NOCIONES ELEMENTALES

DE

ÁLGEBRA

POR

DON ANASTASIO PRIETO,

2.° MAESTRO DE LA ESCUELA NORMAL DE LOGROÑO.

ESTA OBRITA, DEDICADA Á LOS ALUMNOS DE TERCER AÑO DE LAS ESCUELAS NORMALES, PUEDE SERVIR TAMBIEN Á LOS DE LOS INSTITUTOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, PRINCIPALMENTE AL PREPARARSE PARA RECIBIR EL GRADO DE BACHILLER EN ARTES.

LOGROÑO.

Imp. de Federico Sanz, Compañía, 21.

1877.

NOCIONES ELEMENTALES

DE

ÁLGEBRA

POR

DON ANASTASIO PRIETO,

2.° MAESTRO DE LA ESCUELA NORMAL DE LOGROÑO.

ESTA OBRITA, DEDICADA Á LOS ALUMNOS DE TERCER AÑO DE LAS ESCUELAS NORMALES, PUEDE SERVIR TAMBIEN Á LOS DE LOS INSTITUTOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA, PRINCIPALMENTE AL PREPARARSE PARA RECIBIR EL GRADO DE BACHILLER EN ARTES.

LOGROÑO.

Imp. de Federico Sanz, Compañía, 21.

1877.

NOCIONES DE ÁLGEBRA.

PARTE 1.ª

CAPÍTULO PRIMERO.—PRELIMINAR.

1. ¿Qué es Álgebra?

Álgebra es una parte de las matemáticas que estudia los problemas de la cantidad por medio de un lenguaje simbólico ó razonamiento artificial, por el que de principios generales deduce reglas y consecuencias aplicables á casos particulares.

2. ¿De qué símbolos ó signos se vale el Álgebra para establecer el razonamiento artificial?

De las primeras letras del alfabeto para representar los datos ó cantidades que se suponen conocidas y de las últimas para las incógnitas. A veces hace uso tambien de las del alfabeto griego y de las anteriores acompañadas de uno, dos ó tres acentos en esta forma: a, a', a'', a''', etc., que se leen *a, a' prima; a'' segunda; a''' tercera*, etc., empleando tambien los guarismos y demás signos de que hemos hablado en la Aritmética. (20-122).

3. ¿A qué se llama cantidad literal ó expresion algébrica?

A una ó varias letras reunidas por medio de los signos de las operaciones ordinarias: así a, $a+b$, ab, $c-d$, etc., son cantidades literales.

4. ¿Qué es coeficiente y qué indica?

El multiplicador numérico ó literal de una cantidad cualquiera recibe en álgebra el nombre de coeficiente, el cual indica las veces que dicha cantidad entra en la cuestion como sumando. Así, si la cantidad a entra en una operacion tres veces como sumando, ó sea, $a+a+a$ se escribe $a\times3=3a$ y 3 es el coeficiente. Si la cantidad bc ha de multiplicarse por 4 esto es $bc\times4$ será igual á 4 bc y el 4 será el coeficiente: y en general la cantidad $ab\times m$ se expresa diciendo mab, siendo m el coeficiente. Toda cantidad lleva implícitamente la unidad por coeficiente.

5. ¿Qué es exponente?

El número que indica las veces que una cantidad entra como factor, el cual se coloca un poco mas alto y á la derecha de la cantidad á que afecta. Así, si la cantidad x se ha de tomar tres veces como factor, ó sea $x\times x\times x$, se expresa x^3 siendo 3 el exponente; si se ha de tomar n veces se expresará x^n y n es el exponente. Toda cantidad lleva implícitamente el exponente uno.

6. ¿Qué es cantidad entera?

Se llama cantidad entera aquella que no lleva denominador ni radical alguno: vr. gr. a^2, bc^3, $a+b-c$.

7. ¿Qué es cantidad fraccionaria?

Aquella que lleva algun denominador: v. g. $\frac{a}{b}$, $\frac{a+b+c}{3}$ etcétera.

8. ¿Qué es cantidad racional?

Aquella que no lleva el signo radical, como cualquiera de los anteriores.

9. ¿Qué es cantidad radical ó irracional?

La que lleva algun signo radical, v. g. $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{a^2b}$.

10. ¿Qué es cantidad positiva?

Se llama cantidad positiva aquella que entra en combinacion con otra de su misma especie para servirle de aumento y se le antepone el signo $+$: si no lleva signo tambien es positiva.

11. ¿Qué es cantidad negativa?

Aquella que en combinacion de otra de su misma especie la disminuye y lleva antepuesto el signo —.

12. ¿De dónde provienen las cantidades negativas?

De restar un número mayor de otro menor. En efecto, si en la expresion $a-b$ damos á a el valor de 5 y á b el de 7 resultará $5-7$; pero $5-7=5-5-2$, y como $5-5=0$, resulta que $5-7=-2$, cantidad negativa.

13. ¿Qué se deduce de esto?

Que para restar de un número otro mayor, se debe restar del mayor el menor y anteponer al resto el signo — v. g. para restar 9 de 3, restaré 3 de 9, y al resto le pondré el signo — en esta forma $3-9=-6$.

14. ¿A qué se llama término?

Toda cantidad ó expresion de cantidad separada de otra por los signos + ó —. Así el producto abc de a por b por c es un término; el cociente $\frac{a}{b}$ de a dividido por b es otro término, etc.

15. ¿Qué es monomio?

La cantidad que consta de un solo término, como: a^2b^3.

16. ¿Qué es binomio?

La expresion que consta de dos términos, v. g.: $a+b$; $a^2b^3-b^3$.

17. ¿Qué es polinomio?

La cantidad que se compone de mas de dos términos, v. g.: $a^2+b^2c-b^3+x\ a^2$, etc.

18. ¿A qué se llama grado ó dimension de un término?

Si la cantidad es entera al número de sus factores literales, y si es fraccionaria á la diferencia de factores literales entre el numerador y denominador.

Así el término $2\ a^2b$ es de tercer grado, porque equivale á $2\ aab$, que consta de tres factores literales; $\frac{5ab^3}{2a}$ es tambien de tercer grado, porque en el numerador lleva cuatro factores y en el denominador uno y $4-1=3$.

19. ¿Qué es polinomio homogéneo?

Aquel cuyos términos son todos del mismo grado: así el polinomio $2a^3b+5a^2b^2-4a^3b+\frac{a^5}{b}$ es homogéneo, porque todos sus términos son de 4.° grado.

20. ¿Qué son términos semejantes?

Términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal, esto es, las mismas letras con los mismos exponentes, aunque lleven distintos los signos y los coeficientes; así $3a^2bc^3-5a^2bc^3+a^2bc^3$ son semejantes.

21. ¿Qué es igualdad ó identidad?

La reunion por medio del signo $=$ de dos cantidades, que serán siempre iguales cualquiera que sea el valor que se dé á sus letras: así: $4a-b=2a+2a-b$ será una igualdad.

22. ¿Qué es ecuacion?

La reunion por medio del signo $=$ de dos cantidades en general diferentes y que llevan alguna incógnita; v. g.: $2a+b^2=3x-c$.

23. ¿De cuántas partes consta toda igualdad ó ecuacion?

De dos, que se llaman: primer miembro la cantidad que va á la izquierda del signo $=$ y segundo miembro á la que va á la derecha del mismo signo.

24. ¿Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, cómo serán los resultados?

Es evidente que haciendo operaciones iguales con cantidades iguales los resultados deben ser iguales, de donde se deduce:

1.° Que si á los dos miembros de una igualdad se les añade la misma cantidad, la igualdad subsistirá.

2.° Que si de los dos miembros se quita ó resta la misma cantidad tambien subsistirá la igualdad.

3.° Que si los dos miembros se multiplican ó dividen por un mismo número, tanto los productos como los cocientes deben ser iguales.

4.° Que podrán sumarse, restarse, multiplicarse ó dividirse ordenadamente dos igualdades, resultando siempre otra igualdad.

25. ¿A cuáles se llaman cantidades constantes y á cuáles variables?

Son cantidades constantes aquellas que conservan siempre el mismo valor, y variables aquellas que pueden recibir diferentes y sucesivos valores. Si una cantidad variable puede aproximarse sin cesar á otra constante, de modo que su diferencia llegue á ser menor que otra cantidad dada por pequeña que esta sea, la constante se llama límite de la variable.

26. ¿A qué cantidad se llama infinitamente pequeña?

A la variable, cuyo valor numérico pueda decrecer sin fin, de tal modo, que pueda ser menor que otro número dado por pequeño que sea: el límite de esta cantidad seria el *cero*: tal seria la cantidad, cuyos valores sucesivos fueron $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$..... y así sin fin.

27. ¿A qué cantidad se llama infinita ó infinitamente grande?

A la variable, cuyo valor numérico pueda aumentar sin fin, de modo que pueda ser mayor que otro número dado por grande que sea: la cantidad variable, cuyos valores sucesivos fuesen, por ejemplo, 1, 2, 3, 4..... y así sin fin seria infinita.

28. ¿Cómo se representan estas cantidades?

Por el signo ∞ precedido del $+$ si es infinitamente grande y del signo $-$ si es infinitamente pequeña.

29. ¿A cuál de dos números se llama mayor?

Se llama mayor entre dos números á aquel á que le falte alguna cantidad positiva para ser igual al otro, así entre los números 8 y 5 es menor el 5 porque le falta la cantidad $+3$ para ser igual á 8.

30. ¿Segun esto una cantidad negativa será mayor ó menor que cero?

Toda cantidad negativa es menor que cero. En efecto, sea la cantidad negativa -5: si á esta cantidad le añado el número positivo $+5$ tendré: $-5+5=0$, es decir que á -5 le falta la cantidad positiva 5 para ser igual cero: luego $-5<0$.

31. ¿De dos cantidades negativas cual será menor?

De dos cantidades negativas es menor aquella cuyo valor absoluto, es decir, prescindiendo del signo, es mayor. Sean las cantidades -7 y -4, digo que $-7<-4$.

En efecto, si á -7 añado la cantidad positiva $+3$, resultará $-7+3=-4$, de donde se deduce que á -7 le falta la cantidad positiva $+3$ para valer tanto como -4, luego $-7<-4$.

32. ¿A qué se llama valor numérico ó absoluto de un término?

Al que resulta de sustituir en vez de las letras que le componen, números determinados y haciendo con estos las operaciones indicadas con las letras. Así el valor numérico de $4ab^2$, suponiendo que a valga 5 y b 8, será $4\times5\times8^2=20\times64=1280$.

33. ¡Variará el valor numérico de un polinomio si cambian de lugar sus términos pero sin cambiar de signo?

El valor numérico de un polinomio no varía aunque cambien de lugar sus términos, con tal que no muden de signo.

Algunos matemáticos consideran como evidente este principio, y á la verdad que para ello no les falta razon, pues se comprende fácilmente que no cambiando de signo, las operaciones que con los términos se han de hacer, serán siempre las mismas, cualquiera que sea el órden en que esten colocados y sabido es que el mismo resultado se obtiene añadiendo á una cantidad otra y restando una tercera, que restando primeramente esta y añadiendo despues la otra, es decir, que $a+b-c=a-c+b$.

En efecto, sea $a=8$; $b=5$, y $c=3$ tendremos $8+5-3$ en el primer caso $=10$ y $8-3+5$ en el segundo $=10$, como se quiere demostrar.

34. ¿Segun esto, cómo se reducen á uno solo varios términos semejantes?

Distinguiremos dos casos: 1.° que sean solamente dos los términos semejantes, 2.° que sean mas de dos.

1.° Si son solamente dos, ó tienen el mismo ó diferente signo; si tienen el mismo signo, se suman sus coeficientes numéricos y á continuacion de la suma se escribe la parte literal, anteponiendo al resultado el signo comun, v. g. Sean los términos semejantes $+4\,a^3b^3+8\,a^3b^3$, como los dos tienen el mismo signo, sumaré los coeficientes 4 y 8 y será $+12\,a^3b^3$.

Sean ahora $-5a^2b-6a^2b$, reducidos será $-11a^2b$.

Si tienen diferente signo, se restan los coeficientes y al resultado se le antepone el signo del mayor; v. g. $+6a^3b^2-2a^3b^2$ será igual á $+4a^3b^2$; $-3a^2b+5a^2b$, será igual á $+2a^2b$, y $+3a^5b-8a^5b=-5a^5b$.

2.° Si son mas de dos los términos semejantes y todos tienen el mismo signo, se suman los coeficientes de todos y al resultado se le antepone el mismo signo; pero si tienen diferentes signos, se reducen 1.° los *aditivos ó positivos* á uno solo, 2.° se reducen asimismo los *sustractivos ó negativos*, y luego se restan los coeficientes de ambos y á la resta se le antepone el signo del mayor: v. g. Sea el polinomio $4a^2b+3a^2b-5a^2b+2a^2b-a^2b$: tendrémos:

1.° $4a^2b+3a^2b+2a^2b=9a^2b$.
2.° $-5a^2b-a^2b=-6a^2b$.
3.° $9a^2b-6a^2b=3a^2b$.

EJEMPLOS.

1.° $3a^2b^2-abc^2+2a^4+5a^4-2abc^2-a^2b^2+5abc^2-10a^4=2a^2b^2-3a^4+2abc^2$.

2.° $a^4+abc^2-8a^2b^2-5a^2b^2+2abc^2-2a^4=-a^4+3abc^2-13a^2b^2$.

3.° $6ab^2+4a^2b-5ab^2-9a^2b=ab^2-5a^2b$.

4.° $5ab^2-8ab^2+6ab^2+9ab^2-8ab^2=20ab^2-16ab^2=4ab^2$.

Nota. Algunas veces ocurre que dos términos semejantes tienen el mismo coeficiente y signo contrario en cuyo caso se reducen á cero, porque una cantidad, cualquiera que ella sea, ménos la misma es igual á cero. Así $5a^2b^3-5a^2b^3=0$.

35. ¿Qué se entiende por fórmula algébrica?

Es una expresion que indica las operaciones que deben hacerse con los datos para hallar el valor de la incógnita de todo problema particular comprendido en el general á que la fórmula corresponde. Sea la fórmula $V=\frac{4\,pi\,r^3}{3}$ que sirve para hallar el volúmen de la esfera, siendo V el volúmen y r el rádio de la esfera ¿qué nos indica? Que para hallar el volúmen de una esfera determinada se multiplicará 4 por *pi*, y esto por la 3.ª potencia del rádio y el producto se dividirá por 3.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES ALGÉBRICAS.

ARTÍCULO 1.°

Adicion ó suma.

36. ¿Qué es sumar?

Es agregar una ó mas cantidades á otra ú otras. Las cantidades que se han de sumar, se llaman sumandos y el resultado suma: de modo que suma algébrica es el polinomio que resulta de reunir todos los sumandos con los signos que llevan.

37. ¿Cómo se ejecuta por lo tanto la suma algébrica?

Se escriben los sumandos unos á continuacion de otros con los mismos signos que lleven y el polinomio que resulta se simplifica, si tiene términos semejantes.

EJEMPLOS.

1.° Sumar los monomios $(2a^2)$, $(-3ab)$, $(+4a^2b)$, $(-a^2)$, $(+4ab)$.

Suma: $2a^2-3ab+4a^2b-a^2+4ab=a^2+ab+4a^2b$.

2.° Sumar $(-4a+3b^2-c)+(3a^2b+4c-5a)+(-2a^2b+5c-b^2)$.

Suma: $-4a+3b^2-c+3a^2b+4c-5a-2a^2b+5c-b^2=-9a+2b^2+8c+a^2b$.

ARTÍCULO 2.°

Sustraccion ó resta.

38. ¿Qué es restar?

Es averiguar la diferencia que hay entre dos cantidades, ó lo que falta á la una para ser igual á la otra. La cantidad que se ha de restar se llama *sustraendo*, la de quien se ha de restar *minuendo*, y el resultado *resta*. La resta algébrica es, pues, una cantidad que sumada con el *sustraendo*, dá el *minuendo*.

39. ¿Cómo se indica la operacion de restar?

Se escribe el minuendo dentro de un paréntesis, á continuacion el signo — y luego el sustraendo dentro de otro paréntesis. Así, si de la cantidad $a+b-c$, por ejemplo, quiero restar $+n+m-r$, lo indicaré así: $(a+b-c)-(+n+m-r.)$

40. ¿Y cómo se ejecuta la operacion de restar?

A continuacion del minuendo se escribe el sustraendo con los signos mudados, y el polinomio que resulte será la resta, que se simplifica, si se puede.

