CONSIDERACIONES

SOBRE LA CONVENIENCIA DE UN

NUEVO PLAN PARA LA ENSEÑANZA

DE LAS

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS.

Licenciado en Ciencias exactas y en Filosofía
y Letras

PARTE PRIMERA.

EXPOSICION.

MADRID

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE
Calle de Isabel la Católica, 25, 2.º
1877

CONSIDERACIONES

SOBRE LA CONVENIENCIA DE UN

NUEVO PLAN PARA LA ENSEÑANZA

DE LAS

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

POR

D. ZOEL GARCÍA DE GALDEANO Y YANGUAS.

Licenciado en Ciencias exactas y en Filosofía y Letras

PARTE PRIMERA.

—

EXPOSICION.

Zoel García de Galdeano

MADRID

—

IMPRENTA Á CARGO DE GREGORIO JUSTE

Calle de Isabel la Católica, 23, 2.°

1877

Reg. f.° 132. lib 29.

CONSIDERACIONES

SOBRE LA CONVENIENCIA DE UN

NUEVO PLAN PARA LA ENSEÑANZA

DE LAS

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PARTE PRIMERA.

EXPOSICION.

Periodos del desarrollo intelectual y de la enseñanza.

El desarrollo de la inteligencia humana varía de naturaleza en tres distintos períodos, ó más bien, en cada uno de estos se nota el predominio de una de sus facultades sobre las demás.

En el primero, la intuicion empírica ó percepcion, la memoria y la imaginacion anulan casi por completo el desarrollo de las otras facultades. No se puede generalizar, abstraer, inducir, ni deducir si no hay elementos para estas superiores funciones de la inteligencia. Razon por la que, la naturaleza satisface esta necesidad dotando á la inteligencia en este período de una prodigiosa aptitud para grabar fácilmente y con rapidez las impresiones que los objetos producen en los sentidos y se trasforman en percepciones.

Adquirir materiales para el conocimiento científico, es el primer trabajo de la inteligencia que se efectúa tambien en el período más apropiado, el del preponderante desarrollo y ejercicio de la memoria, de las percepciones y de la imaginacion. Esta última, especie de memoria acompañada de imágenes sensibles, es una facultad exploradora del espíritu, es la primera tentativa para descubrir la verdad y la ciencia; y como tentativa es inexacta.

Habiendo adquirido numerosas representaciones del mundo físico, mecánica y rudimentariamente enlazadas por la memoria y la fantasía, sucede un desarrollo más perfecto que satisface la natural tendencia del espíritu á ordenar, á agrupar, á clasificar los objetos segun sus relaciones naturales, aspiracion que nace como efecto de la insuficiencia intelectual para poder retener uno á uno los diferentes detalles del Universo.

El segundo período de desarrollo intelectual, es pues, el de la induccion, generalizacion, abstraccion y clasificacion. Las vagas tentativas para conocer el conjunto de los séres se reemplazan por un conocimiento más sólido, fundado en el exámen de los hechos y en la distribucion de los séres por las semejanzas y diferencias observadas en los mismos. A una clasificacion expontánea que se ejerce desde que principia la existencia del individuo, sigue una clasificacion refleja.

La memoria se va debilitando. Parece que el sujeto, fiado en las claves seguras para recordar que le proporcionan los cuadros de clasificaciones hechos con arreglo á las semejanzas y diferencias observadas, descuida su ejercicio y desarrollo, ó bien la naturaleza que marca á cada cosa su período cesa de prestarle su concurso para ejercer su accion sobre otras facultades.

Las ideas abstractas conservan el carácter de contingentes, propio de los objetos y fenómenos observados que les han servido de fundamento, y no pueden llenar las aspiraciones del espíritu en el tercer período, el más perfecto de su desarrollo, pues la razon, escitada por las ocasiones de ejercerse tan repetidas que se le han presentado, descubre en su fondo algo á que no satisfacen las ideas abstractas, y ve lo necesario opuesto á lo contingente, lo infinito á lo finito, la causa dominando al efecto, la ley al fenómeno, la condicion imponiéndose á lo condicionado. En este instante, hallando muy circunscrito, imperfecto y falible el conocimiento de los objetos por sus analogías y diferencias, viendo incompleto el conocimiento originado por la experiencia, muy artificiosas y mecánicas las clasificaciones en géneros y especies de los séres, pretende conocer el porqué de las cosas, su ley, su fundamento científico.

Este es el período del conocimiento científico, filosófico, el del predominio de la superior facultad de la inteligencia, la razon.

La enseñanza sigue estas fases de la vida intelectual, que señala con sus tres divisiones en primaria, segunda ó preparatoria y superior.

En la escuela se disponen cuantos artificios son necesarios para el desarrollo de los sentidos, la memoria y las percepciones, diversificados segun los planes especiales de enseñanza; pero que tienen siempre algo de comun.

Los jardines de la infancia destinados á instruir deleitando, á favorecer simultáneamente el desarrollo del cuerpo y del espíritu, á aprender por el estudio de la realidad; la *enseñanza á la vista*, sencillo interrogatorio ó diálogo ocasionado por cuadros que acostumbran, sin notarlo el alumno á discurrir; los recreos en que se escita su imaginacion por ingeniosas combinaciones de figuras y juegos; las lecciones en compendios dialogados que ejercitan la memoria. Todo esto constituye el grado más elemental de la enseñanza, cuyo fin directo no es la instruccion, sino el desarrollo de las aptitudes del individuo.

La enseñanza en este período, no es el fin, es la ocasion para que el alumno aprenda á usar de sus facultades.

Desarrolladas hasta cierto grado las aptitudes del alumno con la instruccion primaria, sigue el período que puede llamarse de transicion, y lo es en la vida y la enseñanza.

Continúa todavía el desarrollo que principió en el primero, combinándose gradualmente con el que ha de predominar finalmente en el tercero.

La segunda enseñanza comprende nociones elementales de todas las ramas del saber; inicia en ellas al alumno; es un conocimiento enciclopédico y superficial; no son las ciencias lo que presenta, es un diseño imperfecto, pero suficiente para señalar el espíritu predominante de cada una.

Se ofrece al alumno la abundante variedad de la ciencia como una provocacion á sus especiales aptitudes. Antes de reducirlo al esclusivo yugo de una direccion determinada, se manifiesta toda la extension que abarca el horizonte científico.

La traduccion de los clásicos, la Historia y la Geografía, la Física é Historia natural, la Filosofía y la Matemática, son las piedras de toque de las inteligencias donde comienzan á distinguirse los talentos profundos de los superficiales, el génio artístico del científico, y en este período principia á formularse el estado futuro de cada indivíduo, porque omitiendo otros motivos que puedan señalarle fatalmente direccion determinada, el filósofo, el matemático, el poeta, indican vagamente en este preliminar, los especiales talentos cuyo desarrollo se verificará más tarde.

Por último, la enseñanza superior comprende el estudio definitivo de cada ramo del saber, que no es objeto del presente trabajo.

La ciencia matemática en los tratados.

Si se examinan los diferentes tratados que sucesivamente han trasmitido los conocimientos matemáticos, se advertirá cierta variedad en la exposicion, que traduce fielmente los grados del progreso intelectual para esta rama determinada del saber.

El tratado de Euclides, que puede decirse ha sido el libro en que estudiaron todas las generaciones hasta los tiempos modernos, es una exposicion rudimentaria de la ciencia de la extension.

Euclides, al escribir esta obra monumental, realizó la árdua empresa de reunir en un cuerpo de doctrina todos los descubrimientos de los geómetras hasta su tiempo. Y siendo este un período de discusion, de controvérsias y de escepticismo, todo su esfuerzo debió encaminarse á librar la exposicion de los ataques de la crítica.

El sólido encadenamiento de las verdades constituye el mérito más relevante de la obra.

Se nota en este libro predominio del método *ad absurdum* para probar las verdades, efecto de que admite su adquisicion dos grados.

El primero es un modo incompleto de conocerla, pues consiste en saber que lo contrario á lo que se quiere probar es imposible ó absurdo; esto se realiza por el citado método. El segundo grado, el más perfecto, consiste en descubrir directamente la verdad hasta el punto de que la inteligencia la contemple con la claridad de la evidencia. Y como por razon del enlace que existe entre las verdades de una ciencia, basta conocer algunas para poder desecharse las incompatibles con ellas, es indudable que cuando los recursos de la ciencia constituida no pueden dar de todas demostraciones directas, por no haberse descubierto ó conseguido probar todavía las que son sus fundamentos, es necesario utilizar las pocas conocidas para descubrir las demás, no como incluidas ó fundadas en ellas, sino por una especie de reflexion indirecta. Esta es la razon del predominio del método *ad absurdum* en los elementos de Euclides.

Otra circunstancia que se advierte en este libro, es un órden rigurosamente sucesivo.

Cada verdad es fundamento de la que le sigue; la ley que rige á su colocacion es la necesidad de probar unas con auxilio de las otras.

La libre exposicion de las ideas segun su valor propio, su importancia y su naturaleza, se halla limitada y subordinada á las exigencias de la demostracion.

En el presente siglo aparecen tratados como los de Puig, Tosca y otros análogos que pudieran citarse, caracterizados por la proligidad de los detalles, por los procedimientos mecánicos y hasta materiales para auxiliar á la memoria y al entendimiento; no hay coordinacion ni enlace entre las teorías, la unidad desaparece ante la variedad; el signo y el detalle anulan á la idea, al plan general.

Bayls, Vallejo y Feliú en España; Bourdon, Legendre, Vinncent en Francia y otros perfeccionan la exposicion científica.

Al carácter analítico propio de la invencion, sigue un predominio creciente del carácter sintético adecuado á la exposicion.

La Matemática va perdiendo el sello que dejáran impreso los inventores, y cada vez aparece más independiente del yugo que le imponian los métodos demostrativos.

A estos tratados suceden otros en armonía con las instituciones vigentes respecto á la instruccion y con los adelantos de la época.

La exposicion se simplifica, la idea impera sobre la forma, es decir, la verdad se ostenta sin descender al empirismo y abundancia de prácticas materiales; los conceptos de las cantidades negativas é imaginarias que conducen á investigaciones sobre la correspondencia entre el mundo físico y el mundo matemático al explicar cómo los resultados singulares de los problemas se traducen en la realidad, asunto predilecto para las inteligencias en el presente siglo, adquieren importancia creciente en los tratados.

Cada autor hace loables tentativas para fijar un órden á las ideas presentándolas en libros, secciones, teorías y otras divisiones segun su especial criterio, siempre con el invariable propósito de perfeccionar la exposicion sintética de la ciencia adquirida.

El método de exposicion, antes completamente fundido en el de invencion, cada vez se separa más y se distingue de éste; los procedimientos demostrativos, progresan simplificando las teorías.

En España, Cortázar justifica este progreso con notas y advertencias concisas, que expresan un reconocimiento de la importancia que tiene el subordinar las verdades á la unidad de método, y una tentativa para referir á un método cada categoría de conocimientos.

En Francia, recientemente los Sres. Rouché y Comberouse, en sus excelentes tratados, consiguen satisfactoriamente este propósito, evitando como Cortázar y otros matemáticos, el penoso procedimiento de la superposicion, sustituyéndolo por la demostracion directa de igualdad de las figuras; simplifican no pocas demostraciones, usando ingeniosos artificios; aplican ventajosamente el teorema de la relacion armónica de cuatro puntos á la demostracion por el método *ad absurdum* de muchos teoremas; introducen la teoría de rectas antiparalelas, que tambien abrevia los procedimientos demostrativos, y generalizan sin complicarlas muchas teorías, enseñando así que se pueden dilatar los horizontes de la ciencia cuanto se simplifiquen los métodos.

A esta clase de autores que realizan bajo un aspecto el problema de la exposicion científica, sucede otra en alto grado respetable.

