LECCIONES

DE

ÁLGEBRA,

PARA USO DE LOS ALUMNOS
DE LA ESCUELA DE CONDESTABLES DE ARTILLERÍA
DE LA ARMADA,

POR

DON PEDRO BARBA,
Teniente graduado primer Condestable del Cuerpo.

DECLARADA DE TEXTO POR REAL ÓRDEN DE 16 DE MAYO DE 1878.

MADRID.
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO,
SAN ANDRÉS, 20, Y PAZ, 6.

1878.

LECCIONES

DE

ÁLGEBRA,

PARA USO DE LOS ALUMNOS
DE LA ESCUELA DE CONDESTABLES DE ARTILLERÍA
DE LA ARMADA,

POR

DON PEDRO BARBA,

Teniente graduado primer Condestable del Cuerpo.

DECLARADA DE TEXTO POR REAL ÓRDEN DE 16 DE MAYO DE 1878.

Pedro Barba

MADRID.
IMPRENTA DE PEDRO ABIENZO,
SAN ANDRÉS, 20, Y PAZ, 6.

1878.

Ref. fº 339. lib. 90-

ADVERTENCIA.

La falta de un tratado que abrace solamente los principios elementales de Álgebra que exige el programa de estudios vigente en la Escuela de Condestables, me sugirió la idea de redactar estas «Lecciones» que dedico hoy á sus alumnos, en las que he procurado reunir, en el menor volúmen posible, lo más conciso y esencial que comprende aquélla parte de las Matemáticas, entre los límites prefijados; y en vista de haber sido aceptado mi modesto trabajo en los términos que expresa la Real Orden inserta á continuacion, me propongo completar un tratado de Matemáticas que pueda llenar las necesidades de la referida Escuela, á cuyo fin serán en breve sometidas á la aprobacion de la Superioridad, por si se sirve adoptarlas, las «Lecciones de Aritmética» y «Geometría,» confiado en que suplirá á mi falta de suficiencia mis grandes deseos de llegar á ser útil á la Corporacion á quien he dedicado toda mi vida y servicios.

Ministerio de Marina.=*Seccion de Artillería*.=El Señor Ministro de Marina me dice con esta fecha de Real Orden lo siguiente:= «Excmo. Sr.=Con esta fecha digo de Real Orden al Presidente de la Junta Superior Consultiva de Marina, lo que sigue:=Excmo. Señor.=He dado cuenta al Rey (q. D. g.) de una instancia promovida por el Alférez graduado primer Condestable D. Pedro Barba y Llorca, á la que acompaña unas *Lecciones de Elementos de Algebra* que dedica á la Escuela de Condestables; y S. M. conformándose con lo informado por la Seccion de Artillería de este Ministerio, se ha dignado declarar de texto en la referida Escuela las expresadas *Lecciones de Álgebra*, autorizando al autor para que, por su cuenta, proceda á verificar la impresion.=De Real órden lo manifiesto á V. E. para su noticia y efectos correspondientes.=Y de igual Real órden lo traslado á V. E. con el propio fin.»=Y de la misma Real Orden comunicada por el referido señor Ministro, lo traslado á V. para su conocimiento y satisfaccion.=Dios guarde á V. muchos años.—Madrid 16 de Mayo de 1878.—El General Jefe de la Seccion, *José Rivera*.—Al Alférez graduado primer Condestable D. Pedro Barba y Llorca.

INDICE.

PRIMERA PARTE.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

SEGUNDA PARTE.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

MINISTERIO DE MARINA.=*Seccion de Artillería*.=El Señor Ministro de Marina me dice con esta fecha de Real Orden lo siguiente:= «Excmo. Sr.=Con esta fecha digo de Real Orden al Presidente de la Junta Superior Consultiva de Marina, lo que sigue:=Excmo. Señor.=He dado cuenta al Rey (q. D. g.) de una instancia promovida por el Alférez graduado primer Condestable D. Pedro Barba y Llorca, á la que acompaña unas *Lecciones de Elementos de Algebra* que dedica á la Escuela de Condestables; y S. M. conformándose con lo informado por la Seccion de Artillería de este Ministerio, se ha dignado declarar de texto en la referida Escuela las expresadas *Lecciones de Álgebra*, autorizando al autor para que, por su cuenta, proceda á verificar la impresion.=De Real órden lo manifiesto á V. E. para su noticia y efectos correspondientes.=Y de igual Real órden lo traslado á V. E. con el propio fin.»=Y de la misma Real Orden comunicada por el referido señor Ministro, lo traslado á V. para su conocimiento y satisfaccion.=Dios guarde á V. muchos años.— Madrid 16 de Mayo de 1878.—El General Jefe de la Seccion, *José Rivera*.—Al Alférez graduado primer Condestable D. Pedro Barba y Llorca.

INDICE.

PRIMERA PARTE.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

SEGUNDA PARTE.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

TERCERA PARTE.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

LECCIONES DE ÁLGEBRA.

PRIMERA PARTE.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

LECCION PRIMERA.

Preliminares.—Objeto del Álgebra.—Caractéres y signos algébricos.—Cantidad algébrica y sus diferentes especies.—Definiciones.

1. *Álgebra es la ciencia que tiene por objeto generalizar la resolucion de los problemas matemáticos, determinando simbólicamente la serie de operaciones que hay que efectuar para hallar el resultado.*

2. Los símbolos que se usan en el Álgebra para representar las cantidades son las letras del alfabeto castellano, ya mayúsculas, ya minúsculas, y á veces con la adicion de un acento ó tilde. Tambien se suelen emplear los caractéres griegos, cuyas denominaciones y equivalencias son las siguientes:

Caractéres griegos.				Caractéres griegos.			
Mayúsculas.	Minúsculas.	Denominaciones.	Equivalencias.	Mayúsculas.	Minúsculas.	Denominaciones.	Equivalencias.
Α	α	Alpha	a	Ν	ν	Nu	n
Β	β	Beta	b	Ξ	ξ	Xi	cs, gs
Γ	γ	Gamma	g	Ο	ο	Omicron	o
Δ	δ	Delta	d	Π	π	Pi	p
Ε	ε	Epsilon	e	Ρ	ρ	Rho	r, rh
Ζ	ζ	Zita	z, ds	Σ	σ	Sigma	s
Η	η	Eta	ê	Τ	τ	Tau	t
Θ	θ	Thita	th	Υ	υ	Upsilon	u
Ι	ι	Iota	i	Φ	φ	Phi	ph, f
Κ	ϰ	Kappa	k	Χ	χ	Chî	ch
Λ	λ	Lambda	l	Ψ	ψ	Psi	ps
Μ	μ	Mu	m	Ω	ω	Omega	ô

Ordinariamente se conviene en representar las cantidades conocidas, esto es, los valores dados ó datos que sirven de base á los raciocinios, por las letras a, b, c,....., empezando por la primera; y los valores desconocidos ó incógnitas, por las letras z, x, y,....., empezando por la última.

3. La principal ventaja del uso de estos símbolos ó letras, consiste en la indefinicion de las cantidades que representan los datos, pues que en las aplicaciones aritméticas que de ellos se hacen, podemos poner en su lugar números cualesquiera, cantidades positivas y negativas y aún el cero, que no es más que el orígen comun de estas dos últimas.

4. Los signos que se usan en Algebra son los mismos que en la Aritmética, con la abreviacion de que, para indicar el producto de varias letras, no hay más que juntarlas sin interposicion de ningun signo. Así, abc, indica el producto de $a\times b\times c$. Del mismo modo se indica la multiplicacion de las letras por una cantidad numérica; pero colocando siempre el número á la izquierda. Así, si se quiere multiplicar a por 4, se escribirá $4a$.

5. Se llama *coeficiente*, el número colocado como factor á la izquierda de una cantidad literal. Así, en la expresion $4a$, 4 es el coeficiente, que indica las veces que está repetida por suma la cantidad a.

6. *Toda cantidad que no tiene coeficiente, se le supone la unidad*; pues que evidentemente $a\times 1=a$.

7. Se llama *exponente* de una cantidad, un número que se escribe á la derecha de ésta y un poco más arriba, para indicar cuántas veces debe tomarse como factor. Así, en a^5, 5 es el exponente, y esta expresion equivale á $a\times a\times a\times a\times a$.

8. *Toda cantidad que no tiene exponente, se le supone la unidad*; pues que evidentemente $a^1=a$.

9. Como segun lo dicho (4) nunca se escriben cantidades como $a7$, $b3$, etc., para leer las expresiones $7a$, $3b$, etc....., a^7, b^3, etc....., se dice simplemente *siete a*, *tres b*, etc....., *a siete*, *b tres*, etc.....; y es importante no confundir estas expresiones, para lo cual basta tener presente la diferencia que hay entre las definiciones del coeficiente y exponente, que el primero indica la repeticion como sumando y el segundo como factor de la cantidad a. La espresion $5a^3$, se leerá *cinco a tres*.

10. Para indicar la raiz de una cantidad, cuyo índice sea m, se escribe $\sqrt[m]{a}$.

11. Se llama *igualdad*, la reunion de dos cantidades por medio del signo $=$, cuando estas cantidades no contienen ninguna incógnita, ó una de ellas es el resultado de las operaciones indicadas por la otra. Así, $2.3+4=10$ y $2(a+x)=2a+2x$ son igualdades.

12. Se llama *ecuacion*, la igualdad entre dos cantidades, cuando una de ellas, á lo ménos, contiene una ó varias incógnitas. Así, $2x+a=m$ y $ax^2+b=c$, son ecuaciones.

13. *Primer miembro* de una ecuacion, ó igualdad, es la cantidad que figura á la izquierda del signo $=$; y *segundo miembro* la que está á la derecha. Así, en la ecuacion $2x+a=s-d$, $2x+a$ es el primer miembro y $s-d$ el segundo.

14. Se llama *identidad* la igualdad cuyos miembros son uno mismo. Así, $4=4$, $x+3=x+3$ son identidades.

15. Se llama *cantidad algébrica ó literal*, ó expresion algébrica ó literal, una reunion de letras ligadas por medio de los signos de las operaciones ordinarias.

16. Se llaman *términos* de una expresion algébrica, las partes de ella que están precedidas ó seguidas de los signos $+$ ó $-$. Así, en la expresion $a+b-c$, sus términos son: a, $+b$ y $-c$.

17. *Todo término que no lleva signo expreso se le supone el signo* $+$. Así, a es lo mismo que $+a$, $a+b$ lo mismo que $+a+b$.

18. Se llaman *términos semejantes*, los que están compuestos de las mismas letras afectadas del mismo exponente, cualesquiera que sean sus coeficientes y signos. Así, $+3a^2bc^3$, $-8a^2bc^3$ y $-a^2bc^3$, son términos semejantes.

19. Se dice que una cantidad es un *monomio*, *binomio*, *trinomio*, y en general un *polinomio*, cuando contiene, respectivamente, *uno*, *dos*, *tres*, y en general *varios* términos. Así, la expresion $2a$, ó $+2a$, es un monomio; $a+b$, es binomio; $a+b-c$, es trinomio; $2a+b-c^2+3d$, polinomio.

20. Se llama cantidad *racional*, la que no contiene ningun signo radical; é *irracional* ó *radical*, la cantidad que contiene algun signo radical.

21. Se llama *cantidad algébrica entera*, la que no contiene radical ni denominador literal. Así, $5a^2b^3c$, $\frac{2}{5}ab$ y $-\frac{3}{4}c^3$ son enteras.

22. Se llama *fraccion algébrica*, ó quebrado algébrico, todo cociente indicado, cuyo denominador ó divisor sea literal. Así, $\frac{a^2+b^2}{c}$ y $\frac{5}{a-b}$ son fracciones algébricas.

23. Se llama expresion ó cantidad *mixta*, la reunion por medio del signo $+$ ó $-$ de una expresion entera y una fraccionaria. Así, $8ab+\frac{a^3}{2b}$ es una expresion mixta.

Las fracciones literales y expresiones mixtas se comprenden bajo la denominacion comun de cantidades *fraccionarias*.

24. Se llama *cantidad prima*, toda cantidad entera que no es divisible por ninguna otra cantidad entera más que por sí propia y la unidad. Así, a^2-b es una cantidad prima; pero a^2-b^2 no lo es, porque es divisible por $a+b$ y por $a-b$.

25. Se llama *funcion* de varias cantidades, aquella cuyo valor depende de estas cantidades. Así, en la ecuacion $x=a+b-c$, x es funcion de las cantidades a, b y c.

26. Se dice que una cantidad es *independiente de una letra*, x, cuando no contiene á dicha letra.

27. Se llama grado de un término, la suma de los exponentes de todas sus letras. Así, abc y $2a^3$ son del tercer grado, porque la suma de sus exponentes es 3.

28. Se llama *grado de un polinomio*, la mayor suma de los exponentes de sus letras en cada uno de sus términos. Así, el polinomio $5a^3b+2ab-a^4c$ es del quinto grado, porque la mayor suma de exponentes es 5.

29. Se llama *grado* de un término, ó de un polinomio, *con respecto á una de sus letras*, el mayor exponente de esta letra. Así, el polinomio $x^2+2ax-b$ es del segundo grado con respecto á la letra x.

30. Se dice que un polinomio es *homogéneo*, cuando siendo entero, sus términos son todos del mismo grado. Así el polinomio $5a^3-4a^2b+b^3$ es homogéneo, porque sus términos son todos del tercer grado.

31. Se usa en Álgebra generalmente el *paréntesis*, para indicar que la cantidad por él comprendida debe someterse á la operacion que indique el signo que le precede. Así, $a-(b+c)$ quiere decir que, despues de sumar b con c, se reste la suma de a.

Tambien se emplea el paréntesis para *separar un factor comun* á varios términos de un polinomio. Así, al polinomio $2ab-a^2c+5a^3b-a$, en cuyos términos entra el factor a, se le separará escribiéndolo en esta forma $(2b-ac+5a^2b-1)a$; y al polinomio $4c(a-b)-2a^2(a-b)+(a-b)$, en cuyos términos entra el factor comun $(a-b)$, se le separará escribiendo $(4c-2a^2+1)(a-b)$.

Para separar un factor comun, suele tambien usarse una raya vertical en vez del paréntesis, de este modo:

$$\left.\begin{array}{r}2b\\-ac\\+5a^2b\\-1\end{array}\right| a$$

32. Se llama *valor numérico* de una expresion algébrica, el número que resulta reemplazando sus letras por números particulares, y efectuando las operaciones indicadas. Así, el valor numérico del monomio $4ab^3$, cuando $a=3$ y $b=2$, es

$$4.3.2^3=96.$$

LECCION II.

CANTIDADES NEGATIVAS.—Definicion de las cantidades negativas.—Su orígen y objeto.—Ventajas de su introduccion en el cálculo.—Consecuencias de la comparacion con el *cero* límite.

33. Se llama valor *absoluto* de un número, el del mismo número *sin ningun signo*. Así, el valor *absoluto* de $+8$, ó de -8, es 8.

34. Se llama *cantidad positiva* la que va sin signo, ó precedida del signo $+$. Así, $+\frac{2}{3}$ y 8 son cantidades positivas.

Las palabras número absoluto y número positivo se emplean como sinónimas.

35. Se llama *cantidad negativa*, la que va precedida del signo $-$. Así, $-a$, $-\frac{2}{3}$ y -8 son cantidades negativas.

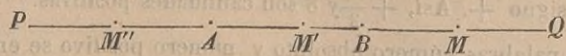
36. Para investigar el orígen de las cantidades negativas, consideremos que, representando las cantidades literales conocidas números cualesquiera, (3) se presenta desde luego en el Álgebra, la necesidad de tener que restar un número de otro menor que él. Así, por ejemplo, si en la expresion $x=a-b$, suponemos $a=3$ y $b=5$, deberemos restar 5 de 3, lo cual, á primera vista, parece que no puede efectuarse; mas como para restar ó quitar 5 unidades de un número basta restar primero 3, y luego, del resíduo, restar las otras 2 unidades, la expresion anterior, $x=3-5$, será equivalente á $x=3-3-2$, que evidentemente se

reduce á $x=-2$, puesto que $3-3=0$; y el signo — colocado delante del 2, manifiesta que estas unidades son las que se necesitan para que la sustraccion sea posible: luego dicha cantidad negativa proviene de una sustraccion en la que el sustraendo es mayor que el minuendo.

Segun esto, *siempre que haya que restar de un número otro mayor, el resultado es negativo; y se hallará este resultado restando el número menor del mayor y anteponiendo al resto el signo —*. Así, $5-7=-2$, $1-5=-4$.

37. La introduccion de las cantidades negativas en el cálculo algébrico tiene por objeto *generalizar* las ecuaciones correspondientes á los problemas en que entran cantidades que pueden tener dos sentidos opuestos. Con tal objeto se ha establecido el siguiente convenio: *todas las cantidades de la misma especie que estén tomadas en un mismo sentido, van precedidas del signo + y se llaman positivas*; y todas las que se tomen en sentido contrario á aquellas, *quedan afectadas del signo —, recibiendo el nombre de cantidades negativas*. De modo que conviniendo, por ejemplo, en anteponer el signo + á la expresion del capital de una persona que *tiene* 5.000 duros, se afectará del signo — la de otra persona que *debe* 5.000 duros, y se dirá, por consiguiente, que el uno *posee* + 5.000 duros, y que el otro *posee* — 5.000 duros.

38. Para explicar la ventaja que resulta en el cálculo algébrico de la admision de las cantidades negativas, presentaremos un ejemplo muy notable.



Sean A y B dos puntos fijos que se hallan en una línea indefinida PQ, y M un punto que se mueve sobre la recta. Representemos por a y b las respectivas distancias AB y BM, las cuales conocemos, y supongamos que se trata de hallar la distancia del punto móvil M, al punto A, á la que llamaremos x. Es claro que, cuando el punto M se halle á la derecha de B, tendremos:

$$x=a+b;$$

que si llega á ocupar una posicion M', situada entre A y B: será

$$x=a-b,$$

y que si se halla en M'' á la izquierda de A, su distancia á este punto la determinará la ecuacion

$$x=b-a.$$

Vemos, pues, que se necesitan tres ecuaciones para determinar, en cualquier caso, la distancia del punto M al punto A; pero si se consideran como positivas las distancias contadas en el sentido PQ, y como negativas las que se midan en el sentido contrario QP, la primera fórmula

$$x=a+b$$

determinará la distancia del punto M al punto A en todas las posiciones que ocupe, y entónces dicha expresion será general.

En efecto, si este punto llega á M', tendremos: $x=+AM'$, $b=-BM'$, y la ecuacion se trasformará ya en

$$+AM'=AB-BM',$$

lo cual es cierto; porque el segundo miembro de esta ecuacion significa que el punto móvil se ha apartado del punto A la cantidad AB, segun la direccion PQ, y que luego ha retrocedido, en sentido contrario, la cantidad BM'; de modo que la distancia al punto A es en la actualidad AM', la cual debe estar precedida del signo $+$ por contarse en el sentido PQ.

Si el punto M está en M'', se tiene $x=-AM''$, $b=-BM''$, y la fórmula, $x=a+b$, se reduce á

$$-AM''=AB-BM'',$$

igualdad idéntica, por la misma razon que se acaba de exponer.

39. De lo expuesto sobre las cantidades positivas y negativas, resulta: que podemos considerar al *cero* como punto de partida de las cantidades de una misma especie, ya sean positivas ó negativas, y por consiguiente, si se imaginan todas ellas, de cualquiera especie que sean, dispuestas por órden de magnitud y en una misma línea, desde *cero* hasta el *infinito positivo*, es decir, hasta el límite de las cantidades positivas, yendo de izquierda á derecha; y desde *cero* hasta el *infinito negativo*, yendo de derecha á izquierda, se reconocerán los dos principios siguientes:

1.° *Toda cantidad negativa es menor que cero*, porque está más léjos que *cero* de toda cantidad positiva. Así, la persona que tiene —40 pesetas es ménos rica que la que su fortuna equivalga á *cero*; y para indicar que una cantidad es positiva ó negativa, se establece la relacion $a>0$ ó $a<0$.

Y 2.° *De dos cantidades negativas, es menor la que tiene mayor valor absoluto*. Así, —40 es menor que —15, porque el primero dista más que el segundo de toda cantidad positiva.

LECCION III.

Operaciones algébricas en general.—Adicion, su definicion.—Adicion de monomios.—Reduccion.—Adicion de polinomios.—Sustraccion de monomios y polinomios.—Mudar los signos á uno ó varios términos de un polinomio.—Observacion sobre estas dos operaciones.

40. Toda operacion algébrica, en general, no consiste más que en trasformar la expresion que indica dicha operacion, en otra más sencilla ó de la forma que nos convenga.

41. Las operaciones del Álgebra y los datos y resultados de las mismas, tienen respectivamente iguales nombres que las operaciones de la Aritmética y sus datos y resultados correspondientes.

42. En todas las operaciones algébricas distinguiremos en general dos casos, segun que los datos sean monomios ó polinomios.

ADICION.

43. Se llama *suma algébrica* de varias cantidades, el resultado que se obtiene al sumar dichas cantidades atendiendo á sus signos.

44. ADICION DE MONOMIOS.—*Para sumar varios monomios, se escriben unos á continuacion de otros con los signos que cada uno tenga.*

En efecto; es evidente que la reunion de dos cantidades de una misma especie, que tienen el mismo signo ó están tomadas en el mismo sentido, produce un resultado tambien en el mismo sentido, y cuyo valor numérico es la suma de los valores absolutos de dichas cantidades. Es asimismo evidente que si las cantidades tienen distinto signo ó bien sentidos opuestos, su reunion se reduce á destruir en la mayor una parte igual á la menor y produce un resultado, cuyo valor numérico es la diferencia de los valores absolutos de dichas cantidades, tomado en el sentido de la mayor. Asi, si una persona debe á otras dos, á la una 400 pesetas y á la otra 200, su capital será de -400 y además de -200, es decir, que estará representado por

$$-400-200=-600.$$

Y si una persona posee 600 pesetas y debe 800, su capital se compondrá de $+600$ y de -800 y por consiguiente será:

$$+600-800=-200.$$

Tendremos, pues, en general:

$$(+a)+(+b)=+a+b$$
$$(+a)+(-b)=+a-b$$
$$(-a)+(+b)=-a+b$$
$$(-a)+(-b)=-a-b.$$

45. La suma de los monomios puede simplificarse, cuando contiene términos semejantes, (18) por medio de otra operacion llamada *reduccion*, que consiste en reducir dichos términos semejantes á uno sólo.

