ecuaciones de dichas paralelas son

$$y=-\frac{E}{B},\ x=-\frac{D}{B}.$$

Vemos pues que si la ecuacion de segundo grado carece de los dos cuadrados en y^2 y en x^2, la ecuacion representa una hipérbola ó dos rectas paralelas. En cualquier caso conviene principiar por hallar las ecuaciones de estas dos paralelas $y=-\frac{E}{B}$, $x=-\frac{D}{B}$, y construirlas: se hallará en seguida, haciendo $x=0$, el valor correspondiente de y; y si este valor es diferente de $-\frac{E}{B}$, es decir si la línea tiene un punto fuera de la recta $y=-\frac{E}{B}$, entonces la ecuacion representará una hipérbola, la cual se podrá construir fácilmente teniendo ya las asíntotas $y=-\frac{E}{B}$, $x=-\frac{D}{B}$, y uno de los puntos de la curva [187]. Si el punto de interseccion de la línea con el eje Oy es el mismo en que la recta $y=-\frac{E}{B}$ corta á dicho eje, entonces la ecuacion representa las dos rectas paralelas á los ejes, cuyas ecuaciones son $x=-\frac{E}{B}$, $x=-\frac{C}{B}$.

99. *Ejemplos*. 1.° $3y^2-6xy+9x^2-2y-6x+\frac{7}{3}=0$.

Comparándola con la ecuacion general es $A=3$, $B=-6$, $C=9$; $B^2-4AC=-72$: luego la ecuacion representa una elipse, un punto ó nada.

Resolviendo la ecuacion con respecto á una de las variables, á y por ejemplo, será

$$y=x+\frac{1}{3}\pm\sqrt{-2x^2+\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}}$$

Hallemos ahora las raices de la ecuacion

$$-2x^2+\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}=0 \ldots [1],$$

ó

$$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0,$$

y tendremos

$$x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3};\ x=1,\ x=\frac{1}{3}.$$

Las raices de la ecuacion [1] son, pues, reales y desiguales, y por consiguiente la ecuacion representa una elipse.

Vamos á determinar la posicion y magnitud de un sistema de diámetros conjugados de esta curva.

Fig. 76. Construyamos en primer lugar la recta AB cuya ecuacion sea $y=x+\frac{1}{3}$. Tomemos ahora $OP=\frac{1}{3}$, $OQ=1$, y tiremos las paralelas PR y QS al eje Oy: tendremos que RS será uno de los diámetros de la elipse. Para hallar su conjugado, pongo en el radical $\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}$ en vez de x la abscisa del centro, que es $\frac{1+\frac{1}{3}}{2}=\frac{2}{3}$, y resultará $\frac{1}{3}\sqrt{2}$: tomando, pues, en la ordenada indefinida KH, las partes $CH=CI=\frac{1}{3}\sqrt{2}$, tendré el diámetro HI conjugado del RS; con cuyos datos es fácil construir la elipse.

2.° $$2y^2+2x^2-10y-3x-5=0.$$

Si los ejes á que se refiere la curva representada por esta ecuacion son rectangulares, sabemos que la misma ecuacion representa un círculo, un punto ó nada [15].

Supongamos que los ejes no sean rectangulares. Tenemos $A=2$, $B=0$, $C=2$, $B^2-4AC=-16$; y por tanto la ecuacion representa una elipse, un punto ó nada.

Resolviendo la ecuacion, es

$$y=\frac{5}{2}\pm\sqrt{-x^2+x+\frac{35}{4}}$$

Resolviendo la ecuacion

$$-x^2+x+\frac{35}{4}=0,\ \text{ó}\ x^2-x-\frac{35}{4}=0,$$

resultan $x=\frac{7}{2}$, $x=-\frac{5}{2}$: luego la curva es una elipse.

Fig. 77. El diámetro $y=\frac{5}{2}$ es la recta AB: tomando ahora $OP=\frac{7}{2}$, $OQ=\frac{5}{2}$ y $OK=\frac{1}{2}$, y tirando por los puntos P, Q y K paralelas al eje Oy, tendremos ya un diámetro SR y el centro C de la elipse. Para hallar el diámetro conjugado de SR, pongo en el radical en lugar de x la abscisa $\frac{1}{2}$ del centro, y resulta que el radical vale $\sqrt{9}=3$; tomando pues $CH=CI=3$, tendré los dos diámetros conjugados SR y HI de la elipse.

3.° $x^2+2xy+5x-y+\frac{13}{4}=0$.

$A=0$, $B=2$, $C=1$, $B^2-4AC=4$; luego la ecuacion representa una hipérbola ó dos rectas que se cortan.

Resolviéndola con respecto á x, será

$$x=-y-\frac{5}{2}\pm\sqrt{y^2+8y+9}.$$

Las raices de la ecuacion $y^2+8y+9=0$ son $y=-4\pm\sqrt{7}$; luego la curva es una hipérbola en que el diámetro $x=-y-\frac{5}{2}$ la atraviesa.

Fig. 78. Construyamos en primer lugar este diámetro AB. Tomemos ahora $OP=4-\sqrt{7}$, $OQ=4+\sqrt{7}$, tiremos por los puntos P y Q dos paralelas al eje Ox, y tendremos un diámetro RS de la hipérbola; su punto medio C será el centro. Construyamos ahora las asíntotas, cuyas ecuaciones, segun la regla [75], son

$$x=-y-\frac{5}{2}\pm(y+4),$$

ó separándolas,

$$x=\frac{3}{2},\ x=-2y-\frac{13}{2}:$$

la primera es paralela al eje de las y; y como ya sabemos que tambien pasa por el centro, esta asíntota será la MN paralela á la Oy. Para construir la otra asíntota $M'N'$, hallaremos uno de sus puntos diferentes del centro: por ejemplo, haciendo $y=0$ en su ecuacion, tendremos $x=-\frac{13}{2}$; tomando $ON'=\frac{13}{2}$, la recta $M'CN'$ será la otra asíntota. Conociendo los asíntotas y los puntos R y S de la curva, se construye fácilmente la hipérbola, como lo veremos en [187].

4.° $$4y^2-4xy+x^2+4y-2x+2=0.$$

Los tres primeros términos componen el cuadrado de $2y-x$, y por tanto la ecuacion propuesta representará una parábola, una recta, dos paralelas ó nada.

Resolvamos la ecuacion con respecto á x.

Será $$x=2y+1\pm\sqrt{4y^2+4y+1-4y^2-4y-2}$$

ó $$x=2y+1\pm\sqrt{-1};$$

luego la ecuacion no representa nada.

Es fácil ver directamente que la ecuacion no puede representar nada.

En efecto, puede escribirse la ecuacion de este modo:

$$(2y-x)^2+2(2y-x)+1+1=0,$$

ó $$(2y-x+1)^2+1=0,$$

que es la suma de dos cuadrados, uno de ellos constante; y por tanto esta suma no puede ser cero, teniendo x é y valores reales; luego la ecuacion propuesta no representa nada.

5.° $$y^2+xy-2x^2-2y-2x+3=0.$$

$A=1$, $B=1$, $C=-2$, $B^2-4AC=1+8=9$: la ecuacion representa una hipérbola ó dos rectas que se cortan.

Resolviendo la ecuacion con respecto á y, tendremos

$$y=-\frac{x}{2}+1\pm\sqrt{\frac{9}{4}x^2+x-2}.$$

Fig. 79. Las raices de la ecuacion $\frac{9}{4}x^2+x-2=0$, son

$$x=\frac{-2+\sqrt{76}}{9},\ x=\frac{-2-\sqrt{76}}{9}:$$

como estas raices son reales y desiguales, la ecuacion representa una hipérbola á la cual atraviesa el diámetro AB cuya ecuacion es $y=-\frac{x}{2}+1$. Tomando, pues, $OP=\frac{-2+\sqrt{76}}{9}$, $OQ=\frac{2+\sqrt{76}}{9}$, y tirando las paralelas PR y QS al eje Oy, los puntos R y S serán los estremos del diámetro transversal RS: el punto medio C será el centro. Las asíntotas tendrán por ecuaciones

$$y=-\frac{x}{2}+1\pm\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right),$$

ó
$$y=x+\frac{4}{3},\ y=-2x+\frac{2}{3}.$$

Para construir las rectas representadas por estas ecuaciones, haremos en ellas $x=0$, y tendremos $y=\frac{4}{3}$, $y=\frac{2}{3}$; tomando pues $OT=\frac{4}{5}$, $OT'=\frac{2}{3}$, y tirando por el centro y por estos puntos dos rectas MN, $M'N'$, estas serán las asíntotas; y ahora es fácil, como mas adelante veremos, construir la hipérbola.

6.° $$y^2-2xy+2x^2-2y+3=0.$$

$A=1$, $B=-2$, $C=2$, $B^2-4AC=-4$: luego la ecuacion representa una elipse, un punto ó nada.

Resolviendo la ecuacion con respecto á y, tendremos

$$y=x+1\pm\sqrt{x^2+2x+1-2x^2-3},$$

ó
$$y=x+1\pm\sqrt{-x^2+2x-2}.$$

Las raices de la ecuacion $x^2-2x+1=0$

son
$$x=1\pm\sqrt{-1};$$

luego la ecuacion propuesta no representa nada.

7.° $$y^2-2xy-2y-2x-4=0.$$

$A=1$, $B=-2$, $C=0$, $B^2-4AC=4$; luego la ecuacion representa una hipérbola ó dos rectas que se cortan.

Resolviendo la ecuacion con respecto á y, tendremos

$$y=x+1\pm\sqrt{x^2+4x+5}.$$

Las raices de la ecuacion

$$x^2+4x+5=0$$

son
$$x=-2\pm\sqrt{-1},$$

es decir, que son imaginarias; luego la ecuacion representa una hipérbola en que el diámetro $y=x+1$ no corta á la curva. Construyamos este diámetro AB [*Súplase la falta de fig.*]:

la abscisa del centro es -2 [94, *al fin*]; luego tomando hácia la izquierda del orígen $OR=2$, y tirando RS paralela á Oy, tendremos el centro C. El mínimo valor del radical es el correspondiente á la abscisa -2 del centro, y dicho valor es 1; tomando pues $CR=CS=1$, tendremos los puntos R y S de la hipérbola que mas se aproximan al diámetro AB.

Las ecuaciones de las asíntotas son

$$y=x+1\pm(x+2),$$

ó separándolas, $\quad y=2x+3,\ y=-1.$

Haciendo en la primera $x=0$, resulta $y=3$; tomando, pues, $OM=3$, y tirando la recta CM se tendrá una asíntota; la otra es una paralela $M'N'$ al eje Ox tirada por el punto C, cuya ordenada es -1. Con las asíntotas y los puntos R y S de la hipérbola, no hay dificultad en construir la curva.

8.° $\qquad 3xy+2y-3x-5=0.$

Sabemos [98] que la ecuacion representa una hipérbola ó dos paralelas á los ejes. En ambos casos tenemos que principiar por hallar las ecuaciones de las dos paralelas á los ejes, que son las asíntotas, si la ecuacion representa curva; y si no, estas dos paralelas á los ejes componen el lugar geométrico de la ecuacion.

Las ecuaciones de las dos paralelas á los ejes son

$$x=-\frac{2}{3},\ y=1.$$

Fig. 80. Construidas estas dos rectas $O'y'$, $O'x'$, hallaremos, haciendo $x=0$, un punto de la curva, cuya ordenada es $y=\frac{5}{2}$: determinado este punto B, (y es diferente de aquel en que la recta $y=1$ corta al eje Oy) se ve que la ecuacion representa una hipérbola comprendida en el ángulo $y'O'x'$ y en su opuesto; y ya es fácil construirla, pues se tienen las asíntotas y un punto de la curva.

9.° $\qquad xy-3y+x+1=0.$

Las ecuaciones de las asíntotas, ó de las dos rectas que quizá represente esta ecuacion, son

$$x=3,\ y=-1$$

Fig. 81. Construidas las dos rectas $O'y'$, $O'x'$ cuyas ecuaciones son $x=3$, $y=-1$, y haciendo en seguida $y=0$ en la ecuacion propuesta, en cuyo caso resulta $x=-1$, tendremos un punto P de la curva, fuera de las rectas $O'x'$, $O'y'$;

luego la ecuacion propuesta representa una hipérbola, fácil de construir, pues se conocen las asíntotas $O'x'$, $O'y'$ y un punto P de esta curva.

10.° $$4xy+2y+x+\frac{1}{2}=0.$$

Tendremos para ecuaciones de las asíntotas, ó de las paralelas á los dos ejes representadas por la ecuacion, las ecuaciones

$$x=-\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{4}.$$

Haciendo $y=0$, resulta $x=-\frac{1}{2}$; es decir que la línea corta al eje Oy en el mismo punto que la recta $x=-\frac{1}{2}$; luego no puede ser hipérbola la línea representada; la ecuacion representa estas dos paralelas á los ejes: y en efecto, la ecuacion puede escribirse así:

$$4y\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)=0,$$

ó $$(4y+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0,$$

que se descompone en las dos ecuaciones

$$4y+1=0,\ x+\frac{1}{2}=0,$$

que representan dos paralelas á los ejes.

11.° $$y^2-2xy+6x^2-2y-28x+46=0.$$

$A=1$, $B=2$, $C=6$, $B^2-4AC=-20$; luego la ecuacion representa una elipse, un punto ó nada.

Resolviendo la ecuacion con respecto á y, será

$$y=x+1\pm\sqrt{-5x^2+30x-45}.$$

Las raices de la ecuacion $x^2-6x+9=0$ son 3 y 3: luego [93, 2.°] la ecuacion representa un punto cuyas coordenadas son 3 y 4. Para demostrarlo directamente, podemos escribir la ecuacion así:

$$y=x+1\pm(x-3)\sqrt{-5},$$

ecuacion que solo puede verificarse por los valores reales 3 y 4 de x é y.

12.° $$y^2-xy+x^2-y-x+\frac{3}{4}=0,$$

siendo los ejes rectangulares.

$A=1$, $B=-1$, $C=1$, $B^2-4AC=-3$; luego la ecuación representa una elipse, un punto ó nada.

Resolviendo la ecuacion con respecto á y, será

$$y=\frac{x+1}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{4}-x^2+x-\frac{3}{4}},$$

ó $$y=\frac{x+1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Las raices de la ecuacion

$$-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}=0,$$

son $$1+\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3};$$

luego la ecuacion representa una elipse; cuya construccion no ofrece ninguna dificultad.

Nota. Si los ejes de coordenadas formasen un ángulo cuyo doble-coseno fuese -1, es decir, si $2\cos\theta=-1$, ó $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, ó $\cos(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}$, y por consiguiente $180^\circ-\theta=60^\circ$, ó $\theta=120^\circ$; entonces la ecuacion propuesta representaria un círculo [58].

13.° $$y^2-2xy-2y+4=0.$$

$A=1$, $B=-2$, $C=0$, $B^2-4AC=4$; luego la ecuacion representa una hipérbola ó dos rectas que se cortan.

Resolviendo la ecuacion, tendremos

$$y=x+1\pm\sqrt{x^2+2x+1-4x},$$

ó $$y=x+1\pm(x-1),$$

ó $$y=2x,\ y=2;$$

es decir que son dos rectas que se cortan.

El primer miembro de la ecuacion se puede descomponer en el producto $(y-2x)(y-2)$; y por tanto dicha ecuacion es

$$(y-2x)(y-2)=0,$$

que da las dos rectas

$$y=2x\,,\quad y=2.$$

14.° $$y^2+2xy+x^2+4y+3x+3=0.$$

Los tres primeros términos componen un cuadrado, y por tanto la ecuacion representará una parábola, una recta, dos paralelas ó nada.

Resolviendo esta ecuacion con respecto á y, será

$$y=-x-2\pm\sqrt{x^2+4x+4-x^2-3x-3},$$

$$y=-x-2\pm\sqrt{x+1}:$$

luego la ecuacion propuesta representa una parábola [95].

Fig. 82. Construyendo el diámetro $y=-x-2$; toman- $OP=1$, y tirando por el punto P la PR, paralela al eje de las y, tendremos un diámetro y la tangente á la parábola en el punto R de interseccion del diámetro con la curva. Hallo ahora un punto de la curva, para lo cual haré, por ejemplo, $x=0$, lo que da $y=-2\pm1$; y así tengo dos puntos en falta de uno: con estos datos se puede construir fácilmente la parábola [213 y 216].

15.° $$9y^2-12xy+4x^2+9y-6x=0.$$

Los tres primeros términos componen el cuadrado de $3y-2x$; luego la ecuacion representará una parábola, dos rectas paralelas, una recta ó nada.

Resolviendo la ecuacion con respecto á x, será

$$x=\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}\pm\frac{3}{4},$$

ó

$$x=\frac{3y}{2}+\frac{3}{2},\quad x=\frac{3}{2}y;$$

de modo que la ecuacion representa dos rectas paralelas.

16.° $$4y^2-4xy+x^2+4y-2x+1=0.$$

Los tres términos componen el cuadrado de $2y-x$.

Resolviendo con respecto á x, será

$$x=2y+1\pm\sqrt{4y^2+4y+1-4y^2-4y-1},$$

ó

$$x=2y+1,$$

ecuacion que representa una recta.

CAPITULO V.

Reduccion de la ecuacion general de segundo grado á formas sencillas.

---

100. Para el estudio especial de las tres curvas de segundo grado, conviene conocer las ecuaciones mas sencillas de estas curvas, siendo rectangulares los ejes de coordenadas.

Fig 83. Supongamos en primer lugar que la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

represente una elipse ó una hipérbola: si tomamos por ejes de coordenadas dos rectas paralelas á los ejes primitivos, y cuyo orígen sea el centro O de la curva, la ecuacion carecerá de los términos lineales, y por tanto tendrá la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0$$

Si estos ejes no son rectangulares, referiremos la ecuacion á otros ejes rectagulares Ox, Oy cualesquiera que tengan el mismo orígen; y pues el orígen está en el centro, la ecuacion carecerá de los términos lineales [78], y tendrá siempre la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0 \quad \ldots \quad [1].$$

Entre los infinitos sistemas de ejes rectangulares, que pasan por el punto O, veamos si hay alguno Ox', Oy' que tenga la propiedad de que la ecuacion de la curva con respecto á dicho sistema carezca del rectángulo $x'y'$. Esto será posible, si hallando la ecuacion de la curva con respecto á estos ejes de posicion indeterminada, é igualando á cero el coeficiente de $x'y'$, nos da esta ecuacion para el ángulo $x'Ox$ ó α uno ó varios valores reales.

Las fórmulas para pasar de los ejes rectangulares Ox, Oy á los rectangulares Ox', Oy' se deducen de las generales [43, 2.° *caso*], haciendo en estas $\theta=90°$, $\alpha'=90°+\alpha$; y son por lo tanto:

$$x=x' \cos -y' \operatorname{sen}\alpha,$$
$$y=x' \operatorname{sen}\alpha+y' \cos\alpha.$$

Sustituyendo, y efectuando solo el cálculo necesario para obtener el coeficiente de $x'y'$, é igualando á cero dicho coeficiente, tendremos

$$2A \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\operatorname{sen}^2\alpha - 2C\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0,$$

ó $$2(A-C)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0.$$

Para sacar de esta ecuacion el valor de α, reemplazaremos $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ por sus valores en funcion de $\operatorname{tg}\alpha$, los cuales son

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

en cuyas dos fórmulas, sabemos [*Trigon.* 13], se deben tomar juntos los signos superiores ó los inferiores.

Sustituyendo, tendremos la ecuacion

$$2(A-C)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + B\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 0,$$

que se reduce á

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$$

En esta ecuacion el producto de los dos valores de $\operatorname{tg}\alpha$ es -1; luego [56] α tiene dos valores correspondientes á dos posiciones del eje Ox' perpendiculares entre sí. Luego, si el nuevo eje de abscisas ocupa cualquiera de las dos posiciones Ox', Ox'_1, y entonces el nuevo eje de ordenadas ocupará la posicion respectiva Oy', Oy'_1, la ecuacion de la curva con respecto á cualquiera de estos dos sistemas de ejes rectangulares carecerá del rectángulo en $x'y'$; por consiguiente, como no puede contener ningun término lineal, por ser el orígen centro, llamando M y N á los coeficientes de y'^2 y x'^2 la ecuacion de la elipse ó hipérbola tendrá la forma

$$My'^2 + Nx'^2 + F = 0 \text{ (1)}.$$

---

(1) Teniendo la ecuacion de la curva con respecto á los ejes Ox', Oy', se tendrá evidentemente la de la misma curva con respecto á los Ox'_1, Oy'_1, mudando en la ecuacion primera y' en x'_1, y x' en $-y'_1$; lo que puede tambien hallarse por las fórmulas de transformacion de las coordenadas. Como en los dos casos las mismas rectas son ejes de coordenadas, se puede decir que en la elipse é hipérbola hay un solo sistema de ejes rectangulares, con respecto á los cuales la ecuacion de la curva tiene la forma $My^2 + Nx^2 + F = 0$

101. Supongamos primeramente que esta ecuacion represente una elipse: entonces B^2-4AC, que ahora vale $-4MN$, debe ser negativo; luego M y N son cantidades diferentes de 0, y del mismo signo; y como siempre se puede hacer que M sea positivo, tambien N será positivo, de suerte que la ecuacion de la elipse es

$$My'^2+Nx'^2+F=0,$$

siendo M y N cantidades positivas.

102. Si la ecuacion $My'^2+Nx'^2+F=0$ representa una hipérbola, $-4MN$ será positivo, y por tanto M y N tienen que ser cantidades diferentes de 0, y de signo contrario; y pues M se puede hacer positiva, será N nagativa; de modo que, poniendo en manifiesto el signo de N, la ecuacion de la hipérbola será

$$My'^2-Nx'^2+F=0,$$

en la que M y N son cantidades positivas.

103. Supongamos ahora que la ecuacion

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

represente una parábola, y tratemos de simplificar esta ecuacion tomando otros ejes de coordenadas.

Fig 83. Suponiendo que los ejes primitivos Ox, Oy sean rectangulares, referiremos la ecuacion á los nuevos ejes rectangulares Ox', Oy', y determinaremos la posicion de estos nuevos ejes con la condicion de que desaparezca el término en $x'y'$. Como los términos lineales Dy, Ex no dan ningun término en $x'y'$, se infiere que el coeficiente de $x'y'$ será en esta transformacion el mismo que en el caso de la elipse é hipérbola; y por consiguiente la ecuacion, que nos ha de dar el ángulo α, será

$$\operatorname{tg}^2\alpha-2\,\frac{A-C}{B}\operatorname{tg}\alpha-1=0;$$

luego tambien en la parábola existe un sistema de ejes rectangulares Ox', Oy' con respecto á los cuales la ecuacion de esta curva carece del rectángulo en $x'y'$. Luego, si llamamos M, N, R y S á los coeficientes de y'^2, x'^2, y', x' en la ecuacion transformada, esta ecuacion será

$$My'^2+Nx'^2+Ry'+Sx'+F=0.$$

En el caso actual, en que $B^2-4AC=0$, uno de los coeficientes M ó N tiene que ser 0, pues $B^2-4AC=-4MN$, y por tanto $-4MN=0$: los dos coeficientes M y N no pueden ser ceros á la vez, porque si asi fuese, la ecuacion seria de primer grado, y no representaria curva. Podemos hacer, tomando uno ú otro de los dos valores del ángulo α, que desaparezca, á nuestro arbitrio, M ó N (1): es indiferente que desaparezca M ó N, y asi vamos nosotros á suponer que se ha tomado α de modo que $N=0$, y por tanto la ecuacion de la parábola con respecto al nuevo sistema de ejes rectangulares Ox', Oy', tendrá la forma

$$My'^2+Ry'+Sx'+F=0,$$

en la cual S no puede ser cero; pues si lo fuera, la ecuacion $My^2+Ry+F=0$ no representaria curva, sino dos líneas rectas paralelas al eje de las x, si las raices de esta ecuacion fuesen reales y desiguales; una sola recta paralela á dicho eje, si las raices fuesen reales é iguales; y nada, si las raices de la misma ecuacion fuesen imaginarias.

Continuando en nuestro propósito de simplificar la ecuacion, tomemos nuevos ejes $O'x''$, $O'y''$ paralelos á los Ox', Oy'; sean a y b las coordenadas del nuevo origen O' cuya posicion determinaremos con la condicion de que desaparezcan dos de

---

(1) En efecto, si en la transformacion de la ecuacion hallamos los coeficientes M y N, tendremos:

$$M=A\cos^2\alpha-B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+C\operatorname{sen}^2\alpha,$$
$$N=A\operatorname{sen}^2\alpha+B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha.$$

Como A es siempre positivo, y por ser $B^2-4AC=0$, tambien es C positivo, solo tendremos que considerar en las espresiones de M y N, los dos casos: B positivo y B negativo. En el primer caso, si se toma el valor de $\alpha \gtrless {}^{0}_{90^\circ}$, N tendrá todos sus términos positivos, y por tanto no puede ser 0; luego será $M=0$: pero si se tomase para α el valor mayor que 90°, todos los términos de M serian positivos, por lo que seria $N=0$. Si B es negativo, poniendo su signo en manifiesto, será

$$M=A\cos^2\alpha+B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+C\operatorname{sen}^2\alpha,$$
$$N=A\operatorname{sen}^2\alpha-B\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha;$$

y si $\alpha \gtrless {}^{0}_{90^\circ}$, todos los términos de M son positivos, y por consiguiente $N=0$; pero si $\alpha \gtrless {}^{90^\circ}_{180^\circ}$, todos los términos de N son positivos, y por tanto $M=0$. Luego, tomando α convenientemente, podemos hacer que desaparezca el término My^2, ó el término Nx^2

los términos de la nueva ecuacion: haremos $x'=x''+a$, $y'=y''+b$; y por consiguiente [*Nota primera al fin de la Geom. anal.*], tendremos

$$\left.\begin{array}{l} My''^2 + \begin{array}{c|} 2Mb \\ +R \end{array}\, y'' + Sx'' + \begin{array}{l} Mb^2 \\ +Rb \\ +Sa \\ +F \end{array} \end{array}\right\}=0.$$

Como las indeterminadas b y a entran en el coeficiente de y'' y en el último término, las determinaremos igualando á cero estas cantidades: tendremos pues

$$2Mb+R=0,\ Mb^2+Rb+Sa+F=0.$$

La primera ecuacion nos da $b=-\dfrac{R}{2M}$, y la segunda $a=-\dfrac{Mb^2+Rb+F}{S}$; y como M es un número diferente de 0, el valor de b es real y finito; y por consiguiente, como tambien S es un número diferente de 0, el valor de a es igualmente real y finito. Luego siempre es posible hallar un sistema de ejes rectangulares $O'x''$, $O'y''$, con respecto á los cuales la ecuacion de la parábola tenga la forma $My''^2+Sx''=0$.

104. Nota. Hemos demostrado que las ecuaciones de la elipse é hipérbola referidas á un cierto sistema de ejes rectangulares, cuyo orígen está en el centro de estas curvas, son respectivamente

$$My^2+Nx^2+F=0,$$
$$My^2-Nx^2+F=0.$$

en las que M y N representan números absolutos; y que la ecuacion de la parábola referida á un cierto sistema de ejes rectangulares es

$$My^2+Sx=0.$$

A estos mismos resultados podemos llegar con mayor brevedad por el razonamiento siguiente.

Sabemos [91] que en la elipse é hipérbola existe un solo sistema de diámetros conjugados rectangulares, ó sean ejes de estas curvas: si tomamos por ejes de coordenadas estos dos ejes de la curva, á cada valor de x corresponderán dos valores de y, iguales y de signo contrario; luego en las ecuaciones de estas curvas, con respecto á estos ejes, entrará el cuadrado en y^2, sin que haya término en que entre la primera poencia de y. Tambien á cada valor de y corresponden dos de x iguales y de signo contrario; luego en la ecuacion entrará un término en x^2, y no habrá término en x. Haciendo $x=0$, no es $y=0$; luego la ecuacion contendrá un término independiente de y y de x: luego la ecuacion de la elipse é hipérbola, tomando por ejes de coordenadas los mismos ejes de la curva, tendrán la forma

$$My^2+Nx^2+F=0;$$

y ahora se verá, por el valor B^2-4AC ó $-4MN$, que si la curva es elipse, M y N son cantidades positivas; y que si es hipérbola, N es negativa.

En la parábola hay un solo eje de la curva [91]: si lo tomamos por eje de abscisas y por eje de ordenadas una perpendicular á él levantada en el punto en que dicho eje corta á la curva; como á cada valor de x corresponden entonces dos de y iguales y de signo contrario, se infiere que la ecuacion contendrá un término único My^2 dependiente de y. Haciendo $x=0$ en la ecuacion, debe resultar $y=0$, por hallarse el orígen en un punto de la curva; luego la ecuacion no puede contener término alguno independiente de las variables.

Segun esto, la ecuacion tendrá la forma

$$My^2+Nx^2+Sx=0:$$

pero como $-4MN=0$, y M no puede ser 0, será $N=0$. Luego la ecuacion de la parábola, referida á su eje y vértice, tiene la forma

$$My^2+Sx=0.$$

CAPITULO VI.

Teoría de la elipse.

Artículo 1.°

Ecuacion de la elipse referida á sus ejes.

105. *Fig.* 84. Hemos visto que la ecuacion de la elipse referida á ciertos ejes rectangulares Oy, Ox, que pasan por su centro, tiene la forma

$$My^2+Nx^2+F=0,$$

siendo M y N cantidades positivas.

Representando esta ecuacion una elipse, F no puede ser cantidad positiva; pues la suma de tres cantidades positivas no puede ser 0. Tampoco F puede ser 0; pues si lo fuera, la ecuacion se reduciria entonces á

$$My^2+Nx^2=0,$$

que representa un punto cuyas coordenadas son 0 y 0. Luego F es una cantidad negativa $-P$; y por consiguiente la ecuacion de la elipse es

$$My^2+Nx^2=P \ldots\ldots [A],$$

en la cual M, N y P son cantidades positivas.

Como á cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario, el eje Ox divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al eje Oy, y por tanto el eje Ox divide á la elipse en dos partes ABC y ADC iguales; ó lo que es igual, la elipse es simétrica respecto del actual eje de abscisas. Tambien á cada valor de y corresponden dos valores de x iguales y de signo contrario; luego el eje Oy divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al eje Ox, y por lo mismo dicho eje Oy divide á la elipse en dos partes BAD, BCD iguales; ó bien estas dos partes de la elipse son simétricas respecto del eje Oy. Luego las rectas AC y BD son diámetros conjugados, y ejes de la curva.

Llamemos $2a$ al eje mayor AC, el cual tomaremos, mientras no advirtamos lo contrario, por eje de las x, y llamemos $2b$ al eje menor que tomaremos por eje de ordenadas, é introduzcamos en vez de las constantes M, N y P sus valores en funcion de a y b, con objeto de saber lo que son con respecto á la elipse las constantes que entran en su ecuacion.

Pero antes, aunque no importaria el no hacerlo, dividamos los dos miembros de la ecuacion $[A]$ por P, en cuyo caso esta ecuacion será

$$\frac{M}{P}y^2+\frac{N}{P}x^2=1 \ldots\ldots [B].$$

Haciendo ahora $x=0$, es $y=\pm b$; luego

$$\frac{M}{P}b^2=1, \text{ y } \frac{M}{P}=\frac{1}{b^2}.$$

Haciendo $y=0$, es $x=\pm a$; luego

$$\frac{N}{P}a^2=1, \quad \frac{N}{P}=\frac{1}{a^2};$$

sustituyendo los valores de $\frac{M}{P}$ y $\frac{N}{P}$ en la ecuacion $[B]_2$

será $$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1,$$

ó bien $$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

ó aun $$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

Cualquiera de estas ecuaciones es la ecuacion *usual* ú *ordinaria* de la elipse.

106. Supongamos que los ejes de la elipse sean iguales, esto es, que $a=b$; la ecuacion será entonces

$$y^2+x^2=a^2:$$

siendo los ejes de coordenadas rectangulares, esta ecuacion es la de un círculo cuyo radio es a. Luego *el círculo es una elipse cuyos ejes son iguales.*

107. *Hallar la magnitud de un semidiámetro de la elipse, dada la abscisa de uno de sus estremos.*

Fig. 85. Sean x é y las coordenadas del estremo M del diámetro, y a' la magnitud del semidiámetro, tendremos

$$a'^2=y^2+x^2;$$

ó sustituyendo el valor de y^2 que es $b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$, será

$$a'^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2,$$

y por consiguiente

$$a'=\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

Segun esta ecuacion, si $x=0$, es $a'=\pm b$. Si x va creciendo, a' crece tambien; luego cuando x tenga su mayor valor que es a, el valor de a' será tambien el mayor posible, que tambien es a; luego *el mayor de los diámetros de la elipse es el eje mayor, y el menor de sus diámetros es el eje menor.*

108. Sabemos que si un punto se halla en la elipse, y sus coordenadas son x é y, es

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0.$$

Fig. 86. Si el punto M cuyas coordenadas son x é y

está fuera de la elipse, tirando la recta OM, cortará á la elipse en un punto $M'(x', y')$. ; y por tanto tendremos

$$a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0.$$

Como los valores absolutos de x é y son mayores que los de x' é y', será $y^2>y'^2$, $x^2>x'^2$; luego

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2>0.$$

Si el punto M (x, y) está dentro de la elipse, tirando el radio OMM', y siendo x' é y' las coordenadas del punto M', será
$$a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0;$$
y como los valores absolutos de x é y son menores que los de x' é y', y por tanto $x^2<x'^2$, $y^2<y'^2$, será
$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2<0.$$

Recíprocamente, *si se verifica que*

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2 \overset{=}{\underset{<}{>}} 0,$$

el punto estará en la elipse, fuera de la elipse ó dentro [Geom. 21].

Artículo 2.°

Construccion de la elipse dados sus ejes.

109. La ecuacion de la elipse nos da el valor absoluto de la ordenada, $y=\dfrac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, que es una cuarta proporcional á las rectas a, b y $\sqrt{a^2-x^2}$: de donde resultan las construcciones siguientes.

1.ª *construccion.* *Fig.* 87. Describo dos círculos concéntricos con dos radios iguales á los semiejes OA y OB de la elipse que se quiere construir, tiro un radio cualquiera ON, y por los puntos M y N de interseccion con las dos circunferencias tiro dos paralelas, la primera al eje mayor y la segunda al menor, y el punto K de interseccion de estas dos paralelas será un punto de la elipse.

Repitiendo esta operacion, se tendrán tantos puntos de la elipse como se quieran.

Para demostrar que el punto K corresponde á la elípse, tenemos $NP=\sqrt{a^2-x^2}$, y la proporcion

$$ON : OM :: NP : PK, \text{ ó } a : b :: \sqrt{a^2-x^2} : PK;$$

luego PK es la cuarta proporcional pedida, ó el valor de y; y por tanto K es un punto de la elipse.

2.ª *construccion*. *Fig* 88. Haciendo centro en un punto cualquiera de los dos ejes, ó de sus prolongaciones, por ejemplo en D, se describe un arco con un radio igual á la suma de los semiejes de la elipse, el cual cortará al otro eje en un punto C, se tira la recta DC, y tomando sobre ella $DM=b$, el punto M será un punto de la elipse.

Repitiendo esta operacion, se tendrán tantos puntos de la elipse como se quieran.

Para demostrar que el punto M es un punto de la elipse, tiro MP y ME paralelas á los ejes, y tendré $CE=\sqrt{a^2-x^2}$; y en los triángulos semejantes CEM, MPD la proporcion

$$CM : MD :: CE : MP,$$

ó

$$a : b :: \sqrt{a^2-x^2} : MP,$$

es decir que MP es la ordenada de la elipse cuya abscisa es x; luego M es un punto de la elipse.

Nota. Esta construccion será muy espedita, si CD es una regla ó tira de papel, cuya longitud sea $a+b$ y sobre la cual esté marcado el punto M de separacion de los dos semiejes. Haciendo mover esta regla, de modo que sus estremos estén siempre sobre los ejes, el punto de separacion de los semiejes describirá la elipse.

3.ª *construccion*. *Fig*. 89. Desde un punto M del eje menor se describe un arco con un radio MN igual á la diferencia de los dos semiejes, se tira la recta indefinida MNP, y sobre ella se toma una parte MP igual al semieje mayor: el punto P asi determinado es un punto de la elipse.

En efecto, tiro las rectas MR y PR, paralelas á los ejes, y tendré $PR=\sqrt{a^2-x^2}$; y en los triángulos semejantes MPR, PNQ la proporcion

$$MP : NP :: PR : PQ,$$

ó

$$a : b :: \sqrt{a^2-x^2} : PQ;$$

luego PQ es la ordenada de la elipse, ó bien P es un punto de esta curva.

Nota. Si MP es una regla igual al semieje mayor, y en ella está marcado el punto N, tal que $PN=b$; recorriendo esta regla de modo que los dos puntos M y N se hallen respectivamente sobre el semieje menor y mayor, el estremo P irá señalando los diferentes puntos de la elipse, y de este modo se construye la elipse con brevedad.

Cualquiera que sea el método que se siga en la construccion de la elipse, la simetría de esta curva con respecto á sus ejes, prueba que, cuando se ha construido un cuarto de elipse, los otros tres cuartos pueden deducirse de él.

Artículo 3.°

Focos y directrices de la elipse

110. Se llama *foco* de una curva de segundo grado todo punto cuya distancia á cualquier punto de la curva es una funcion racional y entera de la abscisa de dicho punto; siendo la ecuacion de la curva la ecuacion ordinaria (1).

Para determinar los focos de la elipse en virtud de esta definicion, llamemos δ á la distancia del foco á un punto cualquiera de la curva, x' é y' á las coordenadas incógnitas del foco, x é y á las de un punto cualquiera de la curva: tendremos

---

(1) Esta última condicion es necesaria; pues si la distancia del foco á un punto de la curva es funcion racional y entera de la abscisa del punto, siendo la ecuacion la ordinaria; siendo otra la ecuacion, ó bien otros los ejes de coordenadas, dicha distancia será funcion racional y entera de las dos coordenadas del punto. En efecto, supongamos que con respecto á los ejes Ox, Oy de la elipse sea la distancia δ funcion racional y entera (tiene que ser de primer grado), esto es, sea $\delta=mx+n$; el valor de δ con respecto á otros ejes, se hallará sustituyendo en la espresion anterior el valor de x, que en general es

$$x=a+\frac{x'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)+y'\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta};$$

y por consiguiente con respecto á estos ejes seria

$$\delta=n+ma+\frac{m\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}x'+\frac{m\operatorname{sen}(\theta-\alpha')}{\operatorname{sen}\theta}y';$$

es decir que δ es funcion racional y entera de las dos coordenadas.

Euler, que fué el primero que dió esta definicion general de los focos, no indicó dicha condicion, porque suponia naturalmente que las ecuaciones de las curvas de segundo grado eran las ordinarias.

dremos $\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2$.... [1].

Desenvolviendo el segundo miembro de la ecuacion [1], será $\delta^2=x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2$;
sustituyendo los valores de y^2 é y en funcion de x, que son

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},\ y=\pm\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}},$$

tendremos

$$\delta^2=x^2-2xx'+x'^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\pm2\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}\times y'+y'^2.$$

Como δ debe ser funcion racional y entera de x, δ^2 debe serlo con mayor razon; pero esto no puede conseguirse mientras en el valor de δ^2 subsista el término irracional $2\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}\times y'$: es menester, pues, que este término desaparezca; y para esto, debe ser $y'=0$, puesto que $\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}$ no puede ser cero, por ser x la abscisa de un punto cualquiera de la elipse. Siendo $y'=0$, vemos que todo foco de la elipse estará sobre el eje actual de las x, que esel eje mayor.

Segun esto, el valor de δ^2 será

$$\delta^2=x^2-2xx'+x'^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2},$$

ó

$$\delta^2=\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}-2xx'+(x'^2+b^2)\ \ldots\ [2].$$

Para que δ sea una funcion racional y entera de x, es preciso que este trinomio tenga raiz cuadrada exacta, ó lo que es igual, que sea un cuadrado perfecto, condicion que nos va á dar el valor de x. En efecto, para que este trinomio sea un cuadrado perfecto, es necesario y suficiente que el producto de los coeficientes de los términos estremos sea igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del término medio [*Alg*. 143], es decir, que

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}(x'^2+b^2)=x'^2,$$

de donde resulta

$$x' = \pm\sqrt{a^2 - b^2} \quad (1).$$

Fig. 90. Teniendo x' dos valores iguales y de signo contrario, se infiere que la elipse tiene dos focos situados en el eje mayor y á igual distancia del centro; y para determinarlos, es claro que, como $\sqrt{a^2-b^2}$ es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a y el otro cateto es b, no habrá mas que describir desde uno de los estremos del eje mayor un arco con un radio igual al semieje mayor, y los dos puntos F y F', en que este arco corte al eje mayor, serán los dos focos.

Para hallar ahora los valores de δ, y ver confirmado de paso que δ es una funcion racional y entera de x, pongamos en la ecuacion [2] en vez de x' sucesivamente sus dos valores $+\sqrt{a^2-b^2}$ y $-\sqrt{a^2-b^2}$.

Sustituyendo el primero, será

$$\delta^2 = \frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2} - 2x\sqrt{a^2-b^2} + a^2,$$

y por consiguiente

$$\delta = \pm\left(\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a} - a\right),$$

que es con respecto á x una funcion racional y entera [*Algebra superior* 277].

De estos dos signos deberemos tomar el que haga positivo al valor de δ, puesto que en δ no debemos ver mas que un valor absoluto. Si x es negativo, la cantidad $\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es negativa, y tambien $\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a} - a$. Si x es positivo, como $\sqrt{a^2-b^2} < a$, y $x < a$, será $x\sqrt{a^2-b^2} < a^2$, y por consiguiente $\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a} < a$. En todos casos es, pues, negativa la cantidad

---

(1) En el círculo es $a=b$; luego la abscisa de los focos es 0, es decir que los dos focos del círculo, considerado como elipse, coinciden con el centro.

del paréntesis; luego deberemos tomar el signo esterior $-$; y por tanto el radio *vector* del foco derecho es

$$FM=a-\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Pongamos ahora en la ecuacion [2] el segundo valor $-\sqrt{a^2-b^2}$ de x': tendremos

$$\delta^2=\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2}+2x\sqrt{a^2-b^2}+a^2,$$

y $$\delta=\pm\left(\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}+a\right).$$

Si x es positivo, la cantidad interior al paréntesis es positiva; luego en este caso debe tomarse el signo esterior $+$. Si x es negativo, su valor absoluto es menor que a, ó á lo mas igual á a; pero como $\sqrt{a^2-b^2}<a$, se ve que el valor absoluto de $\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ es menor que a; luego la cantidad interior al paréntesis es positiva aun en este caso: luego en todos casos deberemos tomar el signo $+$; y por tanto el radio vector del foco izquierdo es

$$F'M=a+\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

En adelante, con objeto de abreviar, representaremos por c la cantidad $\sqrt{a^2-b^2}$ que se llama *escentricidad* de la elipse; y asi entre a, b y c tendremos la ecuacion

$$c^2=a^2-b^2, \text{ ó } a^2=b^2+c^2.$$

Los valores de los radios vectores serán por lo tanto

$$FM=a-\frac{cx}{a}, \quad F'M=a+\frac{cx}{a}.$$

111. Si sumamos los dos valores de FM y $F'M$, tendremos

$$FM+F'M=2a.$$

Luego *la suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la elipse es constante é igual al eje mayor*.

Corolario. Fig. 91. *Si el punto M está fuera de la elipse, la suma MF+MF' de sus dos distancias á los focos es mayor que*

Ver al final la manera de hallar los radios vectores de la elipse pag. 468.

2a; *y si el punto* M′ *está dentro de la elipse, la suma* M′F+M′F′ *de sus dos distancias á los focos es menor que* 2a

En efecto, tirando la recta NF, tenemos evidentemente

$$MF+MF'>NF+NF';$$

y puesto que $NF+NF'=2a$, será

$$MF+MF'>2a.$$

Si el punto M' está dentro de la elipse, tendremos

$$M'F+M'F'<NF+NF',$$

ó bien
$$M'F+M'F'<2a.$$

Recíprocos 1.° *Si la suma de las distancias de un punto á los focos de la elipse es igual al eje mayor, dicho punto corresponde á la elipse.* 2.° *Si la suma de las distancias de un punto á los focos es mayor que el eje mayor, dicho punto está fuera de la elipse.* 3.° *Si la suma de las distancias de un punto á los focos es menor que el eje mayor, dicho punto está dentro de la elipse* [Geometría 21].

Vemos, pues, que la propiedad [111] corresponde esclusivamente á los puntos de la elipse. Se puede, segun esto, definir la elipse diciendo: que *es una curva en la que la suma de las dos distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es una cantidad constante*; y efectivamente, de esta definicion de la elipse dedugimos en el número 40 la ecuacion de esta curva.

112. En virtud de esta propiedad de la elipse puede construirse esta curva, dados sus ejes, por puntos y tambien por un movimiento contínuo.

Fig. 92. Para construir la elipse por puntos, se determinan en primer lugar los focos F y F', se marca sobre el eje mayor un punto cualquiera P, intermedio entre los focos, y haciendo centro sucesivamente en estos dos puntos, se describirán con el radio AP dos arcos; haciendo centro en seguida en los mismos dos focos, se describen con el radio CP otros dos arcos, que cortarán á los anteriores en los cuatro puntos M, M', N, N', los cuales corresponden á la elipse. Tomando otro punto intermedio entre los focos, y haciendo la misma construccion, se hallarán otros cuatro puntos, y del mismo modo se pueden hallar tantos puntos como se quieran.

Demostremos primeramente que los dos círculos trazados desde los focos con los radios AP y CP se cortan en dos puntos.

En efecto, la distancia FF' de los centros es menor que la suma AC de los radios, y mayor que la diferencia de estos radios, la cual es $CP-AP=F'P-FP$. Pero si el punto P se tomase en F ó F', la distancia de los centros seria igual á la diferencia de los radios, y por tanto las dos circunferencias se tocarian interiormente en los puntos A y C, dados ya. Finalmente, si el punto P se tomase en P', fuera de los focos, la distancia de los centros FF' seria menor que la diferencia de los radios $CP'-AP'=CF-AF+FP'=FF'+FP'$; luego una de las circunferencias seria interior á la otra, y por tanto no se cortarian.

Los puntos M, N ... son puntos de la elipse, puesto que la suma de sus dos distancias á los focos es igual al eje mayor.

Para construir la elipse por un movimiento contínuo, se fijan en los focos los estremos de un hilo, cuya longitud sea igual al eje mayor; se pone tirante este hilo por medio de una punta ó estilo, y esta punta, moviéndose de modo que esté siempre tirante el hilo, describirá la elipse; pues en cualquiera de las posiciones de dicha punta se verifica que la suma de las dos distancias á los focos es igual al eje mayor.

143. *Directrices*. Se llama *directriz* de una curva de segundo grado la recta representada por la ecuacion que resulta igualando á cero la espresion ordinaria del radio vector.

Determinemos segun esta definicion las directrices de la elipse.

La espresion del radio vector del foco positivo es $a-\frac{cx}{a}$, y la del radio vector del foco negativo es $a+\frac{cx}{a}$; luego las ecuaciones de las directrices de la elipse serán

$$a-\frac{cx}{a}=0,\ a+\frac{cx}{a}=0,$$

de las cuales resultan

$$x=\frac{a^2}{c},\ x=-\frac{a^2}{c};$$

luego la elipse tiene dos directrices paralelas al eje menor.

Fig. 93. Para construirlas, observaremos que el primer valor de x es una tercera proporcional á c y a: haremos pues centro en O y describiremos con el radio $OA=a$ un arco que cortará en M á la perpendicular levantada al eje mayor en el foco, tiraremos el radio OM, y por el punto M la MD perpendicular al radio OM; y será OD el valor de x, puesto que

$$OM^2=OD\times OF,\ \text{ó}\ a^2=OD\times c,$$

de donde $$OD=\frac{a^2}{c}.$$

Tomando $OD'=OD$, y levantando por los puntos D y D' dos perpendiculares DR y $D'R'$ al eje mayor, estas perpendiculares serán las directrices de la elipse.

Hallemos la razon de las dos distancias de un punto cualquiera M *de la elipse al foco y directriz correspondiente.*

Tenemos

$$NF=a-\frac{cx}{a},\ NP=SP-SN=OD-x=\frac{a^2}{c}-x;$$

luego $$\frac{NF}{NP}=\frac{a-\frac{cx}{a}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{\frac{a^2-cx}{a}}{\frac{a^2-cx}{c}}=\frac{c}{a}.$$

Luego *las distancias de un punto cualquiera de la elipse al foco y directriz correspondiente son entre sí como la escentricidad al semieje mayor.*

Articulo 4.º

Parámetro de la elipse

114. *Hallar la ecuacion de la elipse tomando por ejes de coordenadas el eje mayor y la perpendicular á este eje levantada en el vértice izquierdo.*

Fig. 94. Sean Cx' y Cy' los nuevos ejes: tendremos que pasar de los ejes Ox, Oy á sus paralelos Cx', Cy'. Las fórmulas generales de transformacion de este caso son $x=x'+a$, $y=y'+b$, siendo a y b las coordenadas del nuevo orígen con respecto á los ejes primitivos. Actualmente la abscisa del nuevo orígen es $-a$ y su ordenada es 0; luego las fórmulas de transformacion serán $x=x'-a$, $y=y'$. Sustituyendo estos valores

en la ecuacion $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, tendremos

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-(x'-a)^2\right),$$

ó

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}\ (2\,a\,x'-x'^2).$$

114. La ecuacion, que acabamos de hallar, puede escribirse así:

$$y'^2=\frac{2b^2}{a}\,x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2;$$

el coeficiente $\frac{2\,b^2}{a}$, que tiene x' en esta ecuacion, se llama *parámetro* de la elipse; y como $\frac{2\,b^2}{a}=\frac{4\,b^2}{2\,a}$, se ve que *el parámetro de la elipse es una tercera proporcional al eje mayor y al menor*.

La doble ordenada que pasa por el foco de la elipse, es igual al parámetro.

En efecto, pongamos en la ecuacion ordinaria de la elipse en lugar de x la abscisa $\pm c$ del foco, en cuyo caso el valor correspondiente de y será la ordenada que pasa por este punto, y tendremos

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\ (a^2-c^2);$$

y como $a^2-c^2=b^2$, será

$$y^2=\frac{b^4}{a^2},\ \text{é}\ y=\frac{b^2}{a};$$

luego la doble ordenada será $\frac{2b^2}{a}$, que es el parámetro.

Si llamamos $2p$ al parámetro $\frac{2b^2}{a}$, será $b^2=ap$, y sustituyendo este valor en la ecuacion de la elipse referida á su vértice, será

$$y^2=2px-\frac{p}{a}\ x^2,$$

ecuacion de la elipse referida á su vértice y parámetro.

Artículo 5.º

Tangentes á la elipse.

115. *Hallemos la ecuacion de la tangente á la elipse en el punto cuyas coordenadas sean* x′ *é* y′:

El coeficiente angular de la tangente á una curva en un punto (x', y') es $-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}$. La ecuacion ordinaria de la elipse es

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0;$$

luego $f'_{x'}=2b^2x'$, $f'_{y'}=2a^2y'$; y por consiguiente

$$-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}=-\frac{2b^2x'}{2a^2y'}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Tal es la espresion del coeficiente angular de la tangente á la elipse; ó bien, puesto que los ejes son ahora rectangulares, $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ es la tangente del ángulo que forma la tangente á la elipse con el eje de abscisas.

Por consiguiente la ecuacion de la tangente, recta que pasa por el punto de contacto (x', y'), y cuyo coeficiente angular es conocido, será

$$y-y'=-\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'),$$

que se puede simplificar. Para esto, quito el denominador y efectúo la multiplicacion indicada, y tendré

$$a^2yy'-a^2y'^2=-b^2xx'+b^2x'^2,$$

ó $$a^2yy'+bxx'=a^2y'^2+b^2x'^2:$$

mas, por corresponder á la elipse el punto (x', y'), tenemos

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2;$$

luego la ecuacion de la tangente á la elipse será

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2,$$

que es fácil de retener por su semejanza con la ecuacion de la elipse.

116. Discusion del coeficiente angular de la tangente á la elipse.

Llamando T al ángulo que forma la tangente á la elipse en el punto (x', y') con el eje de las x, tenemos

$$\operatorname{tg} T = -\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Supongamos que el punto (x', y') corresponda al cuarto de elipse superior de la derecha.

Si $x'=0$, y por consiguiente $y'=b$, será $\operatorname{tg} T=-0$, y por tanto $T=180°$: luego la tangente á la elipse en el estremo del eje menor es paralela al eje mayor.

Si x' va creciendo, y' irá disminuyendo, y por tanto $\operatorname{tg} T$ crecerá negativamente: luego el ángulo obtuso T irá disminuyendo.

Si $x'=a$, y por consiguiente $y'=0$, será $\operatorname{tg} T=\infty$, y $T=90°$: luego la tangente en el vértice de la elipse es perpendicular al eje mayor.

Supongamos ahora que el punto de contacto (x', y') corresponda al cuarto de elipse inferior de la derecha, en cuyo caso x' es positiva é y' negativa.

Si desde $y'=0$ crece y' negativamente, y por consiguiente disminuye x', $\operatorname{tg} T$ será positiva, é irá disminuyendo; luego el ángulo T, que forma la tangente con el eje de abscisas, va disminuyendo desde el valor 90°.

Si $y'=-b$, y por consiguiente $x'=0$, será $\operatorname{tg} T=0$, y $T=0$. Vemos, pues, que los ángulos que las tangentes á la semielipse derecha forman con el eje de abscisas pasan por todos los estados de magnitud desde 0, que es el que forma la tangente en el estremo inferior del eje menor, hasta 180° que es el que forma con el mismo eje la tangente en el estremo superior del eje menor.

La simetría de las dos semielipses derecha é izquierda prueba que los ángulos que las tangentes á la semielipse izquierda forman con el eje de las x pasan por los mismos estados de magnitud; lo que tambien puede hallarse directamente discutiendo la espresion de $\operatorname{tg} T$.

117. Habiendo hallado la ecuacion de la tangente á la elipse, resolveremos ahora con respecto á esta curva los tres problemas que resolvimos generalmente en el número 65.

Problema 1.° *Conociendo la posicion y magnitud de uno de* *los ejes de la elipse, y un punto de esta curva, tirarla por este punto una tangente; estando ó no construida la curva* (1).

Fig. 95. Supongamos en primer lugar que se conozca el eje mayor AC. Sea M el punto por el cual se ha de tirar la tangente: haciendo $y=0$ en la ecuacion de la tangente á la elipse, en cuyo caso x será la abscisa OT del punto en que la tangente corta al eje de las x (2), tendremos

$$b^2.OT.x'=a^2b^2,$$

de donde $OT=\frac{a^2}{x'}$; lo que nos dice que la abscisa del pié de la tangente á la elipse es una tercera proporcional á la abscisa del punto de contacto y al semieje mayor.

Para construir esta tercera proporcional de una manera elegante, prolongaremos en el sentido positivo la ordenada MQ del punto dado M, desde el punto O describiremos con el radio OA un arco que cortará á dicha ordenada indefinida en un punto N, tiraremos el radio ON, y por el punto N una perpendicular á este radio, y tendremos la OT que será la tercera proporcional pedida.

En efecto, el triángulo rectángulo ONT nos da

$$ON^2=OT\times OQ,$$

ó $$a^2=OT\times x', \text{ de donde } OT=\frac{a^2}{x'}$$

Tirando pues la recta MT, esta será la tangente.

Fig. 96. Supongamos ahora que se dé el eje menor BD

---

(1) Cualquiera que sea el eje de la elipse que se conozca, llamando x' é y' á las coordenadas del punto dado, tendremos la ecuacion

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,$$

ecuacion que nos dará la b, si es conocida la a, y al contrario. Vemos pues, que los datos de este problema son suficientes para llegar á conocer la magnitud y posicion de los dos ejes de la elipse, y por tanto dichos datos equivalen á darse la elipse y un punto de esta curva.

(2) En adelante por abreviar, llamaremos *pié* de la tangente ó de la normal al punto en que cada una de estas rectas corta al eje de las x.

y el punto M que ha de ser el punto de contacto. Haciendo $x=0$ en la ecuacion de la tangente, será

$$a^2.OT.y'=a^2b^2, \text{ de donde } OT=\frac{b^2}{y'},$$

tercera proporcional á y' y b. Para construirla, describo con el radio $OB=b$ desde el centro O un arco que cortará á la abscisa MQ del punto M en el punto N, tiro el radio ON, y por el punto N la perpendicular NT á este radio, y será OT la tercera proporcional.

En efecto, el triángulo rectángulo ONT nos da

$$ON^2=OT\times OQ,$$

ó

$$b^2=OT\times y', \text{ de donde } OT=\frac{b^2}{y'}.$$

Tirando, pues, la recta MT, se tendrá la tangente á la elipse en el punto M.

Problema 2.° *Dadas la magnitud y posicion de los ejes de una elipse, tirarla una tangente desde un punto* (α, β), *estando ó no construida la curva.*

La ecuacion de la tangente á la elipse es

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2.$$

Por hallarse el punto (α,β) sobre esta recta, tendremos

$$a^2\beta y'+b^2\alpha x'=a^2b^2.$$

Tenemos ademas, por corresponder el punto (x', y') á la elipse, la ecuacion

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

Estas dos ecuaciones nos darán los valores de las dos incógnitas x' é y'

Eliminemos una de las dos incógnitas, y' por ejemplo: para esto, despejaremos y' en la primera ecuacion, y tendremos

$$y'=\frac{a^2b^2-b^2\alpha x'}{a^2\beta} \quad [A],$$

y sustituyendo este valor en la segunda ecuacion, será

$$\frac{a^4b^4-2a^2b^4\alpha x'+b^4\alpha^2x'^2}{a^2\beta^2}+b^2x'^2=a^2b^2,$$

ó, suprimiendo el factor comun b^2,

$$\frac{a^4b^2-2a^2b^2\alpha x'+b^2\alpha^2x'^2}{a^2\beta^2}+x'^2=a^2,$$

ó $$x'^2\,(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)-2a^2b^2\alpha x'-a^4(\beta^2-b^2)=0,$$

de donde

$$x'=\frac{a^2b^2\alpha\pm\sqrt{a^4b^4\alpha^2+a^4(\beta^2-b^2)(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2};$$

que se reduce á

$$x'=a^2\times\frac{b^2\alpha\pm\beta\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$$

Habiendo hallado el valor de x', hallaremos el de y' sustituyendo el de x' en la ecuacion [A]; y asi resulta

$$y'=b^2\times\frac{a^2\beta\mp\alpha\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}.$$

Estos valores de x' é y' resuelven el problema; y prueban ademas, que si el punto dado está fuera de la elipse (en cuyo caso $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2>0$, y entonces los valores de x' é y' son reales), x' tiene dos valores y otros dos y'; y por tanto desde un punto esterior á la elipse se la pueden tirar dos tangentes.

Si el punto dado (α, β) está en la misma elipse, es $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2=0$, y por consiguiente x' é y' no tienen mas valor que α y β; lo que nos dice que por un punto dado en la elipse no se la puede tirar mas que una sola tangente; lo que sabíamos ya.

Finalmente, si el punto dado (α, β) está dentro de la elipse, es $a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2<0$, y los valores de x' é y' son imaginarios; y por tanto desde un punto interior á la elipse no se la puede tirar ninguna tangente; lo que evidentemente debe ser asi.

La construccion de los valores de x' é y' seria muy complicada: es mas sencilla la construccion de la recta que pasa por los dos puntos de contacto.

En efecto la ecuacion

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2$$

es la ecuacion de la recta que pasa por los dos puntos de contacto, puesto que reemplazando en esta ecuacion x é y por

x' é y', coordenadas de estos puntos, resulta la igualdad cierta

$$a^2\beta y'+b^2\alpha x'=a^2b^2.$$

Para construir dicha recta, hallaremos sus puntos de interseccion con los ejes, haciendo sucesivamente $y=0$ y $x=0$, y despejando los valores correspondientes de x é y, que son $x=\frac{a^2}{\alpha}, y=\frac{b^2}{\beta}$. Construidas estas dos terceras proporcionales análogamente á las terceras proporcionales $\frac{a^2}{x'}, \frac{b^2}{y'}$ del problema primero, se tendrán los dos puntos de interseccion de la recta y los ejes; tirando esta recta, sus intersecciones con la curva, suponiendo que esta esté construida, serán los dos puntos de contacto.

Pronto veremos un método mas sencillo para la resolucion geométrica de este problema, estando ó no construida la curva.

Problema 3.° *Dados los ejes de la elipse, tirarla una tangente paralela á una recta dada*, ó lo que es igual, *una tangente cuya direccion sea dada, estando construida ó no la curva.*

Sea α la tangente del ángulo que la recta dada forma con el eje de abscisas: como la tangente pedida debe ser paralela á esta recta, los ángulos que las dos forman con el eje Ox serán iguales; luego

$$-\frac{b^2x'}{a^2y'}=t,$$

primera ecuacion que contiene á las incógnitas x' é y'. La segunda ecuacion es evidentemente

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, tendremos

$$x'=\frac{t^2a^2}{\mp\sqrt{t^2a^2+b^2}},\ y'=\frac{b^2}{\pm\sqrt{t^2a^2+b^2}}$$

Segun estas fórmulas, cada incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario; lo que asi debe ser, porque ya se sabe que existirán en la elipse dos tangentes paralelas á la recta dada, y que los puntos de contacto estarán en los extremos de un diámetro [88, *Corol.*].

No nos detendremos en la construccion de estos valores, porque pronto veremos un método muy sencillo para la solucion geométrica de este problema, y otro mas sencillo aun, si la elipse está construida.

118. Se llama *subtangente* la parte del eje de las x comprendida entre el pié de la ordenada del punto de contacto y el pié de la tangente.

Fig. 97. El valor de esta línea, la cual en el estado actual de la ciencia es de poca importancia, puede hallarse fácilmente en la elipse por los dos modos siguientes: 1.° restanto de la abscisa OT del pié de la tangente la abscisa x' del punto M de contacto, 2.° por medio del triángulo rectángulo MQT, en el cual se conocen el cateto y' y el ángulo MTQ. De cualquier modo, llamando St á la subtangente, será

$$St=\frac{a^2-x'^2}{x'}.$$

118. *Ecuacion de la normal á la elipse.*

Siendo la normal una perpendicular á la tangente en el punto de contacto, su ecuacion será [56]

$$y-y'=-\frac{1}{\frac{-b^2x'}{a^2y'}}(x-x'),$$

ó

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x'),$$

que se reduce á

$$a^2xy'-b^2yx'=c^2x'y'$$

Haciendo en esta ecuacion $y=0$, y por consiguiente $x=ON$, tendremos

$$ON=\frac{c^2x'}{a^2},$$

espresion que nos dice, que el pié de la normal á la semielipse derecha está á la derecha del centro, y que el pié de la normal á la semielipse izquierda está á la izquierda del centro.

119. Se llama *subnormal* la parte NQ del eje de abscisas comprendida entre el pié de la normal y la ordenada del punto de contacto.

El valor de esta línea, poco importante, se hallará en la elipse fácilmente, restando la abscisa ON del pié de la normal de la abscisa x' del punto M de contacto; ó bien por el triángulo rectángulo MNQ; ó en fin por ser una tercera proporcional á la subtangente y ordenada del punto de contacto. Resulta por cualquiera de estos modos, llamando Sn á la subnormal,

$$Sn=\frac{b^2x'}{a^2}.$$

120. Otra solucion geométrica de los problemas 1.°, 2.° y 3.° sobre las tangentes á la elipse.

Teorema. *Los radios vectores tirados al punto de contacto de la tangente á la elipse forman ángulos iguales con la tangente.*

1.ª *Demostracion.* *Fig.* 97. La ecuacion de la normal MN es

$$a^2xy'-b^2yx'=c^2x'y':$$

haciendo en ella $y=0$, y por consiguiente $x=ON$, será

$$a^2.ON.y'=c^2x'y',$$

de donde

$$ON=\frac{c^2x'}{a^2}.$$

Luego

$$F'N=c+\frac{c^2x'}{a^2}=\frac{c(a^2+cx')}{a^2},$$

$$FN=c-\frac{c^2x'}{a^2}=\frac{c(a^2-cx')}{a^2};$$

y por consiguiente

$$\frac{F'N}{FN}=\frac{a^2+cx}{a^2-cx} \ldots [K].$$

Ahora [110],

$$F'M=a+\frac{cx'}{a}=\frac{a^2+cx'}{a},$$

$$FM=a-\frac{cx'}{a}=\frac{a^2-cx'}{a};$$

luego

$$\frac{F'M}{FM}=\frac{a^2+cx'}{a^2-cx'}.$$

De esta proporcion y la [K] resulta esta otra

$$\frac{F'M}{FM}=\frac{F'N}{FN}.$$

Tenemos, pues, que la normal MN divide al lado FF' del triángulo $F'MF$ en partes proporcionales á los lados adyacentes; luego [*Geom. teor.* 56, *recip.*] esta recta MN es bisectriz del ángulo $F'MF$: luego *la normal á la elipse biseca el ángulo formado por los radios vectores tirados al punto de contacto.*

Ahora bien, siendo iguales los dos ángulos $F'MN$ y FMN, sus complementos RMF' y TMF serán tambien iguales; que es lo que queríamos demostrar.

2.ª *Demostracion.* El ángulo $FMT = MTx - MFx$; luego

[*Trig.* 16] $$\operatorname{tg} FMT = \frac{\operatorname{tg} MTx - \operatorname{tg} MFx}{1 + \operatorname{tg} MTx \cdot \operatorname{tg} MFx}.$$

Mas $$\operatorname{tg} MTx = -\frac{b^2x'}{a^2y'},\quad \operatorname{tg} MFx = \frac{y'}{x'-c}\ [55];$$

luego

$$\operatorname{tg} FMT = \frac{-\dfrac{b^2x'}{a^2y'} - \dfrac{y'}{x'-c}}{1 - \dfrac{b^2x'y'}{a^2y'(x'-c)}} = \frac{-b^2x'^2 + b^2cx' - a^2y'^2}{a^2x'y' - a^2cy' - b^2x'y'} =$$
$$\frac{b^2cx' - a^2b^2}{c^2x'y' - a^2cy'} = \frac{b^2(cx' - a^2)}{cy'(cx' - a^2)} = \frac{b^2}{cy'}$$

Observando ahora que $\operatorname{tg} MF'x = \dfrac{y'}{x'+c}$, y que por consiguiente el cálculo para hallar $\operatorname{tg} F'MT$, seria idéntico al que acabamos de hacer para hallar $\operatorname{tg} FMT$, con la sola diferencia del cambio de signo de la c; sin necesidad de efectuar dicho cálculo, estamos seguros que resultaria $\operatorname{tg} F'MT = -\dfrac{b^2}{cy'}$. Luego los dos ángulos FMT y $F'MT$, que tienen tangentes iguales y de signo contrario, son suplementarios: mas el ángulo RMF' es tambien suplemento del $F'MT$; luego los dos ángulos FMT y $F'MR$, que tienen el mismo suplemento, son iguales.

Corolario. *La tangente á la elipse biseca el ángulo formado por uno de los radios vectores tirados al punto de contacto y la prolongacion del otro:* pues, siendo iguales los dos ángulos FMT y $F'MR$, y siendo el ángulo $F'MR$ igual al ángulo SMT, resulta que los dos ángulos FMT y SMT son iguales.

Recíproco. *La bisectriz* MT *del ángulo* FMS *formado por uno de los radios vectores tirados al punto de contacto y la prolongacion del otro es tangente á la elipse;* pues si la bisectriz

MT no fuese tangente, por el punto M se podria tirar una tangente, y esta seria bisectriz del ángulo FMS; es decir, que este ángulo tendria dos bisectrices diferentes; lo que es absurdo.

Es fácil demostrar directamente por geometría este recíproco.

Fig. 98. Tomemos en la bisectriz MT un punto cualquiera R diferente del punto M, y tiremos las rectas FR y $F'R$; bajemos desde el punto F la perpendicular FS á la bisectriz, y tiremos la RS: los triángulos FMO y SMO, que tienen comun el lado MO, é iguales los ángulos adyacentes en M y en O, son iguales, y por tanto $MS=MF$. Tambien por la igualdad de los mismos triángulos es $SO=FO$, y por tanto las oblícuas RS y RF son iguales. Ahora bien, $F'R+RS>F'S$; luego

$$F'R+RF>F'S, \text{ ó } F'R+RF>F'M+MF, \text{ ó } F'R+RF>2a;$$

es decir, que el punto R está fuera de la elipse [111, *Recíproco* 2.°]. Queda pues demostrado que todos los puntos de la bisectriz RT están fuera de la elipse, escepto el punto M; y que por tanto dicha bisectriz es tangente á la elipse.

121. De este teorema recíproco resultan las soluciones geométricas de los tres problemas.

Problema 1.° *Tirar una tangente á la elipse por un punto dado en ella, conociendo el eje mayor y los focos, y estando construida ó no la elipse.*

Fig. 98. Tírense al punto de contacto los dos radios vectores FM y $F'M$, prolónguese uno de ellos $F'M$, y divídase en dos partes iguales el ángulo FMS; la bisectriz MT será tangente á la elipse.

Problema 2.° *Tirar una tangente á la elipse desde un punto esterior á la curva, conociendo el eje mayor y los focos, y estando construida ó no la elipse.*

Fig 99. Supondremos en primer lugar que la elipse no esté construida.

Sean CA el eje mayor y F, F' los focos de la elipse: desde el punto dado I describo una circunferencia con un radio igual á la distancia que hay entre dicho punto y uno de los focos, el F por ejemplo; desde el otro foco F' describo otra circunferencia con un radio igual al eje mayor; desde los puntos S y S' de interseccion de ambas circunferencias se tiran al foco F' las dos rectas SF' y $S'F'$, y las rectas FS y FS', y desde el punto I las perpendiculares IM é IM' á las rectas FS y FS', y estas perpendiculares serán tangentes á la elipse, determinada por el eje mayor AC y por sus dos focos F y F', en los puntos M y M' en que cortan á las rectas FS y $F'S'$.

Para demostrarlo, haremos ver en primer lugar que las dos circunferencias descritas desde los puntos I, F' con los radios IF y $2a$ se cortan; y para esto, demostraremos que la distancia IF' de los centros es menor que la suma $IF+2a$ de los radios, y mayor que su diferencia $2a-IF$ ó $IF-2a$, segun que $2a$ sea mayor ó menor que IF.

1.° Tenemos en el triángulo IFF', $IF'<IF+FF'$; luego con mayor razon $IF'<IF+2a$.

2.° Segun [141, *Corol.*], es $IF'+IF>2a$, y por consiguiente $IF'>2a-IF$.

Si IF es mayor que $2a$, tendremos $IF'>IF-FF'$; luego con mayor razon $IF'>IF-2a$.

Queda, pues, demostrado que las dos circunferencias se cortan.

Para demostrar ahora que la recta IM es tangente á la elipse en el punto M, tiro la recta MF. Siendo IM perpendicular á la cuerda FS, la divide en dos partes iguales, esto es $FO=SO$; luego los dos triángulos FMO y SMO son iguales; y por consiguiente $FM=MS$, y el ángulo FMO es igual al ángulo SMO. Siendo $FM=SM$, se infiere que $F'M+FM=F'S=2a$, es decir que el punto M corresponde á la elipse; y siendo iguales los ángulos FMO y SMO, la recta IO bisectriz del ángulo FMS es tangente á la elipse en el punto M. Tirando la recta FM', se demostraria del mismo modo que la recta IM' es tangente á la elipse en el punto M'.

Supongamos ahora que la elipse esté construida.

Fig. 100. Desde el punto dado I describo una circunferencia con un radio igual á la distancia que hay entre dicho punto I y uno de los focos, F por ejemplo; desde el otro foco F' describo otra circunferencia con un radio igual al eje mayor; tiro las rectas $F'S$ y $F'S'$, y los puntos M y M', en que corten á la curva, serán los puntos de contacto, y por tanto las rectas IM é IM' serán tangentes á la elipse (1).

---

(1) Ya se ve que la construccion de las tangentes en este caso, en que la curva está construida, es algo mas sencilla que en el caso anterior.

Se demuestra, como en el caso anterior, que las dos circunferencias se cortan.

Para demostrar que la recta IM es tangente, tiro las rectas FM, FI y SI, y tengo evidentemente $FM = SM$; luego los dos triángulos FMI, SMI: que tienen sus tres lados respectivamente iguales, son iguales, y por tanto son iguales los dos ángulos IMF é IMS: siendo estos ángulos iguales, sus suplementos FMT y SMT tambien son iguales; y por consiguiente la recta IM es tangente á la elipse. Del mismo modo se demuestra que la recta IM' es tambien tangente á la elipse (1).

Problema 3.° *Conociendo el eje mayor y los focos de una elipse, y estando esta curva construida, ó simplemente determinada por estos datos, tirarla una tangente paralela á una recta dada.*

Fig. 101. Supongamos primeramente que la elipse no esté construida: sean CA el eje mayor, F y F' los focos de la elipse y HK la recta á la cual han de ser paralelas las tangentes. Desde uno de los focos, F por ejemplo, tiro á la HK una perpendicular FP indefinida en ambos sentidos, desde el otro foco F' describo con el radio $2a$ un arco que cortará á esta perpendicular indefinida en dos puntos P y P', pues la distancia de la misma perpendicular al foco F' es á lo mas igual á FF'; tiro las rectas $F'P$ y $F'P'$, y por los puntos medios Q y Q' de las rectas FP y FP' tiro las paralelas QM y $Q'M'$ á la recta dada, y estas paralelas serán las dos tangentes á la elipse en los puntos M y M'.

En efecto, siendo MQ paralela á la HK, y por consiguiente perpendicular á la FP en su punto medio Q, es $MP = MF$; luego $F'M + MF = F'P = 2a$; luego el punto M corresponde á la elipse; y como la MQ es bisectriz del ángulo FMP, se infiere que es tangente á la elipse en el punto M. Del mismo modo se demuestra que la $M'Q'$ es tangente á la elipse en el un punto M'.

Si la elipse estuviese construida, los puntos M y M' quedarian determinados en las intersecciones de las rectas $F'P$ y $F'P'$ con la curva.

---

(1) Aplicando este método al círculo, que es una elipse cuyos dos focos están reunidos en el centro, resulta un método muy sencillo, para tirar una tangente al círculo desde un punto esterior á él

Artículo 6.°

Cuerdas suplementarias de la elipse.

122. *Fig.* 102. *Llámanse cuerdas suplementarias* de la elipse dos cuerdas $A'M$ y $C'M$ tiradas desde los estremos de un diámetro cualquiera $A'C'$ á un punto cualquiera de esta curva.

El producto de las tangentes de los ángulos que las cuerdas suplementarias forman con el eje mayor de la elipse, es constante é igual á $-\frac{b^2}{a^2}$.

Llamemos α y α' á los ángulos MEx y $ME'x$ que las cuerdas suplementarias $A'M$ y $C'M$ forman con el eje mayor de la elipse; sean x é y las coordenadas del punto M, x' é y' las coordenadas del estremo A' del diámetro, $-x'$ y $-y'$ serán las coordenadas del otro estremo C': tendremos pues [55]:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-y'}{x-x'},\ \operatorname{tg}\alpha'=\frac{y+y'}{x+x'};$$

luego
$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\alpha'=\frac{y^2-y'^2}{x^2-x'^2}.$$

Ahora bien, por hallarse los puntos M y A' sobre la elipse, tenemos

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\ y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2);$$

luego
$$y^2-y'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-x^2)=-\frac{b^2}{a^2}(x^2-x'^2):$$

sustituyendo este valor en el de $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\alpha'$, resulta

$$\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Si las cuerdas suplementarias AN y CN salen de los estremos del eje mayor de la elipse, el teorema será tambien cierto, y se demostrará con mayor facilidad del modo siguiente.

Sean x é y las coordenadas del punto N: tendremos

$$\operatorname{tg} A=\frac{y}{x-a},\ \operatorname{tg} C=\frac{y}{x+a};$$

luego $$\operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C = \frac{y^2}{x^2 - a^2}.$$

Mas por hallarse el punto N sobre la elipse, es

$$y = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

luego sustituyendo este valor en la espresion de $\operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C$, resulta

$$\operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Corolario. Si $a=b$, en cuyo caso la elipse se trasforma en círculo, será $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -1$; lo que prueba que *en el círculo dos cuerdas suplementarias cualesquiera son perpendiculares entre sí*, ó bien que *el ángulo inscripto, cuyos lados pasan por los estremos de un diámetro, es recto*.

Recíproco. *Si el producto de las tangentes de los ángulos que forman con el eje mayor de la elipse dos rectas, que salen de los estremos de un diámetro, es igual á* $-\frac{b^2}{a^2}$, *el punto de interseccion de estas dos rectas estará en la elipse*.

Este recíproco se demuestra fácilmente por reduccion al absurdo [*Geom*. 32]; y tambien es fácil, y conviene, demostralo directamente.

Corolario. *Si por los estremos de un diámetro cualquiera* AC *se tiran dos cuerdas* AN *y* CN *paralelas á otras dos suplementarias* A'M y C'M, *dichas dos cuerdas* AN *y* CN *serán tambien suplementarias*.

En efecto, tenemos, por ser paralelas las cuerdas $A'M$ y AN,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} NAx,$$

y por la misma razon $\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg} C$;

luego $$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C;$$

y pues, por ser suplementarias las cuerdas $A'M$ y CM, es $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$, será tambien $\operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C = -\frac{b^2}{a^2}$; luego, segun el teorema recíproco último, el punto N de interseccion de las dos cuerdas AN y CN estará en la elipse, ó lo que es igual, las dos cuerdas AN y CN son suplementarias.

123. El teorema [122] nos da métodos muy sencillos para la resolucion geométrica de los problemas primero y tercero sobre las tangentes á la elipse, estando esta curva construida.

Problema 1.° *Tirar por un punto dado* M *en la elipse una tangente á esta curva.*

Fig. 103. Tiro el radio OM, por el estremo del eje mayor AC una paralela CN á este radio, su suplementaria NA, y por el punto M una paralela MT á esta cuerda, y la recta MT será la tangente á la elipse.

1.ª *Demostracion.* Tenemos [55], llamando x' é y' á las coordenadas del punto M, $\operatorname{tg} MOx = \operatorname{tg} C = \frac{y'}{x'}$; pero $\operatorname{tg} C$ $\operatorname{tg} NAx = -\frac{b^2}{a^2}$; luego $\operatorname{tg} NAx = \operatorname{tg} MTx = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$; es decir que la recta MT forma con el eje de las x igual ángulo que el que la tangente en el punto M forma con dicho eje; luego la MT coincide con la tangente, ó es la misma tangente.

2.ª *Demostracion, independiente del teorema* [122].

La cuerda AN está bisecada por el radio OM, puesto que

$$AO : AC :: AR :: AN;$$

y como la tangente tirada por el estremo del diámetro es paralela á las cuerdas bisecadas por él, resulta que la paralela MT á la cuerda AN es la tangente á la curva (1).

2.° *Tirar á la elipse una tangente paralela á una recta dada.*

Sea BD la recta dada: por uno de los estremos A del eje mayor tiro la cuerda AN paralela á dicha recta, su suplementaria CN, y por el centro la OM paralela á la CN; tiro

---

(1) Segun esto, se pudiera hallar la ecuacion de la tangente á la elipse desde un principio, sin fundarse en ninguna teoría, del modo siguiente:

Tenemos

$$\operatorname{tg} NAx \operatorname{tg} C = -\frac{b^2}{a^2}, \operatorname{tg} MOx = \frac{y'}{x'};$$

luego

$\operatorname{tg} NAx = \operatorname{tg} MTx = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$, coeficiente angular de la tangente.

finalmente la MT paralela á la BD, y se tendrá la tangente.