Las obras del Sr. Chasles, ilustre geómetra contemporáneo, sobre los progresos y desarrollo de los métodos de Geometría y los porismas de Euclides, las del Sr. Breton sobre este mismo asunto, las de Paque sobre los métodos empleados en los cálculos trascendentes, los *Verdaderos principios de las matemáticas* de Coyteux, los *Métodos en las ciencias de razonamiento* de Duhamel, el *Origen y límites de la correspondencia entre la Geometría y el Algebra* de Cournot, la *Metafísica del cálculo infinitesimal* de Carnot. En fin, los proyectos acerca de reformas en la exposicion geométrica de Bailly, las memorias relativas al célebre postulado de Euclides, otras sobre las cantidades imaginarias de Faure, Mourey, Marie, Vallés, Rey y Heredia, consideradas ya como resultado de un movimiento compuesto, ya como expresion gráfica de los tres estados del juicio, afirmativo, negativo y limitativo, ó como consecuencia de una representacion geométrica de las ecuaciones, ya en sus correspondencias con la representacion de las fuerzas, ya como traduccion de condiciones imposibles de un problema ó como efecto necesario del estado latente que les señala su condicion de séres algébricos; el importante trabajo sobre las cantidades complejas de Hoüel, resúmen de los descubrimientos más notables sobre esta teoría, y otras muchas obras de gran interés recientemente publicadas, son señales evidentes de una nueva fase de la ciencia matemática; indican un trabajo de constitucion á que contribuyen los geómetras más eminentes. Estos numerosos tratados manifiestan que la Matemática pasa del estado de su desarrollo como fruto de la espontaneidad del génio al de la crítica.

Profundizándose las leyes del método y la subordinacion lógica de las verdades, haciéndose un estudio crítico de éstas para desentrañar lo que constituye su esencia, desterrándose la aficion á demostraciones simbólicas, que si abrevian el razonamiento repugnan por su oscuridad, y apartan de este estudio á no pocos talentos, se hace grata la Matemática y asimilable á la inteligencia.

Los progresos del método arrebotan cada vez con más éxito á los génios el monopolio que ejercieran cuando se desconocian las vías de la verdad. El camino se allana por la interpretacion ó traduccion inteligible de conceptos incorrecta ó incompletamente expresados como los misterios de las antiguas religiones, que sólo servian para los iniciados.

Tan importantes efectos no son obra de pronta realizacion. Las citadas publicaciones y otras que indudablemente seguirán, son productos de trabajos individuales de várias y aún opuestas direcciones; pero llegará un dia en que un criterio superior efectuará la unidad de tan múltiples conceptos, descubriéndose el tronco donde se enlazan estas ramas dispersas.

Diferencia entre la Matemática y las demás ciencias.

Difiere la Matemática de las otras ciencias.

La Historia, la Literatura, las Ciencias naturales y, en general, todas las de experimentacion, se refieren á una realidad que se presenta con sus caractéres propios, independiente del sujeto. Este no tiene que ocuparse de la legitimidad de aquella, no tiene que hacer la crítica de su existencia; la acepta como un hecho superior y primitivo, y se limita á observarla, para de esta observacion hacer brotar las leyes que la rigen en la especial direccion segun que es estudiada. Los hechos de la humanidad, los productos de su fantasía, los fenómenos de la Naturaleza, son objeto de un exámen prévio al que se aplica despues la crítica.

La Metafísica, más independiente del objeto, tiende á hacer surgir la ciencia del fondo del sujeto con cierto carácter á priori.

La Matemática considerada en su pureza, es una ciencia escepcional; no ve en la realidad un hecho superior, admisible á priori que se le imponga; porque la realidad sobre que se ejerce la ciencia matemática existe tambien en la region de las ideas. Siendo la inteligencia la fuente de la realidad matemática, resulta un unánime asentimiento que imposibilita toda controvérsia sobre las verdades probadas, señalándole una divisoria respecto á las demás ramas de los conocimientos humanos.

Para que una idea merezca la sancion intelectual, es condicion necesaria que no sea incompatible; por esto, en matemáticas debe ante todo fundarse la realidad intelectual mediante entidades compatibles. La definicion matemática funda estas realidades, da existencia á los objetos, y una vez presentadas y mostrada su legitimidad, son los principios fijos sobre que se edifica la ciencia.

Pero en cualquier objeto hay innumerables propiedades de las cuáles solo parte pueden ser conocidas. Cada figura geométrica, cada expresion algébrica, está indisolublemente unida en el mundo de las relaciones por infinidad de entidades de infinitas maneras.

Esto se advierte en la ciencia matemática. Cada definicion señala un modo de existencia de un objeto; pero este objeto puede darse de diversos modos, es decir, caben diversos sistemas de entidades y relaciones que definan igualmente un objeto. Una recta puede ser dada por dos puntos, por uno y una direccion, por in-intersecciones variadas de lugares geométricos.

Un paralelógramo puede ser definido como un cuadrilátero en que un ángulo es suplementario de sus dos adyacentes, ó como un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos é iguales, y dos paralelas como rectas equidistantes en toda su extension.

Es decir, que muchos teoremas y definiciones admiten una recíproca sustitucion. Un teorema puede definir un objeto matemático, sólo que necesita demostrarse, y por esto se eligen como definiciones las proposiciones más sencillas que puedan admitirse á priori.

Hallar las condiciones compatibles de existencia, y dadas éstas, hallar los sistemas compatibles que puedan sustituirse mútuamente en la determinacion de un objeto.

Hé aquí el problema capital de la Geometría, en el cual se resumen los demás; y no se dice igualmente de la Aritmética y el Algebra, porque entre estas y aquella hay la diferencia esencial de que el objeto de las dos últimas tiene una existencia á priori como manifestacion de las leyes del entendimiento, mientras que los objetos geométricos necesitan un exámen prévio para ver si presentan alguna incompatibilidad, porque esta clase de entidades no tiene inmediata é íntima relacion con el desarrollo subjetivo.

El análisis, método de sustituciones, satisface esta necesidad conduciendo por una série de determinaciones, que tienen el carácter de reciprocidad á una determinacion final.

Este trabajo constante para salvar las incompatibilidades y conservar idéntico valor á las proposiciones que deben sustituirse, es lo que más contribuye á hacer dificultoso el estudio de la ciencia matemática, y ha sido casi el exclusivo objetivo de los geómetras, con el fin de aplicar enseguida las verdades á cuestiones de utilidad práctica. Aquí puede decirse que ha detenido su curso.

Pero sobre este camino trazado por la expontaneidad y otros fines determinadamente prácticos, hay una segunda parte más científica, la crítica matemática que señala las leyes de los métodos y procedimientos seguidos, su aplicacion á cada órden de verdades, las relaciones de éstas, sus diversos géneros y dependencias naturales.

No pocos talentos, algunos de ellos ya citados, inauguran esta nueva fase, y muchos han de ser todavía los que contribuirán á ilustrarla, pues como toda grande obra necesita el concurso, no de tal ó cual indivíduo, sino de toda la humanidad representada por los séres privilegiados que descuellan en el cultivo de las ciencias.

La parte crítica, tan brillante en otras ciencias y tan rudimentaria en la matemática, es efecto de la diferencia señalada, pues mientras las demás ciencias pronto llegan á su estado reflejo, en esta, las dificultades ya expuestas, han empleado todo el esfuerzo intelectual que, sólo lentamente á través de los siglos, ha llegado al grado de perfeccion con que se la conoce. Pero si la parte crítica no tiene un importante desarrollo, en compensacion presenta la ventajosa circunstancia de formar un conjunto de verdades libres de toda controvérsia, y que constituyen en realidad las más legítimas conquistas del espíritu humano, cuyas aplicaciones á la realidad externa ofrecen los resultados más útiles; porque las verdades matemáticas tienen el privilegio de ser producidas por el entendimiento y tener su realizacion y comprobacion en el mundo externo.

La ciencia matemática en la enseñanza actual.

La enseñanza sigue y debe seguir la manera de exposicion de los tratados, porque el alumno no podría comprender sin una conformidad entre las doctrinas del libro y de su maestro.

La mision del profesor está pues reducida, en general, á seguir el plan más conforme con su modo de ver la ciencia, haciendo inteligible la exposicion del texto, dando flexible movilidad á la rigidez y permanencia con que en el libro se hallan las verdades.

Las extensas y elocuentes peroraciones, los ingeniosos conceptos que pudieran servir para ilustrar cono—

cimientos ya adquiridos, no servirian para implantar por vez primera las semillas de la verdad.

La enseñanza, se limita á una interpretacion y exposicion verbal del texto escrito, hecha por el profesor.

Los tratados elementales son la exposicion científica correspondiente á un punto de vista individual, propio de cada autor; la clasificacion de las materias obedece á un especial concepto de la ciencia; el órden de las demostraciones y los procedimientos de las mismas es diferente segun el plan adoptado.

De esto nace una primera dificultad para el alumno que por cualquier circunstancia debe variar de texto en el curso de sus estudios, pues tal teorema demostrado conforme con cierto plan, se halla sin fundamento segun otro, resultando confusion y un círculo vicioso, lamentable sobremanera cuando se trata de la Matemática, cuyo carácter esencial consiste en el sólido lazo de las proposiciones.

Otros inconvenientes tiene la enseñanza vigente en general, no por causa de los profesores que la ejercen, sino porque cada período científico tiene su fisonomía propia, sus especiales caractéres; presenta un grado de progreso relativo sobre lo que le precede; pero es imperfecto respecto á lo que le sustituye.

La enseñanza actual es una trasmision de los conocimientos, perfeccionada gradualmente por los autores que se han ido legando esta tarea; pero siempre dominan ó quedan por lo ménos algunos vestigios de la espontaneidad con que el génio ó talento produjo las verdades. La invencion de éstas y de los procedimientos para hallarlas ó demostrarlas, parecen fruto de una superior revelacion, que del inmenso foco de la verdad absoluta ha desprendido unos cuantos destellos irregularmente diseminados. La enseñanza ha aceptado esos frutos de la inspiracion, reformando, ciertamente, algun detalle; pero respetando el fondo, y las inteligencias vírgenes de los alumnos quedan abrumadas ante razonamientos, unas veces sutíles é ingeniosos, otras profundos; pero siempre inaccesibles para aquellos que empiezan á explorar los caminos de la verdad.

Se enseñan séries de demostraciones ligadas entre sí por inquebrantable lazo; se exponen teorías cuya dependencia y analogías no se ven. La materia anula á la forma, el hecho á la idea.

Se hacen demostraciones exactas, indiscutibles; pero no se sabe á que ley superior obedecen unas y otras, diseminadas en la ciencia, sin corresponder á un plan conocido que las haga aplicables á determinada categoría de verdades, es decir, se expone el porqué de todo; pero no se expone la razon de este porqué.

Se sabe, siguiendo rigurosas transformaciones de cálculo, llegar á una relacion final que surge de ese simbolismo como efecto de un juego de prestidigitacion. La inteligencia no duda de la verdad del resultado, porque el razonamiento ha sido riguroso, ha sido un encadenamiento en que se ha sucedido sin interrupcion el asentimiento intelectual; pero se queda en la oscuridad y la duda entrañadas por tan misterioso acceso.

No habiendo un lazo racional para el razonamiento, como existe para los términos que se unen por la demostracion, la memoria lo suple interviniendo en una ciencia eminentemente racional.

Este es acaso el principal motivo de la facilidad con que la Matemática se olvida, pues no se ha asimilado á la inteligencia, no se ha fundado en lazos lógicos, no ha recibido la suficiente preparacion para fundirse en ella constituyendo un todo inquebrantable, y se borra prontamente de su fondo, donde no puede arraigar lo incidental, lo que se le une de una manera contingente.

El desconocimiento de los fines ó resultados que deben obtenerse, como recompensa de un penoso esfuerzo intelectual, es motivo suficiente para atenuar el estímulo y la aficion hácia el estudio.

Esta circunstancia se observa en la ciencia matemática, á la que todos han lanzado el anatema de ser árida más que ninguna otra, sin buscar la causa de su carácter repulsivo respecto á las inteligencias, sólo existente en la forma de enseñarla, en los defectos de los procedimientos expositivos.

El alumno no sabe si esa penosa tarea de aprender los elementos que se le impone es el definitivo resultado, ó por el contrario, no es más que la portada de un grandioso edificio que contiene los más preciosos tesoros. Empieza á habituarse á la idea de que la semejanza de triángulos, ó el teorema de Pitágoras son el *desideratum* de sus fatigas, y hallando el fin mezquino, poca energía desarrolla para conseguirlo.

Se acostumbra á creer que el largo encadenamiento de verdades aritméticas se subordina á una regla práctica para obtener el máximo comun divisor, el mínimo comun múltiplo ó para descomponer un número en sus factores. Piensa que acaso el bello ideal de la ciencia matemática está reducido á extraer una raiz cúbica, resolver una ecuacion, ó inscribir, por ejemplo, el decágono en el círculo, y no sabe que esos procedimientos prácticos se subordinan á ideas superiores, á bellas especulaciones, tanto como las de cualquiera otra ciencia, más útiles que las de ninguna, porque llegan á ser las árbitras del conocimiento del Universo y se aplican, no sólo á los especiales usos de la vida, sino á toda clase de conocimientos físicos, de los cuales han llegado á ser el necesario criterio, merced á los últimos progresos.