Para esto se observan las reglas siguientes:

1.ª *Para reducir términos semejantes, que tienen el mismo signo, á uno sólo, se suman los coeficientes, y á la suma, seguida de la parte literal comun, se le antepone dicho signo.*

En efecto; es evidente que

$$+2ab^2+8ab^2+ab^2=+11ab^2;$$

y que

$$-4ab^2-5ab^2-ab^2=-10ab^2.$$

2.ª *Para reducir términos semejantes, que tienen diferentes signos, á uno sólo, se suman los coeficientes positivos, luego los negativos; se resta la suma menor de la mayor, y á la diferencia, seguida de la parte literal comun, se le antepone el signo de la mayor.*

En efecto, sea la expresion

$$4a^3b-8a^3b-2a^3b+3a^3b-a^3b.$$

Es evidente que se puede invertir el órden de la colocacion de dichos monomios en esta forma:

$$4a^3b+3a^3b-8a^3b-2a^3b-a^3b;$$

pero

$$4a^3b+3a^3b=+7a^3b, \text{ y } -8a^3b-2a^3b-a^3b=-11a^3b;$$

luego la expresion propuesta queda reducida á

$$+7a^3b-11a^3b=-4a^3b.$$

46. Adicion de polinomios.—*Para sumar varios polinomios, basta escribir los unos á continuacion de los otros, conservando los signos que tengan sus términos, y hacer enseguida la reduccion de éstos, si los hay semejantes.*

En efecto, vamos á sumar el polinomio $a-b$ con el $c-d+f$. Supongamos que, efectuando las operaciones indicadas en $a-b$, sea $\pm R$ su resultado. La suma pedida será $c-d+f\pm R$, que es equivalente á $\pm R+c-d+f$, ó poniendo $a-b$ en vez de $\pm R$, será $a-b+c-d+f$, ó tambien $c-d+f+a-b$.

Ejemplo. Sumar los polinomios

$$\begin{array}{rl} & 8x^3 - 6ax^2 + 9a^2b + 3c^2, \\ & -5a^2b + 8x^3 - 7c^2 + 12ax^2, \\ & 7c^2 - 3a^2b + 9d^3 - x^3, \\ \text{y} & 15ax^2 - 9d^3 - 2a^2b. \\ \hline \textit{Suma:} & 15x^3 + 21ax^2 - a^2b + 3c^2. \end{array}$$

SUSTRACCION.

47. Se llama *diferencia algébrica* de dos cantidades, otra cantidad que, sumada con el sustraendo, da por suma el minuendo.

48. *Para restar cantidades literales en general, se escriben á continuacion del* MINUENDO *todos los términos del* SUSTRAENDO, *con los signos cambiados, y se practica enseguida la reduccion que sea posible.*

Llamemos M al minuendo, ya sea monomio ó polinomio, y sea el sustraendo el polinomio $a-b+c-d$: digo que

$$M-(a-b+c-d)=M-a+b-c+d.$$

En efecto, sumando la cantidad $M-a+b-c+d$ con el sustraendo $a-b+c-d$, la suma es (46)

$$M-a+b-c+d+a-b+c-d=M;$$

luego, segun la definicion, (47) $M-a+b-c+d$ es el resto.

Ejemplo. Restar del polinomio $14a^2b-8ab^2+5b^3-a^3$ *el polinomio* $6a^3+9a^2b-4b^3$.

El resto será:

$$14a^2b-8ab^2+5b^3-a^3-6a^3-9a^2b+4b^3;$$

y reduciendo,

$$5a^2b-8ab^2+9b^3-7a^3.$$

49. Hemos acabado de demostrar que

$$M-(a-b+c-d)=M-a+b-c+d;$$

y si escribimos cambiados los miembros de esta igualdad, será:

$$M-a+b-c+d=M-(a-b+c-d),$$

de cuya trasformacion sacamos la consecuencia siguiente: *para mudar los signos de un polinomio, sin que éste se altere, se escribirán dichos términos con los signos mudados dentro de un paréntesis, y se antepondrá al paréntesis el signo de* —. Así:

$$a-b+c=a-(b-c).$$

50. Obsérvese que, en el Algebra, las palabras *sumar* y *restar* no envuelven, respectivamente, la idea de *aumento* y *disminucion* como en la Aritmética; sino que esto se verifica solamente cuan-

do las cantidades que se consideran están tomadas en el mismo sentido; porque si tienen sentidos opuestos, su *adicion* produce una *disminucion*, y su *sustraccion* un *aumento*.

LECCION IV.

Multiplicacion algébrica, su definicion.—Reglas de los signos.—Multiplicacion de dos monomios.—Multiplicacion de un polinomio por un monomio.

51. Se llama *multiplicacion algébrica* de dos cantidades, la operacion que tiene por objeto hallar una cantidad que sea, en magnitud y signo, respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es respecto de la unidad positiva.

52. Segun esta definicion, si el multiplicador tiene el signo $+$, es decir, igual signo que la unidad, el producto tendrá igual signo que el multiplicando; y si el multiplicador tiene el signo $-$, esto es, un signo opuesto al de la unidad, el producto tendrá signo contrario al del multiplicando.

Se podrá, pues, enunciar

$+$ multiplicado por $+$ da $+$
$-$ » $+$ » $-$
$+$ » $-$ » $-$
$-$ » $-$ » $+$

y tambien la siguiente regla; *el producto de dos cantidades del mismo signo es positivo, y el de dos cantidades de distinto signo es negativo.*

53. De la regla de los signos que acabamos de exponer, se deduce, á poco que se reflexione:

1.° *Que el producto de muchos factores negativos es positivo, ó negativo, segun que los factores, que lo componen, son pares ó impares.*

2.° *Que si uno de los factores de un producto muda de signo, el producto muda de signo.*

Y 3.° *Que si dos factores de un producto mudan de signo, el producto no muda de signo.*

54. Multiplicacion de monomios.—Establecidas ya las reglas de los signos, haremos abstraccion de ellos en la multiplicacion de monomios, y como la multiplicacion de varias cantidades se reduce á la de dos, tratemos de la multiplicacion de dos monomios.

Empecemos por multiplicar a^m por a^n. Observemos que

$a^m = aaa.....$, entrando m veces por factor la a, y $a^n = aaa....$, entrando n veces por factor la a; y como para efectuar la operacion con estos factores no hay más que reunir las letras, tendremos

$$a^m \times a^n = aaa..... \times aaa..... = aaaaa.....,$$

entrando la a en dicho producto $(m+n)$ veces; luego

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Podremos, pues, enunciar la siguiente regla: *para hallar el producto de dos potencias de una misma cantidad, se eleva esta cantidad á una potencia igual á la suma de los exponentes de las potencias propuestas.*

55. Sean ahora dos monomios *cualesquiera*, por ejemplo, $6a^2b^3$ por $5ab^2c^3$: bastará para efectuar la operacion, formar un producto compuesto de los distintos factores de los monomios propuestos, segun nos enseña la Aritmética con el producto de varios productos, el cual será

$$6.a^2.b^3.\ 5.a.b^2.c^3;$$

y como este producto, sabemos tambien, puede descomponerse, por el contrario, en un producto de varios productos, tendremos que será igual á

$$6.5 \times a^2.a \times b^3.b^2 \times c^3.$$

Pero $6.5 = 30$, $a^2.a = a^3$ y $b^3.b^2 = b^5$; (54) luego

$$6a^2b^3 \times 5ab^2c^3 = 30 \times a^3 \times b^5 \times c^3 = 30a^3b^5c^3.$$

Estos razonamientos pueden aplicarse á cualesquiera monomios; por consiguiente, se deduce que, *para multiplicar varios monomios, se multiplican los coeficientes y se escriben á continuacion del producto todas las letras diferentes de los factores, poniendo á cada letra comun á varios un exponente igual á la suma de los exponentes que lleva en dichos factores, y conservando sus exponentes á las letras que entran solamente en uno de ellos.*

Ejemplo: $-5a^2b^3c \times +3ac^2 \times -a^3b = +15a^6b^4c^3$.

56. MULTIPLICACION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.—Pasemos ya á la multiplicacion de polinomios, y supongamos primero, que siendo el multiplicando un polinomio cualquiera $a+b-c$, por ejemplo, queremos multiplicarle por un monomio *positivo* d. Tres casos pueden presentarse segun que d sea una cantidad entera, fraccionaria ó incomensurable.

1.° Si d es un número entero, el producto de $a+b-c$ por d será la suma de d cantidades iguales al multiplicando, esto es:

$$(a+b-c)d=(a+b-c)+(a+b-c)+(a+b-c)+\ldots\ldots,=$$
$$a+a+a+\ldots\ldots+b+b+b+\ldots\ldots-c-c-c-\ldots\ldots,$$

ó bien, haciendo la reduccion de términos semejantes,

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd.$$

2.° Si d es fraccionario, por ejemplo, $\frac{m}{n}$, la operacion de multiplicar una cantidad cualquiera por una fraccion, nos dice la Aritmética, se reduce á tomar una parte del multiplicando expresada por esta fraccion, ó bien en este caso, á dividirlo por n y multiplicar el cociente por m. Ahora bien, el cociente de $a+b-c$ por n, es $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$, porque si multiplicamos este cociente por el divisor n, del modo que hemos dicho en el primer caso, se reproducirá el dividendo $a+b-c$; luego el producto pedido será:

$$\frac{a}{n}.m+\frac{b}{n}.m-\frac{c}{n}.m=\frac{am}{n}+\frac{bm}{n}-\frac{cm}{n}=a.\frac{m}{n}+b.\frac{m}{n}-c.\frac{m}{n},$$

es decir, $ad+bd-cd$.

3.° Si d es una cantidad incomensurable, supongamos que d' sea una cantidad comensurable mayor ó menor que d; pero que pueda aproximarse á d tanto como se quiera, y, segun lo que acabamos de demostrar, tendremos:

$$(a+b-c)d'=ad'+bd'-cd',$$

y esta igualdad será cierta, siempre que d' vaya aproximándose á d. Ahora bien, se ha demostrado en la Aritmética, que *cuando dos cantidades variables permanecen constantemente iguales, sus límites son tambien iguales;* pero el límite del producto $(a+b-c)d'$, es $(a+b-c)d$, y el de la cantidad $ad'+bd'-cd'$, es evidentemente $ad+bd-cd$, luego

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd.$$

De todo lo dicho en los casos anteriores, deducimos, que *para multiplicar un polinomio por un monomio positivo, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, segun las reglas dadas, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

57. Esta regla es general áun cuando el multiplicador fuese un monomio negativo, $-d$; pues segun hemos demostrado, (56)

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd;$$

si cambiamos los signos de ambos miembros de esta igualdad, y recordamos (53) que para mudar el signo del primer miembro, basta mudar el del factor d, tendremos:

$$(a+b-c)\times -d=-ad-bd+cd,$$

que es lo que resulta aplicando la regla.

Ejemplo: $(3a^2b^2c+5ab^2c^3+ab^2-3a^2b^3+4a^3b-5ab^2c)6a^2b^3c^2=$ $18a^4b^5c^3+30a^3b^5c^5+6a^3b^5c^2-18a^4b^6c^2+24a^5b^4c^2-30a^3b^5c^3$.

LECCION V.

Multiplicacion de polinomios.—Casos particulares.—Consecuencias que se deducen de la multiplicacion de polinomios.

58. Multiplicacion de polinomios.—Consideremos, por último, el caso en que el multiplicador es tambien polinomio, y sean, por ejemplo, dos polinomios cualesquiera, $(a-b+c)$ multiplicado por $(d-e-f)$. Supongamos que se hayan efectuado las operaciones indicadas en el multiplicando, y representemos por P su valor: el producto pedido será

$$P(d-e-f),$$

y como se puede permutar el órden de los factores de un producto,

$$P(d-e-f)=(d-e-f)P;$$

pero, segun hemos dicho, (56)

$$(d-e-f)P=dP-eP-fP=P\times d+P\times -e+P\times -f,$$

luego poniendo en vez de P su valor $(a-b+c)$, será

$$(a-b+c)(d-e-f)=(a-b+c)d+(a-b+c)\times -e+(a-b+c)\times -f.$$

Por consiguiente, *para multiplicar dos polinomios entre sí, se multiplica el multiplicando por cada término del multiplicador, y la suma de los productos parciales será el producto total.*

59. Cuando los factores contienen diferentes potencias de una misma letra, conviene, para facilitar la reduccion de los productos parciales, *ordenarlos con respecto á dicha letra* que se llama *letra principal*; es decir, escribir primero el término en que la letra tiene mayor exponente; luego, de los restantes, aquél en que la misma letra tenga mayor exponente, y así sucesivamente hasta agotarlos (*).

(*) Tambien pueden ordenarse los polinomios de modo que las potencias de la letra principal vayan constantemente creciendo.

60. Ejemplo. *Multiplicar el polinomio* $4a^2b^2+5a^4-2a^3b$ *por el polinomio* $2ab^2+a^3-4a^2b$.

Ordenando estos polinomios con respecto á la letra a, dispondremos el cálculo del modo siguiente:

Multiplicando.	$5a^4-\ 2a^3b+\ 4a^2b^2$
Multiplicador.	$a^3-\ 4a^2b+\ 2ab^2$
Producto parcial por a^3...	$5a^7-\ 2a^6b+\ 4a^5b^2$
— — por $-4a^2b$..	$-20a^6b+\ 8a^5b^2-16a^4b^3$
— — por $2ab^2$..	$10a^5b^2-\ 4a^4b^3+8a^3b^4$
Producto total..	$5a^7-22a^6b+22a^5b^2-20a^4b^3+8a^3b^4$

Se ha tenido cuidado de colocar los términos semejantes en columna para facilitar la reduccion al hallar el producto total.

61. Estos polinomios son homogéneos; (30) el primero del 4.° grado y el segundo del 3.°, y es evidente que su producto debe ser tambien homogéneo, y que el grado del producto es la suma de los grados de sus factores. Por consiguiente, *si el producto de dos polinomios homogéneos no resulta homogéneo, es señal de estar equivocada la operacion, y, por tanto, debe repetirse.*

62. Para multiplicar dos polinomios en que la letra príncipal entra en varios términos con el mismo exponente, se pondrá primero cada potencia de esta letra como *factor comun*; se ordena enseguida el polinomio, y, considerando las cantidades sometidas al factor comun como simples coeficientes de éste, se efectúa la multiplicacion.

63. Ejemplo: Multiplicar el polinomio $2a^2x^2-3abx^2+2b^2x^2-5b^3x+6ab^2x+b^4$ por el polinomio $ax+bx+ab$.

Dispondremos el cálculo del modo que se expresa á continuacion:

Multiplicando.	$2a^2$ $-3ab$ $+2b^2$	x^2 $+6ab^2$ $-5b^3$	x $+b^4$	
Multiplicador.	a $+b$	x $+$ ab		
Producto por $\left.\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right\vert x.$	$2a^3$ $-3a^2b$ $+2ab^2$ $+2a^2b$ $-3ab^2$ $+2b^3$	x^3 $+6a^2b^2$ $-5ab^3$ $+6ab^3$ $-5b^4$	x^2 $+ab^4$ $+$ b^5	x
Producto por ab . . .		$+2a^2b^3$ $-3a^2b^2$ $+2ab^3$	x^2 $+6a^2b^3$ $-5ab^4$	$x+ab^5$
Producto total. . , . .	$2a^3$ $-a^2b$ $-ab^2$ $+2b^3$	x^3 $+2a^3b$ $+3a^2b^2$ $+3ab^3$ $-5b^4$	x^2 $+6a^2b^3$ $-4ab^4$ $+$ b^5	$x+ab^5$

64. Aplicando las reglas de la multiplicacion á la formacion del cuadrado de $(a\pm b)$, y á la del producto de $a+b$ por $a-b$, tendremos;

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$$

De estas tres expresiones deducimos los teoremas siguientes:

1.° *El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de estas cantidades, aumentada en el doble producto de ambas.*

Ejemplo: $(5a+2a^2b)^2=25a^2+20a^3b+4a^4b^2$.

2.° *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de estas cantidades, disminuida en el doble producto de ambas.*

Ejemplo: $(2a^3b-ab^2)^2=4a^6b^2-4a^4b^3+a^2b^4$.

3.° *El producto de la suma de dos cantidades, multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades.*

Ejemplo: $(5a^2x^3-3a^3x^2+4a^4x-2a^5)(5a^2x^3-3a^3x^2-4a^4x+2a^5)$.

Este producto puede ponerse bajo la forma siguiente, segun lo dicho (49):

$$\{(5a^2x^3-3a^3x^2)+(4a^4x-2a^5)\}\times\{(5a^2x^3-3a^3x^2)-(4a^4x-2a^5)\}$$

y por consiguiente, será igual á

$(5a^2x^3-3a^3x^2)^2-(4a^4x-2a^5)^2=25a^4x^6-30a^5x^5+9a^6x^4-16a^8x^2+16a^9x-4a^{10}$.

65. De la regla de la multiplicacion de dos polinomios, se deduce tambien, á poco que se reflexione, que *el cuadrado de un polinomio se compone, de los cuadrados de sus diferentes términos, y del duplo de la suma de los productos, que se obtienen, multiplicando cada uno de dichos términos por los que le siguen.*

Ejemplo: $(2a^3-3a^2b+4ab^2-2b^3)^2=4a^6+9a^4b^2+16a^2b^4+4b^6-12a^5b+16a^4b^2-8a^3b^3-24a^3b^3+12a^2b^4-16ab^5=4a^6-12a^5b+25a^4b^2-32a^3b^3+28a^2b^4-16ab^5+4b^6$.

66. Puesto que los primeros y últimos términos de los polinomios, ordenados con respecto á una letra, son aquellos en que dicha letra entra con el mayor y menor exponente respectivamente, y por tanto son únicos y sin semejantes, se infiere fácilmente, que *si se multiplican dos polinomios, ordenados con respecto á una misma letra, el primer término del producto final, despues de ordenado, es el producto de los dos primeros términos de los factores; y el último término del producto final es el producto de los dos últimos términos de los factores.*

LECCION VI.

División algébrica, su definicion.—Reglas de los signos.—Division de dos mononios.—Division de un polinomio por un monomio.

67. Se llama *division algébrica* de dos cantidades, una operacion cuyo objeto es hallar otra cantidad que multiplicada por el divisor dé de producto el dividendo.

68. De esta definicion se deduce, que si el dividendo es positivo, el divisor y el cociente tendrán signos iguales, (52): luego si el divisor es positivo, el cociente es positivo; y si el divisor es negativo, el cociente tambien lo es. Por el contrario, si el dividendo es negativo, el divisor y el cociente tendrán signos contra-

rios (52); de suerte que, si el divisor es positivo, el cociente es negativo; y si es negativo, el cociente es positivo.

Se podrá, pues, enunciar

+	dividido por	+	da	+
+	»	—	»	—
—	»	+	»	—
—	»	—	»	+

y tambien la siguiente regla: *el cociente de dos cantidades del mismo signo es positivo, y el de dos cantidades de diferente signo es negativo.*

69. De las reglas de los signos que acabamos de exponer, se deduce, á poco que se reflexione:

1.° *Que el cociente no se altera porque se muden los signos del dividendo y divisor.*

Y 2.° *Que el cociente debe ser negativo, siempre que alguno de sus términos lo sea.*

70. Division de monomios.—Establecidas ya las reglas de los signos, empecemos haciendo abstraccion de ellos, por dividir un monomio cualquiera por otro, por ejemplo: $48a^5bc^6d^3$ por $6a^3bc$.

De la definicion de la division y la regla de multiplicar monomios, se deduce inmediatamente: 1.° Que el coeficiente del cociente debe resultar de dividir los coeficientes del dividendo y divisor, y será, por tanto, $\frac{48}{6}=8$. 2.° Las letras comunes, y que tengan mayor exponente en el dividendo, deben entrar en el cociente con un exponente igual á la diferencia de los que llevan en dividendo y divisor; es decir, que la letra a tendrá en el cociente un exponente igual á $5-3=2$; y por la misma razon, el de la letra c será $6-1=5$. 3.° Las letras iguales, con iguales exponentes, no corresponden al cociente, como la letra b; pues para ello necesita tener mayor exponente en el dividendo. Y 4.° Las letras que, como la d, no entran en el divisor, deberán hallarse con su mismo exponente en el resultado. El cociente será, pues, $8a^2c^5d^3$, como puede comprobarse, multiplicándolo por el divisor, y reproducirá el dividendo.

Este razonamiento, que podemos hacer con otros monomios cualesquiera, nos conduce á la siguiente regla general:

Para dividir dos monomios, divídase el coeficiente del dividendo por el del divisor, y tendremos el del cociente: escríbanse á su derecha las letras comunes que tienen mayor exponente en el dividendo *que en el divisor, y las que sólo entran en el dividendo, dando á las primeras un exponente igual á la diferencia del que tienen en dividendo y divisor, y conservando el suyo las segundas: suprímanse las letras comunes de iguales exponentes, y antepóngase al resultado el signo correspondiente.*

Ejemplo: $\frac{-40a^7b^2c^5def^2}{-8a^4b^2c^3ef}=+5a^3c^2df^2.$

71. Esta regla supone que las letras comunes tienen mayor exponente en el dividendo que en el divisor; pero como puede suceder que los tengan iguales ó que sean menores en el dividendo, veamos de generalizar dicha regla, es decir, hacerla aplicable á todos los casos.

1.° Supongamos que la letra a tenga en dividendo y divisor el mismo exponente, y sea a^p dividido por a^p. El cociente ya sabemos que evidentemente sería *la unidad*; pero si le aplicamos la regla anterior, se hallará $a^{p-p}=a^0$. Esta expresion carece de sentido; mas si convenimos que, en adelante, *toda cantidad, cuyo exponente es cero, equivale á la unidad*, esto es, $a^0=1$, podremos decir que $\frac{a^p}{a^p}=a^{p-p}$, y la regla se verificará cuando los exponentes de las letras comunes son iguales.

2.° Sea ahora la division de a^p por a^{p+q}. Como se ha demostrado en la Aritmética que el cociente de una division no se altera dividiendo sus términos por la misma cantidad, dividamos a^p y a^{p+q} por a^p, (70) (71. 1.°) y así se verá que

$$\frac{a^p}{a^{p+p}}=\frac{1}{a^q}.$$

Ahora si aplicamos á esta division la regla, se hallará

$$\frac{a^p}{a^{p+q}}=a^{p-(p+q)}=a^{p-p-q}=a^{-q}.$$

Esta expresion no tiene sentido; mas si convenimos que, en adelante, *toda cantidad con exponente negativo equivale á una fraccion, cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma* *cantidad con el mismo exponente hecho positivo*, esto es, $a^{-q}=\frac{1}{a^q}$,

podremos decir $\frac{a^p}{a^{p+q}}=a^{p-p-q}=a^{-q}$, y la regla se verificará también cuando el exponente es menor en el dividendo. Por consiguiente, estableceremos, en general, que *para dividir dos potencias de una misma cantidad se restan sus exponentes.*

72. Para que la division de monomios sea *exacta*, es preciso: 1.º Que los exponentes de las letras del divisor no sean mayores que los que tienen las mismas letras del dividendo; y 2.º Que el divisor no contenga ninguna letra que no entre en el dividendo.

