

UBIO Y DÍAZ

ELEMENTOS  
DE  
MATEMATICAS

VOL. II.

GEOMETRIA  
Y  
TRIGONOMETRIA

2.<sup>a</sup> EDICION.



L47  
2474

20868  
ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. VICENTE RUBIO Y DIAZ,

LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS,  
DIRECTOR Y CATEDRÁTICO POR OPOSICION DEL INSTITUTO DE CÁDIZ,  
CATEDRÁTICO DE AMPLIACION DE FISICA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS AGREGADA Á LA DE MEDICINA,  
PRESIDENTE DE LA ACADEMIA PROVINCIAL DE BELLAS ARTES,  
VICEPRESIDENTE Y FUNDADOR DE LA REAL ACADEMIA GADITANA DE CIENCIAS Y LETRAS,  
CORRESPONSAL DE LA DE BUENAS LETRAS DE SEVILLA,  
&c.

TOMO II.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

[ TERCERA EDICION ]

CADIZ

IMPRENTA DE LA REVISTA MÉDICA, DE D. FEDERICO JOLY.  
CERBALLOS (ANTES BOMBA), N.º 1.

1878

7144





29-82-1647  
20868  
1847  
20868  
1847  
1144

247-2414

ELEMENTOS  
DE  
GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA RECTILINEA  
Y ESFERICA.

Con más de 300 grabados intercalados en el texto.

( TERCERA EDICION. )

---

El autor y propietario de esta obra se reserva todos los derechos que la ley de propiedad literaria le concede.

---

 NOTA.—Esta obra ha sido declarada de texto y colocada en primer lugar para la enseñanza en la Isla de Cuba.

# ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

POR

D. VICENTE RUBIO Y DIAZ,

LICENCIADO EN CIENCIAS EXACTAS,  
DIRECTOR Y CATEDRÁTICO POR OPOSICION DEL INSTITUTO DE CÁDIZ,  
CATEDRÁTICO DE AMPLIACION DE FÍSICA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS AGREGADA Á LA DE MEDICINA,  
PRESIDENTE DE LA ACADEMIA PROVINCIAL DE BELLAS ARTES,  
VICEPRESIDENTE Y FUNDADOR DE LA REAL ACADEMIA CADITANA DE CIENCIAS Y LETRAS,  
&c.

---

TOMO II.

**GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.**

---

[ TERCERA EDICION ]

CADIZ

---

IMPRENTA DE LA REVISTA MÉDICA, DE D. FEDERICO JOLY.  
CEBALLOS (ANTES BOMBA), N.º I.

1878



## OBRAS

DE

D. VICENTE RUBIO Y DIAZ.

---

*Estudios sobre la evocacion de los espíritus: refutacion de las teorías espiritistas.*—Cádiz, 1860.

*Creacion de un Instituto provincial en Cádiz.*—Folleto, Cádiz, 1862.

*Memoria de la Exposicion Universal de Londres.*—Cádiz, 1862.

*Consideraciones acerca del escalafon de Catedráticos de Institutos.*—Folleto, Cádiz, 1866.

*Leyenda fantástica: Adelina.*—Cuadro de costumbres: *Una Comedia de Aficionados.*—Cádiz, 1866.

*Memoria de la Exposicion Universal de Paris de 1867.*—Cádiz, 1868.

Las Memorias las publicó como delegado de la provincia de Cádiz en las Exposiciones de 1862 y 1867.

---

## PARA LA ENSEÑANZA.

---

**Elementos de Matemáticas:** Tomo I.—*Aritmética y Algebra:* 3.<sup>a</sup> edicion, 1878. — Tomo II: *Geometría y Trigonometría*, con mas de 300 grabados intercalados en el texto, 3.<sup>a</sup> edicion, 1878.

Esta obra ha sido dos veces declarada de texto y colocada en primer lugar para las provincias de Ultramar.—Precio de cada tomo, 30 rs.

*Programa de Aritmética y Algebra*, con todos los enunciados de los teoremas y problemas.—Precio, 4 rs.

*Programa de Geometría y Trigonometría:* con todos los enunciados de los teoremas y problemas.—Precio, 4 rs.

*Nociones de Geografía*, la parte astronómica y física. — Un volumen en 4.<sup>o</sup> de 338 páginas y grabados en el texto, 2.<sup>a</sup> edicion.—Cádiz, 1876.

*Aritmética para la primera enseñanza elemental y superior:* 3.<sup>a</sup> edicion.—Cádiz, 1872.

Esta obra ha sido declarada de texto y colocada en primer lugar para la Isla de Cuba.

---

Todas estas publicaciones se han impreso en los acreditados talleres de la *Revista Médica*.

## PRÓLOGO DE ESTA EDICION.

---

La tercera edicion de mi *Geometría y Trigonometría*, no difiere en el fondo, ni en la forma, de las dos anteriores ediciones. Pequeños defectos de redaccion y algunas erratas van, sin embargo, corregidas en esta nueva tirada: debidas, en su mayor parte, al cuidado y celo de algunos compañeros y amigos que se tomaron el trabajo de revisar mi libro con gran esmero.

Los resultados obtenidos en la enseñanza, con la adopcion de esta obra, que acreditan numerosas y repetidas cartas de muchos Sres. Catedráticos, así como el juicio favorable de la prensa profesional, y de los Cuerpos facultativos; prueban que la idea que me impulsó en 1870 á dar á la estampa, por primera vez, esta obra (idea que manifesté en el prólogo de aquella edicion, que á continuacion reproduzco) ha sido estimada por gran parte del Profesorado oficial y libre, por responder á una verdadera necesidad de los estudios matemáticos.

Si la juventud, á quien he dedicado estos trabajos, sigue alcanzando el fin que me propuse al redactarlos, quedarán satisfechos los deseos del que ha consagrado toda su vida á la enseñanza, fuente de todos los bienes morales y materiales, y barómetro que mide el estado de cultura y de adelanto de las naciones.

*Vicente Rubio y Diaz.*

Cádiz.—1878.

---

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICION.—No hay ciencia de más riguroso método en su exposicion, de un enlace más lógico entre sus partes, mejor construida, en fin, que la *Geometría*. Basada en un corto número de axiomas y no admitiendo, en general, más que las verdades intuitivas de estos principios, ó las de aquellas proposiciones que derivadas de ellos por el más

rigoroso raciocinio se demuestran; todo en esta ciencia es exacto, eminentemente racional y debe estar al alcance de todas las personas.

Y, no obstante, el estudio de la Geometría es de los que más dificultades presenta y más pronto aburre á los alumnos, siendo frecuente el ver jóvenes de inteligencia privilegiada, que desde las primeras lecciones abandonan los libros desanimados, creyéndose ineptos para alcanzar el conocimiento de una ciencia, que como hemos dicho, es de tan fácil comprensión y riguroso método.

¿De qué depende esta contradicción tan manifiesta? ¿Cómo se explica el que los conocimientos geométricos que se adquieren por principios axiomáticos, sean refractarios á la mayor parte de los jóvenes?

Todos los que han estudiado la Geometría pueden contestar satisfactoriamente.

No está la dificultad en los principios de la ciencia, sino en los medios exteriores de trasmitirla: no son difíciles de comprender los teoremas geométricos, sino la forma en que necesariamente hay que presentarlos: no hay confusión en la Geometría, la hay para el principiante en las figuras que auxilian las demostraciones.

La complicación de las líneas, el gran número de letras que en algunas figuras se necesita para indicar los puntos (letras que hay que intercalar en el razonamiento), la dificultad de encontrar estos puntos en las láminas; dividen la atención del alumno y le confunden de tal manera, que cree complicadas y confusas las demostraciones geométricas, que casi siempre se reducen á razonamientos de una extrema sencillez, y en todos los casos de completa exactitud.

No hay, por consiguiente, ciencia alguna, en la que tenga mayor importancia la claridad en la exposición, ni obras que requieran más esmero en la parte tipográfica, si ha de salvarse, en lo posible, el escollo que todos encuentran en su estudio.

Tal ha sido, principalmente, la idea que me ha impulsado á publicar esta obra que, fácilmente se comprenderá, vé la luz pública después de vencer grandes obstáculos, para que en su parte tipográfica no desmerezca de las que de igual índole se publican en el extranjero.

Si con ella he conseguido hacer algo más fácil el estudio importante de esta ciencia, y si merece la aprobación de mis ilustrados compañeros los Sres. Catedráticos de esta asignatura, á cuyo benévolo juicio la someto, me daré por muy satisfecho del prolijo trabajo empleado en redactarla, delinear las figuras, corregir estas y la impresión.—VICENTE RUBIO Y DIAZ.  
—Cádiz: Agosto de 1870.



## ADVERTENCIA Á LOS ALUMNOS.

---

La correlacion y el orden lógico que entre sí tienen las proposiciones geométricas, hacen imposible el conocimiento de la verdad que una encierra, si antes no se tiene el de las que le sirven de fundamento.

El principiante, debe, pues, estudiar cada leccion hasta el perfecto conocimiento de ella y *no pasar á la siguiente sin haberlo conseguido*, para lo que necesita llegar á tal grado de comprension, que sin el auxilio del texto pueda repetir las demostraciones de los teoremas ó problemas que la leccion abraza y cuyos enunciados lleva el *Programa* que aparte del texto se publica, variando la posicion y las letras de las figuras que á ella se refieran.

Los problemas, teoremas y párrafos de la Geometría llevan una numeracion correlativa desde el principio hasta el fin: de este modo se facilita la evacuacion de las continuas citas del texto. Encargamos muy especialmente á los alumnos que no dejen de verificar dichas citas, á ménos que no recuerden perfectamente las proposiciones á que se refieran y estén convencidos de su verdad, *pues de otro modo se hace incomprensible la proposicion que se está demostrando*.

Así, por ejemplo, en el teorema XIV se hace la referencia [Teor. VI], para que se recuerde que *dos rectas perpendiculares á otra y que están en un mismo plano son paralelas*, en cuya propiedad se funda la consecuencia que inmediatamente se deduce, y que no se comprenderia á no acordarse del teorema VI.

De igual modo en el teorema I se indica (18) que quiere decir que se recuerde la definicion dada en este párrafo de lo que se llama *recta oblicua á otra*.



# Cuadro sintético de la Geometría. (\*)

## GEOMETRIA PLANA.

### SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS  
PLANAS.

#### Libro I.

*Figuras rectilíneas.*

#### Libro II.

*Figuras circulares.*

#### Libro III.

*Problemas correspondientes á  
esta seccion.*

### SECCION SEGUNDA.

EXTENSION DE LAS FIGURAS  
PLANAS.

#### Libro I.

*Extension de las fig. rectilíneas.*

#### Libro II.

*Extension de las fig. circulares.*

#### Libro III.

*Problemas relativos á esta  
seccion.*

#### APÉNDICE

DE LA GEOMETRÍA PLANA.

## GEOMETRIA DEL ESPACIO

### SECCION PRIMERA.

DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS  
EN EL ESPACIO.

#### Libro I.

*Planos y cuerpos terminados  
por superficies planas.*

#### Libro II.

*Cuerpos terminados por su-  
perficie curvas.*

#### Libro III.

*Problemas correspondientes á  
esta seccion.*

### SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION CONSIDERADA  
EN EL ESPACIO.

#### Libro I.

*Cuerpos terminados por su-  
perficie planas.*

#### Libro II.

*Cuerpos terminados por su-  
perficie curvas.*

#### Libro III.

*Problemas relativos á esta  
seccion.*

#### APÉNDICE

DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

(\*) Véase al final el Índice de esta obra, y para más detalles el *Programa* que aparte se publica, en el que van insertos todos los enunciados de los teoremas, corolarios, problemas, &c.

## PRELIMINARES.

---

1. El *espacio* es una idea primera y necesaria que no puede definirse, aunque nos lo imaginamos extenso, único, ilimitado, continuo y divisible. Todo cuerpo ocupa una porcion de este espacio, la cual se llama *extension del cuerpo*. No se concibe la existencia de un cuerpo, por muy pequeño que fuere, sin que sea *extenso en todas direcciones*; esto es, sin que ocupe una parte del espacio en cualquier direccion que la consideremos.

La *geometría* hace abstraccion de todas las propiedades de los cuerpos, (porosidad, elasticidad, gravedad, &c.) y hasta de la materia que los forma, y sólo considera su *extension*.

Los límites de los cuerpos se llaman *superficies*. En el espacio pueden concebirse infinitas superficies, porque pueden existir infinitos cuerpos.

Los límites de una superficie forman la *línea*. En toda superficie pueden considerarse infinitas líneas.

La comun interseccion, ó sea el límite comun, de dos líneas que se encuentran es el *punto matemático*. En una línea pueden concebirse infinitos puntos. \*)

2. Ni las superficies, ni las líneas, ni los puntos, tienen existencia real fuera de los cuerpos, y sólo por *abstracciones* del espíritu se consideran aisladamente.

---

(\*) Siguiendo un orden inverso, suele decirse que el punto carece de dimensiones, que el movimiento del punto engendra la línea, el de esta la superficie, y el de la superficie el espacio. Creemos viciosa esta generacion por el movimiento de la *nada*.

3. Aunque el cuerpo es extenso en todas direcciones, se consideran principalmente tres que se denominan *dimensiones* del cuerpo, y se llaman *longitud*, *latitud* y *profundidad*. Esta se designa tambien con los nombres de *altura*, *espesor* ó *grueso*.

Las superficies, límites de los cuerpos, carecen de espesor.

Las líneas, límites de las superficies, carecen de espesor y de latitud.

El punto no tiene dimension ni figura; es el cero de la *cantidad geométrica*. Sin embargo, en las figuras geométricas para hacerlo perceptible se indica por una letra colocada en un punto material, ó en la interseccion de dos líneas,

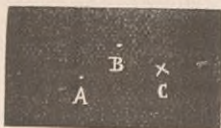


Fig. 1.

como se vé en A, B, C. (Fig. 1)

4. Las *cantidades geométricas*—líneas, superficies ó cuerpos,—comparadas con sus unidades respectivas, dan por resultado la *medida de su extension*.

*Volúmen*, es la extension medida de un cuerpo.

*Area*, es la extension medida de una superficie.

*Longitud*, es la extension medida de una línea.

Por lo que antecede se comprenderá, que se considera bajo tres aspectos la extension, á saber: de *tres dimensiones* (longitud, latitud y profundidad), *extension volumétrica*; de *dos dimensiones* (longitud y latitud), *extension superficial*; de *una sola dimension* (longitud), *extension longitudinal*.

5. La línea puede ser *recta* ó *curva*.

La línea recta no puede definirse bien. Se dice que es la *más corta distancia entre dos puntos*. (\*)

(\*) Algunos geómetras han pretendido demostrar esta propiedad, considerándola como un teorema. Véase, *Memoire sur la reforme de l'enseignement de la Geometrie*, par M. G. Faure.



Una línea recta se señala, por consiguiente, con dos de sus puntos A y B (Fig. 2), y debe considerarse prolongada indefinidamente en ambos sentidos.

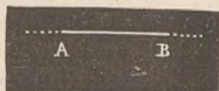


Fig. 2.

De la definición de la línea recta, se deduce evidentemente:

1.º Por dos puntos dados no puede pasar más que una sólo línea recta.

2.º Dos rectas son siempre superponibles, para lo que basta hacer coincidir dos de sus puntos. (\*)

3.º Si dos rectas se encuentran, no pueden tener más que un punto comun.

6. La línea curva es aquella en la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es recta. Por dos puntos, A y B (Fig. 3), pueden pasar muchas curvas.

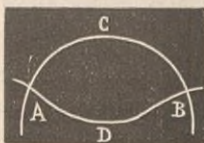


Fig. 3.

7. Si varias rectas se cortan de dos en dos, A B C D E, (Fig. 4) forman una línea quebrada ó poligonal.

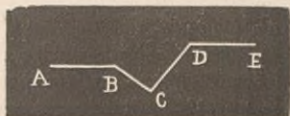


Fig. 4.

8. La reunion de una ó muchas líneas rectas que se cortan, con una ó varias líneas curvas que se cortan tambien, formando en su totalidad una línea continua, se llama línea mixta.

9. De todas las superficies la más sencilla es el plano ó superficie plana, que es una superficie tal, que si una recta cualquiera tiene dos puntos en ella, coincide en toda su extension.

10. Superficie curva es aquella en la que una porcion suya, por muy pequeña que sea, no es plana.

---

(\*) En algunos tratados de Geometría esta afirmacion constituye un teorema.

11. Varias superficies planas que se cortan de dos en dos, forman una *superficie quebrada*.

12. La reunion de una ó más superficies planas y curvas, que se cortan de dos en dos, constituye una *superficie mixta*.

13. Entre las líneas curvas debemos definir la *circunferencia*. Esta es una *línea ABCD plana, cerrada, y tal que todos sus puntos equidistan de otro interior O llamado centro*. (Fig. 5)



Fig. 5.

*Círculo* es la superficie plana encerrada dentro de la circunferencia.

Cada una de las rectas OA, OB, OC... trazadas del centro á la circunferencia, se llama *radio del círculo*. Segun la definicion *todos los radios son iguales*.

Toda recta como la AB que une dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro, es una *cuerda*.

Toda cuerda que pasa por el centro como la AC, es un *diámetro*: todos los diámetros son iguales por componerse de dos radios OA y OC.

Una porcion cualquiera de la circunferencia, como AB, BC, CD... se denomina *arco de círculo*. Si este es igual á la mitad de la circunferencia, se llama *semicircunferencia* y si es la cuarta parte, *cuadrante*.

14. Las cantidades geométricas—espacios, superficies ó líneas—pueden estudiarse bajo dos aspectos: analizando las propiedades y descubriendo las leyes de sus diversas figuras (*figurabilidad*), ó comparando sus magnitudes con otras de la misma especie que se toman como unidad ó término de comparacion (*mensurabilidad*.)

Con las ideas que anteceden podemos definir la ciencia geométrica de una manera inteligible.

GEOMETRÍA es la ciencia que se ocupa de las propie-

*dades y de la medida de las líneas, superficies y espacios, ó sea de la extension. (4)*

Se divide en *geometría plana* y *geometría del espacio*.

La Geometría plana trata de las figuras cuyos puntos están todos en un plano.

La Geometría del espacio trata de las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.

15. Todas las ciencias se fundan sobre ciertas verdades evidentes por sí mismas llamadas *axiomas*. Tales son:

1.º *Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí. (\*)*

2.º *El todo es mayor que su parte.*

3.º *El todo es igual á la suma de las partes en que se haya dividido.*

4.º *Son iguales dos magnitudes geométricas (líneas, superficies ó espacios), cuando se pueden hacer coincidir en toda su extension.*

5.º *De un punto á otro no puede trazarse más que una línea recta.*

---

(\*) Una de las ciencias más lógicamente construida es la Geometría, pues que no se consideran como verdades, sino aquellas proposiciones que se apoyan directamente en axiomas ó en otras proposiciones ya demostradas; es decir, que han adquirido el valor lógico de un axioma; pero algunos autores, exagerando el método demostrativo peculiar á esta ciencia, han querido demostrar hasta los axiomas. Tal es Mr. Thompson, que en su libro *La Geometría sin axiomas*, por largos y confusos razonamientos trata de probar que *dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí*, verdad que cualquier ser racional admite sin ninguna demostracion. Creemos que es un mal sistema el querer demostrar aquellos principios de *pura intuición*, que la razón admite como indudables, y que son, y no pueden ménos de ser, los cimientos de todas las ciencias.





# GEOMETRÍA PLANA.

## SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS.

### LIBRO I.

FIGURAS RECTILÍNEAS.

#### CAPÍTULO I.

ÁNGULOS.

16. Se llama *ángulo* (Fig. 6) la porción de plano comprendida entre dos rectas AB y AE, que se cortan en un punto A. Las dos rectas AB y AE, son los *lados del ángulo* y el punto A, el *vértice*. Un ángulo se indica por tres letras, poniendo la del vértice en medio: así el ángulo que venimos considerando se indica por BAE. Es evidente que dichas dos rectas forman cuatro ángulos, que son el ya dicho BAE, el CAE, el CAD y el DAB, cuyos cuatro ángulos tienen el vértice común A.

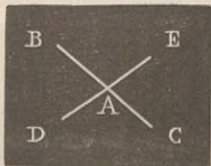


Fig. 6.

Si el ángulo está aislado (Fig. 7), puede nombrarse, ó con tres letras, como dejamos dicho, ó sólo con la letra del vértice A.

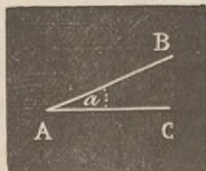


Fig. 7.

Considerando un arco de círculo cuyo centro esté en el vértice y comprendido entre los lados, se puede también indicar el án-

gulo, esté aislado ó no, por una letra ó un número, colocado entre el vértice y dicho arco. (\*)

De manera, que el ángulo de la figura 7, se puede designar de los siguientes modos: **BAC, CAB, A y a.**

Es evidente que la magnitud de un ángulo no depende de la de sus lados, *que siempre se consideran prolongados indefinidamente*, sino es de su mayor ó menor inclinacion respectiva, ó sea de la mayor ó menor parte del plano comprendida entre ellos.

17. *Ángulos adyacentes* (Fig. 8) son los que tienen un lado comun DC, y los otros no comunes AC y CB, en línea recta. *Ángulos consecutivos* son los que tienen un lado comun; pero los otros no están en línea recta.

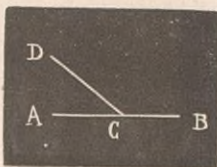


Fig. 8.

18. Una recta es perpendicular á otra cuando forma con ella dos ángulos adyacentes iguales (Fig. 9),  $BAC = CAD$ , y estos ángulos se llaman *rectos*. Una recta es *oblicua* á otra, si forma dos ángulos adyacentes desiguales. (Fig. 8)

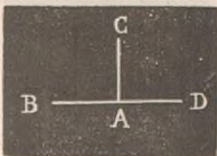


Fig. 9.

#### TEOREMA I. (\*\*)

*Por un punto de una recta no se puede trazar más que una perpendicular á esta recta. (Fig. 10)*

(\*) En algunas figuras preferiremos este último medio de indicacion que creemos más sencillo, y que facilita el *ver pronto* los ángulos designados en las demostraciones, trabajo que suele aburrir á muchos que empiezan el estudio de la Geometría.

(\*\*) Se llama *teorema* una proposicion cuya verdad se demuestra por medio de un razonamiento ó raciocinio que constituye la *demonstracion* del teorema. En la enunciacion de todo teorema pueden siempre distinguirse dos partes principales que son: la *hipótesis* y la *tésis* ó *conclusion*. La hipótesis es lo que se supone en el teorema, y la conclusion lo que se vá á demostrar. Así, por ejemplo,



Siempre es posible trazar desde el punto A una recta que forme dos ángulos BAD y DAC, iguales entre sí, cuya recta será perpendicular; pero cualquier otra recta AE, formará evidentemente dos ángulos BAE y EAC, mayor el uno y menor el otro que un recto, y por consiguiente (18), esta recta será oblicua. *Luego, por un punto de una recta, &c. (\*)*

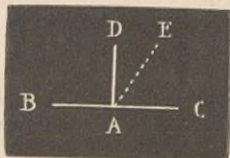


Fig. 10.

**Corolario. (\*\*)** *Dos ángulos rectos, aunque no sean adyacentes, son iguales.* (Fig. 11)

En efecto, sean los dos ángulos rectos DAC y D'A'C', superpongo la recta BC, sobre la B'C', lo que siempre es posible (5) de manera que el punto

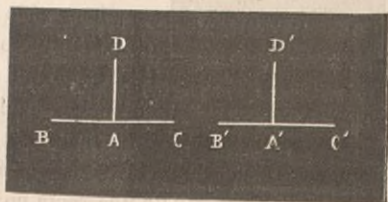


Fig. 11.

A coincida con el A'; entonces la recta AD seguirá la

contrayéndonos al teorema enunciado, la hipótesis es un punto dado sobre una recta, y la conclusión que no se puede trazar más que una perpendicular. La hipótesis versa siempre sobre un sugeto que en este teorema es el punto.

Para más claridad, en este libro, se indican las hipótesis de sus teoremas con distinto carácter de letra que las conclusiones.

(\*) Para fijar más el enunciado de un teorema, conviene repetirlo al concluir su demostración.

(\*\*) **Corolario**, que quiere decir consecuencia, es una proposición que se deduce fácilmente de otra. Así es, que no hay diferencia esencial entre *teorema* y *corolario*, pues en la Geometría casi todos los teoremas son consecuencias de los ya demostrados, no existiendo en rigor más que un corto número de teoremas y siendo todos los demás consecuencias. Sin embargo, se ha convenido en considerar como corolarios de cada teorema, aquellas proposiciones que de un modo inmediato, ó con un raciocinio muy corto, se pueden demostrar. Los corolarios, lo mismo que los teoremas, constan de hipótesis y conclusión, cuyas partes del enunciado van indicadas con distinto carácter de letra en este libro.

direccion  $A'D'$ ; porque desde un punto de una recta no se puede trazar más que una perpendicular á esta recta, y por tanto, los ángulos  $DAC$  y  $D'A'C'$ , serán iguales.

## TEOREMA II.

*Por un punto tomado fuera de una recta no se puede trazar más que una perpendicular á esta recta.* (Fig. 12)

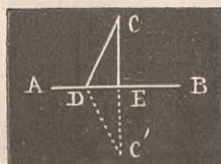


Fig. 12.

Por el punto  $C$  siempre es posible trazar una recta  $CE$ , que forme dos ángulos iguales  $AEC$ ,  $CEB$  y que sea, por consiguiente, perpendicular á la  $AB$ ; pero cualquier otra  $CD$ , que parta del mismo punto  $C$ , digo que es oblicua. En efecto, si la  $CD$  fuera perpendicular, haciendo girar la figura  $CDE$  alrededor de  $AB$  hasta que se vuelva á colocar en su mismo plano, la recta  $EC$  seguirá la direccion  $EC'$ , porque por un punto de una recta no se puede trazar más que una perpendicular, y por igual razon la  $CD$ , seguirá la Direccion  $DC'$ . Luego por los puntos  $C$  y  $C'$  pasarán dos rectas distintas, lo que es absurdo. [Axioma 5.º]

19. Se llama ángulo *obtuso* el que es mayor que un ángulo recto, y ángulo *agudo* el que es menor que un recto.

## TEOREMA III.

*La suma de dos ángulos adyacentes, es igual á dos ángulos rectos.* (Fig. 13)

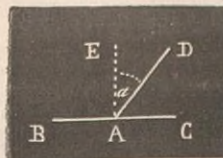


Fig. 13.

Sean los dos ángulos adyacentes  $BAD$  y  $DAC$ . Trazo por el punto  $A$  la perpendicular  $AE$ , con lo que quedarán formados los dos ángulos rectos  $BAE$  y  $EAC$ .

Ahora vemos que á uno de los ángulos propuestos le

sobra el ángulo  $a$  para valer un recto, y que este mismo ángulo  $a$  le falta á su adyacente para valer tambien un recto; luego entre los dos valen tanto como dos ángulos rectos, que era lo que se queria demostrar.

### COROLARIOS.

1.º *La suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar á un mismo lado de una recta, es igual á dos rectos.* (Fig. 14)

Porque todos los ángulos  $BAD$ ,  $EAD$ ,  $EAF$  y  $CAF$ , equivalen á la suma de los adyacentes  $BAD$  y  $DAC$ .