Progresos de la ciencia matemática, sus aplicaciones finales.

La ciencia matemática fundada sobre conceptos del espíritu, varía gradualmente á medida que éstos se perfeccionan. La inteligencia concibe bajo la influencia de la exterioridad, y por esto lo hace al principio con ciertas limitaciones que con lentitud van desapareciendo. Sus métodos, cada vez se generalizan más, y sus teorías siguen la misma suerte que éstos.

En su orígen, la matemática aislada de todas las demás ramas del saber, circunscrita á sí misma, avanza con paso lento, pero siempre haciendo brillar en sus decubrimientos la radiante luz de la evidencia.

Platon halla en los procedimientos para encontrar lo desconocido algo de comun, aplicable á todos, y formula el método analítico, Arquímedes salva el abismo que separa la curva de la recta por su método de exahucion.

Posteriormente, descubiertos los primeros destellos del Algebra, se aplica esta ciencia, que aparece con un carácter concreto y práctico á la representacion por construcciones geométricas de las raices de las ecuaciones.

En los tiempos modernos, Descartes une maravillosamente la ciencia de las figuras con la del número, expresando bajo formas sensibles las inflexiones de la cantidad al variar á través de todos sus estados posibles. El concepto del número sólo aplicable á ciertos casos, careciendo de significado inteligible en muchos, recibe la extension que le da la doble consideracion como positivo y negativo.

Leibnitz, descubre el algoritmo infinitesimal. Sobre los conceptos de la cantidad constante y variable, pone el de los infinitamente pequeños que comprende mayores grados de generalidad, porque esta nuevas entidades tienen el privilegio de ser indefinidamente variables para cada estado fijo de las funciones á que se refieren, sucediendo en el órden cronológico á este el algoritmo más general de las variaciones de Lagrange.

Respecto á la Geometría pura, los matemáticos sondean la doctrina de los porismas de Euclides, manantial fecundo de que brotan nuevas teorías de elevacion suma, constitutivas de la parte moderna ó superior, enriquecida y depurada por el gigantesco impulso debido á Fermat, Pascal, Gregorio Saint-Vicent, Carnot, Poncelet, Chasles y otros muchos eminentes talentos.

Las investigaciones relativas á las cantidades negativas é imaginarias hechas primeramente por Argand, Cauchy, Riemann, Bellavitis y Hamilton, aumentan definitivamente la extension de la ciencia con teorías como la de las equipolencias, de los cuatérnios y varios profundos resultados de no escasa importancia para su engrandecimiento futuro.

En otro sentido, la consideracion predominante del órden por Cramer, Gauss, Jacobi, Hermite ha producido la fecunda teoría de los determinantes y otras que han servido para fundar el álgebra moderna.

Dando nuevos rumbos al entendimiento, talentos tan universales como Wronski, osan hacer una exposicion matemática en armonía con las leyes del pensamiento; tiene lugar la primera tentativa para fundir la ciencia matemática en la ciencia del alma. Delboef, Veberweg, publican trabajos geométricos de carácter eminentemente filosófico; Cournot y Rennouvier, Balmes y Rey y Heredia, ilustran con un profundo exámen muchas cuestiones de influencia para el porvenir, al continuar avanzando por estas inexploradas vías que se ofrecen á las inteligencias.

Tantas y tan várias teorías no progresan aisladas, muy al contrario, se encadenan mútuamente, invaden unas los dominios de las otras, y todas indican la necesidad de una general fusion que las haga elementos armónicos de un todo.

No sólo á este término llega la ciencia matemática; sino que obedeciendo á esa ley de solidaridad de todos los conocimientos humanos, deja las puras regiones de la abstraccion y tiende á una union íntima con la ciencia del Universo. Cálculos como el de las *diferencias finitas*, métodos como el de los *menores cuadrados*, tienen el exclusivo objeto de buscar la explicacion de las leyes físicas por las leyes matemáticas, mediante la medida. Ya no es sólo el mundo del telescopio el que quiere absorber la Matemática con sus fecundas teorías, sino que tambien al mundo de los infinitamente pequeños. Los fenómenos de la cristalizacion, de los cambios de estado de los cuerpos, hasta los agentes que producen la luz, el calor y la electricidad caben dentro de su órbita.

La universalidad con que se aplica al conocimiento del Universo, parece que la destina á ser la árbitra de la Naturaleza, y hace ver una sucesiva aproximacion de la idealidad á la realidad que observan los sentidos.

Breves indicaciones acerca de un nuevo plan para la exposicion y enseñanza de la ciencia matemática.

El inmenso número de teorías y verdades descubiertas durante pocos años, ocasiona penosos esfuerzos á la inteligencia para llegar á las regiones superiores de los conocimientos, tanto más cuanto que los métodos expositivos no han seguido los progresos de la invencion.

Un perfeccionamiento y generalizacion tan grande en el material científico exige progresos correspondientes para los métodos. Un aumento de dificultades impuesto á la inteligencia, exige un aumento en los medios de superarlas. De esta armonizacion entre el método y la ciencia, resulta para cada período del desarrollo humano una superior aptitud que le permite abarcar los conocimientos reunidos de las generaciones pasadas y aumentarlos con otros nuevos.

El estudio de las ciencias puede hacerse como fin ó como medio; como fin para adquirir conocimientos, como medio, para desarrollar las aptitudes del individuo.

En la segunda enseñanza, este último propósito debe ser el predominante.

Es quimérico pretender de este ensayo para el estudio de las ciencias resultados definitivos, una sólida instruccion en las diferentes ramas que comprende. A lo sumo, la memoria, apariencia engañosa del conocimiento, medio provisional de adquirir, conservará algunas reminiscencias aprovechables para el porvenir.

Hay en el desarrollo de la inteligencia, como en él de los demás séres, una especie de accion y reaccion de flujo y reflujo, que hace aparecer sus adelantos, no como efecto de un movimiento siempre en el mismo sentido, sino como una especie de movimiento oscilatorio que al mismo tiempo es progresivo.

Parece que las ideas se fijan en el espíritu por yustaposicion. Las percepciones, los recuerdos, se suceden y se borran; pero dejan cierta impresionabilidad, algo parecido á una huella sobre el espíritu, que sirve al repetirse el fenómeno para retenerlo con más fuerza, para gravar su recuerdo más profundamente en el alma, terminando por su asimilacion á la inteligencia, por formar como parte de su esencia cuando las facultades superiores, haciéndose cargo de él, lo retienen con más inquebrantables lazos que la memoria.

Por esto, la casi imperceptible huella de la instruccion primaria, ejerce influjo sobre la posterior tentativa que representa la segunda, y para los estudios superiores aprovechan los imperfectos recuerdos conservados. La série de actos intelectuales produce sobre el espíritu análogos efectos que en lo físico el ejercicio muscular. Sus facultades adquieren un aumento, ya que no de estension ó consistencia, en intension ó fuerza.

Aunque el aumento de instruccion y el desarrollo intelectual son simultáneos, hay sin embargo cierto predominio del uno sobre el otro durante determinados instantes de la vida.

Al estudiar Literatura un alumno, adquiere conocimientos de la totalidad de preceptos que rigen al arte de la belleza, y sale de la Universidad con un breve diseño de lo que la Literatura debe ser; está iniciado en la ciencia, ha conseguido un no despreciable grado de instruccion; pero despues necesita muchos años para ver confirmadas las leyes generales por la lectura de los autores clásicos cuando va á beber en las verdaderas fuentes de ese género de conocimientos, y trata de saber con criterio propio lo que antes aprendiera bajo la autoridad del maestro.

El alumno de Filosofía hace el estudio del alma, recorre las regiones de la metafísica y explora las diversas opiniones de las escuelas filosóficas próximamente en tres cursos, seguidos en los establecimientos de enseñanza; ha adquirido un índice general de la ciencia que le servirá de guia cuando por sus propios esfuerzos pretenda internarse en sus profundidades.

Este es el principio de su educacion filosófica. Su inteligencia se forma aprendiendo á pensar en las obras de los filósofos; los recursos de estos en el razonamiento con los modelos para discurrir, las múltiples tentativas para resolver los problemas de la ciencia son otros tantos análisis de una misma cuestion que acostumbra á examinarla bajo todas sus fases, y la insistencia con que se busca la verdad es ocasion para que la inteligencia cada vez forme un concepto más exacto del objeto de sus estudios. Aprende el tecnicismo de las escuelas, principal clave, la parte más difícil, porque la trasmision del pensamiento de un indivíduo á otro es una transicion bastante brusca. Y sólo despues de haber robustecido sus fuerzas intelectuales en este palenque, puede considerarse apto para pensar por sí, y dirigirse con seguro paso en uno ú otro sentido.

Esta marcha adoptada para la generalidad de ciencias, ha sido tambien seguida en matemáticas, siendo así, que por su carácter especial debe ser precisamente opuesta en sus procesos.

Las demás ciencias se refieren á una realidad exterior al sugeto; las matemáticas á una idealidad, mejor, á una realidad intelectual causada por el sugeto, aunque ocasionada por lo externo. En filosofía, en literatura, basta ejercer naturalmente las funciones intelectuales, porque este ejercicio es tambien el método general, más ó menos oscurecido, pero siempre latente en el fondo de la inteligencia humana.

En matemáticas, el objeto, dependiente de las direcciones del entendimiento, necesita un método que sea modificacion del natural en sus aplicaciones á esta especie de realidad artificial.

Esta circunstancia es razon poderosa para que en matemáticas preceda el estudio de los métodos al de la ciencia. En los métodos se halla encarnada la ciencia; son sus aspectos, son como sus accidentes, porque parece que los métodos son la misma exposicion de las diferentes teorías. No son como en las demás ciencias serviles instrumentos de la verdad; el método, resume la principal importancia; la Matemática, es una sucesion de métodos.

Lo primero debe ser adquirir las aptitudes. El alumno que estudia matemáticas, las aprende (más exacto sería decir: *aprende de memoria el libro*) muchas veces y otras tantas las olvida. Las ideas adquiridas no son en su inteligencia como las sustancias que por combinacion química se hallan infiltradas en el agua formando una sola esencia; sino como las arenas ó sedimentos que arrastra en su corriente y despues abandona, quedando trasparente y pura.

Estos resultados son efecto de ignorar las leyes que rigen la enmarañada red de teorías y de procedimientos, muchos de ellos productos de la expontaneidad del génio que se destacan como mezcla heterogénea de la doctrina del libro, por haber sido inmediatamente trasportados sin modificacion esencial, sin asimilarlo á lo demás ni armonizarlo con las aptitudes de la inteligencia.

La enseñanza debe corresponder á las fases ya anteriormente indicadas del desarrollo intelectual. Las percepciones y recuerdos, las ideas abstractas y las ideas racionales son los tres puntos de vista para fijar el plan.

El primer tratado llamado *Exposicion preliminar ó* *intuitiva*, contendrá las definiciones, divisiones y operaciones correspondientes á la Aritmética, ciencia del número, es decir, la descripcion del objeto y sus variedades y la parte práctica cuya justificacion es un análisis intuitivo de escasa dificultad; despues seguirán las definiciones y divisiones pertenecientes á la Geometría, ciencia de las figuras, cuyo objeto, más concreto é inteligible que el del Algebra, cuyos métodos más numerosos que los de ninguna otra parte de la Matemática, la hace muy propia para mostrar desde luego los medios que ha de emplear la inteligencia en la demostracion y resolucion de problemas. La memoria y la intuicion empírica son las funciones intelectuales casi exclusivamente ejercidas en esta parte.

El segundo tratado será la *Metodología*, que principiará por consideraciones generales respecto al teorema y problema, distincion de uno y otro, partes de que constan y numerosos ejemplos prácticos para ejercitar en distinguir la hipótesis de la tésis, los datos de las incógnitas y en obtener el teorema recíproco de otro dado; seguirá una ordenada descripcion de los métodos de demostracion empezando por los geométricos de superposicion, rebatimiento y giro, de carácter práctico, concretada á las demostraciones de teoremas muy sencillos; despues se enseñará el método de la *cuarta proporcional* y de las *rectas antiparalelas*, pasando á los generales de *sustituciones sucesivas* y de los *límites*, para dejar en último término el *ad absurdum* que se expondrá en sus tres casos. La *Metodología* dará como resultado poner en conocimiento al alumno de los diferentes procedimientos matemáticos que se combinan para demostrar y resolver las cuestiones.