Sea el minuendo $(a+b)$ y el sustraendo $(n+m)$, digo que

$$(a+b)-(n+m)=a+b-n-m.$$

En efecto, si $a+b-n-m$ es la resta, sumada con el sustraendo $n+m$, debe dar el minuendo $a+b$.

Haciendo la suma resulta $n+m+a+b-n-m$ y simplificando: $a+b$: luego es cierta la regla.

Ejemplos.

1.° Restar de $(5\,a^3b^2)$, el polinomia $(3\,ab-2\,a^3b^2+4\,b)$.

Indicacion: $(5a^3b^2)-(3ab-2a^3b^2+4b)=$

Resolucion: $5a^3b^2-3ab+2a^3b^2-4b=7a^3b^2-3ab-4b.$

2.° Restar de $(6a^4b-3a^2+4a)$, el polinomio $(-2a^4b+5a^2+b)$.

Indicacion: $(6a^4b-3a^2+4a)-(-2a^4b+5a^2+b).=$

Resolucion: $6a^4b-3a^2+4a+2a^4b-5a^2-b=8a^4b-8a^2+4a-b.$

Artículo 3.°

Multiplicacion.

41. ¿A qué se llama producto de dos cantidades literales?

Se llama producto de dos cantidades literales á otra tercera cantidad que sea, respecto á la primera, lo que la segunda es respecto á la unidad: asi el producto de las cantidades a y b será otra tercera cantidad ab que sea respecto á a lo que b es respecto á la unidad.

42. ¿A cuántas cosas debemos atender en la multiplicacion de cantidades literales?

En toda multiplicacion se ha de atender á los signos, á los exponentes, á los coeficientes y á las letras.

43. ¿Cuál es la regla de los signos?

La regla *abreviada* de los signos es: *signos iguales en el multiplicando y multiplicador dan en el producto signo positivo: signos desiguales, negativo.* De otro modo: + por + da +, — por menos, +; + por — y — por +, —.

44. ¿Podrá V. demostrarme esta regla?

Sí, señor. Sea 1.° $(+a) \times (+b)$.

Segun la definicion del producto (41) $+a$ por $+b$, será tomar $+a$ por sumando tantas veces como $+b$ contenga á la unidad, es decir $+a+a+a=a\ldots\ldots b$ veces $= +ba$; lo cual quiere decir, que una cantidad positiva por otra dá producto positivo, ó que + por + dá +.

2.° Sea ahora $(-a) \times (+b)$: el producto se formará de tantos sumandos iguales á $-a$, como unidades tiene $+b$, es decir, que el producto será igual á $-a+-a+-a\ldots\ldots$ etc.$=$ $-a-a-a\ldots\ldots +b$ veces $=-ba$: lo cual quiere decir, que una cantidad negativa por otra positiva, dá producto negativo, ó que — por + dá —.

3.° Sea ahora $(+a) \times (-b)$: en este caso el producto será igual al número a tomando negativamente b veces, ó sea $-a-a-a\ldots\ldots =-ba$; luego un número negativo por otro positivo, dá producto negativo, ó + por — dá —.

4.° Sea por último $(-a) \times (-b)$: el producto será $-a$ tomado b veces negativamente, esto es, $-(-ba)=+ba$: luego el producto de una cantidad negativa por otra tambien negativa, es positivo, es decir, — por — dá +.

45. ¿Cuál es la regla de los exponentes de letras iguales?

Que se sumen los exponentes de las letras iguales del multiplicando y multiplicador.

46. ¿En qué se funda esta regla?

En que el producto de dos potencias de una misma cantidad es la misma cantidad con un exponente igual á la suma de los exponentes de los factores.

En efecto, si tenemos que multiplicar a^3 por a^2 el producto será igual á $aaa \times aa = a^5$.

Por la misma razon $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

47. ¿Cuál es la regla de los coeficientes?

Que se multiplique el coeficiente multiplicando por el coeficiente multiplicador: asi $4a \times 3b = 4 \times 3ab = 12ab$.

48. ¿Cuál es la regla de las letras diferentes?

Que se pongan unas á continuacion de otras en el producto: asi $n \times m$ será igual á nm.

49. ¿Cuántos casos pueden ocurrir en la multiplicacion?

Tres: 1.° Multiplicar un monomio por otro monomio. 2.° Un polinomio por un monomio ó al contrario: y 3.° Un polinomio por otro polinomio.

50. ¿Cómo se multiplica un monomio por otro?

Se multiplican los coeficientes, se suman los exponentes de las letras iguales, las letras diferentes se escriben en el producto en la misma forma que en los factores, y al producto se le antepone el signo que le corresponda conforme á la regla de los signos.

EJEMPLOS.

1.° $4a^2b^3n \times 5a^4b^2m = 20a^6b^5nm$
2.° $-3a^3b^2c \times 4ab^3 = -12a^4b^5c$
3.° $6a^2bc^3 \times -2ab = -12a^3b^2c^3$
4.° $-3a^2b \times -7a^3c = +21a^5bc$.

51. ¿Cómo se multiplica un polinomio por un monomio?

Se multiplican todos y cada uno de los términos del polinomio multiplicando, por el monomio multiplicador, y la suma de todos los productos parciales será el producto total. V. g. multiplicar $(7a^3b - a^2b^2 + 5a - 4b)$ por $2a^2b$. Multiplicarémos los cuatro términos del multiplicando por $2\,a^2b$ multiplicador y tendrémos cuatro productos, á saber:

$$\left.\begin{array}{l} 1.° \ 7a^3b \times 2a^2b = 14a^5b^2 \\ 2.° -a^2b^2 \times 2a^2b = -2a^4b^3 \\ 3.° +5\,a \times 2\,a^2b = +10a^3b \\ 4.° -4b \times 2a^2b = -8a^2b^2 \end{array}\right\} = 14a^5b^2 - 2a^4b^3 + 10a^3b - 8a^2b^2$$

52. ¿Cómo se multiplica un polinomio por otro?

Este caso se reduce á repetir el caso anterior tantas veces como términos tiene el multiplicador. En efecto, para multiplicar un polinomio por otro, se multiplican todos los términos del multiplicando por el primero del multiplicador, luego todos los términos del multiplicando por el segundo del multiplicador, y así sucesivamente: se suman despues todos los productos parciales y la suma será el producto total, que se simplifica si se puede.

Ejemplo: multiplicar $(4a^2b+2a-5b^2-3ab^3)$ por $(2a^2-3b^3+4b)$.

Tendrémos 1.° $(4a^2b+2a-5b^2-3ab^3)\times 2a^2=8a^4b+4a^3-10a^2b^2-6a^3b^3$.

2.° $(4a^2b+2a-5b^2-3ab^3)\times -3b^3=-12a^2b^4-6ab^3+15b^5+9ab^6$.

3.° $(4a^2b+2a-5b^2-3ab^3)\times 4b=16a^2b^2+8ab-20b^3-12ab^4$

Y sumando los tres productos parciales será el total: $8a^4b+4a^3-10a^2b^2-6a^3b^3-12a^2b^4-6ab^3+15b^5+9ab^6+16a^2b^2+8ab-20b^3-12ab^4$ en el cual no hay mas que dos términos semejantes que son $-10a^2b^2$ y $+16a^2b^2$ que reducidos á uno nos dá $+6a^2b^2$; el cual reemplazará á los dos reducidos.

53. ¿Conviene dar alguna forma especial á los factores para facilitar la reduccion cuando haya muchos términos semejantes?

Para facilitar la reduccion de los términos semejantes, conviene muchas veces *ordenar* tanto el multiplicando como el multiplicador con respecto á una misma letra, que se llama entonces principal.

54. ¿Qué es ordenar un polinomio con respecto á una letra?

Ordenar un polinomio con respecto á una letra es colocar sus términos de modo que los exponentes de dicha letra vayan contínuamente aumentando ó disminuyendo; en el primer caso se dice que se verifica en órden creciente ó ascendente y en el segundo en órden decreciente ó descendente que es generalmente el que se usa

Ejemplo: sea el polinomio $a^5b+4a^3b^5-8a^6b^6-5a^4b^3-7a^2b^4+4ab^2-4b$.

En órden ascendente con respecto á la letra a será

$$+4ab^2-7a^2b^4+4a^3b^5-5a^4b^3+a^5b-8a^6b^6-4b.$$

En órden descendente seria:

$$-8a^6b^6+a^5b-a^4b^3+4a^3b^5-7a^2b^4+4ab^2-4b.$$

55. Sírvase V. ejecutar la multiplicacion de $(5a^3+8a^2b-6ab^2+4b^3)$ por $(4a^2+2ab+3b^2)$ despues de ordenados los polinomios con respecto á la letra a.

Disposicion.

Multiplicando........	$5a^3+8a^2b—6ab^2+4b^3$
Multiplicador........	$4a^2+2ab+3b^2$
Productos parciales.	$20a^5+32a^4b—24a^3b^2+16a^2b^3$ $+10a^4b+16a^3b^2—12a^2b^3+8ab^4$ $+15a^3b^2+24a^2b^3—18ab^4+12b^5$
Producto total reducido.	$20a^5—42a^4b+7a^3b^2+28a^2b^3—10ab^4+12b^5$.

ARTÍCULO 4.°

Consecuencias de la multiplicacion.

56. A qué es igual el cuadrado de la suma de dos números?

El cuadrado ó segunda potencia de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer sumando, mas el duplo del producto del primero por el 2.° mas el cuadrado del segundo.

Dem. Sean los dos números x y z; digo que $(x+z)^2=x^2+2xz+z^2$.

En efecto, $(x+z)^2=(x+z)\times(x+z)$

Efectuando la multiplicacion de estos dos binomios resulta que $(x+z)\times(x+z)=x^2+xz+xz+z^2$. y reduciendo los términos semejantes $xz+xz$ á uno sólo resultará que

$(x+z)^2=x^2+2xz+z^2$ conforme al enunciado.

57. A qué es igual el cuadrado de la diferencia de dos números?

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del minuendo, ménos el duplo del producto del minuendo por el sustraendo, mas el cuadrado del sustraendo.

Dem. Sea el cuadrado de $m—n$ ó $(m—n)^2$; digo que es igual á $m^2-2mn+n^2$

En efecto, $(m—n)^2=(m—n)\times(m—n)$ y haciendo la multiplicacion será: $m^2—nm—mn+n^2$ y reduciendo, tendrémos que $(m—n)^2=m^2—2nm+n^2$, conforme al enunciado.

58. A qué es igual el cubo de la suma de dos números?

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer sumando, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

En efecto, $(c+d)^3=(c+d)^2\times(c+d)$; pero

$(c+d)^2=c^2+2cd+d^2$ (56): luego sustituyendo esta cantidad en el 2.° miembro de la primera igualdad, tendremos que será

$$(c+d)^3=(c^2+2cd+d^2)\times(c+d)$$

y efectuando la multiplicacion y reduciendo términos semejantes, será

$(c+d)^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$, conforme al enunciado.

59. A qué es igual el cubo de la diferencia de dos cantidades?

El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera, ménos el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, mas el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, ménos el cubo de la segunda.

En efecto, $(a-b)^3=(a-b)^2\times(a-b)$; pero

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, (57), y sustituyendo esta cantidad en lugar de la primera será

$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)\times(a-b)$, y efectuando la multiplicacion y reduciendo términos semejantes será.

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ conforme al enunciado.

60. A qué es igual el producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas?

El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, es igual al cuadrado de la primera ménos el cuadrado de la segunda.

En efecto, sea $(r+s)\times(r-s)$, digo que es igual á r^2-s^2

Efectuando la multiplicacion de estos binomios tendrémos que $(r+s)\times(r-s)=r^2+sr-sr-s^2$, y suprimiendo en este segundo miembro los términos $+sr$ y $-sr$ por ser iguales y con signo contrario quedará

$(r+s)\times(r-s)=r^2-s^2$, conforme al enunciado.

Artículo 5.°

Division.

61. A qué se llama cociente de dos cantidades literales?

Cociente de dos cantidades es otra cantidad que multiplicada por el divisor, dá de producto el dividendo.

62. Que será, pues, dividir?

Dividir es dadas dos cantidades, hallar una tercera, que multiplicada por la segunda, nos dé la primera. Así dividir a por b, es hallar una tercera c, que multiplicada por b, nos dé a: será a dividendo, b divisor y c el cociente.

63. Qué es fraccion algébrica?

Fraccion algébrica es el cociente indicado de dos cantidades: así $\frac{a}{b}$ es una fraccion; $\frac{a^3b}{2nm}$ es otra fraccion.

64. Cúando se dice una division exacta y cuando inexacta?

Se llama division exacta cuando el cociente es un número entero, é inexacta cuando no lo es.

65. Cuántos casos pueden ocurrir en la division de cantidades literales?

Tres, á saber: 1.° Dividir un monomio por otro monomio, 2.° Dividir un polinomio por un monomio, 3.° Dividir un polinomio por otro polinomio. (1).

66. A cuántas cosas debe atenderse en la division?

En toda division debe atenderse á los signos, á los coeficientes, á las letras y á los exponentes.

67. Cúal es la regla de los signos?

La misma que en la multiplicacion, es decir, que signos iguales dan en el cociente signo positivo, y signos desiguales, negativo. En efecto, supongamos que se ha de dividir a por b; llamemos al cociente c y examinemos los casos que respecto á sus signos puedan ocurrir, á saber:

1.° $\frac{+a}{+b}$, 2.° $\frac{+a}{-b}$, 3.° $\frac{-a}{+b}$, 4.° $\frac{-a}{-b}$.

En el primer caso tendrémos que el dividendo $+a$ que es un producto, solo puede provenir de multiplicar $+$ por $+$ ó $-$ por $-$; pero como el signo del factor conocido b es $+$, el del

(1) La division de un monomio por un polinomio solo puede indicarse.

otro factor c ha de ser precisamente $+$: luego $\frac{+a}{+b}=+c$: de donde se deduce que $+$ por $+$ dá $+$ en el cociente.

En el 2.° caso tendrémos que el dividendo $+a$ proviene, como en el caso anterior, de multiplicar $+$ por $+$ ó $-$por$-$ y como el signo del divisor es $-$, se deduce que el del cociente debe ser tambien $-$; luego $\frac{+a}{-b}=-c$, de donde se deduce que $+$ por $-$, dá $-$ en el cociente.

Por la misma razon tendrémos en el tercer caso, que el dividendo $-a$, proviene de multiplicar $-$ por $+$ ó $+$ por $-$ y como el signo del divisor es $+$ resulta que el del cociente debe ser $-$: luego $\frac{-a}{+b}=-c$.

Y cuarto, el dividendo $-a$ debe provenir de $-$ por $+$; ó de $+$ por $-$ y como el del divisor es $-$, resulta que el del cociente tiene que ser $+$; luego $\frac{-a}{-b}=+c$; de donde se deduce que $-$ por $-$, dá más en el cociente, conforme á lo dicho en la regla.

68. Cúal es la regla de los coeficientes numéricos?

El coeficiente numérico del dividendo se divide por el del divisor, conforme á las reglas dadas en la Aritmética.

69. Cúal es la regla de las letras?

Respecto á las letras ó factores literales que sean comunes á dividendo y divisor, habrá que atender á sus exponentes, como vamos á explicar, y respecto á las que sean diferentes se dejará indicado el cociente.

70. Cúal es la regla de los exponentes?

Los exponentes de las letras iguales se restan los de las letras del divisor de los de las mismas del dividendo.

En efecto, sea $\frac{a^r}{a^s}$ digo que es igual á a^{r-s}

La letra del cociente no puede ser otra que a, pues si fuese otra, el producto del divisor por el cociente no seria a^r: por consiguiente nos resta saber cúal ha de ser el exponente de a en el cociente.

Para averiguarlo supongamos que es x y tendrémos que $\frac{a^r}{a^s}=a^x$ y de consiguiente $a^r=a^s\times a^x=a^{s+x}$.

Mas, para que exista igualdad en estas expresiones, es necesario que los dos exponentes de a sean iguales, esto es, $r=s+x$ y restando de los dos miembros de esta igualdad la cantidad s, será $r-s=x$: luego el exponente de a en el cociente que hemos llamado x puede sustituirse por $r-s$ conforme á la regla.

Pero al hacer esta sustitucion puede suceder que r sea mayor que s, que r sea igual á s, y que r sea menor que s.

En el 1.°, esto es, cuando $r>s$ el exponente del cociente puede representarse por la diferencia de los exponentes, es decir, $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}=a^d$, siendo d la diferencia entre r y s.