Cuando estas condiciones no se verifican, la division es *inexacta*; se expresa el cociente en la forma fraccionaria, y se simplifica, esto es, se suprimen los factores comunes á dividendo y divisor, lo cual sabemos no altera el resultado.

$$\text{Ejemplo: } \frac{3a^2b}{-6a^4b^2c}=-\frac{1}{2a^2bc}.$$

73. DIVISION DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO.

Pasemos, ahora, al caso de dividir un polinomio por un monomio, que está reducido á la division de monomios. Sea el dividendo el polinomio $a-b+c$, y el divisor el monomio m. Es claro que el cociente debe ser $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$, puesto que multiplicándolo por el divisor m, (56) se reproduce el dividendo $a-b+c$; y como este razonamiento se verifica en otro cualquier caso, estableceremos la regla siguiente:

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, y la suma de los cocientes parciales será el cociente total.

$$\text{Ejemplo: } \frac{4a^6b^2+8a^4b^4-a^2b^6}{2a^2b^2}=2a^4+4a^2b^2-\frac{1}{2}b^4.$$

74. La division de un polinomio por un monomio será *exacta* ó *inexacta*, segun que lo sean ó no, la de los términos que lo componen.

LECCION VII.

Division de dos polinomios.—Casos particulares.—Ley que observa el cociente entre la diferencia de dos potencias iguales de dos cantidades y la de las mismas cantidades.

75. DIVISION DE POLINOMIOS.—Propongámonos, por último, la division de dos polinomios, y para mayor facilidad, representemos el dividendo por $A+B+C+.....$, el divisor por $a+b+c+.....$ y el cociente incógnito por $m+n+p+.....$, é imaginemos que estos tres polinomios estén ordenados con respecto á las potencias decrecientes de una misma letra (*).

Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, tendremos la identidad

$$A+B+C+.....=(a+b+c+.....)\,(m+n+p+.....);$$

pero segun lo que hemos dicho (66), el primer término A debe ser el producto de los dos primeros términos a y m de los factores, y por consiguiente, el factor m es igual al cociente de A dividido por a, ó

$$A=am,\text{ de donde } m=\frac{A}{a};$$

es decir, que partiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, resulta el primer término del cociente.

Ahora, considerando el polinomio $m+n+p+.....$, como un binomio, cuyo primer término es m y el segundo $n+p+.....$, tendremos que la identidad anterior se convertirá en

$$A+B+C+.....=(a+b+c+.....)m+(a+b+c+.....)\,(n+p+.....),$$

y restando á los dos miembros de esta igualdad la cantidad $(a+b+c+.....)m$, será

$$A+B+C+.....-(a+b+c+.....)m=(a+b+c+.....)\,(n+p+.....)$$

Supongamos que el primer miembro de esta igualdad, que es el primer resíduo de la division, despues de reducido y ordenado, se halla representado por $A'+B'+C'+.....$, y tendremos

$$A'+B'+C'+.....=(a+b+c+.....)\,(n+p+.....);$$

pero aquí diremos como ántes que, segun lo dicho, (66)

$$A'=an,\text{ de donde } n=\frac{A'}{a},$$

(*) Tambien podíamos suponerlos ordenados con relacion á las potencias crecientes.

es decir, que partiendo el primer término del resto, $A'+B'+C'+.....$, por el primero del divisor, resulta el segundo término del cociente.

Razonando con este segundo término del cociente y el primer resto, como lo hemos hecho con el primer término y el dividendo propuesto, hallaremos el 3.°, 4.°, 5.°..... términos del cociente, dividiendo siempre el primero del resto, despues de ordenado, por el primero del divisor.

Continuando la operacion, llegaremos á un resíduo igual á cero, ó á un resíduo tal, que la division de su primer término por el primero del divisor nos dé por cociente un término en que tenga la letra ordenatriz un exponente menor que la diferencia de los que tiene la misma letra en los últimos términos del dividendo y divisor, ó, al contrario, si estuviesen los polinomios ordenados con relacion á las potencias crecientes de dicha letra. *Si el residuo es cero,* el polinomio obtenido será el *cociente exacto;* porque habiéndose hallado cero, restando del dividendo los productos parciales del divisor por los términos sucesivos de dicho cociente, vemos que, el dividendo es el producto del divisor por el polinomio hallado, el cual será, por consiguiente, el cociente pedido. Pero si el resíduo, de que se trata, *no es cero,* el cociente *no puede ser entero,* ó *es inexacto;* pues de lo contrario, en su último término, la letra ordenatriz tendría por exponente la diferencia de los que tienen los últimos términos del dividendo y divisor, de cuya division procede, y, por consiguiente, el resto correspondiente hubiera sido cero, contra lo supuesto.

En vista de lo expuesto, estableceremos la regla siguiente:

Para dividir un polinomio por otro, se empieza por ordenarlos respecto de una misma letra; luego se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y se tendrá el primer término del cociente. Este se multiplica por todo el divisor, y el producto se resta del dividendo; el resto, ordenándolo si no lo está, se trata como un nuevo dividendo, para continuar del mismo modo hasta que se llegue á un residuo cero, ó á un residuo tal, que el exponente de la letra ordenatriz resulte menor que en el divisor.

76. Esta regla está demostrada en el supuesto de que las potencias de la letra ordenatriz vayan decreciendo; pero si se hubiese ordenado con relacion á las potencias crecientes, la operacion podrá terminarse cuando se llegue á un resíduo cuyo primer término tenga el exponente de la letra ordenatriz mayor que la diferencia de los dos últimos términos del dividendo y divisor.

77. En el caso de que el resíduo no sea cero, se completa el cociente, agregando al polinomio hallado una fraccion que indique la division del último resíduo por el divisor.

78. Para restar más fácilmente del dividendo los productos del divisor por los términos del cociente, se cambian los signos á los términos de estos productos, á medida que se obtienen, y se escriben sucesivamente debajo de los que le son semejantes, en el dividendo parcial correspondiente.

79. Como el producto del primer término del divisor por cualquiera de los del cociente es siempre igual al primer término del respectivo dividendo parcial, no se escribe este producto y se *tacha* el primero del dividendo parcial: del mismo modo se *tacharán* los demás á medida que se haga la reduccion.

80. Ejemplo I. *Dividir*

$$4a^3b-9a^2b^2+6a^4+2b^4-3ab^3$$

por

$$2ab-b^2+2a^2.$$

Ordenando estos polinomios con respecto á las potencias decrecientes de a, dispondremos el cálculo del modo siguiente:

$$\begin{array}{l r|l}
 & 6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4 & 2a^2+2ab-b^2 \\
 & -6a^4-6a^3b+3a^2b^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{3a^2-ab-2b^2.} \\
\cline{2-2}
1.^{\text{er}}\ \text{resíduo}\ldots & -2a^3b-6a^2b^2-3ab^3+2b^4 & \\
 & +2a^3b+2a^2b^2-ab^3 \qquad & \\
\cline{2-2}
2.^{\text{o}}\ \text{resíduo}\ldots & -4a^2b^2-4ab^3+2b^4 & \\
 & +4a^2b^2+4ab^3-2b^4 & \\
\cline{2-2}
3.^{\text{er}}\ \text{resíduo}\ldots & 0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

81. Ejemplo II. *Dividir*

$$a^4x^3+a^5x^2-a^2x^5+x^7-2a^3x^4$$

por

$$x^3-a^3.$$

Ordenemos con relacion á x, y dispondremos la operacion como sigue:

$$\begin{array}{r|l}
x^7-a^2x^5-2a^3x^4+a^4x^3+a^5x^2 & x^3-a^3 \\
+a^3x^4 \qquad\qquad\qquad & \overline{x^4-a^2x^2-a^3x+a^4} \\
\hline
-a^2x^5-a^3x^4+a^4x^3+a^5x^2 & \\
-a^5x^2 & \\
\cline{1-1}
-a^3x^4+a^4x^3 \qquad\quad & \\
-a^6x & \\
\hline
+a^4x^3-a^6x & \\
+a^7 & \\
\hline
-a^6x+a^7 &
\end{array}$$

Siendo 2 la diferencia de los exponentes que lleva x en los últimos términos del dividendo y divisor, (a^3 es lo mismo que a^3x^0) se vé desde luego, examinando el segundo resíduo, que el cociente no será entero, porque dividiendo su primer término, $-a^3x^4$, por el primero x^3 del divisor, se llega á escribir en el cociente un término en que el exponente de x es 1; es decir, menor que la diferencia 2. Sin embargo, se ha continuado hasta que el exponente de x en el resíduo es menor que en el divisor, con objeto de hallar todos los términos enteros que puede contener el cociente.

Este cociente completo es:

$$x^4-a^2x^2-a^3x+a^4+\frac{-a^6+a^7}{x^3-a^3}$$

82. Ejemplo III.

	a^5-b^5	$a-b$
1.er resíduo. .	$a^4b-b^5=b\,(a^4-b^4)$	$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$
2.° id.. . .	$a^3b^2-b^5=b^2(a^3-b^3)$	
3.er id.. . .	$a^2b^3-b^5=b^3(a^2-b^2)$	
4.° id.. . .	$a\,b^4-b^5=b^4(a-b)$	
5.° id.. . .	0	

Observando con atencion el progreso de esta division, se echa de ver que en el primer término de cada resíduo y en el cociente, los exponentes de a van disminuyendo y los de b aumentando de unidad en unidad. Además los resíduos escritos, como lo hemos hecho, bajo la forma

$$b(a^4-b^4),\ b^2(a^3-b^3)\ldots\ldots,$$

manifiestan que la divisibilidad de a^5-b^5, ó en genenal, la de a^m-b^m, depende de la de $a^{m-1}-b^{m-1}$; así como ésta de la de $a^{m-2}-b^{m-2}$, etc. Y pues que

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$$

es divisible por $a-b$, tambien lo será a^3-b^3, y por consiguiente, a^4-b^4, y, en general, a^m-b^m.

Tendremos, por tanto,

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1};$$

y haciendo $b-1$,

$$\frac{a^m-1}{a-1}=a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}+\ldots\ldots+a+1.$$

Este ejemplo nos dice que *la diferencia de dos potencias del mismo grado de dos cantidades es divisible por la diferencia de dichas cantidades.*

83. Es muy importante retener en la memoria la ley que observa el cociente en el ejemplo que acabamos de citar, pues sus aplicaciones son muy frecuentes, y es que *el primer término del cociente es el del dividendo con el exponente disminuido en una unidad, y que el exponente de* a *decrece en una unidad hasta el último término, en que es cero; miéntras que el de* b *aumenta en una unidad desde el primer término, en que es cero, hasta el último, en que es igual al que tiene* a *en el primer término.* Además, *todos los términos son positivos y tienen la unidad por coeficiente.*

Apliquemos esta ley á los ejemplos siguientes:

1.° $\dfrac{x^7-a^7}{x-a}=x^6+ax^5+a^2x^4+a^3x^3+a^4x^2+a^5x+a^6.$

2.° $\dfrac{x^{12}-a^{12}}{x^3-a^3}.$

Observando que el dividendo es la diferencia de las cuartas potencias de x^3 y de a^3, podemos aplicar á este caso la misma ley, y será

$$\frac{x^{12}-a^{12}}{x^3-a^3}=(x^3)^3+a^3(x^3)^2+(a^3)^2x^3+(a^3)^3=x^9+a^3x^6+a^6x^3+a^9.$$

84. Si la letra que se toma por principal entra en varios términos con un mismo exponente, se ordenarán los polinomios, reduciendo antes á un sólo término todos aquellos en que dicha letra tiene el mismo exponente, para lo cual se separará como factor comun, (31) y se efectuarán aparte las divisiones parciales del coeficiente polinomio del primer término de cada dividendo, por el coeficiente polinomio del primer término del divisor.

85. Ejemplo. *Dividir* $4a^4b^2-a^2b^4+2ab^4c-b^6-4a^4bc+a^4c^2-2a^2b^3c+2ab^5-a^2b^2c^2$ *por* $b^3+2a^2b-abc-a^2c-ab^2$.

El cuadro de los cálculos es como sigue:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
4b^2 & a^4-b^4 & a^2+2b^4c & a-b^6 \\
-4bc & \quad -2b^3c & \quad +2b^5 & \\
+c^2 & \quad -b^2c^2 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
2b & a^2-bc & a+b^3 \\
-c & \quad -b^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+2b^2c & a^3-2b^4 & a^2 \\
+2b^3 & \quad +b^3c & \\
-bc^2 & & \\
-b^2c & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l|l}
2b & a^2+b^2 & a-b^3 \\
-c & \quad +bc &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l}
2b^3 & a^3-3b^4 & a^2+2b^4c & a-b^6 \\
+b^2c & \quad -b^3c & \quad +2b^5 & \\
-bc^2 & \quad -b^2c^2 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
+b^3c & a^2-b^5 & a \\
+b^4 & \quad -b^4c & \\
+b^2c^2 & & \\
+b^3c & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l}
-2b^4 & a^2+b^4c & a-b^6 \\
+b^3c & \quad +b^5 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-b^4c & a+b^6 \\
-b^5 &
\end{array}$$

$$0$$

DIVISIONES PARCIALES.

1.ª............ $\begin{array}{r|l} 4b^2-4bc+c^2 & 2b-c \\ \cline{2-2} +2bc & 2b-c \\ \cline{1-1} -2bc+c^2 & \\ -c^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

2.ª............ $\begin{array}{r|l} 2b^3+b^2c-bc^2 & 2b-c \\ \cline{2-2} +b^2c & b^2+bc \\ \cline{1-1} 2b^2c-bc^2 & \\ +bc^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

LECCION VIII.

Fracciones algébricas, su comparacion con las numéricas.—Su simplificacion y reduccion á un comun denominador.—Mínimo múltiplo de las cantidades monomias.—Adicion y sustraccion de las fracciones algébricas.

86. Las palabras *cociente indicado* de dos expresiones literales, *dividendo* y *divisor* del mismo, se reemplazan muchas veces por sus respectivas, *fraccion algébrica*, *numerador* y *denominador*, y al contrario.

87. Las *fracciones* algébricas no deben considerarse, como las numéricas de la Aritmética, representando una ó varias partes de la unidad, en atencion á que, debiendo las letras de sus términos recibir cualquier valor, el de las *fracciones* podrá llegar á ser un número cualquiera entero, fraccionario, incomensurable, positivo ó negativo. Por consiguiente, siendo las fracciones numéricas, es decir, aquellas cuyos términos son enteros y positivos, casos particulares de las algébricas ó literales, lo demostrado para éstas quedará demostrado para aquellas; mas no podemos establecer invertido este principio, estableciendo para las literales todas las reglas demostradas para las numéricas.

88. Sin embargo, puesto que una fraccion algébrica expresa la division de su numerador por su denominador, (22) y que, multiplicando ó dividiendo un dividendo por una cierta cantidad, se muliplica ó divide el cociente por la misma cantidad; y por el contrario, multiplicando ó dividiendo un divisor por una cierta cantidad, se divide ó multiplica el cociente por igual cantidad, pueden desde luego aplicarse á las fracciones literales las reglas siguientes, demostradas en la Aritmética:

1.ª *Para multiplicar una fraccion algébrica por una cantidad entera, se multiplica el numerador por el entero, poniendo al resultado el mismo denominador; ó bien se divide el denominador por el entero, conservando el mismo numerador.*

Así, $\frac{2a}{b} \times c = \frac{2ac}{b}$ y $\frac{3a}{4b^2c} \times 2b = \frac{3a}{2bc}$.

2.ª *Para dividir una fraccion algébrica por una cantidad entera, se divide el numerador por el entero, poniendo al resultado el mismo denominador; ó bien se multiplica el denominador por el entero, conservando el mismo numerador.*

Así, $\frac{4ab^2}{3c^2} : 2b^2 = \frac{2a}{3c^2}$ y $\frac{3a^2b}{2c} : d^2 = \frac{3a^2b}{2cd^2}$.

3.ª *El valor de una fraccion algébrica no se altera, aunque se multipliquen ó dividan sus dos términos por una misma cantidad.*

Así, $\frac{4a^2b}{2bd} = \frac{2a^2}{d}$.

Y 4.ª *Para reducir varias fracciones algébricas á un denominador comun, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de todas las demás.*

Así, las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, reducidas á un comun denominador, serán:

$$\frac{adf}{bdf}, \frac{cbf}{bdf}, \frac{ebd}{bdf}.$$

89. Se dice que una fraccion algébrica es irreducible, *cuando sus dos términos son primos entre sí.*

90. De aquí se deduce que, *para reducir una fraccion algébrica á su más simple expresion, deben suprimirse todos los factores comunes á sus dos términos.*

Así, sea la fraccion $\frac{18a^2b^3c^5f}{30a^3bc^5d^2}$ la que vamos á reducir á su más simple expresion; hallemos primero el máximo comun divisor de los coeficientes, que es 6; y suprimiendo este factor, así como los literales a^2, b y c^5, que son comunes á sus dos términos, será:

$$\frac{18a^2b^3c^5f}{30a^3bc^5d^2} = \frac{3b^2f}{5ad^2}$$

91. Se llama *mínimo múltiplo* de varias cantidades literales, el producto del menor número posible de factores que sea divisible por dichas cantidades.

92. Como solo nos ocuparemos del mínimo múltiplo de los monomios, bastará fijarse en esta definicion para deducir que, *se hallará el mínimo múltiplo de varios monomios, hallando el mínimo múltiplo de los coeficientes, y escribiendo á su derecha las potencias de mayor grado de cada uno de sus factores literales.*

Así el mínimo múltiplo de los monomios $4a^3b^2d^2$, $6a^4bc^2$ y $8a^3bc^3$, será $24a^4b^2c^3d^2$.

93. *Para sumar ó restar fracciones algébricas de igual donominador, se suman ó restan los numeradores, y al resultado se le pone el denominador comun.*

En efecto, sean las fracciones $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$; y como, segun lo que hemos dicho, (73) este es el cociente de $a+b-c$ dividido por m, tendremos que

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

94. *Para sumar ó restar fracciones algébricas que tengan diferentes denominadores, se reducen á un comun denominador, y quedará este caso reducido al anterior.*

95. Si los denominadores de las fracciones, que se han de reducir á un comun denominador, no son todos cantidades primas entre sí, deberemos para esto hallar, como en Aritmética, su mínimo múltiplo, y multiplicar despues los dos términos de cada fraccion por el cociente que resulta de dividir dicho mínimo múltiplo por el denominador de la misma fraccion.

96. Ejemplo I. *Sea*

$$\frac{7a}{40\,b^2c^3}+\frac{5b}{36\,c^2d}-\frac{11c}{45\,b^4d^2}.$$

El mínimo múltiplo de los tres denominadores es $2^3.3^2.5b^4c^3d^2$, el cual dividido sucesivamente por cada uno de ellos, producirá:

$$9\,b^2d^2,\ 10\,b^4cd,\ 8\,c^3;$$

de modo que la expresion propuesta se trasformará en

$$\frac{63ab^2d^2}{360\,b^4c^3d^2}+\frac{50b^5cd}{360\,b^4c^3d^2}-\frac{88\,c^4}{360\,b^4c^3d^2}=\frac{63ab^2d^2+50\,b^5cd-88\,c^4}{360\,b^4c^3d^2}.$$

97. Ejemplo II. *Sumar las fracciones*

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}.$$

Aunque solo sabemos hallar el mínimo múltiplo de los monomios, fácilmente se reconoce, segun lo dicho, (64, 3.°) que a^2-b^2 es el de estos denominadores, por consiguiente,

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

98. Ejemplo III. Fácilmente hallaremos tambien que

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

LECCION IX.

Multiplicacion y division de fracciones algébricas.—Cálculo de las expresiones mistas.

99. *Para multiplicar dos fracciones algébricas, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, y se parte el primer producto por el segundo.*

En efecto, sea la fraccion $\frac{a}{b}$ que vamos á multiplicar por $\frac{c}{d}$. Multipliquemos el multiplicando por el numerador c, (88, 1.ª) y será

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b};$$

pero suprimiendo el denominador d se ha multiplicado el multiplicador $\frac{c}{d}$ por d, por consiguiente, el producto $\frac{ac}{b}$, hallado, es igual al que se busca multiplicado por d; luego para obtener este último, dividiremos $\frac{ac}{b}$ por d, lo cual dará $\frac{ac}{bd}$ y en su consecuencia:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

100. Del mismo modo se demuestra que, *para multiplicar una cantidad entera por una fraccion algébrica, se multiplica el numerador por dicha cantidad, y se parte el producto por el denominador.*

Así $\quad 2a\times\frac{4c^2}{d}=\frac{8ac^2}{d}.$

101. *Para dividir una cantidad cualquiera por una fraccion algébrica, basta multiplicar el dividendo por la fraccion divisor invertida.*

En efecto, sea $\frac{a}{b}$ la fraccion dividendo y $\frac{c}{d}$ la divisor. Dividiendo $\frac{a}{b}$ por c, se hallará (88, 2.ª)

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc};$$

pero suprimiendo el denominador d, se multiplica el divisor por d: luego el cociente de la division de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ se halla en este caso dividido por d; y así para obtener el cociente verdadero, multiplicaremos el hallado $\frac{a}{bc}$, por d, lo cual da $\frac{ad}{bc}$, por consiguiente,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}. \quad (99)$$

De la misma manera veríamos, que

$$a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}=a\times\frac{d}{c}.$$

102. Si las fracciones que se han de dividir tienen igual denominador, la operacion se simplifica, quedando reducida á *partir el numerador del dividendo por el numerador del divisor*, pues

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{b}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}.$$

103. *El cociente de la unidad dividida por una fraccion es la misma fraccion invertida;* pues

$$1:\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$$

104. *Para reducir una expresion mixta de entero y fraccion á una sola fraccion, se multiplica el entero por el denominador, al producto se suma ó resta el numerador, segun que el signo que precede á la fraccion es $+$ ó $-$, y al resultado se pone por denominador el mismo de la fraccion.*

En efecto, es evidente que (88, 3.ª)

$$a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}. \quad (93)$$

Ejemplo.

$$c+d-\frac{a^2-d^2-c^2}{c-d}=\frac{c^2-d^2-a^2+d^2+c^2}{c-d}=\frac{2c^2-a^2}{c-d}$$

105. Como ejemplos de ejercicio, propongámonos efectuar los cálculos siguientes:

1.º: $$\frac{\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1-a}}{\frac{1}{1-a}-\frac{a}{1+a}}.$$

Aplicando á esta expresion las reglas expuestas, el cociente es igual á 1.