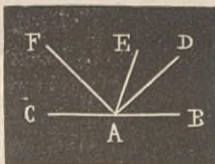


Fig. 14.

2.º *La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto, es igual á cuatro rectos.* (Fig. 15)

Pues si consideramos prolongada una de las rectas, por ejemplo, la  $DA$ , todos los ángulos consecutivos formados á un mismo lado de  $DH$ , valen dos rectos, y los formados al lado opuesto otros dos ángulos rectos; luego, &c.



Fig. 15.

3.º *Los cuatro ángulos que forman una recta con otra á la cual es perpendicular, son rectos.* (Fig. 16)

Pues siendo  $CE$  perpendicular á  $DB$ , los dos ángulos  $CAD$  y  $CAB$ , son rectos; luego sus adyacentes respectivos  $DAE$  y  $EAB$ , lo serán tambien.

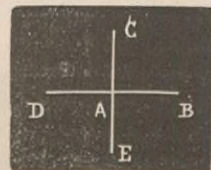


Fig. 16.

4.º *Todo ángulo, es menor que dos ángulos rectos.* (Fig. 17)

Porque si prolongamos uno de sus lados  $CA$ , por ejemplo, resultará otro ángulo adyacente  $BAD$ , y este con el  $CAB$ , valen dos rectos. [*Axioma 2.º*]



20. Dos ángulos son *opuestos por el vértice* cuando los lados del uno son prolongaciones de los del otro.

21. Dos ángulos son *complementarios*, cuando su suma vale un ángulo recto, y entonces cada uno se llama complemento del otro.

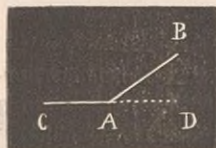


Fig. 17.

22. Dos ángulos son *suplementarios*, si sumados valen dos rectos, y en tal caso cada uno se llama suplemento del otro. Los ángulos adyacentes son suplementarios.

23. Es evidente que dos ángulos que tienen un mismo complemento ó un mismo suplemento son iguales; porque les falta la misma cantidad para componer respectivamente uno ó dos ángulos rectos.

#### TEOREMA IV.

*Los ángulos opuestos por el vértice, son iguales.* (Fig. 18)

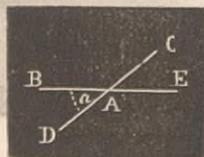


Fig. 18.

Los ángulos BAC y DAE, opuestos por el vértice, tienen por adyacente al ángulo  $a$ ; luego tienen el mismo suplemento, y por consiguiente, son iguales. (23)

#### TEOREMA V. [Recíproco del III.] (\*)

*Si la suma de dos ángulos que tienen un lado comun y los otros á distinta region de esta recta es igual á dos rectos, estos ángulos son adyacentes.* (Fig. 19)

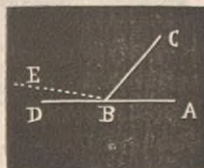


Fig. 19.

Si la suma de los dos ángulos ABC y CBD es igual á dos rectos, digo que BD es prolongacion de AB;

(\*) Se llaman recíprocos dos teoremas, cuando la hipótesis del uno es la conclusion ó tésis del otro, y reciprocamente. Así los teoremas III y V satisfacen á esta condicion, pues tenemos:

pues si no lo fuera, podíamos trazar otra recta BE, que lo fuese. En este caso tendríamos que

$ABC + CBD = 2$  rectos, por la hipótesis de este teorema.

$ABC + CBE = 2$  rectos, según el teorema III.

luego  $CBD = CBE$ , lo que es absurdo. [Axioma 2.º] (\*)

## CAPÍTULO II.

### RECTAS PARALELAS ENTRE SÍ.

24. Se llaman *paralelas* dos rectas situadas en un mismo plano y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse.

#### TEOREMA VI.

*Dos rectas perpendiculares á otra y que están situadas en el mismo plano, son paralelas.*

(Fig. 20)

Si las dos rectas CD y EF, situadas en un mismo plano, son perpendiculares á la AB, por más que se prolonguen no se encontrarán; pues si se encontraran, desde el punto de union podrian trazarse dos perpendiculares á la recta AB, lo que es imposible. [Teorema II.]

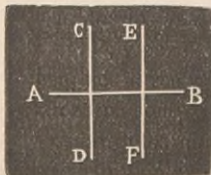


Fig. 20.

25. Si á dos rectas cualesquiera AB y CD (Fig. 21), cor-

TEOREMA III. — *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos rectos.*

TEOREMA V. — *Si la suma de dos ángulos que tienen un lado común y los otros á distinta region de esta recta es igual á dos rectos, estos ángulos son adyacentes.*

(\*) Hemos demostrado este teorema y el II, por medio de lo que se llama *reduccion al absurdo*; es decir, suponiendo que no se verifica la conclusion del teorema y deduciendo de este supuesto una proposicion *evidentemente absurda*, porque se opone á alguna verdad ya demostrada, ó, como sucede en este caso, á un axioma. Este método demostrativo se emplea con frecuencia en los teoremas recíprocos ó inversos; pero como indirecto que es no puede emplearse en muchas ocasiones para otros teoremas, y en todos los casos debe preferirse, á ser posible, la demostracion directa.

ta otra tercera EF, que en este caso se llama *secante ó transversal*, formará ocho ángulos. Los cuatro ángulos 1, 2, 7 y 8, se llaman *externos*, porque sus aberturas están fuera de la parte de plano comprendida entre las dos rectas; y los 3, 4, 5 y 6, *internos*, porque sus aberturas comprenden dicha parte de plano.

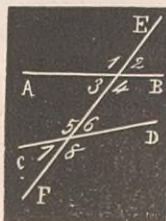


Fig. 21.

Considerados de dos en dos estos ángulos, se denominan:

1.º *Internos* de un mismo lado de la secante 3 y 5, 4 y 6.

2.º *Externos* de un mismo lado de la secante 1 y 7, 2 y 8.

3.º *Alternos-internos*, los ángulos internos cada uno á un lado de la secante y que no son adyacentes: 3 y 6, 4 y 5.

4.º *Alternos-externos*, los ángulos externos cada uno á un lado de la secante y que no sean adyacentes: 1 y 8, 2 y 7.

5.º *Ángulos correspondientes*, son los que se hallan á un mismo lado de la secante, uno interno y otro externo, y que no son adyacentes: 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

#### POSTULADO DE EUCLIDES.

*Por un punto fuera de una recta, no puede trazarse más que una paralela á dicha recta. (\*)*

#### TEOREMA VII.

*Una perpendicular y una oblicua á una recta, si están en un mismo plano, se encuentran prolongadas suficientemente. (F. 22)*

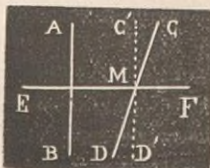


Fig. 22.

Si las dos rectas AB y CD que son respectivamente perpendicular y oblicua á la EF, no se encontraran, es decir, fueran paralelas, po-

(\*) *Postulado* se llama una verdad que se admite sin demostración y que no tiene, sin embargo, la evidencia de un axioma.



driamos considerar tirada desde el punto M una recta  $C'D'$ , perpendicular á  $EF$ , la que seria tambien paralela á  $AB$  [Teorema VI]; pero entonces tendríamos trazadas por el punto M dos paralelas á la  $AB$ , lo que no puede ser. [Postulado de Euclides.]

### TEOREMA VIII.

*Si dos rectas son paralelas, cualquier recta que encuentre á una de ellas, suficientemente prolongada, encuentra á la otra.* (Fig. 23)

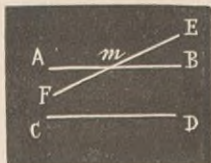


Fig. 23.

Si la recta  $EF$ , que encuentra á la  $AB$  en el punto  $m$ , no encontrara á la  $CD$ , seria paralela á ella y se podria, por consiguiente, por el punto  $m$  tirar las dos rectas  $AB$ , (paralela por hipótesis á la  $CD$ ) y la  $EF$ , (por no encontrar á la  $CD$ ), lo que es absurdo. [Postulado de Euclides.]

### TEOREMA IX. [Recíproco del VI]

*Si dos rectas son paralelas, cualquier recta perpendicular á una de ellas, lo es á la otra.* (Fig. 24)

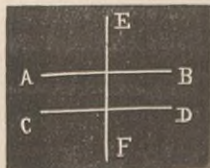


Fig. 24.

Supongamos que la recta  $EF$ , siendo perpendicular á la  $AB$  no lo fuera á su paralela  $CD$ , entonces

Grandísimos esfuerzos se han hecho para demostrar este postulado que Euclides, sabio geómetra, no pudo confirmar de manera rigurosa. Posteriormente se han dado varias demostraciones más ó ménos viciosas, por lo que admitiremos esta verdad que, aunque no tiene el carácter de los verdaderos axiomas, la experiencia comprueba sencillamente. Para los que quieran estudiar la cuestion profundamente, señalaremos los siguientes trabajos:

*Teorías de las paralelas*, por el coronel de ing. César Lambert.

*Las paralelas sin postulado*, por S. Cristian.

*Memorias sobre la reforma de la Geometría*, por M. G. Fauver.

esta sería oblicua, y por consiguiente [Teorema VII], se encontrarían, contra la hipótesis que dice que son paralelas.

De este teorema resulta, que dos paralelas tienen sus perpendiculares comunes. (\*)

## TEOREMA X.

*Dos rectas paralelas á otra recta, son paralelas entre sí.*

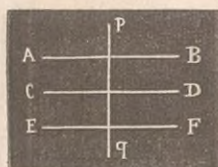


Fig. 25.

(Fig. 25)

En efecto, si  $AB$  y  $CD$ , son paralelas á la  $EF$ , considerando tirada la recta  $PQ$ , perpendicular á  $EF$ , lo será á la  $AB$  y también á la  $CD$  [Teorema IX], luego las dos rectas

$AB$  y  $CD$ , son paralelas [Teorema VI.]

## TEOREMA XI.

**Dos rectas son paralelas:**

- 1.º *Si cortadas por una secante los ángulos alternos internos son iguales.*
- 2.º *Si los ángulos alternos externos son iguales.*
- 3.º *Si los ángulos correspondientes son iguales.*
- 4.º *Si los ángulos internos de un mismo lado de la secante son suplementarios.*
- 5.º *Si los ángulos externos de un mismo lado de la secante son suplementarios. (\*\*)*

(\*) Podíamos haber considerado los teoremas VII, VIII y IX, como corolarios del postulado de Euclides; pero hemos creído más oportuno enunciarlos como teoremas.

(\*\*) Este teorema tiene cinco hipótesis y una sola conclusión, y equivale, por consiguiente, á cinco teoremas con una conclusión común; de manera que podrían enunciarse: 1.º *Si dos rectas cortadas por una secante forman ángulos alternos internos iguales, dichas dos rectas son paralelas.* 2.º *Si dos rectas cortadas por una secante forman ángulos alternos externos iguales, dichas dos rectas son paralelas, &c., &c.* Nos ha parecido mucho más sencillo formar un sólo

1.º Si los ángulos  $a$  y  $b$  (Fig. 26) son iguales, digo que las rectas  $AB$  y  $CD$  son paralelas. En efecto, por el punto medio  $O$ , de la recta  $FE$ , trazo una perpendicular  $MP$  á la  $AB$ , y voy á demostrar que lo será también á la  $CD$ , con lo que el teorema quedará demostrado [Teorema VI]. Para ello hago girar la figura  $OFP$  alrededor del punto  $O$ , en la dirección que marca la flecha, y hasta que

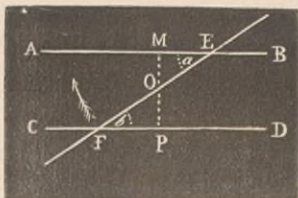


Fig. 26.

$OE$  coincida con su igual  $OF$ . En este caso,  $OP$  seguirá la dirección  $OM$ , porque los ángulos en  $O$  son iguales por opuestos por el vértice, y habiendo coincidido el punto  $E$  con el  $F$ , la recta  $FP$  seguirá la dirección  $EM$ , por suponerse iguales los ángulos  $a$  y  $b$ , luego el punto  $M$  coincidirá con el  $P$ , y por tanto, el ángulo  $OPF = OME$ , que es recto; luego la recta  $MP$  es perpendicular á las  $AB$  y  $CD$ ; luego estas son paralelas. [Teorema VI.]

2.º Si los ángulos alternos externos  $a$  y  $b$  (Fig. 27) son iguales, lo serán también sus opuestos al vértice  $c$  y  $d$ , que son alternos internos, y, por consiguiente, las rectas serán paralelas. [1.º]

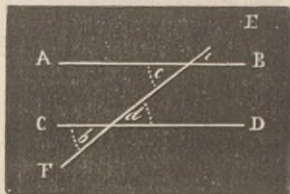


Fig. 27.

3.º Si los ángulos correspondientes  $a$  y  $d$  fueran iguales, como que  $a = c$  [Teorema IV], tendríamos que  $c = d$ ; luego las rectas serían paralelas.

De una manera semejante y muy sencillamente se de-

teorema, anteponiendo la conclusión común y después las hipótesis distintas que constituyen los diversos casos. También se podría haber formado un teorema del primer caso y considerar á los demás como corolarios.



muestran los otros dos casos. Por reduccion al absurdo seria fácil demostrar que dos rectas no son paralelas, si no satisfacen á alguna de las cinco hipótesis de este teorema.

TEOREMA XII. [Recíproco del anterior.]

*Si dos rectas son paralelas y están cortadas por una secante:*

- 1.º Los ángulos alternos internos, son iguales.
- 2.º Los ángulos alternos externos, son iguales.
- 3.º Los ángulos correspondientes, son iguales.
- 4.º Los ángulos internos de un mismo lado de la secante, son suplementarios.
- 5.º Los ángulos externos de un mismo lado de la secante, son suplementarios. (\*)

1.º Supongamos que AB y CD (Fig. 28), son paralelas,

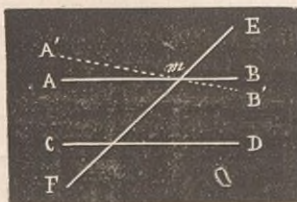


Fig. 28.

y vamos á demostrar que los ángulos alternos internos son iguales. En efecto, si estos ángulos no fuesen iguales, por el punto *m*, podríamos tirar una recta *A'B'*, que formase con la *CD* ángulos alternos internos iguales.

pero esta recta *A'B'*, seria paralela á la *CD* [Teorema anterior, 1.º], y como por el supuesto *AB* es paralela tambien á la *CD*, tendríamos por un mismo punto *m*, trazadas dos rectas paralelas á la *CD*, lo que es absurdo. [Postulado de Euclides.]

De una manera enteramente igual se demuestran los otros cuatro casos de este recíproco, apoyándose cada uno en el correspondiente caso del teorema directo.

(\*) Este teorema tiene una hipótesis y cinco tesis, constituyendo en todo rigor cinco teoremas con una hipótesis comun. Se pueden hacer sobre él iguales observaciones que sobre el anterior.

# TEOREMA XIII.

**Dos ángulos son iguales:**

1.º Cuando tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

2.º Cuando tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentidos opuestos.

1.º Si las rectas  $AB$  y  $A'B'$  son paralelas, así como las  $BC$  y  $B'C'$  (Fig. 29), digo que los ángulos  $a$  y  $c$ , son iguales. Para demostrarlo prolongo la  $A'B'$  hasta la  $BC$  y resultará que

ángulo  $a = \text{ángulo } b$ , por correspondientes entre paralelas.

ángulo  $b = \text{ángulo } c$ , por igual razón

Luego ángulo  $a = \text{ángulo } c$ , que era lo que se quería demostrar.

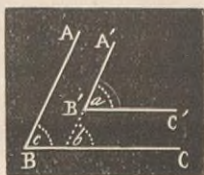


Fig. 29.

2.º Si los lados de los ángulos son paralelos; pero dirigidos en sentido inverso como en la (Fig. 30), prolongamos los lados de uno cualquiera de ellos, tendremos:

$a = b$ , por opuestos al vértice.

$a = c$ , por lo demostrado anteriormente.

Luego,  $b = c$ .

**Corolario.** Dos ángulos cuyos lados son paralelos, pero que ambos no están dirigidos en el mismo sentido ni en sentido inverso, son suplementarios. (Fig. 30)

Sean los ángulos  $a$  y  $d$ : tenemos que  $a$  es igual á  $c$ , según el teorema acabado de demostrar; pero  $d$  es suplemento de  $c$  [Teorema III], luego también lo será de su igual  $a$ .

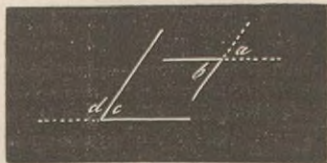


Fig. 30.

**Escolio. (\*)** *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son iguales ó suplementarios.*

### TEOREMA XIV.

*Dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares respectivamente, son iguales ó suplementarios. (Fig. 31)*

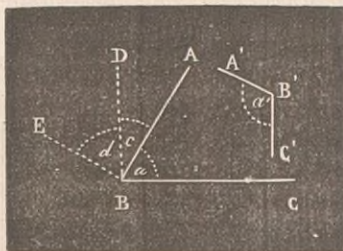


Fig. 31.

Supongamos que los dos ángulos  $a$  y  $a'$  tienen sus lados perpendiculares. Para demostrar el teorema, levantemos por el punto B una perpendicular BD á la recta BC, y otra perpendicular BE á la recta BA; quedará así formado un ángulo  $d$ , cuyos lados son respectivamente paralelos á los del ángulo  $a'$  [Teorema VI]; luego estos ángulos  $d$  y  $a'$  serán iguales ó suplementarios. [Escolio del teorema anterior.] Pero los ángulos  $d$  y  $a$  son iguales, por tener el mismo complemento  $c$ ; por consiguiente, los ángulos  $a$  y  $a'$ , son también iguales ó suplementarios.

**Escolio.** Si los dos ángulos son agudos, serán iguales.

### TEOREMA XV.

Si dos rectas se cortan, sus perpendiculares respectivas también se cortan. (Fig. 32)

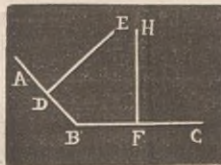


Fig. 32.

En efecto, si DE y FH que se suponen perpendiculares respectivamente á AB y CD, no se cortaran, serian paralelas, en cuyo caso AB y BC serian también paralelas

(\*) *Escolio* quiere decir observacion ó nota: sirve para indicar la mayor ó menor extension que puede darse á un teorema, ó las diversas maneras con que puede enunciarse, su utilidad, &c., &c.



[Teoremas IX y VI], lo que es contrario á la hipótesis, y por consiguiente absurdo.

### CAPÍTULO III.

DEFINICIONES DE LOS POLÍGONOS.—PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS Y SU IGUALDAD.

26. Se llama *polígono* una porción de plano ABCDEF (Fig. 33), limitado por varias líneas rectas que se cortan dos á dos.

*Lados* del polígono son las partes de rectas AB, BC, CD.... que lo forman: *vértices*, los puntos A, B, C... en que los lados se cortan: *diagonales*, se llaman las rectas AE, AD.... que unen dos vértices no consecutivos: *perímetro* es la medida de todos los lados del polígono, y *contorno* es la línea quebrada que lo limita.

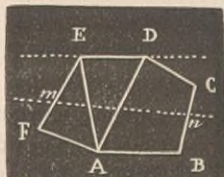


Fig. 33.

27. Los polígonos pueden ser *convexos* ó *cóncavos*.

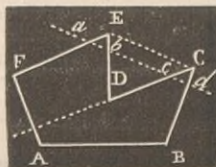


Fig. 34.

Los caracteres de los polígonos convexos, son los siguientes: 1.º Si se prolonga un lado cualquiera ED (Fig. 33) todo el polígono queda á un lado de esta recta. 2.º Todas las diagonales AE, AD... son interiores al polígono. 3.º Una recta cualquiera *mn*, no puede encontrar á su perímetro más que en dos puntos *m* y *n*.

Los polígonos cóncavos, tales como el ABCDEF, (Fig. 34) tienen caracteres opuestos. Así vemos: 1.º Que el lado CD prolongado divide al polígono en dos partes. 2.º Que la diagonal EC es exterior al polígono, y 3.º Que la recta *ad* encuentra al perímetro del polígono en los cuatro puntos *a*, *b*, *c*, *d*.

Los polígonos convexos son los únicos que se estudian en la Geometría elemental.

28. Es evidente que con ménos de tres líneas rectas no puede limitarse una porcion de plano; por consiguiente, el polígono de ménos lados que puede existir es el *triángulo*; el cual es necesariamente convexo y no puede tener diagonales, porque todos sus vértices son consecutivos. Aumentando el número de lados resultan los siguientes polígonos:

|                         |   |                       |    |
|-------------------------|---|-----------------------|----|
| <i>Cuadrilátero</i> ... | 4 | <i>Eneágono</i> ....  | 9  |
| <i>Pentágono</i> ....   | 5 | <i>Decágono</i> ....  | 10 |
| <i>Exágono</i> .....    | 6 | <i>Endecágono</i> ... | 11 |
| <i>Eptágono</i> .....   | 7 | <i>Dodecágono</i> ... | 12 |
| <i>Octógono</i> .....   | 8 | <i>Pentecágono</i> .  | 15 |

Los demás no tienen nombres particulares y se enuncian con el número de sus lados; así se dice polígono de catorce lados, ó de treinta, &c.

29. Un triángulo se compone de tres lados y de tres ángulos, que son los *seis elementos* que lo constituyen.

### TEOREMA XVI.

*Un lado cualquiera de un triángulo, es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. (Fig. 35)*

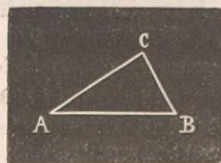


Fig. 35.

En efecto, por la definicion de la línea recta tenemos que  $AB < AC + BC$ , con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Ahora, por la misma razon,  $AC < AB + BC$ , de donde  $AC - BC < AB$ , ó bien  $AB > AC - BC$ .

### COROLARIOS.

1.º *La suma de dos rectas que se cortan en un punto*

situado entre sus extremidades, es mayor que la suma de las dos rectas que unen dichas extremidades. (Fig. 36)

Tenemos  $AO + OC > AC$ , y  $OD + OB > BD$ . Sumando miembro á miembro, resulta:  $AO + OC + OD + OB > AC + BD$ , y reduciendo  $AB + CD > AC + BD$ .

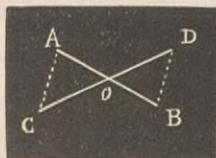


Fig. 36.

2.º En todo triángulo si se unen las extremidades de un lado con un punto interior, la suma de estas dos rectas es menor que la suma de los otros dos lados del triángulo. (Fig. 37)'

Prolongando la recta AD hasta el punto E, tenemos, según el teorema demostrado:

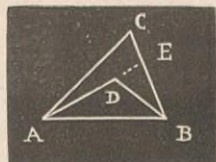


Fig. 37.

$AD + DE < AC + CE$ , y  $DB < DE + EB$ . Sumando miembro á miembro:  $AD + DE + DB < AC + CE + DE + EB$ .

Suprimiendo el sumando común DE de ambos miembros y reduciendo los dos BE y EC á su igual BC, resulta finalmente,  $AD + DB < AC + BC$ , que era lo que se quería demostrar.

## TEOREMA XVII.

La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos ángulos rectos. (Fig. 38)

Sea el triángulo ABC, por uno de sus vértices C tiro una paralela al lado opuesto AB y prolongo el lado AC.

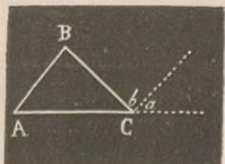


Fig. 38.

Tendremos formados los tres ángulos consecutivos  $a, b$  y  $BCA$ , cuya suma es igual á dos rectos [Teorema III, corolario 1.º] Pero, observando que el  $BCA$  es el mismo ángulo C del triángulo propuesto, que ángulo  $b =$  ángulo B, por alter-



nos internos entre paralelas, y ángulo  $a = \text{ángulo } A$ , por correspondientes entre las mismas, resultará que ángulos  $A + B + C = 2 \text{ ángulos rectos}$ .

### COROLARIOS.

1.º *El ángulo exterior que resulta prolongando un lado cualquiera de un triángulo, es igual á la suma de los otros dos ángulos no adyacentes.* (Fig. 38)

Vemos, en efecto, que el ángulo que resulta se compone de los dos ángulos  $b$  y  $a$ , que son respectivamente iguales á  $B$  y  $A$  del triángulo.

2.º *Un ángulo cualquiera de un triángulo, es suplemento de la suma de los otros dos.* Esta consecuencia es inmediata de la propiedad que indica el teorema.

3.º *Si dos ángulos de un triángulo son iguales respectivamente á otros dos de otro triángulo, el tercer ángulo del primero, es igual al tercer ángulo del segundo; porque son suplementos de ángulos iguales.*

**Escolio.** Un triángulo no puede tener sus tres ángulos obtusos, ni rectos, ni dos rectos y uno obtuso, ni dos obtusos y uno recto, ni dos obtusos, ni dos rectos; porque en cualquiera de estos casos la suma de sus tres ángulos sería mayor que dos ángulos rectos.

### TEOREMA XVIII.

*Si desde un punto tomado en un lado de un ángulo se traza una perpendicular al otro lado, esta caerá dentro ó fuera del ángulo, segun que este sea agudo ú obtuso.* (Fig. 39)

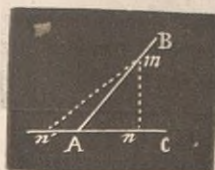


Fig. 39.

Sea, primeramente, el ángulo agudo  $BAC$ , si desde el punto  $m$  trazo la perpendicular  $mn$  al lado  $AC$ , esta tendrá que caer en un punto  $n$  del lado  $AC$ , pues si

cayera en un punto tal como  $n'$  de su prolongacion  $DA$ , quedaria formado un triángulo  $mA n'$ , que tendria un ángulo recto en  $n'$  y otro obtuso en  $A$ , lo que es absurdo.

De igual manera se demuestra la segunda parte del teorema.

**Escolio.** La perpendicular no puede suponerse que caiga en el punto  $A$ , porque entonces el ángulo seria recto.

### TEOREMA XIX.

*Dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, son iguales.* (Fig. 40)

Si tenemos  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ , y además  $A = A'$ , podemos superponer  $AC$  sobre su igual  $A'C'$ , de manera que los puntos  $A$  y  $C$  coincidan con  $A'$  y  $C'$ , en cuyo caso  $AB$  seguirá la direccion

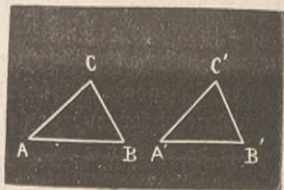


Fig. 40

$A'B'$ , y el punto  $B$  coincidirá con  $B'$ , coincidiendo por consiguiente los tres vértices, y por tanto los tres lados y los tres ángulos de un triángulo, con los mismos elementos (29) del otro. [Axioma 4.º]

### TEOREMA XX.

*Dos triángulos que tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, son iguales.* (Fig. 41)

Si tenemos  $AC = A'C'$ , y  $A = A'$ ,  $C = C'$ , podemos superponer,  $AC$  sobre su igual  $A'C'$  de modo que coincidan sus extremos; entonces la recta  $AB$  seguirá la direccion  $AB'$ , la  $CB$  la direccion  $C'B'$ , á causa de ser iguales los ángulos, pero

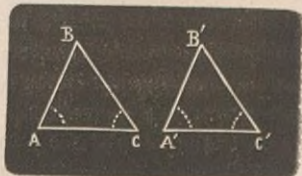


Fig. 41.

en tal caso, B y B' se confunden y los triángulos son iguales. [Axioma 4.º]

**Escolio.** Dos triángulos que tienen un lado igual y dos ángulos iguales, aunque no sean adyacentes los dos, son iguales; pues teniendo dos ángulos iguales, tienen los terceros tambien iguales.