El tercer tratado debe ser la exposicion razonada de la ciencia elemental en sus cuatro partes, *Aritmética*, *Geometría, Algebra y Teoría de las funciones circulares* con la *resolucion numérica de los triángulos rectilíneos.* En virtud de lo ya expuesto, bastará indicar el método ó métodos demostrativos empleados para cada caso, desarrollándolos á lo sumo en los primeros ejemplos ó en algunos que presenten dificultad ó circunstancias notables. Esto evitará el trabajo más difícil para el alumno que estudia los textos actuales, consistente en deducir de una larga relacion lo esencial, que constituye las demostraciones, es decir, un análisis de la doctrina expuesta para comprender sus extremos, y una síntesis que resuma las ideas capitales con su natural dependencia, para ponerle en posesion de la verdad, no mediante la memoria sino mediante el juicio, lo cual supone un gran discernimiento, un buen criterio y facilidad para traducir las palabras en ideas con reciprocidad. Esta tercera parte dará por resultado perfeccionar al alumno en el conocimiento de los métodos que superficialmente adquirió durante el anterior, por efecto del gran ejercicio práctico que constituye la exposicion demostrada de la ciencia elemental.

La *Crítica* dará por resultados hacer pasar el conocimiento expontáneo de la ciencia adquirido por el alumno á conocimiento fundado. Aprenderá en este tratado las razones del órden expositivo y del empleo de los métodos, y cómo se subordinan y coordinan entre sí las verdades; es decir, cómo fundan las unas á las otras, y segun qué leyes ó reglas se sustituyen. En este como en el anterior tratado hay un predominio superior de la razon sobre las demás facultades.

El quinto y último tratado será una *síntesis general* hecha á priori, prescindiendo de las trabas que impone la necesidad de fundar (en el estado actual de la ciencia) unas proposiciones en otras, es decir, defectos debidos al escaso progreso de los métodos, y al estado intelectual de los alumnos que exige con frecuencia alteraciones en la rigurosa exposicion sintética. Esta se realizará procurando presentar un cuadro completo donde aparezcan las verdades segun sus conexiones naturales, revelando sus armonías, presentándose como simétrico conjunto, para que la inteligencia en cuyo fondo residen la idea de órden, lazo universal de las ideas, retenga los conocimientos adquiridos, no por el artificio pasajero de la memoria, sino por una fuerza permanente, capaz de reproducirlas en todas ocasiones.

El objeto de este quinto tratado es evitar que la inteligencia, agobiada por los detalles, se pierda en la numerosa variedad de estos, colocándola á una superior altura desde donde le sea fácil distinguir el conjunto de todos los detalles unidos entre sí por relaciones naturales.

Expuesto lo concerniente al órden científico, debe ahora tratarse del órden y preceptos que parezcan más aceptables para la enseñanza.

La necesidad de seguir los textos ha influido sobre los profesores que en respetable número admiten como principio fundamental é indiscutible el *no pasar al estudio de una verdad sin el conocimiento de todas las que le preceden*, el cual es seguido con notable rigorismo, bajo pena, segun la creencia general, de no alcanzar sólidos y bien fundados conocimientos.

Pero esta opinion es discutible y su realizacion ofrece inconvenientes.

Creer que la inteligencia del alumno puede seguir ordenadamente el encadenamiento de verdades, haciéndose cargo de cada una y de sus relaciones mútuas es ilusorio, es desconocer la ley permanente á que obedece la inteligencia en su desarrollo general é individual.

El conocimiento humano es siempre relativo. La ciencia humana es un artificio que aproxima indefinidamente á la verdad; pero que, si bien la posee en tal ó cual detalle, cuyo número gradualmente aumenta, jamás la alcanza por completo; esto se realiza por medio de teorías ó sistemas que en cada período explican á su manera la ciencia, como lo manifiesta la historia para cualquier ramo del saber.

En la ciencia astronómica á las teorías de los excéntricos y epiciclos, que justifican hasta cierto punto el sistema de Tolomeo, sucede la teoría del movimiento elíptico y las leyes de Keplero, á estas la ley de la gravitacion de Newton que dilata los horizontes de la ciencia, y acaso á este superior concepto, suceda otra ley general que comprenda bajo su universalidad más extensos dominios, explicando irregularidades hoy aparentes.

A través de los errores relativos que implican las teorías, recursos de la inteligencia, creaciones provisionales que dan una ciencia en cierto grado hipotética, cuya superposicion con la ciencia real incesantemente se busca, progresa, distingue y separa la retrogradacion de la línea de los equinoccios del movimiento de la línea de los ábsides, aprecia las apariencias engañosas debidas á la aberracion y refraccion; cuando un fenómeno se presenta como caso de irregularidad, procura encerrarlo en fórmulas empíricas que despues pueden convertirse en leyes generales.

Y no es necesario detenernos en la física, cuyas sucesivas teorías desvanecen constantemente errores anteriores, comprendiendo cada vez más hechos que no pudieran encerrarse en el marco estrecho de las anteriores, pues en matemáticas tenemos tambien ejemplos de más directa aplicacion para el caso presente.

Los números incomensurables imponen á la inteligencia; los números negativos son excepciones inexplicables que confunden á los primeros talentos de siglos anteriores, el concepto de las imaginarias es nuevo abismo que se abre y oculta las vías de la verdad; pero la ciencia avanza, y llega un momento en que todas las excepciones, todas las irregularidades que desalentaran al espíritu se convierten en lazos de armonía que la renuevan engrandeciéndola, é inclinan á abandonar los limitados conceptos que sirvieran, es cierto, para remontarnos á mayores alturas; pero que son insuficientes para figurar en estas superiores esferas del conocimiento.

Los conocimientos matemáticos, verdades abstractas cuyos fundamentos se hallan en el mismo espíritu, necesarias, superiores á la realidad contingente del mundo externo, son indiscutibles como tales verdades; pero respecto al conocimiento que de ellas tiene la inteligencia, la cuestion varía y en este punto caben muchos y distintos grados de perfeccion.

Los conocimientos humanos son mezclas de verdades y errores en que se agita y lucha la inteligencia por evadirse de estos; y cuando no bastan sus recursos transige, adquiriendo la verdad á medias con la esperanza de depurarla más tarde. La memoria é imaginacion intervienen para echar lazos ficticios que den apariencia de unidad á esta mezcla heterogénea, donde no todo se halla regido bajo el cetro de la razon.

Ejemplos de estas transacciones son las realizadas por los matemáticos de épocas anteriores con las raices negativas de las ecuaciones llamadas imposibles, y por último, con las cantidades imaginarias, cuyos resultados admitieran al ver que de esos símbolos ininteligibles brotaba la verdad como los objetos del cubilete de un prestidigitador.

Esto que aparece con un hecho general en el conocimiento humano, se observa tambien en la penosa marcha hácia la verdad de la inteligencia del alumno.

Que se exponga con todos sus detalles el análisis justificativo de la regla para extraer la raíz cuadrada de los números enteros, el lugar que respectivamente ocupa cada parte en el todo, la circunstancia de hallarse combinado el doble producto de las decenas por las unidades con otras decenas, y que estas pueden llegar á ser más que el doble de las decenas, la no ménos atendible de que, á pesar de poder existir en las centenas, además de las contenidas en el doble de decenas por unidades, algunas correspondientes á las otras partes, siempre la raíz cuadrada de las centenas es las decenas de la raíz cuadrada entera de todo el número, y los alumnos no comprenderán totalmente tan complicada trama de verdades; de este razonamiento obtendrán á lo sumo una idea general é imperfecta, esperando en repasos sucesivos afianzar con nuevos puntos fijos ó detalles adquiridos esta incompleta nocion.

Lo expuesto debe ser motivo para que la enseñanza, siguiendo el curso de la inteligencia, prepare la verdad para ser adquirida por grados, no pretendiendo el quimérico fin de que inmediatamente sea una fácil conquista del espíritu.

Más conveniente que el insistir en cada cuestion largo tiempo, el invertir muchas horas para avanzar poco en el texto cuyos preceptos se aspira á desentrañar por completo, es pasar ligeramente á fijarse en lo fundamental, en las verdades generales que comprenden y fecundan á las demás, constituyendo clave segura para descubrirlas mediante el natural ejercicio de la inteligencia. No es la enseñanza una exposicion completa, rigurosa, presentada para evitar toda objecion como si se tratara de sustentarla en una controvérsia, es el artificio por el que el profesor elige los caminos más expeditos y guía á sus alumnos eligiendo el terreno conveniente; pues los progresos de estos se realizan constantemente bajo el influjo de una fé inquebrantable en la autoridad del maestro, que suple la falta de claridad en las ideas.

Los textos se escriben para presentar la ciencia ordenada; pero esto no exige que la enseñanza los siga rigurosamente. Cada tratado presenta la ciencia en un estado definitivo, como traduccion la más perfecta del plan concebido por cada autor. El fin de la enseñanza es alcanzar este definitivo término; pero mediante tentativas repetidas. Parece que la inteligencia adquiere por yustaposicion, haciendo cada vez más espesa la trama de los conocimientos. No importa que un ligero repaso dé vagos presentimientos de la verdad, un segundo repaso profundizará y dejará más indelebles huellas, enriqueciendo la primera nocion con algunos detalles. Lo que importa es hacer destacar lo fundamental de lo accesorio, llamar la atencion sobre esos puntos de la ciencia, comparables á los vértices de una triangulacion geodésica, puntos de referencia de todo lo demás.

No importa, pues, ni aun que en la Metodología se pongan como ejemplos teoremas que no sean los primeros de la ciencia. Convendrá, sí, exponer los más sencillos, lo cual deberá ser regla permanente de enseñanza, y esto felizmente es realizable; pero en último resultado no importaria si la necesidad lo exigiera, un conocimiento hipotético, alguna concesion accidental, que se prometa justificar más tarde, si esto es para llegar al conocimiento de los métodos, es decir, las vias fijas y determinadas del espíritu que le conducen á cada clase de verdades.

Conocer los métodos en matemáticas es más importante que conocer gran número de verdades; porque aquellos son las fuentes de donde emanan estas; conocer los métodos y saber aplicarlos es poseer la fecundidad del suelo que desarrolla los gérmenes de las plantas para centuplicarlas.

Presentar la enseñanza, no como concluyente exposicion de las conquistas del entendimiento humano, sino como série de ejercicios prácticos del método, esto es, no buscar la verdad como fin, sino como ocasion para ejercitar la actividad del espíritu, produce el doble efecto de darnos los medios de alcanzarla y además conocerla como resultado definitivo de este ejercicio.

Pero no se llega á tales efectos con una intervencion casi exclusiva del profesor; no basta que esplique extensamente, que se esfuerce en aclarar los conceptos del texto, que multiplique los ejemplos prácticos para comprobar las teorías; es necesario que el alumno sea casi el protagonista de esta accion. El profesor, á la manera de lo que vemos en los diálogos socráticos tan admirablemente expuestos por Platon, debe ser un auxiliar que supla en caso necesario la debilidad intelectual del alumno, y le conduzca inconscientemente como efecto del curso natural del pensamiento á la verdad que podrá alcanzar muchas veces por sí, cuando se le faciliten los medios. El diálogo entre ambos mantiene además la atencion y aumenta los grados de su actividad.

Hay una notable variedad en la composicion de los razonamientos; los hay que sólo exigen el empleo de un procedimiento ó método, así como tambien pueden combinarse muchos. La condicion de ser iguales los ángulos opuestos por el vértice, sólo requiere evocar la definicion y propiedad esencial de los ángulos adyacentes. El hecho de encontrarse dos rectas perpendiculares á otra, el de coincidir dos semicircunferencias superpuestas mediante el giro de una sobre el diámetro, son inmediatos resultados del conocimiento que se tiene de no haber por un punto más que una perpendicular á una recta y de la definicion de la circunferencia; la condicion de paralelismo de rectas en el espacio se complica por la circunstancia de hallarse en un plano, supuesta implícitamente y suprimida en Geometría plana; el razonamiento que demuestra ser iguales los ángulos de lados paralelos en el espacio, exige pasar de una propiedad del paralelógramo á otra referente á dos paralelas respecto á una tercera recta en el espacio y de esta á un caso de la igualdad de triángulos, resultando la verdad definitiva del concurso de todas estas; y otras muchas pudieran citarse de superior complicacion,lo cual nos hace ver que la vária dificultad de las demostraciones resulta más que de una superioridad en los conceptos, del número mayor ó menor de las ideas ó procedimientos cuyas combinaciones les dan más ó ménos complejidad; pero siempre los procedimientos ó verdades elementales son los mismos, á la manera que los elementos químicos, siendo en pequeño número, originan la inmensa variedad de sustancias existentes en el Universo.