En el segundo, esto es, cuando $r=s$, la diferencia $r-s$ será igual á cero y entonces tendrémos $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}=a^0$, ¿qué significa esta expresion? Traducida al lenguaje vulgar quiere decir que a^0 es una cantidad, ó mejor dicho un producto en que no ha de haber mas factor que a y este no ha de entrar ninguna vez por factor, en lo cual parece haber una contradiccion, y sin embargo esta expresion vale tanto como la unidad, puesto que si r es igual á s, la division $\frac{a^r}{a^s}=\frac{a^r}{a^r}$, es decir, una cantidad dividida por sí misma, cuyo cociente es siempre 1, luego $a^0=1$.

En el 3.°, es decir, cuando $r<s$ la diferencia será la cantidad negativa $-d$, esto es, $\frac{a^r}{a^s}=a^{-d}$, expresion difícil tambien de entender, si queremos considerarla como una poten-

cia con exponente negativo, y de la cual hablaremos en otro lugar.

71. Sabidas estas reglas, pasemos á resolver los diferentes casos de la division algébrica. ¿Cómo se divide un monomio por otro?

Atendiendo primeramente á los signos del dividendo y divisor, pondremos al cociente el que le corresponda, segun la regla de los signos; se divide luego el coeficiente del dividendo por el del divisor, se restan los exponentes de las letras iguales y la division de las letras diferentes se deja indicada.

Ejemplos: 1.° dividir 24 a^7b^4c por $6a^3b^2$.

Resolucion. El signo del cociente será +, porque + por + da +; dividido el coeficiente 24 por 6=4; a^7 por $a^3=a^{7-3}=a^4$; b^4 por $b^2=b^{4-2}=b^2$; c que está en el dividendo y no en el divisor pasa al cociente, de modo que reuniendo ahora estos cocientes parciales será:

$$\frac{24a^7b^4c}{6a^3b^2}=4a^4b^2c.$$

2.° $20a^5b^2cd:—5a^4bc=—4a^1b^1d=—4abd$ (1)

3.° $—18a^4b^3c^2:—5a^2bn^2=+\frac{18a^2b^2c^2}{5\ \ n^2}=\frac{18a^2b^2c^2}{5n^2}$.

4.° $—20a^2bc^3:+12a^3bc^3n=—\frac{20a^{-1}}{12n}=\frac{5a^{-1}}{3n}$.

Los ejemplos 1.° y 2.° nos han dado cocientes enteros y por lo tanto se dice que la division es exacta, en los 3.° y 4.° los cocientes no son enteros y por lo tanto la division es inexacta.

72. ¿Qué condiciones son necesarias, segun esto, para que la division de los monomios sea exacta?

Para que la division de dos monomios sea exacta se requiere: 1.° que el coeficiente del dividendo sea múltiplo del divisor. 2.° que los factores literales del dividendo tengan igual ó mayor exponente que sus semejantes del divisor, y 3.° que no haya en el divisor factores que no se hallen en el dividendo. Así la division de $30a^4b^2c$ por $6a^2b$ será exacta y su cociente será igual á $5a^2bc$.

---

(1) Cuando el exponente que corresponde al cociente sea la unidad no se escribe pues se sabe que toda cantidad lleva implícito el exponente 1, así como la unidad que resulta del cociente de una cantidad por sí misma tampoco se escribe en el cociente.

Si se quieren comprobar estos cocientes, multiplíquense por sus respectivos divisores y se verá que los productos serán los dividendos.

Segundo caso de la division.

73. ¿Cómo se divide un polinomio por un monomio?

Para dividir un polinomio por un monomio, se dividen todos y cada uno de los términos del polinomio por el monomio y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.

Ejemplos: dividir $6a^5b^4—8a^4b+4a^7bc^3$ por $2a^3b$.

Resolucion: $(6a^5b^4—8a^4b+4a^7bc^3)\colon 2a^3b=3a^2b^3—4a+2a^4c^3$.

En efecto, el cociente $(3a^2b^3—4a+2a^4c^3)\times 2a^3b$ divisor, nos dá de producto $6a^5b^4—8a^4b+4a^7bc^3$ igual al dividendo: luego aquel es el verdadero cociente.

74. ¿Qué se requiere para que esta division sea exacta?

Que todos los cocientes parciales sean enteros, pues uno que deje de serlo, el cociente total ya no lo será tampoco.

Ejemplo. $\dfrac{5a^5b—8a^6d^2+7a^3b}{4a^2b}=\dfrac{5a^3}{4}—\dfrac{2a^4d^2}{b}+\dfrac{7a}{4}$.

Tercer caso de la division.

75. ¿Cómo se divide un polinomio por otro?

Para dividir un polinomio por otro se ordenan el dividendo y divisor con respecto á una misma letra y luego se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y tendremos el primero del cociente; se multiplica este por todo el divisor y el producto se resta del dividendo: el término inmediato del dividendo se coloca á la derecha del resíduo con lo cual tendremos otro dividendo parcial; se divide el primer término de este resíduo por el primero del divisor y nos dará el segundo término del cociente; se multiplica este por todo el divisor y el producto se resta del dividendo parcial, y así se continúa hasta encontrar un resíduo *cero*, si la division es exacta, ó hasta que lleguemos á un resíduo en que el exponente de la letra principal sea menor que el que la misma letra tiene en el divisor, en cuyo caso la division es inexacta, y al cociente entero habrá que añadir una fraccion que tenga por numerador el resíduo y por denominador el divisor.

EJEMPLOS.

1.° Dividir $7a^2x^3-7a^3x^2+2x^5+3a^4x-5ax^4$ por $2x^3-ax^2+3a^2x$.

Division.

Ordenados dividendo y divisor respecto á la letra a tendremos.

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{Dividendo....} & 3a^4x-7a^3x^2+7a^2x^3-5ax^4+2x^5 & 3a^2x-ax^2+ \\
 & -3a^4x+a^3x^2-2a^2x^3 & 2x^3 \text{ divisor.} \\
\hline
\text{1.}^{\text{er}}\text{ resíduo.... »} & -6a^3x^2+5a^2x^3-5ax^4+2x^5 & a^2-2ax+x^2 \\
 & +6a^3x^2-2a^2x^3+4ax^4 & \text{cociente.} \\
\hline
\text{2.° resíduo............ »} & +3a^2x^3-ax^4+2x^5 & \\
 & -3a^2x^3+ax^4-2x^5 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

2.° Ordenado ya.

$$
\begin{array}{l|l}
6x^5-23x^4a-x^3a^2+54x^2a^3+2xa^4-24a^5 & 2x^3-5x^2a- \\
-6x^5+15x^4a+9x^3a^2-12x^2a^3 & 3xa^2+4a^3 \\
\hline
\text{»} \quad -8x^4a+8x^3a^2+42x^2a^3+2xa^4-24a^5 & 3x^2-4xa-6a^2 \\
+8x^4a-20x^3a^2-12x^2a^3+16xa^4 & \\
\hline
\text{»} \quad -12x^3a^2+30x^2a^3+18xa^4-24a^5 & \\
+12x^3a^2-30x^2a^3-18xa^4+24a^5 & \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\text{3.° } 8x^4+12x^3-6x^2-9x+50 & x^2-3x+1 \\
-8x^4+24x^3-8x^2 & \\
\hline
\text{»} \quad +36x^3-14x^2-9x+50 & 8x^2+36x+94+\dfrac{237x-44}{x^2-3x+1} \\
-36x^3+108x^2-36x & \\
\hline
\text{»} \quad +94x^2-45x+50 & \text{Division inexacta.} \\
-94x^2+282x-94 & \\
\hline
\text{»} \quad 237x-44 &
\end{array}
$$

4.ª Dividir $(a^5+b^5):(a+b)$

$$\begin{array}{r|l}
a^5+b^5\qquad\qquad\qquad\qquad & a+b. \\
\cline{2-2}
-a^5-a^4b\qquad\qquad\qquad\quad & a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\cline{1-1}
» -a^4b+b^5\qquad\qquad\quad & \\
+a^4b+a^3b^2\qquad\qquad & \text{Division exacta.} \\
\cline{1-1}
» +a^3b^2+b^5\qquad & \\
-a^3b^2-a^2b^3\qquad & \\
\cline{1-1}
» -a^2b^3+b^5 & \\
+a^2b^3+ab^4+b^5 & \\
\cline{1-1}
» +ab^4+b^5 & \\
-ab^4-b^5 & \\
\cline{1-1}
0\quad 0 &
\end{array}$$

76. ¿Qué condiciones deben concurrir en los polinomios para que la division sea exacta?

Para que al dividir dos polinomios resulte cociente exacto, es necesario:

1.º Que el primer término del dividendo y de los demás dividendos parciales, despues de ordenados, sean exactamente divisibles por el primero del divisor.

2.º Que no resulte resíduo en que el exponente de la letra principal sea menor que el de la misma letra del divisor.

Y 3.º Que no resulte en el cociente ningun término en el cual el exponente de la letra principal, sumado con el de la misma letra en el último término del divisor, dé una suma menor que el exponente de dicha letra en el último del dividendo. Sirva de ejemplo $x^7+5x^6+7x^4:x^4+2x^2+2$, en que el primer término del cociente es x^3.

77. ¿Cómo se completa el cociente de una division inexacta?

El cociente de una division inexacta se completa agregando al cociente entero una fraccion, cuyo numerador sea el último resíduo y cuyo denominador sea el divisor.

CAPÍTULO III.

DE LAS FRACCIONES.

ARTÍCULO 1.°

Propiedades de las fracciones.

78. ¿Qué le sucede á una fraccion literal si su numerador crece ó disminuye?

Si el numerador de una fraccion crece, la fraccion crece y si el numerador disminuye, la fraccion disminuye.

Dem. Sea la fraccion $\frac{a}{b}$, aumentando el numerador a en la cantidad c, por ejemplo, resultará esta otra $\frac{a+c}{b}$, la cual indica la division de una suma indicada por b, que sabemos por la Aritmética (135) es igual á $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$, es decir $\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$.

Si al segundo miembro de esta igualdad le quitamos el sumando $\frac{c}{b}$, la igualdad se altera quedando mayor el miembro á que nada se le quita, y por consiguiente $\frac{a+c}{b}>\frac{a}{b}$ conforme al enunciado.

Si por el contrario disminuimos el numerador a en la cantidad c, resultará $\frac{a-c}{b}$, que representa la division de una diferencia indicada por b, y por la Aritmética (136) sabemos que

$$\frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}.$$

Si al segundo miembro de esta igualdad le añadimos la fraccion $+\frac{c}{b}$, es evidente que se alterará la igualdad haciéndose mayor este miembro: luego $\frac{a-c}{b}<\frac{a}{b}-\frac{c}{b}+\frac{c}{b}$ ó $\frac{a-c}{b}<\frac{a}{b}$ conforme al enunciado.

79. ¿Qué le sucede á una fraccion literal si su denominador aumenta ó disminuye?

Si el denominador de una fraccion literal aumenta, la fraccion disminuye, y si el denominador disminuye, la fraccion aumenta.

Sea la fraccion $\frac{x}{a}$; añadiendo al denominador a la cantidad b, tendremos $\frac{x}{a+b}$, que decimos es menor que $\frac{x}{a}$, esto es, $\frac{x}{a+b}<\frac{x}{a}$.

En efecto, $\frac{x}{a}\times a$, sabemos, Aritmética (170), que es igual á x y que $\frac{x}{a+b}\times(a+b)=x$: luego $\frac{x}{a}\times a=\frac{x}{a+b}\times(a+b)$.

Ahora bien, el primer miembro es un producto compuesto de dos factores, y el segundo otro producto compuesto de otros dos factores; de estos el segundo factor del segundo es evidentemente mayor que el segundo del primero y por lo tanto el primero del segundo deberá ser menor que el primero del primero: luego

$$\frac{x}{a+b}<\frac{x}{a}$$ que es lo que se queria demostrar.

Del mismo modo se demuestra la segunda parte.

80. ¿Qué le sucede á una fraccion si sus dos términos se multiplican ó dividen por una misma cantidad?

Si los dos términos de una fraccion se multiplican ó dividen por una misma cantidad, la fraccion no se altera.

Sea la fraccion $\frac{x}{z}$; digo que $\frac{xm}{zm}$ y $\frac{x:m}{z:m}$ tienen el mismo valor que $\frac{x}{z}$.

En efecto, sabemos que toda fraccion es el cociente indicado del numerador por el denominador: llamemos, pues, c á este cociente y tendremos que $\frac{x}{z}=c$, y por consiguiente $x=c\times z$.

Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por un mismo número, la igualdad subsistirá; multiplicando por m resulta $xm=czm$.

Dividamos ahora los dos miembros de esta segunda igualdad por zm y resultará esta otra $\frac{xm}{zm}=c=\frac{x}{z}$ que es lo que se queria demostrar.

Del mismo modo se demuestra la segunda parte, esto es, que $\frac{x}{z}=\frac{x:m}{z:m}$.

81. ¿Qué aplicacion frecuente se hace de esta propiedad?

La de reducir fracciones á un comun denominador y simplificacion de las mismas.

82. ¿Pues cómo se reducen varias fracciones literales á un comun denominador?

Para reducir varias fracciones literales á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de los demás, y de esta manera las nuevas fracciones serán respectivamente iguales á las propuestas, teniendo todas el mismo denominador.

Ejemplo.

Sean las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{n}{m}$, $\frac{s}{t}$, y aplicando la regla tendremos $\frac{admt}{bdmt}=\frac{a}{b}$; $\frac{cbmt}{dbmt}=\frac{c}{d}$; $\frac{nbdt}{mbdt}=\frac{n}{m}$, y $\frac{sbdm}{tbdm}=\frac{s}{t}$.

83. ¿Cómo se simplifican las fracciones literales?

Para simplificar una fraccion literal basta suprimir los factores comunes á sus dos términos, lo cual equivale á dividir numerador y denominador por un mismo número, con cuya operacion no se altera la fraccion.

EJEMPLOS.

1.° Sea la fraccion $\frac{abc}{nba}$, simplificada será: $\frac{c}{n}$.

2.° $\frac{a^2b^3c}{ab^2c^3}$; simplificada será: $\frac{ab}{c^2}$.

84. Si á los dos términos de una fraccion se les añade una misma cantidad ¿qué alteracion experimenta?

Si á los dos términos de una fraccion, cuyo numerador sea menor que su denominador, se les añade una misma cantidad, la nueva fraccion será mayor que la primera; pero si el numerador es mayor que su denominador, la fraccion resultante será menor que la propuesta.

Sea la fraccion $\frac{n}{m}$; añadiendo s á sus dos términos resultará $\frac{n+s}{m+s}$, y reduciéndolos á un comun denominador resultarán estas otras $\frac{n\times(m+s)}{m\times(m+s)}$ y $\frac{m\times(n+s)}{m\times(m+s)}$ ó $\frac{nm+ns}{mm+ms}$ y $\frac{nm+ms}{mm+ms}$.

Ahora si $n<m$, ms será mayor que ns, y por tanto la segunda fraccion será mayor que la primera, y si $n>m$, ms será menor que ns, y por consiguiente la segunda fraccion menor que la primera, conforme al enunciado.

CAPÍTULO IV.

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES.

ARTÍCULO 1.°

Suma ó adicion.

85. ¿Cómo se suman las fracciones literales?

Para sumar las fracciones literales que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y á la suma se pone por denominador el mismo de las fracciones, y si tienen distinto denominador, se reducen primero á un comun denominador y se suman despues como en el caso anterior.

Ejemplos: 1.° $\frac{a}{b}+\frac{n}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+n+c}{b}$;

2.° $\frac{a}{b}+\frac{n}{m}+\frac{c}{d}=\frac{amd}{bmd}+\frac{nbd}{mbd}+\frac{cbm}{dbm}=\frac{amd+nbd+cbm}{mbd}$.

ARTÍCULO 2.°

Resta ó sustraccion.

86. ¿Cómo se restan dos fracciones literales?

Para restar dos fracciones que tienen el mismo denominador, se restan los numeradores y á la resta se le pone el denominador comun, y si tienen distinto denominador, se reducen á un comun denominador y luego se restan como en el caso anterior.

Ejemplos: 1.° $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$; 2.° $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}$.

ARTÍCULO 3.º

Multiplicacion.

87. ¿Cómo se multiplican dos fracciones literales?

Para multiplicar dos fracciones se multiplican sus numeradores y el producto se divide por el de los denominadores.

En efecto, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Dem. Llamemos r al cociente de $\frac{a}{b}$, y r' al de $\frac{c}{d}$ tendremos que $a=br$ y $c=dr'$.

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, resultará que $ac=br\times dr'$ ó $ac=bd\times rr'$ y dividiendo los dos miembros de esta igualdad última por bd será: $\frac{ac}{bd}=r\times r'$, y sustituyendo en esta en lugar de r su igual $\frac{a}{b}$, y en lugar de r' su igual $\frac{c}{d}$, resulta finalmente $\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, conforme á la regla.