Se demuestra del mismo modo que la solucion del problema anterior.

124. *Fig.* 104. *Hallar el ángulo* M *que forman dos cuerdas suplementarias que salen de los estremos* A *y* C *del eje mayor.*

Tenemos $$M=MAx-MCx;$$

luego $$\operatorname{tg} M=\frac{\operatorname{tg} MAx-\operatorname{tg} MCx}{1+\operatorname{tg} MAx . \operatorname{tg} MCx};$$

pero $$\operatorname{tg} MAx=\frac{y}{x-a},\ \operatorname{tg} MCx=\frac{y}{x+a};$$

luego $$\operatorname{tg} M=\frac{\dfrac{y}{x-a}-\dfrac{y}{x+a}}{1+\dfrac{y^2}{x^2-a^2}}=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

Eliminemos de esta espresion la x, con objeto de que no haya en ella mas que una sola variable. La ecuacion de la elipse nos da

$$x^2-a^2=-\frac{a^2y^2}{b^2};$$

sustituyendo, tendremos

$$\operatorname{tg} M=\frac{2ay}{y^2-\dfrac{a^2y^2}{b^2}},$$

ó $$\operatorname{tg} M=-\frac{2ab^2}{c^2y}$$

Como á uno y otro lado del eje mayor hay dos puntos M para los cuales tiene y el mismo valor, se infiere que se pueden construir dos sistemas de cuerdas suplementarias que

---

(2) Hemos hallado esta fórmula suponiendo que el punto M está en la parte superior de la elipse, ó lo que es igual, suponiendo que y es positiva. Si el punto M tuviese ordenada negativa, hallaríamos la fórmula $\operatorname{tg} M=\frac{2ab^2}{c^2y}$.

saliendo de los estremos del eje mayor formen el mismo ángulo.

Discusion de la fórmula $\operatorname{tg} M = -\frac{2ab^2}{c^2 y}$.

Si y crece desde 0 hasta b, el valor absoluto de $\operatorname{tg} M$ disminuirá desde ∞ hasta $+\frac{2ab}{c^2}$; y como disminuyendo el valor absoluto de una tangente negativa, el valor del ángulo va creciendo, se infiere que el ángulo M crecerá desde 90° hasta el ángulo obtuso formado por las cuerdas suplementarias tiradas á los estremos del eje menor; el cual es por lo tanto el mayor ángulo que pueden formar dichas cuerdas.

125. Tiremos desde el vértice M el diámetro MOM' y la cuerda CM': esta cuerda será paralela á MA, puesto que son iguales los triángulos MOA y $M'CO$; y por consiguiente tambien lo son los ángulos alternos AMO y $CM'O$: siendo la cuerda CM' paralela á MA, el ángulo MCM', que forman las dos suplementarias MC y $M'C$, es suplemento del ángulo AMC; luego el ángulo MCM' es agudo.

Esto supuesto, tenemos

$$AMC + MCM' = 2R,$$

$$ABC + BCD = 2R;$$

luego $$AMC + MCM' = ABC + BCD,$$

ó $$MCM' - BCD = ABC - AMC;$$

y pues el segundo miembro es positivo, tambien lo será el primero, es decir que el ángulo agudo MCM' es mayor que el agudo BCD.

Luego *el ángulo de dos cuerdas suplementarias cualesquiera de la elipse no puede ser mayor que el formado por las suplementarias que, saliendo de los estremos del eje mayor, se reunen en un estremo del eje menor, ni puede ser menor que el formado por las suplementarias que, saliendo de los estremos del eje menor, se reunen en un estremo del eje mayor.*

126. Fig. 105. *Dados los ejes de la elipse, hallar la posicion de dos cuerdas suplementarias que formen un ángulo dado comprendido entre los límites determinados ya.*

Sea α el valor de la tangente del ángulo que han de formar las cuerdas suplementarias, y supongamos primeramente que este ángulo sea obtuso, y por tanto α negativa: hemos hallado [124]

$$\alpha=-\frac{2ab^2}{c^2y},$$

de la cual resulta

$$y=-\frac{2ab^2}{c^2\alpha}.$$

Ahora, la ecuacion de la elipse nos da

$$x^2=a^2-\frac{a^2y^2}{b^2};$$

sustituyendo en esta ecuacion el valor de y, y reduciendo, resulta

$$x=\pm\frac{a}{c^2\alpha}\sqrt{c^4\alpha^2-4a^2b^2}.$$

Tenemos pues que las coordenadas del vértice del ángulo M son

$$-\frac{a}{c^2\alpha}\sqrt{c^4\alpha^2-4a^2b^2}\ \text{y}\ -\frac{2ab^2}{c^2\alpha},$$

ambas positivas; y las del punto N son

$$\frac{a}{c^2\alpha}\sqrt{c^4\alpha^2-4a^2b^2}\ \text{y}\ -\frac{2ab^2}{c^2\alpha},$$

la primera negativa y la segunda positiva. Quedan pues determinados los puntos M y N, y por tanto los dos sistemas de cuerdas suplementarias que resuelven el problema.

Supongamos ahora que el ángulo, que han de formar las cuerdas suplementarias, sea agudo; su suplemento será obtuso. Construidos como en el caso primero los dos sistemas de cuerdas suplementarias MA y MC, NA y NC que formen este ángulo obtuso, se construirán en seguida los paralelógramos correspondientes $AMCM'$, $ANCN'$, y se tendrán los dos sistemas de cuerdas suplementarias AM y AM', AN y AN', ó los CM y CM', CN y CN', que serán los pedidos.

Para demostrar que AM y AM' componen un sistema de cuerdas suplementarias que forman el ángulo dado, tenemos, por ser suplementarias las cuerdas AM y CM,

$$\operatorname{tg} MAx.\ \operatorname{tg} MCx=-\frac{b^2}{a^2};$$

mas estos dos ángulos son los mismos que los que las cuerdas AM y AM' prolongada forman con el eje mayor; luego el producto de las tangentes de los dos ángulos que las dos cuerdas AM y AM' forman con el eje mayor es $-\frac{b^2}{a^2}$; luego [122, *Recíp.*] estas cuerdas son suplementarias.

Respecto del ángulo que forman, es evidente que es el pedido, puesto que es suplemento del ángulo M.

127. *Dada una elipse, construir un sistema de cuerdas suplementarias que formen un ángulo dado, comprendido entre los límites conocidos.*

Si el ángulo que han de formar las cuerdas suplementarias, es obtuso, se construirá sobre el eje mayor un arco capaz del ángulo dado, y desde los dos puntos, diferentes de los vértices de la elipse, en que dicho arco corte á la curva, se tirarán los dos sistemas de cuerdas suplementarias á los estremos del eje mayor, los cuales resolverán el problema. Si el ángulo de las cuerdas suplementarias ha de ser agudo, se hará la misma construccion sobre el eje menor.

Articulo 7.°

Diámetros conjugados de la elipse.

128. *Hallar la ecuacion de los diámetros de la elipse.*

Aplicando la regla general [85] $f'_y \cdot m + f'_x = 0$, dicha ecuacion será $a^2y \cdot m + b^2x = 0$, que puede hallarse directamente por el mismo razonamiento seguido en el número 85.

129. Como esta ecuacion es de primer grado, y la satisfacen las coordenadas $x=0$, $y=0$, se infiere que esta ecuacion representa una recta que pasa por el orígen, que actualmente es el centro de la elipse: luego *todos los diámetros de la elipse son líneas rectas que pasan por el centro.*

130. *Fig.* 107. Recíproco. *Toda recta* OQ, *que pasa por el centro de la elipse, es diámetro de esta curva.*

En efecto, la ecuacion de toda recta OQ que pasa por el centro, orígen actual de las coordenadas, es $y=nx$.

La ecuacion del diámetro, $a^2y \cdot m + b^2x = 0$, nos da $y = -\frac{b^2}{a^2m}x$. Siendo m la tangente del ángulo que las cuerdas bisecadas por el diámetro forman con Ox, es claro que m puede tener un valor cualquiera positivo ó negativo. Igualemos, pues, $-\dfrac{b^2}{a^2m}$ á la tangente n, en cuyo caso tendrá m el valor posible $-\dfrac{b^2}{a^2n}$, y será $y=nx$ la ecuacion del diámetro que biseca á las cuerdas que forman con el eje Ox un ángulo cúya tangente es $-\dfrac{b^2}{a^2n}$. Vemos, pues, que este diámetro coincide con la recta OQ que pasa por el centro; luego esta recta es un diámetro.

Corolario. *La tangente á la elipse tirada por uno cualquiera de los dos estremos de un diámetro es paralela á las cuerdas bisecadas por dicho diámetro*

Pues si x' é y' son las coordenadas de uno de dichos estremos, como este punto corresponde al diámetro, tendremos la relacion $a^2y'.m+b^2x'=0$, de donde $m=-\dfrac{b^2x'}{a^2y'}$, que es precisamente la tangente del ángulo que la tangente á la elipse en el punto (x', y') forma con el eje Ox; luego esta tangente y las cuerdas bisecadas por el diámetro forman ángulos iguales con el eje Ox, y por tanto son paralelas.

131. Repetiremos ahora, valiéndonos de la ecuacion ordinaria de la elipse, lo dicho [89 y 90] acerca de los diámetros conjugados de las curvas de segundo grado.

Se llaman *diámetros conjugados* de la elipse dos diámetros, tales que cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro.

132. *Si un diámetro de la elipse biseca un sistema de cuerdas paralelas á otro, este biseca tambien las cuerdas paralelas al primero, y por tanto los dos diámetros son conjugados.*

Fig. 107. Supongamos que el diámetro OQ biseque todas las cuerdas paralelas al diámetro OR; digo que este bisecará todas las cuerdas paralelas al diámetro OQ.

Llamemos m á la tangente del ángulo ROx, m' á la del ángulo QOx, y supongamos que OR' sea el diámetro que biseque las cuerdas paralelas á OQ.

La ecuacion del diámetro OQ es $a^2y\times m+b^2x=0$, ó $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}x$; luego tg QOx ó $m'=-\dfrac{b^2}{a^2m}$. La ecuacion del diámetro OR' que biseca todas las cuerdas paralelas á OQ, es

$$a^2y\times m'+b^2x=0,\ \text{ó}\ y=-\frac{b^2}{a^2m'}x,$$

es decir, que $\operatorname{tg} R'Ox = -\frac{b^2}{a^2 m'}$: pero de la ecuacion $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$ resulta $-\frac{b^2}{a^2 m'} = m$; luego $\operatorname{tg} R'Ox = \operatorname{tg} ROx$; luego el diámetro OR' coincide con el diámetro OR; y por tanto este diámetro OR biseca todas las cuerdas paralelas al diámetro OQ.

132. Acabamos de ver que entre dos diámetros conjugados de la elipse existe la relacion $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$; es decir, que *el producto de las tangentes de los ángulos que dos diámetros conjugados forman con el eje mayor de la elipse, es constante é igual á* $-\frac{b^2}{a^2}$; pero este teorema lo demostraremos ahora de otro modo.

Fig. 108. Sean x' é y' las coordenadas del punto M, α y α' los ángulos que los diámetros conjugados OM y OM' forman con el eje mayor Ox: tendremos [55]

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'}{x'},$$

y
$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} MTx = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

luego
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \times \frac{y'}{x'},$$

ó
$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

De este teorema resultan las consecuencias siguientes:

1.ª *Si un diámetro* OM' *es paralelo á una de dos cuerdas suplementarias* CN, *su conjugado* OM *será paralelo á la otra cuerda suplementaria* AN.

En efecto, hemos hallado [122 y 132]

$$\operatorname{tg} C \operatorname{tg} NAx = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}:$$

luego
$$\operatorname{tg} C \operatorname{tg} NAx = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha':$$

por suposicion $\alpha = C$, y por consiguiente $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} C$; luego $\operatorname{tg} NAx = \operatorname{tg} \alpha'$ ó $NAx = \alpha'$, es decir que el diámetro OM' es paralelo á la cuerda AN.

2.ª *En la elipse,* propiamente dicha, *no hay mas sistema* *de diámetros conjugados rectangulares que el sistema de los ejes.*

En efecto, en la elipse propiamente dicha, los semiejes a y b son desiguales; luego $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'$ no es igual á -1, como es necesario para que las dos rectas OM y OM' sean perpendiculares entre sí.

Pero si la elipse tiene los ejes iguales, en cuyo caso se transforma en círculo, resulta $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'=-1$; es decir, que en el círculo todos los sistemas de diámetros conjugados son rectangulares; lo que por otra parte es evidente.

3.ª *El menor de los dos ángulos α, que dos diámetros conjugados forman con el eje mayor de la elipse, es agudo, y el mayor α' es obtuso;* pues el producto de sus tangentes es negativo.

~~133~~. Fig. 109. *Hallar la ecuacion de la elipse, tomando por ejes de coordenadas dos diámetros conjugados.*

La ecuacion de la elipse con respecto á sus ejes es

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Las fórmulas para pasar de los ejes rectangulares Oy, Ox á los oblicuángulos Oy', Ox' se deducen de las generales [43, 2.° *caso*], haciendo en estas $\theta=90°$, y son por lo tanto

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',$$
$$y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion de la elipse referida á sus ejes, se halla

$$\left.\begin{array}{r} a^2\operatorname{sen}^2\alpha' \\ +b^2\cos^2\alpha' \end{array}\right| y'^2 + \left.\begin{array}{r} a^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' \\ +b^2\cos\alpha\cos\alpha' \end{array}\right| 2x'y' + \left.\begin{array}{r} a^2\operatorname{sen}^2\alpha \\ +b^2\cos^2\alpha \end{array}\right| x'^2=a^2b^2.$$

Como, por ser los ejes Ox', Oy' diámetros conjugados prolongados, es $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'=-\dfrac{b^2}{a^2}$,

ó $$a^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'+b^2\cos\alpha\cos\alpha'=0,$$

la ecuacion de la elipse con respecto á los diámetros conjugados Ox', Oy' será

$$[X]\quad \left.\begin{array}{r} a^2\operatorname{sen}^2\alpha' \\ +b^2\cos^2\alpha' \end{array}\right| y'^2 + \left.\begin{array}{r} a^2\operatorname{sen}^2\alpha \\ +b^2\cos^2\alpha \end{array}\right| x'^2=a^2b^2.$$

Sean $OA'=a'$, $OB'=b'$ los semidiámetros conjugados, é introduzcamos estas cantidades en la ecuacion de la elipse.

Haciendo en ella $y'=0$, es $x'=\pm a'$; luego

$$(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)a'^2=a^2b^2 \ldots.\ [A],$$

de donde

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \frac{a^2b^2}{a'^2}.$$

Haciendo en la misma ecuacion $x'=0$, y por consiguiente $y'=\pm b'$, será

$$(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha')b'^2 = a^2b^2 \ldots\ldots [B],$$

de donde

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha' = \frac{a^2b^2}{b'^2}.$$

Sustituyendo, tendremos en la ecuacion X,

$$\frac{a^2b^2y'^2}{b'^2} + \frac{a^2b^2x'^2}{a'^2} = a^2b^2,$$

ó

$$\frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'^2}{a'^2} = 1,$$

ó

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2,$$

ó

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x'^2),$$

ecuacion de la misma forma que la de la elipse referida á sus ejes.

NOTA. Se pueden hallar, sin valerse de la transformacion de coordenadas, la ecuacion de la elipse referida á sus diámetros conjugados y las dos fórmulas [A] y [B].

En efecto, siendo diámetros conjugados los ejes Ox', Oy', cada uno biseca al sistema de cuerdas paralelas al otro; luego á cada valor de x' corresponden dos de y', iguales y de signo contrario, y por tanto la ecuacion (que ya sabemos ha de ser de segundo grado) contendrá el término My'^2 sin ningun término en y'. Tambien á cada valor de y' corresponden dos de x' iguales y de signo contrario, y por tanto la ecuacion debe contener el término Mx'^2 sin término en x'. Haciendo $x'=0$, es $y'=OB'$; luego en la ecuacion debe entrar un término independiente de los variables; y por tanto la ecuacion de la elipse con respecto á un sistema cualquiera de diámetros conjugados tendrá la forma

$$My^2 + Nx^2 = P,$$

en donde es fácil ver, que M, N y P son cantidades positivas.

Llamando ahora a' y b' á las magnitudes OA' y OB' de los semidiámetros conjugados, é introduciendo estas cantidades en la ecuacion de la elipse, resultará la ecuacion

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2.$$

Para hallar las fórmulas [A] y [B], tiremos un radio cualquiera $OM=r$, y llamemos x é y á las coordenadas rectangulares de su estremo M, φ al ángulo MOx que forma dicho radio con el eje Ox: tendrémos evidentemente

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Como estas coordenadas deben verificar la ecuacion de la elipse, será

$$a^2r^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2r^2\cos^2\varphi=a^2b^2,$$

ó $$r^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)=a^2b^2\ (1)$$

Ahora, si en esta fórmula hacemos sucesivamente $r=a'$, $\varphi=\alpha$; $r=b'$, $\varphi=\alpha'$, tendremos las dos fórmulas

$$a'^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)=a^2b^2\ldots\ [A],$$
$$b'^2(a^2\,\mathrm{sen}^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha')=a^2b^2\ldots\ [B].$$

134. Segun la fórmula $\mathrm{tg}\,\alpha\ \mathrm{tg}\,\alpha'=-\dfrac{b^2}{a^2}$, si el ángulo α crece, ó lo que es igual, si el diámetro $A'C'$ disminuye [107], $\mathrm{tg}\,\alpha$ crecerá, y por consiguiente el valor absoluto de $\mathrm{tg}\,\alpha'$ disminuye, ó bien el ángulo obtuso α' crece, y por tanto el diámetro conjugado $B'D'$ crece: si pues imaginamos que los diámetros conjugados coincidan en primer lugar con los ejes, y se muevan en seguida de manera que el OA' vaya aproximándose al eje menor y disminuyendo por lo tanto, en cuyo caso el OB' irá aproximándose al eje mayor y aumentando, es evidente que habrá un instante, y uno solo, en que los dos serán iguales.

Fig. 140. Propongámonos, pues, *averiguar la posicion de los diámetros conjugados iguales de la elipse,* ó lo que es lo

---

(1) No es fácil que se olvide el modo de hallar esta ecuacion, que es la ecuacion polar de la elipse, siendo el centro polo, y el eje mayor eje polar [véase el número 228]

mismo, los valores que tienen los ángulos α y α' cuando los diámetros conjugados de la elipse son iguales.

Tenemos

$$(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) a'^2 = a^2 b^2,$$
$$(a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha') b'^2 = a^2 b^2.$$

Si a' y b' son iguales, será evidentemente

$$a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha',$$

ó $$a^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha') = b^2 (\cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha),$$

ó $$a^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha') = b^2 (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha').$$

Esta ecuacion no puede verificarse siendo $\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha'$ diferente de 0; tendremos pues $\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha' = 0$, de donde $\operatorname{sen} \alpha = \pm \operatorname{sen} \alpha'$: pero, siendo positivos los senos de todos los ángulos, el signo $-$ es inadmisible; luego $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha'$, es decir que los dos ángulos α y α', que son desiguales y tienen iguales senos, son suplementarios; y por consiguiente $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha'$.

Ahora, la ecuacion $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ nos dará $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}$, de donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$, y $\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{b}{a}$. Por consiguiente, como $\frac{b}{a}$ es la tangente del ángulo *BAO* ó *BCO*, tirando los dos diámetros *MN* y *PQ* paralelos á las cuerdas suplementarias *CB* y *AB*, las tangentes de los ángulos *MOA* y *POA* serán $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$; y por tanto estos dos diámetros *MN* y *PQ*, paralelos á las cuerdas suplementarias *CB* y *AB* serán iguales.

Luego *para tirar en la elipse dos diámetros conjugados iguales, se tirarán las cuerdas suplementarias desde los estremos del eje mayor á un estremo del menor, y por el centro dos diámetros paralelos á dichas cuerdas, los cuales serán los dos diámetros conjugados iguales.*

Es fácil confirmar esta construccion á posteriori, tanto por la figura, como por el cálculo.

En efecto: 1.° los dos diámetros *MN* y *PQ* paralelos á las cuerdas suplementarias *CB* y *AB* son conjugados, y los ángulos *BAO* y *BCO*, que corresponden á dos triángulos iguales, son iguales; luego los ángulos *MOA* y *POC*, iguales á los *BCA* y *BAO*, serán iguales; luego tambien serán iguales los ángulos

MOA y *QOA*. Doblando pues la figura por la *AC*, caerá la semielipse *ABC* sobre la semielipse *ADC*, por lo que el punto *M* caerá sobre esta semielipse inferior; el semidiámetro *OM* caerá sabre el *OQ*, y el punto *M* caerá sobre la recta *OQ*; luego el punto *M*, que cae á la vez sobre la semielipse inferior y sobre la recta *OQ*, caerá sobre el punto *Q*. Tenemos pues que los semidiámetros *OM* y *OQ* son iguales, y por tanto los diámetros *MN* y *PQ* son tambien iguales.

2.° Siendo iguales los ángulos *BAO* y *BCO*, serán iguales los ángulos *POC* y *MOA*; luego el ángulo *POA* ó α' será suplemento del *MOA* ó α; y por tanto

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha',\ \cos^2\alpha=\cos^2\alpha';$$

y por consiguiente las fórmulas [*A*] y [*B*] dan $a'=b'$.

135. Teoremas de Apolonio.

1.° *La suma de cuadrados de los semidiámetros conjugados es igual á la suma de cuadrados de los semiejes*; es decir

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2.$$

Se trata de averiguar la relacion que existe entre las cuatro cantidades a, b, a' y b'; es decir, se trata de eliminar α y α' entre las tres ecuaciones

$$(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)\,a'^2=a^2b^2,$$
$$(a^2\operatorname{sen}^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha')\,b'^2=a^2b^2,$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Para esto, deduciremos de las dos primeras los valores de $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha'$, y sustituyendo en la tercera, se tendrá la relacion pedida.

La primera, sustituyendo en lugar de $\operatorname{sen}^2\alpha$ y $\cos^2\alpha$ sus valores $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ en funcion de la tangente, será

$$\frac{a^2a'^2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{b^2a'^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=a^2b^2,$$

ó

$$a^2a'^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2a'^2=a^2b^2+a^2b^2\operatorname{tg}^2\alpha,$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a^2(a'^2-b^2)}.$$

La segunda nos dará, con solo mudar en esta a' en b',

$$\operatorname{tg}^2\alpha'=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{a^2(b'^2-b^2)}.$$

Sustituyendo estos valores en la tercera, ó mejor en la ecuacion

$$\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha' = \frac{b^4}{a^4},$$

que resulta elevando al cuadrado la tercera, tendremos

$$\frac{b^4}{a^4}\frac{(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)}{(a'^2-b^2)(b'^2-b^2)} = \frac{b^4}{a^4},$$

ó $$(a^2-a'^2)(a^2-b'^2) = (a'^2-b^2)(b'^2-b^2),$$

ó $$a^4-a^2b'^2-a^2a'^2+a'^2b'^2 = a'^2b'^2-a'^2b^2-b^2b'^2+b^4,$$

ó $$a^4-a^2(b'^2+a'^2) = b^4-b^2(a'^2+b'^2),$$

ó $$a^4-b^4 = (a'^2+b'^2)(a^2-b^2).$$

Suprimiendo ahora el factor comun a^2-b^2, resulta

$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2.$$

2.° *El paralelógramo construido sobre los semidiámetros conjugados es equivalente al rectángulo construido sobre los semiejes.*

El área del paralelógramo construido sobre los semidiámetros conjugados es [*Trig.* 110, 5.°] $a'b'$ sen $(\alpha'-\alpha)$, y el rectángulo de los semiejes es ab: se trata pues de demostrar que estas dos espresiones son iguales.

Multiplicando ordenadamente las ecuaciones [A] y [B], tendremos

$$a'^2b'^2(a^4 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha' + a^2b^2 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha' + a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha' + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\alpha') = a^4b^4.$$

La ecuacion $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$ nos da

$$a^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha' + b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0,$$

y elevando al cuadrado,

$$a^4 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha' + b^4 \cos^2\alpha \cos^2\alpha' = -2a^2b^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha' \cos\alpha \cos\alpha';$$

luego la ecuacion anterior será

$$a'^2b'^2(a^2b^2 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha' + a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha' - 2a^2b^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha') = a^4b^4,$$

ó

$$a'^2b'^2(\cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha' + \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha' - 2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha') = a^2b^2,$$

ó $$a'^2b'^2(\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha' - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha')^2 = a^2b^2,$$

ó $$a'^2b'^2\left(\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)\right)^2 = a^2b^2,$$

ó $$a'b' \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)=\pm ab.$$

Como el primer miembro es positivo, el segundo debe serlo tambien; y por tanto tendriemos

$$a'b \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)=ab.$$

Nota. Las ecuaciones

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,$$

$$ab=a'b' \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha),$$

$$-\frac{b^2}{a^2}=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'$$

contienen las seis cantidades a, b, a', b', α y α'; y por tanto por medio de dichas ecuaciones pueden hallarse tres de estas seis cantidades, dadas las otras tres.

136 Problemas. 1.º *Dada una elipse, hallar su centro.*

Tírense dos cuerdas paralelas, y por sus puntos medios una recta, y esta será un diámetro; su punto medio será el centro.

2.º *Dado un diámetro* AB [Fig. 141] *de la elipse, hallar su conjugado.*

Tírese una cuerda *EC* paralela al diámetro dado, por uno de sus estremos *C* otro diámetro *CD*, la suplementaria *ED* de la *CE*, y el diámetro *FG* paralelo á la suplementaria *ED* será el conjugado del *AB*; puesto que los dos *AB* y *FG* son paralelos á dos cuerdas suplementarias *CE* y *ED* [132, 1.ª].

3.º *Dada una elipse, hallar sus ejes.*

Fig. 142. Tírese un diámetro cualquiera *FE*, y desde el centro con el radio *OF* descríbase un arco que cortará en un punto *M* á la elipse, tírense las cuerdas suplementarias *ME* y *MF*, y por el centro las paralelas *AC* y *BD* á dichas cuerdas, y se tendrán los ejes.

En efecto, siendo estas dos rectas paralelas á las cuerdas suplementarias *ME* y *MF*, serán dos diámetros conjugados: el ángulo *FME* es recto; luego el ángulo *AOB* lo es tambien; y por tanto los dos diámetros conjugados *AC* y *BD*, que forman ángulo recto, serán los ejes [132, 2.ª].

4.º *Tirar en la elipse dos diámetros conjugados que formen un ángulo dado.*

Constrúyanse dos cuerdas suplementarias que formen un ángulo igual al dado [127], tírense dos diámetros paralelos á dichas cuerdas, y serán los pedidos.

Como hay dos sistemas de cuerdas suplementarias que forman un ángulo dado, tambien habrá dos sistemas de diámetros conjugados que formarán dicho ángulo.

NOTA. Los dos sistemas de diámetros conjugados se reducen á uno solo: 1.º Cuando dichos diámetros conjugados deben formar ángulo recto ó ser ejes. 2.º Cuando deben formar un ángulo máximo, es decir, un ángulo igual al que forman las cuerdas suplementarias que salen de los estremos del eje mayor y van á parar á los estremos del eje menor.

157. La ecuacion de la elipse referida á sus diámetros conjugados es

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2;$$

y del mismo modo que en [108] se demostrará que si el punto (x, y) está en la elipse, será

$$a'^2y^2+b'^2x^2-a'^2b'^2=0,$$

si está fuera, $a'^2y^2+b'^2x^2-a'^2b'^2>0,$

y si está dentro, $a'^2y^2+b'^2x^2-a'^2b'^2<0;$

y los tres recíprocos.

158. Si se quisiere hallar la ecuacion de la tangente á la elipse referida á sus diámetros conjugados, tendríamos como en [115] $a'^2yy'+b'^2xx'=a'^2b'^2,$

siendo su coeficiente angular $-\dfrac{b'^2x'}{a'^2y'}$.

La abscisa del pié de la tangente es $x=\dfrac{a'^2}{x'}$, valor que nos daria un procedimiento análogo al seguido [117, 1.º] para construir la tangente á la elipse en un punto suyo (x', y'), cuando se conocen uno de dos diámetros conjugados y el ángulo que estos forman.

Fig. 113. En efecto, sea AC el diámetro conocido, y BD la direccion de su conjugado, M un punto de la elipse por el cual se quiere tirar una tangente á esta curva. Tiro la ordenada MP, por el punto P levanto la perpendicular indefinida PN á la AC, desde O con el radio OA describo un arco que cortará á dicha perpendicular en un punto N, tiro la ON, y la perpendicular NT á la ON, y la TM será la tangente; lo que se demuestra fácilmente, hallando para OT en el triángulo NOT el valor $\dfrac{a'^2}{x'}$, puesto que $PN^2=OP\times OT$.

139. Para el problema, *tirar á la elipse una tangente paralela á una recta dada*, se hallarian como en [117, 3.°] los mismos valores de x' é y', coordenadas incógnitas del punto de contacto.

140. Para el problema, *tirar una tangente á la elipse que pase por un punto dado*, se hallarian tambien del mismo modo que en [117, 2.°] los mismos valores de x' é y'.

141. *El producto de los coeficientes angulares de dos cuerdas suplementarias cualesquiera de la elipse, referida á un sistema de diámetros conjugados, es constante é igual á* $-\frac{b'^2}{a'^2}$.

Se demuestra muy fácilmente como en el caso de las cuerdas suplementarias que salen de los estremos del eje mayor.

Recíproco. *Si el producto de los coeficientes angulares de dos cuerdas, que salen de los estremos de un diámetro, es igual á* $-\frac{b'^2}{a'^2}$, *dichas cuerdas se unirán en la elipse, ó bien serán suplementarias* [Reduccion al absurdo].

142. Para los diámetros conjugados se veria como en [132], que el producto de los coeficientes angulares es $-\frac{b'^2}{a'^2}$.

143. *Dados dos diámetros conjugados y el ángulo que forman, construir la elipse.*

Fig. 114. Sean $AC=2a'$ y $BD=2b'$ los dos diámetros conjugados: levanto en O una perpendicular $B'D'$, y tomo sobre ella las partes $OB'=OD'=b'$. Construyo ahora, por cualquiera de los métodos conocidos, varios puntos de la elipse, cuyos semiejes sean OA y OB': sean M y N, por ejemplo, dos puntos de esta elipse, bajo los perpendiculares MP y NQ sobre la AC, por los puntos P y Q tiro las paralelas PM', QN' á la BD, é iguales respectivamente á MP y NQ, y los puntos M', N' serán dos puntos de la elipse pedida. Del mismo modo se construyen tantos puntos como sean necesarios, para juntarlos en seguida por medio de una línea continua.

Para demostrar que estos puntos M', N' corresponden á la elipse pedida, ya sabemos que, tomando por ejes de coordenadas los diámetros conjugados OA y OB prolongados indefinidamente, es

$$y^2=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-x^2)$$

Pero tambien sabemos que la ecuacion de la elipse con respecto á sus ejes nos da

$$MP^2=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-OP^2),\quad NQ^2=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-OQ^2);$$

luego, si en lugar de MP y NQ ponemos sus iguales $M'P$ y $N'Q$, será

$$M'P^2=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-OP^2),\quad N'Q^2=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-OQ^2);$$

es decir, que las coordenadas de los puntos M', N' satisfacen á la ecuacion de la elipse referida á los ejes de coordenadas Ox, Oy; y por tanto [137] dichos puntos corresponden á la elipse, cuyos diámetros conjugados son AC y BD.

2.ª *construccion*. *Fig* 115. Sean AC y BD los diámetros conjugados: constrúyase sobre los semidiámetros AO y BO un paralelógramo $AOBM$, divídase la recta BM en un cierto número de partes iguales, y en igual número la OB; tirénse las rectas indefinidas Ca', Cb', Cc'...., y las correspondientes Aa, Ab, Ac... ; los puntos p, q, r...., en que se cortan cada dos rectas correspondientes, son puntos de la elipse. Del mismo modo se construyen las otras tres partes de la elipse, aunque tambien pueden deducirse evidentemente de la $BpqrA$.

Fig. 116. Para demostrar que los puntos p, q, r.... corresponden á la elipse, sean AD y CD' dos rectas correspondientes, y supongamos que cada una de las dos rectas BM y BO se haya dividido en m partes iguales; cada una de las primeras valdrá $\frac{a'}{m}$, y cada una de las segundas $\frac{b'}{m}$: supongamos, además, que cada una de las dos rectas BD y BD' contenga n de las partes iguales correspondientes: las coordenadas del punto D serán $BD=\frac{na'}{m}$ y $OB=b'$, y las del punto D' serán 0 y $OD'=b'-BD'=b'-\frac{nb'}{m}$.

Esto supuesto, el coeficiente angular de la recta AD, que pasa por los dos puntos D y A, será [55]

$$\frac{b'}{\frac{na'}{m}-a'}=\frac{mb'}{a'(n-m)},$$

y el coeficiente angular de la recta CD', que pasa por los dos puntos D' y C, será

$$\frac{b'-\frac{nb'}{m}}{-a'}=-\frac{b'(m-n)}{ma'};$$

el producto de los dos coeficientes angulares de las dos rectas AD y CD es evidentemente $-\frac{b'^2}{a'^2}$; luego [141, *Recíp.*] el punto p es un punto de la elipse.

144. Nota. Sabemos que la ecuacion $My^2+Nx^2=P$, en la que M, N y P son números absolutos, representa una elipse, siendo ejes de coordenadas dos diámetros conjugados prolongados indefinidamente.

Si dada esta ecuacion, quisiéramos hallar dichos diámetros conjugados, con lo que se puede construir la elipse, escribiríamos la ecuacion así:

$$\frac{My^2}{P}+\frac{Nx^2}{P}=1,$$

y en seguida de este otro modo:

$$\frac{y^2}{\frac{P}{M}}+\frac{x^2}{\frac{P}{N}}=1.$$

Comparando esta ecuacion con la $\frac{y^2}{b'^2}+\frac{x^2}{a'^2}=1$ de la elipse referida á sus diámetros conjugados, vemos que

$$b'^2=\frac{P}{M},\quad a'^2=\frac{P}{N},$$

y por consiguiente

$$b'=\sqrt{\frac{P}{M}},\quad a'=\sqrt{\frac{P}{N}}.$$

Ejemplo. Sea la ecuacion $3y^2+5x^2=20$.

Tendremos $$\frac{3y^2}{20}+\frac{5x^2}{20}=1,$$

ó $$\frac{y^2}{\frac{20}{3}}+\frac{x^2}{\frac{20}{5}}=1;$$

que comparada con la

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{x^2}{a'^2}=1,$$

nos da $$b'^2=\frac{20}{3},\ a'^2=\frac{20}{5},$$

y por consiguiente

$$b'=\sqrt{\frac{20}{3}},\ a'=\sqrt{\frac{20}{5}}=2.$$

Con los semidiametros conjugados $\sqrt{\frac{20}{3}}$ y 2, y el ángulo que ellos forman, que es el de los ejes de coordenadas, y es conocido, se puede construir la elipse.

CAPITULO VII.

Teoría de la hipérbola.

Artículo 1.°

Ecuacion de la hipérbola referida á sus ejes.

145. Sabemos que existe un solo sistema de ejes rectangulares, á los cuales referida la hipérbola tiene por ecuacion

$$My^2-Nx^2+F=0,$$

siendo M y N números absolutos.

Representando una hipérbola esta ecuacion, F no puede ser 0; pues si fuese $F=0$, la ecuacion seria $My^2=Nx^2$, ó $y=\pm x\sqrt{\frac{N}{M}}$; es decir que la ecuacion representaria dos rectas que pasan por el orígen.

Pero F puede ser cantidad positiva ó negativa.

Si F es positiva, haciendo en la ecuacion $x=0$, resultan ara y los valores imaginarios $y=\pm\sqrt{-\frac{F}{M}}$; luego en este caso el eje de ordenadas no corta á la curva. Haciendo $y=0$, resulta $x=\pm\sqrt{\frac{F}{N}}$; luego, si F es cantidad positiva, la ecuacion

$$My^2-Nx^2+F=0$$

representa una hipérbola á quien corta el eje de las x, y no el de las y.

Supongamos que F sea negativa: pongamos su signo en manifiesto, y tendremos que la ecuacion de la hipérbola será

$$My^2-Nx^2-F=0,$$

ó

$$Nx^2-My^2+F=0,$$

ecuacion de la misma forma que la $My^2-Nx^2+F=0$, permutando las letras x é y; luego, como la ecuacion $My^2-Nx^2+F=0$ representa una hipérbola cortada por el eje de las x y no por el de las y, la ecuacion $Nx^2-My^2+F=0$, ó la $My^2-Nx^2-F=0$ representará una hipérbola cortada por el eje de las y, y no por el de las x.

146 Como para hallar las propiedades de la hipérbola es indiferente el suponer que el eje de las x ó el de las y es el que corta á la hipérbola, nosotros, siguiendo el uso, supondremos que el eje de las x corta á la hipérbola; y que por tanto la ecuacion es

$$My^2-Nx^2+F=0\ldots\ldots[A],$$

en la que la M, N y F son números absolutos.

Fig. 117. Segun esta ecuacion, á cada valor de x corresponden dos de y iguales y de signo contrario; luego el eje Ox divide en dos partes iguales á todas las cuerdas paralelas al eje Oy; luego cada rama de la hipérbola está dividida por el eje Ox en dos ramos simétricos respecto de dicho eje. Tambien á cada valor de y corresponden dos de x iguales y de signo contrario; luego las dos ramas de la hipérbola son simétricas respecto del eje Oy. Luego los dos ejes actuales de coordenadas Ox y Oy son diámetros conjugados, y aun ejes de la curva.

Eje primero de la hipérbola es la parte AC del actual eje de abscisas comprendida entre los puntos A y C en que este eje corta á la curva: los estremos A y C son los *vértices* de la hipérbola.

Eje segundo de la hipérbola es la doble ordenada BD en el orígen, hecha real.

Llamemos $2a$ al eje primero AC y $2b$ al segundo BD, é introduzcamos estas cantidades en la ecuacion de la hipérbola.

Partamos la ecuacion $[A]$ por F, y tendremos

$$\frac{My^2}{F}-\frac{Nx^2}{F}+1=0 \ldots [B].$$

Haciendo $x=0$, y tiene un valor imaginario $b\sqrt{-1}$, puesto que, hecho real, es b; y por consiguiente $-\frac{Mb^2}{F}=-1$, de donde $\frac{M}{F}=\frac{1}{b^2}$.

Haciendo $y=0$, es $x=a$; luego

$$-\frac{Na^2}{F}=-1, \text{ de donde } \frac{N}{F}=\frac{1}{a^2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $[B]$, tendremos

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+1=0,$$

ó

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

ó

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

que son las tres ecuaciones *usuales* ú *ordinarias* de la hipérbola.

147. Comparando las dos ecuaciones de la elipse é hipérbola

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$
$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$

vemos que se puede pasar de una á otra, mudando el signo de b^2, ó lo que es igual, poniendo $b\sqrt{-1}$ en lugar de b. Por consiguiente todas las propiedades de la elipse referida á sus ejes, en que entre b, existirán en la hipérbola, referida tambien á sus ejes, mudando el signo de b^2, ó bien mudando b en $b\sqrt{-1}$.

148. Las ecuaciones de las asíntotas *HK* y *LG* [*Fig.* 117] se deducirán fácilmente de la ecuacion

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ldots\ [C];$$

pues segun la regla [75] los dos primeros términos del trimonio bajo el radical son x^2+0x; luego $x+0=x$ es la cantidad que, para tener las ecuaciones de las asíntotas, debe reemplazar al radical de la ecuacion [*C*]; y asi resulta que las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola, siendo ejes de coordenadas los ejes de esta curva prolongados indefinidamente, son $y=\pm\frac{b}{a}x;$

que, si se quiere, pueden hallarse por la regla general [72], ó por la particular de las curvas algébricas [73].

149. Como queda demostrado [87, *Recíp.* 1.°] que toda recta que pasa por el centro de la hipérbola es un diámetro, esceptuadas las dos asíntotas, es evidente que los diámetros comprendidos en los ángulos de las asíntotas en que estan las ramas de la hipérbola, cortarán á estas ramas en dos puntos; y que los diámetros comprendidos en los ángulos de las asíntotas, en que no se hallan las ramas, no cortarán á la hipérbola: á los primeros los llamaremos diámetros *secantes ó transversales*.

150. Si los ejes de la hipérbola son iguales, esto es, si $a=b$, la hipérbola toma entonces el nombre de hipérbola *equilátera*, y su ecuacion es

$$y^2-x^2=-a^2.$$

150. Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola equilátera serán

$$y=\pm x;$$

y pues los ejes son rectangulares, se infiere que la primera forma con el eje Ox un ángulo de 45°, y la segunda un ángulo de 135°; y por tanto *las dos asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.*

151. *Hallar la magnitud de un semidiámetro secante de la hipérbola, dada la abscisa de uno de sus estremos.*

Fig. 117. Sean x é y las coordenadas de un estremo *M* del semidiámetro OM, y a' la magnitud de este: se hallará del mismo modo que en la elipse

$$a'=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-b^2};$$

Segun esta ecuacion, el mínimo valor de a' es el correspondiente á $x=\pm a$, y entonces $a'=a$; es decir que *el menor de los diámetros secantes de la hipérbola es el eje primero.*

152. Sabemos que si un punto (x, y) se halla en la hipérbola, es

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0.$$

Fig. 118. Si el punto M está fuera de la hipérbola, tirando la MM' paralela al eje Ox, hasta que corte en un punto M' (x', y) á la curva, será

$$a^2y^2-b^2x'^2+a^2b^2=0;$$

pero como $x'>x$, será este primer miembro menor que $a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2$; luego para un punto (x, y) esterior á la hipérbola se tiene

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2>0.$$

Si el punto M está dentro de la hipérbola, haciendo la misma construccion, tendremos para los coordenadas x' é y del punto M' la relacion

$$a^2y^2-b^2x'^2+a^2b^2=0;$$

pero como $x'<x$, será $a^2y^2-b^2x'^2+a^2b^2>a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2$; luego para un punto (x, y) interior á la hipérbola resulta

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2<0.$$

Recíprocos. *Si se verifica que* $a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2 \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} 0$, *el punto estará en la hipérbola, fuera ó dentro.*

Nota. La construccion de la hipérbola, dados sus ejes, por medio de su ecuacion, es muy complicada: mas adelante veremos construcciones muy sencillas de esta curva.

Articulo 2.°

Focos y directrices de la hipérbola.

153. Ya hemos dicho [110] que se llama *foco* de la hipérbola todo punto cuya distancia á cualquier punto de la

curva sea una funcion racional y entera de la abscisa de dicho punto; siendo ecuacion de la hipérbola la ecuacion ordinaria.

Segun esta definicion, y por un cálculo idéntico al de la elipse se hallará, siendo x' é y' las coordenadas del foco, y δ su distancia á cualquier punto de la curva,

$$y'=0,$$

$$\delta^2=\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2}-2xx'+(x'^2-b^2)\ldots\ldots[A].$$

$$x'=\pm\sqrt{a^2+b^2}.$$

Siendo $y'=0$, y teniendo x' dos valores iguales y de signo contrario, se infiere que la hipérbola tiene dos focos situados en la prolongacion del eje primero, ambos equidistantes del centro.

Fig. 119. Como $\sqrt{a^2+b^2}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, la distancia de los focos al centro será AB: tomando pues $OF=OF'=AB$, los puntos F y F' serán los dos focos.

Para hallar ahora los valores del radio vector δ, y ver confirmado de paso que δ es una funcion racional y entera de x, pongamos en la ecuacion [A] en vez de x' sus dos valores

$\sqrt{a^2+b^2}$ y $-\sqrt{a^2+b^2}$.

Sustituyendo el primero, tendremos

$$\delta^2=\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2}-2x\sqrt{a^2+b^2}+a^2,$$

y por consiguiente

$$\delta=\pm\left(\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a\right),$$

funcion entera y racional con respecto á x [*Alg. super.* 276].

De los dos signos, que preceden al paréntesis, debemos tomar el que haga positivo al valor de δ.

Si x es positivo, esto es, si el radio vector es, por ejemplo, FM; como $x>a$, y $\sqrt{a^2+b^2}>a$, será $x\sqrt{a^2+b^2}>a^2$,

$\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}>a$; luego en este caso deberemos tomar el signo esterior $+$; y asi

$$FM=\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a.$$

Si x es negativo, es decir, si el radio vector, tal como FN, corresponde á la rama izquierda, es evidente que la cantidad interior al paréntesis es negativa, y por tanto tendremos que tomar el signo esterior $-$; luego

$$FN=-\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}+a.$$

Pongamos ahora en la ecuacion [A] en lugar de x el segundo valor $-\sqrt{a^2+b^2}$: tendremos

$$\delta^2=\frac{x^2(a^2+b^2)}{a^2}+2x\sqrt{a^2+b^2}+a^2,$$

y
$$\delta=\pm\left(\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}+a\right).$$

Si x es positivo, la cantidad del paréntesis es evidentemente positiva; y por tanto

$$F'M=\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}+a.$$

Si x es negativo; como el valor absoluto de $\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}>a$, habrá que tomar el signo $-$; y por tanto

$$F'N=-\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}-a.$$

154. En adelante, para abreviar, llamaremos c á la cantidad $\sqrt{a^2+b^2}$, que se llama la *escentricidad* de la hipérbola, y asi tendremos entre a, b y c la ecuacion

$$c^2=a^2+b^2.$$

[X] Los valores de los radios vectores serán por lo tanto

$$FM=\frac{cx}{a}-a,\ F'M=\frac{cx}{a}+a;$$

$$FN=-\frac{cx}{a}+a,\ F'N=-\frac{cx}{a}-a.$$

155. Restando los valores de los radios vectores correspondientes al punto M, tendremos

$$F'M-FM=2a;$$

y restando los valores de los dos radios correspondientes al punto N, resulta $FN-F'N=2a$.

Luego *la diferencia de los radios vectores correspondientes á un punto cualquiera de la hipérbola es constante é igual al eje primero.*

Fig. 120. Corolario *Si el punto* M *está fuera de la hipérbola, la diferencia de sus distancias á los focos es menor que* 2a; *y si el punto* M′ *está dentro de la hipérbola, la diferencia de sus distancias á los focos es mayor que* 2a.

1.° Tirando la $F'N$, es

$$MF'-MN<NF',$$

ó

$$MF'-MF+NF<NF',$$

y por consiguiente

$$MF'-MF<NF'-NF;$$

y puesto que $NF'-NF=2a,$

será $MF'-MF<2a.$

2.° Tirando la NF, será

$$M'F-M'N<NF,$$

ó

$$M'F-M'F'+NF'<NF;$$

ó

$$NF'-NF<M'F'-M'F;$$

y como $NF'-NF=2a,$

será $M'F'-M'F>2a.$

Recíprocos. 1.° *Si la diferencia de las distancias de un punto á los focos de la hipérbola es igual al eje primero, dicho punto estará en la hipérbola.* 2.° *Si la diferencia de las distancias de un punto á los focos es menor que el eje primero, el punto estará fuera de la hipérbola.* 3.° *Si la diferencia de las distancias de*

[X] Ver al final la manera de hallar los radios vectores de la hipérbola pag. 468.

un punto á los focos es mayor que el eje primero, el punto estará dentro de la hipérbola [Geom. 21].

Correspondiendo, pues, esclusivamente á los puntos de la hipérbola la propiedad [155], puede definirse la hipérbola diciendo que *es una curva en la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos, es constante*: y en efecto, de esta definicion dedujimos en el número 41 la ecuacion de la hipérbola.

156. En virtud de esta propiedad de la hipérbola puede construirse esta curva, dados sus ejes: 1.° por puntos, 2.° por un movimiento contínuo.

Fig. 121. 1.° Sean AC y BD los ejes de la hipérbola: ante todas cosas determinaremos los focos, para lo cual haremos centro en O, y con un radio igual á BA describiremos dos arcos, que cortarán al eje primero prolongado en dos puntos F y F', que son los focos.

Esto supuesto, para construir esta curva por puntos, señalaremos en la prolongacion del eje primero un punto P á la derecha del foco, y desde el foco F describiremos con el radio AP un arco, y haciendo centro en el otro foco F' con el radio CP describiremos otro arco que cortará al anterior en dos puntos M y M', que corresponden á la hipérbola; y del mismo modo podrán hallarse tantos puntos como se quieran.

En primer lugar, estas dos circunferencias se cortan en dos puntos, pues la distancia FF' de los centros es menor que la suma $AP+CP$ de los radios; y la misma distancia es mayor que la diferencia de los radios, que es el eje primero. Pero si el punto P se tomase en F ó entre A y F, no se verificarian estas dos condiciones, y por lo mismo las circunferencias no se cortarian; pues en el primer caso la distancia de los centros seria igual á la suma de los radios; y en el segundo la distancia de los centros seria mayor que la suma de los radios.

Para demostrar ahora que el punto M corresponde á la hipérbola, tenemos

$$F'M=AC+AP, \text{ y } FM=AP:$$

restando estas dos ecuaciones, resulta

$$F'M-FM=AC,$$

es decir, que la diferencia de las distancias del punto M á los focos es igual al eje primero; luego el punto M corresponde á la hipérbola. Del mismo modo se demuestra que el punto M' corresponde tambien á la hipérbola.

2.° Para construir esta curva por un movimiento contínuo, se coloca una regla $F'x$, de modo que uno de sus estremos esté en F', y que dicha regla coincida con $F'x$: se toma un hilo cuya longitud sea $F'x-AC$, y se fijan sus estremos en el foco F y en el estremo x de la regla.

Póngase el hilo tirante por medio de un estilo; y colocándole al lado de la regla en A, será A el vértice de la hipérbola. Muévase en seguida la regla al rededor del foco F', la cual empujará al estilo, y permaneciendo el hilo siempre tirante, el estilo describirá una curva AM, que será un ramo de hipérbola.

En efecto, cuando la regla tiene la posicion $F'N$, el hilo tiene la posicion $FM+MN$: la diferencia entre la longitud de la regla y la del hilo es el eje primero, pues asi se ha tomado la longitud del hilo; pero la diferencia entre $F'N$ y $FM+MN$, ó entre $F'M+MN$ y $FM+MN$ es $F'M-FM$; luego esta diferencia es igual al eje primero, y por tanto el punto M es un punto de la hipérbola.

Una construccion semejante daria los otros tres ramos de la hipérbola.

457. *Directrices*. Segun la definicion general [443] de la directriz de una curva de segundo grado, hallaremos las ecuaciones de estas rectas en la hipérbola igualando á cero las espresiones de los dos radios vectores de un punto M de la hipérbola: tendremos pues que

$$\frac{cx}{a}-a=0 \text{ y } \frac{cx}{a}+a=0$$

serán las ecuaciones de las directrices de la hipérbola, ó bien

$$x=\frac{a^2}{c},\ x=-\frac{a^2}{c}\ (1);$$

luego la hipérbola tiene dos directrices paralelas al eje segundo.

Fig. 122. Para construir la primera, observaremos que

(1) Igualando á cero las espresiones de los radios vectores de un punto N de la segunda rama de la hipérbola, se hallan las mismas ecuaciones.

x es una tercera proporcional á c y a: describiremos pues sobre OF un semicírculo, y desde O con el radio a describiremos otro arco, que cortará en R al anterior; bajando la perpendicular RD al eje Ox, esta será la directriz correspondiente al foco derecho.

En efecto, tirando la cuerda OR, que es igual á a, tendremos

$$OR^2 = OF \times OD, \text{ ó } a^2 = c \times OD, \text{ y } OD = \frac{a^2}{c}.$$

Tomando $OD' = OD$, y tirando la perpendicular $D'R'$ al eje Ox, se tendrá la otra directriz.

Hallemos la razon de las dos distancias de un punto cualquiera N *de la hipérbola al foco y directriz correspondiente.*

Tenemos

$$NF = \frac{cx}{a} - a, \quad NP = NQ - QP = x - \frac{a^2}{c};$$

luego
$$\frac{NF}{NP} = \frac{\frac{cx}{a} - a}{x - \frac{a^2}{c}} = \frac{c(cx - a^2)}{a(cx - a^2)} = \frac{c}{a}.$$

Luego *las distancias de un punto cualquiera de la hipérbola al foco y directriz correspondientes son entre sí como la escentricidad al semieje primero.*

Artículo 3.°

Parámetro de la hipérbola.

158. *Hallar la ecuacion de la hipérbola tomando por ejes de coordenadas el eje primero prolongado y la perpendicular á este levantada en el vértice derecho.*

Las fórmulas de transformacion son $x = x' + a$, $y = y'$; luego, sustituyendo estos valores en la ecuacion de la hipérbola referida á sus ejes, que es $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, será

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left((x' + a)^2 - a^2\right),$$

ó
$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax'+x'^2).$$

159. La ecuacion que acabamos de hallar, puede escribirse asi:

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x'+\frac{b^2}{a^2}x'^2:$$

el coeficiente $\frac{2b^2}{a}$ se llama *parámetro* de la hipérbola; y como $\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2}{2a}$, se ve que el parámetro *es una tercera proporcional á los ejes primero y segundo*.

La doble ordenada, que pasa por el foco de la hipérbola, es igual al parámetro.

En efecto, en la ecuacion ordinaria de la hipérbola pongamos en lugar de x la abscisa $\pm c$ del foco, en cuyo caso el valor de y será la ordenada que pasa por este punto: tendremos

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(c^2-a^2);$$

pero como en la hipérbola $c^2=a^2+b^2$, resulta, sustituyendo,

$$y^2=\frac{b^4}{a^2} \text{ é } y=\frac{b^2}{a};$$

luego la doble ordenada será $\frac{2b^2}{a}$, que es el parámetro.

Llamemos $2p$ al parámetro, é introduzcamos esta cantidad en la ecuacion de la hipérbola referida á su vértice derecho.

Tendremos $\frac{2b^2}{a}=2p$, $b^2=ap$; luego la ecuacion de la hipérbola con respecto á su vértice y parámetro será

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2.$$

Articulo 4.°

Tangentes á la hipérbola.

160. *Hallar la ecuacion de la tangente á la hipérbola en el punto cuyas coordenadas sean* x' *é* y'.

La ecuacion de la hipérbola es

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0:$$

por consiguiente

$$f'_{x'}=-2b^2x', \quad f'_{y'}=2a^2y';$$

luego

$$-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}=\frac{2b^2x'}{2a^2y'}=\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

es la tangente del ángulo que forma la tangente á la hipérbola con el eje de abscisas.

La ecuacion de la tangente será

$$y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x'),$$

que se reduce á

$$a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2,$$

fácil de retener por su semejanza con la ecuacion ordinaria de la hipérbola

161. Discusion del coeficiente angular de la tangente á la hipérbola.

Llamando T al ángulo que forma la tangente con el eje de las x, es

$$\operatorname{tg} T=\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Fig 123. Consideremos en primer lugar las tangentes al ramo AM superior de la derecha, en cuyo caso las coordenadas x' é y' del punto de contacto son positivas.

Si x' tiene el menor valor posible a, y por consiguiente $y'=0$, será $\operatorname{tg}T=\infty$; luego en el vértice A de la hipérbola la tangente es perpendicular al eje Ox.

Si x' crece, y' crece tambien: la espresion $\frac{b^2x'}{a^2y'}$ no nos dice si, en tal caso, crece ó disminuye. Pero reemplacemos en esta espresion una de las variables, y por ejemplo, en funcion de x', que es $y'=\frac{b}{a}\sqrt{x'^2-a^2}$; y será entonces

$$\operatorname{tg} T=\frac{b^2x'}{ab\sqrt{x'^2-a^2}},\ \text{ó}\ \operatorname{tg} T=\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x'^2}}};$$

y ahora es fácil ver que, si x crece, disminuye $\frac{a^2}{x'^2}$, aumenta la diferencia $1-\frac{a^2}{x'^2}$, aumenta la cantidad radical, aumenta el denominador, y por tanto disminuye el quebrado, y disminuye el ángulo T: luego, cuando x' tenga el mayor valor posible, ∞, tendrá $\operatorname{tg} T$ el menor valor posible $\frac{b}{a}$, que es precisamente la tangente del ángulo NOx que forma la asíntota HK con el eje Ox.

La simetría de los dos ramos AM y AM' demuestra que las tangentes á los diferentes puntos del ramo inferior AM' forman ángulos, *por la parte inferior del eje*, que principiarán en 90° en el vértice A, y su mínimo valor será el ángulo $K'Ox$ que forma por la parte inferior la asíntota OK' con el eje Ox; y la simetría de las dos ramas derecha é izquierda prueba tambien, que las tangentes á la rama izquierda formarán ángulos agudos con el eje, comprendidos entre 90° y los $H'Ox'$, KOx' que forman las asíntotas con el eje Ox'.

Vemos, segun esta discusion, que las asíntotas de la hipérbola son tangentes á esta curva en los puntos de la misma cuyas coordenadas son infinitas; ó lo que es igual, las asíntotas son *límites* de las tangentes á la hipérbola.

162. Resolvamos ahora los tres problemas análogos á los resueltos para la elipse en el número 117.

Problema 1.° *Conociendo la posicion y magnitud de uno de los ejes de la hipérbola, y un punto de esta curva, tirarla por dicho punto una tangente; estando ó no construida la curva.*

Fig. 124. Supongamos en primer lugar que se conozca el eje primero.

Sea M el punto dado en que la tangente ha de tocar á la hipérbola. Haciendo $y=0$ en la ecuacion de la tangente á la hipérbola, que es

$$a^2yy'-b^2xx'=-a^2b,$$

en cuyo caso x será la abscisa OT del pié de la tangente, tendremos

$$b^2.OT.x'=a^2b^2,$$

de donde

$$OT=\frac{a^2}{x'};$$

es decir, que la abscisa del pié de la tangente es una tercera proporcional á la abscisa del punto de contacto y al semieje primero.

Para construir esta tercera proporcional de una manera elegante, describiremos sobre la abscisa OP un semicírculo, desde el centro O con el radio OA describiremos un arco que cortará en el punto N á esta semicircunferencia, bajaremos desde el punto N la perpendicular NT á la Ox, y será OT la tercera proporcional pedida.

En efecto, tirando la cuerda NO, es

$$NO^2=OP.OT, \text{ ó } a^2=x'.OT,$$

de donde

$$OT=\frac{a^2}{x'}.$$

Tirando pues la recta TM, se tendrá la tangente pedida.

Fig. 125. Supongamos ahora que se conozca el eje segundo y el punto M, en que ha de tocar la tangente á la hipérbola. Haciendo $x=0$ en la ecuacion de la tangente á la hipérbola, en cuyo caso y será la ordenada en el orígen de dicha tangente, tendremos

$$a^2yy'=-a^2b^2,$$

de donde

$$y=-\frac{b^2}{y'}.$$

Segun este valor, el punto en que la tangente ha de cortar al eje de ordenadas tiene, cuando y' es positiva, una ordenada negativa: sea $-OT$ esta ordenada, será $OT=\frac{b^2}{y'}$, que es una tercera proporcional á y' y b.

Para construir esta tercera proporcional, bajo desde el punto M la perpendicular MP á la Oy, tomo $OB'=OB$ semieje segundo, tiro la PB', y por el punto B' la $B'T$ perpendicular á PB', y será OT la tercera proporcional pedida.

En efecto, tenemos, por un teorema muy conocido,

$$OB'^2=OP\times OT, \text{ ó } b^2=y'\times OT,$$

de donde

$$OT=\frac{b^2}{y'}.$$

Tirando pues la recta TM, se tendrá la tangente á la hipérbola en el punto M

Problema 2.° *Conociendo la magnitud y posicion de los ejes de la hipérbola, tirarla una tangente desde un punto* (α, β), *estando ó no construida dicha curva.*

La ecuacion de la tangente á la hipérbola es

$$a^2yy'-b^2xx'=-a^2b^2:$$

como el punto (α, β) está en esta recta, tendremos la ecuacion

$$a^2\beta y'-b^2\alpha x'=-a^2b^2.$$

Tenemos, ademas, la ecuacion

$$a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2$$

Resolviendo estas dos ecuaciones, obtendremos los valores de las dos incognitas x' é y'.

Para esto, elimino la y', y resultará, del mismo modo que en la elipse,

$$(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)\,x'^2+2a^2b^2\alpha\,.\,x'-a^4(\beta^2+b^2)=0 \;\ldots\; [G];$$

de donde

$$x'=a\times\frac{-b^2\alpha\pm\beta\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2+a^2b^2}}{a^2\beta^2-b^2\alpha^2} \;\ldots\ldots\; [H],$$

y por consiguiente

y

$$y'=b^2\times\frac{-a^2\beta\pm\alpha\sqrt{a^2\beta^2-b^2\alpha^2+a^2b^2}}{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}.$$

Discusion de estas fórmulas

Discutamos en primer lugar la ecuacion $Ax^2+2Bx+C=0$.

Resolviendo esta ecuacion, tendremos

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

Pueden ocurrir los casos siguientes:

1.° A diferente de cero.

2.° $A=0$.

3.° $A=0$, $B=0$.

1 er *caso* Siendo A diferente de 0, los dos valores de x serán reales y desiguales, si $B^2-AC>0$; serán reales é iguales, si $B^2-AC=0$; y serán imaginarios, si $B^2-AC<0$.

2.° *caso*. $A=0$: haciendo $x=\frac{1}{y}$, la ecuacion

$$Ax^2+Bx+C=0$$

será

$$\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+C=0,$$

ó

$$A+By+Cy^2=0 \ldots [K];$$

y pues $A=0$, esta ecuacion se reduce á

$$By+Cy^2=0,$$

que nos da

$$y=0,\ y=-\frac{B}{C},$$

y por consiguiente los valores de x son

$$x=\frac{1}{0},\ x=-\frac{C}{B};$$

es decir que en el caso en que $A=0$, la ecuacion tiene una raiz finita y otra infinita.

3 er *caso*. $A=0$, $B=0$: la ecuacion $[K]$ se reduce á

$$Cy^2=0,$$

que nos da para y dos valores 0 y 0; y los correspondientes de x son $\frac{1}{0}$ y $-\frac{1}{0}$: luego cuando $A=0$ y $B=0$, la incógnita tiene dos valores infinitos.

Esto supuesto, pasemos á discutir la ecuacion

$$(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)\,x'^2+2a^2b^2\alpha.\,x'-a^4\,(b^2+\beta^2)=0.$$

Si el coeficiente de x'^2 no es cero, es decir, si $a^2\beta^2-b^2\alpha^2 \gtrless 0$, las raices de la ecuacion serán reales y desiguales, reales é iguales, ó imaginarias. Serán reales y desiguales, si

$$a^4b^4\alpha^2+(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)\,a^4(b^2+\beta^2)>0.$$

Serán reales é iguales, si esta cantidad es 0; y serán imaginarias, si la misma es menor que 0.

Suprimiendo el factor comun b^4, y reduciendo, esta espresion se convierte en $a^2\beta^2-b^2\alpha^2+a^2b^2$; luego las raices de la ecuacion serán reales y desiguales, reales é iguales ó imaginarias en los casos respectivos

$$a^2\beta^2-b^2\alpha^2+a^2b^2 \gtreqless 0.$$

Por consiguiente, como ya sabemos que, si el punto (α,β) está fuera de la hipérbola, se verifica el primer caso; el segundo, si el punto (α, β) está en la hipérbola; y el tercero, si el punto (α, β) está dentro de la hipérbola, resulta: que si el punto está fuera, se podrán tirar desde él dos tangentes á la hipérbola; si el punto está en la hipérbola, solo se la podrá tirar una tangente, y si el punto está dentro de la hipérbola, no se podrá tirar á esta curva desde él ninguna tangente.

Fig. 126. Si el punto dado I está fuera de los ángulos de las asíntotas en que se hallan los focos, tendremos el ángulo agudo $IOP>HOA$, y por consiguiente $\operatorname{tg} IOP>\operatorname{tg} HOA$; y pues $\operatorname{tg} IOP=\frac{IP}{OP}$, y $\operatorname{tg} HOA=\frac{b}{a}$, será $\frac{IP}{OP}>\frac{b}{a}$; ó bien, puesto que α y β son las coordenadas del punto I, será $\pm\frac{\beta}{\alpha}>\frac{b}{a}$, ó $\frac{\beta^2}{\alpha^2}>\frac{b^2}{a^2}$, ó $a^2\beta^2-b^2\alpha^2>0$, desigualdad que no dejará de ser cierta aun cuando $\alpha=0$, esto es, aun cuando el punto I se halle en el eje Oy. Resulta, pues, que, cuando el punto desde el cual se han de tirar las tangentes esté fuera de los ángulos focales de las asíntotas, el primer término de la ecuacion [G] existe, y su coeficiente $a^2\beta^2-b^2\alpha^2$ es positivo. Como el producto de los valores de x es $-\frac{a^4(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}$, este producto será negativo, y por tanto uno de los valores de x será positivo y el otro negativo; luego uno de los puntos de contacto estará en la rama derecha y el otro en la rama izquierda.

Fig. 127. Si el punto dado I está en uno de los ángulos focales de las asíntotas, tirando la recta OI, tendremos $\pm\frac{\beta}{\alpha}<\frac{b}{a}$, de donde $a^2\beta^2-b^2\alpha^2<0$, desigualdad que se verificará, aun cuando $\beta=0$, esto es, aun cuando el punto I se halle sobre el eje Ox: existe pues el primer término de la ecuacion [G], y su coeficiente es negativo. El producto de los

dos valores de x es $\frac{-a^4(b^2+\beta^2)}{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}$, cantidad positiva; luego los

dos valores de x' tienen el mismo signo: los dos serán positivos, si α es positiva, y negativos si α es negativa, puesto que

su suma $-\frac{2a^2b^2\alpha}{a^2\beta^2-b^2\alpha^2}$ es cantidad positiva, si α es positiva, y

negativa, si α es negativa. Luego, cuando el punto dado está en el ángulo focal de la derecha, los dos puntos de contacto están en la rama derecha, y cuando el punto dado está en el ángulo focal de la izquierda, los dos puntos de contacto están en la rama izquierda.

Supongamos ahora que el punto dado I esté en una de

las asíntotas: tendremos $\frac{\beta}{\alpha}=\pm\frac{b}{a}$, ó $a^2\beta^2-b^2\alpha^2=0$. En este caso el primer término de la ecuacion [G] desaparece, y por tanto uno de los valores de x es real y finito, y el otro infinito. Luego desde un punto de una de las asíntotas no se puede tirar mas que una tangente á la hipérbola; pues la segunda coincide con la asíntota sobre que se halla el punto dado.

Finalmente, si el punto dado es el centro de la hipérbola, es $\alpha=0$, $\beta=0$, y por consiguiente desaparecen los dos primeros términos de la ecuacion: los dos valores de x son infinitos, y por tanto no se puede tirar desde el centro ninguna tangente á la hipérbola; ó si se quiere, se puede decir que las dos tangentes coinciden con las asíntotas.

Nota. Los mismos resultados se obtendrian discutiendo directamente los dos valores de x' [*ecuacion* H], pero no tan fácilmente, porque la simplificacion final de estos valores dificulta la discusion.

Problema 3.° *Dados los ejes de la hipérbola, tirarla una tangente paralela á una recta dada, estando construida ó no la curva.*

Sea t la tangente del ángulo que la recta dada forma con el eje Ox: como la tangente pedida debe ser paralela á esta

recta, los ángulos que las dos forman con el eje de las x, serán iguales; luego $$\frac{b^2x'}{a^2y'}=t,$$
primera ecuacion que contiene á las incógnitas x' é y'. La segunda ecuacion es
$$a^2y'^2-b^2x'^2+a^2b^2=0.$$
Resolviéndolas, resultan
$$y'=\pm\frac{b^2}{\sqrt{t^2a^2-b^2}},\quad x'=\mp\frac{ta^2}{\sqrt{t^2a^2-b^2}}.$$

Segun estas fórmulas, cada incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario; lo que así debe ser, pues teniendo una tangente á la hipérbola, que sea paralela á la recta dada, y tirando el diámetro que pase por el punto de contacto, la tangente á la curva en el otro estremo de dicho diámetro es paralela á la primera tangente [88, *corol.*], y por consiguiente á la recta dada; y los estremos de un diámetro secante de la hipérbola tienen evidentemente coordenadas respectivamente iguales y de signo contrario.

Discusion de estas fórmulas.

Tiremos por el orígen una paralela á la recta dada; esta paralela estará comprendida en los ángulos focales de las asíntotas, ó estará comprendida en los otros dos ángulos de estas rectas: en el primer caso $t<\frac{b}{a}$, ó $-t<\frac{b}{a}$, y por consiguiente $t^2<\frac{b^2}{a^2}$, ó $a^2t^2-b^2<0$. Luego en este caso los valores de las coordenadas x' é y' del punto de contacto son imaginarios, y por tanto el problema es imposible.

En el segundo caso $t>\frac{b}{a}$, ó $-t>\frac{b}{a}$; luego $t^2>\frac{b^2}{a^2}$, ó $t^2a^2-b^2>0$; es decir, que los valores de x' é y' son reales, y por tanto el problema es posible, y son dos las tangentes paralelas á la recta dada. Será, pues, este problema imposible, si la paralela tirada por el orígen á la recta dada está comprendida en los ángulos focales de las asíntotas; y será posible, si dicha paralela está comprendida en los otros dos ángulos de las asíntotas.

163. *Ecuacion de la normal á la hipérbola.*

Siendo la normal perpendicular á la tangente en el punto de contacto, su coeficiente angular será $-\frac{1}{\frac{b^2x'}{a^2y'}}$, ó $-\frac{a^2y'}{b^2x'}$, y por tanto la ecuacion de la normal á la hipérbola será

$$y-y'=-\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x'),$$

que se reduce á

$$a^2xy'+b^2yx'=c^2x'y'.$$

164. Otra solucion geométrica de los tres problemas sobre las tangentes á la hipérbola.

Teorema. *La tangente divide en dos partes iguales al ángulo que forman los radios vectores tirados al punto de contacto.*

La primera demostracion es idéntica á la dada en el teorema [120]; solo que aquí la demostracion es mas directa. La segunda demostracion es tambien análoga á la segunda dada en el mismo número 120.

Recíproco. *La bisectriz del ángulo que forman los radios vectores es tangente á la hipérbola:* reduccion al absurdo.

Se puede demostrar directamente este recíproco por el siguiente razonamiento geométrico.

Fig. 128. Tomemos en la bisectriz MT un punto cualquiera R, diferente del punto M, y tiremos las rectas FR y $F'R$, desde el punto F bajemos á la bisectriz la perpendicular FS, hasta que encuentre en S al radio vector $F'M$, y tiremos tambien la SR: los triángulos FMo y SMo, que tienen comun el lado Mo é iguales respectivamente los ángulos adyacentes, son iguales, y por tanto $MF=MS$; luego $RS=RF$; mas $F'R-RS<F'S$; luego $F'R-RF<F'S$, ó $F'R-RF<F'M-MF$, ó $F'R-RF<2a$; es decir, que el punto R está fuera de la hipérbola.

Queda, pues, demostrado que todos los puntos de la bisectriz, escepto el punto M, están fuera de la hipérbola; y que por tanto la bisectriz es tangente á la hipérbola.

165. De este teorema recíproco resultan las soluciones geométricas de los tres problemas.

Problema 1.° *Tirar una tangente á la hipérbola por un* *punto dado en la misma, conociendo el eje primero y los focos, y estando ó no construida la curva.*

Tírense los radios vectores al punto dado, y la bisectriz del ángulo que formen, será la tangente.

Problema 2.° *Desde un punto dado fuera de la hipérbola, tirarla una tangente, conociendo el eje primero y los focos, y estando construida ó no la curva.*

Fig. 129. Supongamos que la hipérbola no esté construida. Sean AC, F y F' el eje primero y los focos, I el punto desde el cual se han de tirar las tangentes

Haciendo centro en I, describo con un radio igual á la distancia de este punto á uno de los focos, al F por ejemplo, una circunferencia; desde el otro foco F' describo con el radio $2a$ otra circunferencia que cortará á la primera en dos puntos P y P'; tiro desde el foco F' las rectas $F'P$, $F'P'$; desde el punto I bajo las perpendiculares IM, IM' á las rectas PF, $P'F$, y dichas perpendiculares IM, IM' serán tangentes á la hipérbola en los puntos M y M' en que cortan á las rectas $F'P$ y $F'P'$.

Para demostrarlo, haremos ver en primer lugar, que las dos circunferencias se cortan; y para esto, que la distancia IF' de los centros es menor que la suma de los radios $IF+2a$, y mayor que su diferencia $2a-IF$ ó $IF-2a$, segun que $2a$ es mayor ó menor que IF.

1.° Tenemos [155, *Corol.*] $IF'-IF<2a$, y por consiguiente

$$IF'<IF+2a;$$

es decir, que la distancia de los centros es menor que la suma de los radios.

2.° En el triángulo IFF' es

$$IF'>FF'-IF,$$

y con mayor razon $\quad IF'>2a-IF;$

es decir, que la distancia de los centros es mayor que la diferencia de los radios; cuando $IF<2a$.

Supongamos que $IF>2a$. El punto I puede estar á la derecha ó á la izquierda del eje segundo prolongado: si el punto I está á la derecha del eje segundo, es $IF'>IF$ [*Geometría, Teor.* 23]; luego con mayor razon

$$IF'>IF-2a$$

Si el punto I está á la izquierda del eje segundo tenemos [155, *Corol.*]

$$IF-IF'<2a,$$

y por consiguiente

$$IF'>IF-2a;$$

luego tambien en el caso en que $IF>2a$ la distancia de los centros es mayor que la diferencia de los radios.

Queda pues demostrado que las dos circunferencias se cortan.

Para demostrar ahora que la recta IM es tangente á la hipérbola en el punto M, tiro la FM: siendo IM perpendicular á la cuerda FP, la divide en dos partes iguales, esto es $Fo=Po$; luego los dos triángulos FMo y PMo son iguales, y por tanto $FM=PM$, y el ángulo $FMo=PMo$. Siendo $FM=PM$, se infiere que $F'M-FM=F'M-PM=F'P=2a$, es decir [155, *Recíp.* 1.°] que el punto M corresponde á la hipérbola; y como la IM es bisectriz del ángulo FMF' formado por los radios vectores tirados al punto M de la curva, es tangente á la hipérlola en este punto M.

Del mismo modo se puede demostrar que la otra recta IM' es tangente á la hipérbola en el punto M'.

Si la hipérbola estuviese construida, los puntos M y M' serian los de interseccion de las rectas $F'M$ y $F'M'$ con la curva: no habria pues que bajar las perpendiculares IM é IM' á las rectas FP y $F'P'$, sino juntar el punto I con los puntos de interseccion M y M'.

Problema 3.° *Conociendo el eje primero y los focos de una hipérbola, tirarla una tangente paralela á una recta dada, estando construida ó no la curva.*

Fig. 130. Sean F y F' los focos y AC el eje primero de la hipérbola, DE la recta dada, á la cual ha de ser paralela la tangente pedida. Ya se sabe [162, *Probl.* 3.°] que si por el centro se tira una paralela á la DE, debe estar comprendida, para la posibilidad del problema, en los dos ángulos de las asíntotas en que no están los focos. Suponiendo que asi sea, tiro la FD perpendicular indefinida á la DE, y desde F' con el radio $2a$ describo un arco, que cortará á esta perpendicular en los dos puntos P y P', tiro las rectas indefinidas $F'P$ y $F'P'$, en los puntos medios O y O' de las PF y $P'F$ levanto las perpendiculares OM y $O'M'$, que serán las tangentes á la curva en los puntos M y M' en que cortan á las $F'P$ y $F'P'$ prolongadas.

En efecto, $MF=MP=MF'-2a$; luego $MF'-MF=2a$, es decir que el punto M corresponde á la hipérbola, y la bisectriz OM del ángulo $F'MF$ es tangente á esta curva en dicho punto M.

Del mismo modo se demuestra que la $O'M'$ es tangente á la hipérbola en el punto M'.

NOTA. Si la hipérbola estuviese construida, los puntos M y M' serian los de encuentro de las rectas $F'P$ y $F'P'$ con la curva; luego tirando por estos puntos las paralelas MO y $M'O'$ á la DE, estas pararelas serian las tangentes pedidas. La demostracion es poco diferente de la del caso anterior.

NOTA. No nos detendremos en probar que, si la direccion que ha de tener la tangente, es la conveniente, el arco PP' ha de cortar en dos puntos á la perpendicular FD prolongada suficientemente

ARTÍCULO 5.º

Cuerdas suplementarias de la hipérbola.

166. *Cuerdas suplementarias* de la hipérbola son dos rectas tiradas desde los estremos de un diámetro secante cualquiera á un punto de la curva.

Fig. 131. El producto de las tangentes de los ángulos α *y* α' *que forman con el eje primero, prolongado indefinidamente, dos cuerdas suplementarias* A'M *y* C'M *es constante é igual á* $\frac{b^2}{a^2}$.

Se demuestra del mismo modo que el teorema análogo de la elipse.

Corolario. Si $a=b$, esto es, si la hipérbola es equilátera, será $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'=1$, de donde $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha'}=\cot\alpha'$; luego *en la hipérbola equilátera uno de los dos ángulos, que las cuerdas suplementarias forman con el eje primero, es suplemento del otro.*

Recíproco. *Si el producto de las tangentes de los ángulos que forman con el eje primero de la hipérbola dos rectas que salen de los estremos de un diámetro es igual á* $\frac{b^2}{a^2}$, *estas dos rectas se unirán en la hipérbola,* ó bien, *serán suplementarias.*

Se demuestra como en la elipse

Corolario. *Si por los estremos de un diámetro cualquiera se tiran dos cuerdas paralelas á dos suplementarias, dichas paralelas serán tambien suplementarias.* Se demuestra como en la elipse.

El teorema [166] da medios sencillos para resolver geométricamente los dos problemas siguientes, estando construida la hipérbola y suficientemente prolongadas sus ramas.

Problema 1.° *Tirar una tangente á la hipérbola por un punto dado en la curva.*

Resolucion y demostracion idénticas á las seguidas en el problema análogo de la elipse; y tambien puede hacerse respecto de la ecuacion de la tangente la misma observacion que se hizo en la elipse.

Problema 2.° *Tirar á la hipérbola una tangente paralela á una recta dada.*

Si la paralela á la recta dada, tirada por el centro de la hipérbola, cae en los dos ángulos de las asíntotas en que no están los focos, el problema es posible [262, *Prob.* 3.°], y entonces su resolucion y demostracion son idénticas á las seguidas al resolver el problema análogo en la elipse.

167. *Hallar el ángulo* M *que forman dos cuerdas suplementarias que salen de los estremos del eje primero.*

Fig. 132. Del mismo modo que en la elipse se hallará $\operatorname{tg} M = \frac{2ab^2}{c^2y}$; y pues á uno y otro lado del eje segundo hay en las dos ramas dos puntos M y M' para los cuales tiene y el mismo valor, se infiere que existen dos sistemas de cuerdas suplementarias que saliendo de los estremos del eje primero forman igual ángulo.

Segun la espresion $\operatorname{tg} M = \frac{2ab^2}{c^2y}$, se ve que creciendo y desde 0, disminuye el valor de $\operatorname{tg} M$ desde ∞, es decir que el ángulo M es agudo, y puede llegar á ser tan pequeño como se quiera, creciendo y suficientemente.