2.°:
$$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Despues de aplicar á esta expresion las reglas precedentes se halla:
$$\frac{ab(a^2+b^2)}{2(a^2+ab+b^2)}.$$

106. *Para efectuar una operacion con expresiones mixtas, se pueden reducir éstas primeramente á fracciones, ó seguir las reglas de cálculo de las expresiones de forma cualquiera.*

Ejemplo. *Efectuar el cálculo*
$$\left(\frac{c+d}{2}-d\right)\frac{ab}{c-d}.$$

Despues de hacer las operaciones indicadas y simplificar, resulta $\frac{ab}{2}$.

107. Las reglas de la division de cantidades fraccionarias pueden evitarse, casi siempre con ventaja, cuando los denominadores tienen algun factor comun; pues multiplicando dividendo y divisor por el mínimo múltiplo de los denominadores, se trasforman en enteros, y la operacion queda efectuada.

Ejemplos de ejercicio.

1.°:
$$\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}.$$

Multiplicando dividendo y divisor por c, resulta:
$$\frac{abc+a+c}{bc+1}$$

2.°:
$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento, resulta:
$$\frac{2xy}{x^2+y^2-a^2}.$$

LECCION X.

Cálculo de las cantidades con exponentes negativos.—Su influencia en la forma de las expresiones algébricas.

108. La adicion y sustraccion de las cantidades afectadas de exponentes negativos, se efectuarán conforme á las reglas dadas. (71, 2.º) (93) (94).

109. Respecto á su multiplicacion, supongamos, en primer lugar, que se trata de multiplicar a^{-p} por a^{-q}. Esta operacion se reduce á

$$a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}\;;\;(71,2.º)$$

lo cual da por producto $\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-p-q}$; luego

$$a^{-p}\times a^{-q}=a^{-p-q}.$$

Igualmente puede verificarse que

$$a^{-p}\times a^{q}=\frac{1}{a^p}\times a^q=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p+q}\;;$$

$$a^{-p}:a^{q}=\frac{1}{a^p}:a^q=\frac{1}{a^p\times a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-p-q}\;;$$

$$a^{p}:a^{-q}=a^p:\frac{1}{a^q}=a^p\times a^q=a^{p+q}\;;$$

$$a^{-p}:a^{-q}=\frac{1}{a^p}:\frac{1}{a^q}=\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p}=a^{-p+q}.$$

Por consiguiente, deducimos que, *la multiplicacion y la division de las cantidades afectadas de exponentes negativos, se efectuarán siguiendo las mismas reglas de la multiplicacion y division de las cantidades cuyos exponentes son positivos.*

110. De la igualdad

$$a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$$

resulta

$$a^{p}\times a^{-p}=1;$$

y por consiguiente

$$a^{p}=\frac{1}{a^{-p}}.$$

Luego *toda cantidad de exponente positivo equivale á una fraccion, cuyo numerador es la unidad, y cuyo denominador es la misma cantidad con el mismo exponente hecho negativo.*

111. La notacion de los exponentes negativos nos permite dar la forma entera á una expresion fraccionaria, y al contrario.

Sea la expresion $\frac{a^{m}b^{n}}{c^{p}d^{q}}$, que puede escribirse así:

$$\frac{a^{m}b^{n}}{c^{p}}\times\frac{1}{d^{q}}=\frac{a^{m}b^{n}}{c^{p}}\times d^{-q}=\frac{a^{m}b^{n}d^{-q}}{c^{p}}.$$

La misma expresion puede escribirse de este otro modo:

$$\frac{a^{m}}{c^{p}d^{q}}\times b^{n},$$

y como $b^{n}=\frac{1}{b^{-n}}$ (110), será

$$\frac{a^{m}b^{n}}{c^{p}d^{q}}=\frac{a^{m}}{c^{p}d^{q}}\times\frac{1}{b^{-n}}=\frac{a^{m}}{c^{p}d^{q}b^{-n}}.$$

Por consiguiente, *todo factor puede trasladarse del numerador al denominador, ó al contrario, mudando el signo á su exponente.*

SEGUNDA PARTE.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO

CON UNA SOLA INCÓGNITA.

LECCION XI.

Clasificacion de las ecuaciones.—Resolver ecuaciones.—Caso en que una ecuacion no se altera.—Resolucion de la ecuacion de primer grado con una sola incógnita cuando tiene todos sus términos enteros.—La incógnita no tiene más que un solo valor.

112. Se dice que una ecuacion es de *primer grado*, *segundo*, etc., cuando siendo todos sus términos enteros, el mayor exponente de la incógnita es *uno*, *dos*, etc.

Así, $ax+b=cx$, es una ecuacion de primer grado; $ay^2+by=c$, del segundo; $z^3+qz^2=r$, del tercero, etc.

113. Se llama ecuacion *numérica*, la ecuacion en que todas las cantidades conocidas que entran en ella son números particulares, y ecuacion *literal*, la ecuacion en que una ó más de dichas cantidades conocidas están representadas por letras.

Así, la ecuacion $4x-8=3x+12$ es una ecuacion numérica, y la ecuacion $ax^2-3=y-bx$ es una ecuacion literal.

114. RESOLVER ECUACIONES *es hallar todos los sistemas de números que, sustituidos en ellas en vez de las incógnitas, las* SATISFAGAN, *es decir, hagan idénticos los dos miembros de cada una. A estos números es á lo que llamamos* VALORES *de las incógnitas ó* SOLUCIONES *de las ecuaciones propuestas.*

115. Las ecuaciones que se han de resolver serán solubles, cuando por una serie de transformaciones producidas en ellas y que no las alteren, lleguemos á convertirlas en otras que, no conteniendo más que una incógnita sola en uno de los miembros, y componiéndose el otro de cantidades conocidas, sea, por consiguiente, el valor de dicha incógnita.

116. Las ecuaciones se dividen en *determinadas* é *indeterminadas*. Se dice que una ecuacion es determinada cuando no tiene más que una incógnita, é indeterminada cuando tiene más de una.

117. Se dice que una ecuacion *no se altera*, cuando se transforma en otra que tenga las mismas soluciones.

118. *Si á los dos miembros de una ecuacion se añade ó resta una misma cantidad, la ecuacion no se altera;* pues es evidente que si la solucion de dicha ecuacion la satisface, ó hace que sus miembros sean idénticos, lo seguirán siendo aún despues de la adicion ó sustraccion de una misma cantidad, cualquiera que ésta sea.

119. Del mismo modo demostrariamos que, *una ecuacion no se altera, multiplicando ó dividiendo sus dos miembros por una cantidad conocida diferente de cero.*

120. *Para que una ecuacion no se altere con la multiplicacion de sus dos miembros por una misma cantidad, se necesita que esta cantidad sea independiente de la incógnita* x; pues de lo contrario, se le atribuirán soluciones que no tenga.

Así, la ecuacion $x—1=2$ no tiene más solucion que $x=3$; pero si multiplicamos sus dos miembros por $x—4$, obtendremos una ecuacion

$$(x—1)\ (x—4) = 2\ (x—4)$$

que tambien se verifica con $x=3$, pero que además es cierta siendo $x=4$.

121. *Tambien pueden dividirse los dos miembros de una ecuacion por una misma cantidad, con tal que esta cantidad sea independiente de* x.

Así la ecuacion

$$(x—1)\ (x—4) = 2\ (x—4)$$

se verifica, mediante $x=3$ y $x=4$; pero si le suprimimos el factor $x—4$, la ecuacion resultante,

$$x—1=2,$$

sólo se verifica haciendo $x=3$.

122. *En ningun caso el factor por quien se multipliquen ó dividan los dos miembros de una ecuacion, debe ser cero, pues entónces se altera la ecuacion.*

Sea la ecuacion $x—1=2$, que sólo puede verificarse suponiendo á $x=3$; miéntras que si multiplicamos sus dos miembros por 0, hallaremos la ecuacion

$$0\ (x—1) = 0,$$

que queda satisfecha con cualquier número que pongamos en lugar de x.

Por otra parte, si dividimos los dos miembros de una ecuacion por el factor cero, la ecuacion resultante carece completamente de sentido.

123. Para resolver una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, hay que considerar dos casos, segun que la ecuacion tiene todos sus términos enteros, ó que contiene términos fraccionarios.

124. *Primer caso.* Sea la ecuacion

$$ax-b=cx+d \qquad \text{(I)}$$

Segun lo dicho, (115) esta ecuacion quedará resuelta, cuando la hayamos sometido á una transformacion tal, que la incógnita se halle sola en un miembro, y que el otro contenga únicamente cantidades conocidas. Al efecto, conviene hacer desaparecer el término $-b$ del primer miembro, y el término cx del segundo, lo cual conseguiremos agregando la cantidad $+b-cx$ á los dos miembros, adicion que ya sabemos no altera (118) la ecuacion. Así, pues, hallaremos:

$$ax-b+b-cx=cx+d+b-cx;$$

ó reduciendo

$$ax-cx=b+d. \qquad \text{(II)}$$

Si ahora comparamos esta ecuacion con la (I), propuesta, observaremos que el término $-b$ ha pasado del primer miembro al segundo tomando el signo $+$, y que el término $+cx$, que estaba en el segundo miembro, se halla ahora en el primero con el signo $-$: luego

Para TRASPONER *un término de un miembro á otro, hay que suprimirle en el miembro en que se encuentre, y escribirle en el otro con un signo contrario al suyo.*

125. Volvamos á la ecuacion (II); separando en el primer miembro el factor comun x, resultará:

$$(a-c)\,x=b+d.$$

Pero esta ecuacion significa que $b+d$ es el producto de $(a-c)$ por x, y por consiguiente, tendremos el valor de x, dividiendo $b+d$ por $a-c$; esto es,

$$x=\frac{b+d}{a-c},$$

donde vemos que, *cuando uno de los miembros de una ecuacion es un monomio, que contiene á* x, *y que el otro sólo contiene cantida-*

des conocidas, se DESPEJA *esta incógnita de su coeficiente, dividiendo por él el otro miembro.*

126. La ecuacion (I) *sólo puede verificarse con el valor de x*, que acabamos de hallar; porque todo valor de x que la satisfaga, debe satisfacer tambien á todas las ecuaciones que de ella hemos ido transformando, y la última de estas transformadas sólo puede verificarse, reemplazando á x por $\frac{b+d}{a-c}$, puesto que sólo puede existir una cantidad que, multiplicada por el factor conocido $a-c$, dé un producto conocido $b+d$.

Si queremos asegurarnos *á posteriori* de que $\frac{b+d}{a-c}$ es el valor de x, *sustituiremos* esta cantidad en lugar de x, en la ecuacion (I), y con esto *deberán resultar sus dos miembros idénticos.*

Efectuando esta sustitucion, hallaremos sucesivamente:

$$\frac{a(b+d)}{a-c}-b=\frac{c(b+d)}{a-c}+d$$

ó $$\frac{ab+ad-ab+bc}{a-c}=\frac{bc+cd+ad-cd}{a-c}$$

y por último, la igualdad idéntica,

$$\frac{ad+bc}{a-c}=\frac{ad+bc}{a-c}$$

LECCION XII.

Resolucion general de la ecuacion de primer grado con una sola incógnita.—Comprobacion del valor de ésta.—Casos particulares que pueden presentarse.—Ejercicios.

127. *Segundo caso.* Consideremos ahora el caso general tomando, por ejemplo, la ecuacion

$$\frac{d}{cf}+\frac{ax}{bc}=g-\frac{dx}{bf}.$$

Si todos los términos de esta ecuacion fuesen fraccionarios con igual denominador, bastaría suprimirle, para hallarnos en el caso precedente: y esta supresion no alteraría la ecuacion propuesta, porque no se haría más que multiplicar sus dos miembros por dicho denominador (119). Reducimos, por tanto, todos sus términos, enteros y fraccionarios, á fracciones de un comun denominador, y resultará, conforme á la regla conocida, (95)

$$\frac{bd}{bcf}+\frac{afx}{bcf}=\frac{bcfg}{bcf}-\frac{cdx}{bcf},$$

y suprimiendo, como hemos dicho, el denominador comun bcf,

$$bd+afx=bcfg-cdx;$$

ecuacion de la cual deduciremos, trasponiendo los términos, bd, y $-cdx$,

$$afx+cdx=bcfg-bd;$$

separando ahora á x y b como factores comunes,

$$(af+cd)\,x=b\,(cfg-d),$$

y despejando á x de su coeficiente,

$$x=\frac{b(cfg-d)}{af+cd}.$$

128. Reasumiendo las operaciones efectuadas para resolver los dos casos que hemos considerado, enunciaremos la regla general siguiente:

Para resolver una ecuacion de primer grado con una sola incógnita, primero háganse desaparecer los denominadores multiplicando por su mínimo múltiplo cada término entero, y el numerador de cada fraccion por el cociente que se obtenga, dividiendo dicho mínimo múltiplo por su denominador, todo sin escribir divisor alguno. Efectúense luego las operaciones que hubiere indicadas; despues ejecútense todas las simplificaciones de que sea susceptible la ecuacion resultante, bien haciendo las reducciones de los términos que tenga semejantes, ó ya dividiendo sus dos miembros por sus factores comunes. Traspónganse todos los términos que contengan la incógnita á un solo miembro, y los que sean independientes de ella, al otro: vuélvase á hacer la reduccion de los términos semejantes, lo cual reducirá cada miembro á un monomio, si la ecuacion es numérica. Si literal, póngase la incógnita por factor comun de las cantidades, que multiplica; y en fin, despéjese ésta de su coeficiente. Asi, se obtendrá el único valor que puede tener dicha incógnita.

129. Ejemplo: *Resolver la ecuacion*

$$x-\frac{1}{100}-\frac{7x}{15}=\frac{7x}{20}-\frac{1}{540}+\frac{8x}{45}.$$

El mínimo múltiplo de los denominadores es $2^2.\ 3^3.\ 5^2=2700$; y haciéndolos desaparecer, resultará:

$$2700x-27-180.7x=135.7x-5+60.8x,$$

ó bien;

$$2700x-27-1260x=945x-5+480x,$$

ó reduciendo;

$$1440x-27=1425x-5:$$

y trasponiendo,

$$1440x-1425x=27-5.$$

Volviendo á reducir:

$$15x=22,$$

de donde $$x=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}.$$

130. *Comprobacion.* Como puede cometerse algun error, conviene comprobar el valor hallado para la incógnita. Para esto, se sustituye en la ecuacion propuesta $\frac{22}{15}$ en vez de x, y debe resultar una identidad. Así sustituyendo y reduciendo á un comun denominador, tendremos sucesivamente:

$$\frac{22}{15}-\frac{1}{100}-\frac{154}{15^2}=\frac{77}{15.10}-\frac{1}{540}+\frac{176}{15.45},$$

$$\frac{3960-27-1848}{2^2.\ 3^3.\ 5^2}=\frac{1386-5+704}{2^2.\ 3^3.\ 5^2},$$

$$\frac{2085}{2^2.\ 3^3.\ 5^2}=\frac{2085}{2^2.\ 3^3.\ 5^2}.$$

131. Si en los dos miembros de una ecuacion hay una misma cantidad precedida del mismo signo, se simplificará la ecuacion suprimiendo dicha cantidad. (118)

Así, sea la ecuacion

$$\frac{x+3}{2}+2=2+\frac{2x-9}{3}.$$

Suprimiendo el 2 en ambos miembros, resulta:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{2x-9}{3},$$

la cual, despues de resolverla, da:

$$x=27.$$

132. A veces resultan negativos los dos miembros de una ecuacion, y esto consiste en que en vez de pasar los términos incógnitos á un miembro, se pasan al otro. En este caso, se mudan los signos á todos los términos de la ecuacion, lo que es posible,

pues esto equivale á trasponer los miembros, ó á multiplicar ambos por -1.

Asi, sea la ecuacion

$$4x+9=7x+1.$$

Haciendo la trasposicion, resulta:

$$4x-7x=1-9,$$

ecuacion en que los dos miembros son negativos.

Mudando los signos á todos los términos, se tiene

$$7x-4x=9-1,$$

y reduciendo

$$3x=8,$$

de donde

$$x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

133. EJEMPLOS DE EJERCICIO.

I. *Resolver la ecuacion*

$$\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}x-13=\frac{5}{8}+\frac{x}{32}.$$

Solucion: $x=12$.

II. $\frac{6}{5}x-90+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}x-82.$

Solucion: $x=15$.

III. *Resolver la ecuacion literal*

$$\frac{a(x-g)}{b}-\frac{c(x-d)}{f}-d=d-\frac{d(x-c)}{f}.$$

Solucion: $x=\frac{(ag+2bd)f}{af+b(d-c)}.$

LECCION XIII.

Generalidades sobre la resolucion de los problemas.—Clasificacion de los mismos.—Generalizar un problema.—Fórmula.—Ejemplos de planteo y resolucion de problemas de primer grado con una sola incógnita.

134. La resolucion de todo problema numérico consta de dos partes distintas, que son: 1.ª *Plantear el problema.* 2.ª *Resolverlo.*

135. Plantear un problema es hallar las relaciones ó ecuaciones que establece el enunciado entre los datos y las incógnitas.

136. Resolver un problema es deducir, de la ecuacion ó ecuaciones formadas, los valores de las incógnitas.

137. Para plantear un problema, ó ponerlo en ecuacion, no hay regla fija; todo lo más general que sobre ello puede decirse, se reduce al precepto siguiente:

Examínese, ante todo y con cuidado, cuál es la cantidad ó cantidades, cuya determinacion podria conducir al conocimiento de todas las que se buscan, y aquéllas serán las verdaderas incógnitas de la cuestion; luégo, SIN HACER NINGUNA DISTINCION ENTRE LOS DATOS Y LAS INCÓGNITAS, *efectúense con unas y otras las mismas operaciones que deberian hacerse para comprobar los valores desconocidos, si estuviesen hallados, y así obtendremos la ecuacion ó cuantas ecuaciones permita el enunciado del problema.*

Respecto á resolver las ecuaciones, hasta ahora hemos dicho el modo de hacerlo, si es problema que depende de una sola ecuacion con una incógnita, (128) y de primer grado.

138. Se llama problema de *primer grado*, el problema cuya ecuacion ó ecuaciones son de primer grado; problema de *segundo grado*, aquel cuyas ecuaciones son de segundo grado, etc.

139. Un problema se llama *determinado*, cuando la incógnita ó incógnitas no tienen más que un solo valor; é *indeterminado*, cuando tienen dos ó más valores.

Un problema indeterminado se hace determinado, añadiendo á las condiciones de dicho problema las condiciones suficientes para que cada incógnita no tenga más que un solo valor.

140. Un problema se llama *particular*, cuando los datos están representados por números particulares; y *general*, si se representan con letras ó símbolos algébricos.

141. Se llama *generalizar* un problema particular, transformar su enunciado en uno general, ó que comprenda á dicho problema particular y á otros infinitos de la misma especie, sustituyendo en lugar de los datos particulares datos generales ó indeterminados.

142. El valor de la incógnita de todo problema general se llama *fórmula*.

La fórmula indica las operaciones que se deben hacer con los datos para hallar el valor de la incógnita de todo problema particular comprendido en el general á que dicha fórmula corresponde.

143. Sentadas las precedentes generalidades, volvamos á la dificultad principal de todo problema, que consiste en plantearlo

ó ponerlo en ecuacion; y tratando solamente de los problemas de primer grado, y por ahora con una incógnita, propongámonos resolver el siguiente:

PROBLEMA 1.º *Hallar el número de hombres de que se compone una division de infantería que, despues de haber destacado primero la mitad de su fuerza, luego el tercio, y últimamente la duodécima parte, ha quedado reducida á 630 hombres.*

Para plantear este problema, veamos de aplicar el precepto enunciado, (137) y desde luego reconoceremos que la incógnita del problema es el número de hombres de que se compone la division.

Supongamos este número conocido, y sea 6000 hombres; la mitad son 3000, la tercera parte 2000, y la duodécima 500: de suerte que habría destacados 5500 hombres, que, con los 630 que áun le quedan, componen 6130, y no 6000 como hemos supuesto. No satisface, pues, este número; pero hemos hecho con él una serie de cálculos, que son los que podemos repetir fácilmente con x, como lo hemos hecho con 6000, y quedará el problema en ecuacion. Así tendremos:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+630=x$$

Ya lo demas es muy sencillo: (128) multiplicando por 12, se tiene:

$$6x+4x+x+7560=12x$$

de donde llegaremos á

$$x=7560,$$

que es el número que se buscaba, como es fácil comprobar.

El valor arbitrario 6000, que hemos atribuido á x, no ha tenido otro objeto que poner á la vista aquellas operaciones, y, con alguna práctica, se puede prescindir de él.

144. Veamos, ahora, otros varios ejemplos.

PROBLEMA 2.º *Siendo las edades de un padre y su hijo, 40 y 12 años respectivamente, se desea saber cuándo la edad del padre será triple de la del hijo.*

Supongamos que esto se verifique dentro de x años: la edad del padre será entónces $40+x$, y la del hijo $12+x$; y como la primera debe ser triple de la segunda, tendremos

$$40+x=3\,(12+x)$$

de donde

$$x=2 \text{ años}.$$

Así dentro de 2 años el padre tendrá 42 años, triplo de 14 años que tendrá el hijo.

145. PROBLEMA 3.º *La suma de servicios de dos militares es de 57 años, y se sabe que el más veterano lleva 7 años de servicios á su compañero. ¿Cuál será el tiempo de servicio de cada uno de ellos?*

Sea x el tiempo servido por el más veterano, $x-7$ será el que sirvió su compañero; y como juntos han de componer 57, será:

$$x+x-7=57,$$

y

$$x=32.$$

Luego el más veterano cuenta 32 años y el otro 25.

Reparando atentamente en el enunciado de esta cuestion, se echa de ver que encierra circunstancias inútiles, y que está visiblemente reducida á la investigacion de dos números cuya suma sea 57 y su diferencia 7. Despejada así la cuestion de tales circunstancias, que no pueden ménos de ofuscar las ideas, el planteo se hace mucho mas fácil; pero el desentrañar en un enunciado lo indispensable de lo inútil, ya eso pende de una sagacidad particular, que puede adquirirse, y se desenvuelve con el ejercicio, no con preceptos de viva voz ó por escrito.

LECCION XIV.

Ejemplos de generalizar problemas de primer grado con una sola incógnita.—Ventajas de esta operacion.—Ejercicios.

146. Propongámonos *generalizar* el problema anterior, (145) y para ello, (141) trasformaremos su enunciado en el siguiente: *Hallar dos números cuya suma sea* s *y su diferencia* d.

Sea x cualquiera de los números, por ejemplo, el menor; $x+d$ será el mayor, y sumándolos tendremos la ecuacion:

$$x+x+d=s$$

y resolviéndola,

$$2x=s-d,$$

$$x=\frac{1}{2}(s-d).$$

Este es el menor de los números propuestos, y el mayor, ó $x+d$, será

$$\frac{1}{2}(s-d)+d=\frac{1}{2}(s+d);$$

luego

$$x=\frac{1}{2}(s-d),\quad x+d=\frac{1}{2}(s+d)$$

son los números que corresponden á la cuestion.