NOTA. Si en lugar de ser dos fracciones, fuesen una cantidad entera por una fraccion ó al contrario, se multiplicaria la entera por el numerador de la fraccion y el producto se dividiría por el denominador de la misma. Así, $a\times\frac{n}{m}=\frac{an}{m}$, y $\frac{a}{b}\times s=\frac{as}{b}$.

ARTÍCULO 4.º

Division.

88. ¿Cómo se dividen dos fracciones?

Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por el divisor invertido, esto es, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

En efecto, el cociente multiplicado por el divisor debe ser igual al dividendo, y como $\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}$, se deduce que $\frac{ad}{bc}$ es el verdadero cociente, conforme á la regla.

89. Y una fraccion ¿cómo se divide por una cantidad entera?

Para dividir una fraccion por una cantidad entera se multiplica el denominador de la fraccion por la entera y al producto se le pone por numerador el de la fraccion.

Así $\frac{a}{b} : c=\frac{a}{b\times c}$.

En efecto, si $\frac{a}{b\times c}$ es el cociente, multiplicado por el divisor c, será igual al dividendo $\frac{a}{b}$, y como $\frac{a}{b\times c}\times c=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, resulta que $\frac{a}{bc}$ es el verdadero cociente, conforme á la regla.

90. Y una cantidad entera por una fraccion ¿cómo se divide?

Para dividir una cantidad entera por una fraccion se multiplica la cantidad entera dividendo por el divisor invertido, esto es, $a : \frac{n}{m}=a\times\frac{m}{n}=\frac{am}{n}$.

Se demuestra del mismo modo que el caso anterior.

91. ¿Qué consecuencias se deducen de la division?

Las siguientes:

1.ª El cociente de dos fracciones del mismo denominador es igual al cociente de sus numeradores Así, $\frac{a}{b} : \frac{n}{b}=\frac{a}{n}$.

En efecto, $\frac{a}{n}\times\frac{n}{b}=\frac{an}{nb}=\frac{a}{b}$.

2.ª El cociente de dos fracciones del mismo numerador es igual al cociente del denominador del divisor por el del dividendo. Así $\frac{a}{b} : \frac{a}{n}=\frac{n}{b}$. En efecto, $\frac{n}{b}\times\frac{a}{n}=\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}$.

3.ª El cociente de la unidad por una fraccion es igual á la fraccion invertida. Así, $1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$.

92. ¿Cómo se practican las cuatro operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir con las expresiones mixtas?

Se reducen las expresiones mixtas á fracciones equivalentes y luego se opera con ellas por las reglas dadas para las fracciones.

93. ¿Y cómo se reducen las expresiones mixtas á fracciones equivalentes?

Se multiplica la parte entera por el denominador de la fraccion que la acompaña y al producto se le añade ó quita el numerador, segun el signo que lleve la fraccion y al resultado se le pone por denominador el mismo de la fraccion.

En efecto, 1.º $a+\frac{n}{m}$ será igual á $\frac{am+n}{m}$, puesto que $a+\frac{n}{m}=\frac{am}{m}+\frac{n}{m}=\frac{am+n}{m}$.

2.º $a-\frac{n}{m}$ será igual á $\frac{am-n}{m}$, porque $a-\frac{n}{m}=\frac{am}{m}-\frac{n}{m}=\frac{am-n}{m}$.

CAPÍTULO V.

INTERPRETACION DE LAS EXPRESIONES

$$a^{-d};\ \frac{a}{0};\ \frac{0}{0}\ \text{y}\ \frac{a}{\infty}.$$

94. Dijimos al hablar de la division (70) que al restar el exponente del divisor del de la misma letra del dividendo podria resultar que este exponente sea menor que aquel, en cuyo caso el exponente del cociente seria negativo, esto es, a^{-d} ¿á qué equivale esta cantidad?

Toda cantidad con exponente negativo equivale á una fraccion cuyo numerador es la unidad y el denominador la misma cantidad con el exponente positivo. Así $a^{-d}=\frac{1}{a^d}$.

En efecto. Sea la division $a^m: a^n$; el cociente será a^{m-n}. Si suponemos que $m<n$ y que la diferencia es d, tendremos que $n=m+d$, y por consiguiente $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+d}}$.

Ahora bien, el divisor a^{m+d} puede suponerse el producto de a^m por a^d: luego esta division se puede trasformar en $\frac{a^m}{a^m\times a^d}$, y simplificando será $\frac{a^m}{a^m\times a^d}=\frac{1}{a^d}$, conforme al enunciado.

De aquí se deduce que para multiplicar ó dividir cantidades iguales con exponentes negativos se siguen las mismas reglas que cuando son positivos.

Así, $a^{-m}\times a^{-n}=a^{-m-n}$; y $\frac{a^{-m}}{a^{-n}}=a^{-m+n}$.

95. ¿Una cantidad con exponente positivo se puede trasformar en otra con exponente negativo?

Sí; pues segun lo que acabamos de decir $\frac{1}{a^d}=a^{-d}$; y por consiguiente $1=a^d\times a^{-d}$: luego dividiendo los dos miembros de esta igualdad por a^{-d} resultará que $\frac{1}{a^{-d}}=a^d$; lo cual quiere decir que toda cantidad con exponente positivo es igual á una fraccion, cuyo numerador es la unidad y el denominador la misma cantidad con el exponente negativo.

96. ¿Qué aplicacion podemos hacer de esta teoría?

La de poder trasladar un factor del numerador al denominador y vice-versa, segun nos convenga.

97. ¿Cómo se efectúa la traslacion?

Si un factor se quiere trasladar del numerador al denominador teniendo exponente negativo, se hace que este en el denominador sea positivo, y al contrario si le tiene positivo en el numerador, en el denominador le tendrá negativo. Lo mismo sucederá si se quiere trasladar del denominador al numerador.

Ejemplos: 1.° Sea la fraccion $\frac{a^m b^{-n}}{c^s d^{-r}}$ en la que queramos trasladar el factor b^{-n} al denominador, y el factor d^{-r} al numerador. Siguiendo la regla expuesta será equivalente á $\frac{a^m d^r}{c^s b^n}$.

2.° Sea la fraccion $\frac{a^m b^n}{c^s d^r}$ en la cual queramos trasladar ó permutar los factores a^m y c^s tendremos que será igual á $\frac{c^{-s} b^n}{a^{-m} d^r}$.

98. ¿Qué significa la expresion $\frac{a}{0}$?

La expresion $\frac{a}{0}$ equivale al infinito, esto es, $\frac{a}{0}=\infty$.

En efecto, sabemos que si el denominador de una fraccion disminuye, el valor de dicha fraccion aumenta: luego si la disminucion es tal que llega á convertirse en *cero*, el valor de la fraccion será mayor que cualquiera cantidad finita ó limitada, y este valor es el que se llama infinito.

99. Y la expresion $\frac{a}{\infty}$ ¿qué significa?

La expresion $\frac{a}{\infty}$ es igual á *cero*, porque siendo $\frac{a}{0}=\infty$, $\frac{a}{\infty}$ será igual á *cero*.

100. ¿Y la expresion $\frac{0}{0}$?

La expresion $\frac{0}{0}$ es una cantidad cualquiera, puesto que cualquiera cantidad multiplicada por *cero* es igual á *cero*, y por consiguiente la expresion $\frac{0}{0}$ es una cantidad indeterminada.

101. Siempre que una fraccion se convierta en $\frac{0}{0}$ ¿qué deberá inferirse?

Cuando al simplificar una fraccion, ó por dar un valor determinado á alguna letra, la fraccion se reduzca á $\frac{0}{0}$ no debe inferirse desde luego que su valor es indeterminado, sino que existe algun factor comun en el numerador y denominador, el cual suprimido, nos dará el valor de la fraccion.

Ejemplos: 1.° Sea $\frac{5—5}{8—8}=\frac{0}{0}$; este valor es indeterminado, porque aunque podemos dar á esta expresion la forma de $\frac{(1—1)\times 5}{(1—1)\times 8}$, y suprimido el factor comun (1—1), resulte igual á $\frac{5}{8}$, este factor (1—1) se encuentra siempre en la forma $(a—a)=0$.

2.° Sea la fraccion $\frac{a^2—4a+3}{a^3—6a^2+11a—6}$, en que dando á a el valor de 3 resulta igual á $\frac{0}{0}$.

En esta fraccion se observa que los dos términos pueden dividirse por $a—3$, suprímase este factor comun á los dos y resultará $\frac{a—1}{a^2—3a+2}$ y dando ahora á a el mismo valor 3, tendrémos el valor de la fraccion que será $\frac{3—1}{9—9+2}=\frac{2}{2}=1$.

3.° Sea ahora la expresion $\frac{3a^2—5a—2}{2a^3—16}$ en que dando á a el valor 2, se convierte en $\frac{0}{0}$.

En este caso la expresion propuesta equivale á $\frac{7}{24}$; porque en sus dos términos se encuentra el factor comun $a-2$ (1), y suprimido resulta $\frac{3a+1}{2a^2+4a+8}$, en que dando á a el valor 2 tenemos $\frac{3.2+1}{2.4+4.2+8}=\frac{7}{24}$.

CAPÍTULO VI.

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

ARTÍCULO 1.°

Permutaciones.

102. ¿A qué se llaman permutaciones?

Se llaman permutaciones los grupos que pueden formarse con varios objetos tomados dos á dos, tres á tres, cuatro á cuatro, etc., y que solo se diferencian unos de otros en su colocacion. Así *ab*, *ba* son dos permutaciones de las letras *a* y *b*.

103. ¿Cómo se clasifican las permutaciones?

Si los objetos se toman de dos en dos se llaman permutaciones *binarias*, si de tres en tres, ternarias, si de cuatro en cuatro, cuaternarias, etc.

En el Algebra se consideran como objetos para las permutaciones las letras del alfabeto.

104. ¿Cómo se averigua el número de permutaciones binarias, ternarias, etc., que pueden hacerse con *m* letras?

(1) Siempre que dando á a un valor x convierta á un polinomio en *cero*, es prueba de que en aquel polinomio está el factor $(a-x)$, por eso en el caso presente el factor comun es $a-2$.

Para averiguar el número de permutaciones que pueden formarse con m letras, llamaremos P^{I} al número de permutaciones tomadas de 1 á 1; P^{II}, al de permutaciones tomadas de 2 á 2 ó binarias; P^{III}, al de permutaciones ternarias, etc., y tendremos que

$$P^{\text{I}}=m$$
$$P^{\text{II}}=m\times(m-1)$$
$$P^{\text{III}}=m\times(m-1)\times(m-2)$$
$$P^{\text{IV}}=m\times(m-1)\times(m-2)\times(m-3)$$
etc., etc., etc.

Así con cuatro letras, a, b, c, d, por ejemplo, se podrán formar cuatro permutaciones tomadas de una á una, que serán: a, b, c, d; tomadas de 2 á 2, ó binarias, se podrán formar 12; tomadas de 3 en 3, ó *ternarias*, 24, y así sucesivamente.

Haciendo mecánicamente estas permutaciones, tendrémos:

Tomando cada una de las letras y poniendo á su derecha las restantes las permutaciones binarias.

ab	*ba*	*ca*	*da*	
ac	*bc*	*cb*	*db*	=12
ad	*bd*	*cd*	*dc*	

Tomando cada permutacion *binaria* y colocando á su derecha cada una de las letras que faltan á la misma, las ternarias.

abc	*adb*	*bca*	*cab*	*cda*	*dba*	
abd	*adc*	*bcd*	*cad*	*cdb*	*dbc*	=24
acb	*bac*	*bda*	*cba*	*dab*	*dca*	
acd	*bad*	*bdc*	*cbd*	*dac*	*dcb*	

Por último, tomando las permutaciones ternarias y colocando á su derecha la letra que á cada una falta, resultarán las cuaternarias.

abcd	*adbc*	*bcad*	*cadb*	*cdab*	*dbac*	
abdc	*adcb*	*bcda*	*cabd*	*cdba*	*dbca*	=24
acbd	*bacd*	*bdac*	*cbad*	*dabc*	*dcab*	
acdb	*badc*	*bdca*	*cbda*	*dacb*	*dcba*	

Aplicaciones.

1.ª ¿De cuántos modos se puede escribir el producto *abcde* que tiene 5 factores?

Resolucion. Este problema equivale á averiguar el número de permutaciones quinarias que con estas letras se pueden efectuar, y por consiguiente tendrémos:

$$P^v = 5\times(5-1)\times(5-2)\times(5-3)\times(5-4)=5\times4\times3\times2\times1=120.$$

2.ª Hay 10 personas alrededor de una mesa ¿de cuántas maneras diferentes se pueden colocar?

Resolucion. $P^x = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=3628800.$

Artículo 2.º

Combinaciones.

105. ¿A qué se llaman combinaciones?

Combinaciones se llaman las permutaciones que cuando menos se diferencian en un objeto, ó letra, si estas se verifican con las letras del alfabeto.

Las combinaciones de m objetos ó letras consideradas como productos son todos diferentes.

106. ¿Cómo se clasifican las combinaciones?

Lo mismo que las permutaciones en *binarias, ternarias*, etcétera.

107. ¿Cómo se forman las combinaciones *binarias*, *ternarias*, etc., de m letras ú objetos?

Al formar las combinaciones debemos observar:

1.° Que cada una se ha de componer de 2, 3, etc., letras, segun sea *binaria*, *ternaria*, etc.

2.° Que dos de ellas cualesquiera se han de diferenciar cuando menos en una letra.

Y 3.° Que en ninguna se ha de hallar repetida una misma letra.

Para averiguar el número de combinaciones *binarias*, *ternarias*, etc., que se pueden formar con m letras, llamarémos C^1, al número de combinaciones de 1 á 1; C^2, al de *binarias*; C^3, al de *ternarias*, etc., y tendrémos:

$$C^1 = m$$

$$C^2 = \frac{m \times (m-1)}{1.2}$$

$$C^3 = \frac{m \times (m-1) \times (m-2)}{1.2.3.}$$

$$C^n = \frac{m \times (m-1) \times (m-2) \ldots\ldots \times (m-n+1)}{1.2.3. \ldots\ldots \times n}$$

De donde se deduce que habrá que dividir el número de permutaciones que con m letras se pueden formar por el producto de los números consecutivos hasta el n.

Así con las cuatro letras a, b, c, d, se podrán formar las combinaciones *binarias*, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd* y *cd*, total 6,

porque $C^2 = \frac{m \times (m-1)}{1.2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

Las combinaciones *ternarias* serán: *abc*, *abd*, *acd* y *bcd*: total, 4, porque $C^3 = \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1.2.3} = \frac{24}{6} = 4.$

Combinacion *cuaternaria* no habrá mas que una, porque $C^4 = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1.2.3.4} = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} = \frac{24}{24} = 1.$

Aplicaciones.

1.ª ¿Cuántos ambos se pueden formar con los 90 números de la lotería antigua?

Resolucion. Siendo los ambos combinaciones *binarias*, tendrémos aplicando la fórmula: $C^2=\frac{90\times89}{2}=\frac{8010}{2}=4005$.

2.ª ¿Cuántos ternos se pueden formar con los mismos 90 números?

Resolucion. Los ternos son combinaciones *ternarias*, y por lo tanto

$$C^3=\frac{90\times89\times88}{1\times2\times3}=\frac{704940}{6}=117490.$$

PARTE SEGUNDA.

CAPÍTULO PRIMERO.—ECUACIONES.

Artículo 1.°

Operaciones preliminares.

108. ¿Qué es ecuacion numérica y qué ecuacion literal?

Hemos dicho que se llama ecuacion la igualdad de dos cantidades en que entran una ó mas incógnitas; pues bien, si todas las cantidades conocidas están representadas por números particulares y determinados, la ecuacion se llama *numérica*, y si una ó mas de las cantidades conocidas está representada por letras, se llama *literal*.

Ejemplos.

Ecuacion literal........... $ax^3+5-ax=35+5x+3a^2$.
Ecuacion numérica....... $3x+4-8=5x-28$.

109. ¿Cuál es el valor de la incógnita?

El valor de la incógnita es el número particular que puesto en la ecuacion en lugar de dicha incógnita, la convierte en igualdad.

De esto se deduce que un problema estará resuelto en el momento que se conozca el valor de la incógnita ó incógnitas que contenga.

110. ¿Cuántas operaciones hay que hacer en una ecuacion ántes de resolverla?