30. Se llama *bisectriz* de un ángulo la recta que divide el ángulo en dos ángulos iguales.

### TEOREMA XXI.

*Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, pero el ángulo comprendido por los dos lados del primero es mayor que el ángulo comprendido por los dos lados del segundo, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo.* (Fig. 42)

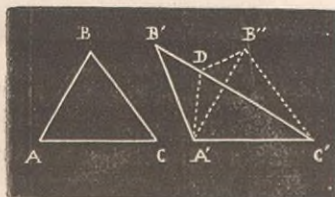


Fig. 42.

Si  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ; pero  $A < A'$ , digo que  $BC < B'C'$ . Hago coincidir AC con su igual  $A'C'$ , la recta AB seguirá una dirección  $A'B''$  interior al ángulo  $A'$ , por ser  $A < A'$ . Si el

vértice B cayera en un punto de la recta  $C'B'$ , el teorema quedaba demostrado; pero supongamos que B cae en un punto exterior al triángulo (lo mismo se demostraría si cayese en un punto interior), y sea  $B''$  la posición del punto B, tirando las rectas  $A'B''$  y  $C'B''$ , el triángulo  $A'B''C'$ , será el ABC en su nueva posición. Ahora tiro la bisectriz  $A'D$  del ángulo  $B'A'B''$  y tendremos que los dos triángulos  $B'AD$  y  $DAB''$  son iguales. [Teorema XIX], y por consiguiente  $B'D = DB''$ .

En el triángulo  $C'DB''$  tenemos:  $C'D + DB'' > B''C'$ , ó bien  $C'D + DB' > B''C'$ , ó en fin,  $B'C' > BC$ .



## TEOREMA XXII.

Dos triángulos son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales. (Fig. 43.)

Supongamos que  $AB=A'B'$ ,  $AC=A'C'$  y  $BC=B'C'$ , quedará demostrado el teorema, si probamos que un ángulo cualquiera  $A=A'$  [Teor. XIX]. Supongamos por un momento que  $A \leq A'$ . En este caso,  $BC \leq B'C'$  [Teorema XXI], lo que es contrario á la hipótesis.

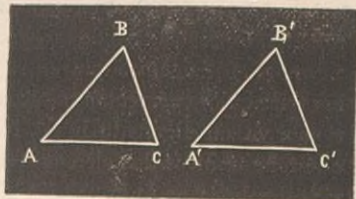


Fig. 43.

31. Se llama triángulo *rectángulo*, al que tiene un ángulo recto. El lado opuesto á éste se llama *hipotenusa*, y *catetos* los dos lados perpendiculares entre sí que forman dicho ángulo recto.

Se llama triángulo *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso, y *acutángulo* el que tiene sus tres ángulos agudos; los triángulos obtusángulos y acutángulos, por oposición á los rectángulos, se llaman *oblicuángulos*.

32. Los triángulos rectángulos tienen sus ángulos agudos complementarios, pues entre los dos valen tanto como un ángulo recto.

## TEOREMA XXIII.

Dos triángulos rectángulos son iguales:

- 1.º Si tienen iguales la hipotenusa y un ángulo agudo.
- 2.º Si tienen iguales un cateto y un ángulo agudo.
- 3.º Si tienen los dos catetos iguales.

1.º Si los dos triángulos rectángulos tienen sus hipotenusas iguales y un ángulo agudo, también serán iguales los otros dos ángulos agudos, por complementarios de ángulos iguales, y por tanto tendrán un lado igual y los dos ángulos adyacentes iguales. [Teorema XX.]

2.º Este caso está comprendido tambien en el anterior.

3.º Si los dos triángulos tienen sus dos catetos iguales, tienen evidentemente dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, y por consiguiente, son iguales. [*Teorema XIX.*]

*Escolio general sobre la igualdad de los triángulos.* Dos triángulos son iguales, en general, cuando tienen respectivamente iguales tres de los seis elementos que los constituyen (29), siempre que entre estos haya un lado. Si los triángulos son rectángulos, como por este solo hecho tienen ya un elemento igual, bastará para su igualdad que tengan otros dos elementos iguales, siempre que entre ellos haya un lado.

#### TEOREMA XXIV. [*Recíproco del XXI*]

*Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el tercer lado desigual, el ángulo opuesto al mayor lado, es mayor que el ángulo opuesto al menor.*

En efecto, si no fuese mayor este ángulo opuesto al mayor lado, seria igual ó menor. Igual no puede ser, porque entonces los triángulos serian iguales [*Teorema XIX*], y por tanto, lo serian sus tres lados, lo que es contrario á la hipótesis: menor tampoco puede ser, porque entonces el lado que segun la hipótesis es mayor, seria menor [*Teorema XXI*]; no pudiendo ser ni igual ni menor, es necesariamente mayor.

33. Con relacion á la magnitud de sus lados, los triángulos se denominan *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*. Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales, isósceles si solo tiene dos lados iguales, y escaleno cuando los tres lados son desiguales. En el triángulo isósceles se llama *vértice* el formado por los dos lados iguales y *base* el lado desigual.

# TEOREMA XXV.

*En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos á los lados iguales, son iguales. (Fig. 44.)*

Si tenemos  $AB=BC$ , digo que  $A=C$ ; pues si tiramos la recta  $BD$  que une el vértice  $B$  con la mitad del lado opuesto  $AC$ , los dos triángulos que así resultan  $ABD$  y  $BDC$  son iguales [Teorema XXII], y por consiguiente,  $A=C$ .

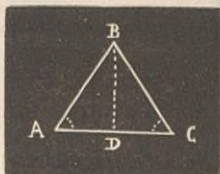


Fig. 44.

## COROLARIOS.

1.º *La recta que une el vértice de un triángulo isósceles con la mitad del lado opuesto, es bisectriz del ángulo y perpendicular á la base.* Esta propiedad se deduce inmediatamente de la igualdad de los triángulos  $ABD$  y  $DBC$ .

2.º *Todo triángulo equilátero, es equiángulo.* En efecto, los tres ángulos serán iguales por oponerse á lados iguales. Cada uno de estos ángulos será igual á  $\frac{2}{3}$  de ángulo recto. [Teorema XVIII.]

# TEOREMA XXVI. [Recíproco del anterior]

*Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, sus lados opuestos son iguales. (Fig. 44.)*

En efecto, si  $A=C$ , trazando la bisectriz  $BD$  del ángulo  $B$ , los dos triángulos  $ABD$  y  $DBC$  serán iguales [Teorema XX]: y por consiguiente, los lados  $AB$  y  $BC$ .

**Corolario.** *Un triángulo equiángulo, es equilátero.*

# TEOREMA XXVII.

*En todo triángulo, á mayor ángulo, se opone mayor lado. (Fig. 45.)*

Supuesto  $A > C$ , siempre será posible tirar una recta



AD, que forme con la AC un ángulo igual á C. Pero en tal caso  $AD=DC$  [Teor. anterior.]

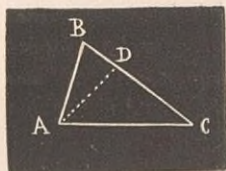


Fig. 45.

Ahora en el triángulo ADE, tenemos que  $AD+DB > AB$ . Sustituyendo en vez de AD su igual CD, tendremos que  $CD+DB > AB$ , ó bien  $CB > AB$ , que era lo que se quería demostrar.

### TEOREMA XXVIII. [Recíproco del anterior]

*En todo triángulo, á mayor lado, se opone mayor ángulo.*

Si así no fuese, se opondría un ángulo igual ó menor. Igual ángulo no puede oponerse, porque entonces los lados serian iguales, lo que es contrario á la hipótesis: tampoco puede oponerse menor ángulo, porque entonces dicho lado supuesto mayor, seria menor; luego, &c.

**Corolario.** *La hipotenusa es siempre mayor que cualquier cateto.*

## CAPÍTULO IV.

### PROPIEDADES DE LAS PERPENDICULARES, OBLÍCUAS Y BISECTRICES.

### TEOREMA XXIX.

*La perpendicular trazada desde un punto á una recta, es menor que cualquier oblicua.* (Fig. 46.)



Fig. 46.

Siendo la AB perpendicular á la BC, el ángulo B del triángulo BAC es recto, y por consiguiente, el ángulo C agudo; luego  $AC > AB$  [Teorema XXVII], que era lo que se quería demostrar.

**Escolio.** Se llama *distancia* de un punto á una recta, la perpendicular trazada desde este

punto á dicha recta. Esta distancia es la línea más corta que se puede trazar del punto á la recta, segun se acaba de demostrar.

El recíproco de este teorema es muy fácil de demostrar, por reduccion al *absurdo*.

### TEOREMA XXX.

Si desde un punto tomado fuera de una recta se trazan varias oblicuas:

1.º *Las oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular, son iguales.*

2.º *De dos oblicuas, la que más se aparta del pié de la perpendicular, es la mayor.* (Fig. 47)

1.º Si  $BC = CD$  los dos triángulos  $ABC$  y  $ACD$  son iguales [Teorema XXIII, caso 3.º]; luego  $AB = AD$ .

2.º Si  $BC < CE$ , tomo á partir del punto  $C$ , una parte  $CD = BC$ , y tendremos por lo acabado de demostrar, que  $AB = AD$ .

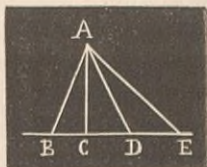


Fig. 47.

Ahora en el triángulo  $DAE$  el ángulo en  $D$  es obtuso por adyacente de uno agudo; por consiguiente, ángulo  $D$  del triángulo  $ADE >$  ángulo  $E$ . Luego, [Teor. XXVII],  $AE > AD$ , ó bien  $AE > AB$ , que era lo que se queria demostrar.

### TEOREMA XXXI. [Recíproco del anterior]

1.º *Si dos oblicuas son iguales, se apartan igualmente del pié de la perpendicular.*

2.º *Si dos oblicuas son desiguales, la mayor se aparta más del pié de la perpendicular.*

1.º Si no se apartaran igualmente del pié de la perpendicular, una se apartaria más que la otra; pero entonces no serian iguales [Teorema XXX, 2.º], lo que es absurdo, por oponerse al supuesto.

2.º Si la mayor oblicua no se apartára más del pié de la perpendicular, se apartaría lo mismo ó ménos que la menor. Lo mismo no puede apartarse, porque entonces las oblicuas serian iguales [*Teorema XXX*, 1.º], lo que es absurdo; ménos tampoco puede apartarse, porque entonces seria menor; luego, &c.

### COROLARIOS.

1.º *Entre un punto y una recta, no se pueden tirar más que dos rectas iguales que unan dicho punto á la recta; porque no pueden trazarse más que dos rectas que equidisten del pié de la perpendicular bajada desde el punto á la recta.*

2.º *Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen un cateto igual y la hipotenusa.*

### TEOREMA XXXII.

1.º *Todo punto de la perpendicular trazada á una recta en su punto medio, equidista de los extremos de dicha recta.*

2.º *Todo punto exterior á dicha perpendicular, dista desigualmente de los extremos.—*

(Fig. 48)

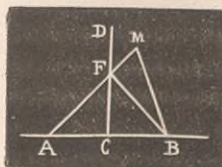


Fig. 48.

1.º Sea el punto F, que está en la perpendicular DE trazada á la AB en su punto medio C. Trazadas las rectas AF y BF, los dos triángulos rectángulos AFC y CFB son iguales, pues que el cateto CF es comun, y los catetos AC y CB son iguales por hipótesis; por consiguiente,  $AF=FB$ .

2.º Sea el punto M que está fuera de la perpendicular: trazando las rectas AM y BM y uniendo F con B; por lo demostrado anteriormente tendremos que  $AF=FB$ .



Ahora en el triángulo BFM tendremos [Teorema XV], que  $BF + FM > MB$ , ó bien  $AF + FM = AM > MB$ , que era lo que se queria demostrar.

TEOREMA XXXIII. [Recíproco del anterior]

1.º *Todo punto equidistante de los extremos de una recta, pertenece á la perpendicular levantada á ella en su punto medio.*

2.º *Todo punto no equidistante de los extremos de una recta, no pertenece á la perpendicular levantada á ella en su punto medio.*

1.º Si el punto en cuestion no perteneciera á la perpendicular levantada en su punto medio, no equidistaria de los extremos [Teorema XXXII, 2.º], lo que es absurdo por oponerse al supuesto.

2.º Si el punto perteneciera á la perpendicular, equidistaria de los extremos [Teorema XXXII, 1.º], lo que no puede ser, por oponerse al supuesto.

34. *Regla general para demostrar los teoremas recíprocos por reduccion al absurdo.* La mayor parte de los teoremas recíprocos pueden demostrarse por la *reduccion al absurdo*, es decir, suponiendo que la conclusion del teorema no es cierta y deduciendo de aquí una conclusion contraria á la hipótesis.

Así hemos demostrado los teoremas IX, XII, XXIV, XXVI, XXXI y XXXIII.

En los teoremas recíprocos que sucesivamente se enuncian no pondremos demostracion cuando ésta se funde en la regla que antecede.

35. Segun el teorema acabado de demostrar, todos los puntos de la recta DE perpendicular á la AB en su punto medio C, satisfacen á la condicion de equidistar de los extremos A y B, propiedad exclusiva á dichos puntos, segun el segundo caso del mismo teorema; por consiguien-

te, dicha perpendicular constituye el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de la recta A B. En general se llama *lugar geométrico*, la reunion de todos los puntos que satisfacen á una ó varias condiciones comunes á todos ellos.

### TEOREMA XXXIV.

*Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de otra, es perpendicular á ella y la divide en dos partes iguales. (Fig. 49.)*

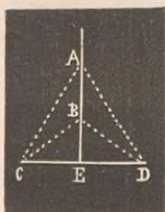


Fig. 49.

En efecto, si A y B equidistan de C y D, los dos puntos A y B pertenecen á la perpendicular levantada á la recta CD en su punto medio [Teorema XXXIII], y como por los dos puntos A y B no pueden pasar dos rectas distintas, esta recta A B se confundirá con la perpendicular.

### TEOREMA XXXV.

*Las tres perpendiculares levantadas por los puntos medios de los tres lados de un triángulo, concurren en un mismo punto que equidista de los vértices. (Fig. 50.)*

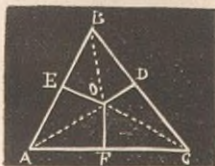


Fig. 50.

Las dos perpendiculares DO y FO concurrirán siempre [Teorema XV]. Ahora la recta OA=OC, por ser O un punto de la perpendicular

OF, y OC=OB, por ser O un punto de la perpendicular DO; luego  $OA=OC=OB$ .

Pero, si  $OA=OB$ , la perpendicular levantada en el punto medio E de la recta BA pasará por O. [Teorema XXXIII].

# TEOREMA XXXVI.

1.º *Todo punto de la bisectriz de un ángulo, equidista de los lados del ángulo.* (Fig. 51.)

2.º *Todo punto interior á un ángulo y que no está en la bisectriz, no equidista de los lados del ángulo.* (Fig. 52.)

1.º Sea el punto M perteneciente á la bisectriz AM del ángulo CAB. Bajando las distancias ó perpendiculares [Escolio del teorema XXIX] MF y MH á los dos lados AB y AC, quedarán formados los dos triángulos rectángulos HMA y MAF que tienen la hipotenusa AM comun y los ángulos agudos en A iguales por construccion, luego son iguales [Teorema XXIII], y por consiguiente  $MH = MF$ .

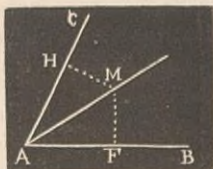


Fig. 51.

2.º Si el punto M está (Fig. 52) fuera de la bisectriz, bajo las perpendiculares ML y MG á los lados del ángulo; y desde el punto F en que esta última corta á la bisectriz, tiro la FH perpendicular al lado AC, trazando además la recta HM.

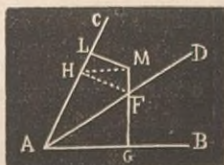


Fig. 52.

Segun el caso 1.º  $HF = FG$ .

Ahora en el triángulo HMF tendremos:

$$HF + FM > HM \text{ ó bien } GF + FM = MG > HM.$$

Pero ML es perpendicular, y por consiguiente menor que HM. Luego si  $MG > HM$ , con mucha más razon  $MG > LM$ .

**Escolio.** Segun las magnitudes del ángulo, puede ocurrir que la perpendicular MG (Fig. 52) al lado AB, caiga en el vértice A, ó en la prolongacion de la recta AB; pero en estos casos la demostracion es evidente, segun el teorema XIX.



TEOREMA XXXVII. [Recíproco del anterior]

1.º *Todo punto equidistante de los lados de un ángulo, pertenece á la bisectriz del ángulo.*

2.º *Todo punto no equidistante de los lados de un ángulo, no pertenece á la bisectriz de dicho ángulo.*

Se demuestra este recíproco por la regla del n.º 34.

Escolio. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico (35) de los puntos equidistantes de sus lados.

TEOREMA XXXVIII.

*Si una recta pasa por el vértice de un ángulo y tiene un punto equidistante de sus lados, dicha recta es la bisectriz.*

En efecto, el punto equidistante pertenece á la bisectriz (1.º del teorema anterior); luego la recta tiene dos puntos comunes con ella (el del vértice y el equidistante de los lados), y por tanto se confunde. [Axioma 5.º]

TEOREMA XXXIX.

*Las tres bisectrices de los tres ángulos de un triángulo, se encuentran en un punto que equidista de los tres lados del triángulo (Fig. 53)*

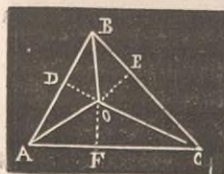


Fig. 53.

Dos de las bisectrices, AO, OC, desde luego se encuentran en un punto, pues si no serian paralelas y entonces la suma de los ángulos que forma con AC valdria dos rectos, lo que es absurdo; pero el punto O en que se encuentran las dos bisectrices AO y OC,

equidista evidentemente de los tres lados del triángulo [Teorema XXXVI], luego las distancias OF, OD, OE del punto O á los tres lados son iguales, y por tanto, teniendo O un punto equidistante de los lados del ángulo B, la bisectriz de este ángulo pasará por O; con lo que el teorema queda demostrado.

## CAPÍTULO V.

### CUADRILÁTEROS.

36. Se llama *trapezio* un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no (Fig. 54). *Paralelógramo* es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos. *Rombo* ó *losange* es un paralelógramo que tiene iguales sus cuatro lados. *Rectángulo* es un paralelógramo que tiene sus ángulos rectos, y *cuadrado* se llama si el rectángulo tiene todos sus lados iguales.



Figura 54.

### TEOREMA XL.

*La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero, es igual á cuatro rectos. (Fig. 55)*

En efecto, cualquiera que sea el cuadrilátero, tirando una diagonal BD, quedará dividido en dos triángulos ABD y DBC, cuyos ángulos evidentemente valen tanto como

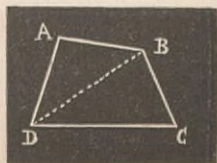


Fig. 55.

los del cuadrilátero. Pero sabemos [Teorema XVII], que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos, y por consiguiente, la suma de los ángulos del cuadrilátero es igual á cuatro rectos.

**Corolario.** *Si dos ángulos de un cuadrilátero son rectos, ó valen dos rectos, los otros dos son suplementarios. Esto se deduce inmediatamente del teorema.*

### TEOREMA XLI.

*Dos paralelógramos que tienen un ángulo igual y los*

*lados que lo forman iguales, son iguales.* (Fig. 56) (\*)

Si tenemos  $AB = A'B'$ ,  $AD = A'D'$  y  $A = A'$ , podremos hacer coincidir los ángulos iguales. En este caso, el

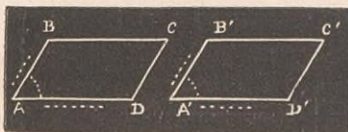


Fig. 56.

punto B coincidiría con B' y el punto D con D'; pero entonces la BC seguirá la dirección B'C'

[Postulado de Euclides], por igual razón la DC seguirá la dirección D'C', y por tanto, confundiéndose también los vértices C y C', los dos paralelogramos son iguales. [Axioma 4.º]

**Corolario.** *Dos rectángulos que tienen dos lados consecutivos, respectivamente iguales, son iguales.*

## TEOREMA XLII.

*En todo paralelogramo, los lados opuestos son iguales y los ángulos opuestos también.* (Fig. 57)

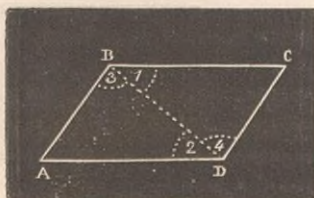


Fig. 57.

1.º Trazando la diagonal BD, resultarán dos triángulos ABD y DBC, que tienen el lado BD común, los ángulos 1 y 2 iguales por alternos internos entre las paralelas AD y BC, y los ángulos

3 y 4 iguales por alternos internos entre las paralelas AB y CD; por tanto, dichos triángulos son iguales [Teo-

(\*) En algunas figuras, como se indica en la 56, para llamar más la atención del alumno, las líneas ó ángulos sobre que versa la hipótesis, las marcamos con líneas de trazos paralelas á las rectas, ó con arcos que abracen los ángulos. Estas indicaciones nos ahorrarán, en algunos casos, el tener que señalar antes de empezar la demostración, los puntos de la figura que se mencionan en los teoremas; pues ya se habrá podido notar que, buscando siempre la mayor claridad, no hemos querido intercalar en el enunciado las letras que marcan las partes de las figuras.



rema XX]. De la igualdad de los triángulos ABD y BDC, resulta:

$AB=CD$ ,  $BC=AD$ ,  $A=C$ , ángulos  $1+3=$ ángulos  $2+4$ ,  
ó bien  $B=D$ .

**Escolio.** Puede enunciarse este teorema: *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas, son iguales.*

### TEOREMA XLIII. [Recíproco del anterior]

*Si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos iguales, estos lados son paralelos.* (Fig. 57)

En efecto, si  $AB=CD$  y  $BC=AD$ , trazando la diagonal BD, los dos triángulos ABD y BDC serán iguales [Teorema XXII], y por consiguiente, ángulo  $1=$ ángulo  $2$  y ángulo  $3=$ ángulo  $4$ . En cuyo caso los lados opuestos son paralelos [Teorema XI, 1.º]

### TEOREMA XLIV.

*Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, los otros dos también lo son.* (Fig. 58.)

En efecto, tirando la diagonal BD, los dos triángulos ABD y DBC tienen:

El lado BD común.

$BC=AD$ , por el supuesto.

Ángulo  $1=$ ángulo  $2$ , por alternos internos entre paralelas.

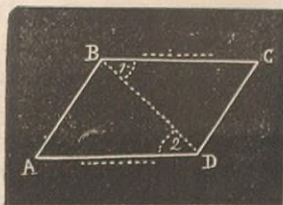


Fig. 58.

Luego, dichos triángulos son iguales [Teorema XIX], y por consiguiente:

$AB=CD$ , ángulo  $ABD=BDC$ , y por tanto AB paralela á CD. [Teorema XI, 1.º]

**Corolario.** Si una recta une los puntos medios de los lados de un paralelogramo, es paralela á los otros dos lados. Esto se deduce evidentemente del teorema.

### TEOREMA XLV.

*Las diagonales de un paralelogramo, se cortan mutuamente en partes iguales. (Fig. 59.)*

Los dos triángulos AOD y BOC son iguales por tener:  $AD=BC$  ángulo 1=ángulo 2, por alternos internos entre paralelas, y los ángulos en O iguales por opuestos por el vértice. [Teorema XIX].

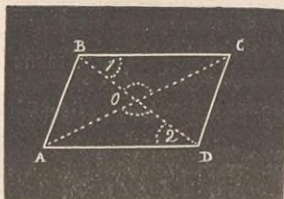


Fig. 59.

De la igualdad de dichos triángulos se deduce:

$$AO=OC \text{ y } DO=OB.$$

37. El punto O en que se cortan las diagonales, se llama *centro* del paralelogramo.

### TEOREMA XLVI.

*Las diagonales de un rombo, se cortan en ángulo recto y en partes iguales. (Fig. 60.)*

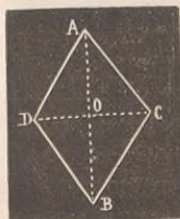


Fig. 60.

En efecto, siendo todos los lados iguales, los puntos A y B equidistan de los puntos D y C; luego la recta AB es perpendicular á la DC [Teorema XXXIV], y la divide en dos partes iguales. También la DC es perpendicular á la AB y la divide en dos partes iguales.

**Escolio.** El rombo siendo una variedad del paralelogramo, tiene todas las propiedades que caracterizan á este.

### TEOREMA XLVII. [Recíproco del anterior]

*Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en ángulo recto y mutuamente en partes iguales, la figura es un rombo. (Fig. 60.)*

Porque entonces los cuatro triángulos AOD, AOC, BOD y BOC son iguales [Teorema XXIII, 3.º], y por consiguiente,  $AD=AC=CB=BD$ .

### TEOREMA XLVIII.

*Las diagonales de un rectángulo, son iguales. (Fig. 61)*

Los dos triángulos ACD y BCD son rectángulos y tienen el cateto CD común y los catetos AD y BC iguales por lados opuestos de paralelogramo; por consiguiente,  $AC = DB$ , que era lo que se quería demostrar.

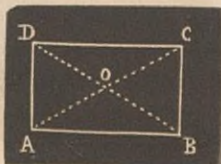


Fig. 61.

**Escolio 1.º** Siendo el rectángulo una variedad del paralelogramo, tiene todas las propiedades que á este cuadrilátero caracterizan.

**Escolio 2.º** El recíproco de este teorema es cierto.

### TEOREMA XLIX.

*Las diagonales de un cuadrado, son iguales y se cortan en ángulo recto. (Fig. 62)*

En efecto, por tener sus lados iguales, los puntos C y A equidistan de los B y D; luego, las diagonales se cortan en ángulo recto. Además, por ser rectos los ángulos del cuadrado, los dos triángulos ADB y ADC son iguales, luego  $AC = BD$ .

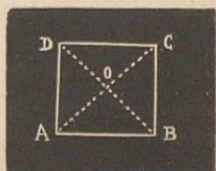


Fig. 62.

### TEOREMA L.

*En todo trapecio la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos es: 1.º paralela á las bases. 2.º igual á su semi-suma. (Fig. 63)*

1.º Trazemos por el punto F la paralela NM al lado AC del trapecio, y prolonguemos AB hasta que encuentre en M á dicha paralela. Los dos triángulos BMF y FND tienen los ángulos en F iguales por opuestos por el vérti-



ce, el lado BF igual al FD por construcción, y el ángulo 1 = ángulo 2, por alternos internos entre las paralelas

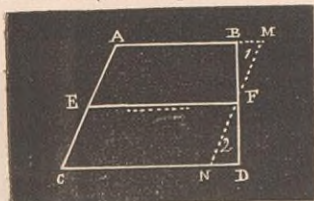


Fig. 63.