147. La fórmula, traducida al lenguaje vulgar, nos da una regla para resolver todo problema particular comprendido en el general propuesto. La regla actual es la siguiente:

Para hallar dos números, dadas que sean su suma y diferencia, el mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y el menor es igual á la mitad de la suma ménos la mitad de la diferencia.

Por medio de esta regla podremos resolver el problema particular siguiente:

Un edificio de dos cuerpos tiene 17 metros de altura, distribuidos de modo que el primer cuerpo tiene un metro más que el segundo. ¿Cuál será la altura de cada cuerpo?

Puesto que $8\,^1/_2$ y $^1/_2$ son las mitades de los números dados, sumándolas y restándolas, se hallará que 9 metros y 8 metros son las respectivas alturas de cada cuerpo del edificio.

148. Problema 4.° *Un artillero propone tirar al blanco, con la condicion de que, por cada tiro que acierte, ha de recibir 5 duros, y desembolsar 3 por cada uno de los que yerre: á los 12 tiros halló que ganaba 28 duros, y se desea saber qué número de tiros habia acertado.*

Sea x el número de tiros que acertó, $12-x$ será el de los que erró: tendrá derecho á recibir x veces 5 duros, ó $5x$, al paso que habrá desembolsado $(12-x)3$; y, como ganó 28 duros, la primera cantidad excede á la segunda en 28; luego tendremos:

$$5x-3(12-x)=28,$$

de donde resulta $x=8$, número de tiros que acertó á dar en el blanco.

149. Para generalizar este problema, trasformaremos su enunciado en el siguiente:

Hallar el número de tiros que dará en el blanco un artillero, que propone tirar, con la condicion de que le abonen ó desembolse un cierto número de duros por cada tiro que acierte ó yerre, respecti-

vamente, y sabiendo que á cierto número de tiros salió ganando una cantidad dada.

Representemos por $\left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\}$ la cantidad que $\left\{ \begin{matrix} \textit{gana} \\ \textit{pierde} \end{matrix} \right\}$ por cada tiro que $\left\{ \begin{matrix} \textit{acierta} \\ \textit{yerra} \end{matrix} \right\}$; n, el número de tiros, y d, la cantidad que salió ganando. La ecuacion será:

$$ax-b(n-x)=d,$$

de donde

$$x=\frac{bn+d}{a+b} \ldots\ldots (\alpha)$$

Esta fórmula encierra la solucion de todos los casos que puede presentar el problema. Si á los n tiros, el tirador, en vez de ganar d, pierde la misma cantidad, (37) haremos á d negativa. Si suponemos $d=0$, el valor correspondiente de x nos dirá el número de tiros que debe acertar el tirador para no ganar ni perder, si tal caso es posible; porque como x ha de ser entero, es indispensable que bn sea múltiplo de $a+b$. Así, por ejemplo, en el problema numérico propuesto, haciendo $d=0$, se tiene, $x=\frac{36}{8}$, lo cual manifiesta la imposibilidad de que, con tales datos, resulten en paz. A la misma condicion debe satisfacer, en general, el numerador $bn+d$, para que el problema tenga solucion numérica posible.

150. Las ecuaciones de todo problema general son relaciones constantes entre las cantidades indeterminadas que estas ecuaciones contienen; por consiguiente una vez obtenida la fórmula que conviene á la solucion de un problema, si en ella se mira la incógnita como dato y cualquiera de los datos como incógnita, basta hallar el valor de esta última, para tener la solucion de un nuevo problema originado por la mudanza de incógnita.

Luego *en toda ecuacion se puede tomar por incógnita cualquiera de las letras que en ella entran.*

Por ejemplo; si en el problema anterior (149) suponemos que todo es conocido ménos lo que debe desembolsar el artillero por cada tiro que yerra, es decir, que a, x, n y d son conocidas y b la incógnita, despejaremos á b en la fórmula (α), y tendremos:

$$b=\frac{ax-d}{n-x},$$

nueva fórmula correspondiente á nuevo problema, que fácilmente se deduce del enunciado propuesto.

151. PROBLEMA 5.º *Dos móviles parten al mismo tiempo de los puntos A y B, que distan d metros, y recorren la linea AB con movimiento uniforme, yendo en el sentido AB. Sus velocidades, ó espacios recorridos por minuto, son respectivamente* v^{metros} *y* v'^{metros}. *Se desea saber cuál será la distancia desde el punto A, al punto de encuentro de A con B.*

$$R' \qquad A \qquad B \qquad R$$

Supongamos que R sea el punto de encuentro, y x la distancia del punto A al R; la distancia de B al mismo punto será $x—d$. Puesto que los dos móviles parten á un mismo tiempo de los puntos A y B, y llegan tambien en el mismo instante al R, los tiempos que respectivamente emplean en recorrer las distancias AR y BR, ó x y $x—d$, deben ser iguales; de suerte que la igualdad de estos tiempos, luégo que los hallemos, nos pondrá el problema en ecuacion. Pero *en el movimiento uniforme, los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos:* luego el tiempo empleado por el móvil A en recorrer la distancia x, se calculará por la proporcion

$$v : x :: 1 : t = \frac{x}{v}.$$

Del mismo modo hallaremos que el móvil B empleará en recorrer la distancia $x—d$, un tiempo expresado por $\frac{x-d}{v'}$; por consiguiente la ecuacion será:

$$\frac{x}{v} = \frac{x-d}{v'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha')$$

de donde

$$x = \frac{dv}{v-v'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta')$$

que es la fórmula que resuelve el problema.

Si los móviles recorriesen respectivamente 15^{m} y 8^{m} por minuto, y la distancia AB fuese de 14^{m}, haríamos $v=15$, $v'=8$ y $d=14$ en la fórmula (β'), y hallaríamos

$$x = \frac{14 \times 15}{15-8} = 30.$$

Así el punto de encuentro, R, estará á 30 metros de distancia del punto A.

152. EJERCICIOS.—PROBLEMA 6.° *Queriendo una persona distribuir los cuartos que tenia entre varios pobres, vió que le faltaban 10 cuartos para dar á cada pobre 25 cuartos, y que, dando á cada uno 20 cuartos, le sobraban 30. ¿Cuántos eran los pobres?*

Solucion: 8 *pobres.*

153. PROBLEMA 7.° *Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 reales y el otro 57 rs.: el dinero con que éste segundo se levantó del juego, era la cuarta parte del que al primero le habia quedado, sin embargo de que ambos se pusieron á jugar con igual cantidad de dinero. ¿Cuál era esta cantidad?*

Solucion: 72 *reales.*

154. PROBLEMA 8.° *Preguntándole á uno qué edad tenia un hijo suyo, contestó: «si del doble de su edad se resta el triplo de la que tenia seis años ha, resultará su edad actual.» ¿Cuántos años tenia el hijo?*

Solucion: 9 *años.*

LECCION XV.

Discusion de los valores de la incógnita de una ecuacion de primer grado.—Interpretacion de los valores positivos y negativos.—Interpretacion de las expresiones $\frac{A}{0}$, $\frac{A}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, como valores de la incógnita.

155. *Discutir una ecuacion literal es examinar los diferentes valores que puede tener la incógnita, segun los valores particulares que se den á los coeficientes.*

156. Para discutir la ecuacion de primer grado con una sola incógnita, tomemos la ecuacion más general que puede darse en este grado, á saber:

$$ax+b=cx+d,$$

de la cual sale $$x=\frac{d-b}{a-c} \ldots\ldots (\beta)$$

Supongamos que a, b, c, d son números arbitrarios, pero siempre positivos, y comparándolos de todos los modos posibles, distinguiremos cinco casos, de los cuales nos ocuparemos sucesivamente.

1.er *caso.* Si con valores particulares de las cantidades a, b, c, d, se tiene $\left\{\begin{matrix} d>b \text{ con } a>c \\ d<b \text{ con } a<c \end{matrix}\right\}$ resulta en ambos casos para x un va-

lor positivo, puesto que la expresion (β) es el cociente de dividir cantidades de signos iguales, (68) valor que satisface al enunciado directo del problema.

157. 2.º *caso*. Si $\left\{\begin{matrix} b>d \text{ con } a>c \\ b<d \text{ con } a<c \end{matrix}\right\}$ el valor de x resulta negativo, puesto que es el cociente de cantidades de diferentes signos, y se interpreta, segun lo dicho, (37) tomándolo en sentido directamente opuesto al que se le supuso en el planteo de la ecuacion.

Así, en el problema 2.º (144), llamando a á la edad del padre, b á la del hijo, y n al múltiplo que se quiere que sea la primera de la segunda, tendremos:

$$a+x=n(b+x)$$

y

$$x=\frac{a-nb}{n-1}.$$

Esta fórmula, haciendo en ella

$a=42$, $b=12$, y $n=4$, da $x=-2$.

Luego este valor negativo nos dice que, con estos datos, la condicion del problema es imposible tal como se ha enunciado; pero observemos que si se muda el signo de la x en la ecuacion propuesta, se tiene

$$a-x=n(b-x)$$

y

$$x=\frac{nb-a}{n-1},$$

en la que, haciendo igual sustitucion, resulta $x=2$, es decir, que el problema correspondiente á esta nueva ecuacion es posible: luego *este valor negativo proviene de que al poner el problema en ecuacion, hemos sentado una hipótesis falsa*, suponiendo debía llegar á ser la edad del padre cuádrupla de la del hijo, cuando esto ya se había verificado dos años ántes. El problema, pues, corresponde á esta última ecuacion para ser posible, y su enunciado debe modificarse en estos términos: *¿Cuándo la edad del padre* HABRÁ SIDO *cuádrupla de la del hijo?*

158. No en todos los casos es tan fácil la interpretacion de estos valores, y muchas veces la naturaleza del problema excluye toda solucion negativa; el valor negativo indica entónces *que hay en el enunciado condiciones imposibles de satisfacer y no expresadas en las ecuaciones.*

Así en el problema 4.º (149) en que a, b y n son esencialmente positivos, si suponemos que d sea pérdida, y mayor que bn, la fórmula

$$x=\frac{bn-d}{a+b}$$

nos da un valor negativo inadmisible, á ménos que no se quiera desnaturalizar el problema modificando su enunciado por otro muy distinto.

159. El problema puede ser tambien imposible, áun cuando el valor de la incógnita sea positivo, si no satisface á otras condiciones no expresadas en las ecuaciones, como la de ser entero, lo cual hemos visto (149) en el dicho problema 4.°, donde tampoco son admisibles los valores fraccionarios.

160. 3.er *caso.* Si $d=b$ con $\left\{\begin{array}{l} a>c \\ a<c \end{array}\right\}$, resulta $x=0$, valor que satisface á la ecuacion en todo caso.

161. 4.° *caso.* Si $\left\{\begin{array}{l} a=c \text{ con } b<d \\ a=c \text{ con } b>d \end{array}\right\}$, se tiene entónces, representando por A la diferencia de valores numéricos de b y d,

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{A}{0} \\ x=-\dfrac{A}{0} \end{array}\right\}$$

Para la interpretacion de estos resultados basta tener presente que, numéricamente hablando, los cocientes van siendo mayores á medida que disminuye el divisor. Y como cero no es otra cosa que el *último estado* de magnitud por donde pasa una cantidad que disminuye indefinidamente, ó de otro modo, es el menor de todos sus valores numéricos, claro está que el quebrado $\frac{A}{0}$, ó el cociente de cualquier número absoluto por esta cantidad de pequeñez inasignable, ha de ser mayor que cualquier cantidad asignable, ó *infinito.* Por consiguiente, se dice que una *fraccion cuyo denominador es cero, sin que su numerador lo sea, es infinito.* Este valor se representa por el signo ∞.

Así pues, los valores de x en este caso serán infinitos, el uno positivo y el otro negativo, y para designarlos escribiremos

$$x=\pm\infty.$$

162. Por el mismo principio que $\frac{A}{0}$ es un símbolo muy adecuado para representar el infinito, lo es tambien $\frac{A}{\infty}$, para repre-

sentar una cantidad menor que toda cantidad asignable; así se dice *que cuando el denominador de una fraccion es infinito, el valor de la fraccion es cero*, de modo que $\frac{A}{\infty}=0$.

163. 5.° *caso*. Si $d=b$ con $a=c$, resulta $x=\frac{0}{0}$.

Esta expresion representa una cantidad que, multiplicada por cero, dé tambien cero por producto, y como todos los números satisfacen á esta condicion, debemos deducir de aquí que $\frac{0}{0}$, (que en virtud de lo dicho tambien podrá escribirse bajo la forma $\frac{\infty}{\infty}$) *es, en general, el símbolo de una cantidad indeterminada*, es decir, de una cantidad que puede tener una infinidad de valores.

164. Decimos, *en general*, porque hay casos en que una fraccion puede tener un valor determinado, aunque se presente bajo la forma $\frac{0}{0}$.

En efecto, consideremos la expresion

$$\frac{x^2-a^2}{a(x-a)},$$

que se reduce á $\frac{0}{0}$ suponiendo $x=a$. Observaremos que el numerador es lo mismo (64, 3.°) que $(x+a)(x-a)$, de suerte que suprimiendo el factor $x-a$, comun á sus dos términos, tendremos:

$$\frac{x^2-a^2}{a(x-a)}=\frac{x+a}{a}=\frac{x}{a}+1.$$

Ahora, si partiendo de un valor diferente de a, por ejemplo, mayor que a, suponemos que x decrece de una manera contínua y tiende á aproximarse á a tanto como se quiera, las cantidades $\frac{x^2-a^2}{a(x-a)}$ y $\frac{x}{a}+1$, variarán, pero permaneciendo siempre iguales; y por consiguiente, segun el teorema de los límites consignado en la Aritmética, sus límites serán tambien iguales; mas podremos asignar á x un valor bastante aproximado á a, para que la fraccion $\frac{x}{a}$ difiera de la unidad en tan poco como queramos, de suerte que el límite del binomio $\frac{x}{a}+1$, es $1+1=2$; luego tambien

$$\text{lím.}\ \frac{x^2-a^2}{a(x-a)}=2.$$

El verdadero valor de la fraccion propuesta no es, pues, indeterminado, sino es 2 cuando $x=a$; y vemos que si, en esta suposicion, ha resultado $\frac{0}{0}$ por valor de dicha fracccion, es porque sus dos términos tienen un factor comun $x-a$, el cual, como se reduce á cero en la hipótesis de $x=a$, oculta así el verdadero valor de dicha fraccion.

Luego *si una fraccion se reduce á* $\frac{0}{0}$ *por una cierta hipótesis hecha en las cantidades que la componen, es preciso examinar si sus dos términos tienen un factor comun, que tambien se reduzca á cero con la misma hipótesis. Si lo tienen, se suprime este factor, y admitiendo entónces en la fraccion simplificada la hipótesis que había dado* $\frac{0}{0}$, *tendremos el verdadero valor de la fraccion propuesta. Pero si no tienen tal factor comun, se realizará en la ecuacion á que pertenece la incógnita, la hipótesis de que se trata, y, si resolviendo esta ecuacion se convierte en una identidad, podremos decir desde luego, que dicha ecuacion es* INDETERMINADA, *ó que se satisface por todos los valores posibles de la incógnita; luego entónces* $\frac{0}{0}$ *será efectivamente un* SÍMBOLO DE INDETERMINACION.

LECCION XVI.

Interpretacion de los valores particulares de la incógnita, en la ecuacion fundamental.—Ejemplo de discusion de un problema de primer grado con una incógnita.

165. Si para la interpretacion de los valores particulares de la incógnita hallados en los cinco casos, que hemos considerado en la leccion anterior, acudimos á la ecuacion fundamental

$$ax+b=cx+d, \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

de donde resulta indiferentemente

$$x=\frac{d-b}{a-c},\ \text{ó bien}\ \ x=\frac{b-d}{c-a},$$

vemos: 1.° Que con las condiciones del 1.er *caso*, (156) se satisface á dicha ecuacion con números absolutos ó cantidades positivas, y que la *solucion es directa* y cual corresponde al enunciado de la cuestion.

2.° Que en el 2.° *caso*, (157) ya es preciso que x represente una cantidad negativa, esto es, *contada en sentido opuesto al que se le supuso en el planteo de la ecuacion*. Este resultado, al mismo tiempo que manifiesta la incompatibilidad de los datos con alguna de las operaciones propuestas, indica tambien que hay que modificar el enunciado del problema, y por consiguiente la ecuacion, para que correspondiéndose ambos mútuamente, la solucion aparezca directa. Así, puesto que en la ecuacion (γ), los términos ax y cx deben ser negativos, se escribirá

$$cx+b=ax+d,$$

que da

$$x=\frac{d-b}{c-a}, \text{ ó } x=\frac{b-d}{a-c},$$

valor que, en la hipótesis hecha, es positivo ó directo para la cuestion ya modificada, pero de significacion contraria á la supuesta primitivamente.

3.° Que con las condiciones del 3.er *caso*, (160) la ecuacion (γ) se reduce á

$$ax=cx,$$

á la cual satisface $x=0$.

4.° Que en el 4.° *caso*, (161) cuyas condiciones dan

$$ax+b=ax+d,$$

es fácil ver que, miéntras x tenga un valor asignable, es imposible que sean idénticos sus dos miembros; pero si se hace $x=\infty$, resulta

$$a\infty+b=a\infty+d,$$

ó bien

$$a+\frac{b}{\infty}=a+\frac{d}{\infty},$$

que es una identidad, puesto que $\frac{b}{\infty}$ y $\frac{d}{\infty}$ son iguales á cero (162). No hay, pues, en este caso solucion numérica, ó mejor dicho, no hay guarismo que pueda dar idea del valor de x, que es *infinito*, ó tal, que toda cantidad asignable se puede mirar como nula comparada con él, y así viene á ser una identidad la ecuacion $a\infty+b=a\infty+d$. Con datos numéricos, esta imposibilidad manifiesta un *absurdo*, que se expresa en la forma $0=\pm A$.

5.° Y por último, que en el 5.° *caso*, (163) la ecuacion (γ) sería

$$ax+b=ax+b;$$

identidad que no envuelve raciocinio capaz de enlazar á x con los datos, y á la cual se satisface con toda independencia de esta letra, y por consiguiente, con todos los valores que en su lugar quieran sustituirse.

166. Exceptuando este último caso, vemos que siempre resulta del cálculo un valor para x que satisface ó hace idénticos los dos miembros de la ecuacion propuesta, y que cuando es negativo, interpretándolo con sujecion al convenio de que la cantidad por él representada pueda tener un sentido directamente contrario al que se le habia supuesto, se obtiene la solucion del problema, la misma que se hallaría con valor positivo de x, cambiando en la ecuacion x por $-x$, y modificando el enunciado de la cuestion de manera que la nueva ecuacion sea su verdadera traduccion. Si atendiendo á las condiciones de la cuestion, la incógnita no puede tener estos dos sentidos contrarios, debería desecharse el valor negativo, y concluir de aquí que el problema es imposible. Puede tambien, sin modificar el enunciado del problema ni formar nueva ecuacion, cambiarse solamente, en la primitiva, el signo de aquellas cantidades que, teniendo modos de existencia directamente contrarios, podamos computarlas en un sentido opuesto al que tenian al establecerse la ecuacion de dicho problema.

167. La discusion del problema 5.°, (151) que hemos resuelto, nos aclarará prácticamente esta doctrina.

Consideremos, pues, en la fórmula (β') tres casos principales: que v sea mayor que v', igual á v', ó menor que v'.

1.er *caso*. $v>v'$. En esta hipótesis, el valor de x es positivo; y siendo v mayor que la diferencia $v-v'$, dicho valor es además mayor que la distancia d, como debe suceder.

168. 2.° *caso*. Si la velocidad v llega á ser igual á v', el denominador $v-v'=0$, de suerte que el valor de x tomará la forma $\frac{dv}{0}$, es decir, (161) infinito, lo cual significa que el punto de encuentro se halla entónces infinitamente apartado del punto A, de modo que los dos móviles nunca se encontrarán. Realmente esto es lo que sucede, porque siendo $v=v'$, los móviles deben estar siempre á la distancia de d metros uno del otro.

La ecuacion (α') entónces es un absurdo, pues haciendo en ella $v=v'$, se convierte en

$$\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v},$$

es decir, dos fracciones que teniendo denominador comun y numeradores diferentes no pueden nunca ser iguales.

169. Si siendo siempre $v=v'$, ó las velocidades iguales, suponemos que parten á un mismo tiempo del punto A, tendremos entónces $d=0$, y por consiguiente, el valor (β') de $x=\frac{0}{0}$(164).

En este caso examinemos la fraccion $\frac{dv}{v-v'}$, y como no hay factor comun á los dos términos, hagamos $d=0$ y $v=v'$ en la ecuacion (α'), y veremos que se reduce á la identidad $\frac{x}{v}=\frac{x}{v}$, luego el valor de x es indeterminado, es decir, que todos los puntos del camino que siguen los dos móviles son puntos de encuentro, puesto que se puede tomar la distancia de cada uno de ellos al punto A, por una solucion de la ecuacion (α').

Este resultado concuerda con las condiciones físicas de la cuestion, porque las hipótesis $d=0$ y $v=v'$ significan que los dos móviles parten al propio tiempo del mismo punto y con la misma velocidad, y por consiguiente nunca podrán separarse.

170. Si no siendo ya iguales las velocidades de los dos móviles, suponemos todavía á $d=0$, el valor x se convertitrá en $\frac{0}{v-v'}=0$, porque un producto no puede ser cero sino cuando lo es uno de sus factores. El punto de encuentro, pues, se verifica en el punto A, lo cual es evidente.

171. 3.er *caso*. $v<v'$. En este caso, el denominador de la fraccion (β') es negativo y, como el numerador es positivo, el valor de x es negativo. Esto qniere decir que la distancia del punto A al punto de encuentro debe contarse hacia la izquierda de A, en la prolongacion de BA; (157) pero como hemos supuesto en el enunciado del problema que los móviles caminan de izquierda á derecha, este ennnciado es, pues, vicioso, porque si el móvil que salió del punto A tiene una velocidad menor que el otro, nunca podrá alcanzarle si se dirige de izquierda á derecha. Bastará para rectificarlo, cambiar x en $-x$ en la ecuacion, y modificar el enunciado de esta manera:

Dos móviles que han salido al mismo tiempo de los puntos A y B, recorren la recta AB, yendo en el sentido BA. Sus velocidades, etc.

Esta nueva ecuacion es:

$$\frac{-x}{v}=\frac{-x-d}{v'},$$

ó mudando los signos,

$$\frac{x}{v}=\frac{x+d}{v'}, \ldots\ldots(\delta)$$

la cual se satisface con un valor de x igual al absoluto dado por la fórmula (β'). Luego con el convenio establecido para las cantidades negativas, esta fórmula es aplicable al caso en que $v<v'$, lo mismo que al caso en que $v>v'$.