Antes de resolver cualquiera ecuacion hay que hacer cuatro operaciones, que son:

1.ª *Quitar los denominadores.*
2.ª *Efectuar las operaciones indicadas.*
3.ª *Hacer la trasposicion de términos.*
Y 4.ª *La reduccion de los mismos.*

111. ¿Cómo se quitan los denominadores de una ecuacion? Cuando en una ecuacion hay términos fraccionarios, se quitarán los denominadores, esto es, se convertirán en enteros, multiplicando el numerador de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás, y las cantidades enteras por el producto de todos los denominadores, con lo cual quedan multiplicados todos los términos de la ecuacion por un mismo número, lo que no altera la ecuacion.

Ejemplo: $x^2+\frac{5}{3}-\frac{2x}{6}=\frac{4x}{5}-\frac{3}{10}+8.$

Para quitar estos denominadores multiplicaré x^2 por 3.6.5.10; el numerador 5, por 6.5.10; el numerador $2x$, por 3.5.10; el numerador $4x$ por 3.6.10; el numerador 3, por 3.6.5, y finalmente el entero 8 por 3.6.5.10 y tendrémos esta otra

$$900x^2+1500-300x=720+7200.$$

Cuando en los denominadores hay factores comunes es preferible hacer esta operacion por medio del *mínimo múltiplo comun*, que en el caso presente resultaria ser 30, y tendríamos la siguiente ecuacion mas simplificada que la anterior, á saber:

$$30x^2+50-10x=24x-9+240.$$

112. ¿Cómo se efectúan las operaciones indicadas? Cuando la incógnita se halla encerrada dentro de algun paréntesis, conviene sacarla fuera de él, practicando al efecto las operaciones necesarias por las reglas dadas en cada caso particular; lo mismo que las demás operaciones que se hallen indicadas.

Ejemplo. $4(x-3)+8x(x-2)=8x$.

Practicando las operaciones resultará: $4x-12+8x^2-16x=8x$.

113. ¿En qué consiste la trasposicion de términos y cómo se ejecuta?

La trasposicion de términos consiste en trasladar al primer miembro todos los términos en que se encuentre la incógnita, y al segundo todas las cantidades conocidas. Para efectuarla no hay que hacer mas que mudar el signo al término que haya de cambiar de miembro, esto es, si el término va á pasar del primero al segundo miembro y tenia en aquel el signo + se coloca en el segundo con el signo menos y vice-versa.

Ejemplo: Sea la ecuacion $30x^2+50-10x=24x+9+240$.

Haciendo la trasposicion será: $30x^2-10x-24x=-50+9+240$.

En efecto, pasar $24x$ del segundo miembro al primero equivale á restar de ambos la cantidad $24x$; luego en el primer miembro aparecerá con el signo — y desaparecerá del segundo; lo mismo podemos decir de otro término cualquiera, con lo cual no se altera la ecuacion.

114. ¿Cómo se hace la reduccion de términos?

Para hacer la reduccion se siguen las reglas dadas en la de términos semejantes.

Ejemplo: Sea la ecuacion anterior $30x^2-10x-24x=-50+9+240$.

Reducida tendrémos: $30x^2-34x=249-50=199$.

Ejemplos para hacer las cuatro operaciones.

1.° Sea la ecuacion: $\frac{5}{x}+9=\frac{3}{x-3}$.

Quitando denominadores será: $4(x-3)+9x(x-3)=3x$.

Efectuando las operaciones indicadas resulta: $4x-12+9x^2-27x=3x$.

Haciendo la trasposicion nos dará: $4x+9x^2-27x-3x=12$.

Reduciendo tendrémos: $9x^2-26x=12$.

2.° Sea la ecuacion $\frac{x}{3}+\frac{5x}{4}-2=\frac{3(x-5)}{5}+10$.

Quitando denominadores: $20x+75x-120=36(x-5)+600$

Practicando las operaciones indicadas: $20x+75x-120=36x-180+600$.

Haciendo la trasposicion: $20x+75x-36x=120-180+600$.

Reduciendo: $59x=540$.

Nota. Algunas veces resultan los dos miembros negativos, en cuyo caso pueden hacerse positivos sin que se altere la ecuacion, pues equivale á multiplicar ambos miembros por -1.

Así, $-2x=-20$ es equivalente á $2x=20$: pues multiplicando los dos miembros de la primera por -1, resulta — por — da + y 1 por $2x=2x$; y — por — da +, 1 por $20=20$.

Artículo 2.°

Clasificacion de las ecuaciones. Resolucion de las de primer grado con una incógnita.

115. ¿Qué clasificacion se hace de las ecuaciones?

Las ecuaciones por su grado se clasifican en de primer grado, de segundo, tercero, etc., y segun las incógnitas en de una, dos, tres, etc.

116. A qué se llama ecuacion de primer grado con una incógnita?

Ecuacion de primer grado con una incógnita es aquella que no tiene más que una cantidad desconocida y esta no tiene mayor exponente que uno, no hallándose en ningun denominador, ni bajo el signo radical: v. g. $3x+5=\frac{x+20}{2}$

117. A qué se llama ecuacion de 2.° grado con una incógnita?

Ecuacion de 2.° grado con una incógnita es aquella que no tiene desconocida más que una cantidad, sin mayor exponente que 2 y sin estar en ningun denominador, ni bajo ningun radical: v. g. $2x^2+3x-8=0$.

118. A qué se llama ecuacion de 3.° 4.° &. grado con una incógnita?

A la que no teniendo más que una cantidad desconocida, esta se halla elevada á la 3.ª 4.ª &. potencia, sin estar en ningun denominador, ni bajo ningun radical.

119. Y cuando la ecuacion tiene dos ó más incógnitas ¿cómo se conoce á que grado pertenece?

El grado de una ecuacion de dos ó más incógnitas se conoce por el que indica la mayor suma de los exponentes de todas las incógnitas en cada término, mientras no se hallen en ningun denominador, ni bajo ningun radical. Así, $3x^2y+5x^4y^2=1.000$ es de 6.° grado, porque la mayor suma de los exponentes de x é y es 6.

120. Y si la incógnita ó incógnitas estuviesen en algun

denominador ó bajo el signo radical ¿cómo conoceriamos el grado de la ecuacion?

En tal caso es necesario quitar los denominadores ó los radicales, y luego los exponentes de la incógnita nos darian á conocer el grado de la ecuacion.

Ejemplo: la ecuacion $\frac{8}{x}+12=\frac{80}{x+5}$ no puede decirse de que grado es; pero quitando los denominadores nos resulta $8x+40+12x^2+60x=80x$, que es de 2.° grado.

121. Cómo se resuelve una ecuacion de primer grado con una incógnita?

Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se quitan primero los denominadores, se efectúan luego las operaciones indicadas, despues se hace la trasposicion y reduccion de términos y la ecuacion quedará reducida á la fórmula $nx=b$; de donde se deduce que la incógnita será igual al segundo miembro dividido por el coeficiente de la incógnita en el primero, esto es, $x=\frac{b}{n}$.

Ejemplos:

1.° Sea la ecuacion $\frac{3x}{5}+\frac{2x}{4}+8=5x-40-\frac{3x}{2}$.

Quitando denominadores será: $24x+20x+320=200x-1600+60x$.

Haciendo la trasposicion por no haber operaciones indicadas tendrémos:

$$24x+20x-200x+60x=-1600-320.$$

Reduciendo términos será: $-96x=-1920$.

Cambiando los signos...... $96x=1920$, de donde

$$x=\frac{1920}{96}=20.$$

2.° Sea la ecuacion $\frac{3x}{2}+\frac{4x-2}{5}=\frac{10x}{2}-22$.

Quitando denominadores resulta: $30x+4\times(4x-2)=100x-440$.

Efectuando las operaciones indicadas: $30x+16x-8=100x-440$.

Trasponiendo: $30x+16x-100x=8-440$.

Reduciendo: $-54x=-432$.

Cambiando los signos: $54x=432$ de donde

$$x=\frac{432}{54}=8.$$

122. Cómo se prueba que el resultado obtenido es el verdadero?

Para comprobar el resultado obtenido, se sustituye el valor de la incógnita en lugar de esta, debiendo resultar una igualdad.

Haciendo aplicacion en el caso presente y sustituyendo en la ecuacion propuesta el valor obtenido 8 en lugar de x resultará:

$$\frac{3.8}{2}+\frac{4.8-2}{5}=\frac{10.8}{2}-22.\text{de donde}$$

$$12+6=40-22;\text{ ó sea } 18=18.$$

ARTÍCULO 3.°

Ecuaciones de 1.er grado con igual número de incógnitas.

123. Cómo se resuelven varias ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas?

Cuando hay un número cualquiera de ecuaciones con igual número de incógnitas, se elimina una de las incógnitas en las ecuaciones, resultando una ecuacion ménos y una incógnita ménos; luego se elimina otra incógnita entre las que quedan, y resultará otra ecuacion ménos y otra incógnita ménos; y así se continúa hasta llegar á una sola ecuacion con una sola incógnita, que se resuelve conforme á lo explicado en el artículo anterior. Por medio del valor de esta se encontrará fácilmente el de las demás.

124. Qué es eliminar una incógnita entre varias ecuaciones?

Eliminar una incógnita entre varias ecuaciones es deducir de estas otra en que no se encuentra dicha incógnita; pero sin cambiar de valores.

125. Cúantos métodos hay de eliminacion?

Tres: 1.° el de sustitucion; 2.° el de igualacion; y 3.° el de adicion ó sustraccion.

126. En qué consiste el método de sustitucion?

El método de sustitucion consiste en hallar el valor de una incógnita en la primera ecuacion y sustituir su valor en las demás.

EJEMPLOS:

1.° Sean primeramente las dos ecuaciones: $\begin{cases} x-y=49. \\ \dfrac{2x}{15}=\dfrac{3y}{17}. \end{cases}$

Despejando x en la primera ecuacion resulta $x=49+y$

Sustituyendo este valor en la segunda sera: $\dfrac{2\times(49+y)}{15}=\dfrac{3y}{17}$: en donde ya no se encuentra la incógnita x.

Si ahora queremos resolver esta ecuacion, que ya no tiene mas que una incógnita, aplicarémos la regla dada para estos casos, en la forma siguiente:

Quitando denominadores: $34\times(49+y)=45y$.

Efectuando operaciones indicadas: $1666+34y=45y$.

Haciendo la trasposicion y cambiando los signos será: $11y=1666$; de donde $y=\dfrac{1666}{11}=151\dfrac{5}{11}$.

Sustituyendo este valor en la primera ecuacion resultará: $x-151\dfrac{5}{11}=49$; de donde $x=49+151\dfrac{5}{11}=200\dfrac{5}{11}$.

Resultando finalmente que $\begin{cases} x=200\dfrac{5}{11}. \\ y=151\dfrac{5}{11}. \end{cases}$

2.° Sean ahora tres ecuaciones, á saber.

$$7x-y-z=120.\ (1.^a)$$
$$6y-2x-2z=120.\ (2.^a)$$
$$4z-4y-4x=120.\ (3.^a)$$

Despejando la incógnita z en la 1.ª tendrémos: $z=7x-y-120$.

Sustituyendo este valor en las otras dos, resultan: $\left.\begin{array}{l} 6y-2x-2\times(7x-y-120)=120 \\ 4\times(7x-y-120)-4y-4x=120 \end{array}\right\}$ en las cuales queda eliminada la incógnita z.

Para eliminar entre estas dos ecuaciones otra incógnita, conviene primeramente efectuar en ambas las operaciones indicadas, y resultarán estas otras:

$$6y-2x-14x+2y+240=120.$$
$$28x-4y-480-4y-4x=120.$$

Las cuales reducidas serán: $\left\{\begin{array}{l} 8y-16x=120.\ (a). \\ 24x-8y=600.\ (b). \end{array}\right.$

Despejando ahora x en la primera de estas ecuaciones, tendrémos:

$$8y+120=16x \text{ : de donde } \frac{8y+120}{16}=x.$$

Y sustituyendo su valor en la segunda tendrémos:

$24\times\frac{8y+120}{16}-8y=600$, en la cual queda tambien eliminada la incógnita x.

Resolviendo ahora esta ecuacion, que ya no tiene mas que una incógnita, resultará quitados los denominadores $24\times(8y+120)-128y=9600$; efectuando las operaciones indicadas, trasponiendo y reduciendo términos será: $64y=6720$, de donde $y=\frac{6720}{64}=105$.

Sustituyendo ahora el valor de y en la ecuacion (b), tendrémos:

$$24x-8.105=600\text{: de donde}$$
$$24x=1440, \text{ y } x=\frac{1440}{24}=60.$$

Sustituyendo finalmente los valores de x é y en la ecuacion (1), resultará la última, á saber: $7.60-105-z=120$: y resolviéndola: $z=195$.

De todo lo cual resulta que x vale 60; y, 105, y z, 195.

127. ¿En qué consiste el método de igualacion?

El método de igualacion consiste en despejar una misma incógnita en dos ecuaciones y luego formar otra ecuacion con sus valores.

Ejemplo: Sean las ecuaciones: $\begin{cases} 5x+8y=44 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$

Despejando x en las dos ecuaciones resultan estas otras

$$\left.\begin{array}{l} x=44-8y \\ x=\dfrac{6+2y}{3} \end{array}\right\} \text{De donde } 44-8y=\frac{6+2y}{3}; \text{ ecuacion en}$$

que queda eliminada la incógnita x.

Para resolverla se quitan los denominadores, se hace la trasposicion y reduccion y resulta que $y=3$, valor que sustituido en cualquiera de las ecuaciones en lugar de y nos dará para x el de 4.

Del mismo modo se podria haber despejado y en ambas ecuaciones y obtendríamos

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{44-5x}{8} \\ y=\dfrac{3x-6}{2} \end{array}\right\} \text{De donde } \frac{44-5x}{8}=\frac{3x-6}{2} \text{ y resolviéndola: } x=4.$$

Nota. Si fuesen mas de dos las ecuaciones, despues de despejada una incógnita se iria sustituyendo su valor sucesivamente en todas ellas hasta encontrar una sola ecuacion con una sola incógnita, y luego se procederia como en el método de sustitucion.

128. ¿En qué consiste el método de adicion ó sustraccion?

El método de adicion ó sustraccion consiste en hacer que el coeficiente de la incógnita que se quiere eliminar sea el mismo en ambas ecuaciones; para lo cual se multiplican todos los términos de cada ecuacion por el coeficiente de la incógnita en la otra, lo cual no altera la ecuacion, y despues se suman ó restan ordenadamente las dos ecuaciones, segun que los términos de la incógnita tengan diferente ó igual signo, esto es, si tienen diferente signo, se suman, y si igual, se restan, con cuya operacion quedará eliminada dicha incógnita.

Ejemplo: Sea las ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x-y=30. \\ 3x=7y. \end{matrix}\right\}$ Multiplicando todos los términos de la primera ecuacion por 3, coeficiente de x en la segunda, resultarán estas otras:

$\left.\begin{matrix} 3x-3y=90 \\ 3x \;=\; 7y \end{matrix}\right\}$ Restando ordenadamente estas dos ecuaciones por tener el mismo signo los dos términos en que se encuentra la x tendrémos: $3x-3y-3x=90-7y$: y como en el primer miembro de esta ecuacion se encuentra $3x$ con el signo *mas* y $3x$ con el signo *menos*, ambos se destruyen y queda reducida á.....$-3y=90-7y$, eliminada la x.

Resolviéndola resulta $y=22\,{}^1/_2$, y sustituyendo su valor en la primera ecuacion de las propuestas, tendrémos: $x-22\,{}^1/_2=30$, de donde $x=30+22\,{}^1/_2=52\,{}^1/_2$.

CAPÍTULO II.

Resolucion de problemas particulares y determinados de primer grado con una, dos ó mas incógnitas.

129. ¿Cuántas partes tiene la resolucion de todo problema?

La resolucion de todo problema tiene dos partes:

1.ª Plantearle, ó sea poner el problema en ecuacion.

2.ª Resolverle, esto es, hallar el valor de la incógnita ó incógnitas.

130. ¿Cómo se plantea un problema?

Para plantear un problema se suponen conocidas las incógnitas, se buscan las relaciones que existen entre estas y los datos del problema, se indican las operaciones que debieran hacerse para comprobar el resultado, de cuya indicacion nos resultarán una ó mas ecuaciones, quedando de este modo planteado el problema.

131. ¿Cómo se resuelve?
Para resolverle se practican las operaciones explicadas en el capítulo anterior.

EJEMPLOS.

1.° Preguntaron á un sugeto cuántos conejos tenia, y contestó: si á los que tengo les añades su 3.ª y 5.ª parte, y de ellos nos comiésemos media docena, nos quedarian 40 ¿cuántos tenia?