AB y CD; luego, estos triángulos son iguales.

[Teorema XX.]

De la igualdad de dichos triángulos BMF y FND, se deduce:

$$BM = ND \text{ y } FM = FN.$$

Ahora, el cuadrilátero AMNC es un paralelogramo, porque tiene sus lados paralelos de dos en dos, y la recta EF que une los puntos medios de dos lados opuestos, es paralela é igual á AM y CN. [Corolario del teor. XLIV.]

2.º Siendo la recta EF igual á las AM y CN, tendremos:  $EF = AB + BM$  y  $EF = CD - ND$ , de donde sumando estas dos igualdades y teniendo presente que  $BM = ND$ , por lo que pueden suprimirse en la suma, por tener signos contrarios, resultará:

$$2 EF = AB + CD,$$

$$\text{ó bien } EF = \frac{AB + CD}{2}, \text{ que era lo que se quería demostrar. (*)}$$

Es muy fácil demostrar el recíproco de este teorema, apoyándose en el postulado de Euclides.

**Escolio general sobre los cuadriláteros.** Las propiedades del trapecio las tiene el paralelogramo, porque éste satisface á la condicion de aquel de tener dos lados paralelos; las del trapecio y el paralelogramo las tiene el rombo y el rectángulo; las de todas las especies de cuadriláteros las

(\*) Hubiera sido más lógico, atendiendo á las diversas especies de cuadriláteros, comenzar por las propiedades del trapecio, siguiendo con las del paralelogramo, rombo, rectángulo y cuadrado, de no existir la dificultad de demostrar el teorema 1. antes de tener demostradas las propiedades de los paralelogramos.

posee el cuadrado que es trapecio, paralelogramo, rombo y rectángulo; porque satisface á las condiciones características de definicion que hemos dado (36) de estos cuadriláteros.

## CAPÍTULO IV.

### PROPIEDADES GENERALES DE LOS POLÍGONOS CONVEXOS.

#### TEOREMA LI.

*Todo polígono puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene menos dos.* (Fig. 64.)

Si desde el vértice A, por ejemplo, se trazan todas las diagonales posibles, vemos que cada uno de los triángulos extremos AFE y ABC en que el polígono queda dividido, abraza dos lados y uno solo cada

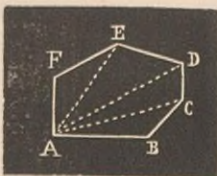


Fig. 64.

uno de los demás; luego si llamamos  $n$  al número de lados del polígono,  $n-2$  representará el número de triángulos en que quedará descompuesto.

38. Se llama *polígono regular* al que tiene todos sus lados y ángulos iguales. El triángulo equilátero y el cuadrado, son polígonos regulares.

#### TEOREMA LII.

*La suma de todos los ángulos de un polígono convexo, es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.*

Acabamos de demostrar que  $n-2$  es el número de triángulos en que puede descomponer un polígono, trazando todas las diagonales posibles desde un vértice. Es evidente que la suma de los ángulos de estos triángulos es igual á la de los ángulos del polígono (Fig. 64), pero los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, luego la suma

de todos los ángulos del polígono, será tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.

Si llamamos  $R$  el valor del ángulo recto, tendremos que esta suma estará expresada por  $2R(n-2) = 2Rn - 4R$ , siendo  $n$  el número de lados del polígono.

**Corolario.** *La suma de los ángulos de un polígono convexo es siempre un número par de ángulos rectos.* Esto se deduce inmediatamente de la fórmula  $2R(n-2)$ , que tiene por factor al  $2R$ .

**Escolio 1.º** Dando valores numéricos á  $n$  en la fórmula antedicha, se obtendrán los valores de la suma de los ángulos de cualquier polígono. Haciendo  $n=3$  y  $n=4$ , se determina el valor de la suma de los ángulos de un triángulo y de un cuadrilátero, cuya suma sabemos que es igual respectivamente á 2 y á 4 rectos.

**Escolio 2.º** Si el polígono es regular, como todos los ángulos son iguales, el valor de uno estará expresado por  $\frac{2R(n-2)}{n}$ , siendo  $n$  el número de lados.

### TEOREMA LIII.

*La suma de todos los ángulos externos que resultan prolongando en un mismo sentido los lados de un polígono convexo, es igual á cuatro rectos. (F. 65)*

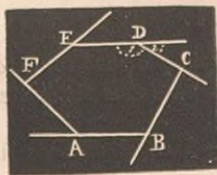


Fig. 65.

Al prolongar todos los lados, se vé que en cada vértice quedan formados dos ángulos, uno interno (el del polígono) y otro externo, cuya suma vale dos rectos. [*Teorema III*]. Por consiguiente, la suma de

todos los ángulos del polígono y la de los externos será  $2Rn$ , siendo  $R$  el valor de un recto y  $n$  el número de lados. Restando de esta suma la de los ángulos internos, tendremos por residuo el valor de los externos. Pero efec-



tuando la resta, vemos que

Suma de los ángulos  
del polígono.

$$2Rn - (2Rn - 4R) = 4R, \text{ suma de los ángulos externos.}$$

**Corolario.** Ningun polígono convexo puede tener más de tres ángulos agudos; pues si los tuviere, sus adyacentes externos serian obtusos y su suma valdria más de cuatro rectos, lo que es absurdo.

### TEOREMA LIV.

*El número total de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un polígono convexo de  $n$  lados, es igual á  $n-3$ . (Fig. 66.)*

En efecto, desde el vértice A, por ejemplo, pueden tirarse diagonales á todos los demás, ménos á los adyacentes B y F; luego el número será igual á  $n-3$ .

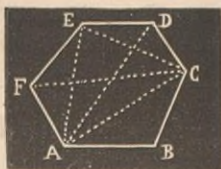


Fig. 66.

**Corolario.** El número total de diagonales posibles distintas que pueden trazarse en un polígono convexo, es igual á  $\frac{(n-3)n}{2}$  (Fig. 66.)

Segun el teorema, desde cada vértice se pueden trazar  $n-3$  diagonales, luego desde los  $n$  vértices del polígono de  $n$  lados, se podrán trazar  $n(n-3)$ . Pero observemos que así se trazará dos veces cada diagonal; porque si A C, por ejemplo, es una diagonal trazada desde el vértice A, al llegar al vértice C trazaremos la CA que evidentemente se confundirá con ella, y como lo mismo podemos decir de todas las demás, deducimos, en conclusion, que  $\frac{n(n-3)}{2}$  expresa el número de diagonales distintas que pueden trazarse en un polígono.

**Escolio.** Haciendo aplicacion de esta fórmula para el caso de  $n=3$ , es decir, para el triángulo, vemos que se re-

duce su valor á cero, esto es, que el triángulo no tiene diagonales, lo que por otra parte es evidente.

### TEOREMA LV.

**Dos poligonos se confunden, si sus vértices coinciden.**

Esta proposicion es casi evidente, pues coincidiendo los vértices se confundirán sus lados, ángulos, y la parte de plano circunscrita por los poligonos.

### COROLARIOS.

1.º *Dos poligonos regulares de un mismo número de lados son iguales cuando tienen un lado igual.*

2.º *Dos poligonos son iguales, si se componen del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

---

## LIBRO II.

### FIGURAS CIRCULARES Y SUS COMBINACIONES. CON LA LÍNEA RECTA.

---

## CAPÍTULO I.

### CUERDAS SECANTES Y TANGENTES.

39. Es evidente que dos circunferencias de igual radio son iguales (13), y por consiguiente que se pueden hacer coincidir, para lo que bastará que sus centros coincidan.

### TEOREMA LVI.

*Una recta no puede cortar á una circunferencia más que en dos puntos.*

Si admitiéramos por un momento que la recta cortase en tres puntos á la circunferencia, tirando radios á dichos tres puntos, tendríamos tres rectas iguales (13) trazadas desde un punto á una recta, lo que es absurdo. [Teor. XXXI.]

**Escolio.** La circunferencia es una línea convexa.

### TEOREMA LVII.

*El diámetro es mayor que cualquier otra cuerda.* (F. 67)

Trazando á las extremidades de la cuerda AB los radios AO y OB, tendremos que  $AO + OB > AB$  y como  $AO + OB = CD$ , tambien será  $CD > AB$ .

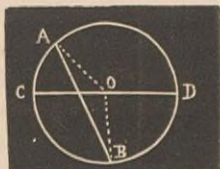


Fig. 67.

### TEOREMA LVIII.

*Por tres puntos que no estén en línea recta puede pasar una circunferencia y no puede pasar más que una.* (F. 68)

Uno los tres puntos A, B y C por medio de las rectas AB y BC, y en sus puntos medios levanto las dos perpendiculares DO y EO. El punto O de union de estas perpendiculares [Teoremas XV y XXXII], equidista de los puntos A, B y C: luego la circunferencia trazada desde O como centro y con un radio igual á OA pasará por los tres puntos dados.

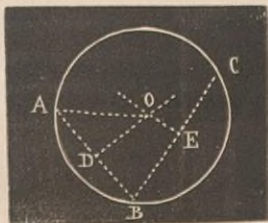


Fig. 68.

Ahora, cualquier otra circunferencia que pase por dichos tres puntos tendrá por centro O y por radio OA, luego se confundirá con ella. (39)

**Corolario.** Dos circunferencias no pueden cortarse más que en dos puntos, pues si se cortaran en tres se confundirían, según acabamos de demostrar.

**Escolio.** Hemos visto que tres puntos determinan la posición y magnitud de un círculo; pero es indispensable que no estén en línea recta; pues si estuviesen en línea



recta no podría pasar por ellos una circunferencia. [*Teorema LVI*].

### TEOREMA LIX.

*Todo diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales.* Pues si al doblar la figura por el diámetro no se superpusiesen las dos partes en que el círculo y la circunferencia quedan divididos, habria algun punto de ésta que distaria más del centro que otro, lo que es absurdo, segun la definicion de la circunferencia.

### TEOREMA LX.

*El radio ó diámetro perpendicular á una cuerda la divide en dos partes iguales asi como á los arcos que ella subtiende.* (Fig. 69)

Si consideramos doblada la figura por el diámetro CD,

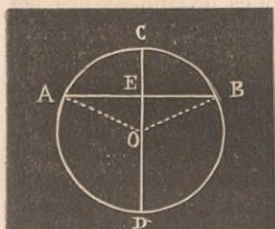


Fig. 69.

la recta EB seguirá la direccion EA por ser OE perpendicular á AB [*Teorema I*], y el punto A coincidirá con B [*Teorema LIX*]; luego

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recta } AE = \text{recta } EB \\ \text{Arco } AC = \text{arco } CB \\ \text{Arco } AD = \text{arco } BD \end{array} \right\} \text{por tener iguales extremos.}$$

**Escolio.** La recta CD satisface á las condiciones siguientes: 1.<sup>a</sup> Ser perpendicular á AB. 2.<sup>a</sup> Pasar por el centro del círculo. 3.<sup>a</sup> Dividir en dos partes iguales al arco ACB. 4.<sup>a</sup> Dividir en dos partes iguales al arco ADB. 5.<sup>a</sup> Dividir en dos partes iguales á la cuerda AB. Como dos de estas condiciones bastan para fijar la posicion de la recta CD, y las otras tres serian propiedades demostrables por ser ciertas y relacionarse todas entre sí; podrán establecerse tantos teoremas como combinaciones binarias pueden hacerse con cinco cosas, que por el álgebra se

sabe que son

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ teoremas distintos. (*)}$$

40. Se llama *tangente* á una circunferencia la recta que sólo tiene un punto comun con ella, cuyo punto es el de *contacto*; y se denomina *secante* una cuerda prolongada fuera de la circunferencia.

La tangente puede considerarse como el límite de una secante cuyos dos puntos de interseccion con la circunferencia se unen para constituir un elemento comun; porque si consideramos que la secante AB (Fig. 70) gira alrededor del punto de interseccion A en el sentido que la flecha indica, irá tomando las posiciones AB', AB'', AB''', &c., y su otro punto de interseccion variable irá tomando las posiciones a', a'', a''', &c., que se van aproximando al A; luego habrá una cierta posicion tal que los dos puntos se toquen, en cuyo caso la secante se convertirá en la tangente TT'.

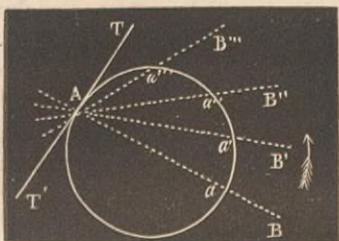


Fig. 70.

### TEOREMA LXI.

*La perpendicular al radio en el punto que éste corta á la circunferencia, es tangente á esta circunferencia. (Fig. 71)*

Siendo la OC perpendicular á la AB será la más corta distancia desde el punto O á la recta AB [Teorema XXIX], luego

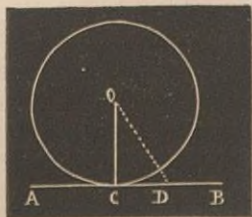


Fig. 71.

(\*) En los ejercicios que para uso de los alumnos ponemos al fin de la Geometría plana, van indicados los enunciados de algunos de estos diez teoremas.

otro punto cualquiera D tomado en ella, distará del centro mas de un radio, y por tanto estará fuera del círculo, luego la recta AB no tiene más que el punto C comun con la circunferencia, por lo que es tangente, siendo C el punto de contacto.

TEOREMA LXII. [Recíproco del anterior]

*La tangente á una circunferencia, es perpendicular al radio del punto de contacto.* (Fig 71)

Pues si AB es tangente en el punto C, éste punto distará ménos del centro que cualquier otro de la recta AB, por lo que el radio OC será la recta más corta que puede tirarse desde el centro á la recta AB, y por tanto, perpendicular á ella. [Teorema XXIX].

**Corolario.** *Por un punto de una circunferencia, no se puede tirar más que una sola tangente; porque por un punto de una recta no se puede trazar más que una sola perpendicular.* [Teorema I.]

**Escolio.** Se llama *normal* á una curva la perpendicular á la tangente en el punto de contacto. *En la circunferencia la normal es siempre el radio.*

TEOREMA LXIII.

*Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, son iguales.* (Fig. 72)

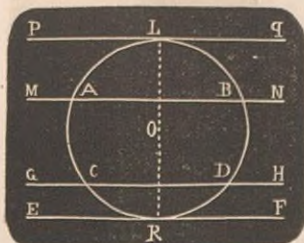


Fig. 72.

Pueden suceder tres casos: 1.º Que las rectas sean dos cuerdas. 2.º Que sean una cuerda y una tangente. 3.º Que sean dos tangentes.

1.º Si trazamos el diámetro perpendicular á una de dichas cuerdas MN, lo será á su paralela GH. Ahora, se-



gun el teorema LX, tendremos que

Arco  $AR = \text{arco } BR$  y arco  $CR = \text{arco } DR$ .  
De donde restando estas dos igualdades, arco  $AR - \text{arco } CR =$   
arco  $BR - \text{arco } DR$ , ó bien arco  $AC = \text{arco } BD$ .

2.º Si es paralela la cuerda  $MN$  á la tangente  $PQ$ , entonces siendo el diámetro perpendicular á la tangente en el punto de contacto  $L$  y á su paralela  $MN$  en el punto medio, se deduce inmediatamente [*Teorema LX*]

$$\text{arco } LA = \text{arco } LB.$$

3.º Si las rectas paralelas son dos tangentes  $PQ$  y  $EF$ , sus puntos de contacto estarán en las extremidades de un mismo diámetro [*Teorema IX*], y por tanto

$$\text{arco } LAR = \text{arco } LBR. \text{ [Teor. LIX]}$$

#### TEOREMA LXIV.

En un mismo círculo ó en círculos iguales: 1.º Si dos arcos son iguales, tambien lo son sus cuerdas. 2.º Si dos arcos son desiguales y menores que média circunferencia, á mayor arco corresponde mayor cuerda. (Fig. 73) (\*)

1.º Si el arco  $AB = \text{arco } CD$ , por el punto medio  $E$  del arco  $AC$  trazo el diámetro  $EF$  y considero doblada la figura por él. En este caso el punto  $C$  coincidirá con  $A$  (por la construcción) y el punto  $B$  con el  $D$ , por el supuesto, luego [*Axioma 5.º*]

$$\text{cuerda } AB = \text{cuerda } CD.$$

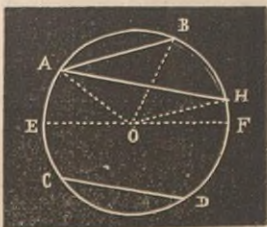


Fig. 73.

2.º Supongamos que arco  $AH > \text{arco } CD$ . A partir del punto  $A$  tomemos un arco  $AB = \text{arco } CD$ , en cuyo caso

(\*) Si los arcos están en círculos iguales, pueden hacerse coincidir dichos círculos.

cuerda  $AB = \text{cuerda } CD$ . Si trazamos los radios  $OA, OB$  y  $OH$ , los triángulos  $AOB$  y  $AOH$  tienen dos lados iguales por radios, pero el ángulo  $AOB < AOH$ , luego

$$\text{recta } AB = CD < \text{recta } AH \text{ [Teor. XXI.]}$$

### TEOREMA LXV. [Recíproco del anterior.]

En un mismo círculo ó en círculos iguales: 1.º *A cuerdas iguales, corresponden arcos iguales.* 2.º *A mayor cuerda, corresponde mayor arco.* (\*)

(Demostracion por la regla general del n.º 34.)

### TEOREMA LXVI.

En un mismo círculo ó en círculos iguales: 1.º *Dos cuerdas iguales, equidistan del centro.* 2.º *La mayor de dos cuerdas, dista menos del centro que la menor.* (Fig. 74)

1.º Sean las cuerdas  $AB = CD$ .

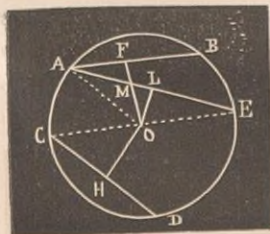


Fig. 74.

Trazo las perpendiculares ó distancias  $OF$  y  $OH$  desde el centro á cada una de ellas, y los radios  $OA$  y  $OC$ . Los dos triángulos rectángulos  $OFA$  y  $OCH$  son iguales, por tener las hipotenusas  $OA = OC$ , por radios, y los catetos  $AF = CH$ ,

por mitades de cuerdas iguales [Teorema LX]. Luego  
distancia  $OF = \text{distancia } OH$ .

2.º Supongamos que la cuerda  $AE > \text{cuerda } CD$ , y vamos á demostrar que  $OL < OH$ . Para ello trazamos á partir del punto  $A$  la cuerda  $AB = CD$ , que abrazará necesariamente un arco  $AB < \text{arco } AE$  [Teorema anterior] y

(\*) Si son arcos menores que la semi-circunferencia.

tendremos [1.<sup>er</sup> caso]  $OF=OH$ . Trazando ahora la perpendicular  $OL$  y señalando el punto  $M$  en que  $OF$  encuentra á la  $AB$ , resultará que  $OL < OM$  [*Teor. XXIX*], y  $OM < OF$  [*Axioma 2.<sup>o</sup>*], luego con mayor razon

distancia  $OL < distancia\ OF=OH$ .

TEOREMA LXVII. [*Recíproco del anterior*]

En un mismo círculo ó en círculos iguales: 1.<sup>o</sup> *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.* 2.<sup>o</sup> *La cuerda que ménos diste del centro, es la mayor.*

(Regla del n.<sup>o</sup> 34.)

**Escolio.** Las distancias desde el centro de un círculo á una cuerda están comprendidas entre cero y el radio. El diámetro que es la mayor cuerda no dista nada del centro; la tangente que es el límite de las cuerdas, pues se reduce á un elemento lineal, dista un radio.

---

## CAPÍTULO II.

CIRCUNFERENCIAS SECANTES, TANGENTES, EXTERIORES  
É INTERIORES ENTRE SÍ.

41. Se dice que dos circunferencias son *tangentes*, cuando tienen un sólo punto comun, que se llama *punto de contacto ó de tangencia*.

42. En dos circunferencias cualesquiera se llama *línea de los centros*, la recta que une los dos centros y por tanto que mide su distancia.

43. Dos circunferencias son *secantes*, cuando tienen dos puntos comunes, ó se cortan. Ya sabemos que no es posible tengan tres puntos comunes. [*Cor. del teor. LVIII.*]

---



### TEOREMA LXVIII.

*Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros. (F. 57)*

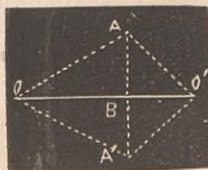


Fig. 75.

Supongamos por un momento que el punto A de tangencia estuviera fuera de la línea OO' de los centros de las dos circunferencias. En tal caso, trazando la perpendicular AB á la OO' y prolongándola una cantidad  $BA' = BA$ , tendremos que  $OA = OA'$  y  $O'A = O'A'$ , por oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular. Luego si A es un punto de una de las dos circunferencias, también lo será A'; y por tanto A' es punto común de ambas circunferencias, que en tal caso serán secantes (43) contra la hipótesis, lo que es absurdo; luego el punto de contacto está en la línea de los centros.

### TEOREMA LXIX.

*Si dos circunferencias son secantes, la línea de los centros es perpendicular á la cuerda común y la divide en dos partes iguales.*

En efecto, los dos puntos de intersección ó sean los extremos de la cuerda, equidistan de los dos centros; luego &c. [Teor. XXXIV.]

### TEOREMA LXX.

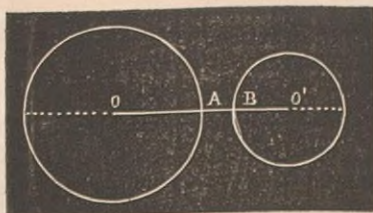


Fig. 76.

*Si dos circunferencias son exteriores la una á la otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de sus radios. (Fig. 76.)*

En efecto, la rec-

ta  $OO' = OA + O'B + AB$ , luego  $OO' > OA + O'B$ , ó bien llamando  $D$  á la distancia de los centros,  $R$  al radio de una de las circunferencias y  $r$  al de la otra,  $D > R + r$ .

### TEOREMA LXXI.

*Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de sus radios. (Fig. 77)*

Estando el punto de contacto en la línea de los centros [Teorema LXVII], es evidente que

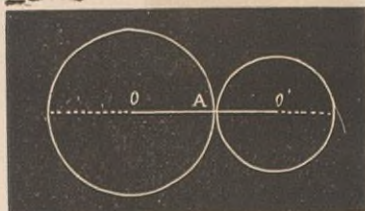


Fig. 77.

$$AO + AO' = OO', \text{ ó bien, } D = R + r.$$

### TEOREMA LXXII.

*Si dos circunferencias se cortan, la distancia de sus centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia. (Fig. 78)*

Uniendo los centros con uno de los puntos de contacto (que están necesariamente fuera de la línea de los centros) quedará formado el

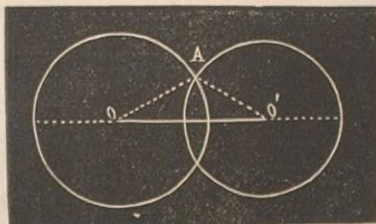


Fig. 78.

triángulo  $OA O'$  en el que tendremos [Teorema XVI],  $OO' < OA + O'A$  y  $OO' > OA - O'A$ , ó bien  $D < R + r$  y  $D > R - r$ .

### TEOREMA LXXIII.

*Si dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de sus centros es igual á la diferencia de sus radios. (Fig. 79)*

En efecto, es evidente que

$$OO' = OA - O'A, \text{ ó bien, } D = R - r.$$

**Escolio.** Si los radios fueran iguales, entonces los dos centros coincidirían, lo que demuestra la fórmula hallada, pues si  $R = r$ , se hace en ella  $D = 0$ .

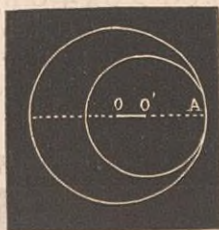


Fig. 79.

#### TEOREMA LXXIV.

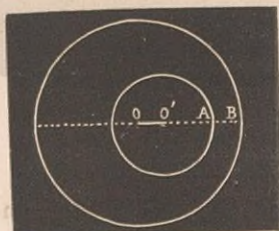


Fig. 80.

*Si dos circunferencias son interiores la una á la otra, la distancia de sus centros es menor que la diferencia de sus radios. (Fig. 80)*

Tenemos, en efecto, que prolongada la línea  $OO'$  de los centros hasta  $B$ , resultará que

$$OO' = OB - O'A - AB,$$

$$\text{Luego } OO' < OB - O'A (*), \text{ y por tanto, } D < R - r.$$

**Escolio general.** Dos circunferencias que están en un mismo plano no pueden tener más posiciones relativas que las que se enuncian en los cinco últimos teoremas.

Los recíprocos de estos cinco teoremas son ciertos y se demuestran por la regla del n.º 34. Como ejemplo, vamos á demostrar el siguiente:

#### TEOREMA LXXV. [Recíproco del LXX.]

*Si la distancia de los centros de dos circunferencias es mayor que la suma de sus radios, dichas circunferencias son exteriores la una á la otra.*

(\*) Porque al segundo miembro de la igualdad se le ha aumentado  $AB$ , sin aumentarlo al primero.



En efecto, si no fueran exteriores no podrian tener más que las posiciones relativas siguientes:

1.<sup>a</sup> *Tangentes exteriores*; pero entonces  $D=R+r$ , lo que es contrario á la suposicion.

2.<sup>a</sup> *Secantes*; en tal caso  $\left. \begin{matrix} D < R+r \\ D > R-r \end{matrix} \right\}$ ; absurdo, por contrario á la hipótesis.

3.<sup>a</sup> *Tangentes interiores*; entonces  $D=R-r$ ; absurdo por igual razon.

4.<sup>a</sup> *Interior la una á la otra*; en tal caso  $D < R-r$ ; id. id.

Siendo absurdo suponer cualquiera de las cuatro posiciones antedichas, porque las conclusiones que se deducen se oponen á la hipótesis, las circunferencias tienen que ser exteriores la una á la otra.

Del mismo modo se demuestran los otros cuatro reciprocos, que abreviadamente pueden enunciarse.

Si  $\left\{ \begin{array}{l} D=R+r, \text{ las circunferencias son tangentes exteriormente.} \\ D < R+r \text{ y } D > R-r, \text{ las circunferencias son secantes.} \\ D=R-r, \text{ las circunferencias son tangentes interiormente.} \\ D < R-r, \text{ las circunferencias son interiores.} \end{array} \right.$

### CAPÍTULO III.

#### MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

44. Se llama *arco correspondiente* á un ángulo el trazado desde el vértice como centro y con un radio cualquiera. El ángulo, en este caso, se denomina *central* ó *ángulo en el centro*, porque su vértice se halla en el centro de la circunferencia á que su arco correspondiente pertenece.

#### TEOREMA LXXVI.

1.<sup>o</sup> *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes descritos con igual radio son iguales.* 2.<sup>o</sup> *Si dos án-*

gulos son desiguales, el mayor tiene mayor arco correspondiente descrito con igual radio. (Fig. 81.)

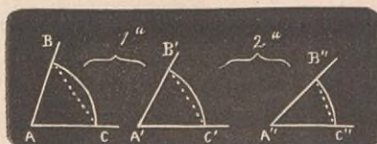


Fig. 81.