172. Si en vez de suponer que salen ambos móviles de los puntos A y B, suponemos que se mueven desde un tiempo indefinido en la direccion AB, el que llegue á B en el instante en que el otro llega á A, ha debido en cierta época hallarse detras de éste, cuya velocidad es menor que la suya, y encontrarlo por consiguiente ántes de su llegada al punto A. El valor negativo hallado para x, siendo $v<v'$, indica, entónces, no un absurdo en el enunciado del problema, sino una falsa hipótesis que hemos sentado al colocar el punto de encuentro á la derecha de A, cuando debe estar á su izquierda. Y en efecto, si R' representa la posicion de este punto, y x la distancia AR', $x+d$ expresará la distancia BR'; de modo que áun en el supuesto de recorrer estas distancias en tiempos iguales, la ecuacion del problema actual será

$$\frac{x}{v}=\frac{x+d}{v'},$$

que es la misma (δ); y resolviéndola se satisface con un valor igual y de signo contrario al deducido de la ecuacion (α'), es decir, positivo puesto que suponemos á $v<v'$.

173. Finalmente observaremos que es fácil hacer la fórmula (β') aplicable al caso en que ambos móviles se dirigieran en sentido contrario; porque habiendo considerado como positivas las distancias medidas en el sentido AB, es claro que si los móviles se dirigen el uno hacia el otro, la velocidad del que parta de B deberá, en el caso presente, hallarse afectada del signo $-$; y que para esto, bastará cambiar en la ecuacion (α'), v' en $-v'$, lo cual dará

$$x=\frac{vd}{v+v'},$$

valor que realmente se hallaría planteando directamente el nuevo problema.

LECCION XVII.

Aplicacion de los problemas de primer grado á las reglas aritméticas dependientes de proporciones.—Regla de tres simple y compuesta.—Problemas sobre esta regla.—Regla de compañía.—Problemas sobre esta regla.

174. Las consideraciones y símbolos algébricos generalizan y facilitan mucho las reglas dadas en la Aritmética para la resolucion de los problemas dependientes de proporciones, de que nos ocuparemos sucesivamente en las tres lecciones siguientes, limitándonos á establecer las principales fórmulas que á ellos corresponden, é indicando su uso con la práctica de diversos ejemplos, puesto que se supone el conocimiento de los principios que á aquellos sirven de fundamento.

175. Regla de tres. Siempre que por alguna ley que resulta, ó de la experiencia, ó de definiciones matemáticas, ó de convenio general, una cantidad R' depende de otra D', de tal modo que variando las dos y convirtiéndose respectivamente en r' y d', se verifica la proporcion

$$\frac{R'}{r'}=\frac{D'}{d'}, \text{ ó bien } r'=R'\frac{d'}{D'}, \ldots. (1)$$

se dice, para abreviar, que *R' varía como D'*, ó que *R' y D' son proporcionales*, ó que están en *razon directa.*

La fórmula (1) en la que r' y R' representan la incógnita y su dato homólogo, y d' y D' los datos homogéneos dependientes respectivamente de r' y R', se emplea para resolver la *regla de tres simple directa.*

176. Si la dependencia entre R' y D' es tal que la proporcion que se verifica es

$$\frac{R'}{r'}=\frac{d'}{D'}=\frac{\frac{1}{D'}}{\frac{1}{d'}}, \text{ ó bien } r'=R'\frac{D'}{d'}, \ldots.. (2)$$

se dice entónces que *R' varía como $\frac{1}{D'}$*, ó que *R' y $\frac{1}{D'}$ son proporcionales*, ó que R' está en *razon inversa* de D'.

La fórmula (2), en que entran las mismas cantidades, es la que se emplea para resolver la *regla de tres simple inversa.*

177. Si R' depende de dos ó más cantidades D', D'', D'''....., en razon directa de cada una, y queremos averiguar en qué se convertirá R' cuando D', D'', D'''..... se conviertan simultánea y respectivamente en d', d'', d'''....., basta reflexionar que, debiendo verificarse estas variaciones con toda independencia unas de otras, D' puede pasar, en vista de lo dicho, (175) por todos los estados de magnitud que se representan á continuacion:

$$(R')\text{——}(D'\ D''\ D'''...)\text{——}R'$$

$$(r')\text{——}(d'\ D''\ D'''...)\text{——}r'=R'\frac{d'}{D'}.$$

$$(r'')\text{——}(d'\ d''\ D'''...)\text{——}r''=r'\frac{d''}{D''}=R'.\frac{d'}{D'}.\frac{d''}{D''}.$$

$$(r''')\text{——}(d'\ d''\ d'''...)\text{——}r'''=r''\frac{d'''}{D'''}=R'.\frac{d'}{D'}.\frac{d''}{D''}.\frac{d'''}{D'''}.$$

Siguiendo el mismo raciocinio y poniendo los acentos inferiores para distinguir este caso del anterior; si R' depende de dos ó más cantidades, $D_{,}$, $D_{,,}$, $D_{,,,}$..... (*) en razon inversa de cada una, y queremos averiguar en qué se convertirá R' cuando $D_{,}$, $D_{,,}$, $D_{,,,}$..... se conviertan simultánea y respectivamente en $d_{,}$, $d_{,,}$, $d_{,,,}$....., se hallará, en vista de lo dicho, (176) que R' pasará por cada uno de los valores siguientes:

$$(R')\text{——}(D_{,}\ D_{,,}\ D_{,,,}...)\text{——}R'$$

$$(r_{,})\text{——}(d_{,}\ D_{,,}\ D_{,,,}...)\text{——}r_{,}=R'\frac{D_{,}}{d_{,}}$$

$$(r_{,,})\text{——}(d_{,}\ d_{,,}\ D_{,,,}...)\text{——}r_{,,}=r_{,}\frac{D_{,,}}{d_{,,}}=R'\frac{D_{,}}{d_{,}}.\frac{D_{,,}}{d_{,,}}.$$

$$(r_{,,,})\text{——}(d_{,}\ d_{,,}\ d_{,,,}...)\text{——}r_{,,,}=r_{,,}\frac{D_{,,,}}{d_{,,,}}=R'\frac{D_{,}}{d_{,}}.\frac{D_{,,}}{d_{,,}}.\frac{D_{,,,}}{d_{,,,}}.$$

Si comparando ambos casos, suponemos que R' dependa, en general, de D', $D_{,}$, D'', $D_{,,}$....., se tendrá por el mismo procedimiento

$$r_{,,}''=R'\frac{d'}{D'}.\frac{D_{,}}{d_{,}}.\frac{d''}{D''}.\frac{D_{,,}}{d_{,,}}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (3)$$

Esta fórmula, en la cual r y R representan la incógnita y su dato homólogo, D y d los demás datos entre sí homogéneos, de-

(*) Léase D subprima, D subsegunda, etc.

pendientes de los primeros, ya en razon directa, ya inversa, sirve con toda generalidad para resolver cualquier caso *de la regla de tres compuesta.*

178. Ejemplo 1.º *Si 40 hombres hacen 300 metros de una obra en 8 dias, trabajando 7 horas al dia, ¿cuántos dias tardarian 51 hombres para hacer 459 metros, trabajando seis horas al dia?*

Suponiendo desde luego que todos los hombres trabajen lo mismo, haremos, para manifestar la aplicacion de la fórmula anterior, las siguientes calificaciones:

	$D_{\prime}$	D'	R'	$D_{\prime\prime}$
	Hombres.	Metros.	Dias.	Horas.
D..........	40	300	8	7
d..........	51	459	$r_{\prime\prime}'$	6

Por consiguiente la incógnita, que depende de un dato en razon directa y dos en razon inversa, se representará por

$$r_{\prime\prime}'=8.\frac{459}{300}.\frac{40}{51}.\frac{7}{6}=\frac{8.459.40.7}{300.51.6}=11,2 \text{ dias.}$$

179. Ejemplo 2.º *Suponiendo que un barco anda una milla por hora cuando recorre 55,4 piés en 30 segundos, ¿cuántas millas andará por hora si recorre 60 piés en 20 segundos?*

Solucion: $r_{\prime}'=1{,}62$ *millas.*

180. Ejemplo 3.º *Si quedando en un buque víveres para sólo 10 dias, fuera preciso contar con 15 de navegacion ó crucero, ¿A cuánto deberia reducirse la racion diaria?*

Solucion: $r_{\prime}=\frac{2}{3}$ *de racion.*

181. Ejemplo 4.º *Teniendo 960 cargas de pólvora de á $5\,^1/_2$ kilógramos una, para hacer fuego de cañon, ¿A cuánto deberá reducirse cada carga para poder hacer 1.200 disparos?*

Solucion: 4,400 kilógrs.

182. Ejemplo 5.º *¿Cuántos proyectiles del peso de 68 libras podriamos trasportar en un tren, sabiendo que con la misma máquina se habia verificado el trasporte de una carga de 30 cañones de 27 quintales de peso cada uno?*

Solucion: 1.191 proyectiles.

183. Ejemplo 6.º *De una caja de pólvora cuya capacidad es 520 dm^3, se han hecho 235 cargas para cañon: de 7 cajas de á 400 dm^3 de capacidad, ¿cuántas podrán hacerse iguales á las primeras?*

Solucion: 1.265 cargas.

184. Ejemplo 7.° *Trabajando un cajista 8 horas diarias, durante 20 dias, ha compuesto una obra de 230 páginas, cada página con 46 líneas y cada línea con 50 letras. ¿Cuántos dias tardará en componer otra obra de 600 páginas, trabajando 7 horas al dia, siendo cada página de 52 líneas y cada línea de 52 letras?*

Solucion: 70 *dias*, 2 *horas y* 25 *minutos*.

185. Regla de compañía. La regla de compañía sabemos está fundada en los repartimientos proporcionales, por consiguiente el establecimiento de la fórmula que en ella se emplea se reduce á la resolucion del problema siguiente:

Dividir un número a en dos partes que sean entre sí como m á n. Si llamamos x á una de estas partes, para hallar la otra estableceremos la proporcion

$$m:n::x:\frac{nx}{m},$$

y como juntas han de componer a, tendremos

$$x+\frac{nx}{m}=a \text{ y } x=\frac{ma}{m+n}.$$

Para dividir a en tres partes que sean entre sí como $m:n:p$, siendo x la una, la otra será, segun lo que hemos visto, $\frac{nx}{m}$ y $\frac{px}{m}$. Por consiguiente,

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$$

y

$$x=\frac{ma}{m+n+p}\dots\dots(4)$$

Esta fórmula, en la que a representa el número dado y m, n, p, los numeros á que han de ser proporcionales las partes, nos dará el valor de una de éstas, la cual sustituida en las otras dos resuelve el problema.

186. Ejemplo 1.° *Repartir el cupo de 594 hombres entre tres pueblos A, B y C, que deben entregar su contingente con proporcion á sus poblaciones: las de A y B son entre sí como 3 á 5 y las de B y C como 8 á 7. ¿Qué contingente corresponde á cada uno?*

Sea x el del pueblo A. La ecuacion será

$$x+\frac{5}{3}x+\frac{35}{24}x=594;$$

de donde $A=144$, $B=240$, $C=210$.

187. Ejemplo 2.° *Una persona, al morir, deja á su esposa la mitad de su fortuna; á cada uno de los dos hijos que tiene, la sesta parte; á su criado, la duodécima parte; y 600 pesetas, que sobran, á los pobres. ¿Qué herencia ha dejado?*

Solucion: 7.200 *pesetas*.

188. Ejemplo 3.° *Se ajustó una obra en 450.000 reales; trabajaron dos cuadrillas de obreros: la primera, de 54 hombres, trabajó 78 dias; y la segunda, de 100 hombres, trabajó 71 dias. ¿Cuánto debe pagarse por su trabajo á cada cuadrilla?*

Solucion: 1.ª=167.556,58 *reales*. 2.ª=282.443,42 *reales*.

189. Ejemplo 4.° *Tres comerciantes, A, B y C forman sociedad: A da 1200 pesetas, que las tiene en giro durante 8 meses, B da 800 durante 10 meses, y C, 600 durante 14 meses; han ganado 500 pesetas. ¿Cuánto corresponde á cada uno?*

Sea x la parte de A: la ecuacion será (*)

$$x+\frac{5}{6}x+\frac{7}{8}x=500,$$

de donde $\quad A=184\frac{8}{13},\quad B=153\frac{11}{13},\quad C=161\frac{7}{13}.$

190. Ejemplo 5.° *Se han mezclado salitre y azufre, en la proporcion de 7 y 3 partes respectivamente, para hacer una pasta de 80 kilógramos. ¿Cuánto salitre habria que añadir para que la proporcion de estos elementos fuese de 11 y 4?*

Solucion: 10 *kilógramos de salitre*.

191. Ejemplo 6.° *Tres comerciantes se han asociado para surtir un Arsenal: El primero, A, con 510 metros de paño grana; el segundo, B, con 2.000 metros paño azul; y el tercero, C, con 3.900 metros de lanilla. La calidad, y por consiguiente el precio del paño azul es los $\frac{4}{5}$ del paño grana, y el precio de la lanilla es el octavo del del paño azul. ¿Cuánto toca á cada uno de una ganancia total de 3.750 pesetas?*

Solucion: A=765 *pesetas*, B=2.400 *pesetas*, C=585 *pesetas*.

(*) Las partes deben ser proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

LECCION XVIII.

Reglas de interes simple y compuesto.—Problemas sobre estas reglas.

192. Regla de interes simple. La regla de interes simple se resuelve fácilmente por la fórmula hallada en la Aritmética,

$$y=\frac{Crt}{36000},\dots\dots (5)$$

en la que C representa el capital, t el número de dias que ha estado impuesto, y su interés y r el tanto por ciento.

De esta fórmula deduciremos el valor de cada una de las cuatro cantidades c, r, t, y, conocidas las otras tres, y tendremos resueltos los cuatro problemas distintos que pueden presentarse en la regla de interés simple.

Así, si se quiere hallar el capital que ha de imponerse al r por $^0/_0$, para que en t dias produzca y, hallaremos

$$C=\frac{36000\ y}{rt}\dots\dots (6)$$

Para hallar el tanto por ciento á que impondremos el capital C, para que en t dias produzca y, será

$$r=\frac{36000\ y}{Ct}\dots\dots (7)$$

Y para hallar el número de dias que ha de estar impuesto el capital, á fin de que al r por ciento produzca y, tendremos la fórmula

$$t=\frac{36000\,y}{Cr}\dots\dots\dots\dots (8)$$

193. Ejemplo 1.° *¿A qué tanto por ciento impondremos un capital de* 800 *pesetas, para que en* 3 *meses y* 6 *dias reditúe* 36 *pesetas?*

Solucion: 16,87 p. $^0/_0$.

194. Ejemplo 2.° *¿Cuánto tiempo es preciso colocar* 800 *pesetas al* 5 *p.* $^0/_0$, *para que al cabo de dicho tiempo se convierta esta suma en* 836 *pesetas capital é intereses?*

Solucion: 10 *meses y* 4 *dias.*

195. Ejemplo 3.° *¿Cuál es el capital que, al cabo de* 5 *meses de impuesto al* 10 *p.* $^0/_0$, *da en capital é intereses la suma de* 500 *pesetas?*

Solucion: 480 *pesetas.*

196. Interes compuesto.—El interes se llama *compuesto*, cuando se agrega al capital para que quede convertido en un nuevo capital y produzca por consiguiente un cierto interes.

Por ejemplo: supongamos que una persona recibe en préstamo 2000 pesetas al 5 p%₀ al año; cuando venza el plazo del pagaré, deberá dicha suma más sus intereses, es decir, 2100 pesetas. Si no puede pagar entónces, deberá á su acreedor, al cabo del segundo año, las 2100 pesetas que le debía al fin del primer año más los intereses de esta suma, es decir, 2205 pesetas, y así sucesivamente de año en año hasta el pago de la deuda.

197. Vamos ahora á resolver las principales cuestiones de interes compuesto.

Representemos por c el capital prestado, el número de años durante los cuales ha sido prestado por t, por C lo que llegará á ser al fin de este tiempo, y por r el *tanto por uno*, es decir, lo que produce una unidad monetaria en un año.

Puesto que 1 peseta produce r pesetas en un año, es claro que c pesetas producirán en el mismo tiempo cr pesetas; de manera que el capital al cabo de un año se habrá convertido en $c + cr = c(1 + r)$.

Así, *para tener el valor de un capital cualquiera al cabo de un año, deberá multiplicarse este capital por* $(1 + r)$.

Obtendremos, pues, el valor del nuevo capital, $c(1 + r)$, al cabo de un año, es decir del capital c pesetas al cabo de dos años, multiplicando á $c(1 + r)$ por $(1 + r)$, lo cual dará $c(1 + r)^2$. Por la misma razon, dicho capital c pesetas valdrá, al cabo de tres años, $c(1 + r)^2 \times (1 + r) = c(1 + r)^3$, y así sucesivamente. Luego al cabo de t años, el mismo capital valdrá $c(1 + r)^t$, lo cual hemos llamado C, y tendremos

$$C = c(1 + r)^t \dots\dots\dots (9)$$

fórmula que resuelve el problema, cuando la suma c ha sido prestada por un número de años cabales.

198. Los banqueros y comerciantes sólo usan la fórmula (9) cuando t expresa un número exacto de años; pero cuando t no llega á valer un año, ó es un número fraccionario, ó bien expresa un número cualquiera de años y además un cierto número de dias, calculan primero por la fórmula (9) en lo que se convierte el capital dado á los t años, y despues lo que este resultado produciría á interes simple en los dias que se tengan. Por esta razon, sólo nos ocuparemos del caso en que t exprese un número exacto de años, y, en este supuesto, deduciremos de la fór-

mula (9) los valores de cualquiera de las cuatro cantidades C, c, r, t, conociendo las otras tres; lo cual da orígen á cuatro problemas distintos. Para mayor facilidad, se aplica á estos problemas el cálculo logarítmico.

199. Así, *para hallar en lo que se convierte un capital* c *impuesto por* t *años á interes compuesto, á un tanto* r *por peseta al año*, tendremos, tomando los logarítmos en la fórmula (9),

$$\log. C = \log. c + t \log. (1+r) \ldots\ldots (10).$$

200. *Para hallar el capital* c *que se ha de imponer á interes compuesto, al tanto* r *por peseta al año, para que en* t *años se convierta en la suma* C, deduciremos de la fórmula (10):

$$\log. c = \log. C - t \log. (1+r) \ldots\ldots (11).$$

201. *Para hallar el tiempo* t *años que hemos de tener un capital* c *impuesto á interes compuesto, á un tanto* r *por peseta al año, para que se convierta en el capital* C, se tendrá la fórmula

$$t = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1+r)} \ldots\ldots (12).$$

202. Por último, *para saber á qué tanto* r *por peseta anual hay que imponer un capital, á interes compuesto, para que en* t *años se convierta en el capital* C, se hallará

$$\log. (1+r) = \frac{\log. C - \log. c}{t} \ldots\ldots (13).$$

203. Sustituyendo en cada una de estas fórmulas los valores particulares que en cada caso se tengan, y efectuando las operaciones indicadas, hallaremos los logaritmos de los resultados que se piden, de modo que dichos resultados serán los números correspondientes á estos logaritmos, á excepcion de la fórmula (12) que nos da directamente el valor de t.

204. Ejemplo 1.º *¿En cuántos años se duplica un capital impuesto al* 5 *por* 100 *al año, á interes compuesto?*

En este ejemplo conocemos el capital primitivo c, la suma del capital primitivo y de sus intereses $2c$, y el tanto por 1 que, siendo 5 el tanto por 100, será $r=0{,}05$, $1+r=1{,}05$, y la incógnita es t; luego sustituyendo en la fórmula (12) será

$$t = \frac{\log. 2c - \log. c}{\log. 1{,}05} = \frac{\log. 2}{\log. 1{,}05} = 14{,}2 \text{ años}.$$

205. Ejemplo 2.º *¿Cuál será el valor de un capital al cabo de* 100 *años, impuesto al* 5 *por* 100 *al año á interes compuesto?*

Conocemos el capital c, el tanto por uno $r=0{,}05$, el número de años $t=100$, y la incógnita es C. Si en este caso sustituimos los valores conocidos en la fórmula (9), será

$$C=c(1,05)^{100}.$$

Efectuando la potencia $(1,05)^{100}$ por medio de logaritmos, la hallaremos igual á 131 en números enteros; por consiguiente,

$$C=131c,$$

es decir, que el capital con las condiciones dadas, se hará al cabo de un siglo 131 veces mayor.

206. Ejemplo 3.º *¿Cuál es el capital que al 4 por 100, á interes compuesto, se convierte al cabo de 7 años en 9639,20 pesetas?*

Solucion: 7325 *pesetas.*

LECCION XIX.

Regla de descuento.—Problemas sobre esta regla.—Regla de aligacion.—Problemas sobre esta regla.

207. Regla de descuento. Sabemos que el descuento puede hacerse por dos métodos. El *primer método* de la regla de descuento, que se llama *racional*, se reduce á descontar del valor nominal de una letra el interes que produciría su valor actual, al tanto por ciento estipulado, durante el plazo de su vencimiento. Por consiguiente, si llamamos C al valor nominal de una letra, r al tanto por ciento de descuento, t el número de dias, ó plazo de su vencimiento, y c el valor actual, el descuento estará representado (192) por $\frac{crt}{36000}$; luego el valor nominal

$$C=c+\frac{crt}{36000}$$

nos dará, despejando á c,

$$c=\frac{36000C}{36000+rt}\ldots\ldots, (14)$$

fórmula que sirve para hallar el valor actual de la letra.