Llamemos x al número de conejos que dicho sugeto tenia, es evidente que

$$x+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}-6=40.$$

Para resolverla quitarémos los denominadores y tendrémos:

$$15x+5x+3x-90=600.$$

Trasponiendo y reduciendo resulta $23x=690$: de donde $x=\frac{690}{23}=30$.

2.° Tengo en el bolsillo tres clases de monedas, á saber: centenes, duros y pesetas: entre todas componen 36; de ellas son doble número de duros que de centenes y la quinta parte de la suma de ambas, de pesetas ¿cuántas monedas tengo de cada clase?

Sea x el número de centenes, será $x+2x+\frac{x+2x}{5}=36$.

Quitando denominadores tendrémos: $5x+10x+x+2x=180$.

Reduciendo: $18x=180$; de donde $x=\frac{180}{18}=10$: luego tengo 10 centenes, 20 duros y 6 pesetas.

3.° Dos estudiantes fueron al juego con igual cantidad de dinero, y habiendo perdido el 1.° la mitad de lo que llevaba, y el 2.° la cuarta parte, sacaron entre los dos 125 rs. ¿con cuánto dinero entraron en el juego?

Siendo x el dinero que cada uno entró, $2x$ será el que entre los dos llevaban, y restando de esta cantidad lo que pertdieron, que, segun el problema, fué $\frac{x}{2}$ el 1.° y $\frac{x}{4}$ el 2.°, tendrémos la ecuacion:

$$2x-\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=125.$$

Y resolviéndola será $x=100$, cantidad que cada uno llevó.

4.° Preguntóse á dos hermanos la edad que tenian y el mayor contestó: hace 12 años que la edad mia era doble que la de mi hermano, y hoy tengo 16 años; averiguad la de mi hermano.

Sea x la edad de este: hace 12 años seria $x-12$, y la del mayor $16-12$, y como la de este entonces era doble que la del otro será la ecuacion: $\frac{16-12}{2}=x-12$, de donde $x=14$, edad del hermano menor.

5.° Una prendera quiso rifar un relój y observó que si ponia á 5 rs. el billete perdia 60 rs. y si lo ponia á 6 ganaba 40, ¿cuánto valia el relój, y cuántos eran los billetes?

Sea x el número de billetes, $5x+60$ seria el valor del relój, segun la primera condicion: y $6x-40$, seria el valor tambien del relój, segun la segunda condicion: luego $5x+60=6x-40$.

Resolviendo resulta $x=100$, número de billetes, y 560 el valor del relój.

6.° En un jardin hay tres estátuas representando la primera el Verano, la segunda el Otoño y la tercera el Invierno: las del Verano y Otoño juntas pesan 20000 kilógramos; el peso de la del Invierno que es 6000 kilógramos la componen $^3/_4$ de la del Verano y $^1/_4$ de la del Otoño: ¿cuánto pesa cada una?

Resolviendo resulta que la estátua de Verano pesa 2000 kilógramos y la del Otoño 18000.

7.° Se reunieron tres estudiantes en una posada en la que se les sirvió un cordero, cuyo peso, quitando dos libras, habria sido una libra, más $^1/_3$, $^1/_4$ y $^1/_6$ de lo que pesaba. Despues de comido y movidos por la curiosidad quisieron averiguar el peso del esqueleto, resultando ser $^1/_2$ de $^2/_3$ de la mitad del todo. Se desea saber cuánto pesó el animal entero, cuánto el esqueleto y cuánto comió cada uno, en la suposicion de que el 1.° comiese como 2, el 2.° como 1 $^1/_2$ y el 3.° la mitad que el 1.° más un tercio de lo que comió el 2.°.

Resolviéndola resulta que el cordero pesó 12 libras; el esqueleto 2; y que el 1.° comió 4, el 2.° 3 y el 3.° otras tres libras.

8.° Preguntaron á un padre qué edad tenia su hijo y contestó: si del doble de su edad se resta el triplo de la que tenia 6 años há, resultará su edad actual. Cúal es esta?

Respuesta: 9 años.

9.° Hallar dos números cuya suma sea 25, y en que el menor sea al mayor como 2 : 3.

Respuesta: 10 y 15.

10. Un hombre tenia una porcion de cuartos; pero no se cuantos: solo sé que dando á A la mitad, á B la cuarta parte, á C la 8.ª y á D, la dozava, le quedan tres. Cuántos tenia?

Respuesta: 72.

11. Hay que repartir entre unos cuantos niños y niñas 37 naranjas: si á cada niño se dan 3 y 2 á cada niña sale la cuenta cabal; pero si se dan á cada niño 2 y 3 á cada niña faltan 4 naranjas. Cuántos eran los niños y cuántas las niñas?

Respuesta: 9 niños y 5 niñas.

CAPÍTULO III.

POTENCIAS Y RAICES.

Artículo 1.°

Potencias de los monomios.

132. A qué es igual la potencia n de un producto?

La potencia n de un producto es igual á la potencia n de todos sus factores.

Demostracion. Sea el producto abc: digo que la potencia n de abc, ó $(abc)^n = a^n\, b^n\, c^n$.

En efecto, $(abc)^n = abc \times abc \times abc \ldots\ldots$ n veces: y como esto es igual á $aaa........\times bbb........\times ccc........$ entrando cada factor n veces en el producto, resulta que será igual á $a^n \times b^n \times c^n = a^n b^n c^n$, conforme al enunciado.

133. Segun esto, cómo se eleva un producto, ó sea un monomio ó una potencia cualquiera?

Un producto ó un monomio se eleva á una potencia, elevando á dicha potencia todos los factores.

Ejemplos: 1.° Sea el producto ó monomio $(3anm)^4$, será igual á $81\,a^4n^4m^4$.

2.° Sea ahora $(2a^2b^3)^5$, será igual á $2^5\times(a^2)^5\times(b^3)^5=32\,a^{10}b^{15}$.

134. Qué signo deben llevar las potencias de los monomios?

Si la potencia es de grado par llevará el signo positivo cualquiera que sea el signo del monomio, y si de grado impar, el mismo signo del monomio

En efecto, $(a)^4=a^4$ porque $(a)^4=a.a.a.a=a^4$.

$(-a)^4=+a^4$ porque $(-a)^4=-a.-a.-a.-a=a^4$

$(a)^3=a^3$ porque $(a)^3=a.\ a.\ a.=a^3$.

$(-a)^3=-a^3$ porque $(-a)^3=-a.-a.-a=-a^3$.

135. A qué es igual la potencia de una fraccion?

La potencia de una fraccion es igual á la potencia del numerador dividida por la misma del denominador.

En efecto, $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{aaa}{bbb}=\frac{a^3}{b^3}$.

Luego para elevar un quebrado á una potencia cualquiera, se elevan sus dos términos á dicha potencia, y se divide la del numerador por la del denominador.

Artículo 2.°

Raices de los monomios.

136. Cómo se extrae una raiz cualquiera de un monomio?

Para extraer la raiz de un grado cualquiera de un monomio, se extrae la raiz del mismo grado de sus factores, para lo cual se extrae dicha raiz del coeficiente numérico, y el exponente de cada factor se divide por el índice de la raiz.

Si la raiz es de grado par, puede ser positiva y negativa, y si es de grado impar, tendrá el mismo signo del monomio.

En efecto, sea 1.° la $\sqrt{9a^4b^6}$, será igual á la $\sqrt{9}\times\sqrt{a^4}\times\sqrt{b^6}=\pm 3a^2b^3$, porque $\pm 3a^2b^3\times\pm 3a^2b^3=9a^4b^6$: luego (Aritmética 276) $\pm 3a^2b^3$ es la $\sqrt{9a^4b^6}$.

2.° Sea ahora la $\sqrt[3]{8a^6b^{12}}$, será igual á $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{b^{12}}=2a^2b^4$, porque $2a^2b^4\times 2a^2b^4\times 2a^2b^4=4a^4b^8\times 2a^2b^4=8a^6b^{12}$.

Si el coeficiente numérico no tiene raiz exacta, ó alguno de los exponentes no es divisible por el índice de la raiz, el monomio no tendrá raiz exacta, en cuyo caso se deja indicada la de aquellos factores que no la tengan exacta.

Así $\sqrt[3]{6a^5b^6}=\sqrt[3]{6a^2}\times ab^2=ab^2\times\sqrt[3]{6a^2}$.

En efecto, $6a^5b^6=6a^2a^3b^6$: luego su raiz cúbica será: $ab^2\times\sqrt[3]{6a^2}$.

137. ¿Cómo se extrae una raiz cualquiera de una fraccion?

Para extraer la raiz de una fraccion, se extrae la del mismo grado de sus dos términos y se divide la del numerador por la del denominador.

Así $\sqrt[5]{\dfrac{12a^3b}{20a^4b^2}}$ será igual á $\dfrac{\sqrt[5]{12a^3b}}{\sqrt[5]{20a^4b^2}}$

138. ¿Qué condiciones se requieren para que un monomio tenga raiz exacta?

Para que un monomio tenga raiz exacta se requiere: que el coeficiente numérico tenga dicha raiz exacta, y que los exponentes de todos los factores sean divisibles por el índice de la raiz. Cualquiera de estas condiciones que falte, el monomio no tendrá raiz exacta.

Algunas veces sucede que algunos de los factores del monomio tienen raiz exacta y otros no; en este caso se extrae la raiz de los factores que la tengan, y la de los otros se deja indicada, como lo hemos hecho en el número 136, último ejemplo.

139. ¿A qué se llama cantidad *imaginaria?*

Se llama cantidad *imaginaria* á la raiz de grado par de toda cantidad negativa.

Así $\sqrt[4]{-a}$, es *imaginaria*, puesto que ninguna cantidad negativa elevada á una potencia de grado par produce cantidad negativa, sino positiva.

ARTÍCULO 3.º

Potencias de los polinomios. Binomio de Nevvton.

140. ¿Cómo se eleva un polinomio á una potencia?

Para elevar un polinomio á una potencia cualquiera, examinarémos primeramente las potencias sucesivas de un binomio y de su exámen deducirémos la regla para las potencias de los polinomios.

Ya sabemos, (56, 57, 58 y 59), como se forman las 2.ª y 3.ª potencias de la suma y diferencia de dos cantidades, ó sea de los binomios; desarrollemos ahora la potencia m del binomio $(x+a)$, por ejemplo, y multipliquemos para fijar las ideas. cuatro binomios de la forma especial $(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d)$, en que todos tengan el primer factor comun y tendrémos:

$$(x+a)\times(x+b)\times(x+c)\times(x+d)=(x^2+ax+bx+ab)\times(x+c)\times(x+d)=(x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc)\times(x+d)=x^4+ax^3+bx^3+abx^2+cx^3+acx^2+bcx^2+abcx+dx^3+adx^2+bdx^2+abdx+cdx^2+acdx+bcdx+abcd.$$

Ordenando este producto con respecto á la letra x nos dará:

x^4+a	x^3+ab	x^2+abc	$x+abcd.$
$+b$	$+ac$	$+abd$	
$+c$	$+bc$	$+acd$	
$+d$	$+ad$	$+bcd$	
	$+bd$		
	$+cd$		

Observando este producto encontramos: 1.° que tiene cinco términos, es decir, uno mas que binomios hemos multiplicado: 2.° que los exponentes de la letra x son los números consecutivos decrecientes desde el 4, y 3.° que el coeficiente del primer término es la unidad; el del 2.° es la suma de las combinaciones que se pueden formar con los cuatro segundos factores de los binomios tomados de uno á uno; el coeficiente del 3.° es la suma de las combinaciones binarias de dichos factores; el del 4.° la suma de las combinaciones ternarias, y el quinto es la única combinacion cuaternaria que se puede formar con los dichos cuatro factores.

De todo lo cual se deduce: que, siguiéndose la misma ley sea cualquiera el número de binomios, podrá establecerse la misma forma en sus productos.

Ahora bien; si el segundo término fuese tambien el mismo en todos los binomios, resultaria la potencia m del binomio $(x+a)$, que, siendo la 4.ª, como en el caso anterior, tendria la siguiente forma:

x^4+a	x^3+a^2	x^2+a^3	$x+aaaa$ ó a^4.
$+a$	$+a^2$	$+a^3$	
$+a$	$+a^2$	$+a^3$	
$+a$	$+a^2$	$+a^3$	
	$+a^2$		
	$+a^2$		

ó en otro forma.................. $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

De la misma manera podríamos hallar la 5.ª, 6.ª, etc., potencias de dicho binomio, que es en lo que consiste la llamada fórmula del binomio de Newton, la cual se representa de una manera general en esta forma:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$

$$\frac{m(m-1)\times(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \dots\dots\dots a^m.$$

141. ¿Cómo se hallará por medio de esta fórmula una potencia cualquiera de un binomio?

Sustituyendo en lugar de las letras x, a, m los valores particulares que se den. Así, por ejemplo $(5+4)^6=5^6+6.4.5^5+15.4^2.5^4+20.4.^35^3+15.4.^45^2+6.4.^55+4^6$.

142. ¿Puede deducirse de esta fórmula alguna regla para elevar con brevedad un binomio á una potencia cualquiera?

Sí, porque cada término puede deducirse del anterior multiplicando el coeficiente de este por el exponente que tiene x en el mismo, y dividiendo el producto por el exponente de a aumentado en una unidad: y advirtiendo además que los términos equidistantes de los estremos tienen el mismo coeficiente, se simplifica la operacion sin mas que atender á los exponentes, que, como sabemos, van decreciendo en el primer término y creciendo en el segundo.

Ejemplo. Hallar por esta regla la 5.ª potencia de $(x+a)$.

Tendrémos que esta potencia constará de seis términos: el primero será x^5; el segundo se deduce de este multiplicando el coeficiente 1 por el exponente de x, que es 5 y dividiendo el producto por el exponente de a, que no existe en este caso, y nos dará $5x^4a$; el tercero se deduce del segundo multiplicando su coeficiente 5, por el 4 exponente de x y dividiendo el producto 20 por el exponente de a, que es uno aumentado en una unidad, esto es, por 2 y será $10x^3a^2$, el cuarto siguiendo la misma regla será $10x^2a^3$; el quinto tiene el mismo coeficiente que el segundo y es $5x^2a^4$, y el sexto a^5; por consiguiente $(x+a)^5=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$.

143. Sabido ya como se averiguan las potencias de los binomios, ¿podrá V. decirme cómo se hallan las de los polinomios?

Para elevar un polinomio á una potencia, se le considera desde luego como un binomio y se aplica despues la fórmula: así si el polinomio es $(a+b+c)$ y queremos elevarle á la 4.ª potencia, por ejemplo, harémos á $(b+c)=x$, y resultará el binomio $(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$.

Escribiendo ahora en lugar de x, x^2, x^3, x^4, sus valores que en este caso serian:

$x=b+c$.

$x^2=(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$.

$x^3=(b+c)^3=b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.

$x^4=(b+c)^4=b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$ resultará:
$(a+b+c)^4=a^4+4a^3(b+c)+6a^2(b^2+2bc+c^2)+4a(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$.

Y efectuando las operaciones indicadas resultará finalmente:
$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$.

Artículo 4.°

Raices de los polinomios.

144. ¿Cómo se extrae la raiz cuadrada de un polinomio?

Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio, se ordena primero con respecto á una letra; 2.° se extrae la raiz cuadrada del primer término, y tendrémos el primero de la raiz, el que elevado al cuadrado se resta del polinomio propuesto; 3.° el primer término del resto se divide por el duplo del primero de la raiz, y el cociente será el segundo de la raiz, el cual se escribe á la derecha del que ha servido de divisor; el binomio que resulta se multiplica por dicho segundo término, y el producto se resta del primer resíduo del polinomio propuesto; 4.° el primer término de este segundo resíduo se divide por el duplo del primero de la raiz, y el cociente será el tercer término; este se escribe á la derecha del duplo de toda la raiz hallada, y el trinomio que resulta se multiplica por dicho tercer término; su producto se resta del segundo resíduo y se continúa de la misma manera hasta llegar á un resto *cero*, ó cuyo primer término no sea divisible por el duplo del primero de la raiz. En este último caso será inexacta.

Ejemplo.

Extraer la

$\sqrt{9x^2-12xb+6xc+4b^2-4bc+c^2}$	$3x-2b$
$-9x^2$	$6x$ divisor: cociente $-2b$.
1.er res. $-12xb+6xc+4b^2-4bc+c^2$	$(6x-2b)\times-2b=-12xb+4b^2$, producto que se debe restar del 1.er resíduº
$+12xb\ldots\ldots\ -4b^2$	
2.° res.... » $+6xc-4bc+c^2$	$6x$, divisor; cociente $+c$
$-6xc+4bc-c^2$	$(6x-4b+c)\times c=6xc-4bc+c^2$, producto que se debe restar del segundo resíduo.
3.er res..................0.	