Por consiguiente, no importa que en un primer repaso no se insista sobre las verdades complejas, pues al llamarse la atencion sobre las elementales cuando estas se hayan poseido, podrá desde luego con muy poco trabajo penetrarse de las que antes impusieran por una ininteligibilidad aparente. Las frecuentes recapitulaciones de lo aprendido, los sumarios concisos al fin de cada parte del texto son ejercicios de repaso, más útiles que la monótona explicacion durante un curso, que no da tiempo más que para recorrer una vez la asignatura, y á lo sumo á completarla con un breve repaso. La insistencia en el recuerdo de lo aprendido y esas recapitulaciones rápidas facilitan insensiblemente la asimilacion de las verdades.

No todas las cuestiones deben ser igualmente repetidas, no á todas debe darse idéntica importancia. En la enseñanza ha de haber el claro oscuro de los cuadros que impiden se pierda el ideal en el fondo de los detalles, y hacen que se destaquen los objetos en el grado que les corresponde.

DE LOS MÉTODOS DEMOSTRATIVOS.

GENERALIDADES PRELIMINARES.

El método tiene dos fases conocidas con los nombres de *análisis* y *síntesis*.

El análisis es mecánico ó práctico, é ideal ó teórico. El teórico es la descomposicion mental para examinar las relaciones y dependencias de las partes entre sí y con el todo.

Hay que distinguir dos clases de análisis teórico. El de las ciencias empíricas (llamado por los lógicos método analítico) que consiste en la observacion y esperimentacion, cuyos resultados son el conocimiento de las propiedades y leyes de los objetos y fenómenos físicos, y el matemático, que no consiste como este en la observacion de un objeto real, sino en la de uno hipotético; es una observacion sobre lo que se ha de efectuar ó probar, suponiéndolo hecho ó probado; es un exámen mental correlativo con la observàcion empírica del anterior.

En el curso del análisis matemático hay una série de cuestiones enlazadas; de manera que la resolucion de un problema se convierte en la sucesiva resolucion de otros que conducen á él. Esta série de problemas debe ser tal, que habiendo partido del primero, considerado como resuelto, se sustituya por otra consecuencia suya, y así sucesivamente hasta llegar á uno cuya resolucion sea conocida, y que comenzando desde este último, el precedente sea consecuencia suya hasta llegar, siguiendo inversa direccion, al primero, convertido en la última consecuencia de este encadenamiento (1).

La sucesiva inclusion de unos problemas en otros, corresponde á la que se observa entre los géneros y especies cuando se trata de establecer el órden de los séres, mediante el análisis empírico. Hay, no obstante, la diferencia de que en el matemático existe la reciprocidad, teniendo la série de términos medios (cuestiones) una relacion de identidad y no de subordinacion como puede afirmarse del otro.

Esta especial correspondencia que enlaza las cuestiones, recibe el nombre de *método de sustituciones sucesivas*, y es empleado con gran frecuencia en todas las investigaciones matemáticas.

Los métodos son *directos* cuando se llega á la verdad final mediante afirmaciones de verdades auxiliares; el método es *indirecto* ó *ad absurdum* cuando se consigue

---

(1) Véase Duhamel. *Méthodes dans les sciences de raissonnement*

este resultado en virtud de la negacion, es decir, partiendo de una proposicion falsa cuya negacion conduce á afirmar la verdad que se busca.

Los métodos directos son generales ó particulares; serán generales, si se aplican indistintamente á los números y las figuras, de cuyas circunstancias prescinden; son particulares si dependen de consideraciones motivadas por el objeto á que se refieren.

Métodos directos generales.

En matemáticas elementales son dos, *induccion* y *de los límites*.

La *induccion* (1) extiende lo particular á lo general.

---

(1) Este nombre corresponde en rigor á la induccion empírica, procedimiento del método experimental por el que se llegan á admitir como generales las propiedades ó leyes observadas en determinado número de hechos ó séres; pero la llamada induccion por los matemáticos es un razonamiento riguroso como todos los demás de la ciencia, que tiene cierta analogía con la induccion empírica, por establecer la generalidad de una dependencia verificada para algunos casos. Las demostraciones mediante las que se obtienen las fórmulas de las coordinaciones, permutaciones y combinaciones en el Algebra de Cirodde se reducen á probar, que efectuado lo prescrito para pasar de un caso al en que se toma una letra más, se forman *todas* las nuevas coordinaciones permutaciones ó combinaciones, y además son *distintas*; el razonamiento del mismo autor para probar la ley de cocientes y residuos, estriba tan sólo en la formacion de los n^{simos} cocientes y resíduos cuando se dan los $(n-1)^{\text{simos}}$, y esta verificacion práctica tiene el valor de una demostracion por efectuarse sobre un término general. Lo mismo se dirá de la empleada por Cortázar para generalizar la fórmula de binomio de Newton, despues de haberla obtenido en los casos de dos, tres y cuatro factores binomios. La demostracion del teorema de Euler se reduce á hacer ver que la expresion $A+1=F+S$ permanece invariable al pasar de un poliedro abierto á otro que contenga una cara más (Rouché y Comberouse), lo cual autoriza el tránsito del caso de una cara al de dos, y asi hasta cualquier poliedro abierto, ó poliedro completo, si se agrega una cara para llegar á la fórmula final $A+2=F+S$, permanencia que se puede probar tambien quitando sucesi-

En Algebra justifica la generalidad de una ley probada para determinado número de casos, en Geometría extiende una propiedad de una figura particular, sobre la cual es fácil un análisis directo, al tipo general de la misma. El método de los límites aplica las propiedades halladas para lo finito y comensurable á lo infinito é incomensurable; salva el abismo que separa la curva de la recta, lo contínuo de lo discontínuo.

Métodos directos particulares.

Los métodos particulares son: *determinativos*, *extensivos* ó *limitativos*.

Los determinativos tienen por objeto determinar figuras, ó hacer ver la igualdad de unas con otras.

Se pueden citar los de *superposicion*, *giro y rebatimiento*, los de la *cuarta proporcional* y *rectas antiparalelas*.

El de *superposicion* consiste en hacer ver que, dados ciertos elementos respectivamente iguales, pertenecientes á dos figuras, los demas tambien serán iguales, mediante la colocacion de ambas una sobre otra, por efectuarse su coincidencia.

Es preferible á la coincidencia, difícil ó demasiado prolija en cuestiones complicadas, probar directamente

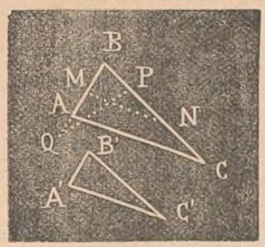
---

vamente caras á un poliedro cualquiera El teorema de Carnot consistente en afirmar la relacion $\frac{a\ A}{a\ A'}\cdot\frac{b\ B}{b\ C'}\cdot\frac{c\ C}{c\ D'}\cdots\cdots=+1$ para los segmentos formados en los lados de un poligono por una trasversal, admite tambien el razonamiento inductivo, cuyo fin en este caso es probar la generalidad de lo concerniente al número (lo concerniente á la esencia ó constitucion de la figura, se ha justificado por el razonamiento sobre el polígono dado como ejemplo) de que se ha prescindido momentáneamente en la demostracion, que sin esto sólo sería aplicable á la figura propuesta.

la identidad de las figuras fundándose en los teoremas relativos á la igualdad de triángulos, triedros ó tetraedros, etc., como hacen Cortázar, Rouché y Comberouse y otros autores.

El *giro* y el *rebatimiento* no son más que dos especiales maneras de verificar la superposicion. Se usan para reproducir la figura simétrica de otra dada respecto á un punto en el primer caso, y respecto á una recta en el segundo.

El método de la *cuarta proporcional* se reduce á emplear dos proporciones ó dos sistemas de proporciones, uno que exprese las relaciones lineales de dos figuras semejantes, el otro dado en la hipótesis, deduciéndose la identificacion de dos términos correspondientes, con motivo de ser idénticos respectivamente los demás. Así se determinan puntos.



(Figura 1.ª)

Este procedimiento de las proporciones se halla reemplazado en la Geometría de los Sres. Rouché y Comberouse por el de las *rectas antiparalelas* que es el mismo, si bien la colocacion de los puntos es inversa, (á las dos paralelas que determinan en dos secantes los cuatro puntos correspondientes á una proporcion directa, se reemplaza una circunferencia que determina en dos secantes cuatro puntos correspondientes á una proporcion inversa.)

Los triángulos A B C y B M N (fig. 1) corresponden á la proporcion $\frac{AB}{MB}=\frac{CB}{NB}$; los triángulos A B C y Q B P corresponden á la $\frac{AB}{PB}=\frac{CB}{QB}$. Los términos de ambas proporciones corresponden á segmentos inversamente colocados en las figuras.

Los métodos *extensivos*, muy numerosos en Geometría superior, son escasos en la elemental. Despues de efectuada la operacion preliminar que justifica la relacion existente con reciprocidad entre elementos distintos de dos figuras, de tal modo, que determinado un grupo de elementos, suceda lo mismo con su correlativo, el método se halla reducido á *determinar para una especie de elementos la naturaleza de sus propiedades, en virtud de las cuales se conocen las de sus correlativos*.

Pueden citarse como ejemplos, el tan usado en Geometría elemental para hallar la medida de unas entidades por la de otras, es decir, valuar los ángulos por los arcos, las áreas y volúmenes por los productos de ciertas líneas y el de *ángulos poliedros suplementarios*.

La relacion de los elementos heterogéneos en el primer caso, es la más sencilla que se conoce, la variacion proporcional, es decir, la idéntica expresion numérica cuando ambos se refieren respectivamente á dos unidades fijas de su especie que se corresponden. (Por ejemplo: los arcos al cuadrante y los ángulos al recto) ó á lo sumo la variacion de los valores numéricos de ciertas entidades en la misma relacion que los productos de otras (las áreas y volúmenes varian como los productos de las líneas homólogas.)

En el método de *ángulos poliedros suplementarios*, la relacion de valor (los ángulos diedros de un ángulo poliedro convexo son respectivamente suplementos de los rectilíneos del otro) se complica con la relacion de posicion (las aristas del uno son perpendiculares á las caras del otro).

Los métodos limitativos prescinden incidentalmente de alguna condicion exigida en un problema, ó aumentan el número de las que se dan haciendo manifiestas las que hay incluidas implícitamente en el enunciado (por ejemplo: si se dan varios puntos, se hallan dados implícitamente sus simétricos respecto á rectas dadas) con lo cual se consigue limitar la cuestion, es decir, reducirla á otra más determinada.

Los métodos por *semejanza*, por *simetría*, por *inversion* y por *interseccion de lugares geométricos* son limitativos.

Su empleo para resolver una cuestion conduce sucesivamente á dos problemas. El primero resulta de limitar el propuesto segun se ha dicho, el segundo tiene por objeto el tránsito de este problema ya resuelto al dado, restableciendo la condicion suprimida, ó suprimiendo la implícita que ha servido de auxiliar.

Así, el método *por semejanza* consiste en prescindir de la magnitud de las líneas, en resolver la cuestion propuesta para una figura semejante á la dada, y luego, con motivo de la proporcionalidad de las rectas homólogas, pasar de este problema auxiliar al final. El método *por simetría* consiste en emplear los puntos simétricos de los dados respecto á rectas de la figura para determinar otros, y despues hacer caso omiso de aquellos, pues sólo han servido de auxiliares. El métotodo *por inversion* consiste en prescindir de la posicion de la figura resolviendo la cuestion para figuras de cualquier modo situadas, pero cuyos elementos guarden entre sí las relaciones propuestas, y despues construirla sobre los elementos dados en posicion. Este artificio facilita, pues, empezar el trazado por elementos distintos de los dados, concluyendo por estos en virtud de la relacion invariable de unos y otros.

El método de *interseccion de lugares geométricos* (1),

(1) Al resolver sistemas de ecuaciones se aplica este método á valores

es el más general de todos, porque consiste en prescindir incidental y sucesivamente de algunas condiciones de cualquiera naturaleza que sea, para determinar, no los puntos que se piden, sino los lugares que los contienen y cuyas intersecciones son dichos puntos.

Método ad absurdum.

Por el método directo se afirma la verdad, por el de *reduccion al absurdo* se niega el error, es decir, se niega lo contrario de una proposicion que con esto pasa á ser verdad.

El método *ad absurdum* consiste en deducir un absurdo ó una contradiccion de una proposicion admitida, la que con este motivo debe ser desechada.