208. Pero si se quiere hallar desde luego el descuento, llamándole d, tendremos

$$d=C-c=C-\frac{36000\,C}{36000+r\,t},$$

ó bien

$$d=\frac{Crt}{36000+rt}\ldots\ldots\ldots (15)$$

209. El *segundo método* de la regla de descuento, llamado descuento *ordinario*, es el que generalmente verifica el comercio, y se reduce á descontar á la letra el interes de su valor nominal en vez del de su valor actual, como se hace en el primer método, con lo cual resulta perjudicado el tenedor de la letra, puesto que se le descuentan los intereses de una suma mayor que la que recibe. Por consiguiente, para hallar el descuento *ordinario*, basta aplicar la formula (5) del interes simple, ó

$$d=\frac{Crt}{36000}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (16)$$

210. Si se quiere hallar desde luego el valor actual c, tendremos

$$c=C-d=C-\frac{Crt}{36000},$$

ó bien

$$c=C\left(1-\frac{rt}{36000}\right)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (17).$$

211. Ejemplo 1.º *¿Cuánto valdrá actualmente una letra de 7308 pesetas, pagadera á los 3 meses, y que se quiere descontar al 6 p. °/₀?*

Solucion: { *Descuento racional* = 7200 *pesetas.*
Descuento comercial = 7198,38 *pesetas.*

212. Ejemplo 2.º *Una letra pagadera á los 3 meses y 6 dias se ha descontado al 5 p. °/₀ por el método comercial; y sabemos que si se hubiera hecho por el racional, el tenedor de dicha letra hubiera ganado 20 céntimos de peseta. ¿Cuál es su valor nominal y el de cada uno de los dos descuentos?*

Solucion: C=1140 *pesetas.* d= { *Racional* = 15 *pesetas.*
Comercial = 15,20 *pesetas.*

213. Regla de aligacion. Para resolver el primer problema de la regla de aligacion ó la regla *directa*, supongamos que se mezclen entre sí dos sustancias que no ejercen accion química la una sobre la otra, esto es, que despues de mezcladas, componen juntas el número de unidades de peso ó de volúmen de que constaban separadas: si p y p' son los precios respectivos de la unidad de cada una, el precio total de la mezcla será

$$px+p'x',$$

indicando con x y x' el número de unidades de cada clase que se han mezclado. Y como el total de la mezcla consta de $x+x'$

unidades, es claro que el precio de cada unidad de la mezcla, ó el precio medio, será, llamándole z,

$$z=\frac{px+p'x'}{x+x'}.$$

Si hubiesen de entrar en la mezcla x'' unidades de otra sustancia, cuyo precio fuese p'', es evidente que bastaría agregar en la expresion de z los términos $p''x''$ y x'', respectivamente, en numerador y denominador. Cualquiera, pues, que sea el número de sustancias, tendremos

$$z=\frac{px+p'x'+p''x''+\ldots.}{x+x'+x''+\ldots.}, \ldots\ldots (18)$$

fórmula que resuelve el primer problema de la regla de aligacion y tiene frecuentes aplicaciones.

214. Ejemplo 1.° *Se quieren mezclar 9 onzas de oro de 20 quilates* (*) *con 7 onzas de 18 quilates. ¿Cuál será la ley de la mezcla?*

En este ejemplo, $x=9$, $x'=7$, $p=20$ y $p'=18$, por consiguiente

$$z=\frac{9\times 20+7\times 18}{16}=19\frac{1}{8}=19^{\text{quilates}} \text{ y } 4^{\text{granos}}.$$

215. Ejemplo 2.° *En una obra se han invertido 100 jornales pagados á 15 rs., 125 á 12 y 300 á 8. ¿Cuál es el precio medio á que salen estos jornales?*

Solucion: 10,28 *reales.*

216. Ejemplo 3.° *Un banquero tiene tres letras que pagar en tres plazos diferentes: una de 2832 pesetas, á los 3 meses; otra de 2560 pesetas, á los 9 meses, y la otra de 1450 á los 16 meses fecha. El acreedor quiere recibir la suma total de 6842 pesetas en un solo pago. ¿Cuál será el vencimiento medio con que debe girársele esta nueva letra?*

Solucion: 8 *meses.*

217. Para resolver el segundo problema de la regla de aligacion ó la regla *inversa*, que sabemos es, cuando se piden las cantidades que han de entrar en la mezcla, dados sus precios y el precio medio, habría que buscar las cantidades x, x'....., cono-

(*) Para apreciar la cantidad de oro que contiene este metal, se supone dividida su masa en 24 partes que se llaman *quilates*, y cada uno de éstos en 32 granos. Así, oro de 20 quilates, quiere decir: que en 24 unidades de peso, hay 20 de oro puro y las cuatro restantes de *liga* ó mezcla de otros metales.

ciendo los precios z, p, p'..... en tal caso, la ecuacion (18) contiene varias incógnitas y el problema es indeterminado.

Suponiendo que sean dos las sustancias mezcladas, sabemos que las cantidades están en razon inversa de las diferencias de sus precios al precio medio: tendremos, por lo tanto, la relacion entre las incógnitas

$$\frac{x}{x'}=\frac{p'-z}{z-p}=\frac{z-p'}{p-z},$$

á la que se satisface con

$$x=z-p',\quad x'=p-z\ldots\ldots(19)$$

y con todos los equimúltiplos y equisubmúltiplos de estos valores.

218. Ejemplo 4.º *Con dos clases de aguardiente de 20 y de 14 grados, se quiere hacer una mezcla que resulte de 16 grados. ¿Cuánto tomaremos de cada especie?*

Sustituyendo en la fórmula (19), tendremos

$$x=2,\ x'=4.$$

Habrá, pues, que mezclar una unidad de la primera especie con dos de la segunda, para que resulten 3 de la intermedia que se busca.

219. Si hubiese otra condicion que hiciese el problema determinado, se pondria en ecuacion y se resolvería ésta como las ecuaciones de primer grado. Por ejemplo: Se quiere mezclar vino, cuyo precio es p, con vino cuyo precio es p', para formar una mezcla de un número m de litros, cuyo precio sea z.

Sea x el número de litros de la primera especie; $x'=m-x$ serán los que deben tomarse de la segunda; sus valores respectivos, px y $(m-x)p'$, y el de la mezcla mz: luego la ecuacion será

$$px+(m-x)p'=mz,$$

de donde

$$x=\frac{m}{p-p'}(z-p'),\ x'=\frac{m}{p-p'}(p-z)\ldots\ldots(20).$$

Estas fórmulas nos dicen que los valores hallados en la (19) habrá que multiplicarlos por $\frac{m}{p-p'}$.

Así, en el ejemplo 4.º (218), si se quiere que la mezcla contenga 30 cuartillos, los resultados 2 y 4 deberían multiplicarse por $\frac{30}{20-14}=5$, determinando así en 10 y en 20 cuartillos los respectivos valores de x y x'.

220. Ejemplo 5.° *Un comerciante tiene dos clases de té; la una de 54 reales libra y la otra de 42 reales, y quiere saber cuántas libras tomará de cada clase para componer 100 libras, cuyo precio sea 50,40 reales.*

Solucion: $x=70$ *libras,* $x'=30$ *libras.*

221. Ejemplo 6.° *Un vinatero ha comprado 136 litros de vino á 2 pesetas litro: pero temiendo que este precio no convenga á su especulacion, quiere añadirle agua, á fin de poderlo vender á 1,60 pesetas. ¿Cuántos litros de agua deberá añadirle?*

Solucion: 34 *litros.*

222. Ejemplo 7.° *Teniendo 35 kilógramos de plata cuya ley es de 0,900, ¿con qué cantidad de cobre debe mezclarse para que la mezcla sea de 0,7875 de ley?*

Solucion: 5 *kilógramos.*

TERCERA PARTE.

ECUACIONES Y PROBLEMAS DE PRIMER GRADO

CON VARIAS INCÓGNITAS.

LECCION XX.

Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita.—Sistema de ecuaciones.—Su clasificacion.—Métodos de eliminacion.—Resolucion de un sistema de ecuaciones numéricas por igualacion.—Resolucion de un sistema de ecuaciones numéricas por sustitucion.

223. Los problemas contienen muchas veces varias incógnitas, que están ligadas las unas con las otras por medio de relaciones bastante fáciles de comprender para que, siendo conocida una de ellas, puedan calcularse sencillamente todas las demás. En este caso, puede tratarse el problema como si en realidad sólo tuviese una incógnita: esto es lo que hemos hecho en los que se han resuelto en los párrafos (145 y (148). Pero no siempre sucede lo mismo, y las relaciones de que se trata son algunas veces muy difíciles de desentrañar: en tal caso, es preferible hacer que entren todas las incógnitas en el cálculo, representando cada una de ellas con una letra diferente. De esta manera nos vemos en el caso de resolver un *sistema de ecuaciones*, que es el conjunto de dos ó más ecuaciones que se han de *satisfacer* con unos mismos valores de las incógnitas.

224. Se dice que un sistema de ecuaciones es *determinado*, cuando hay tantas ecuaciones diferentes como incógnitas.

225. Si el número de ecuaciones distintas de que consta un sistema es menor que el número de incógnitas, el sistema se llama *indeterminado*.

226. Se dice que un sistema es *imposible ó más que determinado*, en el caso de tener más ecuaciones que incógnitas; se llama imposible porque varias de estas ecuaciones no se pueden verificar sino condicionalmente, por lo cual se las llama *igualda-*

des ó ecuaciones de condicion á las relaciones de igualdad que se han de verificar entre las cantidades conocidas para expresar la condicion de que todas las ecuaciones se verifiquen por unos mismos valores de las incógnitas.

227. En estas Lecciones sólo indicaremos ligeramente el modo de resolver un sistema determinado, esto es, cuando el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, y para ello consideraremos cada una de las ecuaciones reducidas á la forma general

$$ax+by+cz+\ldots\ldots=K,$$

en que los coeficientes a, b, c..... son números enteros, lo cual siempre es posible si se quitan los denominadores, se efectúan las operaciones indicadas, se hace la trasposicion y la reduccion de los términos semejantes.

228. Esto supuesto, para llegar á obtener los valores de las incógnitas, se puede proceder de uno de estos modos:

1.° Por igualacion. Se despeja en cada una de las ecuaciones dadas una misma incógnita, suponiendo al efecto que todas las demás cantidades son conocidas, é igualando luego dos á dos estos valores de la incógnita, resulta una ecuacion y una incógnita ménos que las propuestas. La repeticion de este procedimiento *elimina* otra incógnita y otra, hasta venir á parar en una ecuacion con una sola incógnita, que determina, como ya sabemos, (128) su valor; conocido este valor se sustituye en una de las inmediatas, y así sucesivamente para ir determinando las demás.

229. Sean, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$9x-4y=17$$
$$3x+5y=50.$$

De la primera sacamos

$$x=\frac{4y+17}{9},$$

y de la segunda

$$x=\frac{50-5y}{3};$$

igualando estos valores, tendremos la ecuacion

$$\frac{4y+17}{9}=\frac{50-5y}{3},$$

que no contiene más que una incógnita, y de la que deduciremos

$$12y+51=450-45y$$

ó

$$57y=399, \quad \text{é} \quad y=\frac{399}{57}=7.$$

Sustituyendo este valor en cualquiera de las expresiones halladas por valor de x, por ejemplo en la primera, tendremos

$$x=\frac{4.7+17}{9}=\frac{45}{9}=5,$$

luego $x=5$ é $y=7$ forman la solucion de las ecuaciones propuestas.

230. Sean ahora las ecuaciones

$$\begin{aligned}2x+5y-3z&=3\\3x-4y+z&=-2\\5x-y+2z&=9;\end{aligned}$$

sacaremos

$$z=\frac{2x+5y-3}{3}=4y-3x-2=\frac{9+y-5x}{2}.$$

Igualando estos valores dos á dos y quitando denominadores, hallaremos las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}2x+5y-3&=12y-9x-6\\8y-6x-4&=9+y-5x,\end{aligned}$$

que se reducen á

$$\begin{aligned}7y-11x&=3\\7y-x&=13.\end{aligned}$$

De estas dos se deduce, igualando los dos valores de $7y$,

$$3+11x=13+x;$$

y de aquí

$$x=1.$$

Sustituyendo este valor en una de las anteriores, se obtiene el de y, y luego sustituyendo los de x é y en cualquiera de los tres valores de z, se hallará facilmente

$$y=\frac{3+11}{7}=2,\ z=\frac{2+5.2-3}{3}=3,$$

luego $x=1$, $y=2$ y $z=3$, forman la solucion de las ecuaciones propuestas.

231. 2.° Por sustitucion. Se halla el valor de una incógnita deducido de cualquiera de las ecuaciones propuestas, como en el caso anterior; se sustituye en las demás; resultando así una ecuacion y una incógnita ménos cada vez que se reitera este procedimiento, hasta venir á parar en una ecuacion con una sola incógnita, que determina su valor, y éste el de las demás, como ya sabemos.

232. Así, por ejemplo, sean las ecuaciones

$$\frac{3x}{10}-\frac{y}{15}-\frac{4}{9}=\frac{x}{12}-\frac{y}{18}$$

$$2x-2\frac{2}{3}=\frac{x}{12}-\frac{y}{15}+1\frac{1}{10}.$$

Principiemos por reducirlas á la forma general, quitando los denominadores, y tendremos

$$54x-12y-80=15x-10y$$
$$120x-160=5x-4y+66,$$

ó bien

$$39x-2y=80$$
$$115x+4y=226.$$

De la primera sacamos

$$y=\frac{39x-80}{2};$$

y sustituyendo este valor en la segunda, hallaremos

$$115x+78x-160=226,$$

de donde

$$x=2.$$

Sustituyendo ahora 2 por x en la expresion de y, resulta

$$y=-1,$$

de suerte que $x=2$, $y=-1$, forman la solucion de las ecuaciones propuestas.

233. Sean asimismo

$$3x+2y=12$$
$$2z+y=5$$
$$x+y+3z=8$$

Despejando la y en la segunda de estas ecuaciones y sustituyendo su valor en las otras dos, se convierten en

$$3x-4z=2$$
$$x+z=3.$$

Despejando la x en la segunda y sustituyendo su valor en la primera, la transforma en

$$9-3z-4z=2,$$

que da

$$z=1,$$

y por consiguiente

$$x=3-1=2,\quad y=5-2=3;$$

de modo que

$$x=2,\ y=3,\ z=1$$

forman la solucion de las ecuaciones propuestas.

LECCION XXI.

Resolucion de un sistema de ecuaciones numéricas por reduccion.—Resolucion general de un sistema determinado de ecuaciones de primer grado.

234. 3.° Por reduccion. Este método, que es el que se usa con más frecuencia, está fundado en que por la condicion que han de tener los valores de las incógnitas de satisfacer á un mismo tiempo á todas las ecuaciones, ó ser simultáneas, si entre varias incógnitas x, y, z..... se tienen las ecuaciones

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ldots..$$

en las que A, B, C..... representan combinaciones de las incógnitas x, y, z..... con cantidades conocidas, se tendrá tambien

$$A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots\ldots=0$$
$$ABC\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$
$$mA \pm nB \pm pC \pm \ldots..=0,$$

esto es, que podrán combinarse las ecuaciones propuestas del modo que se presente más ventajoso para la eliminacion que se quiere verificar, y cualquiera de estas combinaciones en que entre A, por ejemplo, podrá reemplazar á la ecuacion $A=0$.

235. En este supuesto, generalmente se preparan las ecuaciones de modo que sumando dos de ellas se elimine una incógnita, y para esto se multiplican alternadamente por un factor apropósito con objeto de que los coeficientes de dicha incógnita resulten iguales y de signos contrarios, si es que no lo son, ó bien se aprovecha cualquiera otra combinacion que conduzca al mismo fin; resultando así una ecuacion y una incógnita ménos con la repeticion de este procedimiento hasta llegar á una sola ecuacion con una incógnita sola, como en los casos anteriores.

236. Tomemos, por ejemplo, las tres ecuaciones que hemos resuelto en el segundo ejemplo del primer caso (230), y es evidente que si la primera de dichas ecuaciones se multiplica por 3 y la segunda por —2, los coeficientes de x resultarán iguales en ambas, y de signos contrarios; esto es,

$$6x+15y-9z=9$$
$$-6x+8y-2z=4,$$

de suerte que sumando estas ecuaciones se elimina en ellas la x, y resultará

$$23y-11z=13.$$

Lo mismo podríamos hacer con la segunda y tercera ecuaciones, multiplicándolas respectivamente por 5 y por -3; pero hay otra combinacion más sencilla, sumando la primera y segunda y restando de la suma la tercera, lo cual da inmediatamente

$$y-2z=-4;$$

luego despues de eliminada en las tres ecuaciones la incógnita x, quedan reducidas á las dos

$$23y-11z=13$$
$$y-2z=-4.$$

Para eliminar ahora otra incógnita, la y, por ejemplo, en estas dos ecuaciones, multipliquemos la segunda por -23 y, sumándola despues con la primera, resulta

$$35z=105$$

de donde $z=3$,

y de cualquiera de las anteriores, $y=2$.

La suma de las tres da

$$10x=10,$$

ó $x=1.$

Por consiguiente $x=1$, $y=2$ y $z=3$, forman la misma solucion de estas ecuaciones hallada anteriormente.

237. Si los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar entre dos de estas ecuaciones, siendo desiguales, no son primos entre sí, se podrá tomar por factor para igualar los valores absolutos de dichos coeficientes, el cociente de dividir su mínimo múltiplo por cada uno de ellos.

Así en las ecuaciones

$$10x+15y-24z=41$$
$$15x-12y+16z=10$$
$$18x-14y-7z=-13$$

eliminaremos la x entre la 1.ª y 2.ª hallando primero el mínimo múltiplo 30 de los coeficientes 10 y 15 y, como los cocientes de dividir aquel por estos son 3 y 2, multiplicándolas respectivamente por 3 y por -2 y sumándolas despues miembro á miembro; luégo entre la 2.ª y 3.ª, del mismo modo, multiplicando aquella por 6 y esta por -5 y sumándolas, con lo que resultarán las dos ecuaciones

$$69y-104z=103$$
$$-2y+131z=125$$

Ahora la eliminacion de la y se efectuará entre estas dos ecuaciones, multiplicándolas alternadamente por sus coeficientes, pues son primos entre sí, y sumándolas, con lo que se tendrá

$$8831z = 8831$$

ó $$z = 1;$$

y finalmente deduciremos, $y = 3$ y $x = 2$.

238. Veamos ahora el caso en que las ecuaciones sean literales, y tomemos

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (\alpha'').$$

Eliminemos á x por cualquiera de los tres procedimientos antes empleados, por ejemplo, el 3.° Ahora bien, para que x tenga coeficientes iguales y de signos contrarios, suponiendo que estos sean primos entre sí, será preciso y suficiente multiplicar la 1.ª por $-a'$ y la 2.ª por a.

Efectuando, pues, estas multiplicaciones y sumando, resulta inmediatamente

$$ab'y - ba'y = ac' - ca'.$$

Despejando la incógnita y en esta ecuacion y sustituyendo su valor en una de las propuestas, deduciríamos de esta última el correspondiente de x; pero en la práctica será muchas veces más cómodo, para obtener á x, eliminar á y en las ecuaciones (α'') y deducir su valor de la ecuacion resultante. Así, multiplicando la 1.ª por b' y la 2.ª por $-b$, y sumando los productos, se obtiene

$$ab'x - ba'x = cb' - bc'.$$

Finalmente, de las dos ecuaciones halladas se deduce

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \dots\dots (\beta'')$$

239. Estas fórmulas generales pueden servir para resolver dos ecuaciones numéricas de primer grado con dos incógnitas, sin someterlas á ninguno de los procedimientos antes dichos.

En efecto, sean las ecuaciones

$$\begin{aligned} -x + y &= 3 \\ 3x - y &= 4. \end{aligned}$$

Comparando estas ecuaciones con las literales (α''), vemos que para identificar estas con aquellas, bastará que hagamos

$$a = -1,\ b = 1,\ c = 3,\ a' = 3,\ b' = -1,\ c' = 4,$$

y sustituir luégo estos valores en las fórmulas (β''), lo cual dará

$$x = \frac{3 \times -1 - 1 \times 4}{-1 \times -1 - 1 \times 3} = \frac{-3 - 4}{1 - 3} = 3\frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{-1 \times 4 - 3 \times 3}{-2} = \frac{-4 - 9}{-2} = 6\frac{1}{2}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento podríamos hallar las fórmulas generales para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas; pero no lo hacemos por ser poco conveniente su aplicacion.

240. Reasumiendo lo expuesto sobre la resolucion de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas podemos dar la regla general siguiente:

Para resolver un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, se elimina primero una incógnita entre una ecuacion y cada una de las demás, y se obtiene un nuevo sistema de una ecuacion y una incógnita ménos; se elimina en éste otra incógnita entre una de las ecuaciones y cada una de las demás, lo cual nos da otro sistema que ya tiene dos ecuaciones y dos incógnitas ménos que el propuesto; y así se continúa hasta llegar á una ecuacion con una sola incógnita de la cual se deduce su valor; una vez hallado éste se sustituye en una ecuacion del sistema anterior que contenga una segunda incógnita, de la cual se deducirá su valor: los dos valores hallados se sustituirán en una ecuacion del sistema que anteceda que contenga una tercera incógnita, de cuya ecuacion se deducirá el valor de esta tercera incógnita, y así sucesivamente hasta haber obtenido los valores de todas las incógnitas.

241. Ejemplo 1.° *Resolver las ecuaciones*:

$$\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6}$$

$$\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}-1=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{1}{10}$$

Solucion: $x=3$, $y=2$.

Estos valores pueden comprobarse, como hemos dicho, sustituyéndolos en las ecuaciones dadas, que deberán convertirse en identidades.

242. Ejemplo 2.°

$$7u-13z=87$$
$$3u+14x=57$$
$$10y-3x=11$$
$$2x-11z=50.$$

En este caso sucede que la incógnita y no entra más que en la tercera ecuacion; por lo tanto, se prescinde de esta ecuacion, y en las otras tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Cada incógnita entra en dos de estas ecuaciones y así es casi indiferente principiar la eliminacion por cualquiera de las incógnitas. Eliminemos la u entre la primera y segunda, y resulta

$$98x+39z=138.$$

Esta ecuacion y la cuarta son dos ecuaciones con dos incógnitas: de ellas resulta

$$x=3,\ z=-4,$$

y por consiguiente,

$$y=2,\ u=5.$$

243. Ejemplo 3.°

$$3x+6y-2z+9u=6$$
$$4y-5x+5z-6u=5$$
$$2z-3x+8y-3u=3$$
$$9u+10y+3z-4x=9.$$

Solucion: $x=2,\ y=\frac{1}{2},\ z=3,\ u=\frac{1}{3}$.

LECCION XXII.

Discusion de un sistema determinado de ecuaciones de primer grado.

244. En un sistema determinado de ecuaciones de primer grado, podemos llegar, como en el caso de una ecuacion con una sola incógnita, á valores positivos, negativos y nulos, y á valores de la forma $\frac{A}{0}$ y $\frac{0}{0}$. Respecto á los primeros, creemos haber dicho lo suficiente: los valores negativos, si las condiciones ó naturaleza del problema los admite, interpretados en un sentido contrario al en que estén, equivalen á los positivos correspondientes al problema modificado: $\frac{A}{0}$ sabemos que es el símbolo del infinito, y donde quiera que lo encontremos determina la existencia de condiciones imposibles de satisfacer con ningun valor numérico; y por último, $\frac{0}{0}$ representa la indeterminacion, y ya dijimos que algunas veces procede este valor de la existencia de un factor comun á los términos del quebrado, que, si se suprime, desaparece con él la indeterminacion.