168. Si tirásemos por el punto M un diámetro MON y la recta BN, esta seria paralela á la AM, puesto que los dos triángulos AMO y BNO son iguales: luego las dos cuerdas suplementarias MB y NB forman un ángulo MBN suplemento del BMA; y como este puede acercarse á cero cuanto se quiera, alejándose el punto M suficientemente, el ángulo MBN puede aproximarse á dos rectos indefinidamente.

169. Ahora se resolverán como en la elipse los dos problemas: 1.° *Dados los ejes de una hipérbola, hallar un sistema de cuerdas suplementarias que formen un ángulo cualquiera agudo ú obtuso.* 2.° *Construir los dos sistemas de cuerdas suplementarias que formen un ángulo dado.*

Fig. 132. En este último problema, si el ángulo que han de formar las cuerdas suplementarias es obtuso, se construirá sobre el eje primero el arco capaz del suplemento de dicho ángulo, y despues que se tengan los dos puntos M y M' que verifiquen esta construccion, se tirarán los dos diámetros MON, $M'ON'$, y en seguida las cuerdas BN y AN', y se tendrán los dos sistemas de cuerdas suplementarias que satisfacen á la cuestion, á saber: MB y NB, $M'A$ y $N'A$.

Artículo 6.°

Diámetros conjugados de la hipérbola.

Seguiremos un órden análogo al seguido en la elipse.

170. *Hallar la ecuacion de los diámetros de la hipérbola.*

Por un razonamiento idéntico al seguido en la elipse, al resolver el problema correspondiente, se hallará que la ecuacion de los diámetros de la hipérbola es $a^2y.m-b^2x=0$, que representa una recta que pasa por el orígen, que actualmente es el centro de la hipérbola. Luego *todos los diámetros de la hipérbola son líneas rectas que pasan por el centro.*

Recíproco. Fig. 133. *Toda recta que pasa por el centro de la hipérbola y tiene diferente direccion que las asíntotas, es diámetro.*

Sea OQ una recta que pasa por el centro y no coincide con ninguna asíntota, y su ecuacion $y=\left(\pm\frac{b}{a}+\delta\right)x$. La ecuacion del diámetro, que biseca las cuerdas cuyo coeficiente angular es m, es $a^2y.m-b^2x=0$, ó $y=\frac{b^2}{a^2m}x$. Observemos ahora que m no puede tener el valor $\pm\frac{b}{a}$, pues toda recta que forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente es $\pm\frac{b}{a}$, es paralela á una de las asíntotas, y por consiguiente no corta á la hipérbola mas que en un punto (*a*),

---

(*a*) En efecto, igualando coordenadas entre la ecuacion de la hiperbola es decir que no es cuerda. Igualemos pues $\frac{b^2}{a^2m}$ á $\pm\frac{b}{a}+\delta$, y resultará para m el valor posible $m=\dfrac{b}{\pm a+\dfrac{a^2\delta}{b}}$. Dando pues á las cuerdas la inclinacion conveniente para que su coeficiente angular sea este valor de m, el diámetro que las biseque tendrá por ecuacion $y=\left(\pm\frac{b}{a}+\delta\right)x$, que es la ecuacion de la OQ; luego esta recta es un diámetro.

Demostremos ahora que *las asíntotas no son diámetros.*

Las ecuaciones de las asíntotas son $y=\pm\frac{b}{a}x$, y como la ecuacion de todo diámetro de la hipérbola es

$$a^2y.m-b^2x=0, \text{ ó } y=\frac{b^2}{a^2m}x;$$

si igualamos este coeficiente $\frac{b^2}{a^2m}$ á $\pm\frac{b}{a}$, resultará $m=\pm\frac{b}{a}$, valor imposible de m. Luego no hay ningun sistema de cuerdas paralelas al que las asíntotas dividan en dos partes iguales; luego las asíntotas no son diámetros.

Corolario. *La tangente á la hipérbola en el punto de interseccion de un diámetro con la hipérbola es paralela á las cuerdas bisecadas por dicho diámetro.* Se demuestra como en la elipse.

271. Se llaman *diámetros conjugados* de la hipérbola dos diámetros, tales que cada uno biseca las cuerdas paralelas al otro.

172. *Fig. 134. Si un diámetro* OQ *de la hipérbola biseca las cuerdas paralelas á otro diámetro* OR, *este biseca tambien las cuerdas paralelas al primero; y por tanto los dos son conjugados.*

Se demuestra como el teorema análogo en la elipse.

173. *El producto de las tangentes de los ángulos que dos diá-*

---

y la de la recta $y=\pm\frac{b}{a}x+6$, y eliminando la y, se verá que el primer término de la ecuacion de segundo grado que resulta, es cero, y por tanto x tiene un valor finito y otro infinito; luego la recta $y=\pm\frac{b}{a}x+6$ no corta á la curva mas que en un punto, es decir que no es cuerda.

metros conjugados de la hipérbola forman con el eje primero, es constante é igual á $\frac{b^2}{a^2}$.

Se demuestra como el teorema análogo en la elipse.

Consecuencias. 1.ª *Fig. 133. Si un diámetro* OM *es paralelo á una de dos cuerdas suplementarias* CN, *su conjugado* OM′ *es paralelo á la otra suplementaria* AN. Como en la elipse.

2.ª *En la hipérbola no hay mas sistema de diámetros conjugados rectangulares que el sistema de los ejes;* pues siendo $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2}$, como $\frac{b^2}{a^2}$ no puede ser -1, se infiere que los dos diámetros conjugados no pueden ser rectangulares.

Si la hipérbola es equilátera, será $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha' = 1$; luego *en la hipérbola equilátera los dos diámetros conjugados forman con el eje primero dos ángulos complementarios.*

3.ª *Los dos ángulos* α *y* α' *que forman con el eje primero dos diámetros conjugados de la hipérbola, son agudos, ó los dos son obtusos;* puesto que el producto de sus tangentes es positivo.

4.º *Fig. 135. Si un diámetro corta á la hipérbola, su conjugado no puede cortarla.*

En efecto, la tangente del ángulo MOx, que forma un diámetro secante con el eje primero, es menor que el que forma la asíntota con dicho eje, y por tanto $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$, y como $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a}$, se infiere que $\operatorname{tg}\alpha' > \frac{b}{a}$; es decir que el segundo diámetro está comprendido en los ángulos de las asíntotas en que no se hallan los focos; luego este segundo diámetro no puede cortar á la hipérbola.

5.ª *Si un diámetro secante va aproximándose á una asíntota, su conjugado irá aproximándose á la misma; y ambos coincidirán con ella al mismo tiempo.* Luego las asíntotas son límites comunes de los diámetros conjugados.

174. *Hallar la ecuacion de la hipérbola, tomando por ejes de coordenadas dos diámetros conjugados.*

Fig. 136. La ecuacion ordinaria de la hipérbola es

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Las fórmulas para pasar de los ejes rectangulares Oy, Ox á los oblicuángulos Oy', Ox' se deducirán de las fórmulas generales [43, 2.º *caso*], haciendo $\theta = 90°$, y son:

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'.$$

Sustituyendo estos valores, y teniendo presente que, por ser los ejes diámetros conjugados, es

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b^2}{a^2},$$

resulta

$$\left.\begin{array}{r} a^2 \operatorname{sen}^2\alpha' \\ -b^2 \cos^2\alpha' \end{array}\right| y'^2 + \left.\begin{array}{r} a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \\ -b^2 \cos^2\alpha \end{array}\right| x'^2 = -a^2b^2.$$

Llamemos a' al semidiámetro primero OA', y b' al semidiámetro segundo, es decir á la ordenada en el orígen hecha real; é introduzcamos estos semidiámetros en la ecuacion de la elipse. Haciendo en ella $y'=0$, es $x'=\pm a'$; luego

$$(a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2\cos^2\alpha)a'^2 = -a^2b^2 \ldots [A],$$

de donde

$$a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2\cos^2\alpha = -\frac{a^2b^2}{a'^2}.$$

Haciendo ahora $x'=0$, y por consiguiente $y'=\pm b'\sqrt{-1}$, será

$$(a^2 \operatorname{sen}\alpha' - b^2\cos\alpha') \times -b'^2 = -a^2b^2 \ldots [B],$$

de donde

$$a^2 \operatorname{sen}^2\alpha' - b^2\cos^2\alpha' = \frac{a^2b^2}{b'^2}.$$

Sustituyendo, tendremos

$$\frac{a^2b^2}{b'^2}y'^2 - \frac{a^2b^2}{a'^2}x'^2 = -a^2b^2,$$

ó

$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{x'^2}{a'^2} = -1,$$

ó

$$a'^2y'^2 - b'^2x'^2 = -a'^2b'^2,$$

ecuacion de la misma fórma que la de la hipérbola referida á sus ejes.

175. Comparando esta ecuacion con la de la elipse referida á sus diámetros conjugados, se ve que la diferencia está en el signo de b'^2. Luego si en una cualquiera de las propiedades de la elipse entra b', en la propiedad análoga de la hipérbola entrará $b'\sqrt{-1}$

Asi las fórmulas [A] y [B] pueden deducirse de sus análogas en la elipse, mudando los signos de b^2 y b'^2.

176. Teoremas de Apolonio.

1.° *La diferencia de cuadrados de los semidiámetros conjugados de la hipérbola es igual á la diferencia de cuadrados de los semiejes*; esto es $a'^2-b'^2=a^2-b^2$.

2.° *El paralelógramo construido sobre los semidiámetros conjugados de la hipérbola es equivalente al rectángulo construido sobre los semiejes*; es decir

$$a'b' \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)=ab$$

Estos teoremas se deducen de los correspondientes en la elipse, mudando b y b' en $b\sqrt{-1}$ y $b'\sqrt{-1}$; y pueden demostrarse directamente del mismo modo que sus análogos en la elipse.

177. El primero de estos dos teoremas prueba que *en la hipérbola ordinaria no pueden existir diámetros conjugados iguales*; pues siendo a diferente de b, tambien a' será diferente de b'

En la hipérbola equilátera todo diámetro es igual á su conjugado; pues si $a=b$, se infiere que $a'=b'$.

NOTA. Las ecuaciones

$$a^2-b^2=a'^2-b'^2,$$
$$ab=a'b' \operatorname{sen}(\alpha'-\alpha),$$
$$-\frac{b^2}{a^2}=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha'$$

contienen las seis cantidades a, b, a', b', α y α'; y por tanto por medio de estas ecuaciones pueden hallarse tres de dichas seis cantidades, dadas las otras tres.

178 Problemas. 1.° *Dada una hipérbola, hallar su centro.*

Tírense dos cuerdas paralelas, interiores á la hipérbola, y por sus puntos medios una recta, que será un diámetro secante, el punto medio de la parte de esta recta comprendida entre las dos ramas será el centro.

2.° *Fig.* 137. *Dado un diámetro, hallar su conjugado.*

Tírese una cuerda EC paralela al diámetro AB, por uno de sus estremos E otro diámetro ED, la suplementaria DC, y en seguida el diámetro OF paralelo á la cuerda CD, que será el conjugado del AB; puesto que los diámetros AB y FO son paralelos á dos cuerdas suplementarias EC y CD.

Esta construccion nos da la direccion OF del diámetro conjugado de AB; pero no nos da, como en la elipse, al mismo tiempo su magnitud, por que la recta OF no encuentra á la hipérbola.

Para hallar la magnitud limitada de dicho diámetro, señalemos las coordenadas $OP=x'$, $CP=y'$ de un punto cualquiera C de la hipérbola, y tendremos la ecuacion

$$a'^2y'^2-b'^2x'^2=-a'^2b'^2,$$

en la que no hay mas incógnita que b'; resolviendo pues dicha ecuacion, tendremos $b'=\dfrac{a'y'}{\sqrt{x'^2-a'^2}}$, espresion fácil de construir.

3.° Fig 138. *Dada una hipérbola, construir sus ejes.*

Este problema se resuelve y demuestra como su análogo en la elipse.

La magnitud del eje segundo se hallará, como en el problema anterior, por la fórmula

$$b=\frac{ay'}{\sqrt{x'^2-a^2}}.$$

4.° *Tirar en la hipérbola dos diámetros conjugados que formen un ángulo dado.*

Constrúyanse los dos sistemas de cuerdas suplementarias que formen este ángulo, y tirando por el centro paralelas á dichas cuerdas, tendremos otros dos sistemas de diámetros conjugados que formarán el ángulo dado.

Nota. Estos dos sistemas de diámetros conjugados se reducen á uno solo, cuando deben formar ángulo recto, ó lo que es igual, cuando han de ser ejes de la hipérbola, como ha sucedido en el problema tercero.

179. Las propiedades de la hipérbola, independientes de la direccion de los ejes, se conservan aun cuando la hipérbola esté referida á sus diámetros conjugados.

Asi: 1.° Si un punto (x, y) está en la curva, se tendrá

$$a'^2y^2-b'^2x^2+a'^2b'^2=0;$$

si está fuera, $\quad a'^2y^2-b'^2x^2+a'^2b'^2>0,$

y si está dentro, $\quad a'^2y^2-b'^2x^2+a^2b^2<0.$

Recíproco. Verificándose alguna de estas condiciones, el punto estará respectivamente en la curva, fuera ó dentro.

180. La ecuacion de la tangente á la hipérbola referida á sus diámetros conjugados se hallará, del mismo modo que en el número 160, que es

$$a'^2yy'-b'^2xx'=-a'^2b'^2,$$

siendo su coeficiente angular $\frac{b'^2x'}{a'^2y'}$.

La abscisa del pié de la tangente será $x=\frac{a'^2}{x'}$; y cuando se da a' y el ángulo de los ejes de coordenadas, la construccion de la tangente á la curva, por un punto dado en ella, es la misma enteramente que la que se ha seguido en [162 *Prob.* 1.°].

181. Para el problema, tirar una tangente paralela á una recta dada, se hallarian [como en [162, *Prob.* 5.°] los mismos valores de x' é y', coordenadas incógnitas del punto de contacto.

182. Para el problema, tirar una tangente á la hipérbola desde un (α,β), se hallarian tambien como en [162, *Prob.* 2.°] los mismos valores de x' é y'.

Artículo 7.°

Teoría de las asíntotas de la hipérbola.

183. Siendo $y=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{x'^2-a'^2}$ la ecuacion de la hipérbola con respecto á un sistema de diámetros conjugados Ox y Oy, las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola con respecto á los mismos ejes de coordenadas serán [75]

$$y=\pm\frac{b'}{a'}x.$$

184. *Fig.* 139. De estas ecuaciones se infiere que *las asíntotas de la hipérbola coinciden con las diagonales* MP *y* NQ *del paralelógramo* MNPQ *construido sobre dos diámetros conjugados cualesquiera* AC *y* BD.

En efecto, el coeficiente angular de la diagonal PM, que pasa por los dos puntos O y M es [55] $\frac{b'}{a'}$; luego la ecuacion de dicha diagonal será

$$y=\frac{b'}{a'}x,$$

idéntica á la ecuacion de la asíntota GK; la diagonal PM coincide pues con esta asíntota.

El coeficiente angular de la diagonal NQ, que pasa por O y N, es $\frac{b'}{-a'}$, y la ecuacion de esta diagonal

$$y=-\frac{b'}{a'}x,$$

es decir que coincide con la asíntota HL.

185. *Fig.* 140. *El punto* A *de contacto de una tangente* MQ, *terminada en las asíntotas, divide á esta recta en dos partes iguales entre sí, é iguales al semidiámetro conjugado del* OA *que pasa por el punto de contacto.*

Tiremos el diámetro OAx y su conjugado Oy, que será paralelo á la tangente MQ, y tomemos estas dos rectas por ejes de coordenadas. Las ecuaciones de las asíntotas OM y OQ son respectivamente

$$y=\frac{b'}{a'}x,\ y=-\frac{b'}{a'}x.$$

Los puntos $M\ (a', MA)$, $Q(a', -QA)$ se hallan sobre dichas asíntotas, y por tanto sus coordenadas satisfarán á las ecuaciones de estas rectas: tendremos, pues,

$$MA=\frac{b'}{a'}\ a'=b',\ -QA=-\frac{b'}{a'}\ a',$$

ó

$$QA=b'.$$

Queda pues demostrado que $MA=QA=b'$.

180. *Los segmentos de toda secante á la hipérbola, comprendidos entre la curva y las asíntotas, son iguales.*

Fig. 141. Supongamos en primer lugar que la secante MQ sea una cuerda interior prolongada. Por el punto medio R de la cuerda NP tiro el diámetro ORx, y en seguida su conjugado Oy, que será paralelo á la cuerda NP. Siendo

$$y=\frac{b'}{a'}x,\ y=-\frac{b'}{a'}x$$

las ecuaciones de las dos asíntotas OM y OQ, y hallándose sobre ellas los puntos M y Q, tendremos

$$MR=\frac{b'}{a'}\cdot OR,\ -QR=-\frac{b'}{a'}\cdot OR,$$

ó $$QR=\frac{b'}{a'}OR;$$

luego $$MR=QR:$$

restando de estas rectas iguales las iguales NR y PR, tendremos $MN=PQ$.

Fig 142. Supongamos ahora que la secante sea una cuerda esterior PN: digo que tambien $MN=PQ$

Tiro un diámetro OR que pase por el punto medio R de la cuerda PN, su conjugado Ox será paralelo á dicha cuerda PN.

Las ecuaciones de las asíntotas OM y OQ son

$$y=\frac{b'}{a'}x,\ y=-\frac{b'}{a'}x:$$

las coordenadas del punto M, que son MR y OR, deben verificar la ecuacion de la asíntota OM, y las coordenadas del punto $Q(-QR,\ OR)$ deben verificar la ecuacion de la OQ; es decir que tendremos

$$OR=\frac{b'}{a'}\cdot MR,\ OR=-\frac{b'}{a'}\times -QR=\frac{b'}{a'}\cdot QR;$$

luego $MR=QR$: restando estas dos rectas iguales de las iguales NR y PR, tendremos $NR-MR=PR-QR$, ó bien,

$$MN=PQ.$$

187. Este teorema nos da un método muy fácil para *construir una hipérbola, conociendo sus asíntotas y uno de sus puntos*.

Fig. 143. Sean OM y OQ las asíntotas, y P un punto cualquiera de la curva: tiro por este punto P una secante cualquiera QM, tomo $MN=PQ$, y N será otro punto de la curva. Del mismo modo pueden hallarse tantos puntos como se quieran.

Para evitar la confusion que resultaria, si se tirasen muchas secantes por el mismo punto P, conviene valerse de algunos de los puntos hallados, para determinar otros.

188. *Hallar la ecuacion de la hipérbola referida á sus asíntotas.*

Fig 144. La cuestion se reduce á pasar de la ecuacion

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2 \ldots [A]$$

de la hipérbola con respecto á su centro y á sus ejes á la ecuacion con respecto á las asíntotas Ox', Oy'.

Las fórmulas para esta transformacion de coordenadas, que es pasar de ejes rectangulares á ejes oblicuángulos, son

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha', \\ y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha' \end{array}\right\}[P].$$

Estas fórmulas se halláron en la suposicion de que las partes Ox', Oy' de los nuevos ejes de coordenadas estaban en la parte superior del eje Ox; pero ya sabemos que pueden aplicarse al caso actual en que Ox' es inferior á Ox, considerando que el ángulo α es negativo, es decir $\alpha=-x'Ox$. Como ademas los dos ángulos $x'Ox$ é $y'Ox$ son iguales, tendremos $\alpha=-\alpha'$: por consiguiente $\cos\alpha=\cos\alpha'$, $\operatorname{sen}\alpha=-\operatorname{sen}\alpha'$.

Luego las fórmulas (P) serán

$$\left.\begin{array}{l} x=(x'+y')\cos\alpha', \\ y=(y'-x')\operatorname{sen}\alpha', \end{array}\right\}[Q].$$

Tenemos ahora $\operatorname{tg}\alpha'=\dfrac{b}{a}$, y por consiguiente

$$\cos\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{c}:$$

multiplicando estas ecuaciones, resulta

$$\operatorname{sen}\alpha'=\frac{b}{c};$$

luego las fórmulas $[Q]$ serán

$$x=\frac{(x'+y')a}{c},\quad y=\frac{(y'-x')b}{c}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [A], tendremos

$$\frac{a^2b^2}{c^2}(y'-x')^2-\frac{a^2b^2}{c^2}(x'+y')^2=-a^2b^2,$$

que se reduce á

$$x'y'=\left(\frac{c}{2}\right)^2;$$

ó haciendo, como se acostumbra, la semi-escentricidad $\frac{c}{2}=m$, la ecuacion de la hipérbola referida á sus asíntotas será

$$x'y'=m^2.$$

Corolario. *El área del paralelógramo construido sobre las coordenadas asintóticas de un punto cualquiera de la hipérbola es constante é igual á la mitad* $\frac{1}{2}$ ab *del rectángulo de los semiejes.*

Fig. 145. En efecto, siendo x é y las coordenadas del punto M, y θ el ángulo yOx, el área del paralelógramo de $MNOP$ es

$$xy \operatorname{sen}\theta=m^2\operatorname{sen}\theta=\frac{c^2}{4}\operatorname{sen}\theta=\frac{c^2}{2}\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Mas, siendo $\frac{1}{2}\theta$ el ángulo que forma la asíntota con el eje primero de la hipérbola, es $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta=\frac{b}{a}$, y por consiguiente

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta=\frac{a}{c},\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta=\frac{b}{c};$$

luego el área del paralelógramo será

$$\frac{c^2}{2}\cdot\frac{ab}{c^2}=\frac{1}{2}ab,$$

que es el ennnciado del teorema.

189. *Tangentes á la hipérbola referida á sus asíntotas.*

Siendo la ecuacion de la hipérbola referida á sus asíntotas

$$xy-m^2=0,$$

tendremos $f'_{x'}=y'$, $f'_{y'}=x'$; luego el coeficiente angular de la tangente será $-\frac{y'}{x'}$, y la ecuacion de la tangente

$$y-y'=-\frac{y'}{x'}(x-x'),$$

que simplificada es

$$yx'+y'x=2m^2.$$

190. Fig. 146. *Dado un punto* M (x', y') *en la hipérbola, tirarla por este punto una tangente.*

Hagamos $y=0$ en la ecuacion de la tangente, y tendremos

$$x=OQ=\frac{2m^2}{y'}=\frac{2x'y'}{y'}=2x':$$

tirando pues la ordenada MP, tomando $PQ=OP$, y tirando la recta QM, esta será la tangente.

Obsérvese que $PQ=OP$, esto es que la *subtangente* PQ *es igual á la abscisa del punto de contacto*; lo que podia inferirse del teorema [185], pues siendo $MQ=MN$, es claro que $OP=PQ$

191. *Conociendo la magnitud y posicion de dos diámetros conjugados de la hipérbola, construir esta curva.*

Construido el paralelógramo sobre los dos diámetros conjugados, y tirando las diagonales indefinidas de este paralelógramo, se tendrán las asíntotas de la hipérbola: como, además, en el estremo del diámetro secante tenemos un punto de la hipérbola, queda el problema reducido al [188].

Nota. Si se da la ecuacion $My^2-Nx^2=-P$ de la hipérbola referida á un sistema de diámetros conjugados, y se piden las magnitudes limitadas de estos diámetros (con cuyos datos, segun el problema anterior, se puede construir fácilmente la hipérbola), escribiremos dicha ecuacion de este modo:

$$\frac{My^2}{P}-\frac{Nx^2}{P}=-1,$$

y en seguida de este otro:

$$\frac{y^2}{\frac{P}{M}}-\frac{x^2}{\frac{P}{N}}=-1,$$

la cual comparada con la ecuacion

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{x^2}{a'^2}=-1,$$

nos da para a' y b' los valores

$$a'=\sqrt{\frac{P}{N}},\ b'=\sqrt{\frac{P}{M}}$$

Ejemplo. Sea la ecuacion $3y^2-5x^2=-8$.

Escribiremos esta ecuacion, para no tener necesidad de recordar las fórmulas anteriores, de estos dos modos:

$$\frac{3y^2}{8}-\frac{5x^2}{8}=-1,\ \frac{y^2}{\frac{8}{3}}-\frac{x^2}{\frac{8}{5}}=-1$$ Por consiguiente

$$a'=\sqrt{\frac{8}{5}},\ b'=\sqrt{\frac{8}{5}}$$

Sea ahora la ecuacion $3y^2-5x^2=8$, que sabemos representa una hipérbola en que el eje de las y es el diámetro secante prolongado. Para hallar la magnitud de este diámetro, haremos en la ecuacion $x=0$, en cuyo caso $y=a'$; y asi

$$3a'^2=8,\ a'=\sqrt{\frac{8}{3}},$$

semidiámetro primero. Haciendo $y=0$, y por consiguiente $x=b'\sqrt{-1}$, será $-5\times-b'^2=8$, $b'=\sqrt{\frac{8}{5}}$, semidiámetro segundo

CAPITULO VIII.

Teoría de la parábola

Artículo 1.°

Ecuacion de la parábola referida á su eje y vértice.

192. En el número 103 vimos que la ecuacion de la parábola referida á su eje y vértice es

$$My^2+Sx=0,$$

de donde $$y^2 = -\frac{S}{M}x;$$

y si llamamos, como se acostumbra, $2p$ al coeficiente $-\frac{S}{M}$ de x, la ecuacion de la parábola será

$$y^2 = 2px,$$

que es la ecuacion *ordinaria* de esta curva.

De esta ecuacion dedujimos en el número 42 la forma de la parábola.

El coeficiente $2p$ de x en esta ecuacion se llama el *parámetro* de la parábola; y siempre se puede suponer que es una cantidad positiva, pues si la ecuacion tuviese la forma $y^2 = -2px$, haciendo $x = -x'$, dicha ecuacion se convertiria en $y^2 = 2px'$, en la que el parámetro es positivo. La ecuacion $y^2 = 2px'$ ó la propuesta $y^2 = -2px$ representa una parábola cuyos dos ramos se hallan comprendidos en la region de las abscisas negativas.

193. *Dada la posicion del eje de la parábola, el vértice y un punto de la curva, hallar el parámetro.*

Fig. 147. Sean Ox el eje y O el vértice de la parábola, M un punto de esta curva, cuyas coordenadas son OP y MP: tendremos $$MP^2 = 2p \cdot OP,$$

de donde $$2p = \frac{MP^2}{OP};$$

es decir, que *el parámetro de la parábola es una tercera proporcional á la abscisa y ordenada de un punto cualquiera de esta curva.*

Para construir esta tercera proporcional, tiro la MO y la perpendicular MQ á la MO en el punto M, y PQ será el parámetro.

En efecto, es evidente que $MP^2 = OP \times PQ$, de donde

$$PQ = \frac{MP^2}{OP}.$$

194. Cuando la parábola está construida y prolongado suficientemente uno de sus dos ramos, puede hallarse el parámetro por el teorema siguiente.

Fig. 148. *La bisectriz* ON *del ángulo* yOx *corta á la parábola en un punto* N *cuya abscisa y ordenada son iguales al parámetro.*

En efecto, las coordenadas del punto N, OP y NP, que

son evidentemente iguales, verifican la ecuacion de la parábola, esto es $NP^2=2p\cdot OP$,
de donde $2p=NP=OP$.

195. Si un punto M, cuyas coordenadas son x é y, está en la parábola, se verifica que

$$y^2-2px=0.$$

Si el punto N, cuyas coordenadas son x é y, se halla fuera de la parábola, será

$$y^2-2px>0;$$

y si se halla dentro, será

$$y^2-2px<0.$$

Fig 149. En efecto, tirando por el punto N la QN paralela á la Ox, la ordenada del punto M, en que esta paralela corta á la curva, será la misma que la del punto N; luego, si llamamos x' á la abscisa del punto M será mayor que la abscisa x del punto esterior N: mas, por hallarse el punto M en la curva, es $y^2-2px'=0$; luego $y^2-2px>0$.

Del mismo modo se demuestra que si el punto N está dentro de la parábola, es

$$y^2-2px<0.$$

Recíprocos. *Si se verifica que* $y^2-2px \overset{=}{\underset{>}{<}} 0$, *el punto estará en la parábola, fuera ó dentro*; lo que se demuestra fácilmente por reduccion al absurdo.

Artículo 2.º

Construccion de la parábola, dado su parámetro.

196. La ecuacion de la parábola nos da los dos métodos siguientes para *construir esta curva por puntos, conociendo su parámetro*.

1.º *Fig*. 150. Sea Ox el eje de la parábola, y O su vértice. Tomo un punto cualquiera P en el eje, y á continuacion una parte PQ igual al parámetro; sobre OQ, como diámetro, describo un círculo; levanto por el punto P una perpendicular indefinida al eje, y los dos puntos M, M', en que esta perpendicular corta á la circunferencia, serán dos puntos de la parábola. Del mismo modo se construyen tantos puntos de la parábola como se quieran.

Para demostrar que el punto M, es un punto de la parábola, llamemos x é y á las coordenadas de estepunto, y tendremos por un teorema muy conocido de geometría

$$MP^2 = OP \times PQ, \text{ ó } y^2 = 2px, \text{ ó } y^2 - 2px = 0;$$

luego [195, *Recíp.* 1.°] el punto M corresponde á la parábola.

2.° *Fig* 151. Sea Ox el eje, y O el vértice de la parábola: tomemos hácia la izquierda, sobre el eje, una parte OQ igual al parámetro, señalemos un punto cualquiera P en el eje á la derecha del vértice, y levantemos por dicho punto una perpendicular MM' al eje; sobre QP como diámetro describamos una circunferencia; desde los puntos R y R', en que esta circunferencia corta al eje Oy, tiremos dos paralelas al eje de la parábola; y los puntos M, M', en que estas paralelas corten á la perpendicular MM', serán dos puntos de la parábola. Del mismo modo se construyen tantos puntos de esta curva como se quieran.

Para demostrar que el punto M es un punto de la parábola, sean x é y las coordenadas de este punto:

tenemos $$RO^2 = OQ \times OP,$$

ó $$MP^2 = OQ \times OP,$$

ó $$y^2 - 2px = 0;$$

luego el punto M es un punto de la parábola.

Artículo 3.°

Foco y directriz de la parábola.

197. Ya sabemos que se llama *foco* de la parábola todo punto cuya distancia á cualquiera otro punto de la curva es una funcion racional y entera de la abscisa de este punto; siendo la ecuacion de la parábola $y^2 = 2px$.

Para determinar los focos de la parábola, en virtud de esta definicion, llamemos δ á la distancia del foco á un punto cualquiera (x, y) de la curva, x' é y' á las coordenadas incógnitas del foco: tendremos

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2,$$

ó $$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2;$$

sustituyendo los valores de y^2 y de y en funcion de x, tendremos

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + 2px \pm 2y'\sqrt{2px} + y'^2.$$

Como δ debe ser funcion racional y entera de x, δ^2 debe serlo con mayor razon; pero esto no puede conseguirse, mientras en el valor de δ^2 subsista el término irracional $2y'\sqrt{2px}$: es menester, pues, que este término desaparezca; lo que exije que $y'=0$, puesto que x, abscisa de un punto cualquiera de la parábola, no puede ser cero. Siendo $y'=0$, se infiere que todo foco de la parábola estará sobre el eje de las x, que actualmente es el eje mismo de la parábola.

Segun esto, el valor de δ^2 será

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + 2px,$$

ó

$$\delta^2 = x^2 + 2x(p - x') + x'^2 \ldots \quad [M].$$

Para que δ sea una funcion entera de x, es necesario y suficiente que este trinomio sea un cuadrado perfecto, lo que se verificará siendo $p - x' = x'$,

de donde $x' = \frac{1}{2}p.$

Luego la parábola tiene un solo foco, situado sobre su eje, y cuya distancia al vértice es igual á la cuarta parte del parámetro.

Fig. 152. Tomando pues $OF = \frac{1}{2}p$, el punto F será el foco de la parábola.

Hallemos ahora el valor de δ.

Para esto, pongamos en la ecuacion [M] en vez de x' su valor $\frac{1}{2}p$, y resultará

$$\delta = x + \frac{1}{2}p;$$

es decir, que *el radio vector de un punto cualquiera de la parábola es igual á la abscisa de dicho punto, mas la cuarta parte del parámetro.*

198. *Directriz.* Segun la definicion general [113] de esta recta, la ecuacion de la directriz de la parábola será

$$x + \frac{1}{2}p = 0,$$

de donde $$x=-\frac{1}{2}p;$$

luego *la directriz de la parábola es una perpendicular al eje en el punto cuya abscisa es menos la cuarta parte del parámetro.*

Fig. 152. Tomando pues $OD=\frac{1}{2}p$, y levantando la DR perpendicular al eje de la parábola, esta perpendicular será la directriz de la parábola.

Hallemos ahora la razon de las dos distancias de un punto cualquiera M *de la parábola al foco y á la directriz.*

Tenemos

$$MF=x+\frac{1}{2}p,\ MR=DP=OP+OD=x+\frac{1}{2}p;$$

luego $$MF=MR;$$

luego *todo punto de la parábola equidista del foco y de la directriz.*

Fig. 153. Corolario. *Si un punto* N *está fuera de la parábola, su distancia al foco es mayor que á la directriz; y si el punto* N *está dentro de la parábola, su distancia al foco es menor que á la directriz.*

En efecto: 1.° Tirando la NF, tendremos $FN+NM>FM$, ó, puesto que $FM=MR$, será

$$FN+NM>MR;$$

y por consiguiente $FN>NR$.

2.° Tirando la NF, será $NF<FM+MN$, ó $NF<RM+MN$, ó $NF<RN$.

Recíprocos. 1.° *Si la distancia de un punto al foco es igual á su distancia á la directriz, el punto estará en la parábola;* 2.° *si la distancia del punto al foco es mayor que á la directriz, el punto estará fuera de la parábola;* 3.° *si su distancia al foco es menor que á la directriz, el punto estará dentro de la parábola* [Geometría, 21].

Por consiguiente ninguna curva diferente de la parábola tiene la propiedad de que cada uno de sus puntos equidiste de un punto dado y de una recta dada. Se puede pues definir la parábola diciendo que *es una curva en la que cada uno de sus puntos equidista de un punto fijo y de una recta fija:* y efectivamente de esta definicion dedujimos [42] la ecuacion de la parábola.

199. En virtud de esta propiedad de la parábola, puede

construirse esta curva, dado su parámetro, por puntos; y tambien por un movimiento contínuo.

Fig. 152. Para construirla por puntos, sean Ox el eje y O el vértice de la parábola: tomo sobre el eje á derecha é izquierda del vértice las partes OF y OD iguales á la cuarta parte del parámetro, y levanto la perpendicular DR al eje: tendré así el foco F y la directriz DR. En un punto cualquiera P del eje levanto una perpendicular indefinida, y haciendo centro en el foco, describo con un radio igual á DP un arco que cortará á dicha perpendicular en dos puntos M y M', que serán dos puntos de la parábola: del mismo modo pueden hallarse tantos puntos como se quieran de esta curva.

Es fácil ver que estos puntos corresponden á la parábola; pues tirando la recta MF y la MR perpendicular á la directriz, tendremos, segun la construccion, $FM=DP=MR$; es decir, que el punto M equidista del foco y directriz; luego dicho punto corresponde á la parábola.

Fig. 154. Para construir esta curva por un movimiento contínuo, se hace coincidir con el ángulo recto que forman la directriz y el eje, el ángulo recto de una escuadra ADx. Se toma un hilo, cuya longitud sea igual al lado Dx de la escuadra, y se fijan los estremos de este hilo en el foco y en el estremo x del lado Dx: el hilo quedará flojo entre el foco y el estremo de este lado; pero por medio de una punta ó estilo se le pondrá tirante, y se colocará la punta en O; y entonces el hilo será $FO+Ox$, y O será el vértice de la parábola. Muévase ahora la escuadra de modo que su lado AD coincida siempre con la directriz, y entonces el lado Dx de la escuadra irá empujando á la punta, la cual, si se conserva siempre el hilo tirante, trazará una curva, que es un ramo de parábola.

En efecto, cuando la escuadra haya llegado á la posicion $A'D'x'$, la punta estará en M, y el hilo tendrá la posicion $MF+Mx'$; pero hemos tomado el hilo igual á $D'x'$; luego $FM+Mx'=D'x'$, de donde $FM=MD'$; es decir que el punto M equidista del foco y directriz; luego dicho punto corresponde á la parábola.

200. *La cuerda perpendicular al eje, que pasa por el foco de la parábola, es igual al parámetro.*

Fig. 152. En efecto, las coordenadas $OF=\frac{1}{2}p$ y NF del punto N deben verificar la ecuacion de la parábola, es decir que tendremos

$$NF^2=2p\times\frac{1}{2}p=p^2;$$

luego $$NF=p, \text{ y } NN'=2p.$$

Artículo 4.º

Tangentes á la parábola.

201. *Hallemos la ecuacion de la tangente á la parábola en un punto cuyas coordenadas sean* x' *é* y'.

La ecuacion de la parábola referida á su eje y vértice es

$$y^2-2px=0:$$

por consiguiente $f'_{x'}=-2p$, $f'_{y'}=2y'$; luego el coeficiente angular de la tangente á la parábola, ó bien, por ser los ejes de coordenadas rectangulares, la tangente del ángulo que forma la tangente con el eje de las x, será

$$-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}=\frac{2p}{2y'}=\frac{p}{y'}.$$

Por consiguiente la ecuacion de la tangente, recta que pasa por el punto (x',y') de contacto, será

$$y-y'=\frac{p}{y'}(x-x'),$$

que ahora vamos á simplificar.

Quitando el denominador y efectuando la multiplicacion indicada, será

$$yy'-y'^2=px-px',$$

ó $$yy'=y'^2+px-px':$$

poniendo en lugar de y'^2 su igual $2px'$, será

$$yy'=p(x+x').$$

202. Discusion del coeficiente angular $\operatorname{tg} T=\frac{p}{y'}$ de la tangente á la parábola.

Fig. 155. Si $y'=0$, es $\operatorname{tg} T=\infty$; luego en el vértice de la parábola la tangente es perpendicular al eje.

Si y' crece positivamente, $\operatorname{tg} T$ disminuye, y por tanto el ángulo agudo T va disminuyendo positivamente, hasta que, siendo $y'=\infty$, es $\operatorname{tg} T=0$, y por consiguiente $T=0$: luego la tangente al ramo superior de la parábola forma con el eje de las x todos los ángulos comprendidos entre 90° y 0.

Si y' crece negativamente, tg T disminuye negativamente, y por tanto el ángulo obtuso T va creciendo, hasta que siendo $y'=-\infty$, es tg $T=0$, y entonces $T=180°$: luego las tangentes al ramo inferior de la parábola forman con el eje todos los ángulos comprendidos entre 90° y 180°.

103. *Dado el eje de la parábola, su vértice y un punto de esta curva, tirarla una tangente por dicho punto, estando ó no construida la curva.*

Fig. 156. Haciendo $y=0$ en la ecuacion de la tangente, en cuyo caso x es la abscisa $-OQ$ del pie Q de la tangente; tendremos

$$x=-OQ=-x',$$

ó bien

$$OQ=x';$$

es decir que la abscisa del pie de la tangente á la parábola es igual y de signo contrario á la abscisa del punto de contacto; ó en otros términos, *la subtangente PQ es doble de la abscisa del punto de contacto.*

Por consiguiente dado el punto M, se bajará la perpendicular MP, se tomará $OQ=OP$, y el punto Q será el pié de la tangente, y QM será la tangente.

204. *Dados el eje, el vértice y el parámetro de la parábola, tirarla una tangente desde un punto dado (α,β), estando ó no construida esta curva.*

Las coordenadas x' é y' del punto de contacto son las incógnitas de la cuestion.

La ecuacion de la tangente á la parábola es

$$yy'=p(x+x').$$

Por hallarse el punto dado (α,β) en la tangente, tendremos

$$\beta y'=p(\alpha+x') \ldots\ [1]$$

Ademas, por corresponder á la parábola el punto (x',y'), tenemos

$$y'^2=2px' \ldots\ [2].$$

De estas dos ecuaciones resultan

$$x'=\frac{\beta^2-p\alpha\pm\beta\sqrt{\beta^2-2p\alpha}}{p},$$

$$y'=\beta\pm\sqrt{\beta^2-2p\alpha},$$

fórmulas que resuelven el problema, y que prueban que si el punto dado (α, β) está fuera de la parábola (en cuyo caso es $\beta^2-2p\alpha>0$, y los dos valores de x' son reales, como tambien los dos de y'), se pueden tirar á la parábola dos tangentes. Si el punto (α, β) está en la curva, x' é y' no tienen mas que un solo valor; y por tanto por un punto de la parábola no se puede tirar mas que una tangente á esta curva. Finalmente, si el punto (α, β) está dentro de la parábola, en cuyo caso $\beta^2-2p\alpha<0$, los valores de x' é y' son imaginarios, y el problema es imposible.

La construccion geométrica de los valores de x' é y' seria bastante complicada; pero puede hallarse con mayor sencillez la recta que pasa por los dos puntos de contacto, cuando la parábola está construida y suficientemente prolongada.

En efecto, la ecuacion

$$\beta y=p(\alpha+x) \ldots\ldots [A]$$

es la de la cuerda que pasa por los dos puntos de contacto, puesto que las coordenadas x' é y' de dichos puntos dan la igualdad cierta

$$\beta y'=p(\alpha+x'),$$

es decir que dichas coordenadas verifican la ecuacion [A], ó bien que la recta, que esta ecuacion representa, pasa por los puntos de contacto. Construida, pues esta recta, sus puntos de interseccion con la parábola serán los puntos de contacto.

Para construir dicha recta, haremos sucesivamente en la ecuacion [A] $y=0$, $x=0$; y los valores correspondientes de x é y serán

$$y=0,\, x=-\alpha;\, x=0,\, y=\frac{p\alpha}{\beta}.$$

Fig. 156* Sea, pues, I el punto dado, y sus coordenadas $-AO=\alpha$, $IA=\beta$: tomando $OP=OA=-\alpha$, será P el punto en que la recta, que pasa por los dos puntos de contacto, corta al eje Ox. Para hallar el punto en que corta al eje Oy, observo que, como actualmente α es negativa, y $-\alpha$ es positiva, el valor de y será negativo; su valor absoluto es una cuarta proporcional á β, p y AO: tomo pues $OB=\beta$, $OK=p$, tiro la BK, y por el punto A la AL paralela á BK, y será OL el valor absoluto de y; pues tenemos

$$OB : OA :: OK : OL,$$

ó bien, $\qquad \delta : -\alpha :: p : -y,$

de donde $\qquad y = \frac{p\alpha}{\delta}.$

Luego el punto L es aquel en que la recta, que pasa por los dos puntos de contacto, corta al eje Oy: tirando la LP, los puntos M y M' de interseccion con la parábola serán los puntos de contacto, y por tanto IM é IM' serán las dos tangentes.

205. *Dados el eje, el vértice y el parámetro de la parábola, tirar á esta curva una tangente paralela á una recta dada, estando ó no construida la curva.*

Sea t la tangente del ángulo que la recta dada forma con el eje de las x: como la tangente pedida ha de ser paralela á esta recta, la tangente del ángulo que dicha tangente forme con el eje Ox será la cantidad conocida t: tendremos, pues,

$$\frac{p}{y'} = t;$$

y además $\qquad y'^2 = 2px'.$

Estas dos ecuaciones nos dan los valores siguientes de las incógnitas x' é y':

$$x' = \frac{p}{2t^2}, \; y' = \frac{p}{t}.$$

Como cada incógnita no tiene mas que un solo valor, se infiere que el problema no tiene mas que una solucion; la cual será siempre posible, á no ser en el caso en que la recta dada sea paralela al eje de la parábola, pues entonces $t = 0$, y por consiguiente $\qquad x' = \infty, \; y' = \infty.$

205* *Ecuacion de la normal á la parábola.*

Siendo la normal una perpendicular á la tangente en el punto de contacto, su ecuacion será

$$y - y' = -\frac{1}{\frac{p}{y'}}(x - x'),$$

ó

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$$

Fig. 157. La abscisa ON del pie N de la normal se hallará, haciendo en esta ecuacion $y = 0$, y despejando x: tendremos pues $\qquad x = ON = x' + p;$

y por consiguiente la subnormal $x-x'=PN=p$: luego la *subnormal de la parábola es constante para todos sus puntos, é igual á la mitad del parámetro.*

El valor de la subnormal puede tambien hallarse fácilmente por el triángulo rectángulo MPN, ó por la ecuacion $MP^2=QP\times PN$.

206. Otra solucion geométrica de los problemas 203, 204 y 205 sobre las tangentes á la parábola.

Teorema. *La tangente á la parábola forma ángulos iguales con el eje y con el radio vector tirado al punto de contacto.*

1.ª *Demostracion. Fig.* 157. Tenemos $FM=x'+\frac{1}{2}p$, siendo x' la abscisa del punto M [197], y $QF=QO+OF$ $=x'+\frac{1}{2}p$; luego $FM=QF$, y por consiguiente son iguales los ángulos MQF y FMQ.

2.ª *Demostracion.* El ángulo $FMQ=MFx-MQx$; luego

$$\operatorname{tg} FMQ=\frac{\operatorname{tg} MFx-\operatorname{tg} MQx}{1+\operatorname{tg} MFx \cdot \operatorname{tg} MQx}.$$

Mas [55] $\operatorname{tg} MFx=\frac{y'}{x'-\frac{1}{2}p}$, y $\operatorname{tg} MQx=\frac{p}{y'}$; luego

$$\operatorname{tg} FMQ=\frac{\frac{y'}{x'-\frac{1}{2}p}-\frac{p}{y'}}{1+\frac{py'}{y'(x'-\frac{1}{2}p)}},$$

ó $$\operatorname{tg} FMQ=\frac{y'^2-px'+\frac{1}{2}p^2}{y'x'-\frac{1}{2}py'+py'}=\frac{p(x'+\frac{1}{2}p)}{y'(x'+\frac{1}{2}p)}=\frac{p}{y'}.$$

Luego los dos ángulos MQF y FMQ, que tienen la misma tangente, son iguales.

Corolario. Siendo GH paralela al eje Ox, los ángulos MQF RMH y QMG son iguales; luego tambien lo son los QMF y RMH, QMF y GMQ: luego *la tangente forma ángulos iguales con el radio vector tirado al punto de contacto y con el diámetro que pasa por este punto*; ó bien, *la tangente divide en dos partes iguales al ángulo formado por el radio vector tirado al punto de* *contacto y la prolongacion del diámetro que pasa por el mismo punto.*

Recíproco. *La bisectriz del ángulo formado por el radio vector tirado á un punto de la parábola y por la prolongacion del diámetro que pasa por dicho punto, es tangente á la parábola* Reduccion al absurdo.

Es fácil demostrar geométricamente este recíproco.

Fig. 158. Sea *MQ* la bisectriz del ángulo *RMF*; tomemos en ella un punto cualquiera *T* diferente del punto *M*, y tiremos la *TF*, la perpendicular *TS* á la directriz *DR*, y la *TR*: siendo iguales los dos ángulos *RMQ* y *FMQ*, sus suplementos *RMT* y *FMT* son tambien iguales; luego los dos triángulos *RMT* y *FMT* son iguales, y por tanto $TR=TF$; mas $TR>TS$; luego $TF>TS$, es decir [198, *Recip.* 1.°] que el punto *T* está fuera de la parábola; luego la recta *QT*, que tiene todos sus puntos fuera de la curva, escepto el punto *M*, es tangente á esta curva.

207. De este recíproco resultan las soluciones geométricas de los tres problemas siguientes:

1.° *Dados el vértice, el eje y un punto de la parábola, tirarla una tangente por dicho punto, estando construida ó no la curva.*

Fig. 159. Determínese el parámetro [195], y enseguida el foco *F*: tírese al punto dado *M* el radio vector *FM*, por el punto *M* una paralela *GH* al eje, divídase el ángulo *GMF* en dos partes iguales, y la bisectriz *MQ* será la tangente pedida.

La construccion siguiente es algo mas sencilla.

Tómese $FQ=FM$, y tírese la *QM*, que será la tangente á la parábola en el punto *M*; puesto que, por ser $FQ=FM$, son iguales los ángulos *QMF* y *FQM*, y por consecuencia tambien son iguales los *QMF* y *QMG*.

2.° *Dados el vértice, el eje y el parámetro de la parábola, tirar á esta curva una tangente paralela á una recta dada; estando construida ó no la parábola.*

Fig. 160. Supongamos que la parábola no esté construida: sean *O* el vértice y *Ox* el eje de la parábola, *HK* la recta á la cual ha de ser paralela la tangente: señalemos el foco *F* y la directriz *DR*. Desde el foco *F* tiro una perpendicular *FH* á la recta dada, y la prolongo, hasta que encuentre en *P* á la directriz, por el punto *P* tiro una paralela *PM* al eje, por el punto medio *Q* de la *FP* levanto una perpendicular

QM á la FP, y esta perpendicular será la tangente pedida.

En efecto, los triángulos rectángulos PMQ y FMQ son iguales; luego $MP=MF$, es decir que el punto M corresponde á la parábola. Tambien de la igualdad de dichos dos triángulos resulta que son iguales los dos ángulos QMP y QMF, yque por tanto la QM, que divide al ángulo PMF en dos partes iguales es tangente á la curva en el punto M.

Si la parábola está construida, y no solamente dada por sus elementos, como nosotros lo hemos supuesto en el caso que acabamos de considerar, el punto M de contacto será el punto en que la paralela PG al eje corta á la curva, y la paralela MQ á la HK será la tangente pedida: la construccion es pues en este caso algo mas sencilla que en el anterior, y la demostracion de que la MQ es la tangente, es tambien algo mas fácil.

3.° *Dados el eje, el vértice y el parámetro de la parábola, tirar una tangente á esta curva desde un punto esterior, estando construida ó no la curva.*

Fig. 161.* Supongamos que la parábola no esté construida. Sean O y Ox el vértice y eje de la parábola: señalemos el foco y la directriz. Haciendo centro en el punto dado I, descríbase con el radio IF una circunferencia, que cortará á la directriz en dos puntos R y R'; tírense las rectas RF y $R'F$, y desde el punto I las perpendiculares IM é IM' á las RF y $R'F$, y estas perpendiculares serán las tangentes á la parábola en los puntos M y M'.

Para demostrarlo, probaremos en primer lugar que la circunferencia descrita desde el punto I con el radio IF corta á la directriz; y en efecto, la distancia IF es mayor que la distancia del punto I á la directriz [198, *Corol.*]; luego dicha circunferencia corta á la directriz.

Tenemos ahora, tirando las rectas IR é IF, que los dos triángulos rectángulos IQR, IQF son iguales, y por consiguiente los dos ángulos RIQ, FIQ son iguales; luego los triángulos IRM,IFM son iguales, y por tanto $MF=MR$, es decir que el punto M corresponde á la parábola: tambien el ángulo IMR es igual al ángulo IMF; luego la recta IM bisectriz del ángulo RMF es tangente á la parábola en el punto M. Del mismo modo se demuestra que la IM' es tangente á la parábola en el punto M'.

Si la parábola estuviese construida, los puntos de contacto serian los puntos M y M', en que las dos paralelas al eje tiradas por los puntos R y R' cortarian á la curva: la construccion es pues en este caso mas sencilla, y la demostracion, de que las rectas IM é IM' son tangentes, es tambien algo mas fácil.

Artículo 5.°

Diámetros de la parábola.

208. *Hallar la ecuacion de los diámetros de la parábola.* *Fig.* 161. Sea MN una cualquiera de las cuerdas bisecadas por el diámetro QPP', y la ecuacion de dicha cuerdas

$$y=mx+\alpha,$$

siendo m la tangente de los ángulos iguales que forman las cuerdas bisecadas por el diámetro PP' con el eje de las x: m es por lo tanto una cantidad constante para todas las cuerdas paralelas MN, $M'N'$....., y α, que es la ordenada en el orígen de todas estas cuerdas, varía de una cuerda á otra.

Igualando las coordenadas entre la ecuacion $y=mx+\alpha$ de la cuerda MN, y la $y^2=2px$ de la curva, y eliminando la y, tendremos

$$m^2x^2+2m\alpha x+\alpha^2=2px,$$

ó

$$x^2+\frac{2m\alpha-2p}{m^2}x+\frac{\alpha^2}{m^2}=0.$$

Los valores que tiene x en esta ecuacion, son las abscisas de los puntos M y N; luego si llamamos x' y x'' á estas abscisas, será

$$x'+x''=\frac{2p-2m\alpha}{m^2}.$$

Sean x_1 é y_1 las coordenadas del punto medio P de la cuerda MN: tendremos [83]

$$x_1=\frac{x'+x''}{2}, \text{ ó } x_1=\frac{p-m\alpha}{m^2};$$

y por consiguiente

$$y_1=mx_1+\alpha.$$

Si entre estas dos ecuaciones eliminamos el parámetro variable α, resultará la ecuacion

$$y_1 = \frac{p}{m} \ldots\ldots [N],$$

valor de la ordenada de un punto cualquiera del diámetro.

Suprimiendo el índice, inútil ya, la ecuacion de todo diámetro de la parábola es $y = \frac{p}{m}$.

A esta misma ecuacion llegaríamos por la fórmula general de la ecuacion de un diámetro, que es $f'_y \times m + f'_x = 0$. En efecto, siendo la ecuacion de la parábola $y^2 - 2px = 0$, será $f'_y = 2y$, $f'_x = -2p$, y por tanto la ecuacion de todo diámetro de la parábola es

$$y \cdot m - p = 0, \text{ ó } y = \frac{p}{m}.$$

209. Segun esta ecuacion, *todos los diámetros de la parábola son paralelos al eje de esta curva.*

Recíproco. Fig. 161. *Toda recta* QR *paralela al eje de la parábola es diámetro de esta curva.*

En efecto, la ecuacion de toda recta paralela al eje de la parábola es $y = b$: como la ecuacion de todo diámetro de la parábola es $y = \frac{p}{m}$; igualando $\frac{p}{m}$ á b, en cuyo caso tendrá m el valor $\frac{p}{b}$, resultará que la ecuacion del diámetro que biseca las cuerdas que forman con el eje de las x un ángulo cuya tangente es $\frac{p}{b}$, será $y = b$. Vemos pues que este diámetro coincide con la recta QR paralela al eje; luego esta paralela es un diámetro.

Corolario. *La tangente á la parábola tirada por el estremo de un diámetro es paralela á las cuerdas bisecadas por este diámetro.*

En efecto, siendo x' é y' las cordenadas del estremo Q del diámetro, como la ecuacion de este es $y=\frac{p}{m}$, será $y'=\frac{p}{m}$, de donde $m=\frac{p}{y'}$, que es la tangente del ángulo que la tangente á la parábola en el punto (x', y') forma con el eje Ox; luego esta tangente y las cuerdas bisecadas por el diámetro forman ángulos iguales con el eje Ox; y por tanto son paralelas.

210. *Estando la parábola suficientemente prolongada, tirarla una tangente paralela á una recta dada.*

Fig. 162. Tírense dos cuerdas MP, NQ paralelas á la recta dada HK; por los puntos medios R y S de estas dos cuerdas tírese la recta ARS que será un diámetro; por el estremo A tírese una paralela á dichas cuerdas, y será la tangente (1).

211. *Hallar la ecuacion de la parábola tomando por eje de abscisas un diámetro, y por eje de ordenadas la tangente á la parábola en el estremo de dicho diámetro.*

Fig. 163. La ecuacion de la parábola, con respecto á su eje Ox y á la tangente Oy, es $y^2=2px$. Las fórmulas para pasar de los ejes rectangulares Oy, Ox á los oblicuángulos

---

(1) Vimos [88, *Nota*] que de la definicion del diámetro puede deducirse, que la tangente en el punto en que el diámetro corta á la curva, es paralela á las cuerdas bisecadas por él. De aquí puede sacarse el coeficiente angular de la tangente, y por consiguiente la ecuacion de la misma, sin necesidad de ninguna nueva teoría. En efecto, segun hallamos [85], la ecuacion de los diámetros de las líneas de segundo órden es

$$f'_y\times m+f'_x=0.$$

Las coordenadas x' é y' del estremo del diámetro, ó del punto de contacto, deben verificar esta ecuacion; luego

$$f'_{y'}\times m+f'_{x'}=0,$$

de donde

$$m=-\frac{f_{x'}}{f'_{y'}};$$

es decir que el coeficiente angular de las cuerdas bisecadas, ó de la tangente en el estremo del diámetro, es $-\frac{f'_{x'}}{f'_{y'}}$.

$O'y'$, $O'x'$, se deducen de las fórmulas generales [45, *Tercer caso*], haciendo $\theta=90^\circ$, y son:

$$x=a+x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',$$
$$y=b+x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\alpha'.$$

Actualmente, como el eje $O'x'$ es diámetro, y por tanto es paralelo á Ox, será $\alpha=0$; luego $\operatorname{sen}\alpha=0$, $\cos\alpha=1$.

Ademas el ángulo α' es el ángulo T que forma la tangente con el eje Ox; luego $\operatorname{tg}\alpha'=\frac{p}{b}$, puesto que a y b son las coordenadas antiguas del punto O'; luego

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha'}}=\sqrt{1+\frac{p^2}{b^2}}=\frac{b}{\sqrt{p^2+b^2}}:$$

por consiguiente

$$\operatorname{sen}\alpha'=\operatorname{tg}\alpha'\times\cos\alpha'=\frac{p}{b}\cdot\frac{b}{\sqrt{p^2+b^2}}=\frac{p}{\sqrt{p^2+b^2}}.$$

Luego las fórmulas de transformacion serán las siguientes:

$$x=a+x'+\frac{by'}{\sqrt{p^2+b^2}},\quad y=b+\frac{py'}{\sqrt{p^2+b^2}}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $y^2=2px$, tendremos

$$b^2+\frac{2pby'}{\sqrt{p^2+b^2}}+\frac{p^2y'^2}{p^2+b^2}=2pa+2px'+\frac{2pby'}{\sqrt{p^2+b^2}};$$

y como, por estar el punto O' en la curva, es $b^2=2pa$, será

$$\frac{p^2y'^2}{p^2+b^2}=2px',$$

de donde
$$y'^2=\frac{2(p^2+b^2)}{p}x',$$

ó poniendo en vez de b^2 su valor $2pa$, será

$$y'^2=2(p+2a)x',$$

ó
$$y'^2=4\left(a+\frac{p}{2}\right)x'.$$

Representemos la cantidad $4\,(a+\frac{p}{2})$ por $2p'$, y la ecuacion de la parábola con respecto á los ejes $O'x', O'y'$ será

$$y'^2=2p'x'.$$

El coeficiente $2p'$ se llama el *parámetro del diámetro*; y pues su valor es $4\,(a+\frac{p}{2})$, y que $a+\frac{p}{2}$ es el valor del radio vector del punto O', se infiere que el *parámetro del diámetro es cuádruplo de la distancia del estremo del diámetro al foco*; cuya propiedad tambien es cierta para el parámetro del eje ú ordinario.

X 212. Puede demostrarse, sin la transformacion de las coordenadas que la ecuacion de la parábola con referencia á un diámetro y á la tangente en su estremo es $y^2=2p'x$, y en seguida que el parámetro $2p'$ es cuádruplo de la distancia del estremo del diámetro al foco.

Fig. 164. En efecto, siendo $O'x$ un diámetro, á cada valor de x corresponden dos valores iguales y de signo contrario de y: luego la ecuacion contendrá un término My^2 sin ningun otro término en y. Haciendo $x=0$ en la ecuacion, debe resultar $y=0$, por ser el orígen un punto de la curva; luego la ecuacion no puede contener término independiente de las variables. Por lo tanto la ecuacion tendrá la forma

$$My^2+Nx^2+Sx=0;$$

pero como B^2-4AC es ahora $-4MN$, será $-4MN=0$, y por consiguiente, no pudiendo ser $M=0$, será $N=0$; luego la ecuacion de la parábola es

$$My^2+Sx=0, \text{ ó } y^2=-\frac{S}{M}x,$$

y haciendo $-\frac{S}{M}=2p'$, será

$$y^2=2p'x,$$

en donde se puede suponer siempre que el parámetro $2p'$ es positivo, por la razon dada [192] para el parámetro del eje.

Para demostrar ahora que el parámetro del diámetro $O'x$ es cuádruplo del radio vector FO', tiro por el vértice O de la parábola la OM paralela á la tangente $O'y$; será por lo tanto $OQ=MQ$; y como $OQ=TO'$, será $MQ=TO'$. Por consiguiente, siendo $y^2=2px$ la ecuacion de la parábola con respecto á los ejes $O'x$, $O'y$, será

$$MQ^2=2p'\times O'Q,$$

ó bien

$$O'T^2=2p'\times OT,$$

de donde

$$2p'=\frac{O'T^2}{OT}=\frac{b^2+4a^2}{a}=2p+4a=4\left(a+\frac{p}{2}\right).$$

213. *Dado un diámetro, la tangente en su estremo y un punto de la parábola, determinar el parámetro del diámetro.*

Fig. 165. Sea Ox el diámetro, O su estremo, y Oy la tangente á la parábola en el punto O: sea M el punto dado. Señalo las coordenadas $OP=x$ y $MP=y$ de este punto, por el punto P levanto una perpendicular á la Ox, y tomo sobre ella la parte $PM'=PM$, junto ahora los puntos O y M' por medio de la recta OM', y por el punto M' levanto la $M'Q$ perpendicular á la OM'; y será PQ el parámetro del diámetro.

En efecto, $M'P^2=OP\times PQ$, ó $MP^2=OP\times PQ$, ó $y^2=x\times PQ$; luego PQ es el parámetro del diámetro.

214. *Dado un diámetro de la parábola y la tangente en su estremo, y suponiendo además que esta curva esté construida y suficientemente prolongada, determinar el parámetro de este diámetro.*

Fig. 166. Divídase en dos partes iguales el ángulo yOx formado por el diámetro y la tangente, señálense las coordenadas del punto M, en que la bisectriz corta á la curva, y cualquiera de ellas será el parámetro del diámetro Ox.

En efecto, es evidente que $OP=MP$, y que siendo la ecuacion de la parábola $y^2=2p'x$, tendremos $MP^2=2p'.OP$, de donde $2p'=MP=OP$.

215. *Dada una parábola, hallar su eje y vértice.*

Tírense dos cuerdas paralelas, y por sus puntos medios una recta, que será un diámetro. Tírese una cuerda perpendicular á este diámetro, y por el punto medio de esta perpendicular tírese una perpendicular á dicha cuerda, y tendremos el eje de la parábola; el punto en que corte á la parábola será el vértice.

216. *Dado un diámetro, la tangente en su estremo y el parámetro del diametro, construir la parábola.*

Primera construccion.

Fig 167. Sea Ox el diámetro, O el punto en que corta á la parábola y Oy la tangente á la parábola en este punto O. Construyo varios puntos M, N.... de una parábola, cuyo vértice sea O, su eje Ox, y su parámetro ordinario el parámetro dado del diámetro: por los pies P, P'..... de las perpendiculares PM, $P'N$..... á la recta Ox tiro paralelas á la Oy; tomo ahora $PM'=PM''=PM$, $P'N'=P'N''=P'N$..., y los puntos M' y M'', N' y N''..... corresponderán á la parábola que se quiere construir.

En efecto, si $2p'$ es el parámetro dado del diámetro, y son x é y las coordenadas OP y $M'P$ del punto M', tendremos

$$MP^2=2p'x,$$

luego tambien

$$y^2=2p'x, \text{ ó } y^2-2p'x=0,$$

es decir [217], que el punto M' corresponde á la parábola, de la que Ox es un diámetro, Oy la tangente en su estremo y $2p'$ el parámetro del diámetro.

Segunda construccion.

Fig. 168. Sea $O'x$ el diámetro y $O'y$ la tangente á la parábola en el punto O': tiro por este punto O' una recta indefinida $O'FK$ que forme el ángulo $FO'T=xO'y$, y esta recta $O'FK$ pasará por el foco [206, *Corol.*]: tómese $O'F$ igual á la cuarta parte del parámetro del diámetro, y se tendrá el foco; tírese FD paralela á $O'x$, y se tendrá el eje; tómese $O'R=O'F$, y será R un punto de la directriz; desde el punto R bájese una perpendicular al eje, y esta perpendicular será la directriz; divídase la distancia DF en dos partes iguales, y el punto medio O será el vértice. Conociendo la posicion del vértice y del foco, ya sabemos construir la parábola [196].

217. Siendo la ecuacion de la parábola referida á su diámetro $y^2=2p'x$ de la misma forma que la ecuacion $y^2=2px$ de la parábola referida á su eje, se demostrará del mismo modo que en el número 195, que si un punto (x, y) está en la parábola, será

$$y^2-2p'x=0;$$

si está fuera de la parábola,

$$y^2-2p'x>0,$$

y si está dentro de la parábola,

$$y^2-2p'x<0;$$

y recíprocamente.

218. *Fig.* 169. La ecuacion de la tangente en un punto (x',y') de la parábola referida á su diámetro será

$$yy'=p'(x+x');$$

de donde resulta que OT, abscisa del pié de la tangente mudado el signo, es igual á la abscisa OP del punto de contacto; ó lo que es igual, que *la subtangente* TP *es doble de la abscisa del punto* M *de contacto.*

219. *Dados un diámetro de la parábola, la tangente en su estremo y el parámetro del diámetro, tirarla una tangente desde un punto* (α, 6), *estando ó no construida la curva.*

Se hallarán las mismas fórmulas que en el problema [204], tomando por ejes de coordenadas el diámetro y la tangente en su estremo.

220. *Dados un diámetro de la parábola, la tangente en su estremo y el parámetro del diámetro, tirarla una tangente paralela á una recta dada, estando ó no construida la curva*

Idéntica resolucion á la del problema [205], tomando por ejes de coordenadas el diámetro y la tangente en su estremo, y siendo t el coeficiente angular de la recta dada

Artículo 6.°

Propiedades de la parábola considerada como límite de la elipse ó de la hipérbola.

221. *La parábola es una elipse cuyo eje mayor es infinito.*

Fig. 170. En efecto, la ecuacion de la elipse referida á su vértice izquierdo y parámetro es [114]

$$y'^2=2px'-\frac{p}{a}x'^2$$

Si suponemos que en esta ecuacion p ó $\frac{b^2}{a}$ permanece constante, y a y b aumentan indefinidamente (1), el segundo miembro de la ecuacion de la elipse se va acercando y se puede acercar á $2px'$ cuanto se quiera; y finalmente, cuando $a=\infty$, resulta $y'^2=2px'$, ecuacion de la parábola.

Del mismo modo se puede demostrar que *la parábola es una hipérbola cuyo eje primero es infinito.*

221. En virtud de cualquiera de estas dos proposiciones,

(1) La cantidad $\frac{b^2}{a}$ ó p será constante, aumentando indefinidamente a y b, si dando á a valores arbitrarios, los correspondientes de b son $\sqrt{ap}$; ó en otros términos, como la ecuacion $b^2=pa$ representa una parábola, siendo p constante, la cantidad $\frac{b^2}{a}$ quedará constante, si los valores de a son las abscisas y los de b las ordenadas de dicha parábola.

introduciendo en las propiedades de la elipse ó de la hipérbola la condicion $a=\infty$, se pueden obtener todas las propiedades de la parábola.

Lo manifestaremos, deduciendo por esta consideracion algunas de las propiedades de la parábola; para lo cual, conviene que demostremos antes los dos lemas siguientes.

222. 1.° *En la elipse é hipérbola* lím. $\frac{a}{c}=1$.

2.° *En la elipse* lím. $(a-c)=\frac{p}{2}$, *y en la hipérbola* lím. $(c-a)=\frac{p}{2}$.

1.° Como en la elipse $c=\sqrt{a^2-b^2}$, y en la hipérbola $c=\sqrt{a^2+b^2}$, será $\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2\mp b^2}}$; mas $\frac{b^2}{a}=p$, y por consiguiente $b^2=ap$;

luego
$$\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2\mp ap}}=\frac{1}{\sqrt{1\mp\frac{p}{a}}}.$$

Ahora, en el caso del límite, es decir, cuando $a=\infty$, resulta
$$lím.\ \frac{a}{c}=1.$$

Corolario. $Lím.\ \frac{c}{a}=1$; pues siendo $\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}$, será
$$lím.\ \frac{c}{a}=lím.\ \frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{1}=1.$$

2.° Tenemos en la elipse
$$a-c=a-\sqrt{a^2-b^2}.$$
Sustituyendo en esta espresion el valor ap de b^2, será
$$a-c=a-\sqrt{a^2-ap}=$$
$$\frac{\left(a-\sqrt{a^2-ap}\right)\left(a+\sqrt{a^2-ap}\right)}{a+\sqrt{a^2-ap}}=\frac{ap}{a+\sqrt{a^2-ap}}=\frac{p}{1+\sqrt{1-\frac{p}{a}}}.$$

Pasando al límite, será

$$lím.\ (a-c) = \frac{p}{2}.$$

Del mismo modo se demuestra que en la hipérbola

$$lím.\ (c-a) = \frac{p}{2}.$$

Ejemplos. 1.° *Hallar la posicion del foco de la parábola.*

Consideremos á la parábola como una elipse cuyo eje mayor es infinito.

En la elipse la distancia del foco izquierdo al vértice inmediato es $a-c$; luego en la parábola dicha distancia será

$lím.\ (a-c)$, que ya hemos demostrado es $\frac{p}{2}$.

El mismo resultado se hallaria para la abscisa del foco de la parábola, considerando á esta curva como límite de la hipérbola.

2.° *Hallar la posicion de la directriz de la parábola.*

La abscisa del pie de la directriz izquierda de la elipse es $x=-\frac{a^2}{c}$: actualmente, como el orígen está en A [*Fig.* 170], será, llamando x' á la nueva abscisa [43, 1.er *Caso*], $x=x'-a$; y por tanto $x'-a=-\frac{a^2}{c}$, de donde

$$x'=\frac{ac-a^2}{c}=\frac{a}{c}(c-a)=-\frac{a}{c}(a-c):$$

tal es la abscisa del pié de la directriz izquierda de la elipse, estando el orígen de las coordenadas en el vértice izquierdo.

En el caso del límite será

$$x'=-1\times\frac{p}{2}=-\frac{p}{2}.$$

El mismo resultado se obtendria considerando á la parábola como límite de la hipérbola.

3.° *Razon de las distancias de cada punto de la parábola al foco y directriz.*

Sabemos que en la elipse ó hipérbola esta razon es $\frac{c}{a}$; luego en la parábola será $lim\ \frac{c}{a}$, que hemos demostrado es 1; luego las dos distancias de un punto cualquiera de la parábola al foco y directriz son iguales.

4.° *Coeficiente angular de la parábola.*

En la elipse es $-\frac{b^2x}{a^2y}$, siendo x é y las coordenadas del punto de contacto con respecto á los ejes de la elipse considerados como ejes de coordenadas. Como ahora los ejes de coordenadas son Ax' y Ay', será $x=x'-a$, $y=y'$; luego el coeficiente angular de la tangente á la elipse, referida á los ejes Ax' y Ay', será

$$-\frac{b^2(x'-a)}{a^2\,y'}=-\frac{apx'-a^2p}{a^2y'}=-\frac{px'}{ay'}+\frac{p}{y'};$$

en el caso del límite, esta espresion se convierte en $\frac{p}{y'}$, que será el coeficiente angular de la parábola.

5.° Ya hemos visto que en la hipérbola la tangente biseca al ángulo de los dos radios vectores tirados al punto de contacto: como la parábola puede considerarse como una hipérbola en que el foco izquierdo está en el ∞ negativo, se infiere que el radio vector correspondiente al foco izquierdo es paralelo al eje, ó es diámetro de la parábola: luego la tangente á la parábola biseca al ángulo formado por el radio vector y la prolongacion del diámetro que pasa por el punto de contacto.

El mismo resultado se obtendria, considerando á la parábola como una elipse cuyo foco derecho está en el infinito positivo.

CAPITULO IX.

Coordenadas polares.

Artículo 1.º

Ecuaciones polares.

225. Entre los varios sistemas de coordenadas que pueden adoptarse para la determinacion de los puntos de un plano (1), el mas ventajoso en la geometría analítica, despues del rectilíneo, es el sistema siguiente, llamado *sistema polar*.

224. *Determinar la posicion de un punto con respecto á una recta dada y á un punto dado en ella.*

Para resolver este problema, antepondremos las nociones preliminares siguientes:

Fig. 171. Sea OE la recta dada y O el punto dado en ella, con respecto á los cuales se quiere determinar la posicion de un punto cualquiera M: tiremos la recta indefinida MOM'.

La recta dada OE se llama *eje polar*, y el punto O dado en ella se llama *polo*. Todo arco, positivo ó negativo de una circunferencia cuyo centro sea O y cuyo radio sea arbitrario, que principie en el punto m del eje polar y termine en el punto n ó n' de la recta OM ó de su prolongacion OM', se llama *amplitud* del punto M. La distancia MO del punto M al polo se llama *radio vector* de este punto M.

Para la generalizacion de las ecuaciones, segun el teorema de Descartes [19], consideraremos como positivo al radio vector, si la amplitud termina en él; y como negativo, si la amplitud termina en su prolongacion OM'

Asi, la amplitud del punto M será todo arco que principie en m y termine en n, y el radio vector del mismo punto M será MO; ó bien la amplitud del punto M será todo arco que principie en m y termine en la prolongacion OM' de MO,

(1) En nuestro tratado de trigonometría hemos señalado cinco sistemas; el primero está comprendido en el de las coordenadas rectilíneas, y el segundo es el sistema de las coordenadas polares

y en este caso el radio vector del punto M será $-MO$. La amplitud del punto M' será todo arco que principie en m y termine en n', y entonces el radio vector del punto M' será $M'O$; ó bien, si la amplitud del punto M' es un arco que principia en m y termina en n, el radio vector del punto M' será $-M'O$.

Esto supuesto, la posicion de un punto del plano quedará determinada, con respecto á una recta y á un punto dado en ella, conociendo su amplitud y su radio vector.

En efecto, la amplitud nos señala la direccion del radio vector, el signo de este nos da su sentido, y el valor absoluto del radio vector nos determina el punto.

Nota. En adelante la amplitud la representaremos por α y el radio vector por ρ.

225. Si tenemos una ecuacion entre las dos variables α y ρ, se hallará la línea representada por ella, ó sea su lugar geométrico, dando á la amplitud α valores arbitrarios, hallando los valores correspondientes del radio vector ρ, construyendo los puntos cuyas coordenadas polares sean las diferentes soluciones de la ecuacion, y juntando en seguida dichos puntos por medio de una línea contínua.

Al contrario, conociendo una definicion de una línea ó alguna de sus propiedades características ó esclusivas, se puede hallar la ecuacion que indique la relacion que existe entre las coordenadas polares de un punto cualquiera de la línea; dicha ecuacion se llama la ecuacion polar de la línea.

Diremos, pues, que la *ecuacion polar* de una línea es la ecuacion que indica la relacion constante que hay entre las coordenadas polares de un punto cualquiera de dicha línea.

226. Presentaremos algunos ejemplos para hallar las ecuaciones polares de varias líneas.

ECUACION POLAR DE LA LINEA RECTA.

Fig. 172. Sea AB la recta determinada por la distancia $AO=a$ comprendida entre el punto A de interseccion con el eje OE y el polo O, y por el ángulo MAE ó A: sea M uno de sus puntos cuyas coordenadas polares sean ρ y α. El triángulo OAM nos da la proporcion

$$OM : OA :: \text{sen}\, MAO : \text{sen}\, OMA,$$

ó bien $$\rho : a :: \text{sen}\, A : \text{sen}(A-\alpha),$$

de donde $$\rho=\frac{a \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A-\alpha)} \ldots [M].$$

Hemos hallado esta ecuacion, suponiendo que la amplitud del punto M es el ángulo α, que es el menor valor positivo de la misma, y que el radio vector del punto M es positivo: esta ecuacion es sin embargo general, en virtud de los signos que acompañan, segun el teorema de Descartes, al radio vector y á la cantidad a, que será positiva si el punto de interseccion A está á la derecha del polo, y negativa en el caso contrario. Puede comprobarse la ecuacion $[M]$ en cualquier caso.

ECUACION POLAR DEL CÍRCULO.

227. *Fig.* 173. Sean $OC=d$, $COE=A$ las coordenadas polares del centro C del círculo, r el radio de este círculo, M un punto cualquiera de la circunferencia, α y ρ sus coordenadas polares. Tirando el radio MC, tendremos, por el teorema general de la trigonometría rectilínea,

$$MC^2=MO^2+OC^2-2MO\times OC\times\cos MOC;$$

ó bien, $$r^2=\rho^2+d^2-2\rho d\cos(\alpha-A);$$

ó, si se quiere,

$$\rho^2-2d\cos(\alpha-A).\rho+d^2-r^2=0 \ldots [P];$$

ecuacion que aunque se ha hallado para el caso mas fácil, es general.

NOTA. *Fig.* 174. Como el producto de los dos valores de ρ, que son OM y OM', es igual al tercer término de la ecuacion $[P]$, tendremos

$$OM\times OM'=d^2-r^2.$$

Para otro radio vector ON tendríamos igualmente

$$ON\times ON'=d^2-r^2;$$

luego $$OM\times OM'=ON\times ON' \text{ [Geom. Teor. 70].}$$

Fig. 175. Si el polo O estuviese dentro del círculo, la ecuacion polar del círculo seria la misma; y tendríamos

$$OM\times-OM'=d^2-r^2,$$
$$ON\times-ON'=d^2-r^2;$$

y por consiguiente

$$OM\times OM'=ON\times ON' \text{ [Geom. Teor. 71].}$$

228. *Fig.* 176. Si el eje polar fuese un diámetro prolongado, seria $A=0$; y por consiguiente la ecuacion polar seria

$$\rho^2-2d\cos\alpha\ \rho+d^2-r^2=0,$$

fácil de hallar directamente.

229 *Fig.* 177. Si el polo estuviese en el estremo O de un diámetro, eje polar, seria en la ecuacion anterior $d=r$, y por consiguiente la ecuacion polar del círculo es entonces

$$\rho=2r\cos\alpha,$$

muy fácil de hallar directamente por medio del triángulo rectángulo MOE.

Finalmente, si el polo está en el centro, haremos en la ecuacion $[P]$ $d=0$, lo que nos dará

$$\rho=\pm r,$$

como es evidente.

228*. ECUACION POLAR DE LA ELIPSE.

Fig 178. Coloquemos el polo en el centro, y tomemos por eje polar el eje mayor prolongado indefinidamente: sea M un punto cualquiera de la elipse. Segun definicion, ó segun propiedad esclusiva de la elipse, es

$$MF'+MF=2a;$$

tenemos pues que hallar MF' y MF en funcion de ρ y α coordenadas polares del punto M.

El triángulo MOF nos da

$$MF^2=\rho^2+c^2-2c\rho\cos\alpha,$$

y el MOF' nos da

$$MF'^2=\rho^2+c^2+2c\rho\cos\alpha.$$

Eliminando MF y MF' entre estas tres ecuaciones, resultará

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}:$$

229. *Fig.* 179. Coloquemos, sin variar el eje polar, el polo en el foco derecho

La definicion de la elipse nos da

$$MF+MF'=2a,$$

ó

$$\rho+MF'=2a.$$

Mas

$$MF'^2=\rho^2+4c^2+4c\rho\cos\alpha;$$

luego eliminando MF' entre estas dos ecuaciones, resultará

$$\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}.$$

229.* ECUACION POLAR DE LA HIPÉRBOLA.

Fig. 180. Coloquemos el polo en el centro, y tomemos el eje primero prolongado por eje polar: tenemos, segun la definicion de la hipérbola

$$MF'-MF=\pm 2a;$$

siendo el signo $+$, si el punto M corresponde á la rama derecha; y el signo $-$, si dicho punto corresponde á la rama izquierda.