1.º Si los dos ángulos  $BAC$  y  $B'A'C'$  son iguales, trazando las cuerdas  $BC$  y  $B'C'$ , los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$

son iguales [Teor. XIX], por consiguiente

cuerda  $BC =$  cuerda  $B'C'$  y por tanto [Teor. LXV]

arco  $BC =$  arco  $B'C'$ . (\*)

2.º Si ángulo  $B'A'C' >$  ángulo  $B''A''C''$  en los dos triángulos  $A'B'C'$  y  $A''B''C''$  tendremos [Teor. XX],

cuerda  $B'C' >$  cuerda  $B''C''$  y por tanto [Teor. LXV]

arco  $B'C' >$  arco  $B''C''$ .

### TEOREMA LXXVII. [Recíproco del anterior]

1.º Si dos arcos correspondientes son iguales, los ángulos también lo son. 2.º Si dos arcos correspondientes son desiguales, al mayor corresponde mayor ángulo. (\*\*)

(Regla del n.º 34.)

### TEOREMA LXXVIII.

Dos ángulos son directamente proporcionales á sus ar-

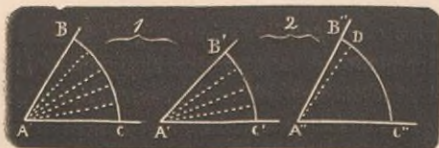


Fig. 82.

cos correspondientes descritos con igual radio. (Fig. 82)

Pueden suceder dos ca-

(\*) Como se habrá podido observar en varios casos, para mayor claridad ponemos la conclusion con distinto carácter de letra, lo que nos ahorra el tener que repetir la frase de: *que era lo que se queria demostrar* tan usada en geometria.

(\*\*) Se supone que han de estar trazados con igual radio.

esos 1.º Que los arcos sean comensurables. 2.º Que sean incommensurables. (\*)

1.º Si los dos arcos  $BC$  y  $B'C'$  son comensurables, tendrán una medida comun, es decir, que habrá otro arco de igual radio que esté contenido un número exacto de veces en  $BC$  y  $B'C'$ : supongamos que la comun medida está contenida cinco veces en el arco  $BC$ , y cuatro veces en el  $B'C'$ . Tirando radios por los puntos de division, el ángulo  $A$  quedará dividido en cinco ángulos iguales, y el  $A'$  en cuatro ángulos tambien iguales [*Teorema anterior*]; luego podremos establecer las siguientes proporciones:

$$\text{Arco } BC : \text{arco } B'C' :: 5 : 4$$

$$\text{ángulo } BAC : \text{ángulo } B'A'C' :: 5 : 4$$

De donde ángulo  $BAC : \text{ángulo } B'A'C' :: \text{arco } BC : \text{arco } B'C'$ .

2.º Si los ángulos  $B'C'$  y  $B''C''$  son incommensurables, dividamos al  $B'C'$  en partes iguales y llevemos una de estas partes sobre el  $B''C''$  hasta donde sea posible. Sea  $D$  el último punto de division. Los arcos  $B'C'$  y  $DC''$  son comensurables, y por tanto, segun acabamos de demostrar tenemos que

$$\text{ángulo } B'A'C' : \text{ángulo } DA''C'' :: \text{arco } B'C' : \text{arco } DC'',$$

$$\text{ó bien, } \frac{\text{ángulo } B'A'C'}{\text{ángulo } DA''C''} = \frac{\text{arco } B'C'}{\text{arco } DC''}$$

Ahora el punto  $D$  puede aproximarse al  $B''$  todo cuanto se quiera, siendo cada vez menores las divisiones del arco  $B'C'$ , pues dicho residuo tiene siempre que ser me-

(\*) Sabemos que dos cantidades de una misma naturaleza son *comensurables*, cuando tienen una *comun medida*, esto es, cuando hay otra tercer cantidad de igual naturaleza que ellas, que está contenida en las dos un número exacto de veces; y dos cantidades son *incommensurables*, cuando no tienen *medida comun*. La *razon* entre dos cantidades comensurables, es un número comensurable, y la de dos cantidades incommensurables, es incommensurable tambien.



nor que una de estas partes ó divisiones. Por consiguiente el *límite* (\*) de la cantidad variable  $\frac{B'A'C'}{DA''C''}$  es  $\frac{B'A'C'}{B''A''C''}$

y el límite de la cantidad variable  $\frac{B'C'}{DC''}$  es  $\frac{B'C'}{B''C''}$ ; pero estas cantidades variables son *constantemente iguales* (cualquiera que sea la aproximación del punto D al punto B''); luego sus límites son iguales. De manera que

$$\frac{B'A'C'}{B''A''C''} = \frac{B'C'}{B''C''}, \text{ como límites de variables constantemente iguales;}$$

y poniendo esta igualdad en forma de proporción resulta finalmente

$$\text{ángulo } B'A'C' : \text{ángulo } B''A''C'' :: \text{arco } B'C' : \text{arco } B''C''.$$

### TEOREMA LXXIX.

*El arco correspondiente á un ángulo recto, es un cuadrante.* (Fig. 83)

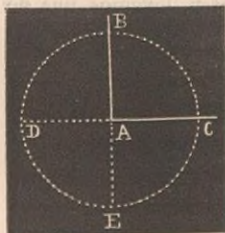


Fig. 83.

Sea el ángulo recto BAC.

Si trazamos, desde su vértice como centro, una circunferencia con un radio cualquiera, y prolongamos sus lados AC y AB, en los sentidos opuestos AD y AE, resultarán cuatro ángulos en A todos rectos, y por consiguiente

iguales, cuyos arcos correspondientes serán iguales [Teorema LXXVI]. Luego

$$\text{arco } EC = \text{arco } ED = \text{arco } DB = \text{arco } BC = \text{un cuadrante.}$$

(\*) *Límite* de una cantidad variable es otra *constante*, á la cual puede aproximarse en ménos de cualquier cantidad, por pequeña que esta sea.

*Cuando dos cantidades variables son constantemente iguales, sus límites son iguales.*

En efecto, supongamos que *a* y *b* son dos cantidades variables, pero de tal naturaleza, que en todos sus estados de magnitud se

**Escolio.** Se puede enunciar esta proposicion: *dos diámetros perpendiculares entre sí, dividen á la circunferencia en cuatro partes iguales.*

### TEOREMA LXXX.

*La medida de un ángulo central, es la de su arco correspondiente. (\*)*

En efecto, sea  $A$  un ángulo cualquiera y  $A'$  el ángulo que se toma por unidad de medida. Llamemos  $a$  y  $a'$  los arcos correspondientes á estos dos ángulos respectivamente; tendremos que [Teorema LXXVIII]

$$\text{ángulo } A : \text{ángulo } A' :: \text{arco } a : \text{arco } a'.$$

Pero si  $A'$  se toma por unidad: ángulo  $A : 1 :: \text{arco } a : \text{arco } a'$ ,

$$\text{ó bien, medida del ángulo } A = \frac{\text{arco } a}{\text{arco } a'}.$$

Si el arco  $a'$  se toma como unidad, entonces

$$\text{ángulo } A = \text{arco } a.$$

Lo que quiere decir que el número abstracto que representa las veces que el ángulo unidad está contenido en el ángulo  $A$ , es igual al número de veces que el arco unidad (que en este caso es el arco correspondiente al ángulo unidad) esté contenido en el arco  $a$ .

**Escolio.** La unidad de ángulo que se toma general-

verifica que  $a=b$ . Sean  $A$  y  $B$  los límites respectivos de  $a$  y  $b$ , es decir, las cantidades constantes ó fijas á las que las variables se aproximan indefinidamente, de tal manera que sus diferencias puedan llegar á ser menores que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea, pero sin que rigurosamente estas diferencias se anulen. Siempre se podrá asignar á la cantidad  $a$ , y por consiguiente á  $b$  (que es igual á ella), un valor tal que se diferencie de  $A$  en una cantidad tan pequeña como se quiera; luego  $A$  es también límite de  $b$ ; por consiguiente,  $A=B$ ; pues de otro modo una misma cantidad tendría dos límites diferentes, lo que es absurdo.

(\*) Sabemos que medir una cantidad es compararla con otra de su misma especie que se toma por unidad.

mente es el ángulo recto, y por consiguiente la unidad de arco es el cuadrante.

**Nota.** Para facilitar la medida de los arcos, se supone la circunferencia dividida en 360 partes iguales llamadas **grados**, cada grado en 60 partes iguales llamadas **minutos**, cada uno de estos en 60 partes ó **segundos**, y cada segundo en 60 **terceros**, &c. Esta es la division *sexagesimal*. De aquí se deduce, que el cuadrante comprende

$$90 \text{ grados} = 90 \times 60 \text{ minutos} = 90 \times 60 \times 60 \text{ segundos, \&c.}$$

Los grados, minutos y segundos se indican respectivamente por los signos °, ', ". De manera, que un arco de 27 grados, 38 minutos y 14 segundos, se expresará: 27° 38' 14". Los ángulos se expresan por el valor ó medida de su arco correspondiente. Así que un ángulo de 49° 12' 52" quiere decir que su arco correspondiente tiene esta medida.

Tambien se divide la circunferencia *centesimalmente* en 400 grados (el cuadrante en 100 grados), el grado en 100 minutos centesimales, el mismo en 100 segundos. Para expresar esta division centesimal se usa de la inicial *g* para los grados y los minutos y segundos lo mismo que en la division sexagesimal. De modo que 49 grados 15 minutos 18 segundos centesimales = 49° 15' 18", que segun la ley de los números decimales se pueden tambien escribir 49°, 1518.

Es evidente que la relacion entre un grado centesimal y un sexagesimal es  $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$ :

45. Dos arcos cuya suma es igual á media circunferencia son *suplementarios*, ó suplemento uno de otro (22). Dos arcos cuya suma es igual á un cuadrante son *complementarios*, ó complemento uno de otro (21). Estas definiciones están fundadas en las de sus correspondientes ángulos:

46. Todo ángulo cuyo vértice no está en el centro se



llama *excéntrico*, y si dicho vértice está en la circunferencia y sus lados son cuerdas se denomina *inscripto*.

### TEOREMA LXXXI.

*Todo ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.* (Fig. 84.)

Pueden suceder tres casos: 1.º Que uno de los lados del ángulo inscripto pase por el centro (que sea un diámetro): ángulo BAC. 2.º Que el centro se halle comprendido entre los lados: ángulo BAE. 3.º Que el centro esté fuera del ángulo como en el DAB.

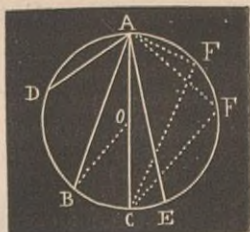


Fig. 84.

1.º Trazando el radio OB, tendremos que el ángulo BOC es igual á la suma de los ángulos A y B del triángulo BOA [Teor. XVII, cor. 1.º]; pero en este triángulo los lados AO y BO son iguales por radios, luego los ángulos A y B también son iguales. [Teor. XXV]. Por tanto el ángulo inscripto  $BAC = \frac{1}{2}$  ángulo en el centro BOC; pero BOC tiene por medida el arco BC, luego finalmente medida del ángulo inscripto  $BAC = \frac{1}{2} BC$ , arco comprendido entre sus lados.

2.º Sea el ángulo BAE. Si trazamos el diámetro AC, tendremos evidentemente

$$\text{ángulo } BAE = \text{ángulo } BAC + \text{ángulo } CAE.$$

Pero las medidas de los ángulos BAC y CAE, según acabamos de demostrar son respectivamente las mitades de los arcos BC y CE, luego por último

$$\text{medida del ángulo inscripto } BAE = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} CE = \frac{1}{2} BE.$$

3.º Si el ángulo es  $\text{DAB}$ , trazando el diámetro  $\text{AC}$  tendremos:

$$\text{ángulo DAB} = \text{ángulo DAC} - \text{ángulo BAC},$$

y por consiguiente

$$\text{medida del ángulo DAB} = \frac{1}{2}\text{DC} - \frac{1}{2}\text{BC} = \frac{1}{2}\text{DB}, \text{ arco comprendido entre sus lados.}$$

### COROLARIOS.

1.º *Todos los ángulos inscriptos cuyos extremos se apoyan sobre una misma cuerda y sus vértices están hacia un mismo lado de ella, son iguales.* Porque comprenden un mismo arco entre sus lados.

2.º *Todos los ángulos inscriptos que abrazan una semicircunferencia son rectos.* Porque tienen por medida un cuadrante. Tales son el  $\text{AFC}$  y el  $\text{AF'C}$ . (Fig. 84)

### TEOREMA LXXXII.



Fig. 85.

*La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda, es la mitad del arco comprendido entre sus lados.* (Fig. 85)

Pueden ocurrir tres casos: 1.º Que el centro esté en la cuerda ángulo  $\text{TAC}$ . 2.º Que el centro esté entre los lados del ángulo, como en el  $\text{TAD}$ . 3.º Que el

centro esté fuera del ángulo, como en el ángulo  $\text{TAB}$ .

1.º El ángulo  $\text{TAC}$  formado por la tangente  $\text{TA}$  y el diámetro  $\text{AC}$  es recto [Teor. LXII]; luego tendrá por medida un cuadrante [Teor. LXXIX], que es la mitad del arco  $\text{ABC}$  (semicircunferencia) comprendido entre sus lados.

2.º El ángulo  $\text{TAD}$ , se compone de los ángulos  $\text{TAC}$  y  $\text{CAD}$ , pero la medida del

ángulo  $TAC = \frac{1}{2}$  arco  $ABC$ , según acabamos de demostrar.  
Medida id.  $CAD = \frac{1}{2}$  arco  $CD$ , por inscripto [Teor. ant.] Luego

medida del ángulo  $TAD = \frac{1}{2} ABC + \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} ABCD$ ,  
arco comprendido.

3.º Sea el ángulo  $TAB = \text{ángulo } TAC - \text{ángulo } BAC$ .

Medida del ángulo  $TAC = \frac{1}{2}$  arco  $ABC$ .

Id. id.  $BAC = \frac{1}{2}$  arco  $BC$ , por inscripto. Luego

medida del ángulo  $TAB = \frac{1}{2} ABC - \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB$ ,  
arco comprendido.

### TEOREMA LXXXIII.

*La medida de un ángulo formado por dos cuerdas, es la semi-suma de los arcos comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de ellos.* (F. 86)

Sea el ángulo  $ABC$ . Trazo la cuerda  $EC$ , y tendremos que el ángulo propuesto es igual á la suma de los ángulos  $E$  y  $C$ , [Teorema XVII, corolario 1.º]

Estos como inscriptos tienen por medida la mitad de los arcos comprendidos entre sus lados. Luego

medida del ángulo  $ABC = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} DE$ , arcos comprendidos.

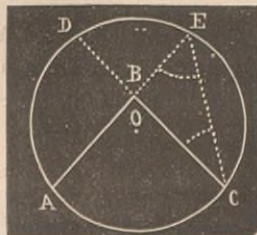


Fig. 86.

### TEOREMA LXXXIV.

*La medida del ángulo cuyo vértice está fuera del círculo, es igual á la semi-diferencia de los ángulos comprendidos entre sus lados.* (Fig. 87)

Pueden suceder tres casos: 1.º Que los lados sean dos secantes. 2.º Que sean una secante y una tangente. 3.º Dos tangentes.

1.º Sea el ángulo en  $A$  formado por dos secantes. Tra-



zo la cuerda DC, y tendremos que [Teor. XVII, cor. 1.º]

$$\text{ángulo DCE} = \text{ángulo A} + \text{ángulo D}.$$

ó bien ángulo A = ángulo DCE — ángulo D (que son inscriptos)

Por consiguiente

$$\text{ángulo A} = \frac{1}{2} \text{DE} - \frac{1}{2} \text{BC} \text{ (arcos comprendidos por sus lados.)}$$

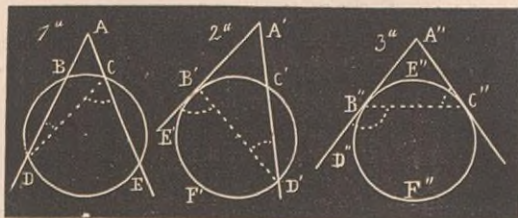


Fig. 87.

2.º Sea el ángulo A' formado por la tangente A'B' y la secante A'D'. Trazo la cuerda B'D', y tendremos que

$$\text{ángulo E'B'D'} = \text{ángulo A'} + \text{ángulo D'},$$

y por consiguiente,

$$\text{ángulo A'} = \text{ángulo E'B'D'} - \text{D'}.$$

Poniendo en vez de estos ángulos sus medidas, resultará que

$$\text{medida de ángulo A'} = \frac{1}{2} \text{B'D'} - \frac{1}{2} \text{B'C'} \text{ (arcos comprendidos por sus lados.)}$$

3.º Si el ángulo está formado por dos tangentes como el A'', tirando la cuerda B''C'', resultará que el ángulo D''B''C'' = ángulo A'' + ángulo C'', por tanto,

$$\text{ángulo A''} = \text{ángulo D''B''C''} - \text{ángulo C''}.$$

$$\text{y medida ángulo A''} = \frac{1}{2} \text{B''F''C''} - \frac{1}{2} \text{B''E''C''} \text{ (arcos comprendidos por los lados.)}$$

**Escolio general de los ángulos excéntricos.** El ángulo formado por una tangente y una cuerda se llama del *segmento* ó *semi-inscripto*, el que tiene su vértice dentro del círculo y formado por dos cuerdas se llama *interior*; *exte-*

riores se llaman los ángulos cuyos vértices están fuera del círculo, y si están formados por dos tangentes se denominan *circunscriptos*.

## CAPÍTULO IV.

### POLÍGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

47. Se dice que un polígono está *inscripto* en un círculo, cuando todos sus vértices están en la circunferencia, y por consiguiente sus lados son cuerdas y sus ángulos están inscriptos. En este caso la circunferencia está *circunscripta* al polígono.

48. Un polígono está *circunscripto* á un círculo, cuando sus lados son tangentes, y en tal caso el círculo está inscripto en el polígono.

### TEOREMA LXXXV.

*Todo triángulo, puede inscribirse y circunscribirse á un círculo.*

(Fig. 88.)

1.º Sea el triángulo ABC, si tiramos las perpendiculares DO y EO por

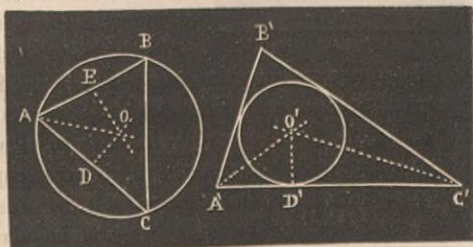


Fig. 88.

los puntos medios de los lados AC y AB, sabemos que el punto O en que se encuentran, equidista de los vértices A, B y C del triángulo [Teor. XXXV]; luego si desde el punto O con un radio igual á OA se traza una circunferencia, esta pasará por B y C, y por tanto el triángulo quedará inscripto en el círculo.

2.º Si en el triángulo  $A'B'C'$ , trazamos las dos bisectrices  $A'O'$  y  $C'O'$  estas se encontrarán en un punto  $O'$  equidistante de los tres lados del triángulo [*Teorema XXXIX*], luego si desde  $O'$  con un radio igual á la perpendicular  $O'D'$ , se traza una circunferencia, los tres lados del triángulo serán tangentes á ella.

**Escolio.** Si el triángulo es equilátero, los centros de las dos circunferencias se confunden, lo que se expresa diciendo que las circunferencias son *concéntricas*.

### TEOREMA LXXXVI.

*Todo polígono regular (39) puede inscribirse y puede circunscribirse á un círculo.*

(Fig. 89.)

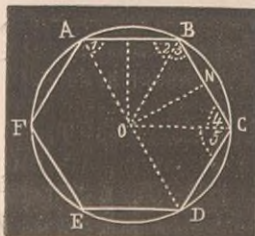


Fig. 89.

1.º Por los tres vértices, A, B y C, del polígono, siempre es posible hacer pasar una circunferencia [*Teor. LVIII*]. Ahora vamos á demostrar que esta circunferencia pasa por los otros vértices del polígono regular,

con lo que quedará demostrado que el polígono puede inscribirse. En efecto, tirando los radios  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  y la recta  $OD$ , tendremos que los dos triángulos  $OAB$  y  $OBC$  son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales: y como son isósceles y además los ángulos en el centro  $O$  son iguales, por ser iguales los arcos que comprenden sus lados; deducimos que

$$\text{ángulo } 1 = \text{ángulo } 2 = \text{ángulo } 3 = \text{ángulo } 4,$$

lo que quiere decir que cada uno de ellos es mitad de un ángulo del polígono regular.

Pero entonces los triángulos  $OBC$  y  $OCD$  son iguales [*Teor. XIX*] por tener el lado  $OC$  comun, el lado  $BC =$



CD, por hipótesis, y ángulo 4 = ángulo 5, por mitades del ángulo C. Por tanto, la recta  $OD = CO =$  radio, y la circunferencia pasa por el punto D. Se demostraría de un modo semejante que la circunferencia pasa por E, y por todos los demás vértices del polígono.

2.º Siendo iguales los triángulos OAB, OBC, OCD.... las perpendiculares bajadas desde el punto O á los lados son tambien iguales; luego trazando desde el centro O con un radio ON, igual á una de ellas, una circunferencia, los lados del polígono serán tangentes, y por tante el polígono quedará circunscripto.

**Escolio.** El punto O se llama *centro* del polígono regular. Los radios OA, OB... del círculo circunscripto, *radios del polígono regular*, y los radios del círculo inscripto tal como el ON, *apotegmas del polígono*. La diferencia entre el radio y la apotegma del polígono se llama *sagita* ó *flecha*. Los radios del polígono regular son bisectrices de los ángulos del polígono, y las apotegmas son perpendiculares á los lados y dividen á estos en partes iguales. Siendo iguales todos los ángulos en el centro formados por los radios del polígono [*Teor. LXXVII*], é igual á cuatro rectos su suma [*Teor. III, cor. 2.º*], es evidente que el valor de un ángulo en el centro de un polígono regular de  $n$  número de lados, es  $\frac{4}{n}$ .

## TEOREMA LXXXVII.

*Si se divide una circunferencia en tres ó más arcos iguales, 1.º Las cuerdas de dichos arcos formarán un polígono regular inscripto. 2.º Las tangentes tiradas por los puntos de division, formarán un polígono regular circunscripto. (Fig. 90)*

1.º El polígono ABCDEF evidentemente está inscripto: además sus lados son iguales [*Teor. LXIV, 1.º*] y todos sus ángulos tambien. [*Teor. LXXI, cor. 1.º*] luego, &c.

2.º El polígono  $A'B'C'D'E'F'$  se halla circunscripto al círculo, toda vez que sus lados son tangentes. Ahora tirando las cuerdas por los puntos de tangencia, todos

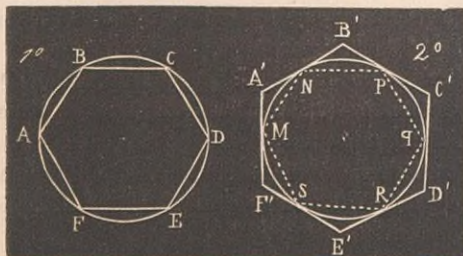


Fig. 90.

los triángulos  $MA'N$ ,  $NB'P$ ,  $PC'Q$ .... son iguales por tener un lado igual ( $MN=NP=PQ$ ....) y los ángulos adyacentes iguales [Teorema LXXXIII] por tener igual medida. De la igualdad de los triángulos resulta

$$A'N + NB' = B'P + PC' = C'Q + QC' \dots$$

$$\text{ó bien, } A'B' = B'C' = C'D' = D'E'.$$

$$\text{ángulo } A' = \text{ángulo } B' = \text{ángulo } C' = \text{ángulo } D' \dots$$

Luego el polígono es circunscripto y regular (48 y 38)

**Corolario.** Dividiendo en dos partes iguales los arcos comprendidos entre los vértices ó los puntos de tangencia (respectivamente) de un polígono regular inscripto ó circunscripto á un círculo; resulta un polígono regular inscripto ó circunscripto, (respectivamente) de duplo número de lados que el propuesto.

Esta es una consecuencia inmediata del teorema; pues que la circunferencia quedará dividida en doble número de partes iguales, y por los puntos de division se habrán trazado cuerdas ó tangentes.

### TEOREMA LXXXVIII.

*Si por los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto á un círculo se tra-*

zan tangentes: 1.º Estas formarán un polígono regular circunscripto de igual número de lados que el inscripto. 2.º Cada dos vértices correspondientes de los dos polígonos y el centro estarán en línea recta. (Fig. 91.)

1.º El polígono que resulta es circunscripto, porque está formado por tangentes, y es regular y de igual número de lados que el propuesto, porque estas se hallan trazadas por puntos que dividen á la circunferencia en tantas partes iguales como lados tiene el polígono inscripto.

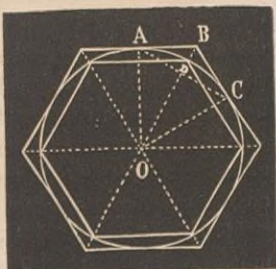


Fig. 91.

2.º Trazando la cuerda AC que une dos puntos consecutivos de tangencia del polígono circunscripto; tendremos que la recta OB tiene el punto O equidistante de A y de C, y lo mismo el punto B, luego [Teor. XXXIV] dicha recta OB es perpendicular á la AC y la divide en dos partes iguales; pero entonces [Teor. LX] pasará por D, punto medio del arco ADC, y por consiguiente los dos vértices B y D correspondientes y el centro están en una misma línea recta. La misma demostracion se puede dar para otros vértices correspondientes de los dos polígonos.

## LIBRO III.

PROBLEMAS CORRESPONDIENTES Á ESTA SECCION.

### CAPÍTULO I.

DEFINICIONES PRELIMINARES.

49. Se denomina problema una cuestion que tiene por objeto el determinar una ó más cosas desconocidas, lla-



mas *incógnitas*, por medio de las relaciones de estas con otras que se suponen ó son conocidas y que se llaman *datos*.

50. En *Geometría* pueden ocurrir dos clases de problemas. Unos se refieren á las propiedades de las figuras y se denominan *gráficos*; porque se reducen á construir mediante relaciones conocidas (que no son otras que las propiedades demostradas en los teoremas), ciertos puntos, líneas ó figuras: otros se refieren á la extension geométrica y se llaman *numéricos*, porque mediante relaciones conocidas de magnitud, se determinan numéricamente las incógnitas del problema.

51. *Resolver un problema* es determinar gráfica ó numéricamente (segun los casos) la incógnita ó incógnitas. Un mismo problema puede resolverse por varios medios y la *elegancia* consiste en elegir el más sencillo.

52. En general dos procedimientos se emplean para resolver los problemas geométricos: el *sintético* y el *analítico*.

En el primero se dan las reglas prácticas para resolver la cuestion, y despues se demuestra que el resultado satisface á las condiciones del problema.

En el método analítico se procede de un modo inverso; es decir, se supone resuelto el problema, construyendo mal ó bien, una figura que se supone satisfacer á las condiciones del enunciado, y analizando las relaciones que ligan á las cantidades geométricas, se trata de descubrir la verdadera solucion del problema. Es claro, que para completar esta, se necesita hacer la construccion verdadera.