245. Para concretar estos resultados, tomemos las fórmulas (β''), y presuponiendo que las cantidades a, b, c y a', b', c' no sólo son independientes entre sí, sino tambien de las incógnitas,

y por consiguiente arbitrarias, si para un caso particular, es decir, en una ecuacion numérica donde ya desaparece esta supuesta arbitrariedad de los datos, resultase entre ellos la condicion de ser $ab'=ba'$, los valores de x é y serían entónces

$$x=\frac{cb'-bc'}{o}=\frac{ca'-ca'}{o}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{o}=\frac{bc'-cb'}{o},$$

es decir, infinitos y además de signos contrarios, puesto que en la hipótesis $ab'=ba'$, si $a\gtrless a'$ ha de ser $b\gtrless b'$. No hay, pues, medio de satisfacer á las ecuaciones (α'') en este caso, con valores finitos de x é y, y entónces se dice que *estas ecuaciones son incompatibles*. En efecto, si en la 2.ª de dichas ecuaciones se pone por b' el valor $\frac{a'}{a}b$ deducido de la hipótesis $ab'=ba'$, resultará

$$a'x+\frac{a'}{a}by=c',$$

de donde quitando el denominador y partiendo por a', se halla

$$ax+by=\frac{a}{a'}c';$$

luego el sistema de las ecuaciones (α'') se habrá convertido en

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c\\ ax+by&=\frac{a}{a'}c' \end{aligned}\right\}(\varphi)$$

ecuaciones que son incompatibles, ó no pueden verificarse al mismo tiempo, cualquiera que sea el valor que demos á x é y, puesto que sus primeros miembros son idénticos y los segundos diferentes porque, si tuviésemos $c=\frac{a}{a'}c'$, resultaría de aquí $ac'=ca'$, lo cual no sucede; solamente pueden verificarse las ecuaciones (φ) con los respectivos valores $\pm\infty$.

246. Supongamos ahora que sean á un mismo tiempo $ab'=ba'$ y $cb'=bc'$. El valor de x se reduce á $\frac{0}{0}$, y el de y parecerá ser infinito; pero veremos que tambien es $\frac{0}{0}$. En efecto, de las hipótesis

$$ab'=ba'$$
$$cb'=bc'$$

se deduce fácilmente

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

de donde

$$ac'=ca'.$$

Dos cualesquiera de estas condiciones determinan la tercera; por consiguiente, *los valores de* x *é* y *son ambos de la forma* $\frac{0}{0}$, *siempre que dos de las tres expresiones que constituyen las fórmulas* (β'') *sean iguales á cero.*

Para acabar de conocer si estos valores son indeterminados, segun lo dicho (164), *sustituyamos en las ecuaciones* (α'') *las hipótesis sentadas*; mas equivaliendo estas hipótesis á las razones iguales

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

si representamos por m el valor comun de estas razones, resultará

$$a=ma',\ b=mb',\ c=mc',$$

y por consiguiente, la primera de las ecuaciones (α'') se convertirá en

$$ma'x+mb'y=mc',$$

que no siendo más que el producto de la 2.ª por m, se reduce á ésta, suprimiendo el factor m. Así pues, sólo tendremos una ecuacion entre las dos incógnitas x é y,

$$ax+by=c,$$

que da

$$x=\frac{c-by}{a},\ y=\frac{c-ax}{b},$$

expresiones en las cuales es preciso suponer á y, ó bien á x, valores arbitrarios para obtener los de x ó de y; luego estas incógnitas son indeterminadas.

247. Supongamos, por último, que $a=a'=0$; el valor de x tomaría la forma $\frac{A}{0}$, y el de y la de $\frac{0}{0}$, anunciando para este caso particular una incompatibilidad y una indeterminacion. Las ecuaciones (α''), con tal suposicion, se reducirían á

$$by=c$$
$$b'y=c',$$

que evidentemente no pueden verificarse sin que, además de la condicion anterior, se tenga $bc'=cb'$, y entónces resulta $x=\frac{0}{0}$ ó indeterminado. Sin embargo, el valor de y no es indeterminado sino aparentemente, á causa de la existencia del factor comun que la hipótesis de $a=a'=0$, introduce en los términos del quebrado $\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$; y partiendo por dicho factor se tiene

$$y=\frac{c'-c}{b'-b}, \text{ ó } y=\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'},$$

resultado que concuerda con las ecuaciones modificadas por la hipótesis.

LECCION XXIII.

Problemas determinados de primer grado con varias incógnitas.

248. Los problemas propuestos en los párrafos (145) y (148) contienen dos incógnitas, y sin embargo, los hemos resuelto representando una sola por una letra. Resolvámoslos nuevamente representando cada incógnita por una letra.

PROBLEMA 3.° Sean x é y los tiempos de servicio del militar más veterano y su compañero respectivamente; las ecuaciones serán:

$$x+y=57$$
$$x-y=7$$

de donde resulta

$$x=32,\ y=25.$$

PROBLEMA 4.° Sea x el número de los tiros que acertó é y el de los que erró. Tendremos

$$x+y=12$$
$$5x-3y=28,$$

y por consiguiente

$$x=8,\ y=4.$$

249. Pasemos ahora á otros problemas que contienen varias incógnitas.

PROBLEMA 1.° *Preguntaron á una persona cuál era su edad, la de su padre y la de su abuelo, y respondió: «Mi edad y la de mi* *padre reunidas componen 56 años; la de mi padre y mi abuelo 100, y la mia y la de mi abuelo 80.» ¿Cuál era la edad de cada uno?*

Sea x la edad de dicha persona, y la del padre, z la del abuelo.

Las ecuaciones serán

$$x+y=56$$
$$y+z=100$$
$$x+z=80.$$

Resolviendo estas ecuaciones, resultan

$$x=18,\ y=38,\ z=62.$$

Para generalizar este problema lo enunciaremos así: *Hallar tres números que sumados dos á dos dén las sumas* a, b *y* c.

Sean x, y, z los tres números, tendremos:

$$x+y=a$$
$$x+z=b$$
$$y+z=c.$$

que, haciendo $a+b+c=2p$, dan

$$x=p-c$$
$$y=p-b$$
$$z=p-a.$$

250. PROBLEMA 2.° *Una persona ha recibido 185 monedas de á 5 y de á 2 pesetas, por valor de 745 pesetas. ¿Cuántas ha recibido de cada especie?*

Solucion: 125 *de á* 5 *pesetas*; 60 *de á* 2 *pesetas.*

251. PROBLEMA 3.° *Tres soldados,* A, B, C, *se han hallado cada uno una bolsa de dinero en el campo de batalla: reunieron sus hallazgos, que componian en total 384 reales, y determinaron repartirlo igualmente; para ello* A *dió á* B *y á* C *tanto como cada uno de estos tenia, luégo* B *hizo otro tanto con* A *y* C, *y por último,* C *hizo lo mismo con* A *y* B, *despues de cuya operacion cada uno se halló con igual cantidad. ¿Cuánto dinero contenia cada bolsa?*

Sea x el dinero que encontró A, y el de B, y z el de C.

Las ecuaciones, despues de la última operacion, serán

$$4(x-y-z)=128$$
$$2(2y-2z-32)=128$$
$$4z-128=128,$$

de las que se encuentra

$$A=208,\quad B=112,\quad C=64.$$

252. PROBLEMA. 4.° *Varios oficiales de artilleria tuvieron una comida á escote para celebrar el dia de su Patrona. Si 5 de ellos,*

que no recibieron invitacion, hubiesen concurrido, cada uno de los de la reunion hubiera pagado 1 peseta más y el gasto se hubiera aumentado en 61,50 pesetas; pero si de los que asistieron hubiesen faltado 3, pagando cada uno 1,50 pesetas ménos, el gasto hubiera disminuido en 42 pesetas. ¿Cuántos oficiales asistieron á la comida y cuánto le tocó pagar á cada uno?

Sea x el número de oficiales é y el número de pesetas que tocó á cada uno.

Las ecuaciones serán

$$(x+5)\,(y+1)=xy+61,50$$
$$(x-3)\,(y-1,50)=xy-42.$$

Resolviéndolas, resultan

$$x=14 \text{ oficiales}, \quad y=8,50 \text{ pesetas}.$$

LECCION XXIV.

Ejercicios.—Problemas diversos.

253. Como complemento á la práctica de los principios de Algebra que, con la extension que exige la índole de estas Lecciones, hemos desarrollado, insertamos á continuacion otros diversos problemas, proporcionando así mayor número de ocasiones de ejercitar el cálculo y acostumbrar la imaginacion á establecer las ecuaciones, ó plantearlos, parte las más esencial y difícil del Algebra, con objeto de contribuir á sacar el mayor partido posible de estos cortos conocimientos.

254. PROBLEMA 1.° *Una guarnicion se compone de 1250 soldados entre caballería é infantería. Cada soldado de caballería recibe 15 pesetas de haber mensual, y el de infantería 10. La consignacion del mes de todos los soldados de la guarnicion importa 13.500 pesetas. ¿Cuántos soldados hay de caballería y cuántos de infantería?*

Solucion: 200 *soldados de caballería y* 1.050 *de infantería.*

255. PROBLEMA 2.° *Dos morteros disparan bombas sobre una ciudad sitiada. El primero ha disparado 36 tiros ántes que el segundo empezase el fuego, y hace 8 disparos miéntras que el segundo tira 7; pero las cargas que se consúmen en 3 tiros del segundo componen los mismos gramos de pólvora que las de 4 tiros del primero. ¿Cuántas bombas debe disparar el segundo mortero para consumir la misma cantidad de pólvora que el primero?*

Solucion: 189 *bombas.*

256. PROBLEMA 3.° *Un coronel quiere formar en cuadro su regimiento y ensaya dos modos de llevarlo á cabo. En el primero le sobran* 39 *hombres, y poniendo un hombre más en el lado del cuadro, le faltan* 50 *hombres para formarlo. ¿Cuántos hombres componen el regimiento?*

Solucion: 1975 *hombres.*

257. PROBLEMA 4.° *Dos artilleros han encartuchado* 1.000 *cartuchos de cañon de diversos calibres, habiendo consumido cada uno la misma cantidad de pólvora, y el* 1.° *dijo al* 2.°: *«Si yo hubiese llenado tantos saquetes como tú, hubiera empleado* 18 *quintales de pólvora.»— «Y yo, respondió el otro, si hubiese hecho tantos cartuchos como tú, no hubiera consumido más que* 8 *quintales.» ¿Cuántos cartuchos hizo cada artillero?*

Solucion: El 1.° 400 *cartuchos; el* 2.° 600.

258. PROBLEMA 5.° *¿Cuánto tiempo deberia estar impuesto un capital á interés compuesto al* 5 *p.* %, *para que llegase á ser mil veces mayor?*

Solucion: De 141 *á* 142 *años.*

259. PROBLEMA 6.° *Una persona impone la mitad de su capital al* 3 *p.* % *al año, la tercera parte al* 5, *y el resto al* 8 *p.* %. *Gana en todo* 21.600 *reales anuales. ¿Cuánto capital tiene?*

Solucion: 480.000 *reales.*

260. PROBLEMA 7.° *Un caño llena una vasija en* 30 *horas: otro caño la llena en* 20 *horas, y un tercer caño llena dicha vasija en* 10 *horas. ¿Cuántas horas tardarán los tres caños juntos en llenar la vasija?*

Solucion: $5\,\frac{5}{11}$ *horas.*

261. PROBLEMA 8.° *Se tienen* p *kilógramos de agua de mar que contienen* p′ *kilógramos de sal, y se les quiere añadir agua dulce para que un número* P *de kilógramos de la mezcla no contenga mas que* r *kilógramos de sal. ¿Cuánta agua dulce se añadirá?*

Fórmula que sirve para hallar la cantidad de agua dulce. $\left.\right\}\ x=\frac{Pp'-pr}{r}.$

262. PROBLEMA 9.° *Un viajero ingles cambia en Paris un billete de* 150 *libras esterlinas por ducados, y el banquero le remite* 331 *ducados y un pico de* 3,50 *francos; otra vez estando el cambio al mismo precio, cambia un billete de* 40 *libras esterlinas por el cual recibe* 88 *ducados y* 4 *francos. ¿Cuál es el valor de la libra esterlina y del ducado?*

Solucion: *Libra esterlina* = 25,40 *francos*. *Ducado* = 11,50 *francos*.

263. PROBLEMA 10.° *Un viajero aleman decia: He viajado por Alemania, Francia é Inglaterra, y he gastado en estos tres paises* 8235 *thalers, á saber:* 1520 *thalers en Alemania,* 7540 *francos en Francia y* 820 *libras esterlinas en Inglaterra. Y preguntándole cuál era el valor de la libra esterlina y del franco en moneda alemana, respondió: «5 libras esterlinas valen 3 thalers más que* 108 *francos.» ¿Cuánto valen, en este caso, el franco y la libra esterlina en thalers?*

Solucion: 1 *libra esterlina*=6 *thalers*, 1 *franco*$=\frac{1}{4}$*thaler*.

264. PROBLEMA 11.° *Tenemos dos cajas iguales que contienen la una mayor cantidad de pólvora que la otra; y para hacer que haya la misma cantidad en ambas, se pasa de la* 1.ª *á la* 2.ª *tanta pólvora como habia ya en ésta; enseguida se echa de la* 2.ª *en la* 1.ª *tanta como en ésta quedó, y en fin se vuelve á echar de la* 1.ª *en la* 2.ª *una cantidad igual á la que ésta tenia: despues de esta operacion se encuentra que hay* 16 *quintales de pólvora en cada caja. ¿Cuántos quintales tenia cada una ántes de la operacion efectuada?*

Solucion: { 1.ª 22 *quintales*.
2.ª 10 *Id*.

265. PROBLEMA 12.° *Un Jefe de una escuadra quiere distribuir en partes de presa á las dotaciones de tres barcos que manda la suma de* 31.824 *pesetas. Dando* 12 *pesetas á cada plaza de las del primer buque, las de los otros dos no reciben más que* 6 *pesetas cada una; y dando á cada hombre de los del* 2.° *barco* 12 *pesetas, los de los otros dos no recibirian más que* 4 *pesetas; en fin, si cada hombre de la dotacion del* 3.er *buque recibe las* 12 *pesetas, cada uno de los de los otros dos no percibirian más que* 3 *pesetas. ¿Cuál es la dotacion de cada barco?*

Solucion: 1.°=780 *hombres*, 2.°=1.716, 3.°=2.028.

LECCION XXV.

Ejercicios.—Problemas de primer grado aplicados á otras materias.—Pilas de balas incompletas.

266. Terminaremos estos ejercicios con algunos problemas sobre otras materias aplicadas, los cuales se podrán resolver cuando se tengan los conocimientos de dichas materias.

PROBLEMA 1.° *Un peon da 371 pasos para atravesar diagonalmente una esplanada cuadrada; la longitud de su paso es por término medio de 0,78 metros. ¿Cuál será la longitud del lado de dicha esplanada?*

Solucion: 204,6 *metros*.

267. PROBLEMA 2.° *Un caballo á la carrera da en 5 minutos una vuelta á un hipódromo que tiene la figura de un rectángulo terminado en sus lados menores por dos semicírculos; y en el mismo tiempo un ginete al trote atraviesa el hipódromo en sentido de su ancho. La velocidad de un caballo á la carrera es de 15,6 metros por segundo, y al trote se supone ser de 2,22 metros. ¿Cuáles son las dimensiones y superficie del hipódromo?*

Solucion: *Largo*=1293,85 *metros*. *Ancho*=666 *metros*.

Superficie=121 *hectáreas y* 73 *centiáreas*.

268. PROBLEMA 3.° *Sabemos que 37 kilógramos de estaño sumergidos en el agua pierden 5 kilógramos de peso; 23 kilógramos de plomo en iguales circunstancias pierden 2 kilógramos; una composicion de plomo y estaño de 120 kilógramos de peso pierde asimismo 14 kilógramos. ¿Qué cantidades de plomo y estaño entran en dicha composicion?*

Solucion: 46 kilógramos de plomo y 74 de estaño.

269. PROBLEMA 4.° *El peso específico del plomo es 11,324; el del corcho 0,24, y el de la madera de pino 0,45: se quiere formar con plomo y corcho un cuerpo de 80 kilógramos de peso, y que pese tanto como un volúmen igual de pino. ¿Qué cantidades de plomo y corcho deben tomarse?*

Solucion: *Plomo*=38,$^{\text{ks.}}$ 14..... *Corcho*=41,$^{\text{ks.}}$ 85.....

270. PROBLEMA 5.° *Para construir un embudo se corta de una hoja de laton un sector circular que se enrolla despues para darle la figura cónica. Se desea que la profundidad del embudo sea de 3 decímetros y que el diámetro de su abertura sea de 2 decímetros. ¿Cuáles deberán ser el radio y el ángulo en el centro del sector?*

Solucion: Radio=3,162 *decimetros. Angulo*=113°—51'.

271. PROBLEMA 6.° *Se desea averiguar el gasto que ocasionará el cubrir con un betun las paredes y el fondo de una vasija circular que tiene* 12 *metros de diámetro en la parte inferior,* 16 *metros de diámetro en la superior y* 2 *metros de profundidad, sabiendo que por cada metro cuadrado embetunado hay que gastar:* 1,80 *pesetas de betun con el espesor que conviene,* 0,40 *pesetas de mano de obra y* 0,10 *en otros gastos.*

Solucion: 546,20 *pesetas.*

272. PROBLEMA 7.° *Se quiere pintar la cúpula esférica de un edificio, cuyo diámetro es de* 18 *metros, con tres manos de pintura que han de pagarse á* 2,50 *pesetas el metro cuadrado. ¿Cuál será el valor de esta pintura?*

Solucion: 1272,35 *pesetas.*

273. PROBLEMA 8.° *Averiguar el precio de una barra de hierro de* 4,20 *metros de longitud,* 0,m03 *de ancho y* 0,m03 *de espesor, sabiendo que el metro cúbico de hierro pesa* 7.800 *kilógramos y que los* 100 *kilógramos valen* 45 *pesetas.*

Solucion: 13,27 *pesetas.*

274. PROBLEMA 9.° *Hallar las dimensiones del litro y doble litro para los líquidos, sabiendo que son cilindros cuya altura es doble del diámetro.*

$$\textit{Solucion:}\left\{\begin{array}{l} \textit{Litro.....}\left\{\begin{array}{l}\textit{Diámetro} = 0^{m},086.\\ \textit{Altura.} \;.= 0^{m},172.\end{array}\right.\\ \textit{Doble litro..}\left\{\begin{array}{l}\textit{Diámetro} = 0^{m},108.\\ \textit{Altura}\;..= 0^{m},217.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

275. PROBLEMA 10.° *Hallar el diámetro de una bala de* 12 *kilógramos de peso, sabiendo que el decimetro cúbico de fundicion pesa* 7,2 *kilógramos.*

Solucion: 0,1853 *metros.*

276. Sabemos por el texto de Artillería que el número de proyectiles que contiene una pila incompleta, es igual á *la diferencia entre la pila completa de igual base, y otra cuya base fuera la capa ó lecho que inmediatamente siguiese á la superior de la pila.*

En este supuesto, propongámonos, como ejercicio, establecer las fórmulas para hallar el número de balas que contienen las pilas triangulares, cuadrangulares y rectangulares troncadas ó incompletas, admitiendo de que en esta última se hayan consumido los proyectiles no por tongas paralelas triangulares, como generalmente se hace, sino como en las dos primeras, por capas horizontales.

277. *Pila triangular.* Sea n el número de proyectiles del lado de la base y m el número de proyectiles del lado de la capa superior.

La fórmula para hallar el número de proyectiles de la pila completa sabemos es

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

Siendo m el número de balas de la capa superior, la que le siguiese inmediatamente á esta capa, estando la pila completa, tendría por lado $(m-1)$; y por consiguiente el número de proyectiles de la pila deficiente lo hallaremos sustituyendo en la fórmula antes dicha $m-1$ en vez de m, y será

$$\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{6};$$

restando ahora las dos fórmulas, tendremos

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)-(m-1)\,m\,(m+1)}{6}, \ldots\ldots (21)$$

que sirve para hallar el número de proyectiles de la pila triangular troncada.

278. *Pila cuadrangular.* Siguiendo el mismo razonamiento, encontraremos la fórmula

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)-(m-1)\,m\,(2m+1)}{6}, \ldots\ldots (22)$$

que sirve para hallar el número de proyectiles de la pila cuadrangular troncada.

279. *Pila rectangular.* Si la pila es rectangular, llamemos m al número de proyectiles del lado mayor de la base y n al número de proyectiles del menor, y m', n' los números de proyectiles de los mismos lados de la capa superior; sacaremos por idéntico razonamiento la fórmula

$$\frac{n\,(n+1)\,(3m-n+1)-(n'-1)\,n'\,(3m'-n'-1)}{6}, \ldots (23)$$

que sirve para hallar el número de proyectiles de la pila rectangular troncada.

280. PROBLEMA 11.° *Un espía se introdujo en una fortaleza y observó el número de pilas de proyectiles encerrados en el parque de artillería, así como el número de que se componian los lados de la base, notando 6 pilas rectangulares cuyos lados contenian 7 y 15 balas de á 24; una pila rectangular troncada, cuya base superior tenía 6 y 9, y la base inferior 18 y 12 balas de á 36; una pila cuadrangular cuyo lado era de 10 bombas, y, en fin, una pila triangular de balas huecas, cuyo lado de la base superior era de 6 y el de la base inferior de 10. ¿Cuántas balas de á 24 y 36 y cuántas bombas y balas huecas habia en el parque?*

$$\textit{Solucion:}\left\{\begin{array}{l} \textit{Balas de á } 24 = 2.184. \\ \textit{Id. de á } 36 = 1.018. \\ \textit{Bombas}\ldots = \ \ 385. \\ \textit{Balas huecas} = \ \ 185. \end{array}\right.$$

FIN.

ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
16.....	1.....	(53)..............	(53. 2.º)
18.....	13.....	$+2a^2b$...........	$+2a^3b$
21.....	6.....	$5a^3c^2dj^3$.........	$5a^3c^2df^2$
26.....	12.....	$-a^6$...............	$-a^6x$
47.....	21.....	edificio...........	edificio
49.....	33.....	B................	R
50.....	7.....	qne..............	que
57.....	27.....	qniere............	quiere
58.....	37.....	$x=\frac{ad}{v+v'}$.......	$x=\frac{vd}{v+v'}$
62.....	18.....	la otra será.......	las otras dos serán.

La venta de estas LECCIONES DE ÁLGEBRA se hace por el autor, en Madrid, en el Ministerio de Marina, al precio de 2,50 pesetas en rústica.

Tambien se venden por el mismo autor sus LECCIONES DE ORTOGRAFÍA CASTELLANA, declaradas de texto para la Escuela de Condestables y la de Aprendices Marineros, al precio de 1 peseta en rústica.