Tenemos ahora

$$MF^2=\rho^2+c^2-2c\rho\cos\alpha,$$
$$MF'^2=\rho^2+c^2+2c\rho\cos\alpha.$$

Eliminando MF y MF' entre estas tres ecuaciones, resultará

$$\rho^2=-\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}.$$

230. *Fig* 180. Coloquemos ahora el polo en el foco derecho, siendo el eje polar el mismo que en el caso anterior.

La definicion de la hipérbola nos da

$$MF'-MF=2a$$

para todo punto de la rama derecha,

ó bien, $$MF'-\rho=2a.$$

Mas $$MF'^2=\rho^2+4c^2+4c\rho\cos\alpha;$$

luego, eliminando MF' entre estas dos ecuaciones, resultará

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha},$$

ecuacion en la que el radio vector ρ está considerado como cantidad siempre positiva.

Si queremos hallar la ecuacion polar de la rama izquierda en el mismo caso, tendremos

$$\rho-MF'=2a,$$

y como $$MF'^2=\rho^2+4c^2+4c\rho\cos\alpha,$$

será, eliminando MF' entre estas dos ecuaciones,

$$\rho=-\frac{b^2}{a+c\cos\alpha},$$

en la que tambien ρ es cantidad siempre positiva.

231. DISCUSION DE LAS DOS ECUACIONES POLARES DE LAS DOS RAMAS DE LA HIPERBOLA.

Primera ecuacion: $$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}.$$

Fig 181. Tiremos por el foco F dos paralelas FG y HK á las asíntotas de la hipérbola: si α es menor que KFx, será $\cos\alpha>\cos KFx$, ó $\cos\alpha>\frac{a}{c}$ [188]; luego $c\cos\alpha>a$; y por tanto ρ es negativo, y no nos da ningun punto de la curva, puesto que esta ecuacion está hallada suponiendo que es ρ siempre positivo.

Si $\alpha=KFx$, será $\cos\alpha=\frac{a}{c}$, $c\cos\alpha=a$; y por consiguiente $\rho=\infty$.

Si $\alpha>KFx$, pero menor que 90°, será $\cos\alpha<\frac{a}{c}$, $c\cos\alpha<a$; es decir que ρ será positivo, y nos dará un punto M de la curva por cada valor que demos á α: y como, creciendo α, $\cos\alpha$ disminuye, se infiere que aumentará el denominador $a-c\cos\alpha$, y disminuirá ρ.

Si $\alpha=90°$, será $\cos\alpha=0$, y $\rho=\frac{b^2}{a}=FN$, que es el semiparámetro [159].

Supongamos ahora que α vaya creciendo desde 90° hasta 180°: $\cos\alpha$ será negativo, y su valor absoluto irá creciendo, y por tanto ρ irá disminuyendo.

Si $\alpha=180°$, será $\cos\alpha=-1$, y $\rho=\frac{b^2}{a+c}=c-a=FA$, como debe ser.

Hasta ahora, por la discusion de la ecuacion, hemos visto la forma que tiene, al poco mas ó menos, el ramo superior AM de la hipérbola: el ramo inferior es simétrico del superior; pues si damos á α un valor $mnn'=360°-mn$; tendremos

$$FM'=\frac{b^2}{a-c\cos(360°-mn)}=\frac{b^2}{a-c\cos(mn)},$$

valor idéntico al del radio vector FM; luego si tiramos la recta MM', será $MP=M'P$, y serán rectos los dos ángulos en P; y por tanto son simétricos los dos puntos M y M'; luego, todo punto del ramo superior tiene su simétrico en el ramo inferior; luego los dos ramos son simétricos.

La discusion de la ecuacion polar

$$\rho=-\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$$

nos daria igualmente la rama izquierda de la hipérbola; no admitiendo mas que los valores positivos del radio vector ρ.

232. Hagamos ver ahora que, si en cualquiera de estas dos ecuaciones los valores negativos de los radios vectores se toman, segun el convenio que hicimos [224], en sentido contrario del que tendrian si fuesen positivos, cualquiera de dichas ecuaciones, por ejemplo la primera, puede representar las dos ramas de la hipérbola.

Demos á α en la primera fórmula un valor $RFx=\alpha'$, menor que KFx, en cuyo caso el valor de ρ, que es $\frac{b^2}{a-c\cos\alpha'}$, es negativo. Si en la segunda fórmula damos á α el valor $180°+\alpha'$, que es un valor conveniente para que ρ sea positivo, tendremos

$$FQ=-\frac{b^2}{a+c\cos(180°+\alpha')}=-\frac{b^2}{a-c\cos\alpha'}=\frac{b^2}{c\cos\alpha'-a},$$

valor positivo, igual y de signo contrario al correspondiente de ρ en la primera fórmula: luego si el valor negativo $\frac{b^2}{a-c\cos\alpha'}$, mudado el signo, esto es $\frac{b^2}{c\cos\alpha'-a}$, se toma en el sentido FQ, contrario al que tendria si fuese positivo, obtendremos el punto Q, el mismo que nos da la segunda fórmula.

Queda pues demostrado que, tomando los valores negativos de ρ en sentido contrario del que tendrian si fuesen positivos, la ecuacion primera da tambien la rama izquierda de la hipérbola.

233. ECUACION POLAR DE LA PARÁBOLA.

Fig. 182. Coloquemos el polo en el vértice de la parábola, y tomemos su eje por eje polar.

La definicion de la parábola nos da la igualdad

$$MF=MR \quad [1].$$

Tenemos ahora

$$MF^2=\rho^2+\frac{p^2}{4}-p\rho\cos\alpha,$$

$$MR=DP=\frac{p}{2}+\rho\cos\alpha:$$

sustituyendo estos valores en la igualdad [1], y simplificando, resulta

$$\rho=\frac{2p\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

234 Coloquemos ahora el polo en el foco, siendo como en el caso anterior el eje de la parábola eje polar.

Tenemos

$$MF=MR,$$

ó

$$\rho=p+\rho\cos\alpha,$$

de donde

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\alpha}.$$

Artículo 2.°

Transformacion de las coordenadas rectilíneas en polares, y al contrario.

235. En primer lugar, si se trata de pasar de la ecuacion rectilínea á la polar correspondiente, se hallará, por la transformacion de las coordenadas rectilíneas, la ecuacion ordinaria de la curva, siendo el orígen polo, el eje de las x eje polar y el eje de las y perpendicular al de las x.

Fig. 183. Esto supuesto, siendo x é y las coordenadas rectilíneas del punto M, ρ y α las coordenadas polares del mismo punto, tendremos

$$x=\rho\cos\alpha,$$

$$y=\rho\operatorname{sen}\alpha,$$

fórmulas que, aunque se han hallado en el caso mas fácil, son generales, como pueden comprobarse en cualquier otro caso, atendiendo á los signos de las coordenadas tanto ordinarias como polares.

Sustituyendo estos valores en la ecuacion ordinaria, se tendrá la ecuacion polar.

Si dada lo ecuacion polar, se quiere hallar la rectilínea correspondiente, de las fórmulas anteriores, ó de la figura deduciremos fácilmente.

$$\rho=\pm\sqrt{y^2+x^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\pm\sqrt{y^2+x^2}},$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{\pm\sqrt{y^2+x^2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

Sustituyendo éstos valores en la ecuacion polar que se nos dé, tendremos la ecuacion rectilínea, siendo el polo orígen, el eje polar eje de abscisas, y el eje de ordenadas perpendicular al de abscisas.

Ejemplos. 1.° *Dada la ecuacion ordinaria* $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ *de la elipse, hallar la ecuacion polar, siendo el centro el polo, y el eje mayor eje polar.*

Sustituiremos en esta ecuacion los valores de x é y en funcion de las coordenadas polares, y tendremos

$$a^2\rho^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\rho^2\cos^2\alpha=a^2b^2,$$

ó
$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},$$

ecuacion idéntica á la hallada directamente en [228*].

2.° *Fig. 184. Dada la ecuacion ordinaria de la línea recta, hallar su ecuacion polar.*

La ecuacion ordinaria de la recta AB es

$$y=mx+b;$$

luego, como $y=\rho \operatorname{sen} \alpha$, $x=\rho \cos \alpha$, $m=\operatorname{tg} A$, $b=-a \operatorname{tg} A$, siendo $OA=a$; será

$$\rho \operatorname{sen} \alpha=\operatorname{tg} A \,.\, \rho \cos \alpha-a \operatorname{tg} A,$$

$$\rho=\frac{a \operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A \cos \alpha-\operatorname{sen} \alpha}:$$

multiplicando los dos términos de este quebrado por $\cos A$, es

$$\rho=\frac{a \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A \cos \alpha-\cos A \operatorname{sen} \alpha}=\frac{a \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(A-\alpha)}.$$

3.° *Dada la ecuacion polar del círculo, hallar la ecuacion rectilínea correspondiente.*

La ecuacion polar del círculo, estando el polo en el centro, es

$$\rho=\pm r;$$

luego la ecuacion rectilínea correspondiente será

$$\pm\sqrt{y^2+x^2}=\pm r,$$

ó

$$y^2+x^2=r^2.$$

La ecuacion polar del círculo, siendo el polo un estremo de un diámetro, eje polar, es

$$\rho=2r \cos \alpha;$$

luego la rectilínea correspondiente será

$$\pm\sqrt{y^2+x^2}=2r \,.\, \frac{x}{\pm\sqrt{y^2+x^2}},$$

ó

$$y^2+x^2=2rx.$$

4.° *Dada la ecuacion polar* $\rho=\dfrac{2p \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$ *de la parábola, estando el polo en el vértice y siendo el eje de la parábola eje polar, hallar la ecuacion rectilínea correspondiente.*

La ecuacion rectilínea será

$$\pm\sqrt{y^2+x^2}=\frac{2px}{\pm\sqrt{y^2+x^2}} \times \frac{y^2+x^2}{y^2},$$

ó

$$y^2+x^2=\frac{2px(y^2+x^2)}{y^2},$$

ó

$$y^2=2px.$$

Cualquiera otro ejemplo se resolverá con la misma facilidad.

NOTA. Las ecuaciones polares de la elipse, hipérbola y parábola, que hemos hallado [229, 230 y 234] directamente, pueden hallarse con mas brevedad, valiéndose de las ecuaciones de los radios vectores, que son ecuaciones mixtas entre rectilíneas y polares.

En la elipse es [110]

$$\rho=a-\frac{cx}{a};$$

pero evidentemente $x=c+\rho\cos\alpha$;

luego $$\rho=a-\frac{c\rho\cos\alpha+c^2}{a},$$

de donde $$\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}.$$

En la hipérbola el radio vector de la rama derecha es [154]

$$\rho=\frac{cx}{a}-a;$$

y como $x=c+\rho\cos\alpha$,
sustituyendo, será

$$\rho=\frac{c^2+c\rho\cos\alpha}{a}-a,$$

ó $$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}.$$

Fig. 185. El radio vector de la rama izquierda es

$$\rho=-\frac{cx}{a}+a;$$

y como $x=-PO=OF-PF=c+\rho\cos\alpha$, será

$$\rho=\frac{-c^2-c\rho\cos\alpha}{a}+a,$$

ó $$\rho=-\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}.$$

En la parábola es [197]

$$\rho=x+\frac{p}{2},$$

y como $$x=\frac{p}{2}+\rho\cos\alpha,$$

será $$\rho=p+\rho\cos\alpha,$$

ó $$\rho=\frac{p}{1-\cos\alpha}.$$

CAPITULO X.

Secciones cónicas y cilíndricas.

ARTÍCULO 1.º

Secciones cónicas.

236. Se llama en general *superficie cónica* la superficie engendrada por una recta indefinida que, pasando siempre por un punto dado, recorre una curva cualquiera.

El punto dado, la curva dada y la recta movible se llaman respectivamente *centro* ó *vértice*, *directriz* y *generatriz* de la superficie cónica.

La superficie cónica se compone de dos superficies separadas por el centro, las cuales se llaman *hojas* de la superficie cónica.

Superficie cónica *circular* es la superficie cónica cuya directriz es una circunferencia.

Eje de la superficie cónica circular es la recta que pasa por el vértice de la superficie y por el centro de la directriz.

Se llama superficie cónica circular *recta* la superficie cónica circular cuyo eje es perpendicular al plano de la directriz; y *oblícua* en el caso contrario: á estas superficies llamaremos, por abreviar, *cono recto* y *cono oblícuo*.

237. *Fig.* 186. *Todas las generatrices del cono recto forman con el eje ángulos iguales*; pues si suponemos que la directriz sea la circunferencia ADB, los triángulos rectángulos ACO, BCO, DCO,.... son iguales, y por tanto lo son tambien los ángulos ACO, BCO, DCO....

238. Teorema. *Las secciones cónicas son curvas de segundo grado*

Fig. 187. Para demostrar este teorema, hallaremos la ecuacion general de las curvas que resultan cortando un cono recto por medio de un plano, que no pase por su vértice.

Sea MON la curva de interseccion de dicho plano con la superficie del cono: tiremos por el eje un plano perpendicular al plano secante [*Geom. Teor.* 137], y sean CA y CB las dos generatrices de la interseccion de este plano con el cono, y Ox la dec ste mismo plano con el plano secante.

La posicion del plano secante MON quedará determinada, conociendo la distancia $OC=d$ y el ángulo $COx=\alpha$.

Para hallar la ecuacion de la curva MON, tomaremos la recta Ox por eje de las x, y el punto O por orígen de las coordenadas rectangulares. Por un punto cualquiera M de la curva MON tiremos un plano DME perpendicular al eje, y por consiguiente perpendicular al plano ABC [*Geom. Teorema* 134]; la interseccion MP de los dos planos MON y DME perpendiculares al ACB será perpendicular á este plano, y por consiguiente á las dos rectas Ox y DE que pasan por su pié en dicho plano: luego las coordenadas del punto M son $OP=x$, $MP=y$. La curva DME de interseccion del plano perpendicular al eje con el cono es una circunferencia cuyo centro está en el eje [*Geom. Teor.* 161]; luego DE es un diámetro de esta circunferencia, y por tanto

$$MP^2=DP\times PE,$$

ó bien
$$y^2=DP\times PE \ldots\ldots [A].$$

La cuestion está, pues, reducida á hallar DP y PE en funcion de x.

El triángulo OPD nos da la proporcion

$$DP:OP::\text{sen}\,DOP:\text{sen}\,ODP,$$

ó bien
$$DP:x::\text{sen}\,\alpha:\cos 6,$$

de donde
$$DP=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos \beta}x$$

Para hallar ahora la PE, tiremos la OH perpendicular al eje, y la PFK paralela á la generatriz CB; y tendremos

$$PE=FH=OH-OF=2OG-OF=2d\,\text{sen}\,6-OF:$$

el triángulo OPF nos da la proporcion

$$OF:OP::\text{sen}\,OPF:\text{sen}\,OFP,$$

ó, puesto que el ángulo OPF es suplemento de la suma $POK+OKP=\alpha+2\beta$, y el ángulo $OFP=OHE=90°+\beta$, será

$$OF : x :: \text{sen}\,(\alpha+2\beta) : \cos\beta,$$

de donde
$$OF=\frac{x\,\text{sen}\,(\alpha+2\beta)}{\cos\beta};$$

luego
$$PE=2d\,\text{sen}\,\beta-\frac{x\,\text{sen}\,(\alpha+2\beta)}{\cos\beta}.$$

Sustituyendo los valores de DP y PE en la ecuacion [A], resulta

$$y^2=2d\,\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\,.\,x-\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2,$$

ecuacion general de las secciones cónicas.

Luego las secciones cónicas son líneas de segundo órden.

239. Comparando esta ecuacion con la

$$y^2=2px+qx^2,$$

que representa las tres curvas de segundo grado; la elipse cuando q es negativo, la parábola cuando $q=0$, y la hipérbola cuando q es positivo, resulta que la seccion cónica será una elipse, si $\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}$ es positivo, ó bien, como sen α y $\cos^2\beta$ son cantidades positivas, la seccion cónica será una elipse, si sen $(\alpha+2\beta)$ es positivo, ó lo que es igual, si $\alpha+2\beta<180°$, ó si Ox prolongada encuentra á la generatriz CB, ó en fin, si el plano secante corta á todas las generatrices del cono.

La seccion cónica será una parábola, si el coeficiente de x^2 es 0, ó bien, si sen $(\alpha+2\beta)=0$, ó si $\alpha+2\beta=180°$, ó si Ox es paralela á la generatriz CB, ó si el plano secante es paralelo á la generatriz opuesta CB. La ecuacion de dicha seccion cónica es entonces

$$y^2=2d\,\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\,.\,x,$$

ó puesto que α es suplemento de 2β, y por consiguiente sen α=sen 2β, la ecuacion de dicha parábola será

$$y^2=2d\,\text{sen}\,2\beta\,\text{tg}\,\beta\,.\,x,$$

ó
$$y^2=2d\,.\,2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta\,\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}\,.\,x,$$

ó en fin $$y^2=4d \operatorname{sen}^2 6\, x.$$

Por último, la seccion cónica será una hipérbola, si el coeficiente de x^2 es positivo, esto es, si $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha+26)}{\cos^2 6}$ es negativo, ó bien, si $\operatorname{sen}(\alpha+26)$ es negativo, ó si $\alpha+26>180°$ (1), ó si Ox prolongada en sentido contrario encuentra á la prolongacion de la generatriz CB, ó si el plano secante corta á una generatriz y á la prolongacion de su opuesta, ó en fin, si el plano secante corta á las dos hojas del cono.

240. Teorema recíproco. *Las líneas de segundo órden son secciones cónicas.*

Supongamos en primer lugar que la curva que se dé sea una elipse: su ecuacion referida al vértice izquierdo será [144]

$$y^2=2px-qx^2,$$

siendo $2p$ el parámetro y $q=\dfrac{b^2}{a^2}$.

Se trata de demostrar que puede cortarse un cono recto de manera que la seccion cónica sea igual á la elipse dada.

Sabemos que la ecuacion de la seccion cónica elipse es

$$y^2=2d \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg} 6\ x-\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha+26)}{\cos^2 6}x^2,$$

en la cual $\alpha+26<180°$: si pues esta ecuacion ha de ser idéntica á la propuesta, será menester que

$$d \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}. 6=p,$$

y $$\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha+26)}{\cos^2 6}=q \ \ldots\ [B]:$$

y si de estas ecuaciones resultan para α valores mayores que 0 y menores que 180°, y para d valores reales y finitos, quedará demostrado que se puede cortar el cono de modo que la seccion cónica sea igual á la elipse propuesta.

Como la segunda de estas dos ecuaciones no tiene mas incógnita que α, principiaremos por resolver esta ecuacion, y en seguida la primera ecuacion nos dará el valor de d.

---

(1) Como $\alpha<180°$ y $26<180°$, es evidente que $\alpha+26<360°$.

Tenemos evidentemente

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,$$
$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b.$$

Multiplicando estas igualdades ordenadamente, y recordando que $2\operatorname{sen} a\cos a=\operatorname{sen} 2a$, $2\operatorname{sen} b\cos b=\operatorname{sen} 2b$, será

$$\operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} 2b=\cos^2(a-b)-\cos^2(a+b);$$

fórmula que en lenguaje vulgar dice que el producto de los senos de dos arcos es igual al cuadrado del coseno de la semidiferencia menos el cuadrado del coseno de la semisuma; luego

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+2\beta)=\cos^2\beta-\cos^2(\alpha+\beta).$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuacion [B], tendremos

$$1-\frac{\cos^2(\alpha+\beta)}{\cos^2\beta}=q,$$

de donde $\cos^2(\alpha+\beta)=(1-q)\cos^2\beta$:

poniendo en lugar de q su valor $\frac{b^2}{a^2}$, y estrayendo la raiz cuadrada, será

$$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{c\cos\beta}{a}.$$

Vemos que $\alpha+\beta$ tiene dos valores, á los cuales llamaremos $\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$, cuyos cosenos se diferencian en el signo, y por tanto estos dos valores son suplementarios, esto es

$\alpha_2+\beta=180°-\alpha_1-\beta$, de donde $\alpha_2=180°-(\alpha_1+2\beta)$.

Sustituyendo en la primera de las dos ecuaciones [B] en lugar de α sus dos valores α_1 y $180°-(\alpha_1+2\beta)$, tendremos los dos valores correspondientes de d, á saber:

$$d=\frac{b^2}{a\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{tg}\beta},\ d'=\frac{b^2}{a\operatorname{sen}(\alpha_1+2\beta)\operatorname{tg}\beta}$$

Fig. 188. Tomando pues $CO=\frac{b^2}{a\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{tg}\beta}$, $CQ=\frac{b^2}{a\operatorname{sen}(\alpha_1+2\beta)\operatorname{tg}\beta}$, y tirando las rectas OQ' y QO', que formen con la generatriz CA los ángulos $COQ'=\alpha_1$, $CQO'=$

$180^\circ-(\alpha_1+2\beta)$, los planos secantes que pasen por las rectas OQ' y QO' y sean perpendiculares al plano ACB, cortarán al cono por dos elipses idénticas á la propuesta.

Si la curva dada es una hipérbola, su ecuacion será

$$y^2=2px+qx^2;$$

y del mismo modo que en la elipse hallaremos

$$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{c\cos\beta}{a}.$$

Tenemos ahora $\alpha<180^\circ$, $\beta<90^\circ$; luego [6]

$$\alpha+\beta<270^\circ:$$

tambien $\alpha+2\beta>180^\circ$; luego $\alpha+\beta>180^\circ-\beta$, ó $\alpha+\beta>90^\circ$.

Estando la suma $\alpha+\beta$ comprendida entre 90° y 270°, su coseno será negativo, y por tanto en la espresion de $\cos(\alpha+\beta)$ debe tomarse el signo $-$, es decir

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{c\cos\beta}{a}.$$

Para que $\alpha+\beta$ sea una cantidad real, debe ser

$$\cos(\alpha+\beta)\overline{\gtrless}-1,$$

ó

$$\frac{c\cos\beta}{a}\overline{\lessgtr}1,$$

ó

$$\cos\beta\overline{\lessgtr}\frac{a}{c};$$

y pues, siendo θ el ángulo agudo que una de las asíntotas forma con el eje primero de la hipérbola, es $\cos\theta=\frac{a}{c}$, será $\cos\beta\overline{\lessgtr}\cos\theta$, y por consiguiente $\beta\overline{\gtrless}\theta$, ó $2\beta\overline{\gtrless}2\theta$.

Luego, *dada una hipérbola, se podrá cortar un cono por medio de un plano, de manera que la hipérbola que resulte de la interseccion, sea igual á la hipérbola dada; siempre que el ángulo que formen las generatrices opuestas del cono sea igual ó mayor que el ángulo que formen las asíntotas de la hipérbola dada.*

Supongamos ahora que la curva dada sea una parábola, cuya ecuacion sabemos es $y^2=2px$

Cortando un cono por medio de un plano paralelo á una de las generatrices, la seccion es una parábola: se trata, pues, de ver si es posible hallar la posicion de este plano secante, de manera que la parábola que resulte, cortando al cono, sea idéntica á la parábola dada.

La ecuacion de la parábola, seccion cónica, es [139]

$$y^2=4d\,\text{sen}^2\beta.x\,;$$

luego si las dos parábolas han de ser idénticas, tendremos

$$2d\,\text{sen}^2\beta=p\,,$$

de donde

$$d=\frac{p}{2\,\text{sen}^2\beta}.$$

Tomando, pues, en la generatriz CA una parte CO igual á $\frac{p}{2\,\text{sen}^2\beta}$, y tirando por este punto un plano paralelo á la generatriz opuesta CB, la parábola que resulte de la seccion y la parábola dada tendrán la misma ecuacion $y^2=2px$, y por tanto ambas parábolas serán iguales.

Queda pues demostrado que toda línea de 2.° órden es una seccion cónica.

241. *Seccion antiparalela á la base de un cono oblícuo.*

Fig. 189. Si en un triángulo VAB se tira una recta CD que forme con dos lados del triángulo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados, es decir, el ángulo $VCD=B$, y por consiguiente el $VDC=A$, dicha recta CD se llama *antiparalela* á la base AB del triángulo.

En un cono oblícuo se llama seccion *principal* el triángulo VAB que pasa por el eje, y es perpendicular á la base AB [*Geom.*, *teor.* 137].

Si en un cono oblícuo VAB se tira por una recta CD antiparalela á la base de la seccion principal un plano CGD perpendicular á esta seccion, la interseccion CGD de dicho plano con el cono se llama seccion *antiparalela* á la base del cono.

Teorema. *La seccion* CGD *antiparalela á la base de un cono oblícuo* VAB *es un círculo.*

Por un punto cualquiera G de la curva CGD tiremos un plano paralelo á la base del cono, y por consiguiente perpendicular á la seccion principal; la curva EGF será media circunferencia [*Geom.* Nota II]. Siendo los dos planos EFG y CGD perpendiculares al VAB, su interseccion GH será perpendicular al VAB, y por consiguiente á las rectas EF y CD

que pasan por su pié H en el plano VAB; luego, si tomamos la recta CDx por eje de las x, y el punto C por orígen de las coordenadas rectangulares, y llamamos x é y á las del punto G, será $CH=x$, $GH=y$.

Tenemos ahora, por ser GH perpendicular al diámetro EF,

$$GH^2=EH\times HF, \text{ ó } y^2=EH\times HF \dots [C].$$

Llamemos α y β á los dos ángulos VCD y VDC, ó á sus iguales VBA y VAB, y $2a$ á la recta CD; y hallemos EH y HF en funcion de x.

Los dos triángulos CEH y HFD nos dan

$$EH=\frac{x\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta};\quad HF=\frac{(2a-x)\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $[C]$, resulta

$$y^2=2ax-x^2,$$

que es ecuacion de un círculo.

Artículo 2.°

Secciones cilíndricas.

242. Se llama en general *superficie* cilíndrica la superficie engendrada por una recta indefinida que conservándose siempre paralela á sí misma, recorre una curva cualquiera.

La curva dada y la recta movible se llama *directriz* y *generatriz* de la superficie cilíndrica.

Se llama superficie cilíndrica *circular* la superficie cilíndrica cuya directriz es una circunferencia. *Eje* de esta superficie cilíndrica es la recta que pasa por el centro de la directriz, y es paralela á la generatriz.

La superficie cilíndrica circular es *recta*, cuando el eje es perpendicular al plano de la directriz, y *oblícua* en el caso contrario: á estas superficies cilíndricas las llamaremos, por abreviar, *cilindro recto* y *cilindro oblícuo*.

Teorema. *Si un plano corta oblicuamente al eje de un cilindro recto, la seccion que resulta es una elipse.*

La ecuacion de la seccion cónica elipse es

$$y^2=2d\,\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\;x-\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2.$$

Para deducir de esta ecuacion la de la seccion cilíndrica, supondremos que el cono se convierta en cilindro, para lo cual, se ha de suponer $6=0$, $d=\infty$; pero como estas dos suposiciones darian una forma indeterminada al segundo miembro de la ecuacion, para evitarla, introduciremos, como en otras ocasiones, una de las dos cantidades α, d en funcion de la otra, de modo que en la ecuacion de la seccion cónica no quede mas que una de las dos.

Llamemos r á OG, y tendremos

$$r=d\operatorname{sen} 6,\ d=\frac{r}{\operatorname{sen} 6};$$

luego la ecuacion de las seccion cónica elipse puede escribirse así:

$$y^2=\frac{2r\operatorname{sen}\alpha}{\cos 6}x-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+26)}{\cos^2 6}x^2.$$

Haciendo ahora $6=0$, en cuyo caso el cono se convierte en cilindro, pues las dos rectas AC y BC (*Fig* 187) son entonces paralelas, tendremos la ecuacion general de las superficies cilíndricas,

$$y^2=2r\operatorname{sen}\alpha.x-\operatorname{sen}^2\alpha.x^2,$$

que es ecuacion de una elipse, cuyos semiejes mayor y menor son respectivamente $\dfrac{r}{\operatorname{sen}\alpha}$ y r.

Hallemos directamente la ecuacion de las secciones cilíndricas.

Fig 190. Sea Ox la interseccion del plano secante OMC y del $OABE$ que pasa por el eje, y es perpendicular á aquel. Por un punto cualquiera M de la seccion cilíndrica tiremos un plano perpendicular al eje, y por consiguiente al plano $OABE$: la interseccion MP será perpendicular á las dos rectas Ox y DE; luego

$$y^2=DP\times PE.$$

Ahora, $DP=x\operatorname{sen}\alpha$, $PE=2r-DP=2r-x\operatorname{sen}\alpha$; luego

$$y^2=2r\operatorname{sen}\alpha.x-\operatorname{sen}^2\alpha.x^2.$$

243. *Seccion antiparalela á la base de un cilindro oblícuo*

Fig. 191. Si en un paralelógramo $MABN$ se tira una recta CD que forme con los lados opuestos MA y NB del paralelógramo dos ángulos iguales á los de la base, pero trocados, es decir, el ángulo $MCD=B$, y por consiguiente el ángulo $CDN=A$, dicha recta CD se llama *antiparalela* á la base AB del paralelógramo.

En un cilindro oblícuo $MABN$ se llama *seccion principal* el paralelógramo $MABN$ que pasa por el eje y es perpendicular á la base [*Geom Teor*. 257].

Si en un cilindro oblícuo AN se tira por una recta CD antiparalela á la base de la seccion principal un plano CGD perpendicular á esta seccion, la interseccion CGD de dicho plano con el cilindro se llama *seccion antiparalela* á la base del cilindro.

Teorema. *La seccion* CGD *antiparalela á la base de un cilindro oblícuo es un círculo igual á la base*.

Por un punto cualquiera G de la curva CGD tiremos un plano paralelo á la base; la interseccion EGF será media circunferencia. Siendo los dos planos CGD y EGF perpendiculares á la seccion principal, su interseccion GH tambien lo será, y por consiguiente á las rectas CD y EF. Tomando pues CD por eje de las x y el punto C por orígen de las coordenadas rectangulares, será $CH=x$, $GH=y$.

Tenemos ahora, por ser GH perpendicular á EF,

$$GH^2=EH\times HF,$$

ó

$$y^2=EH\times HF.$$

Para hallar EH y HF en funcion de x, observaremos que el ángulo $CEH=A=CDF=HCE$; luego $EH=CH=x$. Tambien $HF=AB-EH=2r-x$, siendo r el radio de la base del cilindro. Luego

$$y^2=2rx-x^2,$$

ecuacion de un círculo, cuyo radio es igual al de la base del cilindro oblícuo propuesto.

CAPITULO XI.

Cuadratura de las curvas de segundo grado.

ARTÍCULO 1.°

Cuadratura de la elipse.

244. *Fig* 192. Sea $ABC=s$ un segmento cualquiera de elipse, comprendido entre el arco AC de esta curva, su eje mayor y una ordenada. Desde el centro O de la elipse describamos con el radio OA un semicírculo, y llamemos S al área del segmento ABC' de este círculo correspondiente al segmento elíptico ABC. Dividamos la recta AB en cualquier número de partes iguales ó desiguales; por los puntos r, s, t.... de division levantemos las perpendiculares al eje rm', sn', tp'....., y tiremos las cuerdas Am y Am', mn y $m'n'$, np y $n'p'$.....

Llamemos x é y á las coordenadas del punto M de la elipse, x é Y á las del punto M' correspondiente al punto M en la circunferencia del círculo: tenemos

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

$$Y^2=a^2-x^2;$$

y por consiguiente $$\frac{y^2}{Y^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

ó $$\frac{y}{Y}=\frac{b}{a},$$

es decir que *las ordenadas correspondientes de la elipse y del círculo circunscripto son entre sí como el semieje menor al semieje mayor.*

Esto supuesto, las áreas de los triángulos Amr y $Am'r$, que tienen igual altura Ar, son entre sí como sus bases rm y rm', ó como $b:a$. Las áreas de dos trapecios correspondientes cualesquiera de la elipse y círculo, por ejemplo $tpqu$ y

$tp'q'u$, son entre sí, por tener igual altura, como $tp+uq$: $tp'+uq'$; y pues tenemos las dos proporciones

$$tp : tp' :: b : a, \quad uq : uq' :: b : a,$$

será [*Aritm.* 175]

$$tp+uq : tp'+uq' :: b : a,$$

es decir que tambien las áreas de dos trapecios correspondientes cualesquiera son entre sí como $b : a$.

Esto supuesto, llamemos t, t', t''... á las áreas del triángulo Amr y de los trapecios $rmns$, $snpt$...; T, T', T''.... á las áreas del triángulo $Am'r$ y de los trapecios $rm'n's$, $sn'p't$...: tendremos

$$t : T :: b : a,$$
$$t' : T' :: b : a,$$
$$t'' : T'' :: b : a;$$

y por consiguiente [*Aritm.* 175]

$$t+t'+t''+.... : T+T'+T''+.... :: b : a,$$

de donde

$$t+t'+t''+... = \frac{b}{a}(t+t'+t''+...) ....[A].$$

Ahora, dividiendo la recta AB en partes tan pequeñas como queramos, es evidente que la suma $t+t'+t''+....$ del triángulo Amr y trapecios siguientes se aproximará, tanto como se quiera, al segmento $ACB=s$, ó lo que es igual, este segmento es límite del primer miembro de la ecuacion [A]; y el segmento $AC'B=S$ del círculo es límite de la suma $T+T'+T''+....$: luego, segun el teorema de los límites [*Nota 1.ª al fin del alg. elem.*], tendremos

$$s=\frac{b}{a}S.$$

Luego *el área de un segmento elíptico es igual á la del segmento circular correspondiente multiplicada por* $\frac{b}{a}$.

Consideremos ahora los dos segmentos AOD y AOD': si llamamos E al área de la elipse, será $AOD=\frac{E}{4}$, y $AOD'=\frac{\pi a^2}{4}$:

acabamos de demostrar que

$$AOD=\frac{b}{a}\cdot AOD';$$

luego $$\frac{E}{4}=\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4},$$

de donde $$E=\pi ab.$$

Luego *el área de la elipse es igual á la razon de la circunferencia al diámetro multiplicada por el rectángulo de los semiejes.*

Nota. Si hacemos $ab=r^2$, en cuyo caso r es una media proporcional entre a y b, tendremos

$$E=\pi r^2,$$

es decir que *el área de la elipse es igual á la de un círculo cuyo radio es medio proporcional entre los semiejes.*

245. *Conociendo las coordenadas de los estremos* M *y* N *de una cuerda de una elipse dada, hallar el área del segmento comprendido entre esta cuerda y su arco* MN.

Conociendo las coordenadas de los puntos M y N, multiplicándolas por $\frac{a}{b}$, se tendrán las coordenadas de los puntos M' y N'. Hállese el área del segmento de círculo $M'PQN'$, y multiplicándola por $\frac{b}{a}$, se tendrá el área del segmento elíptico $MPQN$: restando de esta área la del trapecio $MPQN$, se tendrá la del segmento elíptico comprendido entre la cuerda MN y el arco MRN.

El área del sector elíptico $MONR$ se hallará, añadiendo al área del segmento MNR la del triángulo MON.

Artículo 2.°

Cuadratura de la hipérbola.

246. *Fig.* 193. Sean Ox y Oy las asíntotas de la hipérbola, cuya ecuacion con respecto á estas rectas es $xy=m^2$. Se trata de hallar el área del segmento $AA'B'B$ comprendido entre la asíntota Ox, el arco AB de hipérbola y las dos ordenadas de los estremos del mismo arco.

Dividamos la distancia OB' en $n+1$ partes de magnitud indeterminada: sean

$$a,\ a_1,\ a_2 \ldots,\ a_{n-1},\ b$$

las abscisas de los puntos

$$A,\ A_1,\ A_2,\ldots A_{n-1},\ B;$$

las ordenadas de estos mismos puntos se hallarán por la espresion general de la ordenada $y=\frac{m^2}{x}$, y serán

$$\frac{m^2}{a},\ \frac{m^2}{a_1},\frac{m^2}{a_2}\ \ldots\ \frac{m^2}{a_{n-1}},\ \frac{m^2}{b}.$$

Las áreas de los rectángulos AA'_1, $A_1A'_2$, $A_2A'_3 \ldots A_{n-1}B'$ serán, segun el teorema [*Trig.* 110, 5.°], llamando θ al ángulo de los ejes:

$$(a_1-a)\frac{m^2}{a}\operatorname{sen}\theta=\left(\frac{a_1}{a}-1\right)m^2\operatorname{sen}\theta,$$

$$\left(\frac{a_2}{a_1}-1\right)m^2\operatorname{sen}\theta,$$

$$\left(\frac{a_3}{a_2}-1\right)m^2\operatorname{sen}\theta,$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{b}{a_{n-1}}-1\right)m^2\operatorname{sen}\theta.$$

Como las $n+1$ divisiones de la recta OB' tienen hasta ahora magnitud indeterminada, dispondremos de ellas de manera que las áreas de todos los rectángulos AA'_1, $A_1A'_2$, $A_2A'_3 \ldots$ sean iguales, lo que se verificará si

$$\frac{a_1}{a}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}\ldots=\frac{b}{a_{n-1}},$$

es decir, si las abscisas a, a_1, $a_2 \ldots$, b forman una progresion geométrica.

Siendo iguales los rectángulos AA'_1, $A_1A'_2$, $\ldots A_{n-1}B'$, llamando S á su suma, tendremos

$$S=n\left(\frac{a_1}{a}-1\right)m^2\operatorname{sen}\theta.$$

La razon de la progresion geométrica que forman las abscisas a, a_1, a_2, a_3, $\ldots\ a_{n-1}$, b, es $\frac{a_1}{a}$;

luego $$b=a\left(\frac{a_1}{a}\right)^n,$$

de donde $$\frac{a_1}{a}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

Como a y b son cantidades constantes, creciendo n indefinidamente, $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ irá disminuyendo y aproximándose á 1, y tiene por límite 1; luego, creciendo n indefinidamente, la cantidad $\frac{a_1}{a}$ tiene por límite 1. Eliminemos de la espresion de S una de las dos variables n ó $\frac{a_1}{a}$, por ejemplo $\frac{a_1}{a}$; para lo cual, sustituiremos en dicha espresion el valor $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ de $\frac{a_1}{a}$, y tendremos

$$S=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)m^2 \operatorname{sen}\theta,$$

espresion que no contiene mas variable que n.

Observemos ahora que, permaneciendo constantes las abscisas a y b, y creciendo n indefinidamente, la suma S de los n rectángulos se irá aproximando, tambien indefinidamente, á la área S_1 del segmento $AA'B'B$; luego, en virtud del teorema de los límites,

$$S_1=m^2 \operatorname{sen}\theta.\ \textit{lím}.\ n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

Ya no nos falta mas que hallar el valor de $\textit{lím}.\ n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$, es decir el valor de $n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$ en el caso en que $n=\infty$.

Hagamos, para facilitar un poco esta investigacion, $n=\frac{1}{z}$, y tendremos entonces

$$n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^z-1}{z};$$

y como, siendo $z=0$, es $n=\infty$, tenemos que hallar el valor de $\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^z-1}{z}$ cuando $z=0$.

Para esto, hemos hallado [*Alg. super.* 396] la série

$$\left(\frac{b}{a}\right)^z=1+z\,l.\frac{b}{a}+\frac{z^2}{2}\left(l.\frac{b}{a}\right)^2+\frac{z^3}{2.3}\left(l.\frac{b}{a}\right)^3+\ldots,$$

de donde

$$\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^z-1}{z}=l.\frac{b}{a}+\frac{z}{2}\left(l.\frac{b}{a}\right)^2+\frac{z^2}{2.3}\left(l.\frac{b}{a}\right)^3+\ldots;$$

luego, cuando $z=0$, el valor de $\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^z-1}{z}$ es $l.\frac{b}{a}$.

Por lo tanto

$$S_1=m^2 \operatorname{sen}\theta\; l.\frac{b}{a} \ldots\ldots [K].$$

Corolarios. 1.° Si la abscisa $a=1$, es

$$S_1=m^2 \operatorname{sen}\theta\, l.b \ldots\ldots [L].$$

Sea pues α la base de un sistema de logaritmos, cuyo módulo con respecto al neperiano sea $m^2 \operatorname{sen}\theta$; representando los logaritmos del sistema cuya base es α por la característica log, tendremos [*Alg.* 225]

$$\log b=l.b\times\frac{1}{l.\alpha};$$

y pues el módulo del nuevo sistema con respecto al neperiano es $m^2 \operatorname{sen}\theta$, tendremos $\frac{1}{l.\alpha}=m^2\operatorname{sen}\theta$, de donde $l.\alpha=\frac{1}{m^2\operatorname{sen}\theta}$

y $a=e^{\frac{1}{m^2 \operatorname{sen}\theta}}$. Tenemos ahora $\log b = l.b \times m^2 \operatorname{sen}\theta$, y por tanto

$$S_1 = \log b.$$

Luego, si se cuentan las áreas hiperbólicas desde la ordenada correspondiente á la abscisa 1, y la base del sistema de logaritmos es $e^{\frac{1}{m^2 \operatorname{sen}\theta}}$, *las áreas hiperbólicas son logaritmos de las abscisas.*

2.° En la hipérbola equilátera es $\operatorname{sen}\theta=1$: si tomamos por unidad la abscisa m del vértice de la hipérbola equilátera, y las áreas hiperbólicas se cuentan desde la ordenada asintótica del vértice, tendremos $a=m=1$, y por consiguiente la espresion [K] de S_1 se convertirá en

$$S_1 = l.b.$$

Vemos, pues, que en la hipérbola equilátera, contando las áreas desde la ordenada asintótica del vértice, y tomando por unidad esta ordenada ó la abscisa correspondiente, *las áreas asintóticas son logaritmos neperianos de las abscisas.*

Por esta razon á los logaritmos neperianos se les daba en otro tiempo el nombre de logaritmos *hiperbólicos.*

Teorema. Fig. 194. *Todo sector hiperbólico* AOB *es equivalente al segmento* AA′B′B *comprendido entre la asíntota, el arco del sector y las dos ordenadas de sus estremos.*

En efecto, los dos triángulos AOA' y BOB' son equivalentes, por ser mitades de los paralelógramos $AA'OK$ y $BB'OL$, que sabemos tienen igual área [188, *Corol.*]. Restando de la figura $AOB'B$ primeramente el triángulo BOB', y despues el triángulo AOA', los restos AOB y $AAB'B$ serán equivalentes.

Para hallar el área del segmento hiperbólico ACB comprendido entre una cuerda AB y su arco, se hallará el área del trapecio $AA'B'B$, y se restará de ella la del segmento hiperbólico $AA'B'BCA$.

Artículo 3.°

Cuadratura de la parábola.

247. *Fig.* 195. Sea OQX un segmento parabólico comprendido entre un diámetro OX de la parábola, el arco OQ de esta curva y la ordenada QX del estremo de dicho arco, pa-

ralela á la tangente Oy tirada por el otro estremo: sean a y b las coordenadas del estremo Q del arco, y θ el ángulo de los ejes Ox, Oy. Tiremos por el punto Q la QV paralela al eje Ox, y dividamos la recta OV en un número cualquiera de partes iguales $OR=RS=ST=TV$; y por los puntos R, S y T, tiremos las paralelas RM, SN, TP al eje Ox: construyamos ahora los paralelógramos OM, RN, SP y TQ esternos al segmento parabólico OVQ, y los paralelógramos RH, SK, TL internos al mismo segmento. Siendo iguales los paralelógramos OM y RH, RN y SK, SP y TL, se vé que la suma de los paralelógramos esternos escede á las de los internos en el último paralelógramo esterno TQ, cuyo lado TV, que es una de las partes en que se ha dividido la OV, puede llegar á ser tan pequeño como se quiera: de suerte que, dividiendo la recta OV en un número de partes iguales tan grande como se quiera, la suma de los paralelógramos esternos puede llegar á esceder á la de los internos en menos de cualquiera cantidad dada por pequeña que sea. Mas el segmento parabólico OVQ está comprendido entre ambas sumas; luego dicho segmento OVQ es límite tanto de la suma de los paralelógramos esternos como de la de los internos.

Esto supuesto, sea n el número de partes iguales en que se haya dividido la recta OV,

las abscisas $\quad \begin{matrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_n, \\ MR, & NS, \ldots & QV: \end{matrix}$

la suma S de las áreas de los n paralelógramos esternos será [*Trig.* 110, 5.º]

$$S=(x_1+x_2+\ldots+x_n)\frac{b}{n}\operatorname{sen}\theta$$

La ecuacion de la parábola es $y^2=qx$, siendo q el parámetro del diámetro: las coordenadas de los puntos M, N...... verificarán esta ecuacion, y por tanto

$$\frac{b^2}{n^2}=qx_1,\quad \frac{4b^2}{n^2}=qx_2,\quad \frac{9b^2}{n^2}=qx_3,\ldots\quad \frac{n^2b^2}{n^2}=qx_n,$$

de las cuales resultan

$$x_1=\frac{b^2}{qn^2},\quad x_2=\frac{4b^2}{qn^2},\quad x_3=\frac{9b^2}{qn^2}\ldots\ldots x_n=\frac{n^2b^2}{qn^2};$$

luego

$$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=\frac{b^2}{qn^2}(1+4+9+\ldots\ldots+n^2).$$

En el número 239 del álgebra se ha hallado que la suma $1+4+9+\ldots+n^2$ de los cuadrados de los números naturales es

$$\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}:$$

por consiguiente

$$x_1+x_2+x_3+\ldots\ldots+x_n=\frac{b^2}{qn^2}\cdot\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}:$$

luego

$$S=\frac{b^2}{qn^2}\cdot\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\cdot\frac{b}{n}\cdot\operatorname{sen}\theta,$$

ó
$$S=\frac{b^2}{q}\cdot\frac{b}{3}\operatorname{sen}\theta\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ahora, creciendo n indefinidamente, hemos demostrado que el límite de la suma S de los paralelógramos esternos es el segmento parabólico OVQ; y como el límite del segundo miembro es $\frac{b^2}{q}\cdot\frac{b}{3}\operatorname{sen}\theta$, tendremos, segun el teorema de los límites,

$$OVQ=\frac{b^2}{q}\cdot\frac{b}{3}\operatorname{sen}\theta;$$

y pues $b^2=qa$, será

$$OVQ=\frac{ab}{3}\operatorname{sen}\theta$$

Por consiguiente el segmento OQX tendrá por área la del paralelógramo $OVQX$ disminuida en la del segmento OVQ, esto es

$$OQX=ab\operatorname{sen}\theta-\frac{ab}{3}\operatorname{sen}\theta,$$

ó en fin
$$OQX=\frac{2}{3}ab\operatorname{sen}\theta.$$

Luego *el área de un segmento parabólico, comprendido entre un diámetro, el arco de la parábola y una ordenada, es* $\frac{2}{3}$ *del paralelógramo construido sobre dicha ordenada y abscisa correspondiente.*

Corolario. Fig. 196. El área de un segmento parabólico comprendido entre una cuerda MO y su arco ONM se hallará restando del segmento $ONMP$ el triángulo OMP: será

pues $$\frac{2}{3}PQ-\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{6}PQ;$$

es decir, que es la sesta parte del paralelógramo formado sobre la abscisa y ordenada del estremo (no el orígen) del arco.

CAPITULO XII.

Semejanza de las curvas planas.

248 *Fig.* 197. Sea MNP una curva plana cualquiera: desde un punto O, tomado á arbitrio en el plano de esta curva: tiremos los *radios vectores* OM, ON, OP... á sus diferentes puntos; desde otro punto cualquiera O' del mismo plano tiremos la recta indefinida $O'A$ en cualquier direccion, y en seguida las rectas indefinidas $O'B$, $O'C$..., de manera que los ángulos $AO'B=MON$, $BO'C=NOP$...; tomemos sobre dichas rectas indefinidas las partes $O'M'$, $O'N'$, $O'P'$... proporcionales á las OM, ON, OP..., ó lo que es igual, determinemos los puntos M', N', P'... de modo que tengamos la série de razones iguales $\frac{OM}{O'M'}=\frac{ON}{O'N'}=\frac{OP}{O'P'}$...: la curva $M'N'P'$ formada por los puntos M', N', P',... se llama *semejante* á la curva MNP.

Segun esto, diremos que son curvas semejantes las curvas cuyos radios vectores correspondientes son proporcionales.

Los dos puntos O y O', orígenes de todos los radios vectores de las dos curvas, se llaman *centros de semejanza*. Los radios vectores correspondientes de ambas curvas semejantes, como OM y $O'M'$, ON y $O'N'$, OP y $O'P'$, se llaman radios *homólogos*. Los puntos M y M', N y N', P y P', estremos de los radios *homólogos*, se llaman puntos *homólogos*; y la razon constante de los radios *homólogos* se llama razon de *semejanza* de las dos curvas.

Como la razon de semejanza es arbitraria, es claro que se pueden construir una infinidad de curvas semejantes á una curva dada.

249. *Conociendo la ecuacion de una curva* MNP, *hallar la ecuacion de otra cualquier curva* M'N'P' *semejante á la primera,*

refiriendo la nueva curva M'N'P' *á ejes* O'x', O'y' *que tengan respecto de ella una posicion semejante á la que los ejes* Ox, Oy *tienen respecto de la curva* MNP (1).

Sea $f(x, y)=0$ la ecuacion de la curva MNP: señalemos las coordenadas OR y MR, $O'R'$ y $M'R'$ de dos puntos homólogos cualesquiera $M(x,y)$, $M'(x', y')$, y sea k la razon de semejanza: tendremos, por ser equiángulos los dos triángulos MOR y $M'O'R'$, las proporciones

$$\frac{OR}{O'R'}=\frac{OM}{O'M'}=k,$$

$$\frac{MR}{M'R'}=\frac{OM}{O'M'}=k,$$

ó $$\frac{x}{x'}=k,\quad \frac{y}{y'}=k,$$

de donde $$x=kx',\quad y=ky'.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion $f(x, y)=0$, tendremos $$f(kx',ky')=0,$$
ecuacion que nos da la relacion constante entre las coordenadas x' é y' de un punto cualquiera de la curva $M'N'P'$, y que por tanto es la ecuacion de la curva $M'N'P'$.

Luego, *para hallar la ecuacion de una curva semejante á otra cuya ecuacion es dada* (teniendo los nuevos ejes con respecto á la nueva curva posicion semejante á la que los primeros tienen con respecto á la primera), *se reemplazan en la ecuacion dada* x *por* kx' *é* y *por* ky'.

250. APLICACIONES DE ESTA TEORÍA.

Hallar la ecuacion de la curva semejante al círculo.

Sea O el centro del círculo, Ox y Oy los ejes rectangulares de coordenadas: la ecuacion de este círculo es

$$y^2+x^2=R^2.$$

---

(1) Es decir que los dos orígenes O y O' sean centros de semejanza, y que los ángulos yOM, xOM formados por los ejes Oy, Ox con un radio vector cualquiera OM sean respectivamente iguales á los ángulos $y'O'M'$, $x'O'M'$ que forman con el radio $O'M'$ homólogo de OM los nuevos ejes $O'x'$, $O'y'$; y por tanto que los dos ángulos yOx, $y'O'x'$ de los ejes sean tambien iguales.

La ecuacion de la curva semejante al círculo será

$$k^2y'^2+k^2x'^2=R^2,$$

ó

$$y'^2+x'^2=\left(\frac{R}{k}\right)^2,$$

que es ecuacion de otro círculo cuyo radio es $\frac{R}{k}$, y cuyo centro está en el orígen de las coordenadas.

Luego *toda curva semejante á un círculo es otro círculo.*

Recíproco. *Todos los círculos son curvas semejantes.*

En efecto, la ecuacion de un círculo con respecto á su centro y ejes rectangulares es

$$y^2+x^2=R^2:$$

la de otro círculo cualquiera, referido tambien á su centro y ejes rectangulares, es

$$y'^2+x'^2=R'^2.$$

Sea k la razon $\frac{R}{R'}$, y por consiguiente $R'=\frac{R}{k}$: la ecuacion del segundo círculo será

$$y'^2+x'^2=\frac{R^2}{k^2},$$

ó

$$(ky')^2+(kx')^2=R^2,$$

que ya sabemos es la ecuacion de la curva semejante al primer círculo; luego el segundo círculo es semejante al primero Luego todos los círculos son semejantes; sus centros son centros de semejanza, y la razon de sus radios es la razon de semejanza de los círculos.

Hallar la ecuacion de una curva semejante á la parábola.

Tomando por orígen el vértice, por eje de abscisas el eje de la parábola, y por eje de ordenadas la tangente á la curva en el vértice, la ecuacion de la misma es

$$y^2=2px:$$

la de la curva semejante á la parábola será

$$k^2y'^2=2pkx',$$

ó

$$y'^2=\frac{2p}{k}x',$$

que es la ecuacion de una parábola referida á su eje y vértice, y cuyo parámetro es $\frac{2p}{k}$.

Luego *toda curva semejante á una parábola es otra parábola*.

Recíproco. *Todas las parábolas son curvas semejantes*.

En efecto, las ecuaciones ordinarias de dos parábolas son

$$y^2=2px,\ y'^2=2p'x'.$$

Sea k la razon $\frac{p}{p'}$, y por consiguiente $p'=\frac{p}{k}$; será la ecuacion de la segunda parábola

$$y'^2=\frac{2p}{k}x',$$

ó

$$k^2y'^2=2pkx',$$

que es la ecuacion de una curva semejante á la parábola primera. Luego la segunda parábola es semejante á la primera: es decir, que todas las parábolas son curvas semejantes, sus vértices son centros de semejanza, y la razon de los parámetros es la razon de semejanza de las dos parábolas.

Del mismo modo se demuestra que *todas las curvas, cuya ecuacion no contiene mas que una constante, y es homogénea, contando con el esponente de esta constante, son curvas semejantes*.

Para ejemplo de curvas de grado superior, tomaremos la ecuacion de la curva de Descartes

$$y^3-3pxy+x^3=0.$$

La ecuacion de las curvas semejantes á la curva de Descartes será

$$k^3y'^3-3pk^2x'y'+k^3x'^3=0,$$

ó

$$y'^3-3\frac{p}{k}x'y'+x'^3=0,$$

que es la ecuacion de otra curva de Descartes, cuya única constante es $\frac{p}{k}$. Luego *toda curva semejante á una curva de Descartes es otra curva de Descartes*.

Recíproco. *Todas las curvas de Descartes son curvas semejantes*.

En efecto, las ecuaciones de dos curvas de Descartes son
$$y^3-3pxy+x^3=0,\ \ y'^3-3p'x'y'+x'^3=0.$$

Sea k la razon $\frac{p}{p'}$, y por consiguiente $p'=\frac{p}{k}$: la ecuacion de la segunda curva de Descartes será

$$y'^3-3\frac{p}{k}x'y'+x'^3=0;$$

ó multiplicándola por k^3,
$$(ky')^3-3pkx'.ky'+(kx')^3=0,$$
ecuacion de toda curva semejante á la primera. Luego todas las curvas de Descartes son curvas semejantes.

Hallar la ecuacion de la curva semejante á la elipse.

La ecuacion ordinaria de la elipse es

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1;$$

la de la curva semejante á la elipse será

$$\frac{k^2y'^2}{b^2}+\frac{k^2x'^2}{a^2}=1,$$

ó

$$\frac{y'^2}{\left(\frac{b}{k}\right)^2}+\frac{x'^2}{\left(\frac{a}{k}\right)^2}=1;$$

que es la ecuacion de otra elipse cuyos semiejes son $\frac{a}{k}$ y $\frac{b}{k}$:

y pues $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$, resulta que *toda curva semejante á una elipse es otra elipse, cuyos ejes son proporcionales á los de la primera.*

Recíproco. *Todas las elipses, cuyos ejes son proporcionales, son curvas semejantes.*

Las ecuaciones ordinarias de dos elipses son

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1,\ \ \frac{y'^2}{b'^2}+\frac{x'^2}{a'^2}=1.$$

Sea $\frac{a}{a'}=k$, y por consiguiente, segun la hipótesi, tambien $\frac{b}{b'}=k$: será $a'=\frac{a}{k}$, $b'=\frac{b}{k}$; luego la ecuacion de la segunda elipse será

$$\frac{y'^2}{\frac{a^2}{k^2}}+\frac{x'^2}{\frac{b^2}{k^2}}=1;$$

ó

$$\frac{k^2y'^2}{a^2}+\frac{k^2x'^2}{b^2}=1,$$

ecuacion de la curva semejante á la elipse; luego la segunda elipse es semejante á la primera; es decir, que todas las elipses, cuyos ejes son proporcionales, son semejantes, sus centros son centros de semejanza, y la razon de sus ejes es la razon de semejanza de las dos elipses.

Del mismo modo se demuestra que *toda curva semejante á una hipérbola es otra hipérbola, cuyos ejes son proporcionales á los de la primera; y al contrario, que todas las hipérbolas, cuyos ejes son proporcionales, son curvas semejantes.*

Nota *Fig.* 198. Siendo $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ las tangentes de los ángulos HOx y LOx que las dos asíntotas de la hipérbola forman con el eje primero OAx; $\frac{b'}{a'}$ y $-\frac{b'}{a'}$ las tangentes de los ángulos $H'O'x'$ y $L'O'x'$ que las asíntotas de otra hipérbola forman con su eje primero $O'x'$; si estas dos hipérbolas son semejantes, en cuyo caso $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, las asíntotas de ambas hipérbolas formarán con los dos ejes primeros ángulos respectivamente iguales: luego, si colocamos dichas hipérbolas de manera que coincidan sus centros y ejes primeros, las asíntotas de la una coincidirán con las de la otra.

Al contrario, *si los dos ángulos* HOM y H'O'M' *de las asíntotas de dos hipérbolas son iguales, las dos hipérbolas serán semejantes*: pues, por ser iguales estos ángulos, sus mitades HOA y $H'O'A'$ tambien lo serán, y por tanto las tangentes de estos ángulos serán iguales, es decir, $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$; luego las dos hipérbolas tendrán sus ejes proporcionales, y por tanto serán semejantes.

251. Teorema. Fig. 199. *Si tomando por bases dos radios homólogos* OA *y* oa *de dos curvas semejantes, se construyen dos triángulos semejantes y semejantemente colocados* AOC *y* aoc, *los vértices* C *y* c *de estos dos triángulos serán otros dos centros de semejanza de las dos curvas.*

En efecto, sea k la razon de semejanza de dos radios homólogos cualesquiera $OA : oa$. Los triángulos semejantes AOC y aoc nos dan $\frac{AC}{ac}=k$. Siendo semejantes, y estando semejantemente colocados los dos triángulos AOC y aoc, los ángulos AOC y aoc serán iguales. Tiremos otros dos radios homólogos cualesquiera OD y od, y las rectas CD y cd: los ángulos AOD y aod formados por radios homólogos son iguales; restándolos de los iguales AOC y aoc, los restos DOC y doc serán iguales. Como además $\frac{OD}{od}=k$, $\frac{OC}{oc}=k$; los dos triángulos DOC y doc serán semejantes, y por tanto $\frac{CD}{cd}=k$. Del mismo modo, si B y b son dos puntos homólogos, se tendrá $\frac{CB}{cb}=k$. Tenemos, pues, $\frac{CA}{ca}=\frac{CD}{cd}=\frac{CB}{cb}$....., es decir, que las rectas CA y ca, CD y cd, CB y cb....., son radios homólogos, y por tanto los puntos C y c son centros de semejanza [248].

Segun este teorema, existen infinitos sistemas ó pares de centros de semejanza de dos curvas semejantes.

252. *Fig.* 200. *Arcos semejantes* en dos curvas semejantes son los arcos MS y $M'S'$ comprendidos entre puntos homólogos de las dos curvas.

Los arcos semejantes MS *y* M'S' *son proporcionales á los radios homólogos* OM *y* O'M'.

Siendo homólogos los puntos M y M', S y S', los radios OM y $O'M'$, OS y $O'S'$ serán tambien homólogos, y por tanto los ángulos MOS y $M'O'S'$ serán iguales. Dividamos estos dos ángulos iguales en las partes iguales MON, NOP.....ROS; $M'O'N'$, $N'O'P'$.....$R'O'S'$, tan pequeñas como queramos, y tiremos las cuerdas MN, NP.....RS; $M'N'$, $N'P'$,.....$R'S'$: los triángulos MON y $M'O'N'$, NOP y $N'O'P'$..... ROS y $R'O'S'$ son semejantos, puesto que tienen dos lados proporcionales é igual al ángulo comprendido; luego

$$\frac{MN}{M'N'}=\frac{OM}{O'M'},\ \frac{NP}{N'P'}=\frac{ON}{O'N'}\ldots\frac{RS}{R'S'}=\frac{OR}{O'R'};$$

mas siendo homólogos los radios OM y $O'M'$, ON y $O'N'$,....

OR y $O'R'$ es $$\frac{OM}{O'M'}=\frac{ON}{O'N'}=\ldots=\frac{OR}{O'R'};$$

luego

$$\frac{MN}{M'N'}=\frac{NP}{N'P'}=\ldots=\frac{RS}{R'S'}=\frac{OM}{O'M'};$$

y por consiguiente

$$\frac{MN+NP+\ldots+RS}{M'N'+N'P'+\ldots+R'S'}=\frac{OM}{O'M'},$$

ó $$MN+NP+\ldots+RS=\frac{OM}{O'M'}(M'N'+N'P'+\ldots+R'S');$$

luego, en virtud del teorema de los límites,

$$\text{arc. } MS=\frac{OM}{O'M'}\text{arc. } M'S',$$

y por fin $$\frac{\text{arc. } MS}{\text{arc. } M'S'}=\frac{OM}{O'M'}.$$

Llámanse sectores *semejantes* los sectores MOS, $M'O'S'$, cuyos arcos son semejantes, y cuyos vértices O y O' son centros de semejanza.

Dos sectores semejantes MOS, M'O'S' *son proporcionales á los cuadrados de los radios homólogos.*

Haciendo la misma construccion que en el teorema anterior, tendremos, por ser semejantes los triángulos MON y $M'O'N'$, NOP y $N'O'P'$,...., ROS y $R'O'S'$, las proporciones

$$\frac{MON}{M'O'N'}=\frac{OM^2}{O'M'^2},\ \frac{NOP}{N'O'P'}=\frac{ON^2}{O'N'^2}\ldots,\frac{ROS}{R'O'S'}=\frac{OR^2}{O'R'^2}$$

Como por ser homólogos los lados OM y $O'M'$, ON y $O'N'$, ... OS y $O'S'$, es

$$\frac{OM}{O'M'}=\frac{ON}{O'N'}=\ldots\ldots=\frac{OR}{O'R'},$$

y como consecuencia

$$\frac{OM^2}{O'M'^2}=\frac{ON^2}{O'N'^2}=\ldots\ldots=\frac{OR^2}{O'R'^2},$$

será

$$\frac{MON}{M'O'N'}=\frac{NOP}{N'O'P'}=\ldots=\frac{ROS}{R'O'S'}=\frac{OM^2}{O'M'^2};$$

$$\frac{MON+NOP+\ldots.+ROS}{M'O'N'+N'O'P'+\ldots.+R'O'S'}=\frac{OM^2}{O'M'^2},$$

ó

$$MON+NOP+\ldots\ldots+ROS=\frac{OM^2}{O'M'^2}(M'O'N'+N'O'P'+\ldots\ldots+R'O'S');$$

luego, segun el teorema de los límites,

$$\text{sector } MOS=\frac{OM^2}{O'M'^2}\,.\,\text{sector } M'O'S',$$

y por último
$$\frac{\text{sector } MOS}{\text{sector } M'O'S'}=\frac{OM^2}{O'M'^2}.$$

Corolarios. 1.° *Las circunferencias de dos elipses semejantes son proporcionales á sus ejes.*

2.° *Las áreas de dos elipses semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus ejes.*

Esta última consecuencia puede deducirse de la fórmula πab del área de la elipse.

En efecto, siendo semejantes las elipses, tenemos

$$a : a' :: b : b',$$

y evidentemente $\qquad \pi b : \pi b' :: b : b'$.

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, resulta

$$\pi ab : \pi a'b' :: b^2 : b'^2 :: a^2 : a'^2.$$

CAPITULO XIII.

Número de condiciones necesario para la determinacion algébrica de una curva de segundo grado.

---

253. La ecuacion general de las curvas de segundo grado

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

tiene seis coeficientes; pero dividiéndola por uno cualquiera de ellos, por ejemplo por F, y llamando a, b, c..... á los cocientes $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{F}$, $\frac{C}{F}$, ..., será

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+1=0 \;\ldots\; [M],$$

que tiene cinco coeficientes.

Si en esta ecuacion se verifica que $b^2-4ac \gtrless 0$, los cinco coeficientes serán independientes entre sí; pero si $b^2-4ac=0$, cualquiera de los tres coeficientes a, b y c depende de los otros dos, y por tanto la ecuacion [M] no tiene en tal caso mas que cuatro coeficientes independientes entre sí.

Si se trata de hallar una curva de segundo grado que satisfaga á ciertas condiciones, la ecuacion de dicha curva tendrá la forma [M], y serán los coeficientes a, b, c, d y e las incógnitas de la cuestion.

Nosotros diremos que una curva de segundo grado está *algébricamente determinada*, cuando el número de ecuaciones distintas entre los datos y los coeficientes incógnitos a, b, c.... sea igual al número de estos coeficientes que sean independientes entre sí.

Pueden suceder los tres casos siguientes: 1.° Que cada uno de los coeficientes incógnitos, deducido de estas ecuaciones, no tenga mas que un solo valor real y finito. 2.° Que varios de los coeficientes incógnitos tengan dos ó mas valores reales y finitos. 3.° Que varios coeficientes incógnitos tengan valores imaginarios ó infinitos. En el primer caso, sustituidos en la ecuacion [M] los valores de los coeficientes incógnitos, se tendrá la ecuacion numérica de la curva pedida; discutiendo esta ecuacion [CAP. IV], si efectivamente representa curva, esta será la que se pide; pero si la ecuacion no representa curva, el problema será imposible. En el segundo caso, sustituidos los valores de los coeficientes incógnitos en la ecuacion [M], resultarán dos ó mas ecuaciones que podrán representar varias curvas ó ninguna. En el tercer caso la ecuacion de la curva es imposible, y por consiguiente la curva pedida es tambien imposible.

Ya se ve, pues, que de la determinacion algébrica de una curva no sigue necesariamente su determinacion absoluta; porque, si bien existe á veces una sola curva que satisface á la cuestion, en otras existen dos ó mas curvas que la satisfacen, y en otras no existe curva alguna que satisfaga á las condiciones dadas (a).

Segun esto, una elipse ó una hipérbola está algébricamente determinada, siempre que entre los datos y los cinco coeficientes incógnitos existan cinco ecuaciones distintas. Una parábola está algébricamente determinada, siempre que entre los datos y los cuatro coeficientes incógnitos, é independientes entre sí, existan cuatro ecuaciones distintas. Un círculo está algébricamente determinado, siempre que existan tres ecuaciones distintas entre los datos y los tres coeficientes independientes entre sí, que entran en la ecuacion general del círculo.

Las condiciones á que debe satisfacer una curva pedida pueden ser *simples* ó *dobles*: condicion simple es la condicion de la cual resulta una ecuacion entre los datos y los coeficientes incógnitos de la ecuacion; y condicion doble es la que nos da dos ecuaciones entre las mismas cantidades.

Cada punto que se dé, por el cual ha de pasar la curva pedida, es una condicion simple.

En efecto, si x' é y' son las coordenadas del punto dado, estas coordenadas verificarán la ecuacion [M], y por tanto tendremos $ay'^2+bx'y'+cx'^2+dy'+ex'+1=0$, ecuacion entre los datos x', y y las incógnitas a, b, c....

Cada tangente á la curva pedida que se dé, es tambien una condicion simple: pues igualando las coordenadas entre la ecuacion $y=px+q$ de una recta cualquiera y la [M], y eliminando la y, resulta la ecuacion

(a) Esta distincion, que nosotros introducimos, entre la determinacion algébrica y la determinacion absoluta puede estenderse á toda clase de problemas; y asi, diremos que un problema está *algébricamente determinado* cuando, puesto en ecuacion, da tantas ecuaciones distintas como incógnitas tiene.

$$(ap^2+bp+c)x^2+2(apq+bq+dp+e)x+aq^2+dq+1=0 \ldots [N],$$

cuyas raices son las abscisas de los puntos de interseccion de dicha recta con la curva. Pero si la recta $y=px+q$ ha de ser tangente á la curva, los dos puntos de interseccion deberán reducirse á uno solo, y por tanto los dos valores de x, deducidos de la ecuacion [N], deben ser iguales, y para esto es necesario y suficiente que el primer miembro de la ecuacion [N] sea un cuadrado perfecto; lo que exije que entre los coeficientes de este primer miembro exista la relacion [*Alg.* 143]

$$(ap^2+bp+c)\,(aq^2+dq+1)=(apq+bq+dp+e)^2,$$

ecuacion entre las incógnitas a, b, c, d y e, y los datos p y q.

Si se da el centro, un foco ó un vértice, se tendrá una condicion doble.

En efecto, la posicion y magnitud de la curva depende de los valores que tengan los coeficientes a, b, $c \ldots$, y como de la posicion y magnitud de la curva se deduce la posicion de dichos tres puntos, se infiere que las coordenadas de estos puntos dependen de los coeficientes a, b, $c \ldots$, ó son funciones de estos coeficientes, esto es, siendo x' é y' las coordenadas de cualquiera de dichos puntos,

$$x'=f\,(a,\, b,\, c \ldots),\ y'=f_1\,(a,\, b,\, c \ldots).$$

Como comprobacion de este razonamiento existen [79] dos ecuaciones entre las coordenadas del centro y los coeficientes de la ecuacion de la curva; y seria fácil hallar tambien dos ecuaciones entre las coordenadas de cada foco ó vértice y dichos coeficientes.

Si se da un eje, una directriz ó una asíntota, se tendrá tambien una condicion doble.

En efecto, sea $y=px+q$ la ecuacion de cualquiera de estas rectas: dependiendo la posicion y magnitud de la curva de los coeficientes a, b, $c \ldots$, y dependiendo la posicion de dicha recta de la posicion y magnitud de la curva, se infiere que las cantidades p y q, que determinan la posicion de la recta dada, dependen tambien de los coeficientes a, b, $c \ldots$, ó son funciones de estos coeficientes, esto es,

$$p=f\,(a,\, b \ldots),\ q=f_1\,(a,\, b \ldots).$$

Como comprobacion tenemos las ecuaciones de los ejes y asíntotas [91 y 75] en funcion de los coeficientes de la ecuacion, cuyas ecuaciones identificadas á la $y=px+q$ nos darian fácilmente las dos ecuaciones entre p y q, y coeficientes a, b, c.... Tambien seria fácil hallar la ecuacion de la directriz en funcion de los coeficientes de la ecuacion, y obtener por consiguiente las dos ecuaciones indicadas.

De lo dicho resulta que una elipse ó una hipérbola quedará algébricamente determinada por cinco condiciones simples, por una doble y tres simples, ó por dos dobles y una simple; que una parábola quedará algébricamente determinada por cuatro condiciones simples, por una doble y dos simples, ó por dos dobles; y que un círculo quedará algébricamente determinado por tres condiciones simples, ó por una doble y una simple.

254. Observemos ahora que, dadas algunas condiciones dobles, puede suceder que varias de ellas se deduzcan de las otras dadas por un solo dato cada una; como por su abscisa ó su ordenada si es punto, ó por su coeficiente angular ó lineal si es línea recta: entonces cada una de estas condiciones dobles debe contarse como simple, puesto que no da mas que una ecuacion entre el dato que la determina y los coeficientes a, b, c...., ó en otros términos, una de las dos ecuaciones (que sabemos existen entre sus dos coordenadas y coeficientes incógnitos si es punto, ó entre sus dos coeficientes angular y lineal y los incógnitos si es línea recta) ha de ser consecuencia de las otras ecuaciones. Supongamos, para fijar las ideas, que se den un eje y el centro de la elipse ó hipérbola: es evidente que, dado el eje, el centro queda determinado por su abscisa ó por su ordenada; y que, dado el centro, el eje queda determinado por su coeficiente angular ó lineal; digo que en este caso tendremos solamente tres ecuaciones distintas entre los datos y las incógnitas. Para demostrarlo, sea p el coeficiente angular y q el lineal del eje, x' é y' las coordenadas del centro: ya hemos visto que existen estas ecuaciones

$$p=f\ (a,\ b....),\ y=f_1\ (a,\ b\ ..),$$
$$x'=\varphi\ (a,\ b...),\ y'=\varphi_1\ (a,\ b...):$$

cualquiera de ellas, por ejemplo la última, es consecuencia de las otras tres; pues siendo la ecuacion del eje $y=px+q$, será por consiguiente $y'=px'+q$: sustituyendo en esta ecuacion en lugar de p, q y x' sus valores deducidos de las tres primeras ecuaciones, resultará una nueva ecuacion entre y', a, b...... que debe ser idéntica á la cuarta, pues de otro modo el centro tendria dos ó mas ordenadas: luego esta cuarta ecuacion se deduce de las otras tres, ó es consecuencia de ellas.

Por último, si una condicion doble está determinada en virtud de otras condiciones dadas, no debe contarse para el número de condiciones necesario á la determinacion de la curva; pues dicha condicion no daria ninguna ecuacion distinta de las que dan las otras condiciones. Asi, dados los dos focos y el centro de la elipse ó hipérbola, como cualquiera de estos tres puntos está determinado en virtud de los otros dos, solo tendremos dos condiciones dobles.

255. Esto supuesto, para hallar la ecuacion de una curva que satisfaga á las condiciones suficientes para su determinacion algébrica, se escribirán las ecuaciones entre las coordenadas de los puntos dados y los coeficientes incógnitos, como tambien las ecuaciones entre los coeficientes angular y lineal de las rectas que se den y dichos coeficientes incógnitos; y despejando en seguida estos coeficientes incógnitos, y sustituyendo sus valores en la ecuacion general de la curva, se tendrá la particular de la misma.

Pero este método general daria lugar á cinco ecuaciones con cinco incógnitas en la elipse ó hipérbola, y á cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas en la parábola, ecuaciones muy á menudo de segundo grado; y por tanto su resolucion exigiria un cálculo muy penoso.

Para evitar en lo posible este trabajo, se toma un sistema particular de ejes, tal que la ecuacion, aun desconocida, de la curva tenga con referencia á dicho sistema el menor número posible de coeficientes incógnitos: son *tres* si el orígen es el centro; *dos* si son ejes de coordenadas los mismos ejes de la elipse ó hipérbola; etc. Las condiciones á que debe satisfacer la curva pedida, darán tantas ecuaciones como coeficientes incógnitos tenga su ecuacion, y por tanto el número de ecuaciones, que hay que resolver de este modo, es menor que el número de ecuaciones que resultan por el método general.

Ejemplos.

1.° *Dados tres puntos de una circunferencia de círculo, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 201. Sean A, B y C los tres puntos dados: tomemos uno de ellos, A por ejemplo, por orígen, y por eje de abscisas la recta AB que pasa por dos de los puntos dados, y por eje de ordenadas su perpendicular Oy: sea p la abscisa del punto B, y m, n las coordenadas del punto C.

La ecuacion que se pide del círculo tendrá [35] la forma

$$y^2+x^2+dy+ex+f=0,$$

siendo d, e y f los tres coeficientes incógnitos que tenemos que hallar.

Siendo 0 y 0 las coordenadas del punto A, tendremos por consecuencia $f=0$; y siendo las coordenadas del punto B, p y 0, tendremos la ecuacion $\quad p^2+ep=0$.

Finalmente, siendo m y n las coordenadas del punto C, tendremos la otra ecuacion $\quad n^2+m^2+dn+em=0$.

La primera de estas dos ecuaciones nos da $e=-p$; y por consiguiente de la segunda ecuacion resulta

$$d=\frac{pm-m^2-n^2}{n}.$$

La ecuacion pedida del círculo será por lo tanto

$$y^2+x^2+\frac{pm-m^2-n^2}{n}y-px=0;$$

y ahora seria fácil construir dicho círculo [35].

2.° *Dados cinco puntos de una elipse, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 202. Tomemos por eje de las x la recta PQ que pasa por dos puntos dados, y por eje de las y la recta MN que pasa otros dos de los puntos dados: sean $0,y'$; $0,y''$; $x',0$; $x'',0$; x''',y''' las coordenadas de los puntos M, N, P, Q y R.

Ya sabemos que la ecuacion pedida tendrá la forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy\overset{+ex}{+}1=0,$$

siendo a, b, c, d y e los cinco coeficientes incógnitos.

Por pertenecer á la curva los cinco puntos dados, tendremos las cinco ecuaciones

$$ay'^2+dy'+1=0,\quad ay''^2+dy''+1=0,$$
$$cx'^2+ex'+1=0,\quad cx''^2+ex''+1=0,$$
$$ay'''^2+bx'''y'''+cx'''^2+dy'''+ex'''+1=0$$

De estas cinco ecuaciones de primer grado resultan los cinco valores siguientes de las cinco incógnitas a, b, c, d y e:

$$a=\frac{1}{y'y''},\quad b=-\frac{1}{x'''y'''}\left(\frac{y'''(y'''-y''-y')}{y'y''}+\frac{x'''(x'''-x''-x')}{x'x''}+1\right),$$

$$c=\frac{1}{x'x''},\quad d=-\frac{y'+y''}{y'y''},\quad e=-\frac{x'+x''}{x'x''}.$$

Luego la ecuacion de la elipse pedida será

$$\frac{1}{y'y''}y^2-\frac{1}{x'''y'''}\left(\frac{y'''(y'''-y''-y')}{y'y''}+\frac{x'''(x'''-x''-x')}{x'x''}\right)xy+\frac{1}{x'x''}x^2$$
$$-\frac{y'+y''}{y'y''}y-\frac{x'+x''}{x'x''}x+1=0;$$

y ahora será fácil construir la curva [CAP. IV].

3.° *Dados cuatro puntos de una parábola, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 203. Tomemos por ejes los que indica la figura: sean $0,y'$; $0,y''$; $x',0$; $x'',0$ las coordenadas de los cuatro puntos dados M, N, P y Q.

La ecuacion de la parábola tiene la forma

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+1=0,$$

en la cual $b^2=4ac$, $b=\pm 2\sqrt{ac}$, y por tanto dicha ecuacion es

$$ay^2\pm 2\sqrt{ac}\,.\,xy+cx^2+dy+ex+1=0.$$

Tenemos ahora, por corresponder á la parábola los cuatro puntos dados, las cuatro ecuaciones siguientes:

$$ay'^2+dy'+1=0,\quad ay''^2+dy''+1=0,$$
$$cx'^2+ex'+1=0,\quad cx''^2+ex''+1=0.$$

De ellas resultan

$$a=\frac{1}{y'y''},\quad c=\frac{1}{x'x''},\, d=-\frac{y'+y''}{y'y''},\quad e=-\frac{x'+x''}{x'x''}.$$

Por consiguiente tendremos las dos ecuaciones

$$\frac{1}{y'y''}y^2\pm\frac{2}{\sqrt{x'x''y'y''}}xy+\frac{1}{x'x''}x^2-\frac{y'+y''}{y'y''}y-\frac{x'+x''}{x'x''}x+1=0,$$

$$\text{ó } y^2\pm 2\sqrt{\frac{y'y''}{x'x''}}\,xy+\frac{y'y''}{x'x''}x^2-(y'+y'')y-\frac{(x'+x'')y'y''}{x'x''}x+y'y''=0;$$

ecuaciones que en general podrian representar dos parábolas, una parábola y una variedad de otra, ó solamente dos variedades de dos parábolas; pero como en el problema hemos supuesto que los cuatro puntos corresponden á una parábola, se infiere que estas dos ecuaciones representan dos parábolas; cuya construccion no tiene ya ninguna dificultad.