145. ¿Cómo se extrae la raiz cúbica de un polinomio?

Para extraer la raiz cúbica de un polinomio, se ordena con respecto á una letra y se extrae la raiz cúbica del primer término, y tendrémos el 1.° de la raiz: se divide el 2.° del polinomio por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y el cociente será el segundo de la raiz: el binomio que resulta se eleva al cubo y se resta este del polinomio propuesto: en seguida se divide el primer término del resíduo por el mismo divisor anterior y el cociente será el tercer término de la raiz y del mismo modo se continúa hasta concluir.

EJEMPLO.

Extraer la

$$\sqrt[3]{8x^6-36ax^5+66a^2x^4-63a^3x^3-33a^4x^2-9a^5x+a^6}\quad\Big|\; 2x^2-3ax+a^2$$

$$-8x^6+36ax^5-54a^2x^4+27a^3x^3$$

$12x^4$, divisor: cociente $-3ax$.

1.er res. $\quad +12a^2x^4-36a^3x^3-33a^4x^2-9a^5x+a^6$

$\quad -12a^2x^4+36a^3x^3+33a^4x^2+9a^5x-a^6$

El cubo de $2x^2-3ax$ que se ha de restar es $+8x^6-36ax^5+54a^2x^4-27a^3x^3$.

$12x^4$, divisor: cociente $+a^2$.

2.° res.............................0.

Elevado al cubo el trimonio de la raiz en la forma que vamos á explicar nos dá por segundo resíduo *cero*.

Observaciones. 1.ª El 2.° divisor debe ser el triplo del cuadrado de la raiz hallada; pero como solo se ha de dividir por el primer término, puede servir el mismo anterior, dándonos el cociente a^2.

2.ª La raiz obtenida $2x^2—3ax+a^2$, se eleva al cubo, para lo cual se considera este trinomio como un binomio, cuyo primer término es $(2x^2—3ax)$ y el 2.° $+a^2$: el cubo de este binomio es igual al cubo del primer término, *que ya le tenemos restado*, MAS el triplo del cuadrado del 1.° por el 2.°, que en este caso es $12a^2x^4—36a^3x^3—27ax^4$, MAS el triplo del primero por el cuadrado del 2.° que es igual á $—6a^4x^2—9a^5x$, MAS el cubo del 2.°, que es a^6: de donde resulta para restar, mudados los signos $—12a^2x^4+36a^3x^3+33a^4x^2+9a^5x—a^6$.

146. ¿Cómo se extrae la raiz M de un polinomio?

Para extraer la raiz M de un polinomio, se ordena con respecto á una letra, se extrae la raiz M del primer término, con lo que tendrémos el primer término de la raiz; se divide luego el segundo término del polinomio por m veces la potencia $m—1$ del primero de la raiz, y el binomio que resulte se eleva á la potencia M; se resta esta potencia del polinomio propuesto, y el primer término del resto se divide por el mismo divisor anterior, y el cociente será el tercero de la raiz, y así se continúa hasta llegar á un resíduo *cero*, ó cuyo primer término no sea divisible por dicho divisor, en cuyo caso no será exacta.

EJEMPLO.

Extraer la	
$\sqrt[4]{16x^8—32x^6bc+24x^4b^2c^2—8x^2b^3c^3+b^4c^4}$	$2x^2—bc$ raiz.
$—16x^8+32x^6bc—24x^4b^2c^2+8x^2b^3c^3—b^4c^4$	$32x^6$, divisor, como cúadruplo del cubo de $2x^2$.
0	

Hecha la division del segundo término por este divisor, nos da de cociente $—bc$. Elevado el binomio $2x^2—bc$ á la cuarta potencia resulta $16x^8—32^6bc+24x^4b^2c^2—8x^2b^3c^3+b^4c^4$, cuya potencia se ha de restar del polinomio propuesto, resultando *cero* de resíduo.

147. ¿Se puede saber si un polinomio tiene raiz M exacta?

No puede darse regla fija para saberlo; pero para que sea exacta debe verificarse cuando menos que el 1.° y último términos, despues de ordenados la tengan exacta, y que el primer término de cada resíduo sea divisible por m veces la potencia $m—1$ del primer término de la raiz.

CAPÍTULO IV.

Cantidades radicales.

148. ¿A qué se llama cantidad radical?

Llamamos cantidad radical á toda cantidad colocada bajo el signo $\sqrt{\ }$, ó sea la raiz indicada de toda cantidad; v. g. $\sqrt[3]{ab}$, es una cantidad radical.

149. ¿Cuándo se llaman semejantes las cantidades radicales?

Cuando teniendo el mismo índice constan de la misma parte literal debajo del radical. Así $\sqrt{ab}$, $5\sqrt{ab}$, $8\sqrt{ab}$, son semejantes.

150. ¿Cómo se suman las cantidades radicales?

Si no son semejantes solo pueden dejarse indicadas; pero si son semejantes se pueden reducir á una sola sumando las cantidades que esten fuera del radical y tengan el mismo signo.

Así, $5\sqrt[3]{xa^2}+4\sqrt[3]{xa^2}=(5+4)\sqrt[3]{xa^2}=9\sqrt[3]{xa^2}$.

$3\sqrt[4]{an}+8\sqrt[4]{an}-5\sqrt[4]{an}-2\sqrt[4]{an}=11\sqrt[4]{an}-7\sqrt[4]{an}=4\sqrt[4]{an}$.

151. ¿Cómo se restan las cantidades radicales?

Si no son semejantes, solo pueden dejarse indicadas; pero si son semejantes, se restan las cantidades que esten fuera del radical.

Así, $8\sqrt[3]{ab}-6\sqrt[3]{ab}=(8-6)\sqrt[3]{ab}=2\sqrt[3]{ab}$.

$3\sqrt{nm}-7\sqrt{nm}=-4\sqrt{nm}$.

152. ¿Cómo se multiplican dos cantidades radicales?

Si tienen el mismo índice, se multiplican las cantidades que están debajo de los signos radicales y el producto se pone debajo del mismo radical; mas si tienen distinto índice, se reducen á un índice comun; con lo cual queda la cuestion reducida al caso anterior.

153. ¿Y cómo se reducen cantidades radicales de diferente índice á un índice comun?

Se multiplican el índice de cada radical y el exponente de la cantidad que esté debajo por el producto de los índices de los demás radicales, con cuya operacion no se altera el valor del radical.

EJEMPLOS.

1.° Reducir á un índice comun los radicales $\sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}$.

Multiplicarémos por 12 el primero, por 8 el 2.° y por 6 el 3.° y tendrémos: $\sqrt[24]{a^{12}}, \sqrt[24]{b^8}, \sqrt[24]{c^6}$ que tienen todos el mismo indice 24.

2.° Reducir á un índice comun los radicales $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{b^3}, \sqrt[5]{c^2}$.

Tendrémos: $\sqrt[60]{a^{40}}, \sqrt[60]{b^{45}}, \sqrt[60]{c^{24}}$.

EJEMPLOS DE MULTIPLICACION.

1.° $5\sqrt{3a^2b}\times 8\sqrt{4a^3b^2n}=40\sqrt{12a^5b^3n}$.

2.° $4\sqrt{2a^3}\times 3\sqrt[3]{5ab^2}=4\sqrt[6]{8a^9}\times 3\sqrt[6]{25a^2b^4}=12\sqrt[6]{200a^{11}b^4}$.

154. ¿Se pueden simplificar las cantidades radicales?

Cuando en el índice y en el exponente de la cantidad radical exista algun factor comun se puede suprimir dicho factor, ó sea dividiendo el índice y el exponente por el mismo divisor, con cuya operacion tampoco se altera el valor del radical.

EJEMPLOS.

1.° Sea la cantidad $\sqrt[12]{a^6b^4}$; será igual á $\sqrt[6]{a^3b^2}$.

2.° Sea $\sqrt[15]{a^5b^{10}}$, será igual á $\sqrt[3]{ab^2}$.

155. ¿Cómo se dividen dos cantidades radicales?

Si tienen un índice comun, se dividen las cantidades que están debajo de los signos y al cociente se le pone el mismo signo. Si tienen diferente índice, se reducen á un índice comun y la cuestion queda reducida al caso anterior.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{\sqrt{8ab}}{\sqrt{4a}}=\sqrt{\frac{8ab}{4a}}=\sqrt{2b}.$

2.° $\frac{\sqrt[5]{a^2b^3}}{\sqrt[5]{2b^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^2b^3}{2b^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^2b}{2}}.$

3.° $\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[5]{nm}}=\frac{\sqrt[15]{a^5b^5}}{\sqrt[15]{n^3m^3}}=\sqrt[15]{\frac{a^5b^5}{n^3m^3}}.$

156. ¿Cómo se eleva á una potencia una cantidad radical? Elevando á dicha potencia la cantidad que se halle debajo del signo.

Así, $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^2=\sqrt[3]{a^2b^2}$; $\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3=\sqrt[5]{a^{12}}.$

157. ¿Cómo se extraen las raices de las cantidades radicales?

Se multiplican los dos índices y se pone la cantidad misma bajo el radical con un índice igual al producto de ambos, y se simplifica si se puede.

EJEMPLOS.

1.° ¿Cuál es la $\sqrt[3]{}$ de la $\sqrt{ab}$?

Respuesta: $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}=\sqrt[6]{ab}.$

2.° ¿Cuál es la $\sqrt[5]{}$ de la $\sqrt[3]{a^5}$?

Respuesta: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[15]{a^5} = \sqrt[3]{a}$.

3.ª ¿Cuál es la $\sqrt[4]{\ }$ de la $\sqrt[3]{a^2}$?

Respuesta: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[6]{a}$.

Nota. Si se hubiese de extraer de un número cualquiera la raiz cuyo índice sea un número compuesto, se extraerán sucesivamente las raices que indiquen sus factores simples. Así la raiz 9.ª de un numero equivale á la raiz cúbica de su raiz cúbica: la raiz 15.ª de un número es igual á la raiz 5.ª de la raiz cúbica, y la raiz 12.ª será igual á la raiz cúbica de su raiz cuarta, ó sea la raiz cúbica de la raiz cuadrada de la raiz cuadrada.

CAPÍTULO V.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Artículo 1.º

Ecuaciones completas.

158. Qué es ecuacion de 2.º grado?

Se llama ecuacion de segundo grado aquella en que el mayor exponente de la incógnita es 2. Así, $ax^2+bx=0$, es de 2.º grado.

159. Cómo se clasifican las ecuaciones de segundo grado?

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas é incompletas. Es completa cuando además del término ó términos en que la incógnita lleva el exponente 2, hay otro ú otros en que se halla la misma incógnita con el exponente 1, y uno ó más términos conocidos: v. g. $ax^2+bx+15=0$, es una ecuacion completa de segundo grado.

Es incompleta la ecuacion de 2.° grado cuando carece de términos en que el exponente de la incógnita es 1, ó de términos conocidos. Así las ecuaciones $ax^2+bx=0$; y $ax^2+n=20$, son incompletas de 2.° grado.

160. Qué forma toman las ecuaciones completas de 2.° grado?

Las ecuaciones completas de segundo grado, despues de reducidas, ó sea despues de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas, y la trasposicion y reduccion de términos, toman la forma siguiente: $ax^2+bx+c=0$.
ó dividiendo ambos miembros por a, resultará esta otra:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

y haciendo para mayor sencillez $\frac{b}{a}=m$ y $\frac{c}{a}=n$, esta otra:

$$x^2+mx+n=0.$$

Las cantidades a, b, c, m y n se suponen conocidas.

161. Cómo se resuelve una ecuacion completa de segundo grado despues de tomar la forma anterior?

Toda ecuacion completa de segundo grado despues de reducida á la forma $x^2+mx+n=0$, se puede resolver por varios métodos, á saber: 1.° *la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo;* $\pm$ *la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, ménos el último término; es decir que* $x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{2^2}-n}$.

2.° *La incógnita es tambien igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado* $\pm$ *la raiz cuadrada del cuadrado de este coeficiente, ménos el cuádruplo del producto de los términos extremos, partido todo por el duplo del coeficiente del primero, es decir*, que

$$X=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4.1.n.}}{2m.}$$

Demostracion del primer método. En efecto, si en la ecuacion $x^2+mx+n=o$, pasamos n al segundo miembro, resultará esta otra:

$$x^2+mx=-n.$$

Observemos el primer miembro de esta ecuacion y encontrarémos que se compone de los dos primeros términos del cuadrado de $\left(x+\frac{m}{2}\right)$, cuyo cuadrado sabemos que es $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=x^2+mx+\frac{m^2}{2^2}$: luego si á los dos miembros de la ecuacion propuesta añadimos la misma cantidad $\frac{m^2}{4}$, no se alterará la ecuacion y tendrémos:

$$x^2+mx+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}-n.$$

y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros será

$x+\frac{m}{2}=\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$; y pasando el término $+\frac{m}{2}$ al segundo miembro resultará finalmente $x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$, que es lo que se queria demostrar.

Demostracion del segundo método. Sea ahora la ecuacion primitiva

$$ax^2+bx+c=0,$$

en la que dividiendo por a los dos miembros, resulta, segun hemos visto, esta otra

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Sustituyamos ahora en la fórmula que acabamos de encontrar por el primer método, en lugar de m, su igual $\frac{b}{a}$ y en lugar de n su igual $\frac{c}{a}$, y tendrémos:

$$X=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}: \text{ y}$$

efectuando la resta indicada que está debajo del radical, será:

$$X=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{ab^2}{4a^3}-\frac{4a^2c}{4a^3}}:$$

Simplificando los dos quebrados que se hallan debajo del radical, resulta esta otra ecuacion

$$X=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ y}$$

extrayendo desde luego la raíz cuadrada del denominador tendrémos finalmente

$$X=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ que es lo que se queria demostrar.

Ejemplos prácticos.

1.° Resolver por el primer método la ecuacion
$x^2-6x-7=0$

Tendrémos $X=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm\sqrt{16}=3\pm4$: de donde

$$X=3+4=7$$
$$X=3-4=-1$$

lo cual quiere decir que toda ecuacion de segundo grado completa tiene dos raíces, y por consiguiente la incógnita dos valores. Las raíces pueden ser *reales* ó *imaginarias*, comensurables ó incomensurables, positivas ó negativas, lo cual depende de los coeficientes del segundo término.

2.° Resolver por el mismo método la ecuacion

$x^2-5x+6=0$. Tendrémos:

$$X=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}: \text{ de donde}$$

$$X={}^5/_2+{}^1/_2={}^6/_2=3$$

$$X={}^5/_2-{}^1/_2={}^4/_2=2$$

3.ª Resolver por el mismo método la ecuacion

$x^2-x-1=0$. Tendrémos.

$$X=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}: \text{de donde}$$

$$X=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$X=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

4.° Resolver por el 2.° método la ecuacion $2x^2+7x+3=0$. Tendrémos:

$$X=\frac{-7\pm\sqrt{49-4.3.2}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-7\pm5}{4}$$

de donde

$$X=-{}^2/_4=-{}^1/_2$$

$$X=-{}^{12}/_4=-3.$$

5.° Resolver por el 2.° método la ecuacion $9x^2-55x+76=0$.

Tendrémos: $X=\frac{55\pm\sqrt{55^2-4.9.76}}{18}=\frac{55\pm\sqrt{3025-2736}}{18}=$

$\frac{55\pm\sqrt{289}}{18}=\frac{55\pm17}{18}$: de donde

$$X=\frac{55+17}{18}=\frac{72}{18}=4$$

$$X=\frac{55-17}{18}=\frac{38}{18}=2\,{}^1/_9.$$

6.° Resolver por el 2.° método la ecuacion $x^2-2x-24=0$.

Tendrémos: $X=\frac{2\pm\sqrt{4+4.24}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}$ de donde

$$X=\frac{2+10}{2}=\frac{12}{2}=6.$$

$$X=\frac{2-10}{2}=\frac{-8}{2}=-4.$$

Artículo 2.°

Ecuaciones incompletas.

162. Qué formas afectan las ecuaciones incompletas de 2.° grado?

Las ecuaciones incompletas de 2.° grado despues de reducidas toman las dos formas siguientes:

1.ª $ax^2+bx=0$. 2.ª $ax^2+c=0$.