Cuando hay que unir en un teorema dos entidades de distinta extension se limita convenientemente la más extensa, dándole así idéntica extension que la otra para de este modo poder formar la proposicion recíproca.

Como ejemplo podemos citar los teoremas: *Si dos ángulos son adyacentes serán suplementarios, si son opuestos por el vértice serán iguales, y si dos rectas son perpendiculares á una tercera, serán paralelas,* en los que las ideas de *ángulos adyacentes, ángulos opuestos por el vértice* y *dos perpendiculares á una tercera* tienen respectivamente menos extension que las de *ser suplementarios, ser iguales* y *ser las rectas paralelas.*

Hay tambien proposiciones cuyos términos no son en totalidad recíprocos de los de otras. Sin embargo, no dejan de ser recíprocas, pues constan de una parte comun y de otra completamente recíproca.

---

numéricos, pudiendo entonces denominarse *interseccion de lugares algoritmicos.*

Esta circunstancia se observa en el teorema: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de su comun interseccion se traza una recta perpendicular al uno, estará contenida en el otro* y recíprocamente. *Si por un punto de su comun interseccion se traza en uno de los planos una perpendicular á esta, será perpendicular al otro*, que aún puede modificarse para separar totalmente un término no recíproco que hay incluido en la doble condicion (1) de ser la recta perpendicular al plano, diciéndose: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de su comun interseccion se traza una recta perpendicular á esta y á otra de uno de los planos,* ESTARÁ CONTENIDA EN EL OTRO: *Si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de su comun interseccion se traza una perpendicular á esta, contenida en uno de los planos,* SERÁ AL MISMO TIEMPO PERPENDICULAR Á OTRA DEL OTRO PLANO.

Tambien puede citarse el teorema: *Si una recta y un plano son perpendiculares, toda recta perpendicular á la primera será paralela al segundo, ó estará contenida en él, y toda recta paralela al plano ó contenida en él, será perpendicular á la primera.*

En la demostracion *ad absurdum* hay que distinguir tres casos.

1.° Cuando se trata de un teorema que es contradictorio respecto á una definicion.

En matemáticas las definiciones son verdaderos principios fundamentales. Así, por ejemplo: la definicion de la circunferencia es el fundamento de todas las propiedades que hallamos en esta curva.

Además, toda definicion equivale á una proposicion y su recíproca, porque segun la lógica, toda definicion

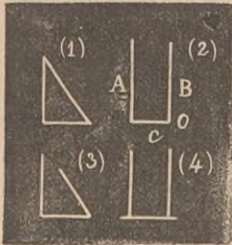
(1) Es doble porque implica una perpendicularidad á dos rectas.

es una proposicion idéntica, es una igualdad perfecta entre sus dos términos; esta es la razon á que obedece el verse frecuentemente en la ciencia matemática aislados muchos teoremas que se demuestran *ad absurdum* (1).

2.° Hay numerosos teoremas recíprocos que se demuestran *ad absurdum* fundándose en otros tales como los siguientes: *Por un punto sólo se puede trazar una perpendicular á una recta*; *por un punto no se puede trazar más que una paralela á una recta*, los cuales expresan que solamente existe un caso para verificarse una propiedad.

La razon de poderse probar estos numerosos teoremas cuando se conocen los citados y otros de su especie que sólo reconocen un caso es la siguiente:

Sea para mayor claridad la proposicion: Todo meta es mineral, que es verdadera. Si suponemos que en la Naturaleza no existiera más que un mineral, se podria admitir desde luego como cierta la recíproca, que se enunciaría diciendo: Todo mineral es metal.



(Figura 2.ª)

3.° La teoría de paralelas nos ofrece una aplicacion que conduce á importantes consideraciones, y para indicarlas es necesario advertir que los teoremas: *Por un punto fuera de una recta no se le puede trazar más que una perpendicular*, y *dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí* que corresponden á los números (1) y (4) (fig. 2.ª), enunciados en los tratados como proposiciones diferentes, no son más que

(1) Estas consideraciones tienen su complemento en la Metodología elemental.

una sola; el 2.° de estos dos teoremas es el contrario del recíproco del 1.°; razon por la que dicho 2.° teorema se demuestra *ad absurdum* fundándose en el 1.°

En cuanto á los números (2) y (3) representan respectivamente las proposiciones: *Si dos rectas son paralelas, y una de ellas es perpendicular á una tercera recta, la otra tambien lo será*, y *si una recta es perpendicular á otra y una tercera es oblícua respecto á esta, encontrará á la primera*, ó lo que es lo mismo, *no le será paralela*.

Este último enunciado se emplea por algunos autores como el del postulado de Euclides, del cual es una ligera modificacion (Lacroix, Cardin). El correspondiente al número (2) es la proposicion: *Por un punto fuera de una recta no se le puede trazar más que una paralela*, expuesta con distinta forma, porque decir que: *Si* A *es perpendicular á* C *y paralela á* B, *esta será tambien perpendicular á* C, sabiendo que *no se puede trazar por el punto* O *más que una perpendicular á* C, es decir que *tampoco se puede trazar por* O *más que una paralela á* C, segun las ideas ya consignadas en el caso anterior del método ad absurdum, y de este modo formulan el postulado de la teoría de paralelas algunos autores (Cortázar, Rouché y Comberouse.)

Vemos en resúmen que la proposicion correspondiente á los números (1) y (4) se demuestra, y la correspondiente á los (2) y (3) que es el postulado de la teoría de paralelas, (no el de Euclides, segun Peyrard) se admite sin demostracion para completar la proposicion total, base de la teoría de paralelas.

Para terminar estas consideraciones señalaremos un hecho digno de atencion que puede ser observado en la teoría del paralelismo. Siendo asi, que para tener completamente probado en sus 4 partes un teorema, hemos visto que se necesitaba conocer dos que no fueran las reconocidas como equivalentes, se observa que hay teoremas en los cuales basta probar uno sólo de sus casos para quedar por completo demostrado.

Admitido el teorema: *Si un plano X corta á una de dos paralelas cortará á la otra*; queda probada la proposicion: *Si un plano es paralelo á una de dos paralelas ó la contiene tambien contiene á la otra ó le es paralelo*, que se demuestra ad absurdum fundándose en la anterior, é inversamente, admitida como demostrada esta, quedaría probada *ab absurdum* aquella.

La razon de esto se halla en que por motivo de cierta simetría relativa de posicion, propia de las rectas paralelas, cada uno de estos teoremas es doble. Así; el primero de los dos equivale á decir: *Si un plano X corta á una de dos paralelas A, cortará á la otra B*, y recíprocamente, *si corta á la* B, *cortará á la* A. En cuanto al segundo equivale á decir: *Si un plano es paralelo ó contiene á una de dos paralelas A es paralelo ó contiene á la otra* B, y recíprocamente: *Si es paralelo ó contiene á la* B, *será paralelo ó contendrá á la* A.

Método sintético.

El método sintético, complemento del analítico es expositivo.

Los procedimientos del método sintético son la *definicion, division* y *demostracion*.

El conjunto de séres que constituye el mundo real tiene cierta continuidad bajo el punto de vista de sus propiedades.

Como el espacio, como el tiempo, la trama (por decirlo así) de la realidad es contínua. Cada objeto tiene infinidad de propiedades que se difunden, que irradian, que se compenetran con las de los demás. No se puede señalar la comprension de los individuos.

La inteligencia, órgano de la discontinuidad, reflector inexacto de la realidad, á esa trama contínua sustituye una artificiosa representacion de la misma con la *definicion* y la *division* de los séres. Estas son lo que los instantes y los puntos, cuando la inteligencia quiere perseguir por una vana é indefinida sub-division al espacio y al tiempo. De las infinitas propiedades de cada individuo toma las que aparecen como más esenciales, y forja séries de síntesis correspondientes con aproximacion variable á su tipo natural; y esas síntesis ó definiciones de los séres tienen una parte propia que es su esencia, como un substractum en que se apoya lo comun, que se difunde sobre otras síntesis coordenadas con ella y subordinadas á una más superior que las comprende, porque incluye algo comun á las mismas, todos sus puntos de coincidencia, quedando más restringida en sus propiedades, porque las tiene diseminadas entre todas sus especies.

Estas propiedades perdidas para el género, pero distribuidas entre todas sus especies, sirviéndolas de carácter distintivo (las diferencias que sumadas con el género dan las especies) son términos de la division, complemento de la definicion; porque la definicion hace resaltar cada objeto del fondo de la variedad, y la division difunde la variedad que brota de cada unidad. El primero es un movimiento convergente del todo (la realidad) á las individualidades que incluye, el segundo diverge de cada individualidad á la indefinida variedad de los séres.

La definicion y division son un doble aspecto de una síntesis realizada. Por la primera se ve la variedad fundiéndose en la unidad, por la segunda la variedad fluyendo de la unidad.

El tercer procedimiento, la demostracion, es el lazo lógico, es la fuerza de atraccion que funde varias ideas en una síntesis llamada *teorema.*

En matemáticas la definicion es una síntesis realizada á priori, el teorema una síntesis fundada á posteriori.

El teorema constituye una síntesis, expresion del resultado de un problema que se propuso la inteligencia al examinar la realidad intelectual, (es decir, el conjunto de ideas abstractas que corresponden á las definiciones y son el fundamento de todas las relaciones matemáticas).

Por ejemplo, al problema (1). *Dado el lado del cuadrado inscrito* ¿qué relacion tiene con el radio? corresponde el teorema: *La relacion del lado del cuadrado inscrito en el circulo al radio* es $\sqrt{2}$.

De dos maneras generales se procede en la demostracion de un teorema: 1.° Estableciendo relaciones intermedias que enlacen los extremos que lo constituyen: 2.° Haciendo ver que una verdad está incluida en otra conocida.

1.° Para probar una verdad ú obtener un resultado propuesto, despues de construida la figura (si es cuestion geométrica) que traduzca gráficamente las condiciones del enunciado, se trazan líneas auxiliares,

(1) Observaciones útiles en el estudio de las matemáticas.

(perpendiculares, paralelas, tangentes, diagonales, etc. segun los casos), y se ve qué teoremas conocidos establecen relaciones entre los elementos de la figura primitiva y los agregados por la construccion. El resultado será haber enlazado los extremos del teorema.

Como ejemplo puede citarse el teorema: *En un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales*, pues para demostrarlo, basta unir el vértice comun á los dos lados iguales con el punto medio del lado opuesto, ó trazar por el mismo la perpendicular á dicho lado, ó la bisectriz del ángulo, y, en virtud de alguno de los teoremas relativos á la igualdad de triángulos, queda probada la igualdad de los ángulos.

Si se tratase de cuestiones aritméticas ó algébricas, las construcciones geométricas serían reemplazadas por combinaciones de operaciones, que presentando bajo nuevas formas las cantidades, hicieran manifiesta la propiedad que se tratase de descubrir. Así, para probar que si una fraccion cuyos dos términos son primos entre si es equivalente á otra, los dos términos de esta son equimúltiplos de los de la primera, se dice: si la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ es equivalente á $\frac{c}{d}$, se tendrá que c será el mismo múltiplo de a, que d lo es de b, pues de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce $a\,d=c\,b$, y ya puesta la expresion en esta nueva forma, mediante la multiplicacion por b y d, se concluye fácilmente la demostracion, fundándose en que: si un número divide á un producto de dos factores y es primo con uno de ellos divide al otro factor. En álgebra para discutir la ecuacion de 2.° grado $ax^2+bx+c=0$ cuando $a=0$, se modifican las expresiones $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ de las raices, multiplicándolas respectivamente por $b+\sqrt{b^2-4ac}$ y por $b-\sqrt{b^2-4ac}$ con lo cual, haciendo desaparecer a del numerador, puede llegarse fácilmente á las conclusiones á que conduce esta hipótesis.

2.º El teorema: *Todo factor del dividendo y divisor lo es del resto, y todo factor del divisor y resto lo es del dividendo*, está incluido en el siguiente: *Todo divisor de los sumandos lo es de la suma*, y en que: *Todo divisor del minuendo y sustraendo lo es del resto*; por último, todos los teoremas relativos á la teoría de la divisibilidad se hallan incluidos en estos mismos.

En Geometría puede citarse como ejemplo el teorema: D*os rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí*, que está incluido en: P*or un punto situado fuera de una recta no se le puede trazar más que una perpendicular*.