4.° *Dado el centro y tres puntos de una hipérbola, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 204. Sea O el centro de la hipérbola y M, N, P tres puntos de esta curva: tomemos por ejes de coordenadas las rectas OP y OM; y sean $0,y'$; $x',0$; x'',y'' las coordenadas de los puntos M, P y N. La ecuacion de la hipérbola, estando el orígen de las coordenadas en el centro, es [18]

$$ay^2+bxy+cx^2+1=0,$$

siendo a, b y c las incógnitas de la cuestion.

Para determinar estas tres incógnitas, tenemos las tres ecuaciones $\quad ay'^2+1=0,\ cx'^2+1=0,$

$$ay''^2+bx''y''+cx''^2+1=0.$$

De ellas resultan

$$a=-\frac{1}{y'^2},\ c=-\frac{1}{x'^2},\ b=\frac{x'^2y'^2-x''^2y'^2-y''^2x'^2}{x'^2y'^2x''y''}.$$

Luego la ecuacion de la hipérbola pedida será

$$-\frac{1}{y'^2}\,y^2+\frac{x'^2y'^2-x''^2y'^2-y''^2x'^2}{x'^2y'^2\,x''y''}\,xy-\frac{1}{x'^2}\,x^2+1=0,$$

ó

$$x'^2x''y''\ y^2+(y'^2x''^2+x'^2y''^2-x'^2y'^2)xy+y'^2x''y''\ x^2-x'^2y'^2x''y''=0,$$

cuya construccion no presenta dificultad.

5.º *Dados el centro de una elipse, uno de sus focos y la directriz correspondiente á este foco, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 205. Sea O el centro, F el foco y DR la directriz correspondiente á este foco; conocemos $OF=c$, $OD=\alpha$. La ecuacion de la elipse, con referencia á los ejes rectangulares Ox, Oy, es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

a y b son las incógnitas del problema.

Para hallar estas dos incógnitas, tenemos [113 y 110] las dos ecuaciones

$$\alpha=\frac{a^2}{c},\ b^2=a^2-c^2$$

de las cuales resultan $\quad a^2=\alpha c,\ b^2=(\alpha-c)c;$
y por tanto la ecuacion pedida de la elipse es

$$\frac{x^2}{\alpha c}+\frac{y^2}{(\alpha-c)c}=1.$$

Los semi-ejes mayor y menor de esta elipse son $\sqrt{\alpha c}$ y $\sqrt{(\alpha-c)c}$; y ahora es fácil construir esta curva.

6.° *Dados el centro, una directriz y un punto de la hipérbola, hallar la ecuacion de esta curva.*

Fig. 206. Sea O el centro, RD la directriz y M un punto de la hipérbola: tiremos la perpendicular Ox á la directriz, y tendremos la posicion del eje transversal de la hipérbola. Conocemos la recta $OD=\alpha$ y las coordenadas x', y' del punto M de la curva.

La ecuacion de la hipérbola con referencia á los ejes rectangulares Oy, Ox es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1:$$

a y b son las dos incógnitas del problema.

Para hallar sus valores, tenemos las dos ecuaciones

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,\quad \alpha^2=\frac{a^4}{c^2}=\frac{a^4}{a^2+b^2}.$$

Eliminando b^2 entre estas dos ecuaciones, resulta

$$\alpha^2=\frac{a^4}{a^2+\dfrac{a^2y'^2}{x'^2-a^2}}=\frac{a^2x'^2-a^4}{x'^2-a^2+y'^2},$$

de donde

$$a^2=\frac{\alpha^2+x'^2\pm\sqrt{(x'^2-\alpha^2)^2-4\alpha^2y'^2}}{2},$$

$$b^2=\frac{x'^4-\alpha^2x'^2-2\alpha^2y'^2\pm x'^2\sqrt{(x'^2-\alpha^2)^2-4\alpha^2y'^2}}{2\alpha^2}.$$

Como a^2 y b^2 tienen dos valores, el problema tendrá en general dos soluciones.

7.° *Dados el eje, la directriz y un punto de la parábola, hallar la ecuacion de esta curva.*

La ecuacion de la parábola, tomando por ejes de coordenadas su eje y directriz, es $y^2=2p(x-\frac{1}{2}p)$, siendo p la incógnita de la cuestion propuesta.

Para determinarla, tendremos, por ser x', y' las coordenadas del punto dado, $y'^2=2p(x'-\frac{1}{2}p)$,

de donde $p=x'\pm\sqrt{x'^2-y'^2}$.

Segun este valor, y' debe ser menor que x', ó á lo mas igual á x': si $y'=x'$, será $p=x'$; y por consiguiente no habrá mas que una sóla parábola que satisfaga á la cuestion; pero si $y'<x'$, p tendrá dos valores, y por tanto existirán dos parábolas que satisfarán á la cuestion.

8.° *Dados el centro, un foco y una tangente á la elipse, hallar la ecuacion de esta curva.*

Tomando por ejes de coordenadas los ejes de la elipse prolongados, la ecuacion de la elipse es

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

en la cual a y b son ahora desconocidas.

Sea $y=tx+v$ la ecuacion de la tangente dada: tenemos por datos de este problema la escentricidad c y los dos coeficientes t y v de la ecuacion de la tangente.

Igualando las coordenadas entre la ecuacion de la elipse y la de la recta $y=tx+v$, y eliminando la v, hallaremos

$$(a^2t^2+b^2)x^2+2a^2tvx+a^2(v^2-b^2)=0 \quad [A],$$

cuyas raices son las abscisas de los puntos de interseccion de la recta $y=tx+v$ con la curva. Como ahora la recta $y=tx+v$ es tangente á la elipse, los dos puntos de interseccion deben reducirse á uno solo; y por tanto las dos abscisas de los puntos de interseccion, ó las dos raices de la ecuacion [A], deben ser iguales; y para esto el primer miembro de esta ecuacion debe ser un cuadrado perfecto, ó bien

$$(a^2t^2+b^2)(v^2-b^2)=t^2v^2,$$

ó

$$v^2-a^2t^2-b^2=0,$$

primera ecuacion que contiene á las incógnitas a y b y á los datos v y t. La otra ecuacion es

$$a^2-b^2=c^2.$$

De ellas resultan

$$a^2=\frac{s^2+c^2}{t^2+1},\ b^2=\frac{s^2+t^2c^2}{t^2+1}.$$

Luego la ecuacion de la elipse será

$$\frac{y^2(t^2+1)}{s^2-t^2c^2}+\frac{x^2(t^2+1)}{s^2+c^2}=1.$$

9.° *Dado un arco de curva de segundo grado, averiguar su especie, y prolongar dicho arco.*

1.° Tírense dos cuerdas paralelas, y por sus puntos medios una recta, la cual será un diámetro; y hállese del mismo modo otro diámetro: si estos dos diámetros se cortan, su punto de interseccion será el centro; y el arco pertenecerá á una elipse, si el centro está situado dentro de la concavidad de dicho arco, y pertenecerá á una hipérbola si el centro está situado fuera de la concavidad de su arco. Si los dos diámetros fuesen paralelos, el arco perteneceria á una parábola.

2.º Supongamos que el arco pertenezca á una elipse.

Fig. 207. Por la construccion, para determinar su especie, conocemos un semidiámetro $AO=a'$; tirando por el centro la paralela BD á las cuerdas MN y PQ, se tendrá la direccion del diámetro conjugado del AO: si esta paralela encuentra al arco en un punto B, será OB el semidiámetro conjugado del AO. Pero si la paralela BD no encuentra al arco dado, se hallará el valor del semidiámetro b', conjugado del a', del modo siguiente:

La ecuacion de la elipse con respecto á los diámetros conjugados Ox, Oy es

$$a'^2\, y^2 + b'^2\, x^2 = a'^2\, b'^2:$$

sean x', y' las coordenadas del punto M, tendremos

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x'^2 = a'^2 b'^2,$$

de donde $$b'^2 = \frac{a'^2 y'^2}{a'^2 - x'^2},\quad b' = \frac{a' y'}{\sqrt{a'^2 - x'^2}},$$

espresion fácil de construir. Conociendo dos semidiámetros conjugados y el ángulo que forman, se puede construir la elipse [143].

Si el arco dado pertenece á una hipérbola, por la construccion hecha para determinar su especie, se tendrá un semidiámetro, y su conjugado se obtendrá en seguida por la fórmula

$b' = \dfrac{a'y'}{\sqrt{x'^2 - a'^2}}$, que se halla del mismo modo que su análoga en la elipse. Conociendo dos diámetros conjugados de la hipérbola, se construye fácilmente esta curva [191].

Finalmente, si el arco dado pertenece á una parábola, por la construccion, para determinar su especie, conoceremos un diámetro; la paralela á las cuerdas bisecadas por él, tirada por el punto en que corta á la curva, será la tangente; con cuyos datos es fácil construir la parábola [215 y 216.]

GEOMETRIA ANALITICA

DEL ESPACIO.

LIBRO I.

Ecuaciones de las superficies y líneas.

CAPITULO I.

Determinacion de un punto del espacio.

256. *Determinar la posicion de un punto del espacio con respecto á tres planos que se cortan dos á dos.*

Para la resolucion de este problema conviene anteponer las nociones preliminares siguientes.

Fig. 1. Sean Oxy, Oxz, Oyz los tres planos con respecto á los cuales se trata de determinar un punto cualquiera del espacio. Estos tres planos indefinidos forman los ocho ángulos triedros $Oxyz$, Ox_1yz, Oxy_1z, Ox_1y_1z, $Oxyz_1$, Ox_1yz_1, Oxy_1z_1, $Ox_1y_1z_1$. Señalemos en uno de estos triedros, por ejemplo en el $Oxyz$, un punto M, y tiremos desde él las rectas MP, MQ, MR respectivamente paralelas á los ejes Ox, Oy, Oz, y por dichas tres paralelas hagamos pasar los tres planos MPQ, MPR, MQR, los cuales serán paralelos á los Oxy, Oxz, Oyz, y formarán por lo tanto con estos un paralelepípedo OM. Los tres planos indefinidos Oxy, Oxz, Oyz, con respecto á los cuales se determinan los puntos, se llaman *planos coordenados*. Por abreviar, los llamaremos *plano* xy, *plano* xz, y *plano* yz.

La *ordenada* x de un punto M es la paralela MP al eje Ox tirada desde dicho punto hasta el plano opuesto yz. La ordenada y de un punto M es la paralela MQ al eje Oy tirada desde dicho punto hasta el plano opuesto xz. La ordenada z

de un punto M es la paralela MR al eje Oz tirada desde dicho punto hasta el plano opuesto xy.

Siendo iguales las cuatro aristas MP, OA, QC y RB del paralelepípedo OM, cualquiera de ellas será la ordenada x del punto M; comunmente suele considerarse como tal la OA. Siendo iguales las cuatro aristas MQ, PC, BO y RA, cualquiera de ellas es la ordenada y del punto M; pero por lo comun suele tomarse como tal la RA: y siendo iguales las cuatro aristas MR, QA, CO y PB, cualquiera de ellas es la ordenada z del punto M; ordinariamente suele tomarse por ordenada z la MR. Las tres ordenadas x, y, z de un punto se llaman *coordenadas* de dicho punto.

Por iguales razones que en la geometría plana [19] consideraremos como positivas á las coordenadas de los puntos comprendidos dentro del triedro $Oxyz$, y como negativas á las que tengan posicion contraria. Así, las ordenadas x tomadas en el sentido Ox son positivas, y si se toman en el sentido Ox_1 irán precedidas del signo —: las ordenadas y tomadas en el sentido Oy serán positivas, y las tomadas en el sentido Oy_1 negativas: las ordenadas z tomadas en el sentido Oz son positivas, y las tomadas en el sentido Oz_1 negativas. En virtud de este convenio las ecuaciones halladas para los casos mas fáciles serán generales.

Esto supuesto, *un punto queda determinado en el espacio, con respecto á tres planos coordenados, conociendo sus tres coordenadas.*

En efecto, las coordenadas x é y del punto pedido nos dan el pié de la ordenada z de dicho punto, ó la proyeccion (a) del mismo punto: tirando por esta proyeccion una paralela al eje Oz, y tomando sobre ella una parte igual á la ordenada z del punto pedido, se tendrá este punto; y como otro punto diferente del asi hallado ha de tener por lo menos una de las tres

---

(a) *Proyeccion* de un punto sobre uno de los planos coordenados es el punto en que corta á este plano la ordenada correspondiente de dicho punto. Segun esta definicion, cuando los planos coordenados son perpendiculares entre sí, que es lo mas comun, la proyeccion de un punto sobre uno de los planos coordenados es el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano

Proyeccion de una línea sobre uno de los planos coordenados es la línea formada en dicho plano por las proyecciones de los diferentes puntos de la línea dada coordenadas diferentes de las del primero, se infiere que no hay mas que un solo punto que tenga tres coordenadas dadas, ó bien que un punto queda determinado conociendo sus tres coordenadas

257 Observemos ahora que un punto M y su proyeccion R sobre el plano xy tienen las mismas coordenadas x é y, que un punto M y su proyeccion Q sobre el plano xz tienen las mismas coordenadas x y z, y que un punto M y su proyeccion P sobre el plano yz tienen las mismas coordenadas y y z.

258. Si los tres ejes son perpendiculares entre sí, los llamaremos ejes *rectangulares*, y en el caso contrario ejes *oblicuángulos*. Cuando los ejes son rectangulares, las coordenadas de un punto son las distancias del punto á los tres planos coordenados, precedidas del signo conveniente.

CAPITULO II.

Representacion geométrica de las ecuaciones, y algébrica de las superficies y líneas del espacio.

259. La ecuacion $x=a$ representa un plano paralelo al yz; pues todos los puntos de dicho plano tienen la misma ordenada x, que en este caso es a.

La ecuacion $y=b$ representa un plano paralelo al xz; pues todos los puntos de dicho plano tienen la misma ordenada y, que en este caso es b.

La ecuacion $z=c$ representa un plano paralelo al xy; pues todos sus puntos tienen la misma ordenada z, que en este caso es c.

Por consiguiente $x=0$ es la ecuacion del plano yz, $y=0$ la del plano xz, y $z=0$ la del plano xy

260. *Fig.* 2. *Una ecuacion* $f(x,y)=0$, *que representa en el plano* xy *una curva* CAB [48], *representa en el espacio una superficie cilíndrica* NMPCAB, *cuya base en el plano* xy *es dicha curva, y cuya generatriz* AM *es paralela al eje* Oz.

En efecto, cualquier punto M de dicha superficie cilíndrica tiene las mismas coordenadas x é y que su proyeccion A; y como las coordenadas de la proyeccion A, por corresponder este punto á la curva CAB, están ligadas por la ecuacion dada, se infiere que la x y la y de un punto cualquiera M de la superficie cilíndrica están ligadas tambien por la misma ecuacion: tenemos, pues, que la ecuacion $f(x,y)=0$ es la relacion constante entre la x y la y de un punto cualquiera de la superficie $NMPCAB$; luego dicha ecuacion $f(x,y)=0$ es la ecuacion de la superficie (a).

El mismo razonamiento prueba que si la ecuacion $f(x,z)=0$ representa una curva en el plano xz, representa en el espacio un cilindro paralelo al eje Oy, y cuya base es dicha curva; y que si la ecuacion $f(y,z)=0$ representa en el plano yz una curva, la misma ecuacion representa en el espacio un cilindro paralelo al eje Ox, y cuya base es dicha curva.

NOTA. Si los ejes son rectangulares, el cilindro representado por una ecuacion de dos variables, es perpendicular al plano determinado por estas dos variables.

261. Del mismo modo se demuestra que la ecuacion $y=ax+b$ representa un plano paralelo al eje Oz, cuya base es la recta representada por la misma ecuacion; que la ecuacion $x=a'z+b'$ representa un plano paralelo al eje Oy, cuya base es la recta representada por la misma ecuacion; y que la ecuacion $y=a''z+b''$ representa un plano paralelo al eje Ox, cuya base es la recta representada por la misma ecuacion.

NOTA. Estos tres planos serán respectivamente perpendiculares á los xy, xz, yz, si los ejes son rectangulares.

262. El plano que pasa por una recta, y es paralelo á uno de los ejes, se llama plano *proyectante* de dicha recta, y su interseccion con el plano coordenado es la *proyeccion* de la recta sobre este plano; y el cilindro que pasa por una curva y es paralelo á uno de los ejes, se llama cilindro *proyectante* de dicha curva, y su base es la *proyeccion* de la curva.

Por lo tanto podemos tambien decir que *la ecuacion de un plano proyectante de una recta, ó de un cilindro proyectante de una curva, es la misma que la ecuacion de la proyeccion de la línea*.

263. Veamos ahora lo que representa una ecuacion con tres variables $f(x,y,z)=0$.

Fig. 3. Demos á una de las variables, á z por ejemplo, un valor $OC=c$ conveniente para que la ecuacion $f(x,y,c)=0$,

(a) Para abreviar, llamaremos en adelante *cilindro* á la superficie cilíndrica.

en que se convierte en tal caso la ecuacion propuesta, represente en el plano xy una línea [48]: tiremos por él punto C un plano MCN paralelo al xy, y sea MN una curva idéntica á la que en el plano xy representa la ecuacion $f(x,y,c)=0$. Demos en seguida á la misma variable z otro valor $OC'=c'$, que se diferencie de c en tan poco como nos convenga, y tiremos por el punto C' un plano $M'C'N'$ paralelo al xy; y sea $M'N'$ una curva idéntica á la que en el plano xy representa la ecuacion $f(x,y,c')=0$. Continuando del mismo modo, podremos obtener en el espacio tantas líneas como queramos, tan próximas entre sí como nos acomode: todas estas líneas formarán por lo tanto una superficie, tal que las coordenadas de cualquiera de sus puntos estarán ligadas por la relacion $f(x,y,z)=0$. Para demostrarlo, llamemos x',y',c á las coordenadas de un punto cualquiera P de la superficie: este punto corresponde á una curva MN, cuya proyeccion sobre el plano xy tiene por ecuacion $f(x,y,c)=0$; las coordenadas x' é y' del punto P son las mismas que las de su proyeccion Q; y como la ecuacion de la proyeccion de la curva MN, sobre el plano xy, es $f(x,y,c)=0$, tendremos para las coordenadas x', y' del punto P la relacion $f(x',y',c)=0$: luego las coordenadas de un punto cualquiera $P(x',y',c)$ de la superficie verifican la ecuacion $f(x,y,z)=0$.

Queda pues demostrado, que *á toda ecuacion con tres variables corresponde* (prescindiendo de los casos de escepcion que mas adelante indicaremos) *una superficie*.

264. *De la ecuacion de una superficie deducir la forma de dicha superficie.*

Para hallar la interseccion de dos superficies, cuyas ecuaciones se conocen, se igualarán las coordenadas de ambas ecuaciones, y la coexistencia ó simultaneidad de estas ecuaciones representará la interseccion de las dos superficies.

Supongamos que una de estas dos superficies sea la representada por la ecuacion $f(x,y,z)=0$, y la otra sea un plano paralelo á uno de los coordenados, por ejemplo al xy: deberemos combinar las dos ecuaciones $f(x,y,z)=0$, $z=c$ de la superficie y plano. Eliminando la z entre estas dos ecuaciones, la ecuacion $f(x,y,c)=0$ que resulta, será la ecuacion de la proyeccion de la curva interseccion sobre el plano xy: porque coexistiendo las dos ecuaciones $f(x,y,z)=0$, $z=c$, las coordenadas x, y, z corresponden á la interseccion del plano con la superficie; luego la ecuacion $f(x,y,c)=0$ es la relacion constante entre las coordenadas x é y de todos los puntos de la interseccion: mas cada punto de la curva y cada punto correspondiente de la proyeccion tienen la misma ordenada x y la misma ordenada y; luego las coordenadas x é y de cualquiera de los puntos de la proyeccion están tambien ligadas por la relacion $f(x,y,c)=0$, ó lo que es igual, esta relacion es la ecuacion de la proyeccion.

Por consiguiente, construyendo esta proyeccion, tendremos una curva idéntica á la interseccion de la superficie con el plano, por ser este plano paralelo al plano xy.

Igualmente, para hallar la curva interseccion de un plano $y=b$ paralelo al xz con una superficie $f(x,y,z)=0$, no hay mas que eliminar la y entre las dos ecuaciones; y la ecuacion $f(x,b,z)=0$ que resulta, es la de la proyeccion de la curva en el plano xz, proyeccion que es idéntica á la curva.

Por último, para hallar la curva interseccion de una superficie $f(x,y,z)=0$ con un plano $x=a$ paralelo al yz, se eliminará la x, y la ecuacion $f(a,y,z)=0$ será la de la proyeccion de la curva en el plano yz, proyeccion idéntica á la interseccion.

Esto supuesto, dada la ecuacion de una superficie, podremos llegar á conocer la forma de esta superficie: pues si hallamos las intersecciones de dicha superficie con varios planos paralelos á los coordenados, las distancias que hay desde los planos secantes á los coordenados, y la forma de las respectivas intersecciones, manifestarán la forma de dicha superficie.

265. DETERMINACION DE LAS LÍNEAS EN EL ESPACIO.

Fig. 4. *Una línea recta* AB *queda determinada en el espacio conociendo dos de sus tres proyecciones* PQ, RS *y* TV *sobre los planos coordenados.*

En efecto, si por ejemplo se dan las dos proyecciones PQ y RS sobre los dos planos xz, yz, construyendo los planos proyectantes respectivos $PQAB$ y $RSAB$, su interseccion AB será la recta pedida.

Tomando por eje comun de *abscisas* el eje Oz, y por ejes de *ordenadas* el Ox en el plano xz, y el Oy en el yz, las ecuaciones de las dos proyecciones PQ y RS, ó de los planos proyectantes $PQAB$ y $RSAB$, serán $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, teniendo z en las dos el mismo valor. Estas dos ecuaciones determinan la recta AB del espacio; y por esta razon las llamaremos las *ecuaciones de la recta*.

Observemos que en la ecuacion $x=az+\alpha$, a es el coeficiente angular de la proyeccion PQ, y α es la ordenada x del punto L en que dicha proyeccion PQ corta al eje Ox; y en la ecuacion $y=bz+6$, b es el coeficiente angular de la proyeccion RS, y 6 es la ordenada y del punto K en que la proyeccion RS corta el eje Oy. Si los ejes son rectangulares, los coeficientes a y b son las tangentes de los ángulos QMz y SNz.

266 De las ecuaciones $x=az+\alpha$, $y=bz+6$ de las dos proyecciones PQ y RS de la recta AB, ó de los dos planos proyectantes $PQAB$ y $RSAB$, puede deducirse la ecuacion de la tercera proyeccion TU, ó del tercer plano proyectante $TUAB$.

En efecto, coexistiendo las dos ecuaciones $x=az+\alpha$, $y=bz+6$, las coordenadas x, y, z son las de un punto cualquiera de la recta AB; luego si entre estas dos ecuaciones eliminamos la z, la ecuacion $y=6+\frac{b}{a}(x-\alpha)$ que resulta, es la relacion constante entre las coordenadas x é y de un punto cualquiera de la recta AB: mas cada punto A de la recta AB y su proyeccion T sobre el plano xy tienen las mismas coordenadas; luego la relacion $y=6+\frac{b}{a}(x-\alpha)$ liga á las coordenadas x é y de un punto cualquiera de la proyeccion TU, ó lo que es igual, dicha relacion es la ecuacion de la proyeccion TU, ó del plano proyectante $TUAB$.

267. Si la recta pasa por el orígen, sus proyecciones pasan por el mismo punto; y como las ecuaciones de estas proyecciones sobre los planos xz, yz son $x=az$, $y=bz$, se infiere que estas dos ecuaciones son las de dicha recta.

268. *Fig.* 5. Supongamos que una recta AB sea paralela á uno de los planos coordenados, por ejemplo al xy; sea B el punto en que dicha recta encuentra al plano yz. Desde un punto cualquiera A de la recta AB tiremos una paralela AD al eje Oy: el plano BAD, que pasa por las dos rectas AB y AD, paralelas al plano xy, será paralelo á este plano.

Las proyecciones de la recta AB sobre los dos planos xz é yz, que son las rectas CD y CB, serán paralelas á los ejes Ox, Oy, y se hallarán en un mismo plano proyectante $ABCD$; luego dichas dos proyecciones no son suficientes para determinar la recta AB. En este caso, para que la recta AB quede determinada, es menester conocer, además, su proyeccion $A'B'$: esta proyeccion y cualquiera de las otras dos determinarán la recta AB, como interseccion de los planos proyectantes $ABCD$ y $ABB'A'$. Siendo la ecuacion de la proyeccion CD, ó de la CB, $z=p$, y la de la proyeccion $A'B'$ $y=cx+\gamma$, estas dos ecuaciones determinarán la recta AB, y serán por lo tanto las ecuaciones de dicha recta.

En general, una recta paralela á uno de los planos coordenados queda determinada por su proyeccion sobre este plano y por cualquiera de las otras dos proyecciones.

Asi, las ecuaciones de una recta praralela al plano xz serán $x=az+\alpha$, $y=q$; y las de una recta paralela al plano yz serán $y=bz+\beta$, $x=r$.

Supongamos ahora que cada una de estas rectas paralelas á los planos coordenados llegue á coincidir con el plano á que es paralela; sus ecuaciones respectivas serán: las de la recta que se halla en el plano xy,

$$y=cx+\gamma,\quad z=0;$$

las de la recta que coincide con el plano xz,

$$x=az+\alpha,\quad y=0;$$

y las de la recta que se halla en el plano yz,

$$y=bz+\beta,\quad x=0$$

269. *Fig.* 6. Una línea curva AB queda determinada en el espacio del mismo modo que una línea recta, esto es, por medio de dos de sus tres proyecciones PQ, RS, TU sobre los planos coordenados; pues construyendo los dos cilindros proyectantes respectivos, la interseccion de estas dos superficies será la curva pedida.

Si tomamos por proyecciones de la curva las PQ y RS sobre los planos xz é yz, las ecuaciones

$$f(x,z)=0,\quad f_1(y,z)=0$$

de estas dos proyecciones, ó de los dos cilindros proyectantes respectivos $PQAB$ y $RSAB$, determinarán la curva AB, y por lo mismo dichas dos ecuaciones se llaman las *ecuaciones de la curva.*

270. *Fig.* 6. *Dadas las ecuaciones simultáneas* $f(x,z)=0$, $f_1(y,z)=0$ *de las dos proyecciones* PQ *y* RS *de la curva* AB *sobre los planos* xz, yz, *se hallará la ecuacion de la tercera proyec-*

cion TU, *ó del tercer cilindro proyectante* TUAB, *eliminando la* z *entre dichas dos ecuaciones*.

En efecto, sea $f_2(x,y)=0$ la ecuacion final que resulte de la eliminacion: esta ecuacion nos dá, en primer lugar, la relacion que hay entre las coordenadas x é y de los diferentes puntos de la curva; mas las coordenadas x é y de un punto cualquiera M de esta curva son las mismas que las coordenadas x é y del punto correspondiente N de la proyeccion; luego tambien las coordenadas x é y de un punto cualquiera N de la proyeccion están ligadas por la ecuacion $f_2(x,y)=0$, ó lo que es igual, la ecuacion $f_2(x,y)=0$ es la ecuacion de la proyeccion TU de la curva AB sobre el plano xy.

271. Las curvas del espacio pueden ser planas ó de doble curvatura: las primeras son las que tienen todos sus puntos en un mismo plano, y las segundas las que no tienen todos sus puntos en un mismo plano.

272. Si una curva plana es paralela á uno de los planos coordenados, por ejemplo, al plano xy, sus dos proyecciones sobre los otros dos planos serán dos líneas rectas paralelas al mismo plano xy: pues siendo el plano, en que se halla la curva, paralelo al xy, si imaginamos que el plano de la curva se prolongue hasta encontrar á los xz, yz, sus intersecciones con estos dos planos, que serán paralelas á Ox y Oy, serán las proyecciones de la curva sobre los mismos planos. Por consiguiente, para que la curva quede determinada en este caso, es menester conocer su proyeccion sobre el plano xy, además de cualquiera de las otras dos proyecciones rectilíneas.

En general, para determinar una curva paralela á uno de los planos coordenados, es menester conocer su proyeccion sobre este plano y una cualquiera de las otras dos proyecciones rectilíneas.

Segun esto, las ecuaciones de una curva paralela al plano xy serán

$$f(x,y)=0\,,\quad z=p\,;$$

las de una curva paralela al plano xz serán

$$f_1(x,z)=0\,,\quad y=q;$$

y las de una curva paralela al plano yz serán

$$f_2(y,z)=0,\quad x=r.$$

Si la curva se halla en el plano xy, sus ecuaciones serán

$$f(x,y)=0,\quad z=0;$$

si se halla en el plano xz, serán

$$f_1(x,z)=0\,,\ y=0;$$

y si se halla en el plano yz,

$$f_2(y,z)=0,\ x=0.$$

273. Si la línea recta ó curva se dá por medio de dos superficies cualesquiera, cuya interseccion sea dicha línea, se reducirá este caso al anterior, en que se conocen sus proyecciones, del modo siguiente.

Sean

$$f(x,y,z)=0\,,\ f_1(x,y,z)=0$$

las ecuaciones de las dos superficies que contienen á la línea: eliminando la x entre estas dos ecuaciones, la ecuacion

$$\varphi(y,z)=0$$

que resulte, será de la proyeccion de la línea sobre el plano yz: pues coexistiendo las dos ecuaciones propuestas, las variables x,y,z representan las coordenadas de los diferentes puntos de la línea interseccion. Luego la ecuacion $\varphi(y,z)=0$ nos dá la relacion constante que hay entre las coordenadas y,z de un punto cualquiera de la línea interseccion; mas como las coordenadas y,z de un punto cualquiera de dicha línea son idénticas á las coordenadas y,z del punto correspondiente de la proyeccion de la línea sobre el plano yz, se infiere que las coordenadas y,z de un punto cualquiera de la proyeccion de la línea sobre el plano yz están ligadas por la relacion $\varphi(y,z)=0$, ó lo que es igual, $\varphi(y,z)=0$ es la ecuacion de dicha proyeccion.

Igualmente, eliminando la y entre las dos ecuaciones propuestas, la ecuacion $\varphi_1(x,z)=0$ que resulte, es la ecuacion de la proyeccion de la línea interseccion sobre el plano xz; y eliminando la z entre dichas dos ecuaciones, la ecuacion $\varphi_2(x,y)=0$ que resulte, es la ecuacion de la proyeccion de la curva sobre el plano xy.

CAPITULO III.

Problemas sobre la línea recta

---

274. 1.º *Hallar las ecuaciones de una recta, conociendo las coordenadas* x′, y′, z′ *de un punto por donde pasa y su direc-*

cion, es decir, los ángulos que sus dos proyecciones verticales forman con el eje Oz.

Pasando la recta por el punto (x',y',z'), la proyeccion de dicha recta sobre el plano xz pasará por el punto (x',z'), proyeccion del punto (x',y',z') sobre este plano; y la proyeccion de la recta sobre el plano yz pasará por el punto (y',z'), proyeccion del punto (x',y',z') sobre este plano. Por consiguiente las ecuaciones de las proyecciones de la recta sobre los planos xz é yz, ó sean las ecuaciones de la recta, serán, llamando a y b á los coeficientes angulares de las dos proyecciones,

$$x-x'=a\,(z-z'),\ y-y'=b\,(z-z').$$

2.° *Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados* (x',y',z'), (x'',y'',z'').

Pasando la recta por los dos puntos (x',y',z'), (x'',y'',z''), la proyeccion de dicha recta sobre el plano xz pasará por los puntos (x',z'), (x'',z''), proyecciones sobre este plano de los dos puntos dados; y la proyeccion de la misma recta sobre el plano yz pasará por los puntos (y',z'), (y'',z''), proyecciones sobre este plano de los dos puntos dados: luego las ecuaciones de las proyecciones de la recta sobre los dos planos xz, yz, ó sean las ecuaciones de la recta, serán

$$x-x'=\frac{x''-x'}{z''-z'}\ (z-z'),\ y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z')$$

3.° *Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por un punto dado y es paralela á una recta dada.*

Siendo la recta, cuya ecuacion se pide, paralela á la recta dada, sus proyecciones serán tambien paralelas á las de esta recta, y por tanto este problema se reduce al 1.°

4.° *Hallar la relacion que debe existir entre los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas, para que estas se corten en el espacio; y verificándose dicha relacion, hallar las coordenadas del punto de interseccion de las dos rectas.*

Sean $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ las ecuaciones de una de las dos rectas dadas, $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$ las de la otra.

Igualando coordenadas, las incógnitas x, y, z representarán las coordenadas del punto de interseccion: pero como tenemos cuatro ecuaciones con tres incógnitas, eliminadas estas, llegaremos á una ecuacion de condicion, necesaria para que las cuatro ecuaciones de las dos rectas se verifiquen por valores iguales de las variables, ó lo que es igual, para que las dos rectas se corten. Esta ecuacion de condicion hallaremos brevemente igualando los dos valores de x, y los dos de y; y eliminando en seguida la z: tendremos

$az+\alpha=a'z+\alpha'$, ó $(a-a')\,z=\alpha'-\alpha$, $bz+\beta=b'z+\beta'$, ó $(b-b')\,z=\beta'-\beta$. Para eliminar ahora la z, divido ordenadamente estas dos ecuaciones, y resultará la ecuacion de condicion

$$\frac{a-a'}{b-b'}=\frac{\alpha-\alpha'}{\beta-\beta'}$$

Supongamos que se verifique esta ecuacion, ó lo que es igual, que las dos rectas se corten, y hallemos las coordenadas del punto de interseccion: tendremos fácilmente

$$z=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'}=\frac{\beta'-\beta}{b-b'},\ y=\frac{b\beta'-b'\beta}{b-b'},\ x=\frac{a\alpha'-a'\alpha}{a-a'}.$$

Si las rectas son paralelas, es $a=a'$, $b=b'$ [*Geom. teorema* 126]. La ecuacion de condicion se verifica; pero los valores de las coordenadas del punto de interseccion son infinitas; es decir, que las rectas se cortan en el infinito.

5.º *Hallar la espresion de la distancia de dos puntos en funcion de las coordenadas de dichos puntos, siendo los ejes rectangulares.*

Fig. 7. Sean los dos puntos dados $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$; llamemos δ á la distancia MM'. Bajemos desde los puntos M y M' las perpendiculares $MP=z$, $M'P'=z'$ al plano xy; juntemos los puntos P y P', y tiremos además la $M'Q$ paralela á la PP'.

El triángulo rectángulo MQM' nos da

$$MM'^2=M'Q^2+MQ^2,$$

ó

$$\delta^2=PP'^2+(z-z')^2:$$

sabemos que las coordenadas del punto P son x é y, y las del punto P' x' é y' [257], y por tanto [57]

$$PP'^2=(x-x')^2+(y-y')^2;$$

luego

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

ó

$$\delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

fórmula siempre cierta, cualquiera que sea la posicion de los puntos M y M' [256].

Si uno de los puntos, por ejemplo el punto M', es el orígen, sus coordenadas serán ceros, esto es, $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$; y por consiguiente el valor de δ^2 será entonces

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

fórmula fácil de hallar directamente.

6.° *Hallar el ángulo que forman dos rectas dadas en el espacio, siendo ractangulares los ejes.*

Fig. 8. Ya se sabe que dos rectas pueden no cortarse en el espacio, y no ser paralelas: si por el orígen tiramos dos paralelas á dichas rectas, el ángulo que formen estas paralelas, será igual al ángulo de los dos rectas dadas, aun cuando estas no se corten en el espacio [*Geom. elem.* 52] Sean $x=az$, $y=bz$; $x=a'z$, $y=b'z$ las ecuaciones de las dos rectas OD y OD' paralelas á las dos rectas dadas. Tomemos sobre ellas, por la parte superior del plano xy, las porciones OM y OM' iguales á 1, y tiremos la recta MM'.

Sean x, y, z las coordenadas del punto M, x', y', z' las del punto M': z y z' serán positivas, pero las otras coordenadas podrán tener signos cualesquiera. Los datos de este problema son las tangentes trigonométricas a y b, a' y b', y la incógnita es el ángulo DOD', al cual, por abreviar, llamaremos U. Si llegamos á conocer el lado MM', conoceremos los tres lados del triángulo MOM', y por tanto será fácil hallar en seguida el ángulo U. Hallemos en primer lugar las coordenadas x, y, z del punto M y las x', y', z' del M': para esto tenemos, por corresponder estos puntos á las rectas OD y OD', las ecuaciones

$$x=az,\quad y=bz;$$
$$x'=a'z',\quad y'=b'z':$$

y además las dos ecuaciones que nos da el problema anterior,

$$x^2+y^2+z^2=1,$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Sustituyendo en la primera de estas dos últimas ecuaciones los valores de x é y, y en la segunda los de x' é y', y observando que z y z' son positivas, tendremos

$$z=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$
$$z'=\frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},\quad x'=\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},\quad y'=\frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Ya que conocemos las coordenadas de los puntos M y M', tendremos $MM'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, ó efectuando y reduciendo,

$$MM'^2=2-2(xx'+yy'+zz');$$

y asi queda conocido tambien el lado MM'.

Ahora que conocemos los tres lados del triángulo MOM', el teorema general de la trigonometría rectilínea nos da

$$MM'^2=2-2\cos U,$$

de donde $$\cos U=\frac{2-MM'^2}{2},$$

y sustituyendo en esta espresion el valor de MM'^2, será

$$\cos U=xx'+yy'+zz'.$$

Sustituyendo por último en esta fórmula los valores de $x, y, z; x', y', z'$ en funcion de los datos a, b, a', b', será

$$\cos U=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

fórmula en la cual los radicales son positivos, y que nos da el ángulo DOD' que forman las partes de las rectas OD, OD' superiores al plano xy; cuyo ángulo podrá ser agudo, recto ú obtuso, segun los signos y valores de las tangentes trigonométricas a, b, a', b'.

NOTAS. 1.ª Si las dos rectas dadas forman ángulo recto, será $\cos U=0$, y por consiguiente $aa'+bb'+1=0$ será la relacion que se verificará si las dos rectas forman ángulo recto; y al contrario, si esta relacion se verifica, será $\cos U=0$, ó $U=90^\circ$, es decir, que las dos rectas formarán ángulo recto: pero no se cortarán si no se verifica al mismo tiempo la ecuacion

$$\frac{\alpha-\alpha'}{6-6'}=\frac{a-a'}{b-b'}.$$

2.ª Si las dos rectas fuesen paralelas, seria $U=0$, $\cos U=1$; y por consiguiente

$$(aa'+bb'+1)^2=(a^2+b^2+1)(a'^2+b'^2+1):$$

simplificando esta ecuacion, resulta

$$(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-ba')^2=0;$$

y como la suma de estas tres cantidades positivas no puede ser 0, á no serlo cada una de dichas cantidades, se infiere que

$$a=a',\ b=b',\ ab'=ba'.$$

Esta tercera ecuacion es consecuencia de las dos primeras, y por tanto siempre que dos rectas sean paralelas, tendremos las relaciones

$$a=a',\ b=b';$$

lo que sabíamos ya [*Geom. elem. teor.* 126].

Al contrario, si se verifican las dos ecuaciones

$$a=a',\ b=b',$$

será $\cos U=\dfrac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2+1}=1$, y por tanto $U=0$, esto es, que las rectas serán paralelas; lo que es fácil demostrar geométricamente.

7.° *Hallar los ángulos que una recta dada forma con los tres ejes rectangulares.*

Fig. 9. Este problema es un caso particular del anterior, pues se reduce á hallar los ángulos que una recta OD, que pasa por el orígen y es paralela á la recta dada, forma con el eje Ox, con el Oy y con el Oz.

Resolveremos este caso particular primeramente del mismo modo que el general, y despues por un razonamiento particular no incluido en el general [*núm.* 34, *nota*].

Tomemos $OM=1$, y hallemos en primer lugar las coordenadas x, y, z del punto M: suponemos que la z es positiva.

Sean $x=az$, $y=bz$ las ecuaciones de la recta OD; tendremos entre las coordenadas x,y,z del punto M las relaciones $x=az$, $y=bz$, y además $x^2+y^2+z^2=1$. De estas ecuaciones resultan

$$x=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ y=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ z=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

Para hallar el ángulo $DOx=\alpha$, tomo $OP=1$, y serán 1,0,0 las coordenadas del punto P: por consiguiente

$$MP^2=(x-1)^2+y^2+z^2,$$

ó

$$MP^2=2-2x:$$

y el triángulo MOP nos da tambien

$$MP^2=2-2\cos\alpha;$$

luego $$\cos\alpha = x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

Del mismo modo se obtiene, llamando β al ángulo DOy, y γ al DOz,

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

NOTA. Obsérvese que α, β y γ son los ángulos que forma con los tres ejes en el sentido positivo la recta OD situada por la parte de arriba del plano xy, ó lo que es igual, que γ es un ángulo agudo.

Para resolver este problema por un método particular, no incluido en el general, tomaremos $OM=1$, y señalaremos las tres coordenadas $MR=z$, $RP=y$, $OP=x$ del punto M: tirando las rectas MP y MQ, estas serán perpendiculares á las Ox y Oy.

Los triángulos rectángulos MOP, MOQ y MOR nos darán $x=\cos\alpha$, $y=\cos\beta$, $z=\cos\gamma$; y como los valores de x,y,z, se halla que son

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ y=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ z=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

tendremos por último

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Corolario. *La suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos que una recta forma con los tres ejes rectangulares es igual á la unidad.*

En efecto, elevando al cuadrado las fórmulas anteriores, y sumándolas en seguida, resulta

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1;$$

fórmula que sirve para hallar uno de estos tres ángulos, conociendo los otros dos.

Demostremos que este problema tiene dos soluciones.

Supongamos, por ejemplo, que se conozcan los dos ángulos α y β, y que se quiera hallar el ángulo γ: tendremos

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}:$$

es decir, que el ángulo γ tiene dos valores suplementarios.

Fig. 10. Es fácil demostrar geométricamente que, dados los dos ángulos α y β, existen dos rectas simétricamente colocadas respecto del plano xy, y que forman con el eje Oz en el sentido positivo dos ángulos suplementarios.

En efecto, sea OM una recta, tal que los ángulos MOx, MOy y MOZ sean α, β, γ: bajemos desde un punto M de la OM una perpendicular MP al plano xy, y tomemos en su prolongacion la parte $PM'=PM$, y tiremos la OM', simétrica de la OM: digo que OM' forma con los ejes Ox, Oy, Oz los ángulos α, β y $180^0-\gamma$.

Tiremos la PQ perpendicular á lo OX, y las rectas MQ y $M'Q$, y tendremos que OM y OM' serán iguales por ser oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular OP á la MM': tambien MQ y $M'Q$ son iguales, porque se apartan igualmente de la perpendicular QP á la MM'; luego son iguales los dos triángulos MOQ y $M'OQ$, cuyos tres lados son respectivamente iguales; y por tanto el ángulo $MOQ=M'OQ$.

Del mismo modo se demuestra que el ángulo $MOy=M'Oy$.

Ahora, el ángulo $M'Oz_1$ y el MOz son complementos de los ángulos iguales MOP y $M'OP$, y por tanto son iguales; el $M'Oz_1$ es suplemento del $M'Oz$; luego tambien el ángulo MOz es suplemento del $M'Oz$.

8.° *Hallar el coseno del ángulo que forman dos rectas, conociendo los cosenos de los ángulos que las dos forman con los tres ejes rectangulares.*

Hemos hallado [*Prob.* 6.° y 7.°]

$$\cos U = \frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,.\,\sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

y tambien

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=\cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=\cos\beta,\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=\cos\gamma;$$

$$\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}=\cos\alpha',\ \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}=\cos\beta',\ \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}=\cos\gamma':$$

multiplicando ordenadamente estas ecuaciones, y sumando en seguida las que resulten, tendremos

$$\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{a'^2+b'^2+1}}=$$

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma';$$

luego

$$\cos U=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma';$$

es decir el *coseno de un ángulo es igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos que los dos lados del ángulo forman con los tres ejes rectangulares.*

CAPITULO IV.

Ecuaciones de las superficies.

275. Las superficies pueden considerarse engendradas por el movimiento de una línea recta, ó de una curva de forma constante ó variable, llamada *generatriz*, que se apoya sobre una ó varias líneas fijas, llamadas *directrices*.

Hallemos en primer lugar las ecuaciones de algunas superficies engendradas por una generatriz que se apoya sobre una sola directriz.

ECUACION DEL PLANO.

276. El plano puede considerarse engendrado por una recta que se mueve á lo largo de otra recta fija, conservándose la generatriz constantemente paralela á sí misma.

Supongamos que la recta directriz tenga una posicion cualquiera, y que la direccion de la generatriz sea tambien cualquiera.

Sean $x=az+\alpha,\ y=bz+\beta$

las ecuaciones de la directriz, x',y',z' las coordenadas de un punto cualquiera de esta recta: tendremos por consecuencia

$$x'=az'+\alpha,\ y'=bz'+\beta\ \ldots\ [A],$$

Las ecuaciones de la generatriz que pasa por el punto (x',y',z'), y cuya direccion es conocida, son

$$x-x'=m(z-z'),\ y-y'=n(z-z') \dots [B].$$

Eliminando entre las cuatro ecuaciones $[A]$ y $[B]$ las tres variables x',y',z', resulta la ecuacion

$$(b-n)x+(m-a)y+(an-bm)z+\beta(a-m)-\alpha(b-n)=0,$$

la cual nos da la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera, es decir, entre las coordenadas de un punto cualquiera del plano; luego esta ecuacion es la del plano.

Llamemos, para abreviar, A, B, C á los coeficientes de las variables de esta ecuacion, y D al término independiente de dichas variables, y la ecuacion del plano será

$$Ax+By+Cz+D=0 \dots [M].$$

277. Si dividimos esta ecuacion por cualquiera de los cuatro coeficientes, no quedarán en la ecuacion del plano mas que tres coeficientes independientes; y por tanto un plano quedará determinado por tres ecuaciones distintas entre los datos y dichos coeficientes, ó bien un plano quedará determinado por tres condiciones.

Si dividimos, por ejemplo por D, tendremos

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0,$$

y haciendo $\frac{A}{D}=A'$, $\frac{B}{D}=B'$, $\frac{C}{D}=C'$, la ecuacion del plano será

$$A'x+B'y+C'z+1=0.$$

278. De la ecuacion general del plano deduciremos ahora las ecuaciones correspondientes á las diferentes posiciones particulares que puede tener el plano.

1.° Supongamos que el plano pase por el orígen: las coordenadas 0, 0, 0 del orígen deben verificar la ecuacion del plano, y por consecuencia $D=0$; luego la ecuacion de un plano que pasa por el orígen es

$$Ax+By+Cz=0.$$

2.° *Fig.* 11. Supongamos ahora que el plano sea paralelo á uno de los ejes, ó bien, si estos son rectangulares, perpendicular al plano coordenado á que es perpendicular dicho eje. Para evitar resultados indeterminados, introduzcamos en la ecuacion general del plano las coordenadas $OP=p$, $OQ=q$, $OR=r$ de los puntos P, Q y R en que el plano corta á los tres ejes. Las coordenadas $x=p$, $y=0$, $z=0$ del punto P deben verificar la ecuacion del plano, y por tanto $Ap+D=0$, ó $A=-\frac{D}{p}$. Las coordenadas $x=0$, $y=q$, $z=0$ del punto Q deben verificar la ecuacion del plano; luego $Bq+D=0$, ó $B=-\frac{D}{q}$. Las coordenadas $x=0$, $y=0$, $z=r$ del punto R deben verificar la ecuacion del plano; luego $Cr+D=0$, ó $C=-\frac{D}{r}$. Sustituyendo estos valores en la ecuacion del plano, esta será

$$-\frac{D}{p}x-\frac{D}{q}y-\frac{D}{r}z+D=0,$$

ó

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$$

Fig. 12. Ahora bien, si el plano, cuya ecuacion queremos hallar, es paralelo al eje Oz, será $r=\infty$, y por tanto la ecuacion de dicho plano es

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,$$

la misma que la de su traza PQ; lo que es conforme á lo demostrado [264].

Del mismo modo se halla que la ecuacion de un plano paralelo al eje Oy es la misma que la de su traza sobre el plano xz; y que la ecuacion de un plano paralelo al eje Ox es la de su traza sobre el plano yz.

3.° Supongamos, por último, que el plano, cuya ecuacion queremos hallar, sea paralelo á uno de los coordenados, por ejemplo al xy: en este caso $p=\infty$, $q=\infty$, y por tanto su ecuacion es $z=r$, idéntica á la hallada directamente en el número 259.

Igualmente se ve, que la ecuacion del plano paralelo al xz es $y=q$, y que la ecuacion del plano paralelo al yz es $x=p$ (a).

En todos los casos la ecuacion del plano es de primer grado con respecto á las coordenadas.

279. Recíprocamente, *toda ecuacion de primer grado tiene por lugar geométrico una superficie plana.*

Fig. 11. En efecto, la ecuacion general de primer grado con tres variables es $Ax+By+Cz+D=0$.

Hallemos los puntos en que la superficie, cualquiera que ella sea, representada por esta ecuacion, corta á los tres ejes.

Para hallar el punto en que dicha superficie corta al eje Ox, haremos en esta ecuacion $y=0$, $z=0$, y resultará, llamando p á la ordenada x del punto de interseccion,

$$Ap+D=0,\ p=-\frac{D}{A}.$$

Para hallar el punto en que la misma superficie corta al eje Oy, haremos en la ecuacion dada $x=0$, $z=0$, y llamando q á la ordenada y de dicho punto, tendremos

$$Bq+D=0,\ q=-\frac{D}{B}.$$

Del mismo modo, llamando r á la ordenada z del punto en que la superficie corta al eje Oz, hallaremos $r=-\frac{D}{C}$.

Esto supuesto, sabemos que la ecuacion del plano que pasa por los tres puntos P, Q, R, en que la superficie desconocida corta á los tres ejes, es [278, 2.°]

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1:$$

sustituyendo en lugar de p, q y r sus valores en funcion de los coeficientes de la ecuacion propuesta, será la ecuacion del plano, que pasa por los tres puntos,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1,$$

(a) Si los tres coeficientes de las variables son ceros, será $\frac{1}{p}=0$, $\frac{1}{q}=0$, $\frac{1}{r}=0$, ó $p=\infty$, $q=\infty$, $r=\infty$; luego el plano corta á los tres ejes en el infinito, y por tanto no existe tal plano.

ó $$Ax+By+Cz+D=0,$$
que es la ecuacion propuesta; luego esta ecuacion tiene por lugar geométrico un plano.

ECUACION DE LA SUPERFICIE CILÍNDRICA.

280. Sabemos ya [242] que la superficie cilíndrica es la superficie engendrada por una recta que se mueve paralelamente á sí misma, y recorre una curva dada.

Representemos por $f(x,z)=0$, $f_1(y,z)=0$ las ecuaciones de la directriz, y llamemos x',y',z' á las coordenadas de uno cualquiera de sus puntos: tendremos por consiguiente
$$f(x',z')=0,\ f_1(y',z')=0 \dots\ [A].$$
Las ecuaciones de la generatriz, que pasa por el punto x',y',z' de la directriz, son
$$x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z') \dots\ [B].$$
Eliminando entre estas cuatro ecuaciones las tres variables x',y',z', la ecuacion final que resulte $\varphi(x,y,z)=0$ será la relacion entre las coordenadas de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera, y por tanto dicha ecuacion es la de la superficie.

Fig. 14. Hallemos nuevamente la ecuacion de la superficie cilíndrica, estando la directriz $MNPQ$ en el plano xy.

Sean $f(x,y)=0$, $z=0$ las ecuaciones de dicha directriz, $x',y',0$ las coordenadas de un punto cualquiera M de esta curva: tendremos la relacion
$$f(x',y')=0 \dots\ [1].$$
Las ecuaciones de la generatriz MA, que pasa por el punto $M(x',y',0)$ de la directriz, serán
$$x-x'=az,\ y-y'=bz.$$
Eliminando las variables x', y' entre estas tres ecuaciones, resulta $f(x-az,y-bz)=0$; ecuacion de la superficie cilíndrica, puesto que dicha ecuacion nos dá la relacion entre las coordenadas de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera.

Fig. 15. Supongamos, como caso particular, que el cilindro sea paralelo al eje Oz, ó perpendicular al plano xy si los ejes son rectangulares.

Los coeficientes angulares a y b de las proyecciones de la generatriz son iguales á 0; pues dichas proyecciones son paralelas al eje Oz: por consiguiente la ecuacion de dicho cilindro es $f(x,y)=0$, esto es la misma que la de su base, conforme á lo que demostramos directamente en [260].

ECUACION DE LA SUPERFICIE CÓNICA.

281. Sabemos [236] que la superficie cónica es la superficie engendrada por una recta, que pasando constantemente por un punto fijo, recorre una curva dada.

Sean $$f(x,z)=0,\ f_1(y,z)=0$$
las ecuaciones de la directriz; x',y',z' las coordenadas de un punto cualquiera de dicha directriz: tendremos
$$f(x',z')=0,\ f_1(y',z')=0 \ldots [A].$$

Sean a, b, c las coordenadas del vértice del cono: las ecuaciones de la generatriz que pasa por el punto x',y',z' y por el vértice a, b, c del cono, se deducirán de las generales que pasan por dos puntos, á saber
$$x-x''=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z''),\ y-y''=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z''),$$
reemplazando x'',y'',z'' por a, b, c: serán pues
$$\left.\begin{aligned} x-a&=\frac{x'-a}{z'-c}(z-c),\\ y-b&=\frac{y'-b}{z'-c}(z-c)\end{aligned}\right\}\quad [B].$$

Eliminando entre las cuatro ecuaciones [A] y [B] las tres variables x',y',z', la ecuacion $\varphi(x,y,z)=0$ que resulte, será la relacion entre las coordenadas de un punto cualquiera de cualquier generatriz; y por tanto será la ecuacion de la superficie cónica.

Fig. 16. Supongamos que la directriz sea una curva $MNPQ$ en el plano xy; sus ecuaciones serán $f(x,y)=0$, $z=0$: sean $x',y',0$ las coordenadas de un punto cualquiera M de esta curva; tendremos por consiguiente la relacion entre x' é y' $$f(x',y')=0 \ldots [A].$$

Las ecuaciones de la generatriz MV, que pasa por el punto $M(x',y',0)$ de la directriz y por el vértice $V(a,b,c)$, se deducirán de las generales
$$x-x'=\frac{x''-x'}{z''-z'}(z-z'),\ y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z'),$$
haciendo en ella $z'=0$, $x''=a$, $y''=b$, $z''=c$, y serán por lo

tanto
$$\left.\begin{aligned} x-x'&=\frac{a-x'}{c}z, \\ y-y'&=\frac{b-y'}{c}z, \end{aligned}\right\} \quad [B].$$

Eliminando x' é y' entre las tres ecuaciones $[A]$ y $[B]$, tendremos la relacion entre x,y,z, coordenadas de un punto cualquiera de la superficie del cono, á saber
$$f\left(\frac{az-cx}{z-c}, \frac{bz-cy}{z-c}\right)=0.$$

Ejemplo. Hallar la ecuacion de un cono cuya base es un círculo que tiene el centro en el orígen, y se halla en el plano xy, y cuyo vértice está en el eje de Oz.

Las ecuaciones de la directriz son
$$x^2+y^2=r^2, z=0:$$
si $x',y',0$ son las coordenadas de un punto cualquiera de la directriz, tendremos
$$x'^2+y'^2=r^2 \ldots [1].$$

Las ecuaciones de la generatriz, que pasa por el punto $x',y',0$ y por el vértice $0,0,c$, son
$$x=-\frac{x'}{c}(z-c) \ldots [2].$$
$$y=-\frac{y'}{c}(z-c) \ldots [3].$$

Eliminando entre las tres ecuaciones $[1]$, $[2]$ y $[3]$ las variables x',y', resulta la ecuacion del cono
$$c^2x^2+c^2y^2=r^2(c-z)^2.$$

ECUACIONES DE LAS SUPERFICIES DE REVOLUCION.

282. Se llama *superficie de revolucion* la superficie engendrada por una línea recta ó curva que gira alrededor de un eje fijo, al cual está invariablemente ligada.

Es evidente, segun esta definicion, que si desde los diferentes puntos de la generatriz se bajan perpendiculares al eje, estas perpendiculares describen círculos, cuyos centros se hallan en el eje, y cuyos planos son perpendiculares al mismo eje: estos círculos se llaman *paralelos* de la superficie. La interseccion de un plano, que pasa por el eje, con la superficie se llama *meridiano* de la superficie. Cuando la generatriz es una línea plana y el eje de rotacion se halla en el plano de la generatriz, como sucede comunmente, los meridianos son las diferentes posiciones de la generatriz.

Se ve tambien que la superficie de revolucion puede engendrarse por una circunferencia de radio variable, que se mueva á lo largo de una línea fija, permaneciendo paralela á sí misma, y conservando su centro sobre el eje (a).

Así, un cono de revolucion puede considerarse engendrado por el movimiento de una circunferencia de radio variable, que recorre una recta fija que tiene un punto comun con el eje, permaneciendo dicha circunferencia paralela á sí misma, y conservando su centro sobre el eje.

Un cilindro de revolucion puede considerarse engendrado por el movimiento de una circunferencia de radio constante, que recorre una recta fija paralela al eje, permaneciendo dicha circunferencia paralela á sí misma, y conservando su centro sobre el eje.

Una esfera puede considerarse engendrada por el movimiento de una circunferencia de radio variable, que recorre otra media circunferencia fija, cuyo diámetro es el eje, permaneciendo paralela á sí misma, y conservando su centro sobre el eje.

283. *Hallemos*, suponiendo que los ejes de coordenadas sean rectangulares, y que la directriz y el eje de rotacion se hallen en un mismo plano, *la ecuacion general de las superficies de revolucion: 1.° Siendo el eje de la superficie eje de las* z. *2.° Siendo el eje de la superficie paralelo al eje de las* z.

Fig. 18. 1.° Sea AM la directriz en el plano xz, y sus ecuaciones $$f(x,z)=0,\ y=0.$$

Sea NM la circunferencia generatriz en una cualquiera de sus posiciones, y cuyo plano, sabemos, es perpendicular al eje, y por consiguiente en el caso actual paralelo al plano xy; sean $x',0,z'$ las coordenadas del punto M comun á la directriz y generatriz: tendremos entre x' y z' la relacion

$$f(x',z')=0.$$

Las ecuaciones de la generatriz NM son evidentemente

$$y^2+x^2=x'^2,\ z=z'.$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las dos variables

(a) De esta segunda definicion, necesaria para hallar la ecuacion de las superficies de revolucion, resulta que la línea generatriz en la primera definicion viene á ser directriz en la segunda.

x' y z', la ecuacion $f\left(\sqrt{y^2+x^2},z\right)=0$ que resulta, será la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de cualquier generatriz, es decir, será la ecuacion de la superficie de revolucion.

Fig. 19. 2.° Sean a y b las coordenadas x é y del punto Q en que el eje de la superficie encuentra al plano xy; $f(x, z)=0$, $y=b$ las ecuaciones de la directriz AM paralela al plano xz; x',b,z' las coordenadas del punto M comun á la directriz y generatriz: tendremos entre x' y z' la relacion

$$f(x',z')=0.$$

Las ecuaciones de la circunferencia MN son (observando que el radio de la circunferencia es $O'M=x'-a$)

$$(y-b)^2+(x-a)^2=(x'-a)^2,\ z=z'.$$

Eliminando x' y z' entre estas tres ecuaciones, tendremos la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de cualquier generatriz, ó de un punto cualquiera de la superficie; á saber

$$f\left(a+\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2},\ z\right)=0.$$

284. Como caso particular, *hallemos la ecuacion del cono de revolucion cuyo eje coincida con el de las* z.

Fig. 20. Las ecuaciones de la directriz AB son

$$x=az+r,\ y=0,$$

siendo a la tangente del ángulo BAz y r el radio OB de la base del cono. Sean $x',0,z'$ las coordenadas del punto M comun á la directriz y generatriz en una posicion cualquiera de esta: tendremos la relacion

$$x'=az'+r.$$

Las ecuaciones de la generatriz son evidentemente

$$x^2+y^2=x'^2,\ z=z'.$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las variables x',z', resulta la ecuacion del cono

$$x^2+y^2=a^2z^2+2arz+r^2.$$

Si de esta ecuacion quisiéramos eliminar la a, hallaríamos su valor en funcion de r y de $c=OA$ por el triángulo rectángulo BOA, y tendríamos $r=c\times-a$, de donde $a=-\frac{r}{c}$; sustituyendo este valor en la ecuacion del cono, esta ecuacion será $$c^2(x^2+y^2)=r^2(c-z)^2,$$
idéntica á la hallada en el número 281.

285. Otro caso particular. *Hallar la ecuacion de la esfera.*

Fig. 21. Supongamos primeramente que el centro esté en el orígen.

Las ecuaciones de la directriz ABC son

$$x^2+z^2=r^2,\ y=0:$$

siendo x', 0, z' las coordenadas del punto M comun á la generatriz NM, en cualquiera de sus posiciones, y á la directriz, tendremos $x'^2+z'^2=r^2$.

Las ecuaciones de la generatriz MN, cuyo radio $O'M=x'$, son $$y^2+x^2=x'^2,\ z=z'.$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las dos variables x', z', resulta la ecuacion de la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Fig. 22. Supongamos ahora que el centro de la esfera no esté en el orígen, y que a, b, c sean sus coordenadas. Cortemos la esfera por medio de un plano paralelo al xz, y sea NMP la interseccion, que tomaremos por directriz: las ecuaciones de esta curva son

$$(x-a)^2+(z-c)^2=r^2,\ y=b.$$

Sean x',b,z' las coordenadas del punto M, comun á la directriz y generatriz en cualquiera de sus posiciones: tendremas entre x' y z' la relacion

$$(x'-a)^2+(z'-c)^2=r^2.$$

Las ecuaciones de la generatriz NM son, observando que su radio es $O'M=x'-a$,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x'-a)^2,\ z=z'.$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las variables x',z', resulta la ecuacion de la esfera

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Nota. Las dos ecuaciones que acabamos de hallar para la esfera considerada como superficie de revolucion, pueden hallarse fácilmente fundándose en su principal propiedad, á saber, que todos sus puntos equidistan del centro.

En efecto, sean a, b, c las coordenadas del centro de la esfera, x, y, z las de un punto cualquiera de la superficie de la esfera, r el rádio de la misma: tendremos [274, 5.°]

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

ecuacion que nos da la relacion constante entre las coordenadas x, y, z de un punto cualquiera de la superficie de la esfera, y que por tanto es la ecuacion de la esfera.

Si el centro de la esfera está en el orígen, la ecuacion de la esfera se hallará haciendo $a=0$, $b=0$, $c=0$ en la ecuacion general, y será por lo tanto en tal caso $x^2+y^2+z^2=r^2$, que tambien puede deducirse de la fórmula de la distancia de un punto al orígen.

286 Acabamos de ver que la ecuacion general de la esfera es, siendo rectangulares los ejes de coordenadas,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

ó $$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

Al contrario, la *ecuacion*

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0$$

referida á ejes rectangulares, representa una esfera, un punto ó nada.

En efecto, partiendo todos los términos de esta ecuacion por A, será

$$x^2+y^2+z^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}y+\frac{D}{A}z+\frac{E}{A}=0,$$

ó completando los cuadrados,

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2+\left(z+\frac{D}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2+D^2}{4A^2}-\frac{E}{A};$$

y ahora se ve, que si el segundo miembro es positivo, representa una esfera cuyo centro tiene por coordenadas $-\frac{B}{2A}$, $-\frac{C}{2A}$ y $-\frac{D}{2A}$, y cuyo radio es $\sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2}{4A^2}-\frac{E}{A}}$.

Si el segundo miembro fuese 0, la ecuacion seria

$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2+\left(z+\frac{D}{2A}\right)^2=0;$$

por consiguiente $x+\frac{B}{2A}=0$, $y+\frac{C}{2A}=0$, $z+\frac{D}{2A}=0$;

ó $$x=-\frac{B}{2A},\ y=-\frac{C}{2A},\ z=-\frac{D}{2A};$$

luego la ecuacion representa en este caso un punto cuyas coordenadas son $-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A}$.

Si el segundo miembro es negativo, la ecuacion es imposible, teniendo x, y, z valores reales; pues la suma de tres cantidades positivas no puede ser igual á una negativa; luego en este caso la ecuacion no representa nada.

ECUACION DEL PARABOLOIDE ELÍPTICO.

287. *Fig.* 23. Se llama *paraboloide elíptico* la superficie engendrada por una parábola DOE que se mueve paralelamente á sí misma, teniendo siempre su vértice sobre otra parábola BOC, cuyo plano es perpendicular al de la primera, y cuyas aberturas están situadas hácia una misma region.

Fig. 24. Para hallar la ecuacion del paraboloide elíptico, tomemos por plano xy el de la parábola directriz AOO', por eje de las x el eje de esta parábola, y por orígen de las coordenadas rectangulares el vértice de la misma: segun esto, el plano movible de la parábola generatriz será paralelo al plano xz.

Sean $y^2=2px$, $z=0$ las ecuaciones de la parábola directriz AOO'; $x',y',0$ las coordenadas de un punto cualquiera O' de esta parábola: tendremos por consiguiente

$$y'^2=2px' \dots [A].$$

Para hallar las ecuaciones de la parábola generatriz $CO'D$, cuyo vértice es el punto O', observo que su plano es paralelo al xz, y que por tanto su proyeccion sobre este plano es la parábola $C'O''D'$ idéntica á la generatriz $CO'D$: la ecuacion de esta proyeccion, con respecto á los ejes $O''x''$, $O''z''$, es $z''^2=2p'x''$, siendo $2p'$ el parámetro de la parábola generatriz; y la ecuacion de la proyeccion $O'B$ de dicha parábola generatriz sobre el plano xy es $y=y'$.

Estas dos ecuaciones son de la parábola generatriz que pasa por el punto O': pero tenemos ahora que referir la primera á los ejes Ox, Oz por medio de las fórmulas de trasformacion de unos ejes á otros paralelos: dichas fórmulas serán actualmente $x''=x-x'$, $z''=z'$, y por tanto las ecuaciones de la parábola generatriz, que pasa por el punto O', serán

$$z^2=2p'(x-x'),\ y=y' \dots [B].$$

Eliminando las dos variables x' é y' entre las tres ecuaciones $[A]$ y $[B]$, resulta la ecuacion del paraboloide elíptico

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x.$$

Si las dos parábolas, directriz y generatriz, fuesen iguales, sus parámetros $2p$ y $2p'$ serian tambien iguales, y la ecuacion del paraboloide seria entonces $y^2+z^2=2px \dots [K]$.

En este caso el paraboloide elíptico es una superficie de revolucion; y puede considerarse engendrado por una parábola que se mueve alrededor de su eje. Por consiguiente este paraboloide puede tambien considerarse engendrado por el movimiento de una circunferencia de rádio variable, que teniendo siempre su centro en el eje de la parábola, y conservándose paralela á sí misma, recorre la parábola dada. Para comprobacion de lo que acabamos de asegurar, hallaremos directamente la ecuacion del paraboloide elíptico de revolucion.

Fig. 25. Las ecuaciones de la parábola directriz NOM son $y^2=2px$, $z=0$: sean $x',0,y'$ las coordenadas del punto M: tendremos la relacion $y'^2=2px'$.

Las ecuaciones de la circunferencia generatriz que pasa por el punto M, y cuyo rádio $MO'=y'$, son

$$x=x',\ y^2+z^2=y'^2.$$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las variables x',y', resulta $y^2+z^2=2px$, ecuacion que nos da relacion entre las coordenadas de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera; y por tanto es la ecuacion del paraboloide de revolucion, idéntica á la ecuacion $[K]$.

ECUACION DEL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

288. *Fig.* 26. Se llama *paraboloide hiperbólico* la superficie $PO'QP'O''Q'$ engendrada por una parábola $PO'Q$, que se mueve paralelamente á sí misma, teniendo siempre su vértice sobre otra parábola $O'OO''$, cuyo plano es perpendicular al de la primera, y cuyas aberturas estan situadas hácia regiones opuestas.

Fig. 27. Para hallar la ecuacion de este paraboloide, supondremos que la parábola OO' se halla en el plano xy, que su eje es el de las x, y su vértice el orígen de las coordenadas rectangulares; por lo tanto el plano de la parábola generatriz POQ será en todas sus posiciones paralelo al plano xz.

Las ecuaciones de la parábola directriz OO' son

$$y^2=2px,\ z=0:$$

y si llamamos $x',y',0$ á las coordenadas de un punto cualquiera O' de la directriz, tendremos $y'^2=2px'$ ...... [1].

Para hallar las ecuaciones de la parábola generatriz $P'O'Q'$, que pasa por el punto O', observo que, por ser su plano paralelo al xz, su proyeccion $P''O''Q''$ sobre este plano, referida á los ejes $O''z''$, $O''x''$, tiene por ecuacion [192]

$$z''^2 = -2p'x'',$$

siendo $2p'$ el parámetro de la parábola generatriz: para tener la ecuacion de dicha proyeccion con respecto á los ejes Ox, Oz, tengo las fórmulas de transformacion $x''=x-x'$, $z''=z$, y por tanto la ecuacion de la proyeccion $P''O''Q''$ con respecto á los ejes Ox, Oz, es

$$z^2 = -2p'(x-x') \quad [2]$$

La ecuacion de la proyeccion de la generatriz sobre el plano Oy es $\quad y=y' \ldots [3]$

Eliminando entre las ecuaciones [1], [2] y [3] las dos variables x' é y', resulta

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p'} = x,$$

ecuacion que solo se diferencia de la del paraboloide elíptico en el signo del parámetro de la parábola generatriz, la cual parábola tiene sentido contrario en el paraboloide hiperbólico al que tiene en el elíptico.

289. Hasta ahora hemos hallado las ecuaciones de varias superficies engendradas por una línea que se apoya sobre una directriz: presentemos ya algunos ejemplos de superficies engendradas por una línea que se apoye sobre dos directrices.

ECUACION DEL ELIPSOIDE.

290 *Fig.* 28. Se llama *elipsoide* la superficie ABC engendrada por una elipse $BCB'C'$ de ejes variables, que se mueve paralelamente á sí misma, y se apoya constantemente sobre otras dos elipses fijas $ABA'B'$, $ACA'C'$, que tienen un eje comun AA', y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz.

Hallemos en virtud de esta definicion la ecuacion del elipsoide.

Fig. 29. Sean AB y AC dos cuartos de las dos elipses directrices, cuyos semi-ejes OA, OB y OC prolongados indefinidamente tomaremos por ejes de las x, de las y y de las z; llamaremos a, b y c á dichos semi-ejes.

Las ecuaciones de las dos elipses directrices son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sean x',y' las coordenadas del punto B', y x',z' las del punto C', en los que la generatriz, en una posicion cualquiera, encuentra á las dos directrices: tendremos por consecuencia las dos ecuaciones

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \ldots\ldots [A].$$

Para hallar las ecuaciones de la generatriz $B'C'$, observo que la proyeccion $B''C''$ de la misma sobre el plano yz es idéntica á la generatriz $B'C'$, y como sus semi-ejes son $B''O=B'O'=y'$, $OC''=O'C'=z'$, la ecuacion de dicha proyeccion es

$$\frac{y^2}{y'^2}+\frac{z^2}{z'^2}=1,$$

y la de la proyeccion sobre el plano xy ó xz es

$$x=x'.$$

Eliminemos ahora las tres variables x', y', z' entre las dos ecuaciones $[A]$ y las dos de la generatriz: elimino primeramente la x', y tendré

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,\ \frac{y^2}{y'^2}+\frac{x^2}{z'^2}=1.$$

Despejo y'^2, z'^2 en las dos primeras de estas tres ecuaciones, y tendré

$$y'^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\ z'^2=c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

y sustituyendo estos valores en la tercera ecuacion, resultará la ecuacion

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a}\right)}=1,$$

ó

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

la cual nos da la relacion entre las coordenadas x, y, z de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera, y por tanto es la ecuacion del elipsoide.

291. Los ejes $2a$, $2b$ y $2c$ de las dos elipses directrices se llaman *ejes* del elipsoide, y los estremos de los ejes del elipsoide se llaman sus *vértices*.

292. Si dos de los tres ejes del elipsoide, por ejemplo $2b$ y $2c$ son iguales, en cuyo caso las dos elipses directrices son iguales, la ecuacion del elipsoide será

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \ldots\ldots [A];$$

ecuacion del elipsoide de revolucion engendrado por una elipse que se mueve alrededor del eje $2a$; como puede comprobarse hallando directamente la ecuacion de esta superficie de revolucion por el método [282].

En este caso el eje $PP'=2a$ [*Figuras* 30 y 31], alrededor del cual se mueve la elipse generatriz, es el único eje del elipsoide; sus estremos P y P' se llaman *polos* del elipsoide, y el círculo EC perpendicular al eje y equidistante de los polos se llama *ecuador*. El elipsoide de revolucion es *prolongado* [*Fig.* 30] cuando su semi-eje PO es mayor que el rádio OC del ecuador; y aplanado en el caso contrario. Los focos F y F' de la elipse generatriz del elipsoide prolongado, se llaman *focos* de dicho elipsoide.

293. Si los tres ejes del elipsoide son iguales, su ecuacion será $x^2+y^2+z^2=a^2$, que es la de una esfera, cuyo centro está en el orígen; luego la esfera es un elipsoide, cuyos tres ejes son iguales.

ECUACION DEL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA.

294. *Fig.* 32. Se llama *hiperboloide de una hoja* la superficie $DEFG$ engendrada por una elipse $ABA'B'$ de ejes variables, que moviéndose paralelamente á sí misma, se apoya sobre dos hipérbolas $DED'E''$, $FGF'G'$ que tienen un mismo eje segundo CC', y cuyos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares al de la elipse generatriz.

Fig. 33. Para hallar la ecuacion del hiperboloide de una hoja, tomemos por ejes de coordenadas los dos ejes primeros y el eje segundo de las dos hipérbolas directrices, prolongados indefinidamente: sea $ABFD$ la porcion del hiperboloide comprendida en el triedro $Oxyz$; sean a,b,c los semi-ejes OA, OB y OC de las dos hipérbolas directrices AD y BF. Las ecuaciones de estas dos hipérbolas son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Sean x',z' las coordenadas del punto D, y',z' las del punto F, en los que la generatriz FD, en una posicion cualquiera, encuentra á las dos directrices: tendremos

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1,\ \frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1\ldots[1].$$

La ecuaciones de la generatriz FD son

$$z=z',\ \frac{x^2}{x'^2}+\frac{y^2}{y'^2}=1\ldots[2].$$

Eliminando las tres variables x',y',z' entre las cuatro ecuaciones [1] y [2], resulta la ecuacion del hiperboloide de una hoja,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

295. Si los semi-ejes primeros a y b de las dos hipérbolas directrices son iguales, en cuyo caso estas dos hipérbolas, que tienen los mismos ejes, son iguales, la ecuacion del hiperboloide de una hoja será $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ldots[C]$.

El hiperboloide de una hoja es en este caso una superficie de revolucion, y puede considerarse engendrado por una hipérbola que gira alrededor de su eje segundo; y se llama *hiperboloide de revolucion de una hoja*. Hallando la ecuacion de esta superficie como en el número 283, se verá que su ecuacion es la [C].

ECUACION DEL HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS.

296. *Fig.* 34. Se llama *hiperboloide de dos hojas* la superficie $ABCDEF$ engendrada por una elipse de ejes variables, que moviéndose paralelamente á sí misma, se apoya constantemente sobre dos hipérbolas que tienen un mismo eje primero AD, y cuyos planos son perpendiculares entre sí, y perpendiculares al de la elipse generatriz.

Fig. 35. Para hallar la ecuacion de esta superficie, tomaremos por ejes de coordenadas los ejes de las hipérbolas directrices, prolongados indefinidamente: llamemos a al semi-eje comun, b y c á los semi-ejes segundos de ambas hipérbolas; sean AD y AE los ramos de las dos hipérbolas directrices comprendidas en el ángulo triedro $Oxyz$. Las ecuaciones de las dos hipérbolas directrices son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Sean x',y' las coordenadas del punto D; x',z' las del punto

E, en que la generatriz en una posicion cualquiera encuentra á las dos directrices: tendremos

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1,\ \frac{x'^2}{a^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1 \ldots [1].$$

Las ecuaciones de la generatriz ED son

$$x=x',\ \frac{y^2}{y'^2}+\frac{z^2}{z'^2}=1 \ldots [2].$$

Eliminando entre las cuatro ecuaciones [1] y [2] las variables x', y', z', resulta la ecuacion del hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

297. Si los dos semi-ejes segundos b y c son iguales, las dos hipérbolas directrices lo serán tambien, y la ecuacion del hiperboloide será

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1 \ldots [3]$$

En tal caso el hiperboloide de dos hojas es una superficie de revolucion, que puede considerarse engendrada por una hipérbola que gira alrededor de su eje primero. Hallando por el método número 283 la ecuacion de esta superficie de revolucion, se verá que es la [3].

ECUACION DEL PARABOLOIDE ELÍPTICO.

298. Hemos hallado la ecuacion del paraboloide elíptico [287] considerándolo engendrado por una parábola cuyo vértice se apoya constantemente sobre otra parábola: mas este paraboloide puede tambien engendrarse por el movimiento de una elipse de ejes variables, que moviéndose paralelamente á sí misma, se apoya sobre dos parábolas que tienen un mismo eje, y cuyos planos son perpendiculares entre sí, y perpendiculares al de la elipse generatriz.

Hallemos, segun esta nueva definicion, la ecuacion del paraboloide elíptico.

Fig 36. Las ecuaciones de las dos parábolas directrices, OC que se halla en el plano xy, y OB que se halla en el plano xz, son, llamando $2p$ y $2p'$ á sus parámetros,

$$y^2=2px,\ z^2=2p'x:$$

sean x', y' las coordenadas del punto C, x', z' las del punto B, en que la generatriz BC en una posicion cualquiera encuentra á las directrices: tendremos por consecuencia

$$y'^2=2px',\ z'^2=2p'x'.$$

Las ecuaciones de la generatriz BC son

$$x=x',\ \frac{y^2}{y'^2}+\frac{z^2}{z'^2}=1.$$

Eliminando las tres variables x',y',z' entre estas cuatro ecuaciones, resulta la ecuacion del paraboloide elíptico,

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x.$$

ECUACION DEL CONOIDE.

299. Se llama *conoide* la superficie engendrada por una recta que, moviéndose paralelamente á un plano dado, se apoya sobre una recta y una curva dadas.

Fig. 37. Hallemos la ecuacion del conoide engendrado por una recta MN paralela al plano yz, y que se apoya sobre la curva CD, situada en el plano xy, y sobre una recta AB.