53. Despues de resuelto un problema, puede hacerse la *discusion* de él; esto es, examinar las circunstancias variables de la cuestion. El problema puede ser *determinado*, *indeterminado* ó *imposible*, segun que tenga un número *limitado* de soluciones (valores ó posiciones de la incógnita), un número *ilimitado*, ó *ningun valor*, ó *solucion posible*.

54. En todo rigor cada problema es susceptible de análisis, síntesis y discusión; pero el carácter elemental de esta obra y la sencillez de los problemas más elementales, nos dispensan de extendernos sobre estos puntos, y solamente por vía de ejemplo, haremos el análisis, la síntesis y la discusión de algunos de los que ponemos en este libro.

55. El número de problemas geométricos es indefinido, pero sólo nos ocuparemos de los de más comun uso y que se hallan íntimamente relacionados con los teoremas demostrados.

56. Todos los problemas gráficos de la geometría elemental se resuelven con la regla y el compás. (\*) La imperfección que necesariamente tienen estos instrumentos, hace que las construcciones geométricas no alcancen la exactitud de las relaciones puramente teóricas ó especulativas, demostradas por el raciocinio.

## CAPÍTULO II.

### FIGURAS RECTILÍNEAS.

#### PROBLEMA I. (\*\*)

*En un punto de una recta indefinida, levantar una perpendicular á dicha recta. (Fig. 92)*

**Método sintético.**—Desde el punto dado A tomemos con el compás dos distancias iguales AB y AC. Desde los puntos B y C como centros y con un mismo radio mayor que AC descri-

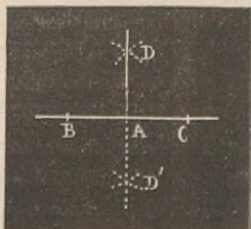


Fig. 90.

(\*) Prescindimos de la descripción de estos instrumentos por ser vulgarmente conocidos.

(\*\*) En el enunciado de todo problema entran dos términos distin-

bamos dos circunferencias. Unamos el punto D en que se cortan con A, y DA será la perpendicular pedida. En efecto, los puntos A y D equidistan de B y C, luego [Teor. XXXIV] la recta DA es perpendicular á la BC.

Las dos circunferencias descritas desde los puntos B y C se cortan necesariamente [Recíp. del teor. LXXII], y por el otro punto comun D', pasará la perpendicular [Teorema XXXIII], lo que sirve de comprobacion en la práctica.

**Método analítico.**—Supongamos trazada la perpendicular DA á la recta dada en el punto A, todo punto de esta perpendicular equidistará de los puntos B y C tomados á igual distancia del punto A [Teor. XXXIII]. Luego si con una misma abertura de compás haciendo centro en A tomamos las distancias iguales AC y BA, y desde los puntos B y C con iguales radios, mayores que AC, trazamos dos circunferencias, los puntos en que estas se encuentren serán puntos de la perpendicular, y por tanto uniendo uno de ellos D con A, quedará trazada dicha perpendicular. El punto D en que tambien se encuentran las dos circunferencias descritas pertenece á la perpendicular.

**Discusion.**—El problema es siempre posible, pues la construccion indicada siempre se puede realizar. La solucion es única, porque en un punto de una recta no se puede levantar más que una perpendicular. (\*)

## PROBLEMA II.

*Desde un punto situado fuera de una recta, trazar una perpendicular á esta recta. (Fig. 93)*

Tracemos desde el punto A un arco de circunferencia

---

tos, que se llaman *propuesta* y *solucion*; la propuesta y la solucion de los problemas de este libro llevarán distinto carácter de letra.

(\*) Hemos querido resolver este problema por los dos métodos y hacer su discusion, á pesar de su extrema sencillez, como ejemplo de las definiciones dadas en el capítulo anterior.



que corte á la recta dada. Desde sus puntos de interseccion B y C con el mismo radio (ó con otro cualquiera con tal que sea mayor que la mitad de BC), describamos dos arcos que se cortarán en D, y unido D con A, la recta AD será la perpendicular pedida.

En efecto, los puntos A y D equidistan de B y C, luego la AD es perpendicular á la BC y además divide la recta BC en dos partes iguales. Los arcos de circunferencia se encontrarán necesariamente [*Recíp. del teor. LXXI*].

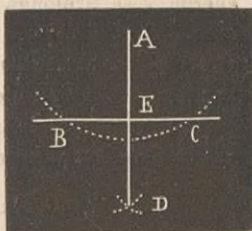


Fig. 93.

### PROBLEMA III.

*Dada una recta de longitud determinada, dividirla en dos partes iguales por medio de una perpendicular.* (Fig. 94)

Desde los extremos A y B de la recta y con un radio mayor que la mitad de AB trazo arcos de circunferencia que se cortarán [*Recíp. del teor. LXXII*] en los puntos C y D, tiro la recta CD, y esta será la perpendicular pedida. [*Teor. XXXIV*].

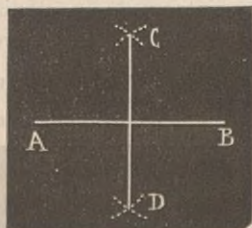


Fig. 94.

### COROLARIOS DE ESTE PROBLEMA.

1.º *Dividir una recta en 4, 8, 16, y en general, 2<sup>n</sup> partes iguales.* Para esto se dividirá primero en dos partes iguales, despues cada una de estas en otras dos, y así sucesivamente.

2.º *Sobre una recta dada como diámetro, trazar una circunferencia.* Se divide en dos partes iguales y el punto de division es el centro.

3.º *Dividir un arco en dos partes iguales.* Se divide la cuerda y se prolonga la perpendicular trazada hasta el arco. [Teor. LX.]

4.º *Hallar el centro de un círculo ó de un arco.* Se trazan dos cuerdas y se levantan dos perpendiculares en los puntos medios, el de interseccion de estas perpendiculares es el centro buscado. [Teor. LXIII.]

#### PROBLEMA IV.

*En el extremo de una recta que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.* (Fig. 95.)

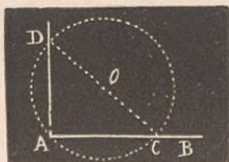


Fig. 95.

Se traza una circunferencia que pase por el punto dado A y que corte á la recta AB: por el punto C de interseccion se traza el diámetro CD, y uniendo A con D, la

DA es la perpendicular. En efecto, el ángulo A es inscripto y abraza média circunferencia, luego [Teorema LXXXI, cor. 2.º] es recto.

#### PROBLEMA V.

*Por un punto de una recta, trazar otra que forme con ella un ángulo igual á otro dado.* (Fig. 96.)

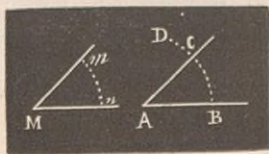


Fig. 96.

Con un radio arbitrario describo el arco correspondiente  $mn$  del ángulo dado M, y desde el punto A de la recta con

igual radio trazo el arco indefinido BCD, tomando en él la parte  $CB = mn$ . Tirando la recta CA, esta formará un ángulo igual á M, porque sus arcos correspondientes descritos con igual radio son iguales.

#### PROBLEMA VI.

*Desde un punto dado fuera de una recta, trazar una paralela á dicha recta.* (Fig. 97.)

Desde el punto dado C y con un radio mayor que la distancia del punto á la recta trazo el arco indefinido EF, haciendo centro en E y con igual radio trazo el arco DC. Tomo ahora el arco  $EF = CD$ , y uno el punto F, así marcado, con C. La recta CF es la paralela pedida.

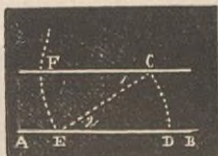


Fig. 97.

En efecto, los ángulos alternos internos son iguales por serlo sus arcos correspondientes trazados con igual radio; luego las rectas son paralelas.

### PROBLEMA VII.

*Por un punto dado fuera de una recta, trazar otra que forme con ella un ángulo igual á uno dado. (Fig. 98)*

Por un punto cualquiera C de la recta dada DE tracemos la GC que forme el ángulo 1 igual al dado [Problema V], por el punto dado A tiremos la paralela AF á la recta GC [Problema VI], y AF será la recta pedida; porque los ángulos 1 y 2 son iguales por correspondientes entre paralelas.

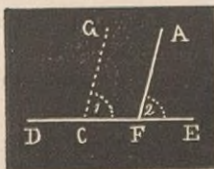


Fig. 98.

### PROBLEMA VIII.

**Construir un triángulo.** 1.º *Dados un lado y los dos ángulos adyacentes.* 2.º *Dados dos lados y el ángulo comprendido.* 3.º *Dados los tres lados.* (Fig. 99) (\*)

1.º En uno de los extremos A del lado conocido AC, (\*\*\*) construyo un ángulo A igual á uno de los dos dados

(\*) En este problema hay tres *propuestas* y una *solucion*, y equivale en todo rigor á tres problemas con una solucion comun, que es la construccion del triángulo.

(\*\*) En algunos problemas marcamos los datos con igual signo



[*Prob. V*], y en el otro extremo un ángulo  $C$  igual al otro ángulo dado. El punto  $B$  en que las rectas se encuentran determina el triángulo. Para que la solución sea posible

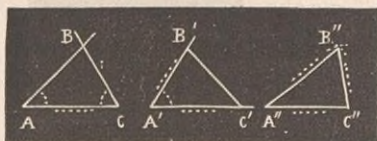


Fig. 99.

es preciso que la suma de los dos ángulos dados sea menor que dos rectos [*Teorema XXII*]. Todos los triángulos que se

construyan con los mismos datos son iguales. [*Teorema XX.*]

2.º En el extremo  $A'$  de una recta indefinida trazo una recta  $A'B'$  que forme con la  $A'C'$  un ángulo igual al dado. Tomo ahora desde el punto  $A$  las rectas  $A'C'$  y  $A'B'$  iguales respectivamente á los dos lados dados, y uniendo  $B'$  con  $C'$  quedará formado el triángulo  $A'B'C'$  que se quería construir.

La construcción siempre es posible y por tanto este problema siempre tiene solución. Todos los triángulos contruidos con iguales datos son iguales.

3.º Desde los extremos de una recta  $A''C''$  igual á uno de los tres lados conocidos, y con radios iguales respectivamente á cada uno de los otros dos, describo arcos de circunferencia, y uniendo el punto  $B''$  en que se encuentran con los puntos  $A''$  y  $C''$  quedará formado el triángulo  $A''B''C''$ , cuyos lados serán iguales á las tres rectas dadas. Para que el problema sea posible es preciso que cualquiera de las tres rectas dadas sea menor que la suma de las otras dos, y mayor que su diferencia [*Teor. XVI*]; pues si así no fuese la distancia de los centros  $A''C''$  no sería menor que la suma de los radios y mayor que su diferen-

---

que el que nos ha servido para las líneas de las hipótesis en los teoremas. [Véase la nota del teor. XLI.]

cia, en cuyo caso las dos circunferencias no se cortarían.

Satisfecha dicha condicion todos los triángulos contruidos con los mismos datos serán iguales. [*Teor. XXII*]

### PROBLEMA IX.

*Dados dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, construir dicho triángulo.* (Fig. 100)

Llamemos  $m$  y  $n$  los dos lados conocidos y  $N$  el valor del ángulo opuesto al lado  $n$ .

Construyamos un ángulo  $A$  igual al dado, en uno de sus lados tomemos desde el vértice una parte  $AB = m$ , y haciendo centro en  $B$  con un radio igual al lado  $n$ , tracemos un arco que, por regla general, cortará al otro lado en los puntos  $C$  y  $C'$ , los que unidos con el punto  $B$ , darán los triángulos  $ABC'$  y  $ABC$  que satisfacen á las condiciones de la cuestion, porque

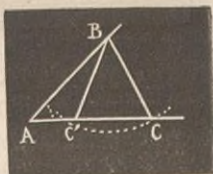


Fig. 100.

ángulo  $A = N$  opuesto al lado  $BC' = BC = n$ ,  
lado comun  $AB = m$ .

En este caso vemos que tiene dos soluciones; pero el problema merece una detenida discusion, como ejemplo de esta parte de la resolucion de todo problema. (53)

**Discusion.** (Fig. 101) Pueden ocurrir tres casos: 1.º Que el lado  $n$  opuesto al ángulo  $N$  y que sirve de radio en la construccion, sea menor que el lado  $m$ . 2.º Que  $n = m$ . 3.º Que  $n > m$ .

1.º Si  $n < m$ : al describir desde el punto  $B$  el arco, cortará á la recta en los puntos  $C$  y  $C'$  equidistantes del pié  $D$  de la perpendicular  $BD$  [*Teor. XXXI, 1.º*]; pero la recta  $C'D < AD$  [*Teor. XXXI, 2.º*]. Uniendo los puntos  $C$  y  $C'$  con  $B$ , resultarán los dos triángulos  $ABC'$  y  $ABC$  que satisfacen al enunciado del problema. (Este es

el caso general que hemos supuesto en la construcción gráfica del problema.)

Como caso particular puede suceder que el lado  $n=BD$ , sea perpendicular. Entonces la circunferencia sería tan-

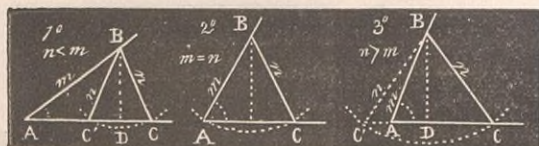


Fig. 101.

gente en D [Teor. LXI] á la recta, y los dos triángulos se reducirían al ABD, rectángulo en D.

2.º Si  $n=m$ , la circunferencia trazada desde B cortará en A y B, equidistantes de D, á la recta [Teor. XXXI, 1.º] y por tanto no habrá más triángulo que el ABC.

Puede ocurrir como caso particular que el ángulo  $A=N$  sea recto; entonces la circunferencia sería tangente y el triángulo se reduciría á la línea BD.

3.º Si  $n > m$ , los puntos C y C' en que la circunferencia corta á la recta estarán á distinto lado de A [Teorema XXXI, 2.º], y uniendo estos puntos al B, se formarán los triángulos ABC y ABC'; pero sólo el primero satisface al problema, porque en el ABC', el lado C'B = n se opone á un ángulo que no es igual al propuesto, sino su suplemento por adyacente.

Si el lado n fuese menor que la perpendicular BD, en ningún caso sería el problema posible; porque la circunferencia no cortaría á la recta.

Vemos, pues, en este problema que segun las circunstancias variables de los datos, es susceptible de una, de dos, ó de ninguna solución.

## PROBLEMA X.

Construir un triángulo rectángulo. Dados 1.º Un cate-



to y un ángulo agudo. 2.º La hipotenusa y un ángulo agudo.  
3.º Los dos catetos. 4.º La hipotenusa y un cateto.

Los tres primeros casos se resuelven por el prob. VIII.

Dada la hipotenusa y un cateto se puede resolver el problema por otras dos construcciones gráficas. (Fig. 102.)

1.ª Construyamos un ángulo recto A y en uno de sus lados tomemos la recta AB igual á el cateto conocido, y haciendo centro en B con un radio igual á la hipotenusa

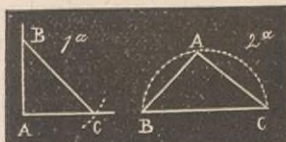


Fig. 102.

tracemos un arco que cortará en C al otro cateto: uniendo el punto C con B, el triángulo ABC es el pedido. (\*)

2.ª Sobre la hipotenusa conocida BC trazamos una semi-circunferencia, y haciendo centro en B con un radio igual al cateto conocido, describamos un arco que cortará la semi-circunferencia en el punto A. El triángulo ABC es el pedido.

*Todos los triángulos que se tracen con los mismos datos son iguales; porque dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tienen la hipotenusa y un cateto igual [Teorema XXXI, cor. 2.º]*

## PROBLEMA XI.

**Construir un polígono igual á otro dado.** (Fig. 64.)

Después de haber dividido en triángulos el polígono por medio de diagonales, se construye un triángulo igual al ABC, después sobre la AC otro igual al ACD y así sucesivamente hasta el último. El polígono que resulta es igual al propuesto. [Teor. LV, cor. 2.º]

---

(\*) Esta construcción no es más que un caso particular de la del problema IX, 3.º

## PROBLEMA XII.

**Circunscribir un círculo á un triángulo cualquiera, ó á un polígono regular.**

Por los puntos medios de dos de sus lados se levantan perpendiculares, y haciendo centro en el punto de concurso de ellas y con un radio igual á la distancia desde este punto á uno de los vértices, la circunferencia trazada quedará circunscrita al triángulo ó al polígono. [*Teoremas XXXV y LXXXVI*].

La perpendicular levantada por el punto medio del tercer lado del triángulo, ó de un lado cualquiera del polígono regular, deberá pasar por el centro, lo que servirá para comprobar la exactitud de la construcción gráfica.

## PROBLEMA XIII.

**Dividir un ángulo en dos partes iguales.** (Fig. 103.)

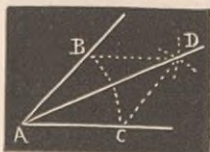


Fig. 103.

Con un radio cualquiera, desde el vértice A como centro, trazo el arco BC correspondiente al ángulo dado A; haciendo centro en los puntos B y C con el mismo radio trazo dos arcos que se cortarán en el punto D. [*Teorema LXXII, rec.*] y uniendo A con D, AD será la bisectriz.

En efecto, si trazamos las rectas BD y AD, tendremos que los triángulos ABD y ACD son iguales [*Teorema XXII*]; luego sus ángulos en A son iguales.

## PROBLEMA XIV.

**Inscribir un círculo á un triángulo cualquiera, ó á un polígono regular.**

Se trazan las bisectrices de dos de sus ángulos y desde el punto de unión de ellas con un radio igual á la perpen-

dicular bajada desde dicho punto á un lado cualquiera, se describe una circunferencia que quedará inscrita en el triángulo ó en el polígono. [Teor.<sup>s</sup> XXXIX y LXXXVI.]

Si se construye la bisectriz del tercer ángulo del triángulo, ó de otro ángulo cualquiera del polígono regular, esta bisectriz pasará por el centro de la circunferencia.

### PROBLEMA XV.

*Dadas dos rectas comensurables, hallar su mayor medida comun y la razon geométrica de sus longitudes. (\*)*

Sean las dos rectas comensurables AB y CD (Fig. 104),

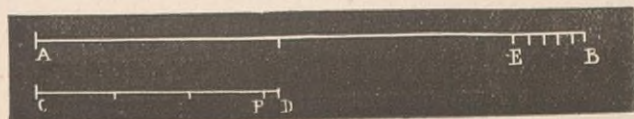


Figura 104.

llevo la menor sobre la mayor y supongo que está contenida *dos veces* y deja el residuo EB; coloco este sobre la CD, y está contenido *tres veces* y deja el residuo FD; llevo este sobre el EB y supongamos que esté contenido *cinco veces* exactamente en él.

El último divisor ó residuo **FD** será la mayor medida comun.

En efecto, establezcamos las igualdades que expresan las operaciones de division:

$$AB = 2CD + EB \text{ (a)}, \quad CD = 3EB + FD \text{ (b)}, \quad EB = 5FD \text{ (c)}.$$

Evidentemente FD divide exactamente á EB (c); luego divide á CD (b) (\*\*), y por tanto á AB (a), luego la

(\*) La medida comun de dos rectas, no es otra cosa que el *máximo comun divisor* de ellas; así es que se procede de igual manera y fundándose en idénticos principios que en Aritmética. La razon de las rectas es la del número de veces que la mayor medida comun está contenida en cada una de dichas rectas.

(\*\*) Toda cantidad que divide al divisor y al residuo divide al dividendo. (Aritmética.)



FD divide á las dos rectas dadas. Ahora se puede demostrar que FD es la mayor medida comun, porque si hubiese otra mayor que ella que las dividiese, por dividir á AB y CD (*a*) dividiría á EB (\*), y en tal caso dividiría á FD (*b*), lo que es absurdo.

Para hallar la razon numérica de las dos rectas; tenemos substituyendo en la igualdad (*b*) el valor de EB.

$$CD = 3 \times 5FD + FD = 16FD,$$

$$\text{de donde } AB = 2 \times 16FD + 5FD = 37FD.$$

Estando la medida comun FD contenida 37 veces en AB y 16 en FD, la razon será:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{37}{16} \quad \begin{array}{l} \text{Número de veces que FD está contenida en AB.} \\ \text{Id. id. que FD está contenida en CD.} \end{array}$$

#### COROLARIOS.

1.º Medir una linea recta. *Se halla la razon entre ella y la unidad.*

2.º Hallar la razon aproximada de dos rectas incommensurables. Se procede como si fueran commensurables hasta que se llegue á un residuo suficientemente pequeño.

3.º Hallar la medida comun y la razon, entre dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales. Se hace la misma construccion que para dos líneas rectas, tomando con un compás las cuerdas de los arcos, en vez de estas. [Teorema LXV.]

4.º Hallar la medida comun y la razon de dos ángulos. Se halla la de sus arcos correspondientes descritos con igual radio. [Teorema LXXVIII.]

---

(\*) Toda cantidad que divide al dividendo y al divisor divide al residuo. (Aritmética.)

# CAPÍTULO III.

## FIGURAS CIRCULARES.

### PROBLEMA XVI.

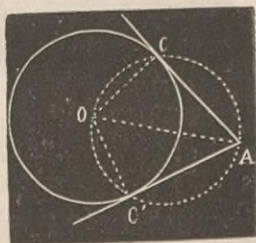
*Por un punto dado en una circunferencia, trazarle una tangente.*

En el extremo del radio que pasa por el punto se levanta una perpendicular á dicho radio, que será la tangente. [*Teor. LXI.*]

### PROBLEMA XVII.

*Por un punto dado fuera de un círculo, trazar una tangente á la circunferencia. (F. 105)*

Se une el punto dado  $A$  con el centro  $O$  y sobre la distancia  $OA$  como diámetro se describe una circunferencia que evidentemente cortará á la circunferencia dada. Trazando las rectas  $AC$  y  $AC'$  que unen el punto dado con los de intersección de estas circunferencias, dichas dos rectas serán tangentes.



*Fig. 105.*

En efecto, los ángulos en  $C$  y  $C'$  son rectos por inscritos que abrazan media circunferencia, por tanto las rectas  $AC$  y  $AC'$  son perpendiculares respectivamente á los radios  $OC$  y  $OC'$  en los puntos  $C$  y  $C'$  [*Teor. LXI*], y por tanto son tangentes.

El problema tiene dos soluciones.

Las rectas  $AC$  y  $AC'$  son iguales, por serlo los triángulos  $OAC$  y  $OAC'$ .

# PROBLEMA XVIII.

*Sobre una recta dada construir un arco capaz (\*) de un ángulo dado. (Fig. 106.)*

En uno de los extremos B de la recta dada, trazo la recta BE que forme con ella un ángulo ABE igual al ángulo dado. Levanto ahora la perpendicular OP á la recta dada por su punto medio, y la perpendicular BO á la

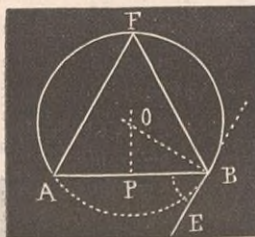


Fig. 106.

recta construida BE. Estas dos rectas se encontrarán [Teorema XV], y desde su punto de union con un radio igual á OB trazo una circunferencia, de la que el arco AFB será el pedido.

En efecto, siendo el radio OB perpendicular á la recta EB, esta es tangente, luego el ángulo ABE, que es igual al propuesto tiene por medida la mitad del arco AB [Teorema LXXVII]; pero todos los ángulos inscriptos cuyos vértices están en un punto del arco AFB, tienen tambien por medida la mitad del arco AB, luego el AFB es el arco capaz del ángulo dado.

(\*) Se llama *arco capaz* de un ángulo dado, aquel que todos los ángulos cuyos vértices están en él y sus lados pasan por los extremos de la cuerda, son iguales al ángulo dado.



# SECCION SEGUNDA.

EXTENSION  
DE LAS FIGURAS PLANAS.

## LIBRO I.

EXTENSION DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

### CAPÍTULO I.

LÍNEAS PROPORCIONALES.

#### TEOREMA LXXXIX.

*Si se divide una recta cualquiera en partes iguales y por los puntos de division se trazan paralelas en una direccion arbitraria y de modo que corten á otra recta, esta quedará dividida en partes iguales entre si. (Fig. 107.)*

Supongamos que la recta MN se ha dividido en partes

$$AB=BC=CD=DE....$$

Y que se han trazado las rectas paralelas, AA', BB', CC', DD'..... que encuentran á la recta PQ en los puntos A', B', C', D'..... Vamos á demostrar que

$$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'..... (a)$$

Para ello trazo por los puntos de division de la recta MN, las paralelas Am, Bn, Cp..... á la recta PQ. Los triángulos ABm, BCn, CDp, DEr..... que así resultan

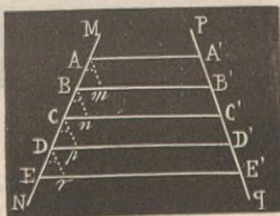


Fig. 107.

tienen el lado  $AB=BC=CD=DE$  por construcción:  
 ángulo  $A=B=C=D \dots$  por correspondientes entre paralelas.  
 ángulo  $m=n=p=r \dots$  por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Todos estos triángulos, son, por consiguiente, iguales [Teorema XX]; luego

$$Am=Bn=Cp=Dr \dots$$

Pero  $Am=A'B'$ ,  $Bn=B'C'$ ,  $Cp=C'D'$ ..... por lados opuestos de paralelógramos; y por tanto queda demostrada la igualdad (a).

### TEOREMA XC.

*Si en un trapecio se traza una recta paralela á las bases, dividirá á los otros dos lados en partes proporcionales.*

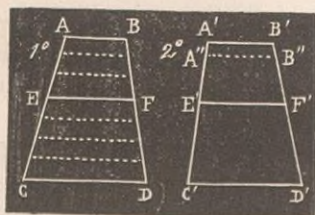


Fig. 108.

(Fig. 108.)

Pueden suceder dos casos: 1.º Que las partes en que queda dividido el lado del trapecio sean comensurables. 2.º Que no lo sean.

1.º Supongamos que la paralela á las bases EF divide á la AC en dos partes AE y EC comensurables; y que la mayor medida comun esté contenida tres veces en la primera y cuatro veces en la segunda, tendremos evidentemente que

$$AE:EC::3:4. (a)$$

Trazando ahora por los puntos de division paralelas á las bases, las BF y FD tambien quedarán divididas en partes iguales [Teor. anterior], luego se tendrá que

$$BF:FD::3:4. (b)$$

Ahora las proporciones (a) y (b) tienen una razón común, luego con las no comunes se podrá formar la proporción

$$AE : EC :: BF : FD.$$

2.º Si trazando la paralela  $E'F'$ , las partes  $A'E'$  y  $E'C'$  no son comensurables, una de ellas, la  $E'C'$ , se podrá dividir en partes iguales, y llevando una de estas partes sobre la otra, supongamos que  $A''$  es el último punto de división. Si por él tiramos la paralela  $A''B''$  á las bases, en el trapecio  $A''B''C'D'$  se verificará el teorema por estar comprendido en el primer caso. Luego tendremos que

$$\frac{A'E'}{E'C'} = \frac{B'F'}{F'D'} \quad (c)$$

Como las partes iguales en que se divide la recta  $E'C'$  pueden ser tan pequeñas como se desee, la recta  $A''B''$  puede aproximarse á la  $A'B'$  tanto cuanto se quiera, luego las dos cantidades variables de la igualdad (c) permanecen constantemente iguales, luego sus límites serán iguales, y por tanto

$$\frac{A'E'}{E'C'} = \frac{B'F'}{F'D'}, \text{ ó bien } AE' : EC' :: B'F' : F'D'.$$

### TEOREMA XCI.

*Una recta paralela á uno de los lados de un triángulo, divide á los otros dos lados en partes proporcionales.*  
(Fig. 109)

Por el vértice B del triángulo dado trazo una paralela BM al lado AC (y por consiguiente á la recta EF), y desde un punto cualquiera M trazo la paralela MD al lado BC, y prolongo AC y EF hasta que encuentren en D y en N, respectivamente, á la recta MD.