De manera que el teorema es como una incompleta expresion de una entidad correspondiente al mundo abstracto. Las construcciones gráficas ó trasformaciones algébricas son nuevos detalles y perfiles que determinan, que dibujan los contornos de esta entidad, haciéndola destacarse gradualmente del fondo que la contiene oculta, hasta que distintamente aparece como tal género, como tal especie en el órden de las verdades, de las cuales cada una tiene su lugar fijo ó representacion en ese fondo que puede considerarse como un símil de la ciencia (primer caso); ó bien por el desvanecimiento de tal parte de estos contornos y la concentracion de tal otra, se consigue desprender de una forma general vaga y confusa todas las formas parciales, que incluye en la totalidad de sus líneas (segundo caso); y entonces, cuando por estas determinaciones, las ideas que expresa un teorema aparecen como enclavadas en el fondo de la realidad abstracta (permítase la expresion, pues las ideas abstractas son actos de la inteligencia, y dan orígen á una realidad distinta de la física), el teorema pasa á ser verdad patente para la inteligencia, queda demostrado.

Los teoremas se coordinan en otras síntesis superiores llamadas teorías, que los incluyen bajo puntos de vista comunes, y estas se enlazan entre sí constituyendo por su conjunto la ciencia, que en las diferentes épocas se presenta segun diversos grados de perfeccion traduciendo la suma de trabajo analítico realizado por la humanidad durante su vida científica.

METODOLOGÍA ELEMENTAL. (1)

Teorema es una proposicion en que se afirma una relacion entre dos ó más cosas que necesita demostrarse. Consta de dos partes: *Hipótesis y tésis*. Hipótesis es lo que se supone, tésis es la relacion que se afirma, y demostracion el razonamiento que se emplea para hacer evidente la relacion.

Ejemplos:

Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número, el quebrado queda multiplicado por el mismo; *Si cuatro números forman proporcion*, el producto de extremos es igual al de los medios; *Si dos ángulos son opuestos por el vértice*, serán iguales.

La parte de letra bastardilla es la hipótesis; lo restante la tésis.

Problema es una proposicion en que se dan varias

(1) Para que esta primera parte de la obra constituya un *Ensayo de metodología matemática*, á las consideraciones sobre la enseñanza han seguido otras sobre los métodos demostrativos y estas últimas se completan con una exposicion del *segundo tratado*, correspondiente al nuevo plan, bajo la forma propia para la enseñanza.

cosas relacionadas entre sí, y se trata de hallar otras por medio de las primeras.

Los teoremas y problemas se dividen en *directos* y *recíprocos*. Se llama teorema recíproco de otro, aquel cuya hipótesis es la tésis de éste, y cuya tésis es la hipótesis del mismo. Se llama problema recíproco de otro, aquel cuyos datos son el resultado de éste, y cuyo resultado es lo dado en este mismo. Para que dos teoremas ó problemas sean recíprocos, basta que alguna de sus condiciones esté invertida en ambos.

Ejemplos:

Los teoremas: *Si cuatro números son tales que el producto de los extremos es igual al de los medios* forman proporcion, *si dos ángulos son iguales y* TIENEN DOS LADOS EN PROLONGACION, serán opuestos por el vértice, son los recíprocos del 2.° y 3.° ya citados. En este último hay que añadir la condicion de *tener dos lados en prolongacion* para que haya reciprocidad.

La sustraccion y extraccion de raices son los problemas recíprocos de la suma y elevacion á potencias.

Hay teoremas contrarios de otros, y se forman negando la hipótesis y la tésis de estos.

Ejemplos:

Los teoremas: *Todo punto situado* EN *la perpendicular levantada á una recta en su punto medio,* EQUIDISTA de sus extremos; *Si dos rectas forman con una secante* ÁNGULOS ALTERNOS-INTERNOS IGUALES *serán paralelas,* tienen por contrarios los siguientes: *Todo punto situado* FUERA *de la perpendicular levantada á una recta en su punto medio* DISTA DESIGUALMENTE de los extremos de esta; *Si dos rectas forman con una secante* ÁNGULOS ALTERNOS-INTERNOS DESIGUALES, NO serán paralelas.

Hay muchas cuestiones que tienen cuatro partes ó que son expresadas completamente por cuatro teoremas:

dos directos contrarios entre sí y sus dos recíprocos.

Ejemplos:

A la cuestion de la posicion de un punto respecto á los extremos de una recta, se refieren los teoremas:

1.° —(Directo afirmativo.)	Todo punto situado en la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, equidista de sus extremos.	2.°— (Directo negativo.)	Todo punto situado fuera de la perpendicular levantada à una recta en su punto medio dista desigualmente de sus extremos.
3.°-(Recíproco afirmativo.)	Todo punto que equidista de los extremos de una recta, se halla en la perpendicular levantada á esta en su punto medio.	4.°—Recíproco negativo.	Todo punto que dista desigualmente de los extremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada en su punto medio.

A la cuestion de una recta que corta á otras dos, se refieren los teoremas:

1.° —(Directo afirmativo.)	Si á dos rectas paralelas se corta por una secante, formarán con esta ángulos alternos-internos iguales.	2.° — Directo negativo	Si á dos rectas no paralelas se corta por una secante, formarán con esta ángulos alternos-internos desiguales.
3.°—Recíproco afirmativo.	Si dos rectas forman con otra ángulos alternos - internos iguales, serán paralelas.	4.°—Recíproco negativo.	Si dos rectas forman con otra ángulos alternos - internos desiguales, no serán paralelas.

Hay proposiciones que no son rigurosamente recíprocas.

Ejemplos:

1.° *Si dos ángulos son opuestos por el vértice*, serán iguales.

Si dos ángulos son iguales, serán opuestos por el vértice.

2.° S*i dos ángulos son adyacentes*, serán suplementarios.

Si dos ángulos son suplementarios, serán adyacentes.

En los dos casos, los segundos teoremas son falsos. Esto consiste en que la condicion de *ángulos iguales*, es más extensa que la de *ángulos opuestos por el vértice*, y la de *ángulos suplementarios*, es más extensa que la de *ángulos adyacentes*; porque todos los ángulos opuestos por el vértice son iguales, y además hay muchos ángulos iguales que no son opuestos por el vértice, y todos los ángulos adyacentes son suplementarios, pero tambien hay muchos de estos que no son adyacentes.

Regla. *Para hacer recíprocas dos proposiciones relativas á una misma cuestion, se tiene que añadir á la condicion más extensa alguna otra condicion, que particularizándola, la haga idéntica á la que es ménos extensa.*

Así en los ejemplos citados, los teoremas recíprocos de los primeros serán: S*i dos ángulos son iguales* y TIENEN DOS LADOS EN PROLONGACION, serán opuestos por el vértice. S*i dos ángulos son suplementarios y* SON CONSECUTIVOS, serán adyacentes.

De los métodos.

Hay métodos para la *demostracion* de teoremas y para la *resolucion* de problemas.

Tanto para demostrar un teorema como para resolver un problema, se emplean: *construcciones* y *teoremas auxiliares.* Las construcciones son entidades (figuras ó números) que se combinan con lo supuesto ó dado. Los teoremas auxiliares sirven para enlazar esto con las entidades introducidas por las construcciones.

Ejemplos:

Para demostrar que: En un triángulo *á ángulos iguales se oponen lados iguales*, la construccion puede consistir en *trazar por el vértice que no corresponde á ninguno de los ángulos iguales una perpendicular al lado opuesto*, con lo cual resultan dos triángulos que son iguales en virtud del teorema auxiliar: *Dos trián-*

gulos son iguales, si tienen un lado y dos ángulos homólogos respectivamente iguales.

Para *sumar quebrados*, la construccion auxiliar es *reducirlos á un comun denominador*, y el teorema auxiliar, que: *Si los dos términos de un quebrado se multiplícan por un mismo número el quebrado no altera.*

Para demostrar que: S*i desde un punto* O *tomado en el interior de un triángulo* ABC *se trazan dos rectas* OA y OB, *la quebrada* AOB *será menor que la* ACB, la construccion consiste en prolongar *AO* hasta su encuentro en *D* con *BC*; la proposicion auxiliar es el axioma: *La recta es la menor distancia que se puede trazar entre dos puntos.*

Métodos demostrativos geométricos.

Método de superposicion.—Consiste en colocar mentalmente dos figuras dadas, la una sobre la otra, de manera que se correspondan las partes que se suponen iguales, haciéndose ver que se confunden tambien las demás. Ejemplos:

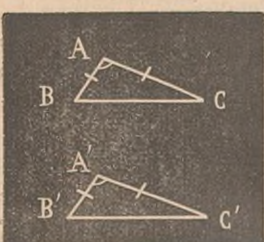


Figura 3.ª

Dos triángulos ABC y A'B'C' *son iguales si tienen dos lados* CA y BA *respectivamente iguales á* C'A' y B'A' *é igual el ángulo comprendido* (fig. 3.ª).

Se colocará el triángulo ABC sobre el A'B'C' de manera que el lado AC se confunda con A'C' (1) (esta es la superposicion dependiente del que demuestra); entonces el lado BA se confundirá con B'A' porque el

(1) La superposicion de figuras tiene dos partes: 1.ª una superposicion que depende del que demuestra y consiste en colocar una recta de una

ángulo A es igual al A′, y los extremos B y B′, se confundirán por ser iguales BA y B′A′ (superposicion dependiente de la hipótesis).

Si dos triángulos tienen igual un lado y los ángulos adyacentes homólogos, serán iguales.

Se colocará el triángulo ABC sobre el A′B′C′, de manera que el lado CA se confunda con su igual C′A′ (superperposicion dependiente del que demuestra). El lado CB se confundirá con C′B′ y el AB con A′B′ (superposicion dependiente de la hipótesis). Los vértices B y B′ se confundirán (superposicion debida á la demostracion.

Método de rebatimiento.—Consiste en hacer girar una figura alrededor de una recta, separándose de su plano, hasta volverse á colocar en el mismo á distinto lado de la recta sobre que se efectúa el giro.

Ejemplos.

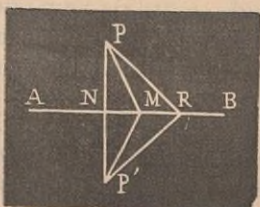


Figura 4.ª

Por un punto P *situado fuera de una recta* AB *no se le puede trazar más que una perpendicular* (fig. 4.ª).

Haciendo girar la figura sobre AB, el punto *P* tomará una posicion *P′*. Si se unen ambos con uno cualquiera *M* de la recta, los ángulos *PMA* y *P′MA* serán siempre iguales. Si *PMP′* es una recta, los ángulos PMA y P′MA que serán suplementarios é iguales, serán rectos, es decir, que *PM* será perpendicular á AB; pero entre P. y P′ no hay más que una recta; luego por P no se puede trazar más que una perpendicular á la AB.

Si por un punto P *situado fuera de una recta* AB *se*

figura sobre su igual de la otra; 2.ª la superposicion de las demás partes, independiente de este.

trazan una perpendicular y una oblicua, la perpendicular será la menor.

Haciendo girar la figura alrededor de *AB*, el punto P tomará una posicion P′; Siendo PNP′ recta, será menor que cualquiera otra PMP′; luego PN, mitad de la primera, será menor que PM, mitad de la segunda.

Si *por un punto* P *situado fuera de una recta* AB *se trazan varias oblícuas, la que más dista es la mayor.*

Haciendo girar la figura al rededor de AB, resultan las dos quebradas PMP′ y PRP′, de las cuales PRP′ es la mayor; luego PR será mayor que PN, mitades respectivas de ambas.

Método de giro.—Consiste en hacer girar parte de una figura alrededor de un punto, de manera que las rectas que pasen por este queden en la prolongacion de su posicion primitiva (figura 5.ª).

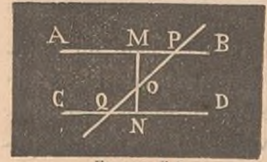


Figura 5.ª

Ejemplo: Si *dos rectas* AB y CD *forman con una secante ángulos* APQ y PQD *alternos-internos iguales, serán paralelas.*

Trazando por *O*, punto medio de *PQ*, la *OM* perpendicular á *AB*, prolongándola hasta cortar en N á CD, y haciendo girar la parte *AMPO* alrededor de *O*, *Q* se confundirá con P por ser *OP*=*OQ*; P*A* se confundirá con *QD*, por ser el ángulo *APQ* igual al *PQD*, OM con ON, por ser los ángulos MOP y NOQ iguales, y por consiguiente, los ángulos PMO y QNO, cuyos lados están superpuestos, coincidirán y serán iguales; luego el ONQ será tambien recto, y MON será una recta que formará ángulos rectos con AB y CD, es decir, estas serán paralelas (1).