La ecuacion de la directriz CD en el plano xy es

$$f(x,y)=0,$$

y las dos de la recta directriz AB son

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta;$$

sean x',y' las coordenadas x é y del punto M, en que la generatriz MN en una cualquiera de sus posiciones encuentra á la directriz CD: siendo la generatriz MN paralela al plano yz, la ordenada x del punto N será la misma que la del punto M, esto es, x'; sean y'',z'' las otras dos coordenadas del punto N: por corresponder estos puntos á las directrices, tendremos las relaciones

$$\left.\begin{aligned} f(x',y')&=0,\\ x'&=az''+\alpha,\\ y''&=bz''+\beta \end{aligned}\right\}[A].$$

La generatriz MN, paralela al plano yz, queda determinada por los dos puntos

$$M(x',y',0),\ N(x',y'',z''):$$

la ecuacion de su proyeccion sobre el plano yz se deducirá de la general

$$y-y'=\frac{y''-y'}{z''-z'}(z-z'):$$

actualmente $z'=0$, y por tanto la ecuacion de dicha proyeccion es $$y-y'=\frac{y''-y'}{z''}z.$$

La de la proyeccion sobre el plano xy ó xz es
$$x=x'.$$

Eliminando entre estas dos ecuaciones y las tres [A] las cuatro variables x',y',y'',z'', la ecuacion que resulte, será la ecuacion del conoide.

Para esto, elimino en primer lugar la x', y resultarán las cuatro ecuaciones
$$f(x,y')=0,\quad x=az''+\alpha,\quad y''=bz''+\beta,$$
$$y-y'=\frac{y''-y'}{z''}z,$$
entre las cuales hay que eliminar las tres variables y',y'',z''.

Elimino ahora la y'', y tendré estas tres:
$$f(x,y')=0,\quad x=az''+\alpha,\quad y-y'=\frac{bz''+\beta-y'}{z''}z.$$

Elimino z'', para lo cual sustituyo en la última el valor de z'' deducido de la segunda, y tendremos las dos ecuaciones
$$f(x,y')=0,\quad xy-ay'z=bxz-b\alpha z+a\beta z-azy'.$$
Por último, eliminando la y' entre estas dos ecuaciones, resultará la ecuacion del conoide
$$f\left(x,\frac{xy-bxz+b\alpha z-a\beta z-\alpha y}{x-\alpha-az}\right)=0.$$

Fig. 38. Hallemos, como caso particular, la ecuacion del conoide, suponiendo que sus dos directrices son una circunferencia CD en el plano xy y una recta AB paralela al eje Ox, y que la generatriz sea paralela al plano yz; y supongamos tambien que los ejes sean rectangulares.

Sean $x',y',0$; x',y'',z'' las coordenadas de los puntos M y N, en que la generatriz MN encuentra á las dos directrices.

Siendo $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ la ecuacion de la circunferencia directriz, tendremos
$$(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2.$$

Sean m y n las coordenadas y,z del punto en que la directriz AB encuentra al plano yz: las ecuaciones de la generatriz MN que pasa por los puntos $M(x',y',0)$, $N(x',m,n)$ son

$$x=x',\ y-y'=\frac{m-y'}{n}z$$

Eliminando las variables x', y' entre estas tres ecuaciones, resultará la ecuacion del conoide

$$(x-a)^2+\left(\frac{ny-mz}{n-z}-b\right)^2=r^2.$$

CAPITULO V.

Problemas sobre el plano.

300. Teorema. *Si dos planos, cuyas ecuaciones son* $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$, *son paralelos, tendremos las relaciones* $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$; *y al contrario.*

En efecto, siendo los dos planos paralelos, sus trazas, es decir, sus intersecciones con los planos coordenados, serán respectivamente paralelas: las trazas de los dos planos sobre el xz tienen por ecuaciones

$$Ax+Cz+D=0,\ \text{ó}\ x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},$$

$$A'x+C'z+D'=0,\ \text{ó}\ x=-\frac{C'}{A'}z-\frac{D'}{A'};$$

luego $$\frac{C}{A}=\frac{C'}{A'},\ \text{ó}\ \frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}.$$

Las trazas de los dos planos sobre el yz tienen por ecuaciones

$$By+Cz+D=0,\ \text{ó}\ y=-\frac{C}{B}z-\frac{D}{B},$$

$$B'y+C'z+D'=0,\ \text{ó}\ y=-\frac{C'}{B'}z-\frac{D'}{B'};$$

y por consiguiente $\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$, ó $\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$;

luego $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

Demostremos el recíproco: supongamos que

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}:$$

digo que los dos planos son paralelos.

En efecto, las trazas de los dos planos sobre el xz tienen por ecuaciones

$$Ax+Cz+D=0,\ \text{ó}\ x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},$$

$$A'x+C'z+D'=0,\ \text{ó}\ x=-\frac{C'}{A'}z-\frac{D'}{A'}:$$

por hipótesi $\frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}$, ó $\frac{C}{A}=\frac{C'}{A'}$;

luego las dos trazas de los dos planos sobre el xz son paralelas.

Del mismo modo se demuestra que las trazas de los dos planos sobre el yz son paralelas; y como las dos trazas de cada plano sobre los xz, yz cortan al eje en un punto, se infiere [*Geom. Teor.* 222] que los dos planos son paralelos.

301. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por un punto dado y es paralelo á otro plano dado.*

Sean x', y', z' las coordenadas del punto dado, la ecuacion del plano dado $Ax+By+Cz+D=0$; y la ecuacion pedida del plano $A'x+B'y+C'z+D'=0$, siendo incógnitas A', B', C', D'.

Por pasar este plano por el punto x', y', z', será

$$A'x'+B'y'+C'z'+D'=0:$$

restada esta ecuacion de la anterior, tendremos

$$A'(x-x')+B'(y-y')+C'(z-z')=0,$$

ó $$\frac{A'}{C'}(x-x')+\frac{B'}{C'}(y-y')+z-z'=0.$$

Ahora, por ser los dos planos paralelos, es

$$\frac{A'}{C'}=\frac{A}{C},\ \frac{B'}{C'}=\frac{B}{C};$$

luego la ecuacion pedida será

$$\frac{A}{C}(x-x')+\frac{B}{C}y-y')+z-z'=0,$$

ó $$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

302. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por tres puntos dados* (x', y', z'), (x'', y'', z''), (x''', y''', z'''), *que no estan en línea recta.*

La ecuacion del plano puede ponerse bajo la forma $Ax+By+Cz+1=0$ [277]: actualmente los tres coeficientes A, B y C son incógnitos, y llegaremos á conocerlos por medio de las condiciones de que el plano pasa por los tres puntos dados; pues estas condiciones nos dan las tres ecuaciones con las tres incógnitas A, B y C, á saber:

$$Ax'+By'+Cz'+1=0,$$
$$Ax''+By''+Cz''+1=0,$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+1=0.$$

De estas tres ecuaciones pueden deducirse los valores de A, B y C, que supondremos sean A', B' y C', los cuales deben ser reales y finitos en la hipótesi de que los tres puntos dados no están en línea recta; y por tanto la ecuacion pedida del plano, que pasa por los tres puntos dados, será

$$A'x+B'y+C'z+1=0.$$

303. Teoremas. 1.° *Si una recta* $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, *es paralela á un plano* $Ax+By+Cz+D=0$, *se verificará que* $Aa+Bb+C=0$. 2.° *Si dicha recta coincide con el plano, se verificarán las dos relaciones*

$$Aa+Bb+C=0,$$
$$A\alpha+B\beta+D=0.$$

Igualando coordenadas entre las ecuaciones de la recta y la del plano, y eliminando x é y, tendremos

$$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=0:$$

si la recta es paralela al plano, su punto de interseccion debe estar en el infinito; lo que exige que, siendo $A\alpha+B\beta+D$ diferente de cero, sea $Aa+Bb+C=0$.

Si la recta coincide con el plano, el número de puntos comunes á la recta y al plano es infinito; luego el valor de z debe ser indeterminado; lo que exige que

$$Aa+Bb+C=0,$$
$$A\alpha+B\beta+D=0.$$

Recíprocos. 1.° *Si, siendo las ecuaciones de una recta* $y=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, *y la de un plano* $Ax+By+Cz+D=0$, *se verifica que* $Aa+Bb+C=0$, *y* $A\alpha+B\beta+D\gtrless 0$, *la recta será paralela al plano.* 2.° *Si se verifican al mismo tiempo las dos relaciones* $Aa+Bb+C=0$, $A\alpha+B\beta+D=0$, *la recta coincidirá con el plano.*

En efecto, igualando las coordenadas entre las ecuaciones de la recta y la del plano, y eliminando x é y, resulta

$$(Aa+Bb+C)z+A\alpha+B\beta+D=0,$$

en la cual z corresponde al punto comun á la recta y al plano.

Siendo por hipótesi $Aa+Bb+C=0$ y $A\alpha+B\beta+D$ diferente de cero, se infiere que el valor de z es infinito, y por tanto el punto comun á la recta y plano está en el infinito; es decir, que la recta es paralela al plano.

2.° Siendo $Aa+Bb+C=0$, $A\alpha+B\beta+D=0$, z toma la forma $\frac{0}{0}$, y por tanto tiene una infinidad de valores; luego la recta y el plano tienen una infinidad de puntos comunes, ó lo que es igual, la recta y el plano coinciden.

304. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por una recta dada, y es paralelo á otra recta dada, no siendo paralelas dichas dos rectas*

Sean $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ las ecuaciones de la recta por la cual pasa el plano cuya ecuacion se pide, $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$ las de la recta á la cual debe ser paralelo el plano; y sea $Ax+By+Cz+1=0$ la ecuacion del plano, siendo A, B y C coeficientes incógnitos. Para hallar estos tres coeficientes, tenemos las relaciones

$$Aa+Bb+C=0,$$
$$A\alpha+B\beta+1=0,$$
$$Aa'+Bb'+C=0$$

Resolviendo estas tres ecuaciones, y llamando p, q y r á los valores de A, B y C, que serán reales y finitos, puesto que sabemos que el problema es determinado, la ecuacion pedida del plano será

$$px+qy+rz+1=0.$$

305. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por una recta dada y por un punto dado fuera de dicha recta.*

Sean $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ las ecuaciones de la recta dada, x', y', z' las coordenadas del punto dado, $Ax+By+Cz+1=0$ la ecuacion pedida del plano que pasa por la recta y por el punto; A, B y C son las incógnitas de la cuestion. Coincidiendo la recta con el plano, tendremos en virtud del teorema [303, 2.°], las relaciones

$$Aa+Bb+C=0,$$
$$A\alpha+B\beta+1=0;$$

y pasando el plano por el punto (x', y', z'), tendremos la ecuacion

$$Ax'+By'+Cz'+1=0.$$

De estas tres ecuaciones se deducirán fácilmente los valores de las tres incógnitas A,B,C; los cuales serán reales y finitos, pues sabemos que el problema es posible y determinado.

NOTA. Hé aqui los valores de las tres incógnitas:

$$A=\frac{y'-bz'-\beta}{\beta(x'-az')-\alpha(y'-bz')},\quad B=-\frac{x'-az'-\alpha}{\beta(x'-az')-\alpha(y'-bz')},$$

$$B=\frac{b(x'-az'-\alpha)-a(y'-bz'-\beta)}{\beta(x'-az')-\alpha(y'-bz')}.$$

306. *Fig.* 39. Teorema. *Si una recta* MN *es perpendicular á un plano* ABC, *las proyecciones* PM′, P′M″, P″M‴ *de la recta serán respectivamente perpendiculares á las trazas* AC, BC *y* AB *del plano; siendo los ejes rectangulares.*

Supongamos que el punto N sea el de interseccion de la recta MN con el plano xz: siendo la MN perpendicular al plano ABC, el plano MNM', que pasa por dicha recta MN, es perpendicular al plano ABC; ademas el plano MNM' es el proyectante de la recta MN, y como los tres planos coordenados son por hipótesi perpendiculares entre sí, dicho plano proyectante es perpendicular al xz. Siendo los dos planos ABC y xz perpendiculares al plano MNM', la interseccion AC de los dos primeros será perpendicular al tercer plano MNM', y por consiguiente la interseccion AC es perpendicular á la recta NM' que pasa por su pie P en el mismo plano MNM'. Del mismo modo se demuestra que la proyeccion $P'M''$ es perpendicular á la traza BC, y que la $P''M'''$ lo es á la AB.

Recíproco. *Si dos proyecciones* PM′, P′M″ *de una recta* MN *son perpendiculares respectivamente á dos trazas* AC *y* BC *de un plano* ABC, *dicha recta* MN *será perpendicular á este plano; suponiendo que los ejes son rectangulares.*

Siendo el plano xz perpendicular al plano MNM' proyectante de la recta MN, y siendo por hipótesi la recta AC perpendicular á la NM', interseccion de los dos planos xz y MNM', se infiere que la recta AC es perpendicular al plano MNM', y por consiguiente el plano ABC es tambien perpendicular al MNM'. Por la misma razon el plano ABC es perpendicular al MNM'': luego la interseccion MN de los dos planos MNM', MNM'' es perpendicular al plano ABC.

307. *Fig.* 39. Teorema. *Si una recta, cuyas ecuaciones son* $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, *es perpendicular á un plano cuya ecua-*

cion es $Ax+By+Cz+D=0$, *tendremos las relaciones* $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$; *siendo los ejes rectangulares*.

Para hallar la ecuacion de la traza AC, haremos $y=0$ en la ecuacion del plano, y resultará

$$Ax+Cz+D=0, \text{ ó } x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A}$$

para ecuacion de dicha traza.

La ecuacion de la proyeccion sobre el plano xz de la recta perpendicular al plano es

$$x=az+\alpha:$$

luego [56] $\qquad a\times-\frac{C}{A}=-1$, ó $a=\frac{A}{C}$.

Del mismo modo se halla $b=\frac{B}{C}$.

Recíproco. *Si, siendo las ecuaciones de una recta* $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, *y la de un plano* $Ax+By+Cz+D=0$, *se verifica que* $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$, *la recta será perpendicular al plano; siendo los ejes rectángulares*.

En efecto, la traza del plano sobre el xz tiene por ecuacion

$$x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},$$

y pues $a=\frac{A}{C}$ por hipótesi, la ecuacion de dicha traza será

$$x=-\frac{1}{a}z-\frac{D}{A}.$$

La ecuacion de la proyeccion de la recta sobre el plano xz es

$$x=az+\alpha;$$

luego estas dos rectas son perpendiculares entre sí.

Del mismo modo se demuestra que la proyeccion de la recta sobre el plano yz es perpendicular á la traza del plano sobre el yz.

Luego, en virtud del teorema recíproco [306], la recta es perpendicular al plano.

308. *Hallar la ecuacion de una recta que pasa por un punto dado, y es perpendicular á un plano dado; siendo los ejes rectangulares.*

Sean x', y', z' las coordenadas del punto dado, $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuacion del plano dado; y llamemos a y b á las tangentes de los ángulos que las proyecciones de la recta forman con el eje Oz: tendremos, en virtud del teorema anterior, $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$; luego las ecuaciones de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular al plano dado, son [274, 1.º]

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\ y-y'=\frac{B}{C}(z-z').$$

309. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por un punto dado y es perpendicular á una recta dada; siendo los ejes rectangulares.*

Sean x', y', z' las coordenadas del punto dado; $x=az+\alpha$, $y=bz+6$ las ecuaciones de la recta dada; $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuacion del plano, siendo desconocidos los coeficientes A, B, C y D.

Por pasar el plano por el punto x',y',z', tendremos la relacion

$$Ax'+By'+Cz'+D=0;$$

restando ordenadamente estas dos ecuaciones, la del plano tomará la forma

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Ahora $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$, ó $A=aC$, $B=bC$; luego sustituyendo y suprimiendo el factor comun C, resulta que la ecuacion pedida del plano es $a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0$.

310. *Hallar la espresion de la distancia de un punto dado á un plano dado; siendo los ejes rectangulares.*

Sean x',y',z' las coordenadas del punto dado, y $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuacion del plano dado.

Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto dado, y es perpendicular al plano dado, son

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\ y-y'=\frac{B}{C}(z-z).$$

Igualando las coordenadas entre estas tres ecuaciones, x, y, z serán las del punto comun ó pié de la perpendicular; y por tanto conociendo estas coordenadas, la fórmula [274, 5.º] nos dará la distancia pedida.

Pero se abrevia el cálculo, observando que en la fórmula [274, 5.º] entran las diferencias $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, diferencias que pueden hallarse brevemente. Estas diferencias entran esplícitamente en las ecuaciones de la recta, mas no en la del plano. Para que se presenten tambien con evidencia en esta ecuacion, llamémoslas respectivamente α, β, γ, esto es $x-x'=\alpha$, $y-y'=\beta$, $z-z'=\gamma$, ó $x=x'+\alpha$, $y=y'+\beta$, $z=z'+\gamma$: sustituyendo estos valores en las tres ecuaciones, estas serán

$$\alpha=\frac{A}{C}\gamma,\ \beta=\frac{B}{C}\gamma \ \ldots\ [1],$$

$$A(x'+\alpha)+B(y'+\beta)+C(z'+\gamma)+D=0,$$

ó $$A\alpha+B\beta+C\gamma+Ax'+By'+Cz'+D=0,$$

y haciendo por un momento $Ax'+By'+Cz'+D=D'$, la ecuacion del plano será

$$A\alpha+B\beta+C\gamma+D'=0 \ \ldots\ [2].$$

De las tres ecuaciones [1] y [2] resultan

$$\alpha=-\frac{AD'}{A^2+B^2+C^2},\ \beta=-\frac{BD'}{A^2+B^2+C^2},\ \gamma=-\frac{CD'}{A^2+B^2+C^2}.$$

La fórmula de la distancia de los puntos es actualmente

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2;$$

luego sustituyendo en esta ecuaccion los valores de α, β y γ, será

$$\delta^2=\frac{A^2D'^2+B^2D'^2+C^2D'^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}=\frac{D'^2}{A^2+B^2+C^2},$$

$$\delta=\pm\frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\pm\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

De estos dos signos deberá tomarse el conveniente para que este valor sea positivo

311. *Hallar el ángulo que forman dos planos, siendo los ejes rectangulares.*

Sean las ecuaciones de los dos planos $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$. Tiro por el orígen dos perpendiculares á dichos planos, y el ángulo que formen estas perpendiculares, será el ángulo de los planos. Las ecuaciones de estas perpendiculares son $x=az$, $y=bz$; $x=a'z$, $y=b'z$, en las que $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$, $a'=\frac{A'}{C'}$, $b'=\frac{B'}{C'}$. El coseno del ángulo que forman las dos rectas es [274, 6.°]

$$\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

sustituyendo en esta espresion los valores de a,a',b,b', será, llamando V al ángulo de los planos,

$$\cos V = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Si los planos son perpendiculares entre sí, será $\cos V=0$, y por consiguiente $AA'+BB'+CC'=0$.

Al contrario, si se verifica la ecuacion $AA'+BB'+CC'=0$, será $\cos V=0$, $V=90°$, es decir, que los dos planos serán perpendiculares entre sí.

Si los planos fuesen paralelos, sería $\cos V=1$, y por consiguiente

$$(AA'+BB'+CC')^2=(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2);$$

simplificando esta ecuacion, se halla

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

conforme lo hemos hallado [300]; mas la demostracion actual supone que los ejes son rectangulares.

312. *Hallar los ángulos que forma un plano con los coordenados; siendo los ejes rectangulares.*

Tiro por el orígen una recta perpendicular al plano, el ángulo que forme con el eje Oz, será igual al que forma el plano con el xy. Hemos hallado [*Pág.* 348] $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$;

y pues $a=\dfrac{A}{C}$, $b=\dfrac{B}{C}$; será $\cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Igualmente se halla $\cos 6=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Consecuencias. 1.ª *La suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos, que un plano forma con los coordenados es igual á la unidad.*

Elevando al cuadrado y sumando las tres fórmulas $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos 6=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, resulta

$$\cos^2\alpha+\cos^2 6+\cos^2\gamma=1.$$

2.ª El coseno del ángulo que forman dos planos, puede hallarse en funcion de los cosenos de los ángulos que dichos planos forman con los coordenados.

En efecto, $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\ \cos\alpha' = \frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\cos\beta' = \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\ \cos\gamma' = \frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

luego $\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' =$

$$\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}} = \cos U.$$

313. *Hallar el ángulo de una recta y un plano; siendo los ejes rectangulares.*

Tiro por un punto (x', y', z') de la recta dada una perpendicular al plano, y formará con la recta un ángulo complemento del que se busca.

Sean $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuacion del plano, $x=az+\alpha$, $y=bz+b$ las de la recta dada.

Llamando a' y b' á las tangentes de los ángulos que forman con el eje Oz las proyecciones de la perpendicular al plano, tendremos [307] $a'=\frac{A}{C}$, $b'=\frac{B}{C}$. El coseno del ángulo que forman estas dos rectas, es $\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$;

luego sustituyendo en vez de a' y b' sus valores, tendremos, llamando U al ángulo pedido, sen $U = \frac{aA+bB+C}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Si la recta es paralela al plano, será $U=0$, sen $U=0$, y por consiguiente $aA+bB+C=0$, conforme á lo demostrado en el núm. 303; pero la demostracion actual supone que los ejes son rectangulares, y no es por lo tanto tan general como la que se dió en dicho número.

314. *Hallar la ecuacion de un plano que pasa por una recta oblícua ó paralela á otro plano, siendo además dicho primer plano perpendicular al segundo: ejes rectangulares.*

Sean $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$ las ecuaciones de la recta dada,

$Ax+By+Cz+1=0$ la del plano dado, $A'x+B'y+C'z+1=0$ la ecuacion pedida, siendo A', B' y C' las incógnitas de la cuestion. Para hallar estas tres incógnitas, tenemos primeramente, por hallarse la recta dada en el plano cuya ecuacion se pide [303],

$$A'a+B'b+C'=0,\ A'\alpha+B'b+1=0,$$

y ademas por ser los dos planos perpendiculares entre sí,

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

Estas tres ecuaciones determinan los valores de las tres incógnitas A', B', C'.

CAPITULO VII.

Transformacion de las coordenadas en el espacio.

315. La transformacion de las coordenadas en el espacio tiene el mismo objeto que la transformacion de las coordenadas en el plano, á saber: teniendo la ecuacion de una superficie con respecto á ciertos ejes, hallar la ecuacion de la misma con respecto á otros ejes diferentes de los primeros, pero cuya posicion esté determinada con respecto á estos.

Para resolver este problema, se hallan los valores de las coordenadas primitivas de un punto en funcion de las coordenadas nuevas del mismo; y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la superficie, se tendrá la ecuacion de la misma con respecto á los nuevos ejes.

316. Antes de entrar en la resolucion de este problema, demostraremos los dos teoremas siguientes:

1.° *La proyeccion de una recta limitada sobre otra indefinida es igual al producto de la primera por el coseno del ángulo agudo que forman las dos.*

La demostracion de este teorema es muy sencilla y fácil, cuando las dos rectas están en un mismo plano. Demostrémoslo suponiendo que las dos rectas no están en un mismo plano

Fig. 40. Sea AB la recta cuya proyeccion sobre la XY es la PQ, y α el ángulo agudo que forman las dos rectas: digo que $PQ=AB\cos\alpha$. Para demostrarlo, tiremos por el punto A una paralela AR á la XY, y desde el punto Q la QR paralela á la PA, y tiremos tambien la recta BR. El paralelógramo $APQR$ es rectángulo, y por tanto la PQ es perpendicular al plano BQR; luego tambien la AR paralela á la PQ, es perpendicular al mismo plano, y por consiguiente á la recta RB. Tenemos ahora en el triángulo rectángulo ABR $AR=AB\cos BAR$; luego $PQ=AB\cos\alpha$.

Fig 41. 2.° *Si dos móviles salen de uno de los vértices de un polígono plano ó alabeado* (a), *y uno de los dos recorre un lado del mismo polígono, y el otro recorre sucesivamente los otros lados de dicho polígono, la proyeccion del primer lado es igual á la suma de las proyecciones de los otros lados.*

El enunciado de este teorema exije el convenio siguiente: se consideran como positivas las proyecciones de los lados tomadas en un sentido, por ejemplo en el XY, y como negativas las proyecciones de los lados tomadas en el sentido opuesto al primero.

Si por ejemplo, saliendo los dos móviles del vértice A recorre el uno el lado AB, y el otro los lados AE, ED, DC y CB, las proyecciones de estos lados serán, segun el convenio, $A'B'$, $A'E'$, $E'D'$, $-D'C'$, $-C'B'$.

Esto supuesto, tenemos evidentemente

$$A'B'=A'E'+E'D'-D'C'-C'B',$$

ó

$$A'B'=A'E'+E'D'+(-D'C')+(-C'B')\ldots\ldots [M],$$

conforme al enunciado del teorema.

NOTA. Llamemos α, β, γ.... á los ángulos que los lados del polígono forman con el sentido positivo de la XY, estando los vértices de dichos ángulos en los primeros estremos de los lados, estos ángulos serán agudos cuando las proyecciones sean positivas, rectos cuando las proyecciones sean nulas, y obtusos cuando sean negativas: tenemos por lo tanto, en virtud del teorema primero,

$A'B'=AB\cos\alpha$, $A'E'=AE\cos\beta$, $E'D'=ED\cos\gamma$, $C'D'=CD\cos[180°-\delta]$, ó $-C'D'=CD\cos\delta$, $C'B'=CB\cos[180°-\varepsilon)$, ó $-C'B'=CB\cos\varepsilon$:

por consiguiente, sustituyendo estos valores en la igualdad $[M]$, será

$$AB\cos\alpha=AE\cos\beta+ED\cos\gamma+CD\cos\delta+CB\cos\varepsilon,$$

ecuacion en que está cifrado el teorema.

317. Primer caso de transformacion.

Pasar de unos ejes á otros que les sean paralelos.

Fig 42. Sean Ox, Oy, Oz los ejes primitivos; $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$

(a) Entendemos por polígono *alabeado* la línea quebrada cerrada, cuyos lados no estan todos en un mismo plano.

los nuevos; a, b, c, las coordenadas primitivas del nuevo orígen O', y M un punto cualquiera del espacio: llamemos x,y,z á sus coordenadas antiguas, y x', y', z' á las nuevas; y sea N el punto en que la $MQ=z$ corta al plano $x'y'$. Tendremos evidentemente $$MQ=MN+NQ;$$
y pues $NQ=O'P=c$, por ser rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos, será

$$z=z'+c.$$

Del mismo modo se ve que

$$x=x'+a,$$

y que

$$y=y'+b;$$

fórmulas que, aunque halladas en el caso mas fácil, sabemos son generales, en virtud de los signos que tienen las coordenadas.

318. 2.° caso. *Pasar de ejes rectangulares á oblicuángulos ó rectangulares que tienen el mismo orígen.*

Fig. 43. Sean Ox,Oy,Oz los sentidos positivos de los ejes primitivos, Ox',Oy',Oz' los de los nuevos: llamemos $(x'x),(x'y),(x'z)$ á los tres ángulos $x'Ox,x'Oy,x'Oz$, es decir á los ángulos que forman los sentidos positivos de los ejes nuevos con los antiguos; $(y'x),(y'y),(y'z)$ á los $y'Ox$, $y'Oy,y'Oz$; $(z'x),(z'y),(z'z)$ á los tres $z'Ox,z'Oy,z'Oz$; y tiremos las perpendiculares MQ,MP, MR á los tres ejes primitivos: tendremos $OP=x$, $OQ=y$, $OR=z$. Señalemos tambien las coordenadas nuevas $MP'=z'$, $P'Q'=y'$, $OQ'=x'$ del mismo punto, y tiremos por último la OM.

En el cuadrilátero alabeado $OQ'P'M$ tendremos, segun el teorema [316, 2.°], que OP, proyeccion de la OM sobre la Ox, será igual á la suma de las proyecciones de los otros tres lados sobre la misma recta Ox.

Igualmente la proyeccion OQ de la OM sobre el eje Oy será igual á la suma de las proyecciones de los tres lados OQ', $Q'P$, $P'M$ del cuadrilátero sobre la misma recta Oy; y la proyeccion OR del lado OM sobre la Oz será igual á la suma de las proyecciones de los otros tres lados del cuadrilátero sobre la misma recta Oz: por lo tanto [316, 2.° nota]

$$\begin{aligned} x&=x'\cos(x'x)+y'\cos(y'x)+z'\cos(z'x),\\ y&=x'\cos(x'y)+y'\cos(y'y)+z'\cos(z'y),\\ z&=x'\cos(x'z)+y'\cos(y'z)+z'\cos(z'z). \end{aligned}$$

Los nueve ángulos que entran en estas fórmulas, no son independientes entre sí; si los nuevos ejes son oblicuángulos, deben satisfacer á las tres condiciones [Pág. 348]

$$\cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1,$$
$$\cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1,$$
$$\cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1.$$

Si los nuevos ejes son tambien rectangulares, dichos nueve ángulos estan ligados, además, por otras tres ecuaciones; pues siendo el coseno del ángulo de dos rectas igual á la suma de los productos de los cosenos de los ángulos que dichas dos rectas forman con los tres ejes, observando que son rectos los tres ángulos $(x'y')$,$(x'z')$,$(y'z')$, tendremos estas otras tres relaciones:

$$\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z)=0,$$
$$\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z)=0,$$
$$\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z)=0.$$

Por consiguiente los nuevos ejes rectangulares quedarán determinados, si se dan tres de estos nueve ángulos; pues los otros seis podrán conocerse, en funcion de los tres ángulos dados, por medio de estas seis relaciones.

319. Las fórmulas correspondientes al caso *pasar de ejes oblicuángulos á rectangulares*, pudieran hallarse resolviendo las ecuaciones del caso anterior con respecto á x',y',z'; y las correspondientes al caso *pasar de ejes oblicuángulos á otros oblicuángulos*, pudieran hallarse pasando primeramente de los oblicuángulos primitivos á otros rectangulares, y de estos á los nuevos oblicuángulos. Todas estas fórmulas son completamente inútiles, por lo que solo hacemos la indicacion precedente.

320. Nota. Si además de variar la direccion de los ejes, varía tambien el orígen, se pasará primeramente de los ejes dados á otros paralelos que pasan por el nuevo orígen, y de estos se pasará en seguida á los nuevos ejes; ó lo que es igual, á los valores de las coordenadas antiguas en funcion de las nuevas se añadirán las coordenadas a,b,c del nuevo orígen.

321. *Fórmulas de Euler* para pasar de ejes rectangulares á otros tambien rectangulares, hallándose el eje Ox' sobre el plano xy.

Fig. 44. Sean Ox,Oy,Oz los ejes rectangulares primitivos, Ox',Oy',Oz' los ejes rectangulares nuevos, hallándose el eje Ox' en el plano xy.

La posicion de los nuevos ejes quedará determinada, conociendo el ángulo $xOx'=\varphi$, y el diedro $z'Ox'x=\theta$ que forma el plano $z'x'$ con el xy.

Tiremos por el punto O en el plano xy la perpendicular Oy'' á la recta Ox', y pasemos de los ejes rectangulares Ox,Oy á los rectangulares Ox',Oy'': las fórmulas son [*Pág.* 80]

$$x=x'\cos\varphi-y''\operatorname{sen}\varphi,$$
$$y=x'\operatorname{sen}\varphi+y''\cos\varphi.$$

Observemos ahora que siendo perpendiculares á la Ox' las cuatro rectas Oy'',Oy',Oz,Oz', la primera por construccion y las otras tres por hipótesi, las cuatro estan en un mismo plano: pasemos pues de los ejes rectangulares Oy'', Oz á los rectangulares en el mismo plano Oy',Oz'; las fórmulas son:

$$\left.\begin{aligned} y''&=y'\cos y'Oy''-z'\operatorname{sen}y'Oy'',\\ z&=y'\operatorname{sen}y'Oy''+z'\cos y'Oy''\end{aligned}\right\}\ [1],$$

ó puesto que el ángulo $y'Oy''=zOz'$ es la medida del diedro formado por los dos planos $zOx',z'Ox'$, y por tanto es complemento del diedro θ, tendremos:

$$y''=y'\operatorname{sen}\theta-z'\cos\theta,$$
$$z=y'\cos\theta+z'\operatorname{sen}\theta.$$

Sustituyendo en las ecuaciones [1] el valor de y'', tendremos ya los valores de x,y,z en funcion de x',y',z', que serán:

$$x=x'\cos\varphi-y'\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta+z'\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,$$
$$y=x'\operatorname{sen}\varphi+y'\cos\varphi\operatorname{sen}\theta-z'\cos\varphi\cos\theta,$$
$$z=y'\cos\theta+z'\operatorname{sen}\theta.$$

329. *Fórmulas para hallar la ecuacion de la interseccion de una superficie por un plano, estando los ejes rectangulares en el mismo plano secante.*

Fig. 44. Supongamos que se quiera hallar la interseccion de la superficie por medio del plano $Oz'x'$.

En virtud de las fórmulas de Euler, referiremos primeramente la superficie á los tres ejes rectangulares Ox', Oy', Oz', y en seguida haremos $y'=0$ en la nueva ecuacion, con lo que tendremos la ecuacion de la superficie en el plano secante referida á los dos ejes rectangulares Ox', Oz', tomadas en él. Mas el mismo resultado se obtendrá, haciendo primeramente $y'=0$ en las fórmulas de trasformacion, y sustituyendo los valores de x,y,z en la ecuacion de la superficie. Haciendo $y'=0$ en las fórmulas de Euler, estas serán:

$$x = x' \cos\varphi + z' \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\varphi - z' \cos\varphi \cos\theta,$$
$$z = z' \operatorname{sen}\theta;$$

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion de la superficie, la ecuacion que resulte, será la de la interseccion por el plano $Ox'z'$ referida á los ejes rectangulares Oz', Ox'.

CAPITULO VII.

Clasificacion de las superficies.

323. Las superficies, asi como las lineas planas, se dividen en algébricas y trascendentes, segun que su ecuacion es algébrica ó trascendente. Las superficies algébricas se dividen en órdenes ó grados, segun el grado de sus ecuaciones, pues este no varía aunque varien los ejes (a). Asi, las superficies de primer órden ó de primer grado son las superficies representadas por la ecuacion general de primer grado con tres variables

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

que ya hemos visto [279] son superficies planas. Las superficies de segundo órden ó de segundo grado son las representadas por la ecuacion general de segundo grado con tres variables

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'xz + 2B''yz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

y asi sucesivamente.

324. Si el primer miembro de una ecuacion del grado m, con tres variables, puede descomponerse en factores racionales y enteros con respecto á dichas variables, la ecuacion no representa una superficie del grado m, sino tantas superficies del órden que indican sus factores, cuantos son estos factores diferentes entre sí.

Asi, la ecuacion $x^3 - x^2y + axz = 0$, que puede escribirse de este otro modo:

$$x(x^2 - xy + az) = 0,$$

representa un plano cuya ecuacion es $x = 0$, y una superficie de segundo órden cuya ecuacion es $x^2 - xy + az = 0$.

Una ecuacion con tres variables puede representar varios puntos aislados, y tambien puede no representar nada.

(a) Esto se demuestra del mismo modo que se demostró [44] que la transformacion de las coordenadas (en el plano) no altera al grado de una ecuacion.

Así, la ecuacion $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2+(z^2-c^2)^2=0$ se verifica siendo $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$; de donde resultan las soluciones:

$$\begin{array}{lll} x=\ \ a, & y=\ \ b, & z=\ \ c; \\ x=\ \ a, & y=-b, & z=\ \ c; \\ x=-a, & y=\ \ b, & z=\ \ c; \\ x=-a, & y=-b, & z=\ \ c; \\ x=\ \ a, & y=\ \ b, & z=-c; \\ x=\ \ a, & y=-b, & z=-c; \\ x=-a, & y=\ \ b, & z=-c; \\ x=-a, & y=-b, & z=-c. \end{array}$$

Luego la ecuacion propuesta representa ocho puntos aislados.

La ecuacion $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2+(z^2-c^2)^2+d^2=0$ no representa nada, pues la suma de cuatro cantidades positivas, de las que una es constante, no puede ser cero.

525. *Si un plano corta á una superficie del órden* m, *la línea de interseccion no puede ser de mayor grado que* m. *Si una línea recta corta á una superficie del órden* m, *el número de puntos, en que la corta, no podrá ser mayor que* m.

Para demostrar el primero de estos dos teoremas, tomemos nuevos ejes de coordenadas $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, tales que los dos primeros se hallen en el plano secante: la ecuacion de la superficie con respecto á estos nuevos ejes será tambien del grado m, puesto que la transformacion de las coordenadas no altera al grado de una ecuacion. Haciendo en dicha ecuacion $z'=0$, la ecuacion $f(x', y')=0$ que resulte, será la ecuacion de la interseccion del plano secante con la superficie; y es evidente que esta ecuacion no puede ser de grado mas alto que m.

Para demostrar el segundo teorema, tomemos la recta secante por eje de la x', y por ejes de las y', z' dos rectas cualesquiera que salgan de un punto de la recta secante: la ecuacion de la superficie con respecto á estos tres nuevos ejes será tambien del grado m Haciendo en esta nueva ecuacion $y'=0$, $z'=0$, la ecuacion $f(x')=0$ que resulte, no será de mayor grado que m; y los valores absolutos de sus raices reales serán las distancias al orígen de los puntos en que la recta corta á la superficie; luego este número de puntos de interseccion no puede ser mayor que m.

LIBRO II.

Superficies de segundo grado.

CAPITULO I.

Planos tangentes á las superficies curvas algébricas.

326. Si se corta una superficie curva por medio de un plano, la interseccion será, en general, una curva, y la tangente á esta curva en cualquiera de sus puntos se llama *tangente* á la superficie en dicho punto.

Como por un punto de una superficie pueden pasar infinitos planos secantes, se infiere que por un punto de una superficie pueden pasar infinitas curvas, y que por tanto una superficie tiene infinitas tangentes en uno cualquiera de sus puntos.

327. *Dada la ecuacion de una superficie curva y las coordenadas de uno de sus puntos, hallar la ecuacion de la superficie formada por las infinitas tangentes á la superficie en dicho punto.*

Sean $f(x,y,z)=0$ la ecuacion conocida de la superficie y x', y', z' las coordenadas de uno de sus puntos: tiremos por dicho punto una secante á cualquiera de las infinitas curvas que pasan por el mismo, y sean $x'+h$, $y'+k$, $z'+l$ las coordenadas del segundo punto de interseccion de la secante con la curva: por pertenecer este segundo punto á la superficie, será

$$f(x'+h,\ y'+k,\ z'+l)=0.$$

Desenvolviendo esta funcion por el teorema de Taylor, estendido á tres variables [Nota 1.ª al fin de la *Geom. analítica*], será

$$\left.\begin{array}{l} f(x',y',z') + f'_{x'} \cdot h + f''_{x'^2} \cdot \dfrac{h^2}{2} \\ \qquad + f'_{y'} \cdot k + f''_{y'^2} \cdot \dfrac{k^2}{2} \\ \qquad + f'_{z'} \cdot l + f''_{z'^2} \cdot \dfrac{l^2}{2} \\ \qquad\qquad + f''_{x'y'} \cdot hk \\ \qquad\qquad + f''_{x'z} \cdot hl \\ \qquad\qquad + f''_{y'z'} \cdot kl + \text{etc} \end{array}\right\} = 0.$$

Por corresponder el punto (x', y', z') á la superficie, es $f(x', y', z')=0$; luego suprimiendo este término, y partiendo la ecuacion por l, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x'} \cdot \dfrac{h}{l} \cdot + f''_{x'^2} \cdot \dfrac{h}{l} \cdot \dfrac{h}{2} \\ + f'_{y'} \cdot \dfrac{k}{l} \cdot + f''_{y'^2} \cdot \dfrac{k}{l} \cdot \dfrac{k}{2} \\ + f'_{z'} \qquad + f''_{z'^2} \cdot \dfrac{l}{2} \\ \qquad\qquad + f''_{x'y'} \cdot \dfrac{h}{l} \cdot k \\ \qquad\qquad + f''_{x'z'} \cdot h \\ \qquad\qquad + f''_{y'z'} \cdot k + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Imaginemos ahora que la secante se mueva alrededor del punto (x',y',z'), de modo que el segundo punto de interseccion se vaya acercando al primero, y que por último estos dos puntos se reunan en uno, en cuyo caso $h=0$, $k=0$, $l=0$: llamando α y 6 á los valores que en este caso reciben $\dfrac{h}{l}$ y $\dfrac{k}{l}$, tendremos entre α y 6 la relacion

$$f'_{x'} \cdot \alpha + f'_{y'} \cdot 6 + f'_{z'} = 0 \quad \ldots\ldots [1]$$

Observemos ahora que las ecuaciones de la secante que pasa por los dos puntos (x',y',z'), $(x'+h,\ y'+k,\ z'+l)$, son

$$x - x' = \frac{h}{l}(z - z'),\ y - y' = \frac{k}{l}(z - z');$$

y las ecuaciones de la tangente á la curva en el punto (x', y', z') son por lo tanto

$$x-x'=\alpha(z-z'),\ y-y'=\beta(z-z'):$$

luego si entre la ecuacion [1] y estas dos eliminamos los parámetros variables α y β, la ecuacion que resulta, á saber

$$f'_{x'}\cdot(x-x')+f'_{y'}\cdot(y-y')+f'_{z'}\cdot(z-z)=0$$

será la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de una tangente cualquiera á la superficie, ó lo que es igual, será la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de la superficie formada por todas las tangentes á las infinitas curvas que pasan por el punto de contacto.

Como esta ecuacion es de primer grado, se infiere que es plana la superficie formada por todas las tangentes á una superficie en uno de sus puntos; ó bien que *todas las tangentes á una superficie en uno de sus puntos estan en un mismo plano* (a).

328. Llámase *plano tangente* á una superficie en uno de sus puntos el plano formado por las infinitas tangentes á la superficie en dicho punto.

Acabamos de ver que siendo la ecuacion de la superficie $f(x,y,z')=0$, la del plano tangente á la misma en el punto (x',y',z) es

$$f'_{x'}\cdot(x-x')+f'_{y'}\cdot(y-y')+f'_{z'}\cdot(z-z')=0.$$

329. Resolvamos directamente esta misma cuestion para las superficies de segundo grado.

La ecuacion general de las superficies de segundo órden es

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+Cx+C'y+C'z+D=0:$$

sean x',y',z' las coordenadas del punto de contacto: tiremos por este punto una secante á cualquiera de las curvas que pasan por dicho punto, y estan situadas en la superficie; sean $x'+h,y'+k,z'+l$ las coordenadas del segundo punto de interseccion de la secante con la curva; tendremos

$$A(x'+h)^2+A'(y'+k)^2+A''(z'+l)^2+B(x'+h)(y'+k)+B'(x'+h)$$
$$(z'+l)+B''(y'+k)(z'+l)+C(x'+h)+C'(y'+k)+C''(z'+l)+D=0,$$

(a) *Fig.* 45. En algunas superficies existen puntos, que pueden llamarse *singulares*, tales que la superficie formada por las infinitas tangentes en cada uno de dichos puntos á las infinitas curvas que pasan por él, no forman un plano. Por ejemplo, si un meridiano ADB de una superficie de revolucion corta al eje, de manera que la tangente AC al meridiano en el punto A de interseccion no sea perpendicular á dicho eje AB, las infinitas tangentes á la superficie en dicho punto A, forman evidentemente un cono de revolucion.

ó desenvolviendo

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+Bx'y'+B'x'z'+B''y'z'+$$
$$(2Ah+Bk+B'l+C)x'+(2A'k+Bh+B''l+C')y'+(2A''l+B'h+$$
$$B''k+C'')z'+Ah^2+A'k^2+A''l^2+Bhk+B'hl+B''kl+Ch+$$
$$C'k+C''l+D=0.$$

Por corresponder en el punto x',y',z' á la superficie, es $Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+Bx'y'+B'x'z'+B''y'z'+Cx'+C'y'+C''z'+D=0$; luego suprimiendo esta espresion en la ecuacion anterior, y separando los factores comunes h,k y l, tendremos

$$h\,(2Ax'+By'+B'z'+Ah+Bk+B'l+C)+$$
$$k\,(Bx'+2A'y'+B''z'+A'k+B''l+C')+$$
$$l\,(B'x'+B''y'+2A''z'+A''l+C'')=0:$$

partiendo por l, y pasando al caso del límite, es decir, al caso en que la secante á la curva se convierte en tangente, ó en que h, k y l son ceros, y llamando α y β á los valores que entonces toman las razones $\frac{h}{l}$ y $\frac{k}{l}$, resulta

$$\alpha\,(2Ax'+By'+B'z'+C)+\beta\,(Bx'+2A'y'+B''z'+C')+$$
$$(B'x'+B''y'+2A''z'+C'')=0;$$

ó bien, observando que los coeficientes de α y β, y el tercer término de esta ecuacion son las derivadas del primer miembro de la ecuacion de la superficie con respecto á las variables x',y',z', tendremos entre α y β la relacion

$$\alpha f'_{x'}+\beta f'_{y'}+f'_{z'}=0 \;\ldots\; [1].$$

Ahora, las ecuaciones de la secante que pasa por los dos puntos (x',y',z'), $(x'+h, y'+k, z'+l)$, son

$$x-x'=\frac{h}{l}(z-z'),\quad y-y'=\frac{k}{l}(z-z');$$

y por consiguiente las de la tangente á la misma curva en el punto (x',y',z') son

$$x-x'=\alpha(z-z'),\quad y-y'=\beta(z-z'):$$

luego si entre la ecuacion [1] y estas dos eliminamos los parámetros variables α y β, la ecuacion que resulta

$$f'_{x'}\,.\,(x-x')+f'_{y'}\,.\,(y-y')+f'_{z'}\,.\,(z-z')=0$$

será la relacion entre las coordenadas de un punto cualquiera de una tangente cualquiera á la superficie en el punto (x',y',z); luego dicha ecuacion será la ecuacion de la superficie formada por todas las tangentes á la superficie de segundo órden en el punto (x', y', z').

Siendo esta ecuacion de primer grado, se infiere que todas las tangentes á la superficie de segundo grado en uno de de sus puntos están en un mismo plano, el cual es el *plano tangente*.

Vemos, pues, que la ecuacion del plano tangente á la superficie de segundo órden en el punto (x', y', z') es

$$f'_{x'}\cdot(x-x')+f'_{y'}\cdot(y-y')+f'_{z'}\cdot(z-z')=0.$$

330. Nota. El plano tangente quedará determinado siempre que lo estén dos tangentes á la superficie en el punto de contacto.

331. Es conveniente conocer la siguiente teoría de los planos tangentes.

Toda línea curva plana, ó de doble curvatura, puede considerarse como una línea poligonal de infinitos lados infinitamente pequeños: cada uno de estos lados infinitamente pequeños se llama un *elemento* de la curva.

Esto supuesto, la definicion general de la tangente á una curva en un punto dado es la siguiente: se llama *tangente* á una curva en uno de sus puntos la prolongacion del elemento de la curva en el cual se halla dicho punto.

Toda superficie curva puede considerarse como una superfie poliedral de infinitas caras infinitamente pequeñas: cada una de estas caras infinitamente pequeñas es un *elemento* de la superficie.

Segun esto, se llama *plano tangente* á una superficie en uno de sus puntos la prolongacion del elemento de la superficie en el cual se halla dicho punto.

De esta definicion del plano tangente se infiere que todas las tangentes á una superficie en uno de sus puntos están en el plano tangente á la superficie en dicho punto: pues cada una de las tangentes tiene un elemento, ó dos puntos infinitamente próximos, en el plano tangente, y por tanto se halla enteramente en dicho plano.

Puede suceder que una recta que tenga dos puntos infinitamente próximos en el plano tangente, se halle enteramente en la superficie, como sucede por ejemplo con las generatrices de las superficies cilíndricas y cónicas: en tal caso el plano tangente y la superficie tienen comun dicha recta; y si dos rectas, que tienen dos puntos infinitamente próximos en el plano tangente se hallan enteramente en la superficie, como veremos ejemplos, el plano tangente es tambien entonces secante á la superficie. Las rectas que coinciden con la superficie se cuentan en el número de las tangentes á la misma superficie.

332. *La proyeccion de la tangente á una curva del espacio es tangente á la proyeccion de dicha curva.*

Fig. 46. Sea mp una curva del espacio, mn el elemento de esta curva, cuya prolongacion es la tangente mt; sea $m'p'$ la proyeccion de dicha curva sobre uno cualquiera de los planos coordenados; $m'n'$ la proyeccion del elemento mn; $m'n'$ será el elemento de la proyeccion $m'p'$ de la curva; y la prolongacion $m't'$ de dicho elemento será la tangente á la proyeccion $m'p'$: mas $m't'$ es la proyeccion de la mt, por tener dos puntos m', n' proyecciones de los dos m, n de la mt; luego queda demostrado que $m't'$, proyeccion de la tangente mt á la curva mp, es tangente á la proyeccion $m'p'$.

Fig. 47. *Hallar la ecuacion del plano tangente á una superficie.*

Sea $f(x, y, z)=0$ la ecuacion de la superficie, y $ABCD$ el plano tangente á ella en el punto $M(x', y', z')$: la ecuacion de este plano será

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

ó
$$\frac{A}{C}(x-x')+\frac{B}{C}(y-y')+z-z'=0.$$

Cortemos la superficie y el plano $ABCD$ por otro plano MNR, que pase por el punto de contacto M y sea paralelo al xz: la interseccion MT de los dos planos $ABCD$ y MNR será tangente á la curva de interseccion MN en el punto M. La ecuacion de la proyeccion $M'T'$ de la tangente MT se hallará haciendo $y=y'$ en la ecuacion del plano tangente, y será por lo tanto

$$A(x-x')+C(z-z')=0,\ \text{ó}\ z-z'=-\frac{A}{C}(x-x').$$

Por otra parte la proyeccion $M'T'$ de la tangente MT es tangente á la proyeccion $M'N'$ en el punto M'; luego su coeficiente angular será $-\frac{f'_{x'}}{f'_{z'}}$; luego $\frac{A}{C}=\frac{f'_{x'}}{f'_{z'}}$.

Por igual razonamiento se obtiene $\frac{B}{C}=\frac{f'_{y'}}{f'_{z'}}$.

Luego la ecuacion del plano tangente $ABCD$ es

$$\frac{f'_{x'}}{f'_{z'}}(x-x')+\frac{f'_{y'}}{f'_{z'}}(y-y')+(z-z')=0,$$

ó $$f'_{x'}.(x-x')+f'_{y'}.(y-y')+f'_{z'}.(z-z')=0.$$

333. *El plano tangente á una superficie de revolucion es perpendicular al plano del meridiano que pasa por dicho punto.*

Fig. 48. Sea MTV el plano tangente determinado por las tangentes MT y MV al paralelo BMC y meridiano AM, que pasan por el punto de contacto M: digo que el plano tangente MTV es perpendicular al plano AOM del meridiano AM.

En efecto, la tangente MT en el punto M al paralelo BMC se halla en este plano, y es perpendicular al radio OM: este radio es la interseccion del paralelo y meridiano; luego dicha recta MT es perpendicular al plano AMO; y por tanto el plano tangente TMV es tambien perpendicular al plano AOM del meridiano AM.

334 Se llama *normal* á una superficie la perpendicular al plano tangente en el punto de contacto.

Hallar la ecuacion de la normal á una superficie, siendo rectangulares los ejes de coordenadas.

Pasando la normal por el punto de contacto, sus ecuaciones serán

$$x-x'=a(z-z'),\ \ y-y'=b(z-z'),$$

siendo a y b desconocidas. Mas siendo la ecuacion del plano tangente

$$f'_{x'}.(x-x')+f'_{y'}.(y-y')+f'_{z'}.(z-z')=0,$$

ó $$f'_{x'}.x+f'_{y'}.y+f'_{z'}.z-(x'f'_{x'}+y'f'_{y'}+z'f'_{z'})=0,$$

será [307] $a=\frac{f'_{x'}}{f'_{z'}}$, $b=\frac{f'_{y'}}{f'_{z'}}$; luego las ecuaciones de la normal son

$$x-x'=\frac{f'_{x'}}{f'_{z'}}(z-z'),\ y-y'=\frac{f'_{y'}}{f'_{z'}}(z-z').$$

CAPITULO II.

Centro y planos diametrales de las superficies de segundo orden.

Artículo 1.º

Centro de las superficies de segundo orden.

335. Llámase *centro* de una superficie cualquiera el punto que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas que pasan por él.

Fig. 49. *Si la ecuacion de una superficie de segundo orden carece de los términos lineales, la superficie tendrá centro y el orígen estará en él.*

Careciendo la ecuacion de los términos lineales, su forma general será

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+D=0.$$

Tiremos por el orígen una cuerda MN, y sean $x=az$, $y=bz$ sus dos ecuaciones: igualando las coordenadas entre la ecuacion de la superficie y las dos de la cuerda, y eliminando las variables x é y, resulta la ecuacion

$$(Aa^2+A'b^2+A''+Bab+B'a+B''b)z^2=0,$$

ecuacion que da dos valores iguales y de signo contrario para z, esto es, $MP=-(-NQ)$, ó $MP=NQ$: luego los dos triángulos OMP y ONQ son iguales, y por tanto $OM=ON$, es decir que el orígen biseca á toda cuerda que pasa por él; luego el orígen es centro de la superficie.

Recíproco. *Si el orígen de las coordenadas está en el centro de una superficie de segundo grado, la ecuacion de la superficie carecerá de los términos lineales.*

La ecuacion general de la superficie de segundo orden es $Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+Cx+C'y+C''z=0$; digo que si el orígen O es centro de la superficie representada por esta ecuacion, será $C=0$, $C'=0$, $C''=0$.

Fig. 49. En efecto, tiremos por el orígen, ó sea por el centro, una cuerda MN, que no coincida con ninguno de los tres ejes de coordenadas; sean $x=az$, $y=bz$ las ecuaciones de dicha cuerda; será $OM=ON$: luego los dos triángulos MOP, NOQ serán iguales, y por tanto $MP=NQ$. Igualemos ahora las coordenadas entre la ecuacion de la superficie y las de la cuerda, y eliminemos las variables x é y; resultará la ecuacion

$$(Aa^2+A'b^2+A''+Bab+B'a+B''b)z^2+(Ca+C'b+C'')z+D=0.$$

Los valores que en esta ecuacion tiene z, son MP y $-NQ$, cuya suma es 0; luego esta ecuacion debe carecer de su segundo término, es decir, que debemos tener

$$Ca+C'b+C''=0 \ldots\ldots [1].$$

Ahora, por la proyeccion $y=bz$, y por la cuerda MN imaginemos el plano proyectante de esta cuerda, y en este mismo plano tiremos otra cuerda que pase por el orígen: la proyeccion de esta nueva cuerda sobre el plano yz será la misma que la de la primera, y su proyeccion sobre el plano xz será diferente; de suerte que las ecuaciones de esta nueva cuerda serán $x=a'z$, $y=bz$; y del mismo modo que para la cuerda primera hallaremos la relacion

$$Ca'+C'b+C''=0 \ldots\ldots [2].$$

Restando las dos igualdades [1] y [2], tendremos $C(a-a')=0$, y como a y a' son diferentes, será $C=0$. Del mismo modo se demuestra que $C'=0$; y por consiguiente $C''=0$.

Corolario. *Si la ecuacion de segundo grado contiene algun término lineal, el orígen no está en el centro de la superficie. Si el orígen no está en el centro, la ecuacion de la superficie de segundo órden contendrá por lo menos uno de los tres términos lineales.*

336. *Hallar las coordenadas del centro de una superficie de segundo órden.*

La ecuacion general de esta superficie es

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y+2C''z+D=0;$$

sean x_1, y_1, z_1 las coordenadas del centro: traslademos el orígen á este punto, siendo los nuevos ejes paralelos á los primitivos, para lo cual haremos $x=x'+x_1$, $y=y'+y_1$, $z=z'+z_1$; y sustituyendo estos valores en la ecuacion de la superficie, y hallando los coeficientes de x', y', z', tendremos las tres ecuaciones que nos darán las coordenadas x_1, y_1, z_1, á saber [335, *Recíp.*]

$$f'_{x_1}=0,\ f'_{y_1}=0,\ f'_{z_1}=0,$$

es decir que las ecuaciones que dan las coordenadas del centro, análogamente á lo que se verifica en las curvas planas, son las tres derivadas de la ecuacion de la superficie igualadas á cero. Poniendo en vez de f'_{x_1}, f'_{y_1}, f'_{z_1} sus valores, dichas ecuaciones serán, suprimiendo los índices inútiles ya,

$$\left.\begin{array}{l} Ax+B\,y+B'z+C\;=0, \\ Bx+A'y+B''z+C'\;=0, \\ B'x+B''y+A''z+C''=0. \end{array}\right\} \quad [C]$$

Resolviendo estas ecuaciones, se hallarán los valores de las coordenadas x,y,z del centro, á saber

$$x=\frac{N}{D},\; y=\frac{N'}{D},\; z=\frac{N''}{D}.$$

Los valores de N, N', N'' y D pudieran deducirse de los valores que tienen x,y,z en las tres ecuaciones

$$\begin{array}{l} a\;\;x+b\;\,y+c\;\,z=d, \\ a'x+b'\,y+c'z=d', \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{array}\quad [Alg.\ 89];$$

reemplazando estas letras por sus valores actuales.

El valor de D, que nos importa tener presente, es

$$D=AA'A''+2BB'B''-AB''^2-A'B'^2-A''B^2,$$

que no es difícil retener, teniendo en cuenta que cada uno de los tres últimos términos tiene dos acentos.

Nota. A las ecuaciones $[C]$ llamaremos en adelante, para abreviar, *ecuaciones del centro.*

Articulo 2.°

Division de las superficies de segundo órden en superficies con un solo centro, en superficies sin centro y en superficies que tienen una infinidad de centros.

337. Las ecuaciones del centro son:

$$\begin{array}{l} A\,x+B\;y+B'z+C\;=0, \\ B\,x+A'y+B''z+C'\;=0, \\ B'x+B''y+A''z+C''=0, \end{array}$$

en las cuales x,y,z son las coordenadas del centro.

Estas ecuaciones pueden presentar los cuatro casos siguientes:

1.° Pueden ser distintas y compatibles.

2.° Pueden ser incompatibles, ó lo que es igual, formar un sistema imposible.

3.° Puede ser una de las tres consecuencia de las otras dos.

4.° Pueden ser dos de las tres idénticas á la tercera ó consecuencias de ella.

Primer caso. Siendo las ecuaciones del centro distintas y compatibles, cada una de las incógnitas x,y,z tendrá un solo valor real y finito, y por consiguiente la superficie de segundo órden tendrá en este caso un centro único.

Segundo caso. Si las tres ecuaciones del centro son incompatibles, ó forman un sistema imposible, la superficie no tendrá centro.

Tercer caso. Supongamos que las dos primeras ecuaciones del centro sean distintas y compatibles, y la tercera sea consecuencia de ellas: las dos primeras ecuaciones representan dos planos que se cortan; pues si fuesen paralelos, los coeficientes de las variables x,y,z serian proporcionales, y por tanto las dos primeras ecuaciones serian idénticas ó incompatibles, contra lo supuesto.

La tercera ecuacion representa un plano, el cual pasará necesariamente por la interseccion de los dos primeros; pues sino fuera asi, el tercer plano cortaria á la interseccion de los otros dos, ó seria paralelo á ella. En el primer caso las coordenadas reales y finitas del punto comun á los tres planos satisfarian á las tres ecuaciones del centro, y por tanto estas ecuaciones serian distintas y compatibles, contra lo supuesto. En el segundo caso los tres planos no tendrian punto comun alguno, y por consiguiente las tres ecuaciones propuestas no tendrian ninguna solucion, es decir que formarian un sistema imposible, contra lo supuesto.

Sea pues $A \overline{\qquad\quad} B$ la interseccion comun á los tres planos representados por las tres ecuaciones del centro: como las coordenadas de los infinitos puntos de la AB satisfacen á las tres ecuaciones del centro, se infiere que cada uno de estos puntos es un centro de la superficie. Cortemos la superficie, representada por la ecuacion $Ax^2+A'y^2+\ldots=0$, por medio de un plano que pase por la recta AB: la interseccion será una línea cuya ecuacion será de segundo grado [325], y esta interseccion tendrá una infinidad de centros, que serán todos los puntos de la recta AB; luego dicha interseccion se compondrá necesariamente de dos rectas paralelas á la AB y equidistantes de ella. Asi se ve que todo plano que pase por la recta AB, y corte á la superficie, la corta por dos paralelas á la AB: luego esta superficie se puede suponer engendrada por el movimiento de una recta siempre paralela á la AB; es decir que dicha superficie es un cilindro. Para averiguar la forma de la directriz de este cilindro, cortémosle por un plano perpendicular á la AB: la interseccion será una línea de segundo orden con centro, el cual será el punto en que el plano secante corta á la AB: la interseccion será pues una elipse ó una hipérbola; pero como las variedades de una elipse son un punto ó una elipse imaginaria, y la de una hipérbola son dos rectas que se cortan, podrá suceder que la ecuacion represente únicamente la recta interseccion AB, que represente un cilindro imaginario, ó dos planos que se cortan por la recta AB.

Para decidir cuál de estos cinco casos se verifica, hallaremos las proyecciones de la recta AB, y por ellas conoceremos á qué plano ó planos coordenados corta dicha recta ó eje AB, puesto que no puede ser paralela á la vez á los tres: como el cilindro es paralelo á la recta AB, cortará á los mismos planos que esta recta. Hallaremos pues la interseccion del cilindro con uno de los planos coordenados, y esta interseccion, que será una elipse, una hipérbola, un punto, dos rectas que se cortan ó nada, nos dirá si la superficie es un cilindro elíptico ó hiperbólico, una recta, dos planos que se cortan ó un cilindro imaginario. El cilindro quedará completamente determinado, puesto que se conoce su directriz y la posicion del eje.

Ejemplos. 1.º Sea la ecuacion

$$x^2+y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz-2x-2y-2z=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$x+y+z-1=0,\ \ y+x+z-1=0,\ \ 2z+x+y-1=0.$$

Siendo las dos primeras idénticas, solo tenemos dos ecuaciones distintas.

Las proyecciones del eje tienen las ecuaciones siguientes:

$$z-1=0,\quad z-1=0,\quad y+x-3=0;$$

y por ellas vemos que el eje del cilindro, y por consiguiente el cilindro, es paralelo al plano xy, mas no á ninguno de los otros dos planos coordenados. Hallemos pues la interseccion del cilindro con el plano xz, y resultará que esta interseccion tiene por ecuacion en el plano xz

$$x^2+2z^2+2xz-2x-2z=0,$$

la cual representa una elipse, que ya sabemos determinar [*Núm.* 92 *y siguientes*]; y por tanto la ecuacion propuesta representa un cilindro elíptico, que está completamente determinado.

2.º $\qquad x^2-y^2-2z^2+2xy-4yz+2y+2z=0.$

Las ecuaciones del centro son:

$$x+y=0,\ -y+x-2z+1=0,\ -2z-2y+1=0.$$

Eliminando la x entre las dos primeras, resulta una ecuacion idéntica á la tercera. Por consiguiente solo tenemos dos ecuaciones distintas del centro.

Las proyecciones del eje son:

$$x+y=0,\ y+z=\tfrac{1}{2},\ z-x=\tfrac{1}{2};$$

por consiguiente el cilindro encuentra á los tres planos coordenados. Hagamos pues $z=0$, y tendremos.

$$x^2-y^2+2xy+2y=0,$$

ecuacion que representa una hipérbola, y por tanto la ecuacion propuesta representa un cilindro hiperbólico; determinado ya, puesto que conocemos su directriz y la posicion de su eje.

3.º $$x^2+y^2-z^2-2xy+x-y=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$2x-2y+1=0,\ 2y-2x-1=0,\ 2z+1=0;$$

y pues las dos primeras son idénticas, solo son dos ecuaciones distintas. Como ellas no contienen mas que dos variables, son las ecuaciones de las proyecciones de la interseccion de los dos planos representados por ellas. La tercera proyeccion nos dice que el cilindro es paralelo al plano xy: su interseccion con el plano xz tiene por ecuacion $x^2-z^2+x-z=0$, ecuacion que evidentemente representa las dos rectas $x=z$, $x=-z-1$; luego la ecuacion representa dos planos que se cortan y son perpendiculares al plano xz.

4.º $$x^2+3y^2+4z^2-2xz-6yz=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$x-z=0,\ y-z=0,\ 4z-x-3y=0;$$

una de las cuales es consecuencia de las otras dos. Las proyecciones de la interseccion de los tres planos representados por estas ecuaciones son:

$$x-z=0,\ y-z=0,\ y-x=0;$$

luego el cilindro encuentra á los tres planos coordenados. Haciendo $z=0$ en la ecuacion propuesta, resulta $x^2+3y^2=0$, que representa un punto $(0,0)$; luego la ecuacion propuesta representa una recta, determinada por dos cualesquiera de sus tres proyecciones.

5.º $$x^2+3y^2+4z^2-2xz-6yz+1=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$x-z=0,\ y-z=0,\ y-x=0;$$

cualquiera de ellas se deduce de las otras dos; y por tanto no componen las tres mas que dos ecuaciones distintas. Las mismas ecuaciones nos dan la proyeccion de la interseccion de los tres planos que ellas representan, y por tanto dicha interseccion encuentra á los tres planos coordenados. Haciendo $z=0$ en la ecuacion propuesta, resulta $x^2+3y^2+1=0$, ecuacion que no representa nada: luego la ecuacion propuesta representa un cilindro imaginario.

Cuarto caso. Si dos de las tres ecuaciones del centro son consecuencias de la tercera, ó idénticas á ella, los coeficientes de cada una de estas dos son respectivamente iguales á los de la otra multiplicados por un mismo número positivo ó negativo: de suerte que siendo las tres ecuaciones del centro

$$Ax+By+B'z+C=0,$$
$$Bx+A'y+B''z+C'=0,$$
$$B'x+B''y+A''z+C''=0,$$

y las dos últimas, por ejemplo, consecuencias de la primera, será $B=mA$, $A'=mB$, $B''=mB'$, $C'=mC$; $B'=nA$, $B''=nB$, $A''=nB'$, $C''=nC$, siendo m y n números cualesquiera positivos ó negativos; ó bien

$$B=mA,\ A'=m^2A,\ B''=mnA,\ C'=mC,$$
$$B'=nA,\ B''=mnA,\ A''=n^2A,\ C''=nC;$$

luego la ecuacion de la superficie será en este caso:

$$Ax^2+m^2Ay^2+n^2Az^2+2mAxy+2nAxz+2mnAyz+2Cx+2mCy+2nCz+D=0,$$

ó $$A(x+my+nz)^2+2C(x+my+nz)+D=0.$$

Resolviendo esta ecuacion de segundo grado, hallaremos dos valores α, β para $x+my+nz$: si estos valores son reales, tendremos

$$x+my+nz=\alpha,\ x+my+nz=\beta,$$

ecuaciones que representan dos planos paralelos: si los dos valores α y β fuesen iguales, no tendríamos mas que una ecuacion $x+my+nz=\alpha$, que representa un plano: si dichas dos raices α y β son imaginarias, la ecuacion propuesta no representa nada.

Nota. Los valores de m y n se hallarán fácilmente por medio de la comparacion de las ecuaciones del centro.

Queda pues demostrado que en este caso la ecuacion propuesta representa dos planos paralelos, un solo plano ó nada.

Ejemplo. Sea la ecuacion

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-2xz+4yz+3x-6y-3z+a=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$2x-4y-2z+3=0$, $8y-4x+4z-6=0$, $2z-2x+4y-3=0$; dos de las cuales son consecuencias de la otra: luego la ecuacion propuesta representa dos planos paralelos, un solo plano ó nada.

Hemos demostrado que en este caso el primer miembro puede ponerse bajo la forma de una ecuacion de segundo grado con respecto á una funcion lineal de las tres variables: en este ejemplo es evidente que el primer miembro de la ecuacion propuesta puede ponerse bajo la forma

$$(x-2y-z)^2+3(x-2y-z)+a=0,$$

de donde resulta $x-2y-z=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-a}$.

Luego, si $a<\frac{9}{4}$, la ecuacion propuesta representa dos planos paralelos; un solo plano, si $a=\frac{9}{4}$; y nada, si $a>\frac{9}{4}$.

Vemos por esta discusion, que las superficies de segundo órden se dividen en superficies que tienen un solo centro, en superficies que no tienen centro, y en cilindros elípticos é hiperbólicos que tienen infinitos centros. Siendo los cilindros superficies bastante conocidas, solo nos ocuparemos, en lo que sigue, de las superficies de segundo órden que tienen un centro único y de las que no tienen centro.

ARTICULO 3.°

Planos diametrales de las superficies de segundo órden.

---

338. *Hallar la ecuacion de la superficie formada por todos los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una superficie de segundo órden.*

Fig. 50. La ecuacion de la superficie referida á ejes cualesquiera Ox, Oy, Oz es

$$f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

Sea O' un punto cualquiera de la superficie formada por los puntos medios del sistema de cuerdas paralelas, y sean $OQ=x_1$, $PQ=y_1$, $O'P=z_1$ las coordenadas de dicho punto O': pasemos de los ejes Ox, Oy, Oz á sus paralelos $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, para lo cual haremos

$$x=x'+x_1,\quad y=y'+y_1,\quad z=z'+z_1,$$

y sustituyendo en la ecuacion de la superficie, tendremos la ecuacion de la misma con respecto á los nuevos ejes; la cual será [Nota 1.ª al fin de la *Geom. anal.*]

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Bx'y'+2B'x'z'+2B''y'z'+f'_{x_1}\cdot x'+ f'_{y_1}\cdot y'+f'_{z_1}\cdot z'+f(x_1,y_1,z_1)=0 \ldots \ [2]$$

Sea MM' la cuerda del sistema paralelo que pasa por el punto O', que será su punto medio, y sus ecuaciones con respecto á los nuevos ejes

$$x'=mz',\ y'=nz':$$

igualando las coordenadas entre la ecuacion [2] y estas, y eliminando las variables x' é y', resultará evidentemente

$$(Am^2+A'n^2+A''+2Bmn+2B'm+2B''n)z'^2+ (f'_{x_1}\cdot m+f'_{y_1}\cdot n+f'_{z_1})z'+f(x_1,y_1,z_1)=0 \ldots \ [3],$$

ecuacion cuyas raices son las dos ordenadas z de los puntos M y M' de interseccion de la cuerda MM' con la superficie, las cuales ordenadas, por ser O' el punto medio de la MM', deben ser iguales y de signo contrario: por consiguiente la ecuacion [3] debe carecer de segundo término; y por tanto

$$f'_{x_1}\cdot m+f'_{y_1}\cdot n+f'_{z_1}=0$$

es la relacion entre las coordenadas x_1,y_1,z_1 de uno cualquiera de los puntos de la superficie formada por todos los puntos medios del sistema de cuerdas paralelas. Suprimiendo los índices, inútiles ya, tendremos que la ecuacion de la superficie formada por los puntos medios de todas las cuerdas paralelas de una superficie de segundo órden, será

$$f'_x\cdot m+f'_y\cdot n+f'_z=0,$$

ó bien

$$(Ax+By+B'z+C)m+(A'y+Bx+B''z+C)n+ A''z+B'x+B''y+C''=0,$$

siendo m y n los coeficientes angulares de las dos proyecciones verticales de cualquiera de las cuerdas paralelas; y aun se puede escribir esta ecuacion bajo la forma ordinaria de la ecuacion de un plano, á saber

$$(Am+Bn+B')x+(Bm+A'n+B'')y+(B'm+B''n+A'')z+ Cm+C'n+C''=0,$$

ecuacion fácil de recordar, pues los coeficientes de las tres variables son las derivadas con respecto á x, á y, á z de los términos de segundo grado de la ecuacion, y cambiando luego x en m, y en n, z en l.

339. Siendo la ecuacion del plano de primer grado con respecto á las variables x,y,z, se infiere que *la superficie formada por todos los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una superficie de segundo órden es un plano*. Este plano se llama *plano diametral* de la superficie.

NOTA. Si las cuerdas son paralelas al eje Oz, será $m=0$, $n=0$, y por tanto la ecuacion del plano diametral que las biseca, se reduce á $\quad f'_z=0.$

Si las cuerdas son paralelas al eje Oy, las ecuaciones de estas cuerdas son $z=\gamma$, $x=\alpha$, y por consiguiente la tangente n del ángulo, que forma su proyeccion, sobre el plano yz, con Oz, es infinita, y por tanto $\frac{1}{n}=0$: la ecuacion de la proyeccion de la recta sobre el plano xy es en general [266] $x=\frac{m}{n}y-\frac{m}{n}\beta+\alpha$, y como actualmente esta proyeccion tiene por ecuacion $x=\alpha$, será $\frac{m}{n}=0$. La ecuacion general del plano diametral se puede escribir, dividiendo por n, así:

$$f'_x\cdot\frac{m}{n}+f'_y+f'_z\cdot\frac{1}{n}=0;$$

la que se reduce actualmente á

$$f'_y=0;$$

ecuacion del plano diametral que biseca á las cuerdas paralelas al eje Oy.

De este mismo modo se halla que la ecuacion del plano diametral que biseca á las cuerdas paralelas al eje Ox, es

$$f'_x=0.$$

340. De la ecuacion del plano se infiere que *todos los planos diametrales de las superficies de segundo órden que tienen centro, pasan por este punto*.

En efecto, siendo x_1,y_1,z_1 las coordenadas del centro, sabemos [336] que $f'_{x_1}=0$, $f'_{y_1}=0$, $f'_{z_1}=0$; luego

$$f'_{x_1}\cdot m+f'_{y_1}\cdot n+f'_{z_1}=0,$$

es decir que las coordenadas x_1,y_1,z_1 del centro satisfacen á la ecuacion del plano diametral, y por tanto el centro se halla en el plano diametral, ó lo que es igual, el plano diametral pasa por el centro; resultado que por otra parte se deduce evidentemente de la definicion del plano diametral.

CAPITULO III.

Reduccion de la ecuacion general de las superficies de segundo orden á sus formas mas simples, siendo los ejes rectangulares.

Articulo 1.°

Superficies que tienen un solo centro.

341. Se llaman *cuerdas principales* de una superficie de segundo órden las cuerdas de dicha superficie perpendiculares al plano diametral que las biseca: este plano toma tambien el nombre de *plano principal.*

342. *Hallar las ecuaciones que determinan la posicion de los diferentes sistemas de cuerdas principales de las superficies de segundo órden.*

La ecuacion general de las superficies de segundo grado es

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y$$
$$+2C''z+D=0:$$

supongamos que los ejes de coordenadas sean rectangulares; y sean $x=mz+\alpha$, $y=nz+6$ las ecuaciones de una cualquiera de las cuerdas de un sistema bisecado por un plano diametral; la ecuacion de este plano será [338]

$$(Am+Bn+B')x+(Bm+A'n+B'')y+(B'm+B''n+A'')z+$$
$$Cm+C'n+C''=0$$

Para que este plano sea perpendicular á las cuerdas del sistema que biseca, es suficiente y necesario [307] que

$$\left.\begin{array}{l} Am+Bn+B'=(B'm+B''n+A'')m, \\ Bm+A'n+B''=(B'm+B''n+A'')n \end{array}\right\} \ldots [A].$$

De estas dos ecuaciones se pudieran deducir los valores de m y n: pero se simplifica el cálculo, y de paso se obtiene una ecuacion muy importante, considerando á $B'm+B''n+A''$ como una simple incógnita s: de este modo tendremos las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} Am+Bn+B'=ms, \\ Bm+A'n+B''=ns, \\ B'm+B''n+A''=s \end{array}\right\} \ldots [B].$$

Eliminemos entre estas tres ecuaciones las incógnitas m y n; para lo cual sacaremos de las dos primeras los valores de m y n, que son

$$m=\frac{B'(s-A')+BB''}{(s-)(s-A')-B^2},\quad n=\frac{B''(s-A)+BB'}{(s-A)(s-A')-B^2}\ \dots\ [C],$$

y sustituyendo estos valores en la tercera ecuacion, y reduciendo, tendremos:

$$s^3-(A+A'+A'')s^2-(B^2-AA'+B'^2-AA''+B''^2-A'A'')s-(AA'A''+2BB'B''-AC''^2-A'B'^2-A''B^2)=0\ \dots\ [D].$$

Resolviendo esta ecuacion, y sustituyendo los valores de s en las dos primeras ecuaciones $[B]$, ó en las dos ecuaciones $[C]$, hallaremos los valores correspondientes de m y n, y por lo tanto conoceremos la direccion de los diferentes sistemas de cuerdas principales. Vemos, pues, que las dos primeras ecuaciones $[B]$ y la ecuacion $[D]$ resuelven la cuestion propuesta.

Nota. Supongamos que la superficie tenga un solo centro; el último término de la ecuacion $[D]$, que es el denominador comun de las coordenadas generales del centro [360], no será cero; y por consiguiente la ecuacion de tercer grado $[D]$ tendrá por lo menos una raiz real de signo contrario al de su último término: luego *en toda superficie de segundo órden que tiene un solo centro, existe por lo menos un sistema de cuerdas principales.*

342. *Fig.* 51. Supuesto este teorema, sean Ox, Oy, Oz tres nuevos ejes rectangulares del mismo orígen O que los primitivos, y uno de ellos, por ejemplo, el Ox, paralelo al sistema de cuerdas principales cuya existencia acabamos de demostrar; y sea la ecuacion de la superficie con respecto á estos tres nuevos ejes

$$Lx^2+L'y^2+L''z^2+2Mxy+2M'xz+2M''yz+2Nx+2N'y+2N''z+D=0.$$

La ecuacion del plano diametral que biseca á todo el sistema principal, paralelo á Ox, es [339, *Nota*]

$$f'_x=0,\ \text{ó}\ Lx+My+M'z+N=0:$$

por otra parte la ecuacion de dicho plano diametral, que es perpendicular á dichas cuerdas y por consiguiente paralelo al plano yz, es $x=\alpha$; luego $M=0$, $M'=0$; y por tanto la ecuacion de la superficie con respecto á los nuevos ejes Ox, Oy, Oz es

$$Lx^2+L'y^2+L''z^2+2M''yz+2Nx+2N'y+2N''z+D=0.$$

Ahora, permaneciendo fijo el eje Ox, refiramos la superficie á los tres ejes rectangulares Ox, Oy', Oz', tales que los dos últimos destruyan al rectángulo yz, lo que sabemos es posible [100], y la ecuacion de la superficie con respecto á estos tres nuevos ejes Ox, Oy', Oz' será

$$Px^2+P'y'^2+P''z'^2-2Qx-2Q'y'-2Q''z'+D=0 \ldots [E],$$

en la cual ninguno de los coeficientes P, P', P'' podrá ser 0, puesto que las coordenadas del centro, que deben ser reales y finitas, tienen actualmente los valores $x=-\frac{Q}{P}$, $y=-\frac{Q'}{P'}$, $z=-\frac{Q''}{P''}$. El término constante D es el mismo que en la ecuacion primitiva, porque no ha variado el orígen.

Traslademos por último el orígen al centro, siendo los nuevos ejes $O'x'$, $O'y''$, $O'z''$ paralelos á los Ox, Oy', Oz': los términos lineales desaparecerán, los términos de segundo grado se conservarán los mismos, pero el término constante será diferente de D: luego la ecuacion de toda superficie, que tiene un solo centro, se reduce á la forma

$$Px'^2+P'y''^2+P''z''^2=H \ldots [F].$$

Artículo 2.º

Superficies que no tienen centro.

343. *Fig.* 51. No teniendo centro la superficie, el denominador comun de las coordenadas generales del centro, que es el tercer término de la ecuacion $[D]$, será cero, y por consiguiente dicha ecuacion tendrá una raiz 0: mas nada sabemos aun acerca de la naturaleza de las otras dos raices. Los valores de m y n correspondientes á la raiz 0 de la ecuacion $[D]$ se determinan por las dos primeras ecuaciones $[B]$, que ahora son

$$\left.\begin{array}{l} Am+Bn+B'=0, \\ Bm+An'+B''=0 \end{array}\right\} \ldots [B'];$$

y como tambien es ó $B'm+B''n+A''=0$, se infiere que la ecuacion

$$(Am+Bn+B')x+(Bm+A'n+B'')y+(B'm+B''n+A'')z+ \\ Cm+C'n+C''=0$$

del plano diametral perpendicular á las cuerdas, cuya direccion está determinada por las dos ecuaciones $[B']$, pierde sus tres términos variables, y por tanto [278, *nota*] dicho plano diametral se aleja al infinito. No podemos, pues, asegurar por ahora que en las superficies sin centro exista algun sistema de cuerdas principales.