Fig. 109.



En el trapecio ABMD, tendremos segun el teorema demostrado que

$$BE : EA :: MN : ND.$$

Pero á causa de ser  $BF = MN$  y  $FC = ND$  [Teorema XIII], resulta que

$$BE : EA :: BF : FC, \text{ que era lo que se queria demostrar.}$$

**Escolio 1.º** De la proporcion que acabamos de demostrar se deducen, comparando la suma de antecedentes y consecuentes con los antecedentes ó con los consecuentes de cada razon, las siguientes proporciones:

$$BE + AE : BE :: BF + FC : BF, \text{ ó bien reduciendo}$$

$$AB : BE :: BC : BF.$$

$$BE + AE : AE :: BF + FC : FC, \text{ ó reduciendo}$$

$$AB : AE :: BC : FC.$$

**Escolio 2.º** Aplicando á una cualquiera de estas proporciones la propiedad fundamental de que el *producto de los medios es igual al de los extremos*, tendríamos que aplicar á las líneas la operacion de multiplicarlas entre sí. Más adelante hemos de ver que tambien expresaremos fórmulas en que hay que dividir unas líneas por otras, ó multiplicar superficies por líneas, ó dividir volúmenes por superficies, &c. En todos los casos en que tales operaciones se presenten, relativas á las cantidades geométricas, debe entenderse que se refieren á los *valores numéricos*, es decir, á los *números abstractos* que representan las relaciones de cada una de estas cantidades geométricas con su respectiva unidad. De manera que concretándonos (para concluir de aclarar esta idea) á la proporcion

$$AB : BE :: BC : BF,$$

ó á la igualdad que de ella se deduce  $AB \times BF = BE \times BC$ , significan estas expresiones, que los números de veces que la unidad lineal está contenida en ellas, son proporcionales entre sí; y por consiguiente, que el producto de los números de los extremos es igual al de los medios.

TEOREMA XCII. [Recíproco del anterior.]

*Si una recta divide en partes proporcionales dos lados de un triángulo, esta recta es paralela al tercer lado. (F. 110.)*

Supongamos que la recta DE es tal que tenemos la proporción  $BD : DA :: BE : EC$ , ó bien la que de esta se deduce  $AB : BD :: BC : BE$ .

En tal caso digo que DE es paralela á la AC, porque si no lo fuera podríamos trazar por el punto D una recta DE' que fuera paralela á la AC, pero entonces tendríamos que

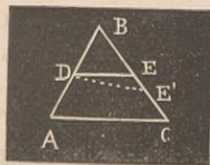


Fig. 110.

$AB : BD :: BC : BE$ , por el supuesto.

$AB : BD :: BC : BE'$ , por ser la recta DE' paralela á la AC.

Luego  $BE = BE'$  lo que es absurdo. (\*)

TEOREMA XCIII.

*La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos partes, proporcionales á los lados que forman dicho ángulo. (Fig. 111.)*

Para demostrarlo trazo la paralela CE á la bisectriz BD, y prolongo el lado AB hasta que encuentre en E á dicha paralela. Tendremos que los ángulos 1 y 2 son iguales por hipótesis, ángulo 3 = ángulo 1 por correspondientes, y ángulo 4 = ángulo 2, por alternos internos entre paralelas, por consiguiente

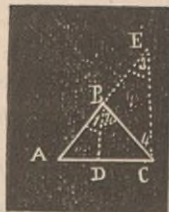


Fig. 111.

ángulo 1 = ángulo 2 = ángulo 3 = ángulo 4.

Pero en el triángulo CBE si los ángulos 3 y 4 son iguales, sus lados opuestos BE y BC, también lo serán.

(\*) De igual manera se demuestra el recíproco del teor. XC.

Ahora en el triángulo AEC tendremos [Teor. XCI]

$$AD : DC :: AB : BE = BC;$$

que era lo que se quería demostrar.

## CAPÍTULO II.

### TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS SEMEJANTES.

54. Dos polígonos son *semejantes*, en general, cuando

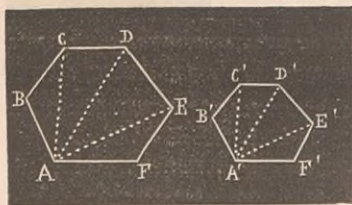


Fig. 112.

do tienen sus ángulos iguales y los lados que lo forman proporcionales; si estos elementos están dispuestos en igual orden, de manera que se satisfagan las relaciones (Fig. 112)

ángulo A = ángulo A', ángulo B = ángulo B', áng. C = áng. C'...

$$AB : A'B' :: BC : B'C' : CD : C'D'....$$

55. Esta relacion constante que existe entre los lados que forman los ángulos iguales es la *razon de semejanza*.

56. *Vértices homólogos* son los de los ángulos iguales: el vértice A es homólogo con el A', B con B'..... *Lados homólogos* son los que terminan en dos vértices homólogos: AB es homólogo con A'B', BC con B'C', CD con C'D'... *Angulos homólogos* los que corresponden á vértices homólogos. *Diagonales homólogas* las que terminan en dos vértices homólogos: AC es homóloga con A'C', AD con A'D'....

57. Si dos polígonos semejantes tienen un lado homólogo respectivamente igual, todos los demás tambien son iguales, la razon de semejanza es la unidad y los dos polígonos serán iguales.

58. Dos polígonos regulares de igual número de lados, son evidentemente semejantes.



59. Los triángulos semejantes se definen lo mismo que los polígonos, es decir, son semejantes dos triángulos si tienen sus ángulos iguales y los lados que los forman proporcionales.

### TEOREMA XCIV.

*Si en un triángulo se traza una recta paralela á uno de los lados, el triángulo parcial que resulta es semejante al propuesto. (Fig. 113.)*

Los dos triángulos ABC y DBE tienen sus tres ángulos iguales, á saber: B ángulo comun.  $D=A$  y  $E=C$ , por correspondientes (a). Además, siendo la recta DE paralela á la AC, tendremos



Fig. 113.

$$AB : BD :: CB : BC \text{ [Teor. XCI].}$$

Trazando por el punto E la paralela EF al lado AB, tendremos por igual razon:  $CB : BE :: AC : AF = DE$ , por lados opuestos de paralelógramo.

Por consiguiente, combinando estas dos proporciones que tienen la razon comun  $CB : BE$ , resultará que

$$AB : BD :: CB : BE :: AC : DE. \quad (b)$$

Por consiguiente los triángulos son semejantes, porque tienen sus lados proporcionales (b) y sus ángulos iguales (a).

### TEOREMA XCV.

*Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales. (Fig. 114.)*

Supongamos que en los dos triángulos ABC y abc, tenemos ángulo  $A=$ ángulo  $a$ , ángulo  $B=$ ángulo  $b$  y ángulo  $C=$ ángulo  $c$ .

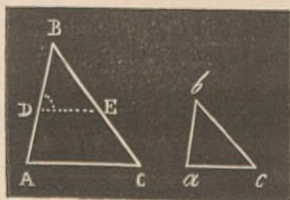


Fig. 114.

Tomemos en el lado  $AB$  y á partir del punto  $B$  una parte  $BD = ab$ ; tracemos por el punto  $D$  la paralela  $DE$  al lado  $AC$ . El triángulo  $DBE$  que resulta es igual al  $abc$ ; porque tienen el ángulo  $B = b$ , lado  $BD = ab$  y ángulo  $D = A = a$ .

Pero el triángulo  $DBE$  es semejante al  $ABC$  [*Teorema anterior*], luego su igual  $abc$  tambien lo será.

### COROLARIOS.

1.º Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos respectivamente iguales, pues en tal caso los terceros ángulos tambien serán iguales.

2.º Dos triángulos rectángulos son semejantes, si tienen un ángulo agudo igual.

3.º Dos triángulos isósceles son semejantes, si tienen un ángulo igual de los dos iguales, ó el opuesto á la base.

4.º Dos triángulos equiláteros son semejantes.

En cualquiera de estos casos se puede observar que los tres ángulos son iguales.

### TEOREMA XCVI.

*Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, son semejantes.*

Los ángulos de estos dos triángulos serán iguales ó suplementarios [*Teorema XIII*], y la suma de ellos deberá ser igual á cuatro rectos [*Teorema XVII*]. Por consiguiente, si llamamos  $A, B, C$ , los tres ángulos de uno de los triángulos,  $a, b, c$ , los del otro cuyos lados son paralelos, y  $R$  el valor del ángulo recto, no pueden ocurrir más que los siguientes casos:

|     |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| 1.º | $A + a = 2R.$ | $B + b = 2R.$ | $C + c = 2R.$ |
| 2.º | $A + a = 2R.$ | $B + b = 2R.$ | $C = c$       |
| 3.º | $A + a = 2R.$ | $B = b.$      | $C = c$       |
| 4.º | $A = a.$      | $B = b.$      | $C = c$       |

Los dos primeros casos son absurdos, porque la suma de los ángulos de ambos triángulos sería mayor que cuatro ángulos rectos. El tercer caso está comprendido en el cuarto [*Teor. XVII, cor. 3.º*]; pero en estos dos casos los triángulos son semejantes. [*Teor. anterior.*]

**Escolio.** Los lados homólogos son los paralelos.

### TEOREMA XCVII.

Dos triángulos son semejantes, si tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Los ángulos tendrán que ser en tal caso iguales ó suplementarios [*Teor. XIV*], por lo que la demostracion de este teorema es igual á la del anterior.

**Escolio.** Los lados homólogos son los perpendiculares.

### TEOREMA XCVIII.

Dos triángulos son semejantes, si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales. (Fig. 115)

Por hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} &\text{ángulo } B = \text{ángulo } b, \\ &\text{y } AB : ab :: BC : bc \quad (a). \end{aligned}$$

Tomemos en el lado BA y á partir del punto B una parte  $DB = ab$ , y tracemos la paralela DE al lado AC. El triángulo DBE que resulta será semejante al ABC [*Teor. XCIV*], y por tanto

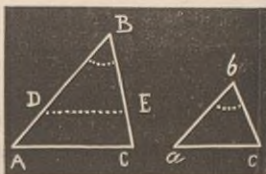


Fig. 115 y 116.

$$AB : DB = ab :: BC : BE \quad (b)$$

Esta proporcion tiene tres términos iguales con la (a), luego  $bc = BE$ ; pero en tal caso los triángulos DBE y abc son iguales [*Teor. XIX*], y siendo el DBE semejante al ABC, tambien lo será su igual abc.



# TEOREMA XCIX.

Dos triángulos son semejantes, si tienen sus lados respectivamente proporcionales. (Fig. 116)

Tomemos la recta  $BD=ab$  y tiremos la paralela  $DE$  al lado  $AC$ : vamos á demostrar que el triángulo  $DBE$  es igual al  $abc$ , con lo que el teorema quedará demostrado.

Por el supuesto tenemos que

$$\begin{aligned} AB : ab :: BC : bc & \quad (a) \\ \text{y } AB : ab :: AC : ac & \quad (b) \end{aligned}$$

Por ser semejante el triángulo  $DBE$  al  $ABC$ , resulta que

$$\begin{aligned} AB : DB = ab :: BC : BE & \quad (c) \\ \text{y } AB : DB = ab :: AC : DE & \quad (d) \end{aligned}$$

Las dos proporciones  $(a)$  y  $(c)$  tienen tres términos iguales, luego  $bc=BE$ .

Las dos proporciones  $(b)$  y  $(d)$  tienen tambien tres términos iguales, luego  $ac=DE$ .

Por consiguiente, los dos triángulos  $acb$  y  $DBE$  son iguales [Teorema XXII], y siendo el  $DBE$  semejante al  $ABC$ , su igual tambien lo será.

# TEOREMA C.

Dos poligonos compuestos de un mismo número de trián-

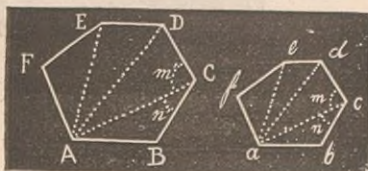


Fig. 117.

gulos semejantes y semejantemente colocados, son semejantes. (Fig. 117)

Todos los ángulos de los dos poligonos son respectivamente iguales; porque ó pertenecen á triángulos semejantes como los ángulos  $B$  y  $b$ , ó se componen de la suma de dos ó más ángulos de triángulos semejantes, y semejantemente

colocados como C y c, cuyos ángulos se componen respectivamente de m y n, ó de m' y n', que son iguales entre sí, esto es,  $m=m'$  y  $n=n'$ .

Para demostrar ahora la proporcionalidad entre todos los lados homólogos de ambos polígonos, vemos que siendo semejantes respectivamente los triángulos ABC, ACD, ADE.... con *acb*, *adc*, *ade*... tendremos las proporciones

$$AB : ab :: BC : bc :: AC : ac$$

$$AC : ac :: CD : cd :: AD : ad$$

$$AD : ad :: DE : de :: AE : ae.$$

.....

Y teniendo cada una de estas una razon comun, podremos formar la siguiente:

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de....$$

Luego los dos polígonos son semejantes. (54)

#### TEOREMA CI. [Recíproco del anterior]

*Dos polígonos semejantes, pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente colocados. (La misma figura)*

En efecto, trazando desde los vértices homólogos las diagonales AC, AD, AE.... y *ac*, *ad*, *ae*.... vemos que los triángulos ABC y *abc* son semejantes porque tienen el ángulo B=ángulo *b* y  $AB : ab :: BC : bc$ .

Los triángulos ACD y *acd* tambien son semejantes, porque tienen áng.  $m'=\text{áng. } m$ , porque son diferencias entre dos ángulos respectivamente iguales (áng. C=áng. *c* y áng.  $n'=\text{áng. } n$ ); y los lados proporcionales  $AC : ac :: DC : dc$ , porque de las dos proporciones

$$AC : ac :: BC : bc$$

$$BC : bc :: DC : dc,$$

se deduce

$$AC : ac :: DC : dc.$$

De igual manera se demostrará la semejanza de los otros triángulos.

## TEOREMA CII.

*Los perímetros de los polígonos semejantes, son proporcionales à sus lados ó diagonales homólogos.*

Sean AB, BC, CD, DE.... los lados de uno de los polígonos; *ab, bc, cd, de....* sus homólogos en el otro, tendremos que

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de....$$

Pero en esta série de razones iguales se sabe que  
 $AB + BC + CD + DE.... : ab + bc + cd + de.... :: AB : ab.$

Ahora siendo proporcionales los lados homólogos con los diagonales [Teor. CI], la segunda parte del teorema tambien es cierta.

**Escolio general sobre la semejanza.** *El número necesario de condiciones para que dos polígonos de n lados sean semejantes es (2n-4); cuyo número puede disminuir si los polígonos tienen ya ciertas condiciones particulares.*

## CAPÍTULO III.

### CONSECUENCIAS DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

## TEOREMA CIII.

*Si varias rectas que concurren en un punto encuentran á dos paralelas, dividen à estas paralelas en partes proporcionales. (Fig. 118.)*



Fig. 118.

Por ser BE paralela à FL, los triángulos ABC, ACD, ADE, son respectivamente semejantes à AFG, AGH, AHL; luego tendremos las séries de razones:

$$\left. \begin{array}{l} AF:AB::FG:BC::AG:AC \\ AG:AC::GH:CD::AH:AD \\ AH:AD::HL:DE::AL:AE \end{array} \right\} \text{ Luego } FG:BC::GH:CD::HL:DE.$$



**Escolio.** De la série de razones indicada se deduce, que tambien las rectas concurrentes quedan divididas, en partes proporcionales, por las paralelas.

### TEOREMA CIV.

*La perpendicular trazada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo á la hipotenusa, es media proporcional (\*) entre los segmentos de la hipotenusa.* (Fig. 119)

Los triángulos BAD y ADC tienen sus lados perpendiculares, y por tanto [Teor. XCVII] tendremos que

$BD : AD :: AD : DC$ , que era lo que se queria demostrar.

**Corolario.** *La perpendicular trazada desde un punto de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre los segmentos del diámetro.* (Fig. 120)

En efecto, trazadas las cuerdas AB y AC, el triángulo ABC será rectángulo en A.

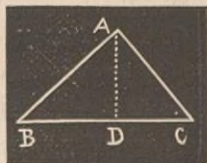


Fig. 119.

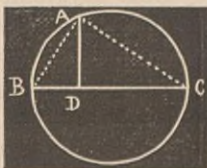


Fig. 120.

### TEOREMA CV.

*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular á la hipotenusa: 1.º Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento adyacente á dicho cateto. 2.º Los cuadrados de los catetos son proporcionales á los segmentos de la hipotenusa.* (Fig. 119)

Los triángulos BAD y BAC son semejantes, porque son rectángulos y tienen el ángulo B comun, luego

$$BC : AB :: AB : BD. \quad (a)$$

(\*) Se dice que una recta es *media proporcional* entre otras dos, cuando su valor numérico forma el término medio de una proporcion continua, de la que las otras dos son los extremos.

Por igual razon en los triángulos ADC y BAC, tendremos

$$BC : AC :: AC : DC. \quad (b)$$

2.º De las dos proporciones (a) y (b) resultan las igualdades

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD \quad \text{y} \quad \overline{AC}^2 = BC \times DC.$$

Dividiendo estas igualdades ordenadamente, y suprimiendo el factor comun de los segundos miembros BC, se deduce la proporción

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

**Corolario.** Si desde un punto de la circunferencia se baja una perpendicular á un diámetro y se trazan las cuerdas que unen dicho punto con los extremos del diámetro: 1.º Cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y su segmento adyacente. 2.º Los cuadrados de las cuerdas son proporcionales á los segmentos del diámetro. (F. 120)

El triángulo que así resulta BAC es rectángulo en A; y por consiguiente queda el corolario comprendido en el teorema.

#### TEOREMA CVI. [Llamado de Pitágoras]

*En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.* (Fig. 119)

Hemos demostrado [Teor. anterior] que

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD \quad \text{y} \quad \overline{AC}^2 = BC \times DC.$$

Sumando estas dos igualdades miembro á miembro y separando el factor comun BC, resultará

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC (BD + DC) = BC \times BC = \overline{BC}^2,$$

ó bien

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2, \text{ que era lo que se queria demostrar.}$$

De esta igualdad resulta

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2;$$

es decir, que el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

**Escolio.** El teorema de Pitágoras puede servir para determinar el valor numérico de un lado de un triángulo rectángulo, conocidos los valores numéricos de los otros dos. En efecto, llamemos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , los valores de los tres lados, siendo  $a$  la hipotenusa, tendremos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{y} \quad b^2 = a^2 - c^2,$$

y por consiguiente:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

60. Se llama *proyeccion* de una línea cualquiera sobre una recta, la parte de recta comprendida entre las perpendiculares bajadas desde los extremos de aquella sobre esta. Así (Fig. 121) EF es la proyeccion de la línea recta CD sobre la AB. Segun esta definicion es evidente que

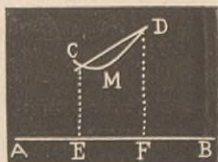


Fig. 121.

1.º Todas las líneas que tengan los extremos comunes tienen la misma proyeccion sobre una misma línea recta. Así la curva CMD tiene igual proyeccion que la recta CD.

2.º La proyeccion de una recta sobre otra que le es paralela, es igual á esta paralela. [Teorema XLII.]

3.º La proyeccion de una línea recta sobre otra que es perpendicular, es un punto.

4.º La proyeccion de la hipotenusa sobre cada uno de los catetos es el mismo cateto.

## TEOREMA CVII.

En todo triángulo el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de uno de ellos por la proyeccion del otro sobre él. (Fig. 122)



Sea el lado AB opuesto al ángulo agudo C, pueden suceder dos casos: 1.º Que la perpendicular BD caiga en un punto del lado AC. 2.º Que caiga en la prolongación.

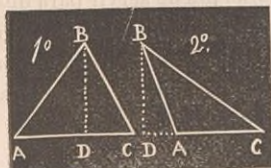


Fig. 122.

1.º En el triángulo rectángulo ABD tendremos [Teorema CVI.]

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \quad (a)$$

$$AD = AC - DC,$$

y por tanto (\*)

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2AC \times DC. \quad (b)$$

En el triángulo rectángulo DBC, tenemos que

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2. \quad (c)$$

Sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad (a), los valores de  $\overline{AD}^2$  y  $\overline{BD}^2$  que expresan los segundos miembros de las igualdades (b) y (c) resultará

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 - 2AC \times DC + \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2.$$

De donde suprimiendo los términos iguales y de signos contrarios, resulta

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times DC,$$

que era lo que se quería demostrar.

2.º Si la perpendicular cae en la prolongación de AC, tendremos que

$$AD = DC - AC,$$

y elevando al cuadrado

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times DC.$$

Por consiguiente, el segundo miembro de esta igualdad es igual al de la (b) y el teorema se demuestra lo mismo que en el caso anterior.

---

(\*) Conforme á la fórmula  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ .

TEOREMA CVIII.

En todo triángulo obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas el doble del producto de uno de ellos por la proyeccion del otro sobre él. (F. 123)

Sea BC el lado opuesto al ángulo obtuso A, la perpendicular BD caerá fuera de dicho ángulo [Teorema XVIII.]

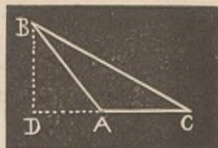


Fig. 123.

En el triángulo rectángulo DBC tenemos que [Teorema CVI]

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + (\overline{DA} + \overline{AC})^2. \quad (a)$$

Pero en el triángulo rectángulo DBA

$$\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{DA}^2, \quad (b)$$

y además sabemos que

$$(\overline{DA} + \overline{AC})^2 = \overline{DA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \times \overline{DA}. \quad (c)$$

Sustituyendo, como en el teorema anterior, en el segundo miembro de la igualdad (a) los segundos miembros de las (b) y (c), resultarán despues hechas las reducciones:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \times \overline{DA}.$$

Los recíprocos de los tres teoremas últimos son ciertos y se demuestran por la regla del párrafo (34).

Escolio. Existiendo una relacion constante entre el cuadrado de un lado de un triángulo y los otros dos lados, cuya relacion varía segun que el ángulo opuesto sea obtuso, recto ó agudo, se puede conocer por los valores numéricos de los lados de un triángulo, á qué clase de ángulo se opone cada lado. Así llamando  $a$ ,  $b$  y  $c$  á los tres lados y siendo por ejemplo,

$$a=5, \quad b=4, \quad c=8,$$

tendremos que

$$8^2 = 64 > 5^2 + 4^2 = 41,$$

por consiguiente, el lado *c* se opone á un ángulo obtuso, y por consiguiente los otros dos se oponen á ángulos agudos.

---

## CAPÍTULO IV.

### ÁREAS DE LOS POLÍGONOS.

---

61. La extension medida de una superficie sabemos que se llama *área*. Se concibe fácilmente que dos figuras de muy distintas formas pueden tener igual extension ó *área*: en tal caso se llaman *equivalentes*; y es claro que no podrán coincidir, pero los números que expresan la relacion de estas figuras con la unidad serán iguales.

62. Para medir las superficies se toma, generalmente, por unidad el cuadrado.

63. En la evaluacion de las superficies se llaman *bases* de un paralelógramo dos de sus lados paralelos y la *altura* es la perpendicular bajada desde un punto cualquiera de una de estas bases á la otra, ó á su prolongacion. Es evidente que en el rectángulo y el cuadrado, la base y la altura son dos lados consecutivos.

64. En un triángulo se toma como *base* un lado cualquiera y la *altura* es la perpendicular bajada desde el vértice opuesto á su base ó á su prolongacion, si fuere necesario. Si el triángulo es isósceles suele tomarse como base el lado desigual. En el triángulo rectángulo si se considera como base un cateto el otro cateto será la altura, segun la definicion.

65. En el trapecio se considera como base *uno* de sus lados paralelos, siendo la altura la perpendicular bajada desde un punto de este lado al otro.



# TEOREMA CIX.

*Dos rectángulos que tienen iguales sus bases, son proporcionales á sus alturas.* (Fig. 124.)

Pueden suceder dos casos: 1.º Que las alturas  $AB$  y  $ab$  sean comensurables. 2.º Que no lo sean.

1.º Si  $AB$  y  $ab$  son comensurables, llevemos la medida comun sobre estas rectas, y supongamos que está contenida en la  $AB$ ,  $m$  veces, y en la  $ab$ ,  $n$  veces; tendremos la proporcion

$$AB : ab :: m : n. \quad (a)$$

Trazando por los puntos de division rectas paralelas á las bases quedarán divididos el rectángulo  $ABCD$  en  $m$  rectángulos iguales, y el  $abcd$  en  $n$  rectángulos iguales tambien entre sí y á los primeros [*Teor. XLI, cor.*], luego cualquiera de ellos es medida comun de los rectángulos propuestos, por tanto:

$$ABCD : abcd :: m : n. \quad (b)$$

Las dos proporciones (a) y (b) tienen una razon comun, luego

$$ABCD : abcd :: AB : ab.$$

2.º Si las alturas  $AB$  y  $ab$  son incommensurables, la demostracion es igual á la de los teoremas LXXVIII y XC.

**Corolario.** *Dos rectángulos de igual altura, son proporcionales á sus bases.* Esto se deduce de la definicion del párrafo (63).

# TEOREMA CX.

*Dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean  $R$  y  $R'$  los dos rectángulos:  $a$  y  $a'$  sus alturas respectivas;  $b$  y  $b'$  las bases. Supongamos un tercer rectán-

gulo  $R''$ , que tenga la altura  $a'$  y la base  $b$ , es decir, igual altura que  $R'$ , é igual base que  $R$ .

Segun el teorema anterior, los dos rectángulos  $R$  y  $R''$  que tienen igual base, serán proporcionales á sus alturas, luego

$$R : R'' :: a : a'. \quad (a)$$

Y los dos rectángulos  $R''$  y  $R'$  que tienen igual altura son proporcionales á sus bases

$$R'' : R' :: b : b'. \quad (b)$$

Multiplicando las dos proporciones  $(a)$  y  $(b)$  término á término y suprimiendo el factor comun  $R''$ , resulta

$$R : R' :: a \times b : a' \times b',$$

que es el enunciado del teorema.