(1) En virtud del teorema: *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas.* Véase en el Método *ad absurdum.*

Estos dos métodos no son más que variaciones del de superposicion, y los tres pueden suplirse por el empleo de los *casos de igualdad de los triángulos*.

MÉTODO DE LA CUARTA PROPORCIONAL.—Consiste en comparar una proporcion, deducida de dos figuras semejantes, con otra proporcion dada en el teorema, y hacer ver que hay en ambas tres términos respectivamente iguales, y por consiguiente lo son los cuartos.

Ejemplo: *Si dos triángulos* ABC y A'B'C' *tienen los ángulos* B *y* B' *iguales, y los lados* AB *y* BC *proporcionales con los* A'B' *y* B'C', *serán semejantes* (fig. 1).

Tomando en *BA* desde *B* la distancia $BM = B'A'$, y trazando *MN* paralela á *AC*, se tendrá la proporcion $BA : BM :: BC : BN$. (1) Se tiene por hipótesis $BA : B'A' :: BC : B'C'$, y como $B'A' = BM$, hay tres términos iguales á otros tres; luego tambien lo serán los cuartos.

MÉTODO DE RECTAS ANTI-PARALELAS—Consiste en obtener tambien la igualdad de dos segmentos rectilíneos por medio de proporciones; sólo que los términos de la proporcion tiene una colocacion inversa en las figuras. (Figura 1.ª)

Si dos triángulos ABC *y* A'B'C' *tienen los ángulos* $B = B'$ *y los lados adyacentes á ambos proporcionales, serán semejantes*.

Tomando sobre BC una distancia $BP = B'A'$, lado no homólogo á este, y trazando PQ que forme con BC un ángulo BPQ igual al B'A'C'; se tendrá la proporcion $BC : BA :: BQ : BP$ por ser *PQ* y *AC* anti-paralelas en el ángulo B. Se tiene tambien por hipótesis $BC : BA :: B'C' : B'A'$, y por ser $BP = A'B'$ hay en las dos proporciones tres

(1) En virtud del teorema: *Si se traza una recta que corte á dos lados de un triángulo paralelamente al te cero, dividirá á aquellos en partes proporcionales.*

términos respectivamente iguales, de lo que se deduce que tambien serán iguales los cuartos.

Este método es sustituido por el *ad absurdum*, cuando se prueba antes, que *si se dan dos puntos de una recta, no hay en su direccion más que un punto entre los dos, y otro fuera, tales, que las relaciones de sus distancias á los primeros sea dada.*

Métodos generales.

Método de sustituciones sucesivas.—Es una de las maneras más usadas del método analítico. Consiste en sustituir al problema ó teorema propuesto, otro más fácil.

Ejemplo:

Para multiplicar dos números de varias cifras, se multiplica el multiplicando por cada cifra del multiplicador, corriendo un lugar las unidades de cada producto parcial, y finalmente este problema se reduce á multiplicar cada cifra del multiplicando por la del multiplicador que se considera, corriendo tambien un lugar al escribir las unidades de cada producto parcial.

Método de los límites.—Sirve para pasar del caso de una demostracion en que se trata de cantidades comensurables al en que se trata de cantidades incomensurables.

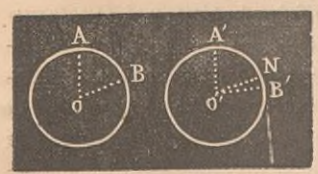


Figura 6.ª

Ejemplos: Suponiendo demostrado el teorema: *Dos ángulos* AOB y $A'O'B'$ *de circunferencias iguales, son proporcionales á sus arcos correspondientes* AB y $A'B'$ para el caso en que son comensurables, se extenderá al caso de la incomensurabilidad de la manera siguiente (figura 6.ª):

Tómese una parte alícuota del arco A′B′ todas las veces que se pueda sobre el AB, y supóngase que el extremo es *N;* se tendrá el ángulo A′ON, cuyo arco A′N es comensurable con el AB, y por consiguiente la proporcion $\frac{AB}{A'N}=\frac{AOB}{A'O'N}$; y como estas relaciones son siempre iguales, cualquiera que sea la parte alícuota tomada, que puede ser tan pequeña como se quiera, resulta que: límite de $\frac{AB}{A'N}=$límite de $\frac{AOB}{A'ON}$; y como en el límite N y B′ se confunden, se tiene finalmente $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AOB}{A'O'B'}$

Método ad absurdum.

Este método consiste en probar que es falsa la proposicion contraria de una dada, y admitir por consiguiente esta como verdadera; porque es evidente que lo contrario de lo falso es cierto.

Ejemplo:

Si se ha demostrado ser falso que dos ángulos contiguos y suplementarios no son adyacentes, quedará probado que lo son.

REGLA GENERAL. *Para demostrar por reduccion al absurdo un teorema, se supone falsa la tésis, y si de esta suposicion resulta una proposicion contraria á alguna definicion admitida, á alguna verdad demostrada, ó á la hipótesis del teorema propuesto, se debe desechar dicha tésis contraria á la supuesta, y admitir por consiguiente esta, es decir, el teorema propuesto, que resulta demostrado.*

Tres casos ocurren en la demostracion ad absurdum: 1.° Que el resultado de suponer falsa la tésis del teorema sea contrario á una *definicion*: 2.° que sea contrario á una verdad conocida, y 3.° que sea contrario á la *hipótesis* del teorema propuesto.

Primer caso. Hay teoremas que son consecuencias de definiciones conocidas. Para demostrarlos, basta suponer que sucede lo contrario de lo afirmado en ellos, resultando una contradiccion con lo definido.

Sea el teorema: *El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.* Para demostrarlo diremos:

Haciendo girar la semi-circunferencia inferior *ABC* sobre el diámetro hasta colocarse en el plano de la *ADC*, los puntos de la primera se confundirán con los de esta; porque *si no se confundiesen*, resultaria que **HABRIA PUNTOS DESIGUALMENTE DISTANTES DEL CENTRO**, lo cual es *contra la definicion.*

Segundo caso. Hay teoremas referentes á propiedades de las que sólo ocurre un caso, (por ejemplo: por un punto no pasa más que una perpendicular y una paralela á otra recta). En virtud de esto, dada una proposicion, queda probada por reduccion al absurdo su recíproca, ó la contraria de su recíproca.

Supongamos demostrado que: *Si dos rectas* A *y* B *son perpendiculares á otra* C, *serán paralelas*, y que: *Por un punto no se puede trazar á una recta más que una paralela.*

Para demostrar el teorema (recíproco del 1.°): *Si dos rectas* A *y* B *son paralelas, y* A *es perpendicular á otra* C, *tambien lo será* B, fundándose en los anteriores, se dirá:

Si *dos rectas* A *y* B *son perpendiculares á otra* C, *serán paralelas,* y como por un punto cualquiera de una no se puede trazar á la otra más que una paralela, resulta que esta única paralela es tambien una de las perpendiculares (A ó B); luego el recíproco es cierto, es decir, que: *Si* A *es perpendicular* á C, y B *es paralela á* A, *será también perpendicular á* B. (1)

Supongamos demostrados los teoremas: *Si se traza una recta* MN *que corta á dos lados de un triángulo* ABC *y es paralela al tercero* AC, *dividirá á dichos lados en partes proporcionales*, y que *entre dos puntos* A *y* B *de una recta sólo hay un punto que la divida en dos segmentos cuyas longitudes tengan una relacion dada.*

Para demostrar el teorema recíproco del 1.°, fundándose en los dos enunciados, se dirá:

Si se traza una recta MN *que corta á dos lados de un triángulo* ABC *paralelamente al tercero* AC, *dividirá á dichos lados en partes proporcionales*; pero como desde el punto M no se puede trazar más que una recta MN, que corte á la BC en dos segmentos BN y NC tales, que la relacion de BN á NC sea igual á la relacion constante $\frac{BM}{MA}$, resulta que dicha recta y la paralela, que existe con la propiedad en cuestion, segun el directo, son una misma; luego el recíproco es cierto, es decir, como el directo es cierto, y no hay más que un caso, el recíproco tambien lo es.

Supongamos demostrado el teorema: *Por un punto situado fuera de una recta, no se le puede trazar más que una perpendicular.*

Se demuestra por reduccion al absurdo el recípro-

---

(1) Los autores dicen: En efecto, B encontrará á C, porque sinó C le sería paralela, y por su punto de interseccion con A habria dos paralelas á una recta lo cual es absurdo. Encontrando B á C, le será además perpendicular, porque si no lo fuera, se podria trazar por el punto de encuentro una recta distinta de B perpendicular á C, que seria paralela á *A*, segun el teorema directo, y por consiguiente, por dicho punto habria trazadas, esta recta y la B, paralelas á la A, lo cual es absurdo.

co de su contrario: *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas*, diciendo: si no fueran paralelas, se encontrarian, y habría desde el punto de encuentro dos perpendiculares á una recta, lo cual es absurdo (1).

Sea el teorema:

Si dos rectas forman con otra ángulos alternos-internos iguales, serán paralelas.

El recíproco de su contrario es: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, no formarán con esta ángulos alternos-internos iguales*, el cual se demostrará ad absurdum, diciendo: si esta conclusion no fuese la verdadera, lo sería su contraria, y tendríamos la proposicion: *Si dos rectas no paralelas se cortan por otra, formarán con esta ángulos alterno-internos iguales*; pero si forman ángulos alternos-internos iguales, son paralelas; luego tendremos finalmente que: *Dos rectas no paralelas son paralelas* lo cual es absurdo. (2)

TERCER CASO. Sea una cuestion que comprende cuatro partes, es decir, los teoremas *directo-afirmativo*, *directo-negativo*, *recíproco-afirmativo* y *recíproco-negativo*: por ejemplo, la constituida por los cuatro teoremas:

(1).—Todo punto situado en la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, equidista de sus extremos.

(2).—Todo punto situado fuera de la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, dista desigualmente de sus extremos.

---

(1) El quedar incluido el recíproco del contrario en el directo, depende de que la tésis del *directo afirmativo* y la hipótesis del *recíproco negativo* son proposiciones contrarias la una respecto de la otra, y si se supone falsa la tésis del 1.°, se convierte en la hipótesis del 2.° Es decir, quedan dos proposiciones contrarias unidas por un mismo término medio que conduce de la una á la otra; esto es, á un absurdo.

Lo mismo se dirá respecto al *recíproco afirmativo* y *directo negativo*.

(2) Estos dos teoremas se pueden poner bajo esta forma:

Si una recta A es perpendicular á otra C { *y una* B *encuentra á* A, *no será perpendicular á* C
y una B *es perpendicular á* C, *no encontrará á* A }

(3).—Todo punto que dista igualmente de los extremos de una recta, se halla en la perpendicular levantada en su punto medio.

(4).—Todo punto que dista desigualmente de los extremos de una recta, se halla fuera de la perpendicular levantada en su punto medio.

O abreviadamente:

(1).—Si en . . . . . . igual
(3).—Si igual . . . . . en

(2).—Si fuera. . . . . . . desigual.
(4).—Si desigual. . . . . fuera.

Enunciar uno de los teoremas (1) y (4), ó de los teoremas (2) y (3) es enunciar el otro, es decir, que los teoremas *directo-afirmativo y recíproco-negativo* son equivalentes entre sí, y lo mismo sucede con los teoremas *directo-negativo y recíproco-afirmativo*, son uno mismo espresado de distinta manera. Cada uno de estos teoremas es el *contradictorio del otro*.

Regla primera. *Basta demostrar uno de los teoremas contradictorios, para que el otro se deduzca por reduccion al absurdo.*

Ejemplos:

Directos.	Recíprocos contrarios.
Si dos rectas forman ángulos alternos-internos iguales con otra, serán paralelas.	Si dos rectas no son paralelas, no formarán ángulos alternos-internos iguales con otra.
Si un punto se halla en la perpendicular levantada á una recta en su punto medio, dista igualmente de sus extremos.	Si un punto no dista igualmente de los extremos de una recta, no estará en la perpendicular levantada en su punto medio.

Regla segunda. *Para demostrar completamente una proposicion de cuatro partes, basta demostrar dos de los teoremas que no sean contradictorios.*

Ejemplos. En los citados en la pág. 53 basta demostrar el 1 y 2, ó el 1 y 3, ó el 3 y 4 para quedar probados los dos restantes; porque estos restantes son respectivamente contradictorios de los otros dos demostrados.

FIN DE LA PRIMERA PARTE.

OBRAS DEL MISMO AUTOR.