Tomemos tres nuevos ejes rectangulares Ox, Oy, Oz, que tengan el mismo orígen primitivo, y de los cuales el Ox sea paralelo á las rectas, cuya direccion con respecto á los ejes primitivos está determinada por las dos ecuaciones [B']: y sea la ecuacion de la superficie, referida á los nuevos ejes,

$$Lx^2+L'y^2+L''z^2+2Mxy+2M'xz+2M''yz+2Nx+ 2N'y+2N''z+D=0;$$

la ecuacion del plano diametral que biseca á las cuerdas paralelas á Ox es [339, *Nota*]

$$f'_x=0, \text{ ó } Lx+My+M'z+N=0;$$

y pues este plano se ha alejado al infinito, será [278, *nota*] $L=0$, $M=0$, $M'=0$; y por consiguiente la ecuacion de las superficies sin centro, con respecto á los tres nuevos ejes Ox, Oy, Oz, es

$$L'y^2+L''z^2+2M''yz+2Nx+2N'y+2N''z+D=0;$$

y obsérvese que la direccion de Ox está determinada por las dos ecuaciones [B'].

Ahora, permaneciendo el eje Ox el mismo, tomemos nuevos ejes rectangulares Oy', Oz' que anulen al rectángulo $y'z'$ [100], y la ecuacion de la superficie, con respecto á los nuevos ejes Ox, Oy', $O'z$, será

$$P'y'^2+P''z'^2-2Qx-2Q'y'-2Q''z'+D=0 \quad [G],$$

en la cual Q no puede ser 0, pues si lo fuera, la ecuacion [G] representaria un cilindro elíptico ó hiperbólico, y en cualquiera de estos casos la superficie tendria una infinidad de centros, contra lo supuesto.

Pasemos por último á nuevos ejes rectangulares $O''x'$, $O''y''$, $O''z'$, paralelos á los Ox, Oy', Oz': sean a, b, c las coordenadas del nuevo orígen; haremos $x=x'+a$, $y'=y''+b$, $z'=z''+c$, y sustituyendo, tendremos [*Nota* 1.ª al fin de la obra]

$$P'y''^2+P''z''^2-2Qx'+\left.\begin{matrix}2P'b\\-2Q'\end{matrix}\right|y''+\left.\begin{matrix}2P''c\\-2Q''\end{matrix}\right|z''+\left.\begin{matrix}P'b^2\\+P''c^2\\-2Qa\\-2Q'b\\-2Q''c\\+D\end{matrix}\right\}=0.$$

Como las indeterminadas a, b, c entran en los tres últimos términos, las determinaremos igualando á cero los coeficientes de estos tres términos: tendremos, pues,

$$2P'b-2Q'=0,\ 2P''c-2Q''=0,$$
$$P'b^2+P''c^2-2Qa-2Q'b-2Q''c+D=0;$$
de las cuales resultan
$$b=\frac{Q'}{P'},\ c=\frac{Q''}{P''},\ a=\frac{P'b^2+P''c^2-2Q'b-2Q''c+D}{2Q};$$
valores reales y finitos.

Luego la ecuacion de la superficie con respecto á los nuevos ejes será $P'y''^2+P''z''^2=2Qx'$.

344. Queda pues demostrado que las superficies de segundo orden que tienen un solo centro, están incluidas en la ecuacion
$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H,$$
y las que no tienen centro en la
$$P'y^2+P''z^2=2Qx.$$

Articulo 3.º

Formas individuales de las ecuaciones de las dos superficies de segundo orden que tienen un solo centro.

345. En la ecuacion $Px^2+P'y^2+P''z^2=H$ puede suponerse siempre que H es cantidad positiva; pues sino lo fuera, no habria mas que mudar los signos á todos los términos de la ecuacion, y resultaria la H positiva. Por consiguiente los tres coeficientes P, P', P'' no pueden ser negativos á la vez, pues la suma de tres cantidades negativas no puede ser igual á una positiva. Luego en esta ecuacion podrán ocurrir los tres casos siguientes:

1.º Que los tres coeficientes P, P', P'' sean positivos.
2.º Que dos sean positivos y uno negativo.
3.º Que uno sea positivo y los otros dos negativos.

Primer caso. *Los tres coeficientes* P, P', P'' *son positivos.*

Hagamos en la ecuacion $x=0$, $y=0$, y llamando c al valor correspondiente de la ordenada z del punto en que la superficie corta al eje Oz, tendremos $P''c^2=H$, y por consiguiente $P''=\frac{H}{c^2}$. Haciendo en la misma ecuacion $x=0$, $z=0$, y llamando b al valor correspondiente de la ordenada y del punto en que el eje Oy corta á la superficie, tendremos $P'b^2=H$, de donde $P'=\frac{H}{b^2}$. Haciendo por último $y=0$,

$z=0$; y llamando a al valor correspondiente de la ordenada x del punto en que el eje Ox corta á la superficie, tendremos $Pa^2=H$, de donde $P=\frac{H}{a^2}$. Sustituyendo los valores de P, P', P'' en la ecuacion, y suprimiendo el factor comun H, tendremos la ecuacion de la superficie, á saber,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

que es precisamente la ecuacion del elipsoide, cuyos semiejes son a, b y c [290].

Segundo caso. *Dos coeficientes* P *y* P′ *son positivos, y el tercero* P″ *negativo*.

Pongamos en manifiesto el signo del coeficiente P'', y la ecuacion de la superficie será

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H.$$

Hagamos en esta ecuacion $x=0$, $y=0$, y sea $c\sqrt{-1}$ el valor imaginario correspondiente de z: tendremos $P''c^2=H$, $P''=\frac{H}{c^2}$. Haciendo $x=0$, $z=0$, y llamando b al valor correspondiente de y, será $P'b^2=H$, $P'=\frac{H}{b^2}$. Haciendo $y=0$, $z=0$, y llamando a al valor correspondiente de x, será $Pa^2=H$, $P=\frac{H}{a^2}$.

Sustituyendo en la ecuacion de la superficie los valores de P, P', P'', y suprimiendo el factor H comun á todos los términos, resulta la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

que es la ecuacion del hiperboloide de una hoja, cuyos semiejes son a, b y c [294].

Tercer caso. *Un coeficiente* P *es positivo y los otros dos* P′, P″ *negativos*.

Poniendo en manifiesto los signos de estos dos coeficientes, la ecuacion será

$$Px^2-P'y^2-P''z^2=H.$$

Haciendo $x=0$, $y=0$, y llamando $c\sqrt{-1}$ al valor imaginario correspondiente de z, tendremos $P''c^2=H$, $P''=\frac{H}{c^2}$. Haciendo $x=0$, $z=0$, y llamando $b\sqrt{-1}$ al valor imaginario correspondiente de y, será $P'b^2=H$, $P'=\frac{H}{b^2}$. Haciendo $y=0$, $z=0$, y llamando a al valor correspondiente de x, será $Pa^2=H$, $P=\frac{H}{a^2}$. Sustituyendo los valores de P,P',P'' en la ecuacion propuesta, y suprimiendo el factor comun H, resulta la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

que es la ecuacion del hiperboloide de dos hojas, cuyos semiejes son a, b y c [296].

Vemos pues, que las superficies de segundo orden que tienen un solo centro, son en general el elipsoide, el hiperboloide de una hoja y el hiperboloide de dos hojas.

Artículo 4.º

Formas individuales de las superficies de segundo orden que no tienen centro.

346. Ya hemos visto que estas superficies estan incluidas en las representadas por la ecuacion

$$P'y^2+P''z^2=2Qx.$$

Podemos suponer que P' es cantidad positiva, pues sino lo fuese, no habria mas que mudar los signos á todos los términos de la ecuacion, y entonces P' seria positiva. Tambien podemos suponer que Q es cantidad positiva; pues si la ecuacion tuviese la forma

$$P'y^2+P''z^2=-2Qx,$$

haciendo $x=-x'$, dicha ecuacion seria

$$P'y^2+P''z^2=2Qx',$$

que representa la misma superficie que la $P'y^2+P''z^2=2Qx$, sin mas diferencia que estar las x positivas en ambas superficies contadas en sentidos contrarios.

Por consiguiente tenemos únicamente que considerar los dos casos siguientes:

$$P'y^2+P''z^2=2Qx,\quad P'y^2-P''z^2=2Qx,$$

en las cuales los coeficientes P', P'', Q son números absolutos.

347. Primer caso. $P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$.

Haciendo en esta ecuacion $z=0$, la ecuacion de la interseccion del plano xy con la superficie será $P'y^2 = 2Qx$; luego esta interseccion es una parábola; y si llamamos $2p$ á su parámetro $\frac{2Q}{P'}$, será por consiguiente $P' = \frac{Q}{p}$. Haciendo en la misma ecuacion $y=0$, la interseccion de la superficie con el plano xz, tendrá por ecuacion $P''z^2 = 2Qx$; luego tambien esta interseccion es una parábola cuyo parámetro es $\frac{2Q}{P''}$: llamando $2p'$ á este parámetro, será $P'' = \frac{Q}{p'}$. Sustituyendo los valores de P' y P'' en la ecuacion dada, y suprimiendo el factor comun Q, resulta la ecuacion

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2p'} = x,$$

que es la ecuacion del paraboloide elíptico [287].

Segundo caso. Haciendo $z=0$ en la ecuacion

$$P'y^2 - P''z^2 = 2Qx$$

de la superficie, la ecuacion de la interseccion de la superficie con el plano xy será $P'y^2 = 2Qx$, es decir que la interseccion es una parábola, á cuyo parámetro $\frac{2Q}{P'}$ llamaremos $2p$, y por consiguiente $P' = \frac{Q}{p}$. Haciendo $y = 0$ en la misma ecuacion, la ecuacion de la interseccion de la superficie con el plano xz será $P''z^2 = -2Qx$; luego dicha interseccion es una parábola, á cuyo parámetro $\frac{2Q}{P''}$ llamaremos $2p'$, y por consiguiente $P'' = \frac{Q}{p'}$. Sustituyendo los valores de P' y P'' en la ecuacion de la superficie, y suprimiendo el factor Q, comun á todos sus términos, resulta la ecuacion

$$\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p'} = x,$$

que es la ecuacion del paraboloide hiperbólico [288]

Vemos, pues, que las superficies de segundo órden, que no tienen centro, son en general el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico.

CAPITULO IV.

Teoría del elipsoide.

Articulo 1.°

Forma del elipsoide.

347. La ecuacion de esta superficie es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La definicion del elipsoide, dada en el número 290, manifiesta la forma de esta superficie; sin embargo vamos ahora á deducir dicha forma de la ecuacion del elipsoide.

Cortemos en primer lugar esta superficie por los tres planos coordenados; para lo cual haremos sucesivamente $x=0$, $y=0$, $z=0$; y resultarán tres elipses, *secciones principales*, cuyas ecuaciones respectivas son:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Demos ahora á x el valor $\pm\alpha$, ó lo que es igual, cortemos el elipsoide por los dos planos paralelos á la seccion principal del plano yz, y equidistantes de este plano: las ecuaciones de las proyecciones de las dos intersecciones sobre el plano yz serán una misma, á saber

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\alpha^2}{a^2}\quad\text{[1]};$$

y como las proyecciones son idénticas á las intersecciones, por ser los planos secantes paralelos al plano de proyeccion yz, se infiere que las dos elipses de interseccion son idénticas. Por consiguiente el elipsoide es una superficie simétrica respecto de la seccion principal del plano yz, ó de la elipse principal cuyos semi-ejes son b y c.

La ecuacion [1] puede escribirse asi:

$$\frac{y^2}{b^2\,\dfrac{a^2-\alpha^2}{a^2}}+\frac{z^2}{c^2\,\dfrac{a^2-\alpha^2}{a^2}}=1,$$

y por tanto los semi-ejes de la elipse representada por esta ecuacion, es decir de la elipse que resulta cortando el elipsoide por un plano paralelo al yz, son $\frac{b\sqrt{a^2-\alpha^2}}{a}$, $\frac{c\sqrt{a^2-\alpha^2}}{a}$, los cuales son evidentemente proporcionales á los semi-ejes b y c de la seccion principal del plano yz. Luego todas las elipses que resultan cortando el elipsoide por planos paralelos al yz, son semejantes. A medida que crece α, los semi-ejes $\frac{b\sqrt{a^2-\alpha^2}}{a}$, $\frac{c\sqrt{a^2-\alpha^2}}{a}$ disminuyen; luego las referidas elipses van disminuyendo, conforme el plano secante se va alejando del plano yz. Cuando $\alpha=a$, los semi-ejes de la elipse se reducen á cero; luego en cada uno de los estremos del eje $2a$ de la elipsoide el plano paralelo al yz no tiene mas que un punto comun con la superficie del elipsoide; y se demuestra fácilmente que dicho plano es tangente al elipsoide.

Si el valor absoluto α de x es mayor que a, será $\alpha^2>a^2$, y por tanto la ecuacion [1] de la proyeccion de la interseccion tendrá su primer miembro positivo y su segundo miembro negativo, y por tanto dicha ecuacion no representa nada; luego el elipsoide está limitado en los dos sentidos del eje $2a$ por los dos planos tangentes en los estremos de este eje.

Del mismo modo se demuestra que el elipsoide es una superficie simétrica con respecto á la seccion principal del plano xz, ó lo que es igual, con respecto á la elipse principal cuyos semiejes son a y c; que todas las elipses paralelas al plano xz son semejantes á la elipse cuyos semi-ejes son a y c; y van disminuyendo conforme se aleja el plano secante del xz; y que la superficie está limitada en los dos sentidos del eje $2b$ por los dos planos tangentes en los estremos de este eje. Y tambien que el elipsoide es una superficie simétrica respecto del plano yz, que todas las elipses paralelas á este plano son semejantes á la principal que se halla en él, y que esta superficie está limitada en los dos sentidos del eje $2c$ por los dos planos tangentes en los estremos de este eje.

Sabemos, además, que siendo el elipsoide una superficie de segundo órden es enteramente convexa; y asi queda suficientemente conocida su forma.

ARTICULO 2.°

Secciones circulares del elipsoide.

348. *Fig.* 52. Cortemos el elipsoide por un plano que pase por el centro O, y hallemos la ecuacion de la interseccion con respecto á los ejes rectangulares Ox', Oz' situados en el mismo plano secante: las fórmulas para hallar esta ecuacion, son [322]

$$x = x' \cos\varphi + z' \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\varphi - z' \cos\varphi \cos\theta,$$
$$z = z' \operatorname{sen}\theta:$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

del elipsoide, la ecuacion de la interseccion con respecto á los dos ejes Ox', Oz' será

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{b^2}\right) + z'^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right) +$$
$$2x'z'\left(\frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{a^2} - \frac{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{b^2}\right) = 1.$$

Actualmente se trata de hallar la posicion del plano secante, esto es, los valores que deben tener los ángulos φ y θ, para que la interseccion sea un círculo. Siendo rectangulares los ejes Ox', Oz', la interseccion será un círculo si los coeficientes de x'^2 y z'^2 son iguales y el coeficiente de $x'z'$ es 0; es decir, si se verifican á la vez las relaciones

$$(a^2 - b^2)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta = 0,$$
$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{b^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{c^2}.$$

Suprimiendo en la primera el factor $a^2 - b^2$, que no puede ser cero, puesto que los semi-ejes a y b son desiguales en el elipsoide general, y quitando los denominadores de la segunda, estas dos ecuaciones se convertirán en estas otras dos:

$$[\alpha]\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta = 0, \\ b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\operatorname{sen}^2\varphi = b^2c^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + \\ \quad a^2c^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta, \end{array}\right.$$

las cuales nos darán los valores de φ y θ que las satisfagan.

La primera de estas dos ecuaciones quedará satisfecha en estos tres casos:

$$\cos\varphi = 0, \text{ ó } \varphi = 90^\circ;$$
$$\operatorname{sen}\varphi = 0, \text{ ó } \varphi = 0,$$
$$\cos\theta = 0, \text{ ó } \theta = 90^\circ.$$

Sustituyendo el primer valor 90° de φ en la segunda ecuacion, para hallar el valor correspondiente de θ, tendremos

$$a^2c^2 = b^2c^2\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

ó $$a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2c^2\cos^2\theta = b^2c^2\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

de la cual resulta $$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

y $$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Sustituyendo el segundo valor 0 de φ en la segunda ecuacion, tendremos

$$b^2c^2 = a^2c^2\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

ó $$b^2c^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2c^2\cos^2\theta = a^2c^2\cos^2\theta + a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta,$$

de donde $$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{c^2(b^2-a^2)}{b^2(a^2-c^2)},$$

y $$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2-c^2}}.$$

Sustituyendo el valor 90° de θ en la ecuacion, para hallar el valor correspondiente de φ, tendremos

$$b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\operatorname{sen}^2\varphi = a^2b^2,$$

ó $$b^2c^2\cos^2\varphi + a^2c^2\operatorname{sen}^2\varphi = a^2b^2\operatorname{sen}^2\varphi + a^2b^2\cos^2\varphi,$$

de donde $$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)},$$

y $$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}}.$$

El primer valor de $\operatorname{tg}\theta$, correspondiente al de $\alpha = 90^\circ$, es real, puesto que suponemos $a > b > c$. El segundo valor de $\operatorname{tg}\theta$, correspondiente al de $\alpha = 0$, es imaginario; y el valor de $\operatorname{tg}\varphi$, correspondiente al de $\theta = 90^\circ$, es tambien imaginario; luego la primera solucion, que dá para el ángulo θ dos valores suplementarios, es la única que pueden admitir las dos ecuaciones [α]

Luego *si dos planos que cortan á un elipsoide, pasan por el* *eje mediano, y forman con el plano* xy *dos ángulos diedros suplementarios cuyas tangentes sean* $\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$, *las dos intersecciones de dichos planos con el elipsoide serán dos círculos.*

Fig. 53. Cortemos ahora el elipsoide por un plano $z'O'x'$ que no pase por el centro: sea f la ordenada x del punto O' en que el nuevo plano secante corta al eje Ox; y refiramos el elipsoide á los tres ejes rectangulares $O'x$, $O'y$, $O'z$: su ecuacion con respecto á estos ejes será

$$\frac{(x+f)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Los coeficientes que en esta ecuacion tienen los términos de segundo grado, son los mismos que en la ecuacion ordinaria del elipsoide, y por tanto los coeficientes de x'^2, z'^2, $x'z'$ en la ecuacion de la interseccion serian los mismos en el cálculo que se hiciese que en el que acabamos de hacer; luego tambien los valores de φ y θ, para que la interseccion sea un círculo, serán los mismos hallados ya, es decir

$$\varphi=90^\circ,\ \mathrm{tg}\,\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

Luego para que la nueva interseccion sea un círculo, el plano secante debe ser paralelo á cualquiera de los dos que pasando por el eje mediano dan círculos por intersecciones.

Luego *el elipsoide puede cortarse por dos series de planos paralelos, de manera que las intersecciones sean círculos.*

Si el elipsoide es de revolucion, será $b=c\lessgtr a$, siendo en el primer caso elipsoide de revolucion prolongado, y en el segundo aplanado: tendremos

$$\mathrm{tg}\,\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{0}}=\pm\infty,$$

y por tanto $\theta=90^\circ$. Luego para que las secciones de los planos que cortan al elipsoide de revolucion, sean círculos, es suficiente y necesario que $\varphi=90^\circ$ y $\theta=90^\circ$; es decir que los planos secantes deben ser perpendiculares al eje de revolucion $2a$.

Articulo 3.º

Planos tangentes al elipsoide.

349. La ecuacion general del plano tangente á una superficie en un punto (x', y', z') es [329]

$$f'_{x'} \cdot (x-x')+f'_{y'} \cdot (y-y')+f'_{z'} \cdot (z-z')=0:$$

actualmente, siendo la ecuacion del elipsoide referida á sus ejes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

será

$$f'_{x'}=\frac{2x'}{a^2},\ f'_{y'}=\frac{2y'}{b^2},\ f'_{z'}=\frac{2z'}{c^2},$$

y por tanto la ecuacion del plano tangente al elipsoide en el punto (x', y', z') es

$$(x-x') \cdot \frac{x'}{a^2}+(y-y') \cdot \frac{y'}{b^2}+(z-z') \cdot \frac{z'}{c^2}=0,$$

ó bien

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

350. *Conociendo la posicion y magnitud de dos de los tres ejes del elipsoide y un punto de su superficie, determinar el plano tangente á esta superficie en dicho punto; estando construido ó no el elipsoide* (a).

Sean a y b los semi-ejes conocidos: haciendo $y=0$, $z=0$ en la ecuacion del plano tangente, en cuyo caso x es la ordenada del punto en que la elipse corta al eje Ox, tendremos $\frac{xx'}{a^2}=1$, ó $x=\frac{a^2}{x'}$.

Haciendo $x=0$, $z=0$ en la misma ecuacion, en cuyo caso la y será la ordenada del punto en que el elipsoide corta al eje Oy, tendremos $\frac{yy'}{b^2}=1$, ó $y=\frac{b^2}{y'}$.

Estos dos puntos y el de contacto (x', y', z') determinan la posicion del plano tangente

---

(a) Dos de los ejes, $2a$ y $2b$ por ejemplo, y el punto (x', y', z') de la superficie bastan para que el elipsoide quede determinado; pues el tercer eje se deduce de la ecuacion

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

351. *Desde un punto dado (α, β, γ) tirar un plano tangente al elipsoide, conociendo la magnitud y posicion de sus tres ejes; estando construido ó no dicho elipsoide.*

La ecuacion del plano tangente al elipsoide es

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1;$$

por hallarse el punto (α, β, γ) en este plano, es

$$\frac{\alpha x'}{a^2}+\frac{\beta y'}{b^2}+\frac{\gamma z'}{c^2}=1 \ldots [1],$$

primera ecuacion con las incógnitas x', y', z'. La segunda ecuacion es evidentemente

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Como estas dos ecuaciones tienen tres incógnitas, el problema tendrá, siendo posible, infinitas soluciones.

Hallemos ahora las ecuaciones de la curva de contacto del cono formado por las infinitas tangentes al elipsoide, tiradas desde el punto (α, β, γ).

Si consideramos como variables á las coordenadas x', y', z' en la ecuacion [1]; y para mayor claridad quitamos los acentos á estas variables, la ecuacion que resulta

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=1 \ldots [2]$$

representa, como que es de primer grado, un plano: las coordenadas x', y', z' del punto de contacto de cualquiera de las referidas tangentes satisfacen á esta ecuacion, puesto que reemplazando las variables x, y, z por las coórdenadas x', y', z', resulta la igualdad cierta [1]. Por consiguiente las coordenadas de cualquiera de los puntos de la curva de contacto del cono con el elipsoide satisfacen á la ecuacion [2] del plano; luego este plano contiene enteramente á dicha curva de contacto; luego esta curva es plana, y queda determinada por la ecuacion [2] y por la del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

y por lo mismo se pudieran ahora hallar dos de las proyecciones de dicha curva [273].

352. *Tirar paralelamente á un plano dado un plano tan-*

gente al elipsoide, conociendo la magnitud y posicion de sus tres ejes, y estando construido ó no el elipsoide.

Llamando x', y', z' á las coordenadas incógnitas del punto de contacto, la ecuacion del plano tangente es

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1:$$

sea $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuacion del plano dado; como los dos planos representados por estas dos ecuaciones deben ser paralelos, tendremos [300]

$$A:B::\frac{x'}{a^2}:\frac{y'}{b^2},\quad A:C::\frac{x'}{a^2}:\frac{z'}{c^2}.$$

Por corresponder el punto (x', y', z') al elipsoide, es

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Tenemos ya las tres ecuaciones con las tres incógnitas x', y', z'.

Para hallar los valores de estas tres incógnitas, eliminaremos primeramente y', z', para lo cual despejaremos estas dos incógnitas en las dos primeras ecuaciones, y sustituiremos sus valores en la tercera ecuacion, y resultará

$$x'=\frac{Aa^2}{\pm\sqrt{A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4}},$$

y por consiguiente $y'=\dfrac{Bb^2}{\pm\sqrt{A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4}},$

$$z'=\frac{Cc^2}{\pm\sqrt{A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4}}.$$

Como estos valores de las coordenadas del punto de contacto son dobles, y se diferencian dos á dos en el signo, se infiere que el problema tiene dos soluciones, y que los dos puntos de contacto estarán en los dos estremos de un mismo diámetro (a) del elipsoide.

Artículo 4.º

Planos diametrales y diámetros conjugados del elipsoide.

353. La ecuacion general del plano diametral de las superficies de segundo órden es

(a) *Diámetro* de una superficie de segundo órden es todo diámetro de sus secciones diametrales.

$$f'_x \times m + f'_y \times n + f'_z = 0,$$

siendo m y n los coeficientes angulares de las proyecciones de las cuerdas bisecadas sobre los planos xz, yz.

Para hallar la ecuacion del plano diametral del elipsoide, sustituiremos los valores que en la ecuacion ordinaria de esta superficie tienen las tres derivadas parciales f'_x, f'_y, f'_z, que son:

$$f'_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f'_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f'_z = \frac{2z}{c^2},$$

y por tanto la ecuacion de cualquier plano diametral del elipsoide es
$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0;$$

ya se sabe que m y n son las tangentes de los ángulos que forman con el eje Oz las proyecciones sobre los planos xz, yz de cualquiera de las cuerdas del sistema bisecado por el plano diametral.

354. Segun esta ecuacion, todos los planos diametrales del elipsoide pasan por el centro de esta superficie; y al contrario *todo plano que pasa por el centro del elipsoide, es un plano diametral*.

En efecto, la ecuacion de todo plano que pasa por el centro del elipsoide, orígen actual de las coordenadas, es

$$z = px + qy \ldots\ldots [1],$$

y la ecuacion del plano diametral del elipsoide nos da

$$z = -\frac{mc^2}{a^2}x - \frac{nc^2}{b^2}y \ldots\ldots [2].$$

Igualemos los coeficientes de x é y en estas dos ecuaciones, en cuyo caso serán $m = -\frac{a^2p}{c^2}$, $n = -\frac{b^2q}{c^2}$: teniendo m y n estos valores posibles, las dos ecuaciones [1] y [2] serán idénticas, y por tanto representarán un mismo plano; y pues el plano representado por la ecuacion [2] es un plano diametral, tambien el plano representado por la ecuacion [1], esto es un plano cualquiera que pasa par el centro del elipsoide, es un plano diametral.

355. Se llaman *diámetros* de una superficie de segundo órden los diámetros de sus secciones diametrales.

Fig. 54. *El plano* PR *tangente en el estremo* M *de un diámetro* MN *del elipsoide es paralelo al plano diametral* AB *que biseca todas las cuerdas paralelas á dicho diámetro* MN.

En efecto, siendo $x=mz$, $y=nz$ las ecuaciones del diámetro MN, y llamando x',y',z' á las cordenadas del punto M, tendremos $x'=mz'$, $y'=nz'$, de donde $m=\frac{x'}{z'}$, $n=\frac{y'}{z'}$: la ecuacion del plano diametral AB, que biseca á todas las cuerdas paralelas al diámetro MN, es

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0,$$

ó poniendo en lugar de m y n sus valores, la ecuacion de dicho plano diametral será

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=0.$$

La ecuacion del plano PR tangente al elipsoide en el punto M es

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1:$$

los coeficientes de x,y,z en esta ecuacion y en la del plano diametral son proporcionales; luego estos planos son paralelos [500, *Teor. recíp.*].

356. Llámanse *diametros conjugados* en las superficies de segundo órden tres diámetros, dos de los cuales son conjugados en la seccion diametral que pasa por ellos, y el tercero es paralelo al sistema de cuerdas bisecadas por dicha seccion diametral.

Segun esto, las superficies de segundo órden que no tienen centro, no pueden tener diámetros conjugados.

Fig. 55. Sea la elipse $ABED$ una seccion diametral cualquiera del elipsoide, $OA=a'$, $OB=b'$ dos semidiámetros conjugados de la misma, y $OC=c'$ el semidiámetro paralelo al sistema de cuerdas bisecadas por la seccion $ABED$: los tres semidiámetros OA, OB y OC forman un sistema conjugado, segun la definicion de diámetros conjugados.

359. Tomando estas tres rectas prolongadas indefinidamente por ejes de coordenadas, hallemos la ecuacion del elipsoide.

Observemos en primer lugar que á cada par de valores de x é y corresponden dos de z, iguales y de signo contrario; luego la ecuacion, que ya se sabe es de segundo grado, debe contener un término en z^2 y ninguno en z. La misma ecuacion, por hallarse el orígen en el centro, no puede contener términos lineales, y por tanto tendrá la forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+D=0.$$

Mas los diámetros Ox, Oy son conjugados en la elipse $ABED$; y como haciendo $z=0$, la ecuacion de la elipse $ABED$ debe tener la forma $My^2+Nx^2+P=0$, será $B=0$; y por tanto la ecuacion del elipsoide con respecto á un sistema de diámetros conjugados tiene la forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+D=0 \ldots\ldots [1].$$

Introduzcamos ahora en esta ecuacion los semidiámetros conjugados a', b', c'.

Haciendo en dicha ecuacion $y=0$, $z=0$, es $x=a$; y por consiguiente $\quad Aa'^2+D=0,\ A=-\dfrac{D}{a'^2}.$

Haciendo $x=0$, $z=0$, es $y=b$; luego

$$Bb'^2+D=0,\ B=-\frac{D}{b'^2}.$$

Haciendo $y=0$, $z=0$, es $z=c'$; y por tanto

$$Cc'^2+D=0,\ C=-\frac{D}{c'^2}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion [1], y suprimiendo el factor comun D, la ecuacion del elipsoide será

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Nota. De esta ecuacion se infiere que dos diámetros cualesquiera de los tres conjugados del elipsoide son conjugados en la elipse diametral que pasa por los dos. Asi, por ejemplo, los diámetros Oy, Oz son conjugados en la elipse que pasa por ambos; pues haciendo $x=0$, la ecuacion de esta elipse es $\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}=1$, lo que prueba que b' y c' son semi-diámetros conjugados en esta elipse.

358. *No hay en el elipsoide mas sistema rectangular de diámetros conjugados que el sistema de sus tres ejes.*

Fig. 56. Sean Ox, Oy, Oz los ejes del elipsoide prolongados indefinidamente, los cuales forman evidentemente un sistema rectangular de diámetros conjugados: en la elipse principal que se halla en el plano xy, ó cuyos semiejes son a y b, hay una infinidad de pares de diámetros conjugados, pero solo el sistema Ox, Oy de sus ejes es rectangular. Por consiguiente cualquier sistema de diámetros conjugados diferente del Ox, Oy, Oz, tal como Ox', Oy', Oz', de los que Ox', Oy' se hallan en la elipse principal xy, será un sistema oblicuángulo.

Consideremos ahora un sistema de diámetros conjugados, tal que los Ox',Oy' se hallen fuera del plano xy: el tercer diámetro conjugado Oz' no podrá coincidir con el Oz; pues si coincidiese, el sistema de cuerdas paralelas á Oz tendria dos planos diametrales que las dividirian en dos partes iguales; y ya hemos visto que, dada la direccion de un sistema de cuerdas paralelas, no hay mas que un solo plano diametral que las biseque. Sean $x=mz$, $y=nz$ las ecuaciones del diámetro Oz' con respecto á los tres ejes Ox,Oy,Oz del elipsoide; las tangentes trigonométricas m y n serán cantidades finitas y diferentes de 0. La ecuacion del plano diametral que pasa por las rectas Ox', Oy', el cual biseca (segun la definicion de diámetros conjugados del elipsoide) á todas las cuerdas paralelas á Oz', será

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{z}{c^2}=0.$$

Si este plano es perpendicular á la recta Oz', se verificarán las relaciones $\frac{mc^2}{a^2}=m$, $\frac{nc^2}{b^2}=n$ [307]; y como m y n son cantidades finitas y diferentes de 0, será $a=c=b$, es decir, que la superficie debe ser una esfera.

Queda, pues, demostrado que en el elipsoide general no hay mas sistema rectangular de diámetros conjugados que el sistema de los ejes.

Nota. Si el elipsoide fuese de revolucion, tomando por eje de las z el eje de revolucion prolongado indefinidamente, la interseccion del plano xy con la superficie es el ecuador [292]; y como dos diámetros conjugados cualesquiera de un círculo forman ángulo recto, se infiere que en el elipsoide de revolucion, prolongado ó aplanado, hay una infinidad de sistemas rectangulares de diámetros conjugados, de todos los cuales forma parte el eje de revolucion, y los otros dos son dos cualesquiera diámetros conjugados del ecuador.

359. Teorema. *Siendo* a, b, c *los semiejes de un elipsoide, y* a',b',c' *tres semidiámetros conjugados, es*

$$a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2.$$

Fig 57. Sean $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ los tres semidiámetros principales del elipsoide, y OAB la elipse principal, cuyos semiejes son a y b: sea $OA'B'$ otra elipse cualquiera que pasa por el centro del elipsoide; $OA'=a'$, $OB'=b'$ dos semidiámetros conjugados de dicha elipse, y $OC'=c'$ el tercer semidiámetro conjugado de los dos a' y b': sea $OA''=a''$ la interseccion de los dos planos de las dos elipses OAB y $OA'B'$, $OB''=b''$ el semidiámetro conjugado de OA'' en la elipse principal $OAA''BB''$, $OB'''=b'''$ el semidiámetro de la otra elipse, conjugado de OA''.

Tenemos desde luego [135, *Teor.* 1.°]

$$a^2+b^2=a''^2+b''^2 \ldots [1],$$
$$a''^2+b'''^2=a'^2+b'^2 \ldots [2].$$

Observemos ahora que OA'' es conjugado de OB'' y OC, y tambien de OB''' y OC' [357, *Nota*]; luego estas cuatro rectas están en el plano diametral que biseca las cuerdas paralelas á OA''; luego en la elipse $OC'CB'''B''$, que las contiene, será

$$b''^2+c^2=b'''^2+c'^2 \ldots [3].$$

Sumando ordenadamente las tres igualdades [1], [2] y [3], resulta $\quad a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2.$

360. Teorema. *El volúmen del paralelepípedo oblicuángulo construido sobre los tres semidiámetros conjugados de un elipsoide es igual al del paralelepípedo rectángulo construido sobre los tres semiejes.*

Haciendo las mismas construcciones que en el teorema anterior, y llamando P al volúmen del paralelepípedo construido sobre los tres semiejes a, b, c del elipsoide, P' al del construido sobre los tres semidiámetros conjugados a', b', c', P'' al del paralelepípedo construido sobre los semidiámetros conjugados a'', b'', c, y P''' al del construido sobre los semidiámetros conjugados a'', b''', c'; tendremos en primer lugar $P=P''$, puesto que estos dos paralelepípedos tienen bases equivalentes, las cuales son los paralelógramos construidos sobre los semiejes OA y OB, y sobre los semidiámetros conjugados OA'' y OB'' [135, *Teor.* 2.°]; y su altura comun es OC.

Tenemos ahora $P''=P'''$, puesto que ambos paralelepípedos tienen por bases los paralelógramos equivalentes construidos sobre los semi-diámetros conjugados OB'' y OC, OB''' y OC' de la misma elipse $C''CB'''B''$, y su altura comun es la perpendicular bajada desde el punto A'' al plano de esta elipse. Por último $P'''=P'$, puesto que sus bases son los dos paralelógramos equivalentes construidos sobre los semi-diámetros conjugados OA'' y OB''', OA' y OB', y su altura comun es la perpendicular bajada desde el punto C' al plano $A'A''B'B'''$: luego $P=P'$

CAPITULO V.

Teoría del hiperboloide de una hoja.

Articulo 1.°

Forma del hiperboloide de una hoja.

361. Sabemos que la ecuacion del hiperboloide de una hoja, referido á sus tres ejes prolongados indefinidamente, es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

de la cual vamos á deducir la forma de esta superficie, aunque la conocemos ya por la generacion de la misma [294].

Cortemos en primer lugar esta superficie por medio de los tres planos coordenados, haciendo sucesivamente $z=0$, $y=0$, $x=0$, y resultarán las tres curvas, cuyas ecuaciones respectivas son

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$

las dos primeras representan dos hipérbolas cuyos semi-ejes primeros y segundos son respectivamente b y c, a y c; la tercera representa una elipse cuyos semi-ejes son a y b. Estas dos hipérbolas y esta elipse son las tres *secciones principales* del hiperboloide.

Cortemos ahora esta superficie por planos paralelos al xy: hagamos $z=\pm\gamma$, y la ecuacion de la proyeccion de cualquiera de las dos intersecciones será

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\gamma^2}{c^2};$$

y pues, por ser el plano secante paralelo al xy, la proyeccion es idéntica á la interseccion, se infiere que cortando el hiperboloide por planos paralelos al xy, y á igual distancia de este, las intersecciones son idénticas: luégo el hiperboloide de una hoja es una superficie simétrica respecto de la elipse principal del plano xy.

La ecuacion que acabamos de hallar de la interseccion, puede escribirse asi:

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+\gamma^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+\gamma^2)}{c^2}}=1,$$

segun la cual vemos que los semi-ejes de la interseccion son $\frac{a}{c}\sqrt{c^2+\gamma^2}$, $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+\gamma^2}$, los cuales van creciendo á medida que crece γ, y son evidentemente proporcionales á los semi-ejes a y b de la elipse principal del plano xy: luego la elipse principal del plano xy es la menor de todos las elipses que resultan cortando el hiperboloide de una hoja por planos paralelos al xy; y todas las referidas elipses son semejantes. La elipse principal del plano xy se llama *elipse de garganta*.

Cortemos el hiperboloide por planos paralelos al yz: hagamos para esto $x=\pm\alpha$; las ecuaciones de las dos proyecciones de la interseccion sobre el plano yz serán una misma, á saber:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\alpha^2}{a^2} \ldots\ldots [1].$$

Si $\alpha < a$, esta ecuacion representa una hipérbola, cuyo eje primero está tomado sobre el eje Oy, y por consiguiente las dos hipérbolas idénticas á la proyeccion, é idénticas entre sí, tienen sus ejes primeros paralelos al Oy. Si $\alpha=a$, cada una de estas dos secciones se reduce á dos líneas rectas que se cruzan en los vértices de la elipse de garganta. Si $\alpha > a$ escribiremos la ecuacion [1] de este otro modo

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1,$$

ecuacion que representa una hipérbola cuyo eje primero está tomado sobre el Oz, y por consiguiente las dos hipérbolas idénticas á la proyeccion, é idénticas entre sí, tienen sus ejes primeros paralelos al eje Oz; lo contrario de lo que sucede cuando $\alpha < a$.

Resultados análogos á los que acabamos de obtener en el caso anterior, hallaríamos si cortásemos el hiperboloide por planos paralelos al xz.

Articulo 2.°

Secciones circulares del hiperboloide de una hoja.

362. Por un cálculo idéntico al que hicimos en el caso del elipsoide, para hallar la posicion de los planos secantes, que pasando por el centro, producen círculos por intersecciones,

se hallará ahora que la interseccion del plano que pasa por el el centro con el elipsoide, será un círculo, si $\varphi = 0$, y

$\operatorname{tg}\theta = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$; lo que nos dice *que en el hiperboloide de una hoja hay dos planos que pasan por el eje mayor de la elipse de garganta y cuyas intersecciones con la superficie producen círculos*.

Ahora se demostrará, como en el caso del elipsoide, que los planos paralelos á aquellos dos cortan tambien al hiperboloide por círculos; luego *en el hiperboloide de una hoja existen, asi como en el elipsoide, dos series de planos paralelos, cuyas intersecciones con la superficie son círculos*.

Si el hiperboloide de una hoja fuese de revolucion, es decir, si $a = b$, seria $\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\theta = 0$: luego el hiperboloide de revolucion de una hoja no tiene mas que una série de planos paralelos, cuyas intersecciones con la superficie sean círculos; y son todos los planos paralelos al círculo de garganta.

Articulo 3.°

Planos tangentes al hiperboloide de una hoja.

363. Del mismo modo que en el elipsoide se hallará, que la ecuacion del plano tangente al hiperboloide de una hoja es

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

364. *Conociendo la posicion y magnitud de los ejes del hiperboloide de una hoja, y un punto de su superficie, tirarle un plano tangente; estando construido ó no el hiperboloide.*

Se resuelve este problema del mismo modo que su análogo del elipsoide.

364. *Desde un punto (α, β, γ) tirar un plano tangente al hiperboloide de una hoja, conociendo la posicion y magnitud de los ejes.*

Las ecuaciones para hallar las coordenadas x', y', z' del punto de contacto, son

$$\frac{\alpha x'}{a^2} + \frac{\beta y'}{b^2} + \frac{\gamma z'}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

Siendo dos las ecuaciones y tres las incógnitas, el problema es indeterminado, es decir, que desde un punto dado se puedan tirar al hiperboloide de una hoja una infinidad de planos tangentes.

365. *Tirar un plano tangente al hiperboloide de una hoja, que sea paralelo á un plano dado, conociendo la posicion y magnitud de los tres ejes del hiperboloide.*

Idéntica resolucion á la del problema análogo del elipsoide.

Artículo 4.°

Planos diametrales y diámetros conjugados del hiperboloide de una hoja.

366. Por la regla general [338] hallaremos que la ecuacion de un plano diametral del hiperboloide de una hoja, plano diametral que biseca al sistema de cuerdas paralelas á la $x=mz+\alpha$, $y=nz+6$, es

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0,$$

la cual puede hallarse directamente siguiendo el mismo método que en el caso general [338].

367. *El plano tangente en el estremo de un diámetro del hiperboloide de una hoja es paralelo al plano diametral que biseca todas las cuerdas paralelas á dicho diámetro.*

Como en el elipsoide.

368. Del mismo modo que en el elipsoide se hallará que la ecuacion del hiperboloide de una hoja con respecto á un sistema de diámetros conjugados es

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

de la cual resulta que *dos diámetros cualesquiera de los tres conjugados son diámetros conjugados de la seccion diametral que pasa por los dos.*

Nota. Comparando esta ecuacion con la del elipsoide referido á un sistema de diámetros conjugados, se ve que únicamente se diferencian en el signo de c^2; luego las propiedades del hiperboloide en las que entre c, c', pueden deducirse del las análogas del elipsoide cambiando respectivamente c en $c\sqrt{-1}$ y c' en $c'\sqrt{-1}$.

369. *No hay en el hiperboloide de una hoja mas sistema rectangular de diámetros conjugados que el sistema de sus tres ejes.*

Como en el elipsoide.

Segun la nota del número 36 , tendremos estos dos teoremas.

1.° *Siendo* a,b,c *los semi-ejes del hiperboloide, y* a',b',c' *un sistema de semi-diámetros conjugados, es*

$$a^2+b^2-c^2=a'^2+b'^2-c'^2$$

2.° *El volúmen del paralelepípedo construido sobre los semi-diámetros conjugados del hiperboloide de una hoja es igual al del construido sobre sus semi-ejes.*

Artículo 5.°

Cono asintótico del hiperboloide de una hoja.

370. *Hallar la ecuacion del cono cuyo vértice sea el centro del hiperboloide de una hoja, y cuya directriz sea una elipse igual y paralela á la de garganta, teniendo esta directriz su centro en el estremo* C *del segundo eje de las dos hipérbolas principales.*

Fig. 58 Tomemos por ejes de coordenadas el sistema siguiente de diámetros conjugados: el eje segundo comun de las dos hipérbolas principales por eje Oz, y por ejes Ox, Oy un sistema cualquiera de diámetros conjugados de la elipse de garganta; y sigamos el método general esplicado en [281].

Las ecuaciones de la directriz MNP son

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1,\ z=c.$$

Sean x',y',c las coordenadas del punto M en que una generatriz cualquiera OMG encuentra á la directriz; tendremos por consiguiente entre x' é y' la relacion

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1.$$

Las ecuaciones de la generatriz OMG, que pasa por los dos puntos O y M, serán [274, 2.°] $x=\frac{x'}{c}z,\ y=\frac{y'}{c}z.$

Eliminando entre estas tres ecuaciones las dos variables x', y', resulta la ecuacion

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

que nos da la relacion entre las coordenadas x,y,z de un punto cualquiera de una generatriz cualquiera del cono; es decir, que esta ecuacion es la del cono.

371. Vamos ahora á demostrar que la superficie de este cono va acercándose contínuamente á la del hiperboloide, á medida que los puntos de ambas superficies se alejan del centro; que puede acercarse cuanto se quiera, pero que nunca la alcanza: por cuya propiedad este cono se llama cono *asintótico* del hiperboloide.

Fig. 59. Cortemos el hiperboloide por un plano $z=\gamma$, es decir, por un plano paralelo al xy; la interseccion, sabemos, será una elipse PQ, cuya ecuacion, ó mas bien la de su proyeccion sobre el plano xy, es

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}+1.$$

El mismo plano corta al cono por una elipse MN, cuya proyeccion sobre el plano xy, idéntica á esta elipse, tiene por ecuacion

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Los semi-ejes de la primera de estas dos elipses son $\frac{a'}{c}\sqrt{\gamma^2+c^2}$, $\frac{b'}{c}\sqrt{\gamma^2+c^2}$, y los de la segunda $\frac{a'\gamma}{c}$, $\frac{b'\gamma}{c}$: la diferencia entre los semi-ejes respectivos es $\frac{a'}{c}\left(\sqrt{\gamma^2+c^2}-\gamma\right)$, $\frac{b'}{c}\left(\sqrt{\gamma^2+c^2}-\gamma\right)$. La primera de estas dos diferencias puede escribirse asi: $\frac{a'}{c}\cdot\frac{c^2}{\sqrt{\gamma^2+c^2}+\gamma}=\frac{a'c}{\sqrt{\gamma^2+c^2}+\gamma}$, y la segunda será igualmente $\frac{b'c}{\sqrt{\gamma^2+c^2}+\gamma}$. Ahora bien, á medida que γ va creciendo, estas diferencias van disminuyendo; y creciendo γ suficientemente, pueden llegar á ser menores que cualquiera cantidad por pequeña que sea; pero no se reducen nunca á cero, pues para esto seria preciso que $\gamma=\infty$. Queda asi demostrado que las dos elipses que resultan cortando el hiperboloide y el cono por un plano paralelo al xy, pueden llegar á distar entre sí tan poco como se quiera, alejándose suficientemente el plano secante del plano xy; luego la superficie del cono puede acercarse á la del hiperboloide tanto como se quiera.

Artículo 6.°

Secciones rectilíneas del hiperboloide de una hoja.

371. *Fig. 60. Por cada punto* M *de la elipse de garganta pasan dos rectas* MP, MP′ *situadas enteramente en el hiperboloide, y respectivamente paralelas á dos generatrices opuestas del cono asintótico.*

Tiremos el semidiámetro $MO=a'$ y su conjugado $ON=b'$, y tomemos por ejes de coordenadas los tres diámetros conjugados OM, ON y $OC=c$ prolongados indefinidamente: la ecuacion del hiperboloide será

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La ecuacion del plano tangente al hiperboloide en el estremo M del semidiametro OM es $x=a'$, puesto que dicho plano tangente es paralelo al diametral yOz [367]; ecuacion que tambien es fácil hallar directamente: igualando coordenadas entre estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ \text{ó}\ y=\pm\frac{b'}{c}z,$$

es decir, que la proyeccion (sobre el plano yz) de la interseccion del plano tangente con el hiperboloide se reduce á dos líneas rectas OG y OG': mas siendo el plano tangente paralelo al yz, la interseccion es idéntica á la proyeccion sobre el mismo plano yz; luego por un punto cualquiera M de la elipse de garganta pasan dos rectas MP, MP' situadas enteramente sobre el hiperboloide.

Para demostrar ahora que dichas dos rectas MP y MP' son respectivamente paralelas á dos generatrices opuestas del cono asintótico, escribamos la ecuacion de este cono, que es

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

y cortemos su superficie por el plano yz, cuya ecuacion es $x=0$: la ecuacion de la interseccion será

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ y=\pm\frac{b'}{c}z.$$

Estas dos ecuaciones son las mismas que las de las rectas OG y

OG'; por lo tanto OG y OG' son dos generatrices opuestas del cono asintótico: ya hemos visto que dos rectas MP y MP' son paralelas á las dos generatrices OG y OG'.

NOTA. 1.ª Obsérvese que el plano tangente MPP', que contiene á las dos rectas MP y MP', es perpendicular al xy, puesto que es paralelo al yz: luego las proyecciones, sobre el plano xy, de dichas dos rectas MP, MP' coincidirán con la tangente TM á la elipse de garganta.

NOTA 2.ª Si por cada punto M de la elipse de garganta se levanta una perpendicular Mz' al plano de la elipse, ó paralela al eje Oz, serán iguales los dos ángulos PMz' y $P'Mz'$ que forman con esta paralela las partes superiores de las dos rectas del hiperboloide que pasan por el punto M; porque dichos dos ángulos son iguales á los ángulos GOz, $G'Oz$, y estos son iguales entre sí, segun lo manifiestan las ecuaciones $y = \frac{b'}{c}z$, $y = -\frac{b'}{c}z$ de las rectas OG y OG'; pues $\frac{b'}{c}$ es la tangente del ángulo GOz, y $-\frac{b'}{c}$ es la tangente del ángulo que la prolongacion de la OG', en sentido contrario al que tiene, forma con la parte Oz positiva de este eje; y por tanto $\frac{b'}{c}$ es la tangente del ángulo $G'Oz$.

Estos dos ángulos PMz', $P'Mz'$, como se ve, están situados á diferente lado de la perpendicular Mz'. Por consiguiente *en el hiperboloide de una hoja hay dos sistemas de rectas; las del primer sistema forman ángulos agudos con las paralelas al eje* Oz *en el sentido que indica la flecha, y las del segundo en el sentido contrario.*

372. Fig 61. *Por cada punto* M *del hiperboloide de una hoja pasan dos rectas de diferente sistema.*

Desde el punto M bajemos la perpendicular MA al plano de la elipse de garganta: el pie A de esta perpendicular estará evidentemente fuera de dicha elipse; y por tanto desde él se podrán tirar á la elipse BC dos tangentes AB y AC. Tiremos ahora por los puntos B y C dos planos tangentes al hiperboloide: estos planos pasarán por las tangentes AB y AC [329, *al fin*], y contendrán á la perpendicular AF, por ser los dos perpendiculares al plano de la elipse de garganta [371, *No-*

ta 1.ª]; luego la perpendicular AF al plano OBC será la interseccion de ambos planos tangentes. El plano tangente BAF corta al hiperboloide por las dos rectas BD y BD' de diferente sistema; la BD' debe encontrar á la AF, puesto que el ángulo $D'BA$ es agudo, y que las dos se hallan en el plano tangente DBA; y como esta recta BD' tiene todos sus puntos en la superficie, encontrará á la FA en el punto M, único que esta recta tiene comun con la superficie por la parte superior de la elipse de garganta.

Queda, pues, demostrado que por un punto cualquiera M del hiperboloide de una hoja pasa una recta de un sistema. Del mismo modo se hace ver que la recta CE del otro sistema pasa tambien por el punto M.

Corolario: *Las dos rectas que pasan por un punto cualquiera del hiperboloide determinan el plano tangente á la superficie en dicho punto;* puesto que estas dos rectas pueden considerarse como tangentes á sí mismas.

373. Fig. 61. *Dos rectas* CE y BD *de un mismo sistema no se encuentran ni son paralelas.*

Por los puntos B y C tiremos las tangentes BA y CA á la elipse BC de garganta, y por el punto A, en que se encuentran, levantemos la MM' perpendicular al plano de esta curva; dicha perpendicular encontrará al hiperboloide en los dos puntos M y M' equidistantes del mismo plano. Ahora se demostrará, del mismo modo que en el teorema anterior, que la recta CE encuentra á la AF en el punto M, y que la BD la encuentra en el punto M'. Esto supuesto, los dos planos tangentes, en que se hallan las dos rectas CE y BD, no tienen mas puntos comunes que los de su interseccion MM', y como las dos rectas CE y BD no pueden encontrar á dicha interseccion MM' mas que en los puntos M y M', se infiere que estas dos rectas no pueden encontrarse.

Probemos ahora que las dos rectas CE y BD del mismo sistema no pueden ser paralelas.

Sabemos que las dos rectas CE y BD son paralelas á dos generatrices OG y OG' del cono asintótico: luego si las dos rectas CE y BD fuesen paralelas entre si, sacaríamos en consecuencia que la OG, paralela á la CE, seria tambien paralela á la BD; luego por el punto O se podrian tirar dos paralelas OG y OG' á la recta CE; lo que es absurdo.

374. Fig. 61. *Dos rectas* CE *y* BD' *de diferente sistema,*

que cortan á la elipse de garganta en dos puntos C *y* B *no diametralmente opuestos, se encuentran.*

Tiremos por los puntos C y B dos tangentes CA y BA; las cuales se encontrarán, puesto que, segun la hipótesi, los puntos C y B no son estremos de un mismo diámetro de la elipse de garganta; por el punto A de interseccion de dichas dos tangentes levanto una perpendicular MM' al plano de esta elipse, la cual perpendicular cortará á la parte superior del elipsoide en un punto M, que digo es el de interseccion de las dos generatrices CE y BD'. En efecto, los dos planos $D'BA$ y ECA son perpendiculares al de la elipse de garganta, y tienen por interseccion comun la recta MM'; el plano $D'BA$ corta al hiperboloide por la recta BD', la cual tiene que cortar á la recta MM', y la ha de cortar en el punto M, único en que la FMM' corta á la superficie por la parte superior de la elipse de garganta. Del mismo modo se demuestra que la recta CE corta á la MM' en el punto M; y por consiguiente las dos rectas CE y BD' se encontrarán.

375. *Fig.* 62. *Dos rectas* CE *y* C'E' *de diferente sistema que cortan á la elipse de garganta en dos puntos* C *y* C' *diametralmente opuestos, son paralelas.*

En efecto, tirando por el diámetro BO conjugado del CC' y por el eje Oz un plano, la recta OG, interseccion de dicho plano con el cono asintótico, será al mismo tiempo paralela á las dos rectas de diferente sistema CE y $C'E'$, segun se ha demostrado en [371], y por tanto estas dos rectas son paralelas entre sí.

276. *Tres rectas del mismo sistema no son paralelas á un mismo plano.*

En efecto, si dichas tres rectas, que son paralelas á tres generatrices del cono asintótico, fuesen paralelas á un plano P, estas tres generatrices del cono serian paralelas al mismo plano P; por consiguiente los dos planos que pasan por una de estas tres generatrices y las otras dos, serian paralelos al plano P'; luego por un punto podrian pasar dos planos paralelos á un tercero, lo que es absurdo.

CAPITULO VI.

Teoría del hiperboloide de dos hojas.

ARTICULO 1.°

Forma del hiperboloide de dos hojas.

377. La ecuacion del hiperboloide de dos hojas con respecto á sus tres ejes prolongados indefinidamente es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

de la cual vamos á deducir la forma de esta superficie, aunque ya no es conocida, segun la definicion [296].

Cortemos en primer lugar dicha superficie por los tres planos coordenados, haciendo sucesivamente $x=0$, $y=0$, $z=0$; y resultan las ecuaciones de las tres secciones principales, á saber:

$$-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ \ldots\ [m],\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ \ldots\ [n];$$

la primera de estas tres ecuaciones no representa nada, la segunda representa una hipérbola cuyo eje primero está tomado sobre el eje Ox y el segundo sobre el eje Oz; y la tercera representa igualmente una hipérbola cuyo eje primero está tomado sobre el eje Ox y el segundo sobre el Oy.

Por consiguiente el hiperboloide de dos hojas no tiene mas que dos secciones principales, que son las dos hipérbolas representadas por las dos ecuaciones $[m]$ y $[n]$.

Hagamos ahora $x=\pm\alpha$, es decir, cortemos el hiperboloide por planos paralelos al yz y situados á derecha é izquierda del mismo plano; la proyeccion (sobre el plano yz) de la interseccion será

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1.$$

Esta ecuacion no representa nada, mientras el valor absoluto de α sea menor que a; es decir, que el plano paralelo al yz no corta al hiperboloide de dos hojas, mientras su distancia á este sea, á derecha ó izquierda, menor que a.

Si el valor absoluto de α es igual á a, la proyeccion de la interseccion tendrá por ecuacion $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, que representa un punto $y=0$, $z=0$: luego las intersecciones, con el hiperboloide de dos hojas, de dos planos paralelos al yz y distantes de este la cantidad a á derecha é izquierda, son dos puntos $x=a, y=0$, $z=0$; $x=-a$, $y=0$, $z=0$; los cuales son los estremos del eje $2a$.

Si el valor absoluto de α es mayor que a, será $\frac{\alpha^2}{a^2}>1$, y por consiguiente la proyeccion de la interseccion es una elipse; luego tambien la interseccion, idéntica á la proyeccion, es una elipse: lo que demuestra que esta superficie consta de dos hojas separadas por un cierto intervalo $2a$.

Á medida que el valor absoluto de α crece, los ejes de la elipse interseccion van creciendo; pues si escribimos la ecuacion así:

$$\frac{y^2}{\frac{b^2(\alpha^2-a^2)}{a^2}}+\frac{z^2}{\frac{c^2(\alpha^2-a^2)}{a^2}}=1,$$

se ve que los ejes de la elipse son $\frac{b}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2}$ y $\frac{c}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2}$, los cuales evidentemente van creciendo, á medida que crece el valor absoluto de α; y pueden llegar á ser mayores que cualquiera cantidad dada, creciendo α suficientemente.

Todas estas elipses son semejantes, puesto que $\frac{b}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2}:\frac{c}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2}::b:c$; es decir que tienen sus ejes proporcionales.

Observemos, además, que las elipses equidistantes, á derecha é izquierda, del plano yz son idénticas; luego las dos hojas de que consta este hiperboloide, son simétricas.

Cortemos ahora el hiperboloide de dos hojas por planos paralelos al xz. Demos con este objeto á y el valor $\pm\beta$, y resultará que la ecuacion de la proyeccion de las dos intersecciones es
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{\beta^2}{b^2},$$

ecuacion de una hipérbola cuyo eje primero está tomado sobre el Ox, y el segundo sobre el Oz; y pues las dos intersecciones con la superficie por los dos planos equidistantes del xz tienen la misma proyeccion sobre este plano, se infiere que dichas dos intersecciones, idénticas á proyeccion, son idénticas entre sí. Luego el hiperboloide de dos hojas es una superficie simétrica respecto de la seccion principal xz.

Es fácil demostrar que todas las hipérbolas que resultan cortando el hiperboloide por planos paralelos á la seccion principal xz, son semejantes.

Del mismo modo se verá que el hiperboloide de dos hojas es una superficie simétrica respecto de la seccion principal xy, y que todas las hipérbolas que resultan cortando esta superficie por planos paralelos al xy son semejantes.

Asi queda suficientemente conocida la forma de esta superficie.

Articulo 2.°

Secciones circulares.

378. Siendo la ecuacion del hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

hallaremos como en el caso del elipsoide

$$\cos\varphi=0,\ \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}};$$

ecuaciones que determinan los dos ángulos φ y θ, y por tanto la posicion del plano secante para que las intersecciones sean círculos: luego existen dos posiciones del plano secante al hiperboloide de dos hojas, cuyas intersecciones con esta superficie son dos círculos.

Es menester observar que en este caso el plano secante determinado por las ecuaciones

$$\cos\varphi=0,\ \operatorname{tg}\theta=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}},$$

y que, pasa por el centro, daria por intersecciones círculos imaginarios, pues la ecuacion de la interseccion es

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{b^2}\right)+y'^2\left(\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{b^2}-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right)=1,$$

$$ó \quad x'^2\left(\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right)+y'^2\left(\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right)+1=0,$$

ecuacion que no representa nada; ó si se quiere, que representa un círculo de radio imaginario.

Por lo tanto para que el plano secante dé un círculo en su interseccion con el hiperboloide de dos hojas, es menester que dicho plano esté suficientemente lejano del centro; es menester, en otros términos, que sea en realidad secante.

Ahora se demostrará como en [348], que existiendo dos planos que cortando á esta superficie producen círculos, existen dos séries de planos que cortan á la superficie por círculos.

Si el hiperboloide de dos hojas fuese de revolucion, esto es si fuese $b=c$, resultaria $\operatorname{tg}\theta=\infty$: luego en el hiperboloide de revolucion de dos hojas no hay mas que una série de planos secantes que corten á esta superficie por círculos; y son todos los paralelos al plano yz, que cortan á dicha superficie.

Articulo 3.°

Planos tangentes, planos diametrales y diámetros conjugados del hiperboloide de dos hojas.

379. La ecuacion del plano tangente al hiperboloide de dos hojas es
$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Por medio de esta ecuacion se resolverán los problemas propuestos en el caso del elipsoide ó hiperboloide de una hoja, de un modo análogo al seguido en estas superficies

380. La ecuacion del plano diametral del hiperboloide de dos hojas, siendo m y n las tangentes de los ángulos que forman con el eje Oz las proyecciones de las cuerdas paralelas bisecadas por dicho diámetro, es
$$\frac{mx}{a^2}-\frac{ny}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0.$$

381. *El plano tangente en el estremo de un diámetro del hiperboloide de dos hojas es paralelo al plano diametral que biseca al sistema de cuerdas paralelas á dicho diámetro.*

Como en el elipsoide.

382. Del mismo modo que en el elipsoide se hallará que

la ecuacion del hiperboloide de dos hojas con respecto á un sistema de diámetros conjugados [356] es

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

de la cual resulta que *dos diámetros cualesquiera de los tres conjugados son diámetros conjugados de la seccion diametral que pasa por aquellos dos.*

NOTA. Comparando esta ecuacion con la del elipsoide referido tambien á un sistema de diámetros conjugados, se ve que para pasar de una á otra, no hay mas que mudar los signos de b'^2 y c'^2: luego las propiedades del elipsoide en que entran c y b, c' y b' se aplicarán al hiperboloide de dos hojas cambiando c en $c\sqrt{-1}$, b en $b\sqrt{-1}$, c' en $c'\sqrt{-1}$, b' en $b'\sqrt{-1}$.

383. *No hay en el hiperboloide de dos hojas mas sistema rectangular de diámetros conjugados que el sistema de sus tres ejes.*

Como en el elipsoide.

384. Segun la nota del número 382, tendremos estos dos teoremas:

1.° *Siendo* a, b, c *los semiejes del hiperboloide de dos hojas y* a′, b′, c′ *un sistema de semidiámetros conjugados, es*

$$a^2-b^2-c^2=a'^2-b'^2-c'^2.$$

2.° *El volúmen del paralelepípedo construido sobre los semidiámetros conjugados del hiperboloide de una hoja es igual al del construido sobre sus semiejes.*

ARTICULO 4.°

Cono asintótico del hiperboloide de dos hojas.

385. Fig. 63. *Hallar la ecuacion del cono cuyo vértice sea el centro del hiperboloide de dos hojas, cuya directriz sea una elipse* PMN *de ejes* 2b *y* 2c, *paralela al plano* yz, *y la cual tenga el centro en el vértice* A *del hiperboloide.*

Siguiendo el método [281], se hallará que la ecuacion de este cono es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

386. Demostremos que este cono es *asintótico* del hiperboloide de dos hojas, es decir que su superficie se acerca indefinidamente á la del hiperboloide.

Cortemos el hiperboloide y el cono por un plano $x=\alpha$:

las proyecciones, sobre el plano yz, de las dos intersecciones serán $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1$, $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}$

Los semiejes de la primera de las dos elipses representadas por estas ecuaciones son

$$\frac{b}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2},\quad \frac{c}{a}\sqrt{\alpha^2-a^2},$$

y los de la segunda $\frac{b\alpha}{a}$, $\frac{c\alpha}{a}$: las diferencias respectivas son $\frac{b}{a}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-a^2})$, $\frac{c}{a}(\alpha-\sqrt{\alpha^2-a^2})$ diferencias que, se demostrará fácilmente, tienen por límite 0, aumentando α indefinidamente: luego las superficies del hiperboloide y cono van aproximándose indefinidamente.

CAPITULO VII.

Teoría del paraboloide elíptico.

Articulo 1.°

Forma del paraboloide elíptico.

387. La ecuacion de esta superficie es

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x,$$

de la cual vamos á deducir la forma de esta superficie, aunque nos es suficientemente conocida en virtud de su generacion [287].

Hagamos sucesivamente $x=0$, $y=0$, $z=0$: las ecuaciones, que resultan para las proyecciones de las respectivas intersecciones, son:

$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=0$, que representa un punto (0,0),
$z^2=2p'x$, una parábola,
$y^2=2px$, una parábola.

Luego el paraboloide elíptico tiene dos secciones principales.

Demos á x el valor α, y resultará la ecuacion de la proyeccion de la interseccion

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=\alpha, \text{ ó } \frac{y^2}{2p\alpha}+\frac{z^2}{2p'\alpha}=1,$$

ecuacion da una elipse cuyos semi-ejes son $\sqrt{2p\alpha}$, $\sqrt{2p'\alpha}$, semi-ejes que van creciendo indefinidamente, creciendo indefinidamente α, y son proporcionales á $\sqrt{2p}$ y $\sqrt{2p'}$: luego todas las elipses que van resultando son semejantes.

Demos á y el valor ± 6, y se verá fácilmente, que las intersecciones son parábolas iguales á la seccion principal del plano xz; é igualmente haciendo $z=\pm\gamma$, resultarán parábolas iguales á la principal del plano xy Luego el paraboloide elíptico es una superficie simétrica respecto de las dos parábolas principales.

388. *El paraboloide elíptico es un elipsoide cuyo centro se ha alejado al infinito; y tambien es un hiperboloide de dos hojas cuyo centro se ha alejado al infinito.*

1.° La ecuacion ordinaria del elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

traslademos el orígen al vértice izquierdo, quedando los ejes paralelos á los primitivos, para lo cual, pondremos en vez de x $x-a$, y la ecuacion del elipsoide será en tal caso,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2x}{a}=0:$$

hagamos $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=p'$, y la ecuacion del elipsoide

será
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{ap}+\frac{z^2}{ap'}-\frac{2x}{a}=0,$$

ó
$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}-2x=0.$$

Supongamos ahora que a, b y c vayan creciendo indefinidamente, pero permaneciendo constantes p y p': en el caso en que $a=\infty$, ó en el que el centro se aleje al infinito, esta ecuacion se convierte en $\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x$, que es la del paraboloide elíptico.

2.° La ecuacion ordinaria del hiperboloide de dos hojas es

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1:$$

trasladando el orígen al vértice derecho, como en el caso anterior, la ecuacion del hiperboloide de dos hojas será

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{2x}{a}=0;$$

haciendo ahora $\frac{b^2}{a}=p$, $\frac{c^2}{a}=p'$, será dicha ecuacion

$$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}+2x=0;$$

y pasando al límite, la ecuacion será

$$\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x.$$

ARTICULO 2.°

Secciones circulares del paraboloide elíptico.

389. Sustituyendo en la ecuacion del paraboloide elíptico los valores de x, y, z dados por las fórmulas [322]

$$x=x'\cos\varphi+z'\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$y=x'\,\mathrm{sen}\,\varphi-z'\cos\theta\cos\varphi,$$
$$z=z'\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

resulta la ecuacion de la seccion del mismo plano secante que pasa por el orígen, á saber

$$\frac{x'^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}{2p}+z'^2\left(\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{2p}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2p'}\right)-2x'z'\,\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\cos\theta}{2p}$$
$$+Sx'+Tz'=0.$$

Para que esta ecuacion represente un círculo, es menester que

$$\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\cos\theta=0,$$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{2p}=\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{2p}+\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2p'}.$$

La primera se verifica en los tres casos siguientes: $\mathrm{sen}\,\varphi=0$, $\cos\varphi=0$, $\cos\theta=0$.

Si $\mathrm{sen}\,\varphi=0$, la segunda ecuacion nos dará

$$\mathrm{tg}\,\theta=\pm\sqrt{-\frac{p'}{p}}.$$

Si $\cos\varphi=0$, la segunda ecuacion se convierte en

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{p'}{p}}$$

Si $\cos\theta=0$, la segunda ecuacion nos dará

$$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{p}{p'}}$$

Supongamos que $p>p'$, esto es, que el parámetro de la parábola principal del plano xy sea mayor que el de la parábola principal del plano xz: la solucion $\cos\varphi=0$, $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{p'}{p}}$ es la única admisible; pues la tercera solucion $\cos\theta=0$, $\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{p}{p'}}$ no lo es, por ser $\operatorname{sen}\varphi>1$.

Luego *existen en el paraboloïde elíptico dos planos que pasan por el eje* Oy, *tangente á la parábola principal de mayor parámetro, cuyas intersecciones con esta superficie son círculos*.

Ahora se demostrará, como en los casos análogos de las otras superficies, que todos los planos paralelos á los dos que acabamos de determinar, producen círculos.

Si el paraboloide fuese de revolucion, esto es, si $p=p'$, seria $\cos\varphi=0$, $\operatorname{sen}\theta=1$; y por consiguiente $\varphi=90^\circ$, $\theta=90^\circ$, es decir que en este caso no hay mas que una série de planos paralelos que corten al paraboloide circularmente; y son todos los perpendiculares al eje de revolucion.

CAPITULO VIII.

Teoría del paraboloide hiperbólico

Artículo 1.º

Forma del paraboloide hiperbólico.

390. La ecuacion del paraboloide hiperbólico es

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2p'}=x,$$

por medio de la cual vamos á determinar la forma de esta superficie, aunque nos es conocida por su generacion [288]

Fig. 64. Hallemos en primer lugar las secciones principales.

Hago $x=0$, y resultará $x=\pm\frac{p}{p'}z$, es decir, que el plano yz corta al paraboloide hiperbólico por dos rectas $HL, H'L'$, que forman con el eje Oz, hácia diferente lado de este eje, dos ángulos iguales.

Hagamos ahora $y=0$, y resultará $z^2=-2p'x$; luego la interseccion es una parábola POP' situada en la region negativa.

Hagamos, por último, $z=0$, y resultará $y^2=2px$, ecuacion de una parábola QOQ' situada en la region positiva.

Cortemos ahora la superficie por planos paralelos á las secciones principales.

Si damos á x el valor positivo $OK=\alpha$, la ecuacion de la proyeccion (sobre el plano yz) de la interseccion será

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2p'}=\alpha, \text{ ó } \frac{y^2}{2p\alpha}-\frac{z^2}{2p'\alpha}=1,$$

ecuacion que representa una hipérbola en que el eje primero está tomado sobre el Oy, y el eje segundo sobre el Oz; luego la interseccion, idéntica á su proyeccion, es una hipérbola $MQNM'Q'N'$ cuyo eje primero QQ' es paralelo al Oy, y el segundo RR' al Oz.

A medida que crece α, crecen los ejes de esta hipérbola, pero siempre son proporcionales á $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}$, y por tanto todas estas hipérbolas son semejantes.

Si damos á x un valor negativo $-OG=-\alpha$, la ecuacion de la proyeccion (sobre el plano yz) de la interseccion será

$$\frac{z^2}{2p'\alpha}-\frac{y^2}{2p\alpha}=1,$$

ecuacion de una hipérbola en que el eje transversal es el Oz; luego la interseccion es una hipérbola $APBA'P'B'$ cuyo eje primero PP' es paralelo al Oz, y el segundo CC' al Oy. Los ejes de esta hipérbola irán creciendo á medida que crezca α, pero siempre serán proporcionales á $\sqrt{p'}$ y $\sqrt{p}$; y por tanto todas estas hipérbolas son semejantes entre si.

Si cortamos el paraboloide hiperbólico por planos paralelos á las dos parábolas principales, se verá que las intersecciones son siempre idénticas á dichas parábolas.

Queda suficientemente determinada la forma del paraboloide hiperbólico.

391. *El paraboloide hiperbólico es un hiperboloide de una hoja, cuyo centro se ha alejado al infinito.*

La ecuacion ordinaria del hiperboloide de una hoja es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1:$$

traslademos el orígen al vértice izquierdo de la elipse de garganta, quedando los ejes paralelos á los primitivos; y la ecuacion del hiperboloide será con respecto á los nuevos ejes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{2x}{a}=0,$$

y haciendo $b^2=ap$, $c^2=bp$, sustituyendo, reduciendo y pasando al caso del límite, es decir, al caso en que $a=\infty$, ó en que el centro se ha alejado al infinito, resulta

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2p'}=x,$$

que es la ecuacion del paraboloide hiperbólico.

Articulo 2.º

Secciones rectilíneas del paraboloide hiperbólico.

392. *Fig. 65. Hallar la ecuacion del paraboloide hiperbólico, tomando por ejes de las* x, *de las* y, *de las* z, *el diámetro* O′x′ *de la parábola principal* xy, *la tangente* O′y′ *en su estremo y la perpendicular* O′z′ *al plano de la misma parábola.*

Sean a, b y c las coordenadas del nuevo orígen O' con respecto á los ejes primitivos: las fórmulas para pasar de los ejes rectangulares á los nuevos rectangulares cuyo orígen es diferente, son [381 y 320]

$$x=x'\cos(x'x)+y'\cos(y'x)+z'\cos(z'x)+a,$$
$$y=x'\cos(x'y)+y'\cos(y'y)+z'\cos(z'y)+b,$$
$$z=x'\cos(x'z)+y'\cos(y'z)+z'\cos(z'z)+c:$$

actualmente los ángulos

$(x'x)=0$, $(z'x)=90°$, $(x'y)=90°$, $(z'y)=90°$, $(x'z)=90°$, $(y'z)=90°$, $(z'z)=0$; y además $c=0$; luego las fórmulas de transformacion serán

$$x=x'+y'\cos(y'x)+a,\ y=y'\cos(y'y)+b,\ z=z'.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion ordinaria del paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2p'}=x$, tendremos

$$\frac{\cos^2(y'y)}{2p}y'^2+\frac{b\cos(y'y)}{p}y'+\frac{b^2}{2p}-\frac{z'^2}{2p'}=x'+y'\cos(y'x)+a:$$

mas $\operatorname{tg}(y'x)=\frac{p}{b}$, de donde $b \operatorname{sen}(y'x)=p\cos(y'x)$. ó $\frac{b\cos(y'y)}{p}=\cos(y'x)$; y tambien $b^2=2pa$, ó $\frac{b^2}{2p}=a$; luego la ecuacion anterior se reduce á

$$\frac{\cos^2(y'y)}{2p}y'^2-\frac{z'^2}{2p'}=x':$$

haciendo ahora $\frac{2p}{\cos^2(y'y)}=2q$, la ecuacion del paraboloide con respecto á los nuevos ejes será, suprimiendo los acentos,

$$\frac{y^2}{2q}-\frac{z^2}{2p'}=x,$$

la cual tiene la misma forma que la ecuacion ordinaria.

393. Fig. 66. *Por cada punto de la parábola principal del plano* xy *pasan dos rectas situadas enteramente en el paraboloide.*

La ecuacion del plano tangente al paraboloide en el punto E se deducirá de la fórmula general

$$(x-x')f'_{x'}+(y-y')f'_{y'}+(z-z')f'_{z'}=0,$$

la cual, sustituyendo los valores de $f'_{x'}, f'_{y'}, f'_{z'}$, y simplificando, se convertirá en

$$\frac{yy'}{q}-\frac{zz'}{p'}=x+x'.$$

Siendo actualmente $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, dicha ecuacion se convertirá en $x=0$; luego el plano yz es tangente al paraboloide en el punto E. Igualando coordenadas entre la ecuacion $x=0$ del plano tangente y la del paraboloide que es

$$\frac{y^2}{2q}-\frac{z^2}{2p'}=x,$$

tendremos la interseccion de dicho plano tangente con el hiperboloide: resulta $y=\pm z\sqrt{\frac{q}{p'}}$, que son dos líneas rectas que pasan por el orígen E.

NOTA 1.ª El plano tangente zEy en el punto E es perpendicular al plano de la parábola EOD, puesto que pasa por la recta Ez perpendicular á dicho plano EOD: luego las proyecciones, sobre el plano EOD, de las dos rectas EM, EF, situadas sobre el hiperboloide, coincidirán con la tangente Ey á la parábola EOD en el punto E.

NOTA 2.ª En virtud de las ecuaciones de las dos rectas EM y EF, se demostrará fácilmente que son iguales los dos ángulos MEz, FEz que estas dos rectas forman con la perpendicular Ez al plano EOD en el punto E, hácia diferente lado de la dicha perpendicular Ez.

Por consiguiente *en el paraboloide hiperbólico existen dos sistemas de rectas, tales que las del uno forman ángulos agudos con las paralelas al eje* Ez *hácia el lado que indica la flecha, y las del otro hácia el lado opuesto.*

394. *Fig.* 66 *Por todo punto* M *del paraboloide hiperbólico pasan dos rectas de diferente sistema*

Bajemos desde el punto M una perpendicular MP al plano de la parábola principal EOD y desde su pié P tiremos dos tangentes PE y PD á la parábola EOD: por los puntos D y E tiremos los dos planoos tangentes al paraboloide.

Sigue la demostracion como en el teorema análogo del hiperboloide de una hoja

395. *Dos rectas de un mismo sistema no se cortan ni son paralelas.*

Se demuestra como el teorema análogo del hiperboloide de una hoja.

396 *Dos rectas cualesquiera de diferente sistema se encuentran.*

Se demuestra del mismo modo que el teorema (374).

397. *Fig.* 67. *Todas las rectas de un mismo sistema son paralelas al plano determinado por el eje* Ox *y por la recta* OG *de dicho sistema, que pasa por el vértice de la parábola principal* xy.

Hagamos $x=0$ en la ecuacion $\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2p'}=x$ del paraboloide referido á sus ejes ordinarios Ox, Oy, Oz, y resulta $y=\pm z\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Esta ecuacion representa dos rectas que pasan por el vértice y están situadas en plano yz Una de estas rectas OG forma con la Oz el ángulo GOz, cuya tangente es $\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Sea QM una recta cualquiera del mismo sistema que la OG, y TQ su proyeccion sobre el plano xy, la cual será tangente á la parábola OQ en el punto Q [393, *Nota* 1.ª]. El plano MQT cortará al plano xz por una recta MT perpendicular al plano xy, y por tanto la recta MQ cortará á la parábola principal OM en un punto M: las proyecciones de los puntos Q y M sobre el plano yz son Q' y M', y por consiguiente la recta $Q'M'$ es la proyeccion de la QM sobre el plano yz. Ahora bien, tenemos $\operatorname{tg} OM'Q' = \frac{OQ'}{OM'} = \frac{QP}{MT}$; y como las ecuaciones de las dos parábolas principales OQ y OM son $y^2 = 2px$, $z^2 = 2p'x$, tendremos $PQ^2 = 2p \,.\, OP$, $MT^2 = -2p' \times -OT$, y

$QP = \sqrt{2p \,.\, OP}$, $MT = \sqrt{2p' \,.\, OT}$; luego $\operatorname{tg} OM'Q' = \frac{\sqrt{2p \,.\, OP}}{\sqrt{2p' \,.\, OT}} = \sqrt{\frac{p}{p'}}$. Luego los dos ángulos $OM'Q'$ y $M'OG$, que tienen iguales tangentes, son iguales; luego las dos rectas OG y $M'Q'$, que están en el plano yz, son paralelas. El plano $QQ'M'$ que pasa por las rectas QQ' y $Q'M'$ paralelas á las Ox y OG, será paralelo al plano GOx: la recta MQ tiene los dos puntos Q y N en el plano $QQ'M'$; luego dicha recta es paralela al plano GOx.