En efecto, si en la fórmula de la ecuacion completa hacemos $b=0$, ó $c=0$, resultarán: 1.° $ax^2+0x+c=0$; ó sea $ax^2+c=0$; y 2.° $ax^2+bx+0=0$, ó sea $ax^2+bx=0$.

163. Cómo se resuelve la ecuacion incompleta de la forma $ax^2+bx=0$?

Dividiendo los dos miembros por a, resultará: $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{0}{a}=0$: ó en otra forma.

$$X\left(x+\frac{b}{a}\right)=0.$$

Ahora bien si $x=0$, el producto anterior será tambien *cero*, y si $x+\frac{b}{a}=0$, dicho producto será tambien *cero*, únicos casos en que puede resultar *cero;* pero de $x+\frac{b}{a}=0$, puede deducirse esta otra $x=-\frac{b}{a}$, de donde se saca que en esta ecuacion uno de los valores de x es *cero*, y el otro es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo, dividido por el coeficiente del primero.

Tambien podriamos deducir estos valores de la fórmula general para la resolucion de las ecuaciones completas, pues haciendo aplicacion de ella, tendriamos siendo $c=0$,

$$X=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b+b}{2a}\text{: de donde}\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+b}{2a}=\dfrac{0}{2a}=0. \\ x=\dfrac{-b-b}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$$

464. Cómo se resuelve la ecuacion incompleta de la forma $ax^2+c=0$?

Dividiendo ambos miembros por a resultará: $x^2+\frac{c}{a}=0$; y trasladando $\frac{c}{a}$ al segundo miembro resulta: $x^2=-\frac{c}{a}$, y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros tendrémos:

$$\pm x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ó haciendo $b=0$, y aplicando la fórmula de las ecuaciones completas, nos daría el mismo resultado. Así tendriamos que

$$X = \frac{\pm\sqrt{-4ac}}{2a} \text{ ó en otra forma } X = \pm\sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}}$$

$$= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Tambien esta tiene dos valores y de signo contrario.

Ejemplos.

1.° Resolver la ecuacion $5x^2+7x=0$.

Resultados: 1.° $x=0$; 2.° $x=\frac{-7}{5}$.

2.° Resolver la ecuacion $8x^2-24x=0$.

Resultados: 1.° $x=0$; 2.° $x=\frac{24}{8}=3$.

3.° Resolver la ecuacion $3x^2+8=0$.

Resultados: 1.° $x=+\sqrt{\frac{8}{3}}$; 2.° $x=-\sqrt{\frac{8}{3}}$.

4.° Resolver la ecuacion $x^2-25=0$.
Resultados: 1.° $x=5$; 2.° $x=-5$.

CAPÍTULO VI.

Resolucion de algunas cuestiones sobre la regla de interés.

Dijimos en la *Aritmética* (344) lo que se entendia por regla de interés y casos que podian ocurrir en su resolucion; vamos ahora, ampliando aquellos conocimientos, á deducir algunas fórmulas para averiguar las diferentes cantidades que en dichas cuestiones se pueden desconocer. Sea la primera CUESTION la siguiente:

Dado el capital, el tiempo que está puesto á interés simple y el tanto por ciento que ha de ganar, hallar la suma que componen al cabo de un tiempo determinado el capital y los intereses juntos.

Resolucion. Llamemos C al capital, T al tiempo, R el interés de un real (ó unidad á que se refiera el capital) en cada año y S la suma que buscamos.

Dirémos: si la unidad nos da R de interés cada año, el capital C nos dará CR: luego en T años nos dará CRT: añadiendo ahora estos intereses al primitivo capital C, tendrémos que

$$S=C+CRT.$$

De esta fórmula podemos sacar los siguientes valores de C, R y T, á saber:

$$C=\frac{s}{1+rt}; \ T=\frac{s-c}{cr}; \text{ y } R=\frac{s-c}{ct}.$$

En efecto, de la ecuacion $s=c+crt$, pasando c al primer miembro, resulta que $s-c=crt$ y dividiendo los dos miembros de esta por c será $\frac{s}{c}-\frac{c}{c}=rt$; pero como $\frac{c}{c}=1$, la ecuacion será $\frac{s}{c}-1=rt$ y por consiguiente $\frac{s}{c}=1+rt$; ecuacion que quiere decir que $1+rt$ es el cociente de dividir s por c: luego si dividimos s por este cociente, tendrémos el divisor c: luego

$$C=\frac{s}{1+rt}.$$

De la misma ecuacion resulta dividiendo por t los dos miembros que $\frac{s}{t}=\frac{c}{t}+cr$, y pasando al primer miembro la cantidad $\frac{c}{t}$ resulta que $\frac{s-c}{t}=cr$: luego $t=\frac{s-c}{cr}$.

Por la misma razon y siguiendo el mismo procedimiento tendrémos que $r=\frac{s-c}{ct}$.

Apliquemos las fórmulas al caso siguiente:

Un negociante ha prestado 15600 rs. al 8 por 100 cada año; desea saber cuanto tendrá que cobrar al cabo de cinco años por el capital y los intereses caidos á interés simple.

Segun la fórmula $s=c+crt$ tendrémos:

$$s=15600+15600\times0'08\times5=21840.$$

Supongamos ahora que queremos averiguar cual es el capital que nos ha dado este resultado en iguales condiciones y aplicando la fórmula $c=\frac{s}{1+rt}$, tendrémos:

$$c=\frac{21840}{1+0'08\times5}=15600.$$

Si fuese desconocido el tiempo, aplicariamos la fórmula: $t=\frac{s-c}{cr}$ y tendriamos:

$$t=\frac{21840-15600}{15600\times0'08}=5.$$

Finalmente, si quisiésemos averiguar el interés, aplicariamos la fórmula $r=\frac{s-c}{ct}$ y tendriamos $r=\frac{21840-15600}{15600\times5}=0'08$, interés producido por la unidad: luego el tanto por ciento será 8.

Cuestion. 2.ª *Dado un capital, el tiempo que está puesto á réditos y el interés anual, hallar cuánto importa al cabo de dicho tiempo el capital junto con los intereses á interés compuesto.*

Resolucion. En la Aritmética (349) expusimos la regla y fórmula para resolver esta cuestion, que aquí nos proponemos demostrar.

Sea C el capital, R el interés de la unidad cada año, T el tiempo y S la suma del capital é interés al cabo de dicho tiempo.

En este supuesto $1+r$ será lo que al cabo del primer año se deberá por una unidad.

Para hallar lo que al fin del 2.° año se deberá por dicha unidad y sus intereses á interés compuesto, consideraremos que á principios de este 2.° año el capital puesto á réditos es $1+r$: luego tendrémos la proporcion $1 : 1+r :: 1+r : (1+r)^2$, cuyo cuarto término es lo que se deberá á fines del segundo año.

Haciendo esta misma consideracion para cada uno de los años siguientes hallarémos que en el mismo supuesto será $(1+r)^3$ lo que se deberá al cabo del tercer año, y que por consiguiente al cabo de T años la suma del capital 1 y de sus intereses á interés compuesto será $(1+r)^t$: luego si el capital es C será $C\times(1+R)^t$, puesto que diriamos si 1 se convierte en $(1+R)^t$, C se convertirá en $c\times(1+r)^t$, esto es, $1 : (1+r)^t :: c : c\times(1+r)^t$ luego

$$s=c\times(1+r)^t.$$

De aquí se deduce que $c=\dfrac{s}{(1+r)^t}$, fórmula que sirve para hallar el capital;

que $(1+r)^t=\dfrac{s}{c}$ y por consiguiente $1+r=\sqrt[t]{\dfrac{s}{c}}$ y

$$r=\sqrt[t]{\frac{s}{c}}-1.$$

Apliquemos estas fórmulas al caso siguiente: *Un comerciante prestó á otro la cantidad de 2000 rs. por 5 años al 4 p$^0/_0$ de interés compuesto; cuánto debe percibir al fin de los cinco años por el capital y los intereses?*

Segun la fórmula será $S = 2000 \times (1'04)^5=2413'3066$.

Si hubiésemos de hallar el capital que con las mismas condiciones se ha convertido en 2413'3066 rs., aplicaríamos la fórmula $c=\dfrac{2413'3066}{(1'04)^5}=2000$

Si hubiéramos de averiguar el tanto por 100 de imposicion, hallaríamos el tanto que corresponde á la unidad por la fórmula $r=\sqrt[5]{\frac{2413'3066}{2000}}=0'04$: y multiplicando esta cantidad por 100, tendrémos que el tanto % seria igual á 4, porque $0'04 \times 100=4$.

CAPÍTULO VII.

Aplicacion de los conocimientos expuestos á la resolucion de problemas particulares.

1.° Cuántas permutaciones binarias, ternarias y cuaternarias se pueden hacer con doce letras?

2.° De cuántas maneras diferentes se pueden colocar las seis estátuas que hay en el paseo de los reyes ó del Príncipe de Vergara?

3.° Habiendo en una habitacion nueve cuadros, se desea saber cuántas colocaciones diferentes se les puede dar.

4.° Cuántas combinaciones binarias, ternarias, cuaternarias y quinarias se pueden formar con los 90 números de la lotería primitiva?

5.° Cuántas combinaciones ternarias se pueden formar con las 28 letras del alfabeto?

6.° Teniendo Pedro 60 años y su hijo Cayo 15, se pregunta cuántos tendrá el padre para que su edad sea doble que la del hijo. Res.=90.

7.° Alejandro Magno acometió al ejército de Darío y lo derrotó matándole la 4.ª parte de los soldados que llevaba y dispersándole 42,000, le quedaron dos quintas partes; se desea saber qué número de soldados contaba Darío al principiar la batalla. Res. 120,000.

8.° José y Antonio entraron en una librería á comprar libros: José empleó 26 duros y Antonio 44: contaron despues el dinero que les quedaba y se encontró que el de José era el cuádruplo del de Antonio. Se desea saber cuánto dinero tenia cada uno en la suposicion de que ambos entrasen el mismo. Res. José 24; Antonio 6.

9.° Dícese que la mitad del ejército de Napoleon era de Franceses; la 4.ª parte de Holandeses, la 6.ª de Alemanes, y que á estos se le agregaron 4000 Italianos: se desea saber de cuántos hombres se componia aquel ejército? Res. 48000.

10.° Entre tres hermanos cuentan 140 años de edad; el 1.° tiene 12 años mas que el 2.° y este 18 mas que el 3.°. ¿Cuántos años tiene cada uno? Res. 1.° 60; 2.° 48, 3.° 30.

11. He recibido en mi taller un oficial holgazan, y con el fin de estimularle, le ofrezco 15 reales cada dia que trabaje, con la condicion de que el dia que no trabaje me dará él 8 rs.: á los 15 dias le ajusté la cuenta y alcanzó 110 rs. ¿cuántos dias trabajó? Res. 10.

12. De dos jugadores el mas diestro ha puesto en cada juego 12 rs. contra 8; despues de 10 juegos, el menos diestro ha tenido que pagar 20 rs.; ¿cuántos juegos ganó el 1.°? Res. 7.

13. Un sugeto tenia una porcion de cuartos y dando á A la mitad; á B la cuarta parte; á C la octava, y á D la dozava, aun le quedaron tres cuartos: cuántos cuartos tenia? Res. 72.

14. Hay que repartir 37 cuartos entre varios niños y niñas; si se dan á cada niño 3 cuartos y 2 á cada niña, no falta nada; pero si se dan 3 á cada niña y 2 á cada niño sobran 4; cuántos eran los niños y cuántas las niñas? Res. 9 niños y 5 niñas.

15. Pedro dá al primer pobre que encuentra $^1/_6$ de los cuartos que lleva y 4 mas; al 2.° $^1/_6$ de los que le quedan y 8 mas; al 3.° $^1/_6$ de los que le quedan y 12 mas, y así sucesivamente va dando la sexta parte de los que le quedan y 4 mas que al anterior hasta quedarse sin ninguno, resultando que todos los pobres habian recibido la misma cantidad; se desea saber cuántos eran los pobres y cuántos cuartos llevaba Pedro. Res. 5 pobres y 24 cuartos.

16. Hallar dos números cuya suma sea 8 y la diferencia de sus cuadrados 16. Res. 3 y 5.

17. Un niño compra manzanas y le dan 10 por un cuarto; compra peras y le dan 25 por 2 cuartos; entre peras y manzanas ha comprado 100 que le han costado $9^1/_2$ cuartos;

cuántas peras y cuántas manzanas há comprado? Res. 75 manzanas, 25 peras.

18. Hay en una bodega dos cubas de vino de igual cabida; de la una se han sacado 34 cántaras y de la otra 80, quedando en la 1.ª doble número que en la segunda: ¿cuántas cabe cada una? Res. 126.

19. Una mula y un asno marchaban cargados de sacos de cebada, y la mula dijo al asno: si te doy uno de mis sacos llevarás tantos como yo, pero si tú me das uno de los tuyos, llevaré dos veces que tú: cuántos llevaba cada uno? Res. 7 la mula y 5 el asno.

20. Pedro y Juan tienen entre ambos 36 pesetas y han perdido al juego 10: Pedro ha perdido la 3.ª parte de lo que tiene y Juan la 5.ª parte: se desea saber cuántas pesetas tenia cada uno y cuántas perdió. Res. Pedro tenia 21 pesetas y perdió 7 y Juan tenia 15 y perdió 3.

21. Pedro, Santiago y Juan han perdido al juego todo su dinero: entre Pedro y Santiago han perdido 10 duros; entre Pedro y Juan 11, y entre Santiago y Juan 9: cuánto perdió cada uno? Res. Pedro 6, Santiago 4 y Juan 5.

22. Hay tres números tales que el 1.º con un tercio de los otros dos compone 14; el 2.º mas un cuarto de los otros dos compone 8; y el tercero con un quinto de los otros hace 8: qué números son estos? Res. 11, 4 y 5.

23. Hallar tres números tales que $\frac{1}{2}$ del 1.º, $\frac{1}{3}$ del 2.º y $\frac{1}{4}$ del 3.º compongan 62: que $\frac{1}{3}$ del 1.º, $\frac{1}{4}$ del 2.º y $\frac{1}{5}$ del 3.º sumen 47; y que $\frac{1}{4}$ del 1.º $\frac{1}{5}$ del 2.º y $\frac{1}{6}$ del 3.º compongan 38. Res. 24, 60, 120.

24. Hallar tres números tales que el 1.º mas la mitad de los otros dos; el 2.º mas la 3.ª parte de los otros, y el 3.º mas la 4.ª parte de los otros dos compongan la misma cantidad 51. Res. 15, 33 y 39.

Ecuaciones de 2.º grado.

1.ª Preguntaron á un sugeto qué jornal ganaba y contestó: en 29 dias¡he ganado el cuadrado de mi jornal diario y he ahorrado ademas 100 rs.! cuál es el jornal? Llamando x este jornal resulta $x=4$ y $x=25$, cuyos dos valores satisfacen la cuestion.

2.ª Uno repartió 60 rs. entre varios pobres y observó que si los pobres fuesen tres mas, cada uno hubiera recibido un real ménos, se desea saber cuántos eran los pobres.

Siendo z el número de pobres tendrémos $z=12$ y $z=-15$ de los cuales el 1.º satisface la cuestion y el 2.º hecho positivo la satisfaría si viniese propuesta en otros términos.

3.ª He comprado un olivar por 80 duros; si el olivar hubiera tenido 3 olivos mas, cada olivo hubiera costado 6 duros ménos: cuántos olivos tiene?

Llamando n el número de olivos resulta $n=5$ y $n=-8$. El número 5 satisface la cuestion, el 8 podria satisfacerla cambiando la expresion.

4.ª Todos los dias doy á mi criada cierta cantidad para la compra de un número fijo de objetos; mas ayer la mandé que me trajese 3 cosas mas y le dí 48 rs.; hoy le mando que me compre 10 mas y le doy 165 rs., habiéndole costado cada objeto 5 rs. mas: deseo saber cuántos compra los demas dias.

Llamando x al número de objetos comprados diariamente tendrémos que $x=5$ y $x=-5\,^2/_3$ de los cuales 5 es el que satisface la cuestion.

5.ª Hallar un número tal que si á su cuadrado se le añade 8 veces el mismo número resulte el número 33.

Siendo x este número será $x=3$ y $x=-11$.

6.ª Se habian de repartir 175 rs. entre varias personas, pero faltando 2 que, por ausentes no deben entrar á la parte, resulta que á cada uno de los presentes les tocan 10 rs. mas que si estuviesen todos: se desea saber cuántos debieran ser los partícipes, si no faltase ninguno.

Llamando z al número de partícipes resulta que $z=7$ y $z=-5$.

ÍNDICE.

PARTE PRIMERA.

PARTE SEGUNDA.