Queda pues demostrado, que cualquier recta de un sistema es paralela al plano determinado por la recta Ox, y la recta del mismo sistema que pasa por el vértice de la parábola; luego todas las rectas del mismo sistema son paralelas á dicho plano GOx.

CAPITULO IX.

Discusion de las ecuaciones numéricas de segundo grado con tres variables.

Discutir una ecuacion numérica de segundo grado con tres variables es determinar la forma, posicion y magnitud de la superficie que dicha ecuacion representa.

Teorema 1.º *Los coeficientes* P, P′, P″ *de la ecuacion*

$Px^2+P'y^2+P''z^2=H$, *que representa las tres superficies de segundo órden con un solo centro, son las raices de la ecuacion* $s^3-(A+A'+A'')s^2-(B^2-AA'+B'^2-AA''+B''^2-A'A'')s-(AA'A''+2BB'B''-AB''^2-A'B'^2-A''B^2)=0$ ...... [D].

Fig. 56. En efecto, la ecuacion de la superficie con respecto á los ejes rectangulares Ox, Oy, Oz es

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y+2C''z+D=0:$$

sean Ox', Oy', Oz' tres ejes de coordenadas paralelos á los tres ejes de la superficie: para pasar de los ejes primitivos á los nuevos, tenemos [318] las fórmulas:

$$x=x'\cos(x'x)+y'\cos(y'x)+z'\cos(z'x),$$
$$y=x'\cos(x'y)+y'\cos(y'y)+z'\cos(z'y),$$
$$z=x'\cos(x'z)+y'\cos(y'z)+z'\cos(z'z):$$

sustituyamos estos valores en la ecuacion de la superficie referida á los ejes primitivos, y hallemos solamente el coeficiente de x'^2 que sabemos es P [342]. Tendremos

$$P=A\cos^2(x'x)+A'\cos^2(x'y)+A''\cos^2(x'z)+2B\cos(x'x)\cos(x'y)+2B'\cos(x'x)\cos(x'z)+2B''\cos(x'y)\cos(x'z):$$

sean m y n los coeficientes de direccion de la recta Ox'; tendremos [*Pág.* 348]

$$\cos(x'x)=\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}},\ \cos(x'y)=\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$
$$\cos(x'z)=\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}};$$

luego $$P=\frac{Am^2+A'n^2+B''+2Bmn+2B'm+2B''n}{m^2+n^2+1}:$$

mas [*Fórmulas* [B] *núm.* 342]

$$Am+Bn+B'=ms,$$
$$Bm+A'n+B''=ns,$$
$$B'm+B''n+A''=s;$$

multiplicando la primera por m, la segunda por n, y sumando las tres, tendremos

$$Am^2+A'n^2+A''+2Bmn+2B'm+2B''n=(m^2+n^2+1)s;$$

y por consiguiente $P=s$. Del mismo modo se demuestra que $P'=s'$, y que $P''=s''$, siendo s' y s'' las otras dos raices de la ecuacion [D].

Corolario. *La ecuacion* [D] *tiene sus tres raices reales;* puesto que los coeficientes P, P', P'' son cantidades reales.

Teorema 2.° *Los coeficientes* P' *y* P'' *de la ecuacion* $P'y^2+$

$P''z^2=2Qx$ *son las raices de la ecuacion* $s^3-(A+A'+A'')s-(B^2-AA'+B'^2-AA''+B''^2-A'A'')=0$.

Se demuestra del mismo modo que el teorema anterior.

Teorema 3.° *El valor del segundo miembro* H *de la ecuacion* $Px^2+P'y^2+P''z^2=H$, *es* $-(Cx_1+C'y_1+C''z_1+D)$, *siendo* x_1, y_1, z_1 *las coordenadas del centro con respecto á los ejes primitivos*.

En efecto, siendo la ecuacion primitiva de la superficie de segundo órden

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

si trasladamos el orígen al centro, siendo los nuevos ejes paralelos á los primitivos, para lo cual haremos $x=x'+x_1$, $y=y'+y_1$, $z=z'+z_1$, la nueva ecuacion será [*Nota primera al fin de la obra*]

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Bx'y'+2B'x'z'+2B''y'z'+f(x_1,y_1,z_1)=0,$$

en la cual la cantidad $f(x_1,y_1,z_1)=-H$, puesto que el término independiente $f(x_1,y_1\ z_1)$ de las variables no se altera tomando por nuevos ejes los ejes de la superficie prolongados indefinidamente, y que con respecto á estos nuevos ejes la ecuacion de la superficie es

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H.$$

Tenemos, pues,

$$H=-(Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2Bx_1y_1+2B'x_1z_1+2B''y_1z_1+2Cx_1+2C'y_1+2C''z_1+D):$$

mas las ecuaciones del centro son [336]

$$f'_{x_1}=0,\ f'_{y_1}=0,\ f'_{z_1}=0;$$

ó

$$Ax_1+By_1+B'z_1+C=0,$$
$$A'y_1+Bx_1+B''z_1+C'=0,$$
$$A''z_1+B'x_1+B''y_1+C''=0;$$

y multiplicándolas respectivamente por x_1, y_1, z_1, y añadiendo la suma ordenada de las tres nuevas ecuaciones, suma que es igual á 0, al valor de H, y reduciendo, resulta

$$H=-(Cx_1+C'y_1+C''z_1+D).$$

Teorema 4.° *El coeficiente* 2Q *en la ecuacion* $P'y^2+P''z^2=2Qx$ *de los dos paraboloïdes tiene por valor* $-2\dfrac{Cm+C'n+C''}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$, *siendo* m *y* n *los coeficientes de direccion del eje del paraboloïde con respecto á los ejes primitivos, es decir, los valores de estos coeficientes deducidos de las dos ecuaciones* $Am+Bn+B'=0$, $Bm+A'n+B''=0$ [Fórmulas [B'], núm 343].

En efecto, pasando de los ejes primitivos á los nuevos del mismo orígen Ox'_1, Oy'_1, Oz'_1, y hallando el coeficiente de x' en la nueva ecuacion, tendremos

$$-2Q=2C\cos(x'x)+2C'\cos(x'y)+2C''\cos(x'z);$$

sustituyendo en esta ecuacion los valores de $\cos(x'x)$, $\cos(x'y)$, $\cos(x'z)$, resulta $2Q=-2\cdot\dfrac{Cm+C'n+C''}{\sqrt{1+m^2+n^2}}$.

Pasemos ya á la discusion de las ecuaciones.

399. Dada una ecuacion numérica $f(x,y,z)=0$ de segundo grado con tres variables, igualaremos á cero las tres derivadas de su primer miembro, y tendremos las tres ecuaciones

$$f'_x(x,y,z)=0,\ f'_y(x,y,z)=0,\ f'_z(x,y,z)=0,$$

que nos darán las coordenadas x_1, y_1, z_1 del centro. Estas tres ecuaciones de primer grado pueden ser: 1.° distintas y compatibles; 2.° pueden ser incompatibles, ó lo que es igual, formar un sistema imposible; 3.° una de ellas puede ser consecuencia de las otras dos; 4.° dos de ellas pueden ser consecuencias de la otra, ó idénticas á la otra. Hemos discutido ya las ecuaciones de las superficies, cuyas derivadas igualadas á cero se hallan en los dos últimos casos [337]; y por tanto solo nos resta discutir las ecuaciones cuyas derivadas igualadas á cero se hallan en alguno de los dos casos primeros.

Primer caso. *Las tres ecuaciones del centro son distintas y compatibles.*

En este caso cada una de las incógnitas tiene un solo valor, y por consiguiente la superficie tiene un solo centro: la superficie será pues un elipsoide, un hiperboloide de una hoja, un hiperboloide de dos hojas, ó alguna de las variedades de estas superficies, á saber, un elipsoide imaginario, un punto ó un cono.

Para determinar cuál es la superficie ó variedad de superficie representada por la ecuacion dada, hallaremos el valor de H por la fórmula $H=-(Cx_1+C'y_1+C''z_1+D)$; y podrán ocurrir los tres casos: 1.° $H>0$, 2.° $H<0$, 3.° $H=0$.

Sea $H>0$.

Formaremos la ecuacion [D], cuyas tres raices son reales é iguales á los coeficientes P, P', P'' de la ecuacion reducida de la superficie, y por consiguiente la regla de los signos de Descartes nos dirá si dichas tres raices reales son positivas, negativas, dos positivas y una negativa, ó una positiva y dos negativas.

1.° Si las tres raices P, P', P'' de la ecuacion [D] son positivas, sabemos que la ecuacion representa un elipsoide; el cual será de revolucion, si dos de dichas tres raices son iguales; y será una esfera, si las tres raices son iguales.

Para determinar la posicion y magnitud de este elipsoide, sustituiremos sucesivamente en las dos ecuaciones [342]

$$\left.\begin{array}{l} Am+Bn+B'=ms, \\ Bm+A'n+A''=ns \end{array}\right\} [B]$$

los valores P, P', P'' de s, y hallaremos los valores correspondientes de m y n, y asi tendremos conocidas las direcciones de los tres sistemas de cuerdas principales, y por tanto las de los tres ejes finales Ox, Oy, Oz, cada uno de los cuales es una cuerda principal que pasa por el centro: conocemos, además, las coordenadas del centro; y las magnitudes de los tres ejes pueden deducirse de la ecuacion reducida, y son $\sqrt{\frac{H}{P}}$, $\sqrt{\frac{H}{P'}}$, $\sqrt{\frac{H}{P''}}$; y de este modo queda el elipsoide completamente determinado.

Si el elipsoide es de revolucion, lo que se verificará siendo dos raices de la ecuacion (D), por ejemplo P y P', iguales, y la tercera P'' desigual á las otras dos, determinaremos el centro, y la direccion del eje de revolucion, sustituyendo en vez de s en las dos ecuaciones [B] el valor P'' de la raiz desigual; y despejando en seguida m y n, tendremos los coeficientes de direccion del eje de revolucion. Las magnitudes del semi-eje de revolucion y rádio del ecuador se determinan por las espresiones $\sqrt{\frac{H}{P''}}$ y $\sqrt{\frac{H}{P}}$.

Si el elipsoide es una esfera, lo que se verificará siempre que las tres raices de la ecuacion [D] sean iguales, se determinarán el centro y el radio $\sqrt{\frac{H}{P}}$; con lo cual quedará determinada la esfera.

Nota. Despues de hallar los valores m y n correspondientes á las tres raices P, P', P'', (á cuyos valores llamaremos respectivamente m y n, m' y n', m'' y n'') pueden hallarse los ángulos que los tres ejes finales Ox', Oy', Oz' forman con los tres ejes primitivos Ox, Oy, Oz, por medio de las fórmulas:

$$\cos(x'x)=\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}, \quad \cos(x'y)=\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

$$\cos(x'z)=\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}; \quad \cos(y'x)=\frac{m'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}},$$

$$\cos(y'y)=\frac{n'}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}, \quad \cos(y'z)=\frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}};$$

$$\cos(z'x)=\frac{m''}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}}, \quad \cos(z'y)=\frac{n''}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}},$$

$$\cos(z'z)=\frac{1}{\sqrt{1+m''^2+n''^2}}.$$

2.° Si las raices P, P', P'' fuesen negativas, la ecuacion reducida seria imposible; luego la ecuacion propuesta no representa nada; lo que tambien se suele espresar diciendo, que representa un elipsoide imaginario.

3.° Si dos de las raices P y P' de la ecuacion [D] son positivas y la tercera P'' negativa, la ecuacion reducida, poniendo en manifiesto el signo de P'', será

$$Px^2+P'y^2-P''z^2=H;$$

la cual, sabemos, representa un hiperboloide de una hoja, cuya posicion y magnitud se determinan del mismo modo que la posicion y magnitud del elipsoide.

Si el hiperboloide de una hoja es de revolucion, lo que se verificará siendo iguales las dos raices positivas P y P', se determinarán el centro y la direccion del eje de revolucion, sustituyendo en vez de s en las dos ecuaciones [B] el valor P'' de la raiz desigual de la ecuacion [D], y despejando en seguida m y n, que serán los coeficientes de direccion del eje de revolucion. La magnitudes del semi-eje de revolucion y radio del circulo de garganta son $\sqrt{\frac{H}{P''}}$ y $\sqrt{\frac{H}{P}}$.

4.° Si una de las raices P de la ecuacion [D] es positiva y las otras dos negativas, poniendo en manifiesto los signos de estas, la ecuacion reducida será

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H,$$

y representa un hiperboloide de dos hojas, cuya posicion y magnitud se determinarán como en el caso del elipsoide; aunque el hiperboloide sea de revolucion.

Sea ahora $H < 0$.

Mudando los signos á todos los términos de la euacion reducida, esta se hallará en el caso en que $H > 0$, que acabamos de discutir.

Sea por último $H = 0$.

La ecuacion reducida es

$$Px^2 + Py^2 + P''z = 0.$$

Formada la ecuacion [D], si sus tres raices P, P', P'' son del mismo signo, la ecuacion representa un punto; pero si una ó dos de las raices de la ecuacion [D] son negativas, la ecuacion reducida será

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = 0,$$

ó

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = 0,$$

ecuaciones de los conos asintóticos de los dos hiperboloides representados por las ecuaciones

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H,$$
$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H.$$

Si la ecuacion representa un cono, se hallarán las coordenadas de su centro ó vértice, centro del hiperboloide respectivo; y para hallar la direccion del eje del cono, se hallará la direccion del eje no transversal del hiperboloide

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H$$

en el primer caso, ó del hiperboloide

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H$$

en el segundo. El eje del cono cortará por lo menos á uno de los planos coordenados, y por lo tanto el cono cortará al mismo plano: hallando pues la interseccion del cono con dicho plano coordenado, la cual es una elipse [239], quedará completamente determinado dicho cono.

2.º caso. *Las tres ecuaciones del centro son incompatibles, ó forman un sistema imposible.*

El último término de la ecuacion [D] debe ser 0; pues sino lo fuera, las ecuaciones del centro serian distintas y compatibles: el coeficiente de s en dicha ecuacion $[D]$ no será cero, sino en algun caso particular. Suponiendo pues que el coeficiente de s no sea cero, la ecuacion $[D]$ tendrá una raiz 0 y las otras dos diferentes de 0. La ecuacion simplificada es

$$P'y^2+P''z^2=2Qx;$$

P' y P'' son [398, *Teor.* 2.°] las dos raices diferentes de cero de la ecuacion $[D]$. Si las dos raices P' y P'' de la ecuacion $[D]$ son del mismo signo, lo que se conocerá á la inspeccion de dicha ecuacion, la ecuacion propuesta representará un paraboloide elíptico; y si dichas dos raices son de diferente signo, representará un paraboloide hiperbólico. Si las dos raices P' y P'' son iguales, la ecuacion propuesta representará un paraboloide de revolucion.

Para determinar la posicion y magnitud de estas superficies, hallaremos las dos raices P' y P'', diferentes de 0, de la ecuacion $[D]$, como tambien el valor de la $2Q$ por la fórmula

$$2Q=-2\frac{Cm+C'n+C''}{\sqrt{m^2+n^2+1}}\ [398,\ \textit{Teorem. } 4.°];$$

y asi conoceremos los dos parámetros de las dos parábolas directriz y generatriz del paraboloide.

Hallados los valores de m y n, correspondientes á las raices P' y P'', por las dos fórmulas

$$Am+Bn+B'=ms,$$
$$Bm+A'n+B''=ns,$$

reemplazando s sucesivamente por sus dos valores P' y P'', y llamando á dichos valores respectivamente m' y n', m'' y n'', las ecuaciones de los dos planos principales, que bisecan á los dos sistemas de cuerdas principales cuyos coeficientes de direccion son m' y n', m'' y n'', serán [342]

$$m'P'x+n'P'y+P'z+Cm'+C'n'+C''=0,$$
$$m''P''x+n''P''y+P''z+Cm''+C'n''+C''=0:$$

eliminando entre ellas primeramente la x y despues la y, las dos ecuaciones con dos variables, que resulten, serán las de la interseccion de dichos dos planos principales, es decir, las del eje del paraboloide. El punto de interseccion de este eje con el paraboloide será el vértice. Conociendo la posicion del vértice, la del eje y los dos parámetros de las dos parábolas principales, queda el paraboloide completamente determinado.

Si sucediese que además de ser 0 el último término de la ecuacion $[D]$, fuese tambien 0 el coeficiente que tiene s en dicha ecuacion, la reducida seria $P''z^2=2Qx$, y por tanto representaria un cilindro parabólico.

Ejemplos.

1.° $$2x^2+y^2+3z^2-4xz+2y+D=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$x-z=0,\ \ y+1=0,\ \ 3z-2x=0,$$

las cuales nos dan $x_1=0$, $y_1=-1$, $z_1=0$: luego las tres ecuaciones del centro son distintas y compatibles. Formemos la ecuacion [D], para lo cual compararemos la ecuacion general

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+\ldots\ldots=0$$

con la propuesta, y hallaremos

$$A=2,\ A'=1,\ A''=3,\ B=0,\ B'=-2,\ B''=0;$$

y por tanto la ecuacion [D] será

$$s^3-6s^2+7s-2=0,$$

la cual presenta tres variaciones, y por tanto la ecuacion propuesta representa un elipsoide, un punto ó nada.

Para decidir cuál de estos tres casos se verifica, hallemos el valor de H por la fórmula $H=-(Cx_1+C'y_1+C''z_1+D)$, y resultará, sustituyendo en esta fórmula los valores de C, C', C'', x_1, y_1, z_1,

$$H=1-D;$$

y por tanto, si $D<1$, la ecuacion representará un elipsoide cuya magnitud y posicion sabemos determinar; si $D=1$, representa un punto; y si $D<1$, no representa nada.

2.° $$x^2+3y^2+2z^2-5yz+3x+D=0.$$

Las ecuaciones del centro son:

$$2x+3=0,\ \ 6y-5z=0,\ \ 4z-5y=0,$$

de las cuales resultan: $x_1=-\dfrac{3}{2}$, $y_1=0$, $z_1=0$. La ecuacion [D] es ahora $$s^3-6s^2+\frac{19}{4}s+\frac{1}{4}=0,$$

y como presenta dos variaciones y una permanencia, tiene dos raices positivas y una negativa: por consiguiente representa la ecuacion propuesta un hiperboloide de una hoja, uno de dos hojas ó un cono. Para decidir cuál de estas superficies es la representada, hallemos el valor de H, y resultará

$$H = \frac{9}{4} - D;$$

y por tanto, si $D < \frac{9}{4}$, la ecuacion representa un hiperboloide de una hoja; si $D = \frac{9}{4}$, representa un cono; y si $D > \frac{9}{4}$ representa un hiperboloide de dos hojas.

Cualquiera que sea la superficie que la ecuacion propuesta represente, ya sabemos determinar la posicion y magnitud de dicha superficie.

3.° $\quad ax^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 2y + 4z + D = 0.$

Las ecuaciones del centro son:

$$bx = 0,\ y + z - 1 = 0,\ z + y + 2 = 0.$$

Siendo incompatibles las dos últimas y por lo tanto las tres, la ecuacion propuesta representará un paraboloide elíptico, ó hiperbólico, ó un cilindro parabólico.

La ecuacion [D] es en este caso

$$s^3 - (2+a)s^2 + 2as = 0,\ \text{ó}\ s^2 - (2+a)s + 2a = 0:$$

si a es positiva, esta ecuacion tiene dos raices reales positivas, y por tanto la ecuacion propuesta representa un paraboloide elíptico; si a es negativa, la ecuacion $s^2 - (2+a)s + 2a = 0$, tiene una raiz positiva y una negativa, y por tanto la ecuacion propuesta representa un paraboloide hiperbólico; si $a = 0$, la ecuacion [D] se reduce á $s - 2 = 0$, y por tanto la ecuacion propuesta representa un cilindro parabólico.

NOTA PRIMERA.

FÓRMULA DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES DE DOS Y DE TRES VARIABLES.

Si tenemos una funcion $f(x,y,z,\ldots)$ de dos ó mas variables independientes, la espresion $f'_x(x,y,z,\ldots)$ significa la derivaba de dicha funcion considerando á x como variable, y á las otras variables como si fueran constantes. Igualmente $f'_y(x,y,z,\ldots)$, $f'_z(x,y,z,\ldots)$, etc. representan las derivadas de la funcion con respecto á y, á z, etc. Las espresiones $f''_{x^2}(x,y,z,\ldots)$, $f''_{y^2}(x,y,z,\ldots)$, $f''_{xy}(x,y,z,\ldots)$, $f'''_{x^2z}(x,y,z,\ldots)$, etc. representan respectivamente la derivada de $f'_x(x,y,z,\ldots)$ con respecto á x, la derivada de $f'_y(x,y,z,\ldots)$ con respecto á y, la derivada de $f'_x(x,y,z,\ldots)$ con respecto á y, la derivada de $f''_{x^2}(x,y,z,\ldots)$ con respecto á z, etc.

Para abreviar la notacion, se suele suprimir, por lo comun, en todas estas derivadas el paréntesis $(x,y,z,\ldots)$ que se sobrentiende, y escribir: f'_x, f'_y, f'_z, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f'''_{x^2z}, etc.

Por ejemplo, si $f(x,y,z)=Ax^5y^5z^5$, será $f'_x=5Ax^4y^5z^5$, $f'_y=5Ax^5y^4z^5$, $f'_z=5Ax^5y^5z^4$, $f''_{x^2}=20Ax^3y^5z^5$, $f'_{xy}=25Ax^4y^4z^5$, $f''_{x^2z}=100Ax^3y^5z^4$, etc.

El teorema de Taylor para las funciones de dos variables independientes es la igualdad siguiente: *siendo* f(x,y) *una funcion racional y entera de dos variables* x *é* y, *será*

$$
\begin{aligned}
f(x+h,y+k)=f(x,y)+f'_x\cdot h+f''_{x^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+f'''_{x^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}&+\text{etc.}\\
+f'_y\cdot k+f''_{y^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}+f'''_{y^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3}&\\
+f''_{xy}\cdot hk+f'''_{x^2y}\cdot\frac{h^2k}{1.2}&\\
+f'''_{y^2x}\cdot\frac{hk^2}{1.2}&
\end{aligned}
$$

Para demostrar esta igualdad, imaginemos que en la funcion $f(x,y)$ tengan x é y dos valores cualesquiera pero fijos, y pongamos en dicha funcion $x+h$ en lugar de x: no habiendo sufrido alteracion la variable y, tendremos por el teorema de Taylor demostrado en el número 282 del álgebra

$$f(x+h,y)=f(x,y)+f'_x(x,y)\,h+f''_{x^2}(x,y)\,\frac{h^2}{1.2}$$
$$+f'''_{x^3}(x,y)\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Sustituyamos ahora en esta igualdad $y+k$ en lugar de y, y tendremos

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+f'_x(x,y+k)\,h+f''_{x^2}(x,y+k)\,\frac{h^2}{1.2}$$
$$+f'''_{x^3}(x,y+k)\,\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Ahora, puesto que x permanece la misma é y ha aumentado en k, tendremos por el teorema de Taylor para las funciones en que una sola de las variables recibe un incremento,

$$f(x,y+k)=f(x,y)+f'_y(x,y)k+f''_{y^2}(x,y)\frac{k^2}{1.2}+f'''_{y^3}(x,y)\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$f'_x(x,y+k)=f'_x(x,y)+f''_{xy}(x,y)k+f'''_{xy^2}(x,y)\frac{k^2}{1.2}+\ldots$$

$$f''_{x^2}(x,y+k)=f''_{x^2}(x,y)+f'''_{x^2y}(x,y)\,k+\ldots$$

$$f'''_{x^3}(x,y+k)=f'''_{x^3}(x,y)+\ldots$$

$+$ etc.

Sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, resulta la fórmula enunciada.

Casos particulares. 1.º Sea $f(x,y)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F$:

se trata de hallar el desarrollo de $f(x+h,y+k)$, ó de $A(y+k)^2+B(x+h)(y+k)+C(x+h)^2+D(y+k)+E(x+h)+F$ ... [M].

Tenemos $f'_x=By+2Cx+E$; $f'_y=2Ay+Bx+D$, $f''_{x^2}=2C$, $f''_{xy}=B$, $f''_{y^2}=2A$: las derivadas siguientes son nulas. Luego

$$f(x+h,y+k)=Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F+$$
$$(By+2Cx+E)h+(2Ay+Bx+D)k+Ch^2+Bhk+Ak^2,$$

ó
$$f(x+h,y+k)=Ay^2+Bxy+Cx^2+\left.\begin{array}{l}+2Ak\\+Bh\\+D\end{array}\right|y+\left.\begin{array}{l}Bk\\+2Ch\\+E\end{array}\right|x+\begin{array}{l}Ak^2\\+Bhk\\+Ch^2\\+Dk\\+Eh\\+F,\end{array}$$

resultado fácil de obtener, desenvolviendo directamente la funcion aumentada [M].

Obsérvese que en este desarrollo los términos de segundo grado son los mismos de la funcion, los coeficientes de y y de x son las derivadas de la funcion con respecto á y y á x, cambiando en ellas x en h é y en k, y que el último término es la funcion propuesta, haciendo en ella el mismo cambio.

Por consiguiente dicho desarrollo puede escribirse asi:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+f'_k\,.\,y+f'_h\,.\,x+f(h\,.\,k).$$

2.° Sea $\qquad f(x,y)=Bxy+Dy+Ex+F.$

Aplicando la regla anterior, tendremos

$$f(x+h,y+k)=Bxy+\left.\begin{matrix}Bh\\+D\end{matrix}\right|y+\left.\begin{matrix}Bk\\+E\end{matrix}\right|x+\begin{matrix}Bhk\\+Dk\\+Eh\\+F.\end{matrix}$$

Si h y k fuesen las coordenadas del centro de la hipérbola representada por la ecuacion $Bxy+Dy+Ex+F=0$; referida esta curva á ejes paralelos á los primitivos y cuyo orígen estuviese en su centro, la ecuacion de dicha curva con respecto á los nuevos ejes sería $Bxy+f(h,k)=0$; puesto que por estar el orígen en el centro de la curva, los coeficientes de las primeras potencias de las variables son nulos.

La fórmula de Taylor para las funciones de tres variables es

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)&+f'_x\,.\,h+f''_{x^2}\,.\,\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\\&+f'_y\,.\,k+f''_{y^2}\,.\,\frac{k^2}{1.2}\\&+f'_z\,.\,l+f''_{z^2}\,.\,\frac{l^2}{1.2}\\&+f''_{xy}\,.\,hk\\&+f''_{xz}\,.\,hl\\&+f''_{yz}\,.\,kl\end{aligned}$$

Para demostrar esta igualdad, demos á las variables x é y los incrementos h y k, y tendremos por la fórmula de Taylor para las funciones en que dos de sus variables reciben incrementos,

$$\begin{aligned}f(x+h,y+k,z)=f(x,y,z)&+f'_x(x,y,z)\,.\,h+f''_{x^2}(x,y,z)\,.\,\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}\\&+f'_y(x,y,z)\,.\,k+f''_{y^2}(x,y,z)\,.\,\frac{h^2}{1.2}\\&+f''_{xy}(x,y,z)\,.\,hk.\end{aligned}$$

Demos ahora el incremento l á la variable z, y tendremos

$$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z+l)+f'_x(x,y,z+l)\,.\,h+f''_{x^2}(x,y,z+l)\,.\,\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$
$$+f'_y(x,y,z+l)\,.\,k+f''_{y^2}(x,y,z+l)\,.\,\frac{k^2}{1.2}$$
$$+f''_{xy}(x,y,z+l)\,.\,hk.$$

Por la fórmula de Taylor para las funciones en que una sola variable recibe un incremento, tendremos

$$f(x,y,z+l)=f(x,y,z)+f'_z(x,y,z)\,.\,l+f''_{z^2}(x,y,z)\,.\,\frac{l^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$f'_x(x,y,z+l)=f'_x(x,y,z)+f''_{xz}(x,y,z)\,.\,l+\ldots\ldots$$
$$f'_y(x,y,z+l)=f'_y(x,y,z)+f''_{yz}(x,y,z)\,.\,l+\ldots\ldots$$
$$f''_{x^2}(x,y,z+l)=f''_{x^2}(x,y,z)+\ldots\ldots$$
$$f''_{y^2}(x,y,z+l)=f''_{y^2}(x,y,z)+\ldots\ldots$$
$$f''_{xy}(x,y,z+l)=f''_{xy}(x,y,z)+\ldots\ldots:$$

sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, resulta la fórmula que nos proponíamos demostrar.

Caso particular. Sea $f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy$
$$+B'xz+B''yz+Cx+C'y+C''z+D:$$
se trata de hallar el desarrollo de $f(x+h,\ y+k,z+l)$ ó de $A(x+h)^2+A'(y+k)^2+A''(z+l)^2+B(x+h)(y+k)+B'(x+h)(z+l)+B''(y+k)(z+l)+C(x+h)+C'(y+k)+C''(z+l)+D$ [N].

Aplicando la fórmula que acabamos demostrar, se hallará

$$f(x+h,\ y+k,z+l)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+Bxy+B'xz+B''yz+$$
$$(2Ah+Bk+B'l+C)x+(2A'k+Bh+B''l+C')y+$$
$$(2A''l+B'h+B''k+C'')z+Ah^2+A'k^2+A''l^2+$$
$$Bhk+B'hl+B''kl+Ch+C'k+C''l+D;$$

resultado fácil de hallar, desenvolviendo directamente la funcion aumentada [N].

Obsérvese que en este desarrollo los términos de segundo grado son los mismos que en la funcion propuesta; que los coeficientes de x, y, z son las derivadas de la funcion con respecto á x, á y y á z, cambiando en ellas x, y, z en h, k, l; y que el último término es la funcion propuesta haciendo en ella este mismo cambio. Por consiguiente dicho desarrollo puede escribirse abreviadamente asi:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz$$
$$+f'_h\,.\,x+f'_k\,.\,y+f'_l\,.\,z+f(h\,.\,k\,.\,l).$$

NOTA SEGUNDA.

Construccion de las raices de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con una incógnita, ó resolucion geométrica de estas ecuaciones.

Sea la ecuacion de 4.° grado sin segundo término

$$x^4+ax^2+bx+c=0 \ldots\ldots [1]:$$

si hacemos $x^2=y \ldots\ldots [2]$, dicha ecuacion podrá escribirse así: $y^2+ay+bx+c=0 \ldots\ldots [3]$.

Supongamos que los ejes de coordenadas sean rectangulares; combinemos las ecuaciones [2] y [3], y eliminemos la y: es evidente que la ecuacion final que resulte de la eliminacion, será la ecuacion propuesta [1]; luego las raices de esta ecuacion son las abscisas de los puntos de interseccion de las dos parábolas representadas por las dos ecuaciones [2] y [3]. Construyendo pues estas dos parábolas, y midiendo las abscisas de los puntos de interseccion, se tendrán aproximadamente las raices reales de la ecuacion propuesta.

Estas mismas raices pueden hallarse por la interseccion de una parábola y un círculo, curvas preferibles para la construccion á las dos parábolas de la solucion anterior.

En efecto, sumando ordenadamente las dos ecuaciones [2] y [3], resulta la ecuacion

$$y^2+x^2+(a-1)y+bx+cz=0 \ldots\ldots [4],$$

que representa un círculo, puesto que los ejes son rectangulares; y es tambien evidente que si entre las ecuaciones [2] y [4] eliminamos la y, resultará la ecuacion propuesta [1]; luego las raices de esta son las abscisas de los puntos de interseccion de la parábola y círculo representados por las ecuaciones [2] y [4].

Si la ecuacion dada es de tercer grado sin segundo término, como $x^3+ax+b=0$,
la multiplicaremos por x par convertirla en ecuacion de 4.° grado, y tendremos $x^4+ax^2+bx=0$,
la cual tiene, además de las raices de la ecuacion propuesta, la raiz 0 que desecharemos: construidas pues las raices reales de la nueva ecuacion y desechando la raiz 0, tendremos la raiz real ó las tres raices reales de la ecuacion propuesta.

Ejemplo. Construir las raices de la ecuacion

$$x^3-2x-5=0.$$

Multiplicando esta ecuacion por x, tendremos

$$x^4-2x^2-5x=0,$$

y haciendo $x^2=y$, la nueva ecuacion será

$$y^2-2y-5x=0,$$

la cual sumada con la anterior es

$$y^2+x^2-3y-5x=0,$$

ó $$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

ecuacion de un círculo cuyo centro tiene por coordenadas $\frac{5}{2}$ y $\frac{3}{2}$.

Fig. 68. Esto supuesto, construyendo con mucho cuidado la parábola *ROS*, $x^2=y$, cuyo parámetro sea la línea arbitraria que se tome por unidad, y construyendo tambien el círculo

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

se verá que estas dos curvas no tienen mas puntos de interseccion que los O y M: el punto O nos da la abscisa que debe desecharse, y la abscisa OP será la única raiz real que tiene la ecuacion: asi tendremos un valor aproximado de dicha raiz real, y luego puede continuarse la aproximacion por cualquiera de los métodos del álgebra.

Resolvamos por este mismo método los problemas siguientes, célebres en la antigüedad.

Duplicacion del cubo. Sea a el lado del cubo que se dá, y x el del cubo que ha de tener doble volúmen que el propuesto: tendremos $x^3=2a^3$, ecuacion que no da para x mas que un solo valor real, el cual puede construirse por la interseccion de dos parábolas, ó por la de una parábola y un círculo; como ya queda suficientemente esplicado.

Hallar dos medias proporcionales á dos rectas dadas a *y* b; es decir, hallar dos rectas x é y, tales que

$$x:y::y:a,\ y:x::x:b,$$

ó $$y^2=ax, x^2=by\ldots\quad [M],$$

ecuaciones que representan dos parábolas que tienen un mismo vértice, y cuyos ejes son perpendiculares entre sí: luego las coordenadas del punto, diferente del vértice, en que se cortan estas dos parábolas, serán las dos medias proporcionales pedidas.

Puede reemplazarse una de las dos parábolas por un solo círculo; pues si sumamos ordenadamente las dos ecuaciones [M], resulta la ecuacion

$$x^2 - ax + y^2 - by = 0 \ldots\ldots [N]$$

que representa un círculo, que pasa por los dos puntos de interseccion de las dos parábolas [M]. En efecto, sean x' é y' las coordenadas de cualquiera de los puntos de interseccion de las dos parábolas: tendremos

$$y'^2 = ax', \; x'^2 = by',$$

y por consiguiente $x'^2 - ax' + y'^2 - by' = 0$,
es decir que las coordenadas de cualquiera de los dos puntos de interseccion de las dos parábolas satisfacen á la ecuacion del círculo [N]; luego este círculo pasa por dichos dos puntos. Construyendo pues una de las dos parábolas [M] y el círculo [N], las coordenadas del punto de interseccion, diferente del orígen, serán las dos medias proporcionales.

Triseccion del ángulo. Fig. 69. Sea c el coseno del arco AC correspondiente al ángulo dado ABC, que supondremos agudo en primer lugar: tomemos por unidad el rádio arbitrario OA de este círculo, y sea x el coseno del tercio de dicho arco AC. Tenemos [*Trig.* 122]

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a;$$

luego, si a es el arco AC, será $\cos 3a = c$, y $\cos a = x$; y la ecuacion anterior será

$$c = 4x^3 - 3x, \text{ ó } x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{c}{4} = 0 \ldots\ldots [E].$$

Puesto que el ángulo AOC es agudo, c es cantidad positiva, y el valor del coseno del tercio del arco debe ser positivo con mayor razon; la ecuacion [E] tiene una sola raiz positiva, porque no tiene mas que una variacion; luego construyendo, como ya se ha dicho, las raices de dicha ecuacion, la positiva es la que corresponde al problema. Sea OP dicha raiz positiva, levantando la perpendicular PB, se tendrá el arco AB tercio del AC.

Fig. 70. Si el ángulo dado AOC es obtuso, y por consiguiente su arco AC mayor que 90° y menor que 180°, hallaremos por la construccion anterior el tercio MD del suplemento DC, que es menor que 90°; y en seguida desde el el punto A trazaremos con el rádio AO un arco que cortará al AB en el punto N, tomaremos $NE = MD$, y AE será el tercio del arco ABC.

En efecto, tenemos $AE = AN - NE = 60° - MD = 60° -$

$$\frac{180° - ABC}{3} = 60° - 60° + \frac{ABC}{3} = \frac{ABC}{3}.$$

ERRATAS

Pág	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
2	7	Representado	Representados
7	6	algunas	alguna
33	—5	$x-\alpha$	$x-a$
35	17	describiremos	describiremos con el radio CB
36	2, 16	CDE', BDC	$AD'E'$, BAC
37	—5	ABC	OBC
40	—6	6	α
41	—9	R^2	R^3
43	1	Sea	Sean
45	3	A	A^2
47	—7	$p=r^2$	$p=-r^2$
50	—5	DE	DA
51	1, 14	ABC, $d^2)$	ADC, $d^2)^2$
55	6	OP	OP''
62	—9	$-\dfrac{C}{A}$	$-\dfrac{C}{B}$
66	—1	n	p
67	7 y 8	reducciones,	reducciones, para lo cual se reemplaza $\cos^2\theta$ por $1-\mathrm{sen}^2\,\theta$,
79	—9	oblicuángulos á ejes rectangulares	rectangulares á ejes oblicuángulos
80	—8	tiremos	«
88	—15	$q\left(\dfrac{y}{z}\right)^{m-1}$	$q\left(\dfrac{y}{z}\right)^{m-2}$
97	—3	MQ	PQ
99	1	MR	PQ
101	19	[B], [A]	[A], [B]
103	—8	[35]	[55]
116	6, 7, 8 y —3	N	M'
126	13	$y=a$	$y=c$
127	Entre las líneas 11 y 12 se ha de intercalar: Dando ahora á y el valor $\pm\infty$, resulta $x+a=0$, ecuacion de una asíntota paralela al eje Oy.		
150	21	$x-x''$	$x''-x$
151	—9	6	δ
159	—2 y —3	paralelas	paralelas á los ejes
160	9	$x=-\dfrac{E}{B}$, $x=-\dfrac{C}{B}$	$y=-\dfrac{E}{B}$, $x=-\dfrac{D}{B}$

Pág.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir*
161	12	$3x$	$2x$
162	8	$-y+\frac{13}{4}$	$-3y-\frac{11}{4}$
164	—14	$+1$	$+2$
166	—11	$B=2$	$B=-2$
167	—11	$+4$	$+4x$
169	—3	cos	cos α
181	9	mayor	menor
185	5, 14	yor, M	mayor, N
192	—8	t^2a^2	ta^2
194	—10	$\frac{a^2+cx}{a^2-cx}$	$\frac{a^2+cx'}{a^2-cx'}$
202	—8	$-\frac{2ab^2}{c^2y}$	$-\frac{2ab^2}{c^2y}(2)$
209	—9, —10	OM, OM'	OM', OM
211	—4	los	las
212	—1	228	235, ejemplo 1.º
217	—1	PN	ON
224	5	monio	nomio
225	—15	los	las
234	4, 9	x, N	x', H
237	—1	b^4	a^4
238	—7, —8	x	x'
239	3	x	x'
240	7	$\mp$	$\pm$
244	—6	suplemento	complemento
252	17, 21	un, x'^2	un punto, x^2
260	21	$\begin{smallmatrix}=\\<\\>\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix}$
275	10	$=\sqrt{}$	$=1:\sqrt{}$
277	1, 6	p, $p+\frac{a}{2}$	p', $a+\frac{p}{2}$
285	—5	MO'	MO
286	—7	ρ	ρ^2
290	—5	y	y
291	7	lo	la
301	—14	llama	llaman
307	9, 18, 23	rectángulos	paralelógramos
308	—7, —11	id., sen	id., sen θ
327	—11, —14	$dy+1$, otros	$dy+ex+1$, por otros
331	15, 24, 30	$v, t^2v^2, s^2+c^2, s^2+t^2c^2$	$y, a^2t^2v^2, v^2+c^2, v^2-t^2c^2$

Pág	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
Id.	31	s^2	v^2
358	—2	γ^2	r^2
360	—9	$\dfrac{\sqrt{}}{}$	$\sqrt{\dfrac{}{}}$
362	—6	$x=0$	$z=0$
363	10	Oy	xy
365	—14	E''	E'
367	8	c'	c
380	6	$B'b$	$B'\mathcal{B}$
382	—8	P	P'
389	18, 19	z', z	z, z'
390	6	en el	el
405	1, 5	$s—), C''$	$s—A), B''$
422	10, 12	a, b	a', b'
437	5	á	á su
448	12	$2p'x$	$-2p'x$
454	13	z	z^2
458	24	f''_x	f''_{x^2}
464	15	ABC	AOC

En la *fig.* 57* falta una G en el punto de interseccion de las rectas BD y OO'.

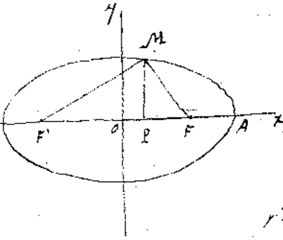
En la *fig.* 71 falta una S en el punto en que la recta AB corta á la rama derecha.

En la *fig.* 83, donde está y'_1 debe ser x'_1, y donde está x'_1 debe ser y'_1.

En la *fig.* 86 falta una A en el vértice derecho de la elipse.

En la *fig.* 117 falta una H en la parte superior de la asíntota OK, y una L en la inferior de la asíntota OG.

Radios vectores de la Elipse

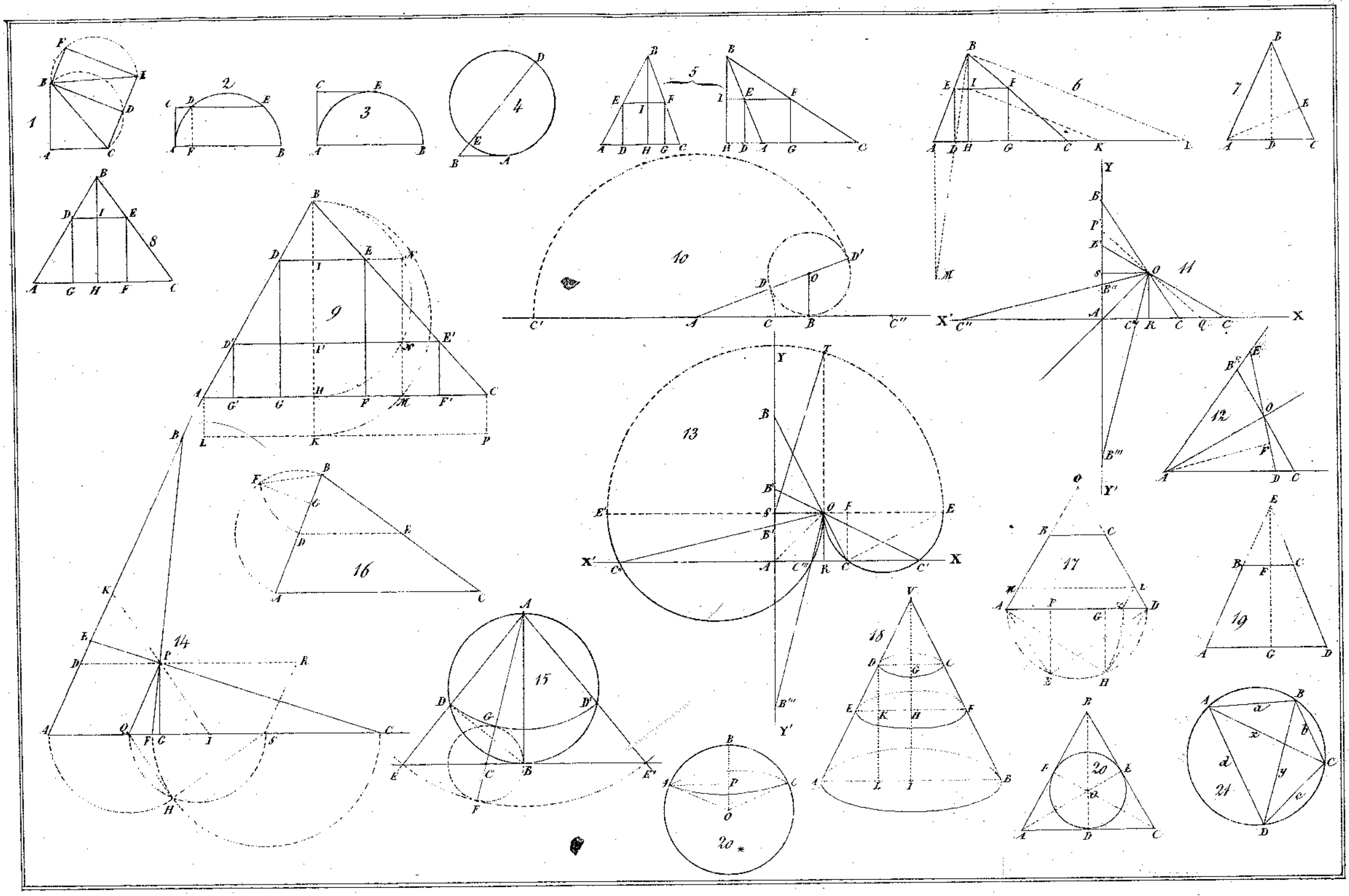


Dada la abcisa de un punto M de la elipse y los ejes de esta curba hallar los valores de los radios vectores tirados à dicho punto.

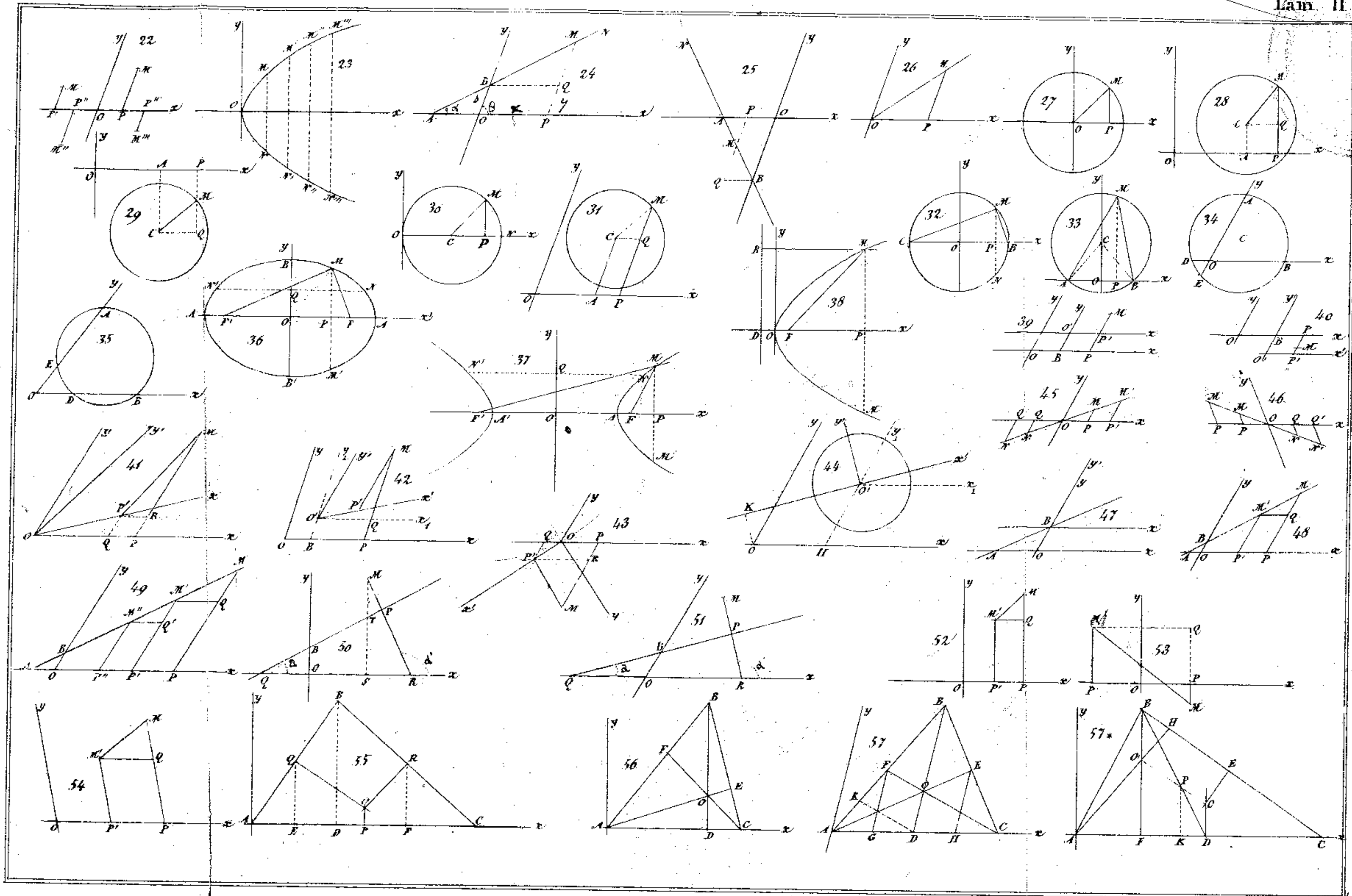
$F'M = r'$ $\quad FM = r$ $\quad r + r = 2a$

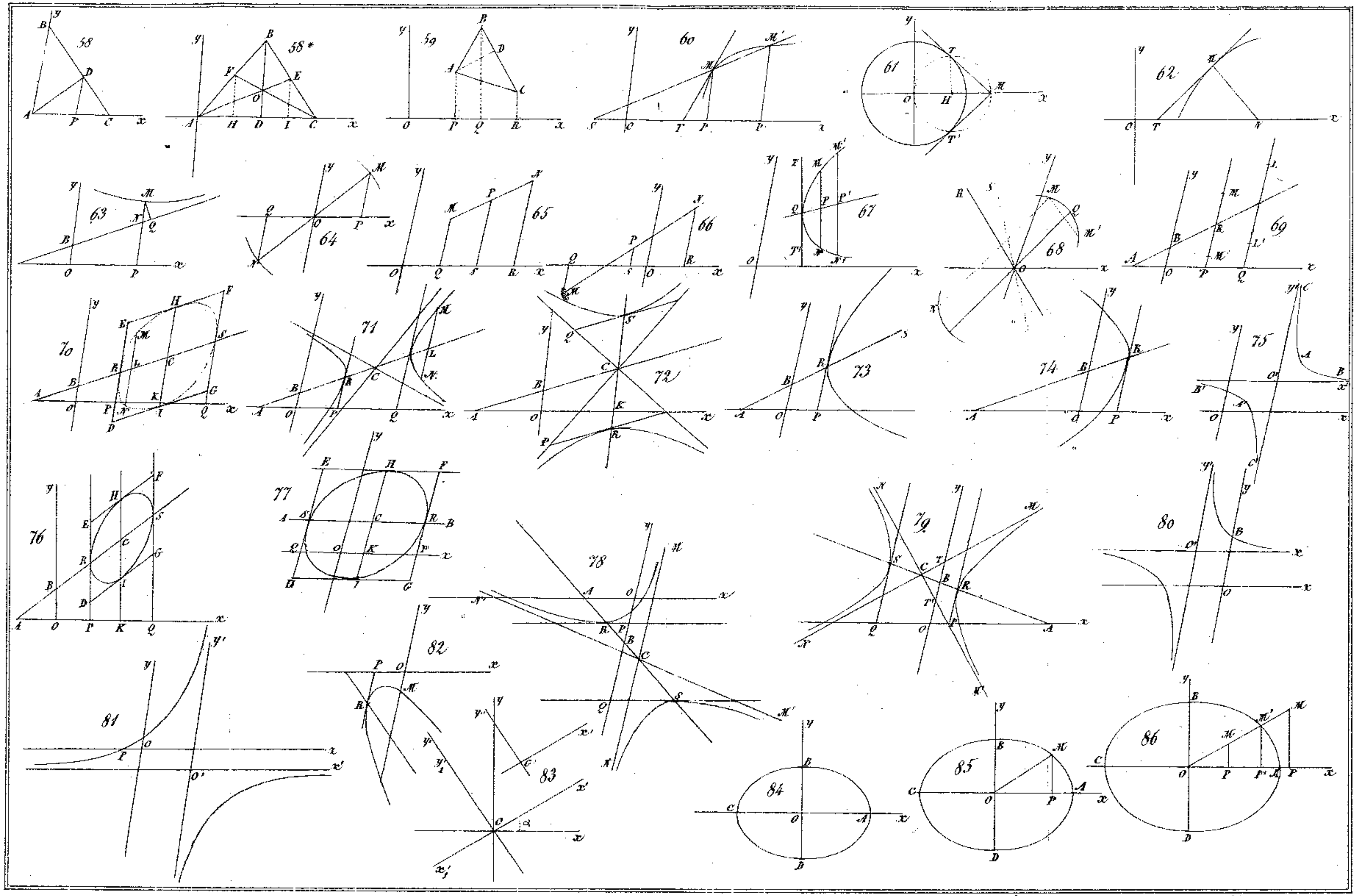
$r'^2 = y^2 + (c+x)^2$ $\quad r^2 = y^2 + (c-x)^2$

$r^2 + r'^2 =$

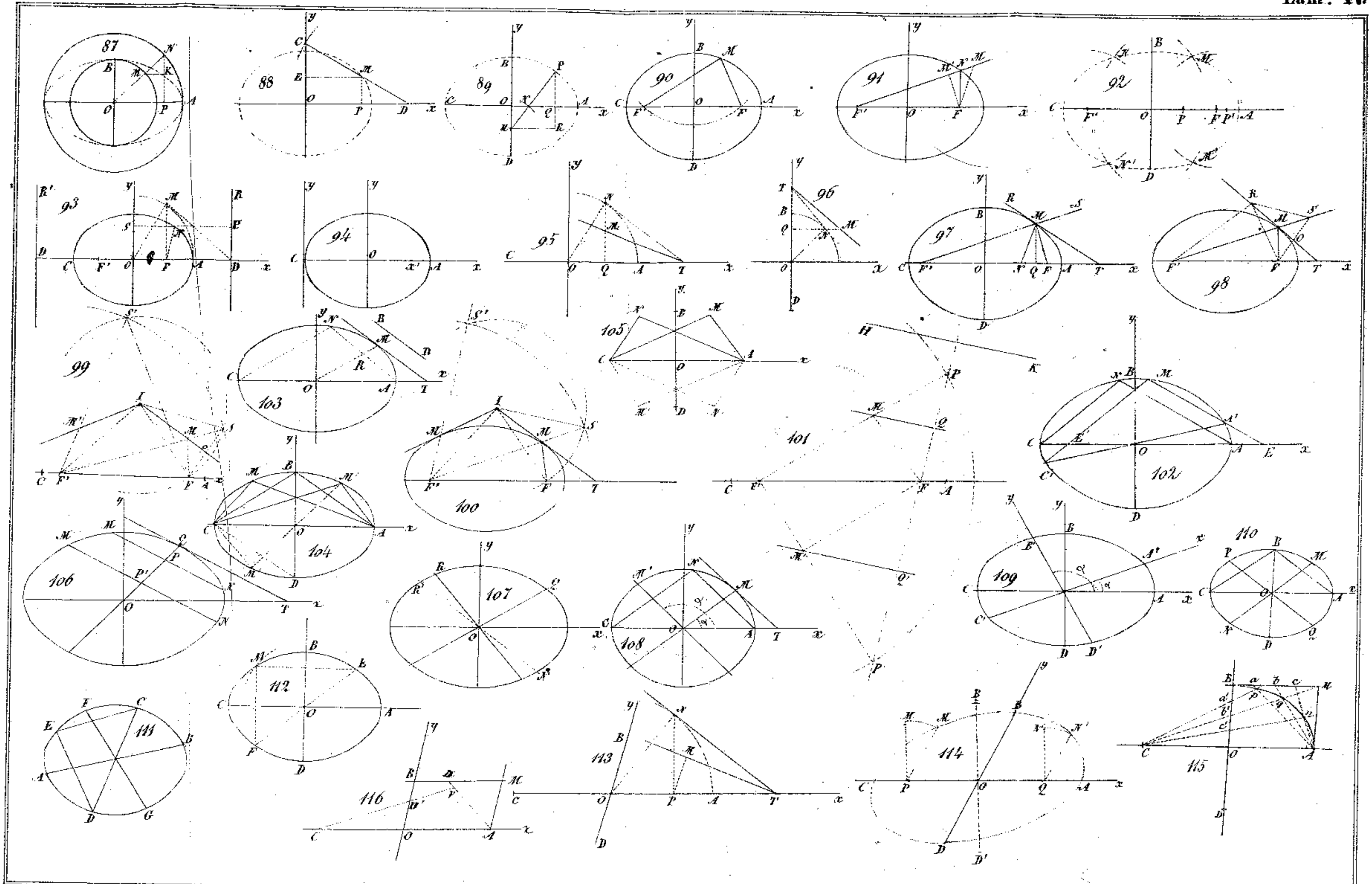


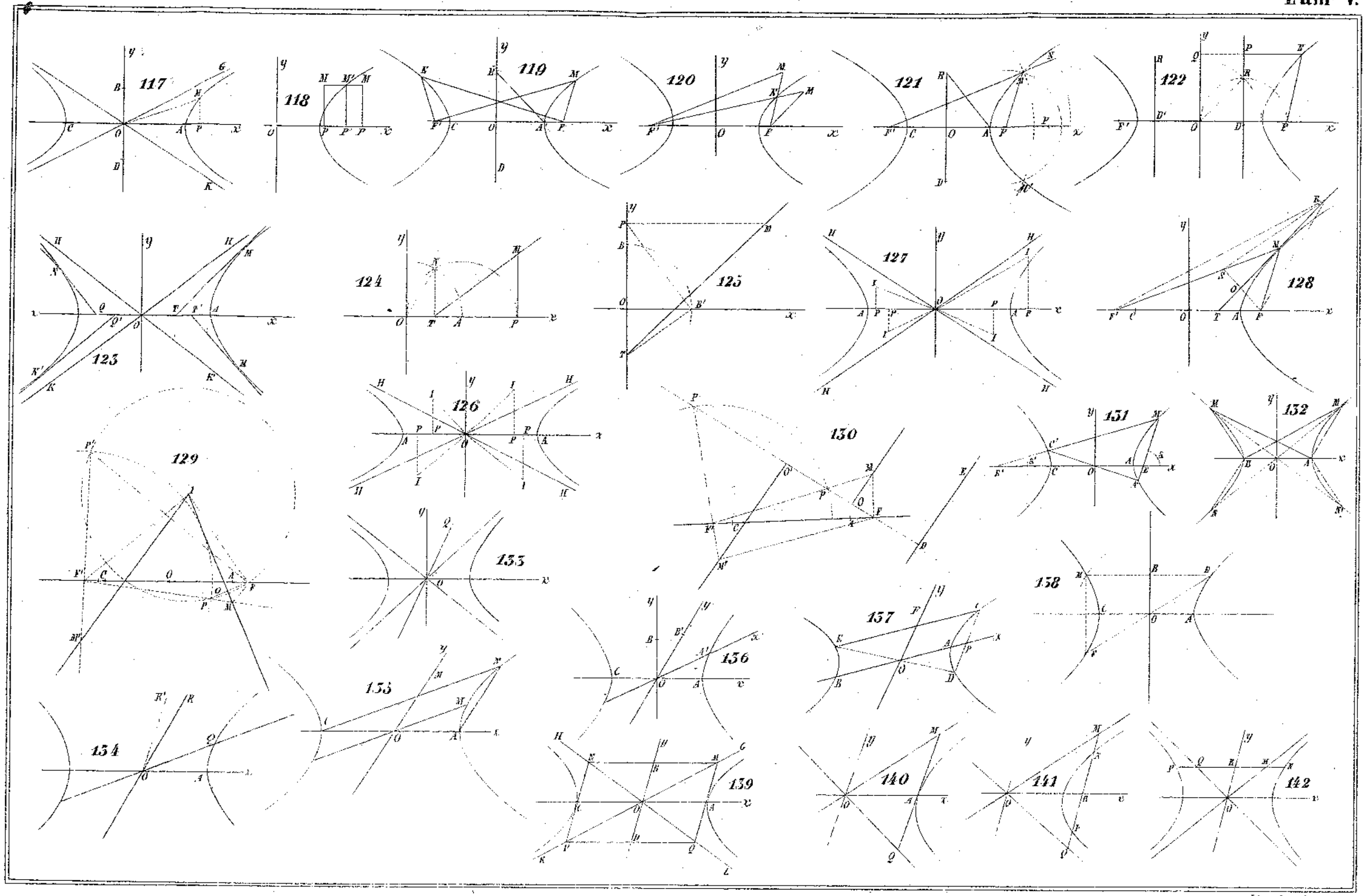
Lam. II


22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
57*

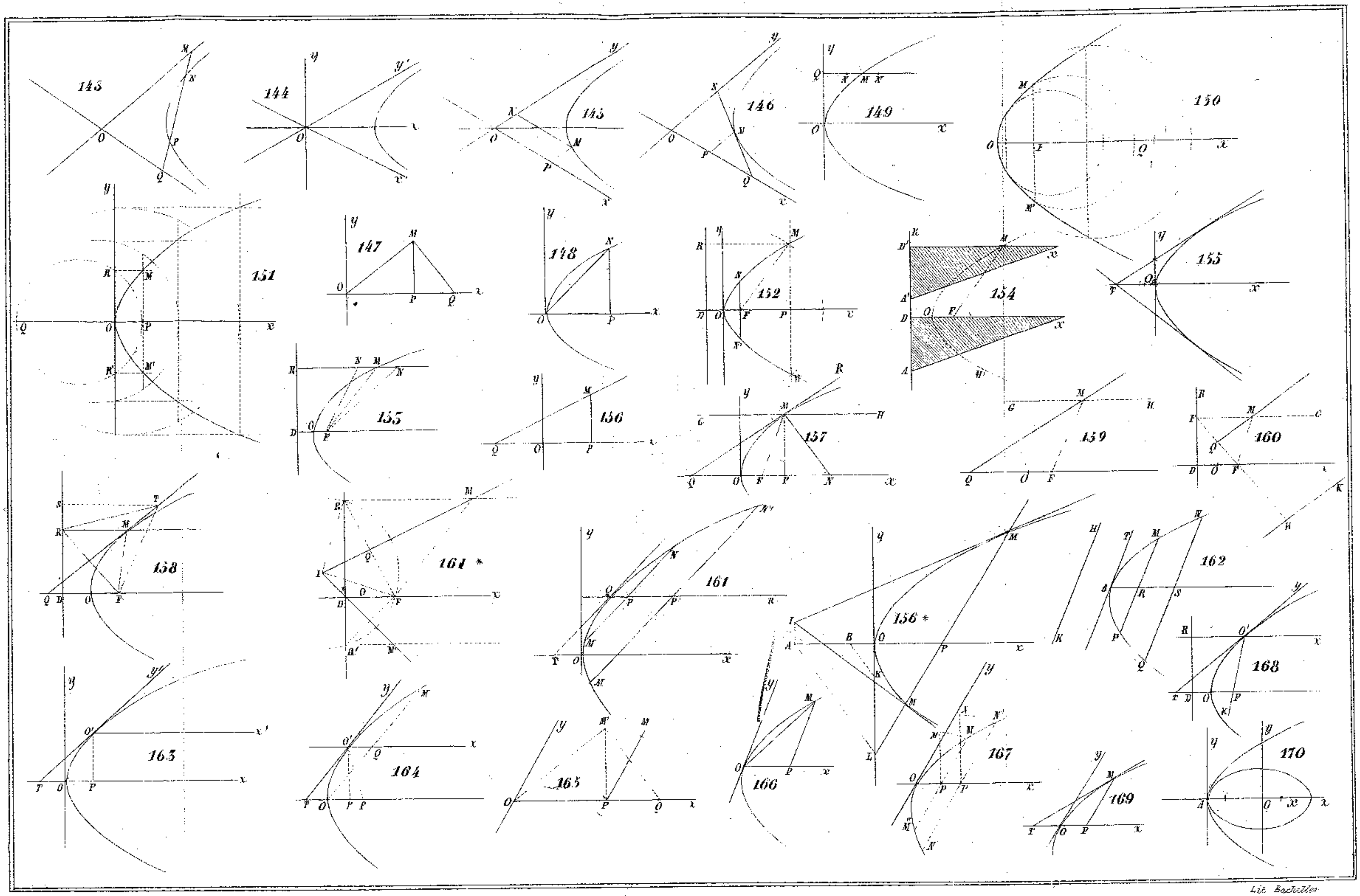


Lit. Bachiller

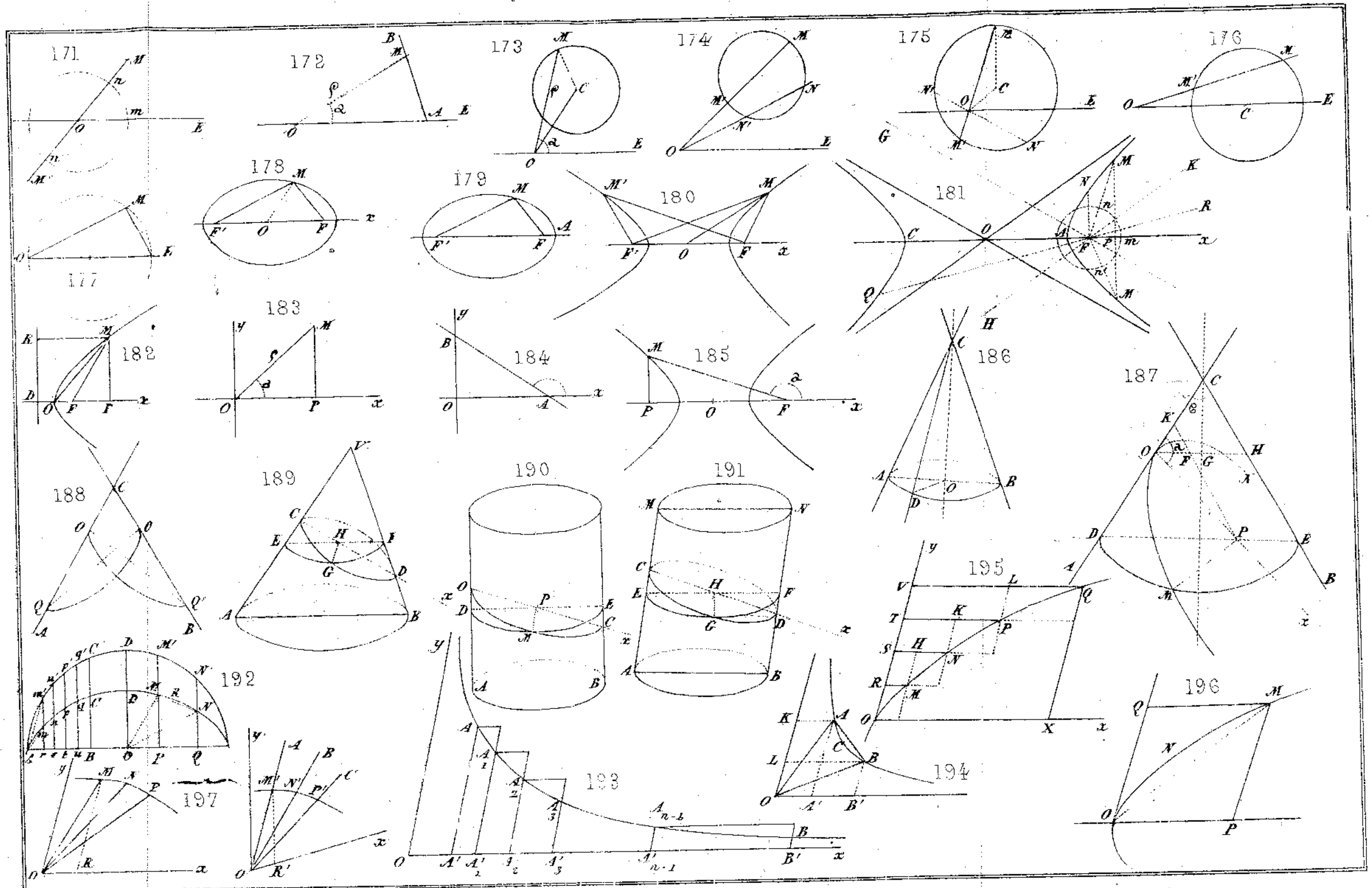

87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116



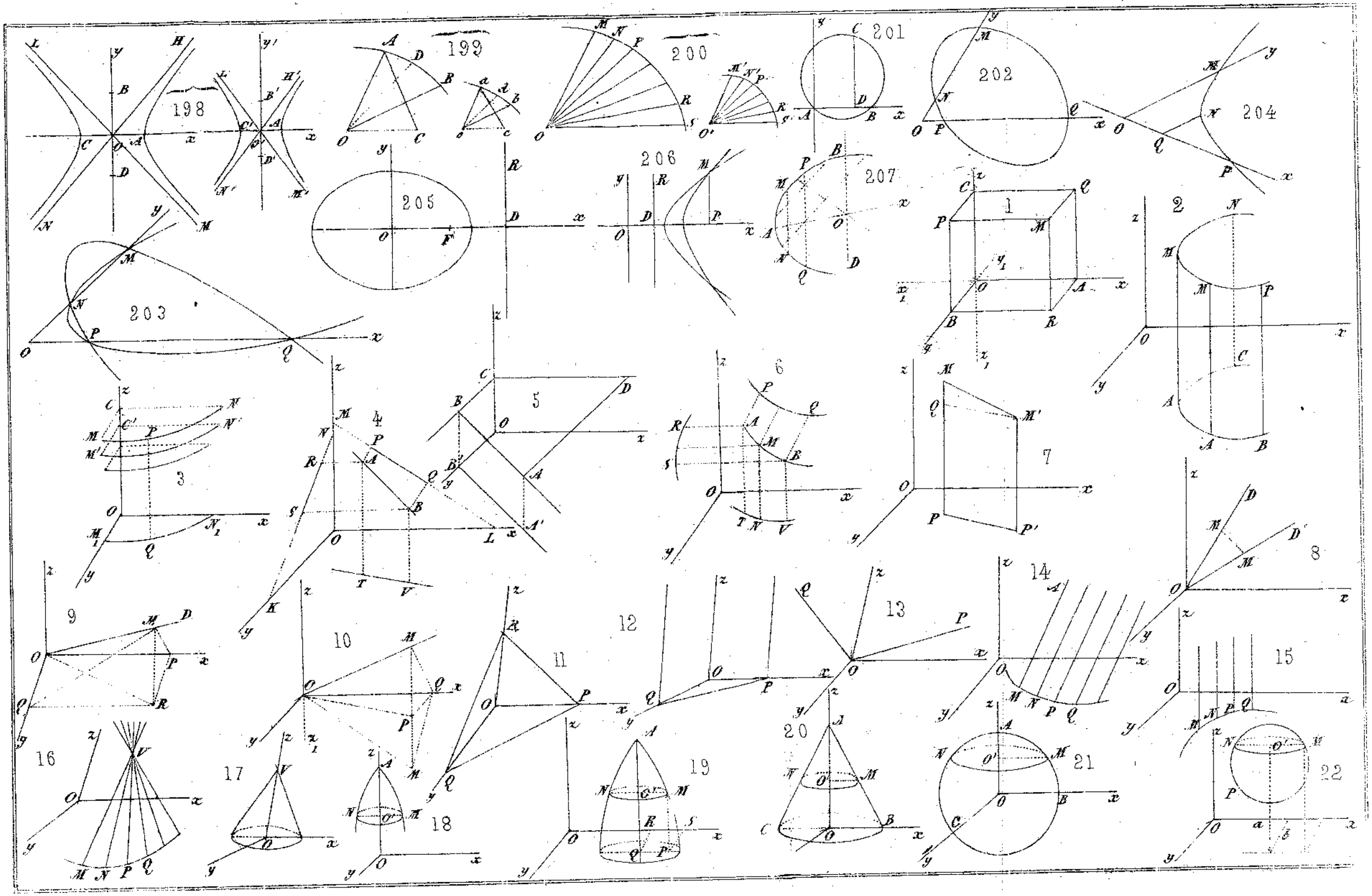
Lit. Bachiller

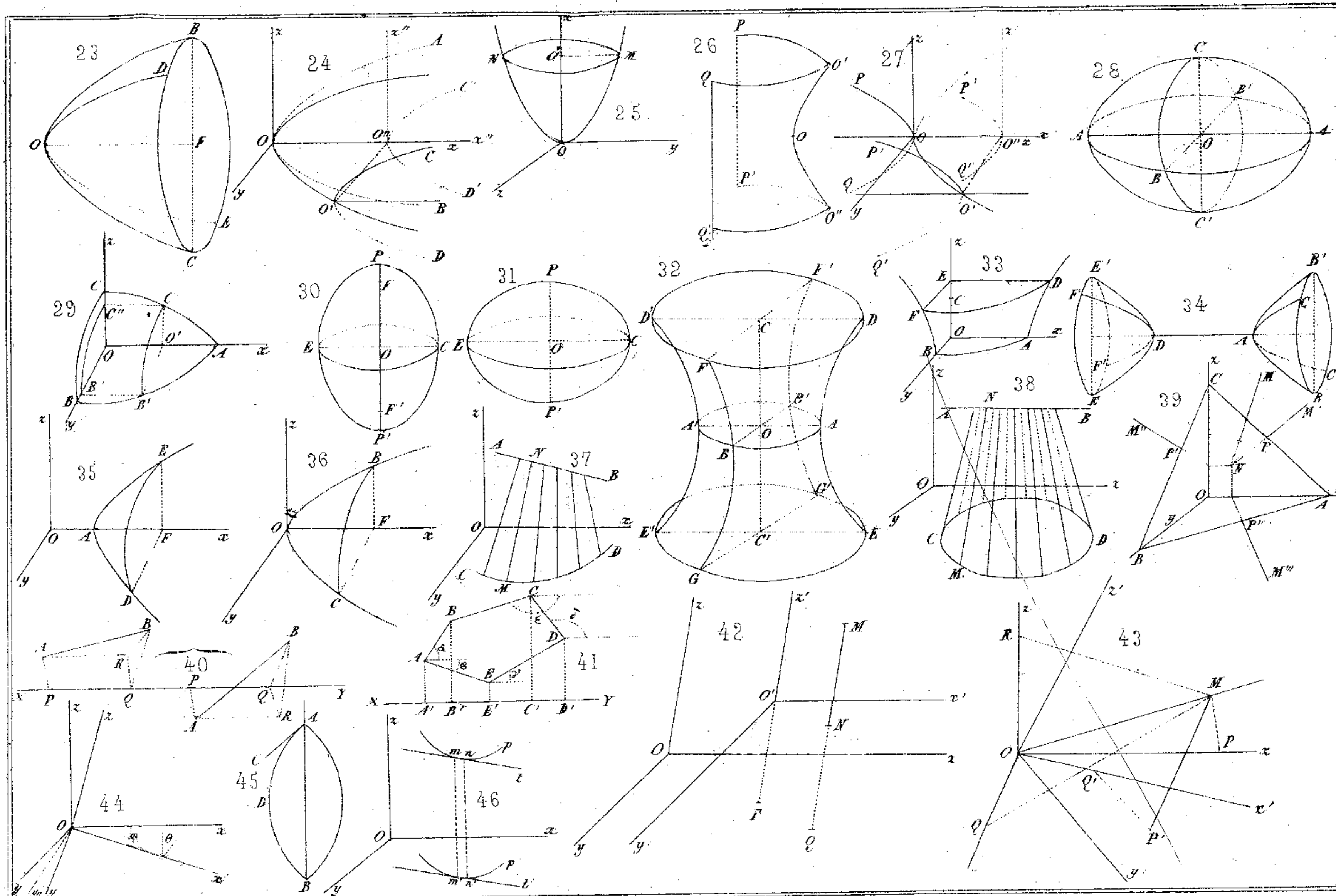


Lit. Bachiller

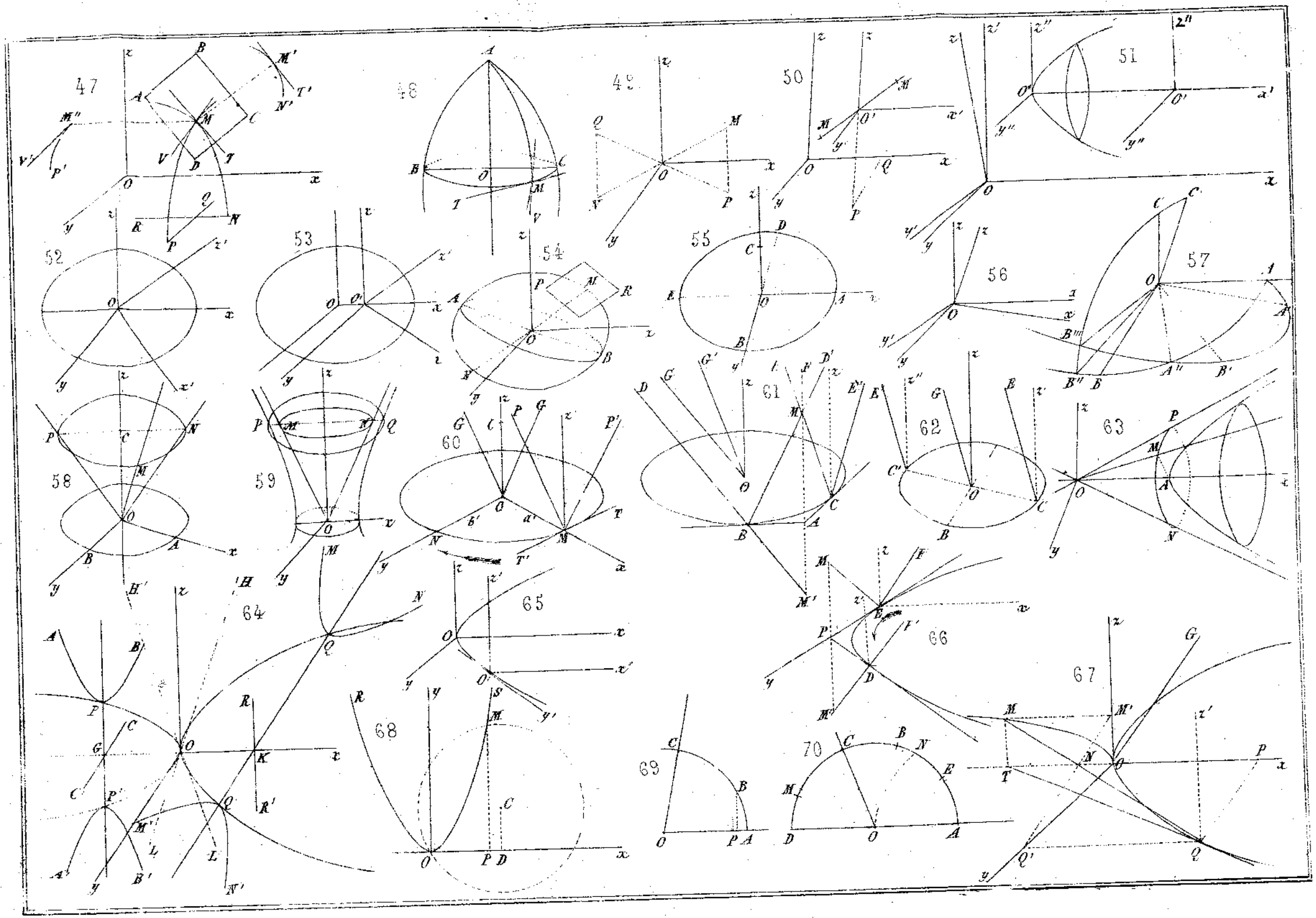

171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197

Lam. 8.


198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22



Lit. Bachiller. Venera 7.


47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70

[illegible]

[illegible]