**Escolio.** Esta propiedad puede servir para hallar la razon de dos rectángulos, conociendo los valores numéricos de dos de sus lados consecutivos. Así por ejemplo, si tenemos

Rectángulo  $R$ , su altura  $a=22$ , su base  $b=16$

„  $R'$  „  $a'=12$ , „  $b'=14$

$$R : R' :: 22 \times 16 : 12 \times 14, \text{ ó bien } \frac{R}{R'} = \frac{352}{168}.$$

### TEOREMA CXI.

*El área de un rectángulo, es igual al producto de su base por su altura (\*) si la unidad lineal es el lado del cuadrado que se toma por unidad de superficie.*

En efecto, si  $R$  es el rectángulo,  $a$  y  $b$  su altura y base,  $C$  el cuadrado que sirve de unidad, y  $l$  su lado, tendremos [Teor. CX]

---

(\*) Este enunciado quiere decir [Teor. CX, escolio 2.º] que el número abstracto que representa la relacion entre la superficie del rectángulo y la unidad superficial, es igual al producto de los números abstractos que expresan los valores numéricos de la base y la altura con relacion á la unidad lineal.

$\frac{R}{C} = \frac{a \times b}{l^2}$ ; pero  $C=1$  y  $l=1$ , por consiguiente  $R=a \times b$ .

**Corolario.** *El área de un cuadrado, es igual á la segunda potencia de su lado.*

Siendo el cuadrado un rectángulo cuya base y altura son iguales, tendremos que  $C=a \times a=a^2$ , expresando  $a$  su lado.

Por eso en aritmética se llama *cuadrado* al producto de un número por sí mismo, porque representa el valor del área de esta figura geométrica. Por una razón análoga se llama *rectángulo* al producto de dos números cualesquiera, porque representa el área de esta figura geométrica, siendo la base ó la altura cada uno de los dos números.

### TEOREMA CXII.

*El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura. (Fig. 125)*

Sea el paralelogramo ABCD, por los extremos de la base AD, levanto las perpendiculares á ella AE y DF hasta que encuentren al lado opuesto ó á su prolongación.

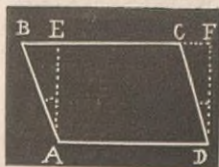


Fig. 125

Los dos triángulos AEB y DFC tienen  $AE=DF$  y  $AB=CD$ , por lados opuestos de paralelogramos y el ángulo en A=ángulo en D, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido: luego son iguales [Teorema XIX.]

Ahora, si del trapecio ADFB se resta el triángulo DFC, queda el paralelogramo propuesto, y si de dicho trapecio se resta el triángulo ABE, queda el rectángulo AEFD; luego el rectángulo y el paralelogramo son equivalentes (61); pero estos cuadriláteros tienen la misma base é igual altura (63), y siendo el área del rectángulo el producto de estas dos líneas [Teor. CXI], también será el área del paralelogramo.



De la equivalencia entre el rectángulo y el paralelogramo que tienen igual base y altura, se deducen los siguientes

COROLARIOS.

1.º *Dos paralelogramos de igual base y altura, son equivalentes.*

2.º *Dos paralelogramos que tienen iguales bases, son proporcionales á sus alturas, y reciprocamente si tienen la altura igual.*

3.º *Dos paralelogramos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

TEOREMA CXIII.

*El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura. (Fig. 126)*

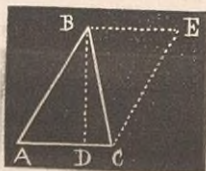


Fig. 126.

Sea el triángulo ABC; por dos de sus vértices B y C, tiro paralelas CE y BE á los lados opuestos y resultará un paralelogramo ABEC de igual base AC é igual altura BD que el triángulo (63 y 64); pero los

dos triángulos ABC y CBE son iguales [Teor. XXII]; luego el triángulo propuesto es mitad del paralelogramo, y siendo el área de este el producto de su base por su altura [Teor. CXII], el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.

Siendo mitad todo triángulo de un paralelogramo de igual base y altura, se deducen los siguientes

COROLARIOS.

1.º *Dos triángulos de igual base y altura, son equivalentes.*

2.º *Dos triángulos de igual base, son proporcionales á sus alturas, y reciprocamente si tienen igual altura.*

3.º *Dos triángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

**Escolio.** En un triángulo rectángulo considerando como base un cateto, la altura será el otro, y por tanto, su *área es igual á la mitad del producto de los catetos.*

### TEOREMA CXIV.

*El área de un trapezio, es igual al producto de su altura por la semi-suma de sus bases.*

(Fig. 127.)

Trazando en el trapezio la diagonal AC, quedará dividido en dos triángulos ABC y ACD, que si consideramos como sus bases respectivas las rectas BC y AD (bases del trapezio), tendrán la misma altura BE que el trapezio (65). Ahora tenemos segun el teorema anterior

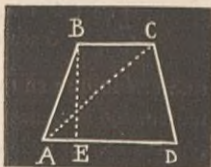


Fig. 127.

$$\text{Área del triángulo ABC} = BE \times \frac{1}{2} BC$$

$$,, \text{ del triángulo ACD} = BE \times \frac{1}{2} AD.$$

Sumando estas dos igualdades y separando el factor común BE, tendremos

$$\text{área del trapezio ABCD} = BE \times \frac{1}{2} (BC + AD).$$

**Escolio.** Siendo la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapezio igual á la semi-suma de sus bases [Teorema L], tambien puede decirse que *el área del trapezio es igual al producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

### TEOREMA CXV.

*El área de un polígono regular, es igual á la mitad del producto de su apotema por su perímetro.*

Sabemos [Teorema LXXXVI, escolio], que todas las apotemas de un polígono regular son iguales: luego si con-

sideramos radios tirados desde el centro del polígono á los vértices, quedará dividido en tantos triángulos iguales é isósceles como lados tenga. El área de cada uno de estos triángulos, si se toma el lado del polígono como base, será igual á la mitad del producto de la apotema por el lado. Llamando  $l$  un lado del polígono,  $n$  el número de estos, y  $a$  á la apotema, tendremos que

$$\text{área de uno de los triángulos} = \frac{1}{2} a \times l,$$

$$\text{área de todos los triángulos}$$

$$\text{ó sea del polígono} = n \times \frac{1}{2} a \times l = \frac{1}{2} a \times n l,$$

que era lo que se queria demostrar, pues  $n \times l$  es el perímetro.

**Escolio.** El área de un polígono cualquiera se determina dividiéndolo en triángulos, hallando las áreas de estos y sumándolos.

66. Ahora puede comprenderse bien la denominacion de *dos dimensiones* dada á la extension superficial: (4) pues para medir una superficie, en general, se multiplican dos líneas que son sus dimensiones. En el paralelogramo la base y la altura son estas dimensiones, así como en el rectángulo y en el triángulo; en el trapecio son la altura y la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos; en el polígono regular la apotema y el perímetro, &c.

## CAPÍTULO V.

### COMPARACION DE LAS ÁREAS.

#### TEOREMA CXVI.

*Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo común ó igual son proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo. (Fig. 128.)*



En efecto, sean los dos triángulos  $ABC$  y  $DBE$  que tienen el ángulo comun  $B$ . Trazo la recta  $AE$ , y tendremos que si en los dos triángulos  $ABE$  y  $DBE$  consideramos como bases respectivamente  $AB$  y  $DB$ , tendrán la misma altura (que será la perpendicular bajada desde el vértice comun  $E$  á la recta  $AB$ ), y por consiguiente sus áreas serán proporcionales á sus bases [*Teor. CXV, cor. 2.º*], luego

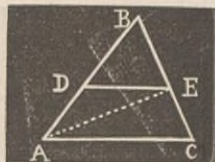


Fig. 128.

$$ABE : DBE :: AB : BD. \quad (a)$$

Por iguales razones tendremos comparando los triángulos  $ABC$  y  $ABE$  que tienen el vértice comun  $A$  y sus lados opuestos en una misma línea recta

$$ABC : ABE :: BC : BE. \quad (b)$$

Multiplicando estas dos proporciones y suprimiendo el factor comun  $ABE$ , resulta el enunciado del teorema

$$ABC : DBE :: AB \times BC : BD \times BE.$$

**Corolario.** Si los dos triángulos son semejantes, es decir, que la recta  $DE$  es paralela á la  $AC$ , el triángulo auxiliar que resulta  $ABE$  (después de trazada la recta  $AE$ ) es medio proporcional entre los dos triángulos propuestos, porque de ser paralela la  $DE$  á la  $AC$ , resulta

$$AB : BD :: BC : BE, \quad [\text{Teor. XCI}]$$

y por tanto, las dos proporciones (a) y (b) tienen una razón igual, por lo que

$$ABC :: ABE : ABE : DBE.$$

#### TEOREMA CXVII.

Las áreas de dos triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos. (Fig. 129)

Los dos triángulos  $ABC$  y  $abc$ , siendo semejantes tendrán sus ángulos homólogos iguales y tendremos por consiguiente [Teor. CXVI]

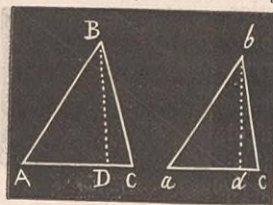


Fig. 129.

$$ABC : abc :: AB \times BC :: ab \times bc \quad (a)$$

Pero también tenemos que los lados homólogos son proporcionales, y por tanto

$$BC : bc :: AB : ab. \quad (b)$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y suprimiendo el factor común  $BC$  de los antecedentes, y el  $bc$  de los consecuentes; resulta

$$ABC : abc :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2. \quad (c)$$

**Corolario.** Las áreas de dos triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas homólogas.

Trazando las alturas  $BD$  y  $bd$  (Fig. 129), los dos triángulos rectángulos  $ABD$  y  $abd$  son semejantes [Teorema XCV, cor. 2.º]; luego

$$AB : ab :: BD : bd, \text{ y por consiguiente } \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{BD}^2 : \overline{bd}^2.$$

Esta proporción y la (c) tienen una razón común, luego finalmente

$$ABC : abc :: \overline{BD}^2 : \overline{bd}^2.$$

### TEOREMA CXVIII.

Las áreas de dos polígonos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados y diagonales homólogas.

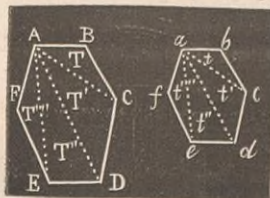


Fig. 130.

(Fig. 130)

Trazando diagonales desde los vértices homólogos  $A$  y  $a$ , quedarán descompuestos los dos polígonos  $ABCDEF$  y  $abcdef$  en igual número de triángulos semejantes y seme-

juntamente dispuestos [Teor. CI]. Llamemos T, T', T''... los triángulos del primero y t, t', t''... sus correspondientes semejantes en el segundo. Tendremos [Teor. anterior]

$$\left. \begin{array}{l} T : t :: \overline{BC^2} : \overline{bc^2} \\ T' : t' :: \overline{CD^2} : \overline{cd^2} \\ T'' : t'' :: \overline{DE^2} : \overline{de^2} \\ \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Pero siendo semejantes los polígonos:} \\ BC : bc :: CD : cd :: DE : de... \text{ y por tanto} \\ \overline{BC^2} : \overline{bc^2} :: \overline{CD^2} : \overline{cd^2} :: \overline{DE^2} : \overline{de^2}... \end{array}$$

Teniendo todas las proporciones primeras una razón igual, se deduce

$$T : t :: T' : t' :: T'' : t'' :: \dots :: \overline{BC^2} : \overline{bc^2}.$$

Luego comparando la suma de todos los antecedentes y de todos los consecuentes con un antecedente y su consecuente

$$T + T' + T'' :: t + t' + t'' :: \overline{BC^2} : \overline{bc^2},$$

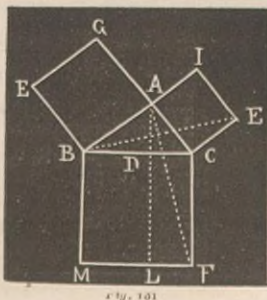
que era lo que se quería demostrar.

Siendo los lados homólogos proporcionales á las diagonales homólogas, es evidente que las áreas de los polígonos son proporcionales á los cuadrados de sus diagonales homólogas.

### TEOREMA CXIX.

*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*  
(Fig. 131.)

Sea el triángulo rectángulo BAC, rectángulo en A; construyamos sobre cada uno de sus tres lados los cuadrados BF, BG y AE (\*); tracemos las rectas AF y BE y bajemos la



(\*) Abreviadamente suelen indicarse los cuadriláteros sólo con dos letras pertenecientes á los vértices de los ángulos opuestos.



perpendicular AD á la hipotenusa del triángulo, prolongándola hasta L.

Tenemos que el triángulo BCE es mitad del cuadrado AE, porque tienen igual base CE é igual altura, toda vez que el vértice B del triángulo está en la misma línea recta que el lado AI del cuadrado, [*Teor.<sup>s</sup> CXI y CXIII*]. Por igual razon el triángulo ACF es mitad del rectángulo DF, pues tienen igual base CF y la misma altura, porque el vértice A del triángulo está en la misma recta que forma el lado opuesto á la base del rectángulo.

Ahora los triángulos susodichos BCE y ACF tienen

$$\text{lado AC} = \text{lado CE y lado CF} = \text{lado BC},$$

por ser respectivamente lados de un mismo cuadrado:

$$\text{ángulo ACF} = \text{ángulo BCE},$$

por componerse cada uno de un ángulo recto y de la parte comun ACB, ó sea el ángulo agudo en C del triángulo propuesto.

Por consiguiente, los triángulos BCE y ACF son iguales [*Teor. XIX*], y siendo uno de ellos equivalente á la mitad del cuadrado AE y el otro equivalente á la mitad del rectángulo DF, el cuadrado y el rectángulo son equivalentes entre sí.

Del mismo modo se demuestra, trazando las rectas CE y MA, que son equivalentes el cuadrado BG y el rectángulo BL, y por tanto la suma de los dos cuadrados contruidos sobre los catetos, es equivalente al cuadrado sobre la hipotenusa. (\*)

### TEOREMA CXX.

*El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas es*

(\*) Este teorema se ha demostrado tambien por la proporcionalidad de las líneas. [*Teor. de Pitágoras.*]

equivalente á la suma de los cuadrados contruidos sobre cada una de ellas, mas el duplo del rectángulo construido sobre las mismas. (Fig. 132)

Sean  $AB$  y  $BC$  las dos rectas dadas, es evidente que su suma será  $AC$ . Construyamos el cuadrado  $AI$  sobre la suma, el cuadrado  $AF$  sobre la  $AB$ , y prolonguemos  $EF$  y  $BF$  hasta  $D$  y  $H$  respectivamente. El cuadrado  $FI$  será el construido sobre  $BC$ , y los dos rectángulos  $GF$  y  $FC$ , tienen evidentemente por base y altura, rectas iguales respectivamente á las dos rectas dadas. Ahora podemos establecer la siguiente igualdad: [*Axioma 3.º*]



Fig. 132.

$$\text{cuadrado } AI = \text{cuadrado } AF + \text{cuadrado } FI + \\ \text{rectángulo } GF + \text{rectángulo } FC;$$

ó bien:

$$\text{cuadrado } AI = \text{cuadrado } AB + \text{cuadrado } FI + \\ 2 \text{ rectángulo } FC. (*)$$

### TEOREMA CXXI.

*El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas, es equivalente á la suma de los cuadrados contruidos sobre cada unade ellas, ménos el duplo del rectángulo construido sobre las mismas. (Fig. 133)*

Sea  $AD$  la mayor de las dos rectas y  $CD$  la menor: la diferencia entre las dos será  $AC$ . Construyamos el cuadrado  $AG$  sobre la  $AD$ , el cuadrado  $LG$  sobre la  $LM = CD$ , el cuadrado  $AL$  sobre la  $AC$  diferencia de las dos rectas, y prolonguemos las rectas  $GE$  y  $MB$  hasta formar el cuadrado  $RE =$  cuadrado  $LG$ . Los rectángulos  $RF$  y  $FD$  serán iguales y tendrán

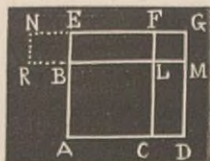


Fig. 133.

(\*) Este teorema de equivalencias corresponde al teorema algebraico  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ .

por base y altura respectivamente las rectas propuesta

Es evidente que

$$\begin{aligned} \text{cuadrado AL} &= \text{cuadrado AG} + \text{cuadrado LG} - \\ \text{rectáng. RF} &- \text{rectáng. FD} = \text{cuadrado AG} + \\ \text{cuadrado LG} &- 2 \text{rectáng. AD} \times \text{CD. (*)} \end{aligned}$$

## TEOREMA CXXII.

*Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo considerados como lados homólogos, se construyen tres polígonos semejantes entre sí, el polígono construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.*

En efecto, llamemos A, B, C, las áreas de los tres polígonos construidos, siendo A la del construido sobre la hipotenusa. Sabemos que estas áreas son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos [*Teor. CXVIII*]; pero por ser rectángulo el triángulo tendremos que unen á sus lados la relacion. [*Teor. de Pitágoras.*]

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ siendo } a \text{ la hipotenusa y } b, c, \text{ los catetos.}$$

Ahora tenemos las proporciones

$$A : B :: a^2 : b^2$$

$$B : C :: b^2 : c^2.$$

De la segunda se deduce que

$$B + C : B :: b^2 + c^2 : b^2,$$

$$\text{ó bien, } B + C : B :: a^2 : b^2;$$

pero esta proporción y la primera tienen tres términos iguales, luego finalmente resulta que

$$A = B + C.$$

(\*) Este teorema corresponde á la propiedad algebraica  $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ . Por equivalencia de figuras podría tambien demostrarse la fórmula  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .



## LIBRO II.

### EXTENSION DE LAS FIGURAS CIRCULARES.

#### CAPÍTULO I.

##### CUERDAS, SECANTES Y TANGENTES.

#### TEOREMA CXXIII.

*Los segmentos de dos cuerdas que se cortan en un punto interior á un círculo, son inversamente proporcionales. (Fig. 134.)*

Si trazamos las cuerdas AC y BD los dos triángulos ACE y BED tienen los ángulos en E iguales por opuestos por el vértice y el ángulo en A = ángulo en D, por inscriptos que abrazan un mismo arco; por consiguiente, estos triángulos son semejantes [Teor. XCV, cor. 1.º], y entre sus lados homólogos tendremos la proporción

$$AE : ED :: EC : EB,$$

que es lo que se quería demostrar.

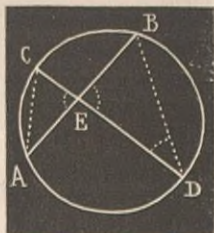


Fig. 134.

#### TEOREMA CXXIV.

*Dos secantes que parten de un mismo punto exterior al círculo, son inversamente proporcionales á sus segmentos externos. (Fig. 135.)*

En efecto, si trazamos las cuerdas DC y EB, los dos triángulos ABE y ADC son semejantes, por tener el ángulo A común y los ángulos B y C iguales por inscriptos que abrazan igual arco.

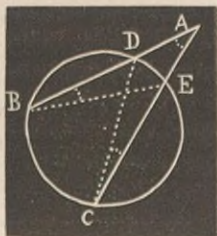


Fig. 135.

De la semejanza de estos triángulos se deduce que

$$AB : AC :: AE : AD.$$

### TEOREMA CXXV.

Si desde un punto fuera de un círculo se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo. (F. 136)

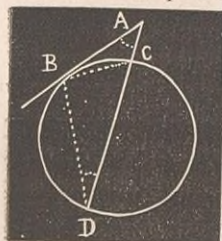


Fig. 136.

En efecto, si trazamos las dos cuerdas BC y BD, los dos triángulos BAC y BAD son semejantes, porque tienen el áng.<sup>o</sup> en A común y los ángulos en B y en D iguales por abrazar un mismo arco. Luego

$$AD : AB :: AB : AC.$$

**Escolio 1.<sup>o</sup>** Puede ocurrir como caso particular que la secante pase por el centro y que la tangente sea igual al diámetro; en tal caso  $AB = CD$ , y por consiguiente la proporción se convierte en esta otra,

$$AD : CD :: CD : AC.$$

Y se dice que la recta AD está dividida en *media y extrema razón*, es decir, en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre toda la recta y la menor.

**Escolio 2.<sup>o</sup>** Los enunciados de los tres últimos teoremas se podrían refundir en el siguiente: *El producto de las distancias de un punto interior ó exterior á un círculo, á dos puntos de la circunferencia tomados en la misma división, es un número constante.*

## CAPÍTULO II.

### RELACION DE LOS LADOS DE ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES INSCRIPTOS CON EL RADIO.

#### TEOREMA CXXVI.

*El lado del exágono regular inscripto, es igual al radio.*  
(Fig. 137.)

Sea AB el lado del exágono, tiro los radios OA y OB y resultará el triángulo AOB. El ángulo en O de este triángulo será igual  $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$  de rectos, luego entre los otros dos valdrán  $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$  de rectos, y como son iguales [Teor. XXV], cada uno de ellos será igual á  $\frac{2}{3}$  de recto. Luego el triángulo AOB es equiángulo, y por consiguiente equilátero, por tanto

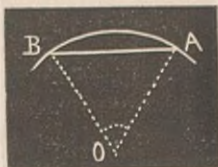


Fig. 137.

$$AB = AO = BO = R.$$

#### TEOREMA CXXVII.

*La razon del lado del cuadrado inscripto en un círculo al radio, es  $\sqrt{2}$*  (Fig. 137.)

Supongamos que AB es el lado del cuadrado inscripto, en tal caso el ángulo en O es recto, y en el triángulo rectángulo AOB tendremos [Teor. de Pitágoras]

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2R^2, \text{ llamando } R \text{ al radio.}$$

$$\text{Luego } \frac{\overline{AB}^2}{R^2} = 2, \text{ ó bien } \frac{AB}{R} = \sqrt{2}. (a)$$

**Escolio.** Siendo  $\sqrt{2}$  un número incommensurable, se deduce que la razon entre el lado del cuadrado inscripto y el radio es incommensurable. La fórmula (a) puede servir para hallar el valor del radio conocido, el del lado del cua-



drado inscripto, y recíprocamente, pues de ella se deducen las dos ecuaciones:

$$AB = R\sqrt{2} \text{ y } R = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

### TEOREMA CXXVIII.

*La razon del lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo al radio, es  $\sqrt{3}$ . (Fig. 138.)*

Trazo el diámetro AC y la cuerda BC, esta será el lado del exágono regular inscripto, toda vez que ABC es media circunferencia, y  $BC = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  circunferencia.

Ahora el triángulo ABC es rectángulo en B [Teor. LXXXI, cor. 2.º], y por tanto

$$AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

y llamando al radio R

$$AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2, \text{ de donde } \frac{AB^2}{R^2} = 3,$$

y finalmente

$$\frac{AB}{R} = \sqrt{3}.$$

Escolio 1.º El lado del triángulo equilátero inscripto y el radio son incommensurables.

Escolio 2.º La apotema del triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del radio; porque los dos triángulos ADO y ABC son semejantes, y por consiguiente

$$AO : AC :: OD : BC.$$

Pero como

$$AO = \frac{1}{2} AC, \text{ tambien } OD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} R.$$

### TEOREMA CXXIX.

*El lado del decágono regular inscripto en un círculo, es igual á la parte mayor del radio dividido en media y extrema razon. (Fig. 139.)*

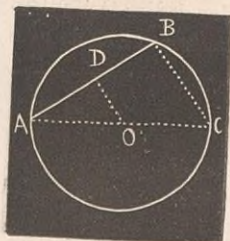


Fig. 138.

Sea AB el lado del decágono regular inscripto, trazo los radios AO y BO, y la bisectriz AD del ángulo OAB.

En el triángulo OAB tendremos [Teorema XCIII]

$$AO : AB :: OD : DB. \quad (a)$$

Pero el ángulo en O vale la décima parte de la circunferencia, esto es  $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$  de recto, luego entre los otros dos ángulos del triángulo OBA valdrán  $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$  de recto, y como son iguales por oponerse á lados iguales, el valor de cada uno será  $\frac{4}{5}$  de recto; pero la AD es bisectriz, y por tanto ángulo  $a =$  ángulo  $b = \frac{2}{5}$  de recto; luego el triángulo DAO es isósceles, esto es,  $OD = AD$ .



Fig. 139.

Ahora en el triángulo ADB tenemos

ángulo  $b = \frac{2}{5}$  de recto; ángulo  $c = \frac{4}{5}$  de recto;  
luego

$$\text{ángulo } ADA = 2 - \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \text{ recto;}$$

y por tanto, el triángulo ADB tambien es isósceles, de donde  $AD = AB$ ; por consiguiente, las tres rectas OD, AD y AB son iguales.

Si sustituimos en la proporción (a) en vez de AO su igual OB y en vez de AB su igual OD, tendremos finalmente:

$$OB : OD :: OD : DB.$$

De modo que el radio está dividido en media y extrema razon, y el lado del exágono AB es igual á la parte mayor OD del radio así dividido.

# CAPÍTULO III.

## MEDIDA DEL CÍRCULO.

### LEMA I. (\*)

*Puede inscribirse en un círculo un polígono regular de un número de lados tan grande, que la diferencia entre el radio del círculo y la apotema del polígono sea menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que esta sea. (F. 140)*

Si consideramos un polígono regular inscripto de cualquier número de lados, despues otro que tenga duplo número que el anterior, para lo que bastará considerar trazadas las cuerdas que unen los puntos medios de los arcos abrazados por el primer polígono [Teorema CXV]; despues otro cuyo número de lados sea duplo que este, é imaginamos que se continúa

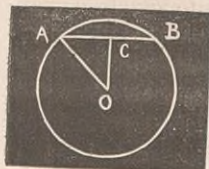


Fig. 140.

esta division indefinidamente: sabemos que los lados de estos polígonos irán siendo cada vez menores y las apotemas se irán aproximando al radio por pertenecer á cuerdas que van disminuyendo [Teorema LXXXVII, cor.]

Cualquiera que sea el polígono tendremos en el triángulo AOC la siguiente relacion entre el lado del polígono  $AB=a$ , el radio  $OA=R$  y la apotema  $OC=r$  [Teorema XVI.]

$$R - r < \frac{a}{2} = \frac{AB}{2} = AC.$$

Pero la cantidad  $a$ , lado del polígono, puede hacerse tan pequeña como se quiera, aumentando suficientemente el

---

(\*) Lema es una proposicion que sirve de base ó preliminar para demostrar otras.



número de lados del polígono inscripto; luego  $R-r$ , que siempre es menor que  $\frac{a}{2}$ ; se puede hacer menor que dicha cantidad, y por tanto menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea.

### LEMA II.

*Se pueden inscribir y circunscribir á un mismo círculo dos polígonos regulares de igual número de lados y tales que la diferencia de sus perímetros sea menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea.*

Llamemos  $P, p$ , los perímetros del polígono regular circunscripto é inscripto, respectivamente,  $R, r$  sus apotemas; sabemos que la apotema del circunscripto es el radio del círculo, esto es, la perpendicular al lado que en tal caso es tangente. Estos polígonos serán semejantes (58) y por tanto

$P : p :: R : r$ , de donde

$$P-p : P :: R-r : R, \text{ ó bien, } P-p = \frac{P}{R} (R-r) \quad (c)$$

Ahora en la igualdad (c) tenemos que  $R-r$ , puede ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que ella sea [*Lema anterior*], y como  $\frac{P}{R}$  es una cantidad esencialmente limitada, resulta que también  $P-p$ , puede ser menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea.

### LEMA III.

*Se pueden inscribir y circunscribir á un círculo dos polígonos regulares semejantes (de igual número de lados), cuyas áreas se diferencien en menos de cualquier cantidad por pequeña que esta sea.*

En efecto, si llamamos  $P$  y  $R$  el perímetro y apotema del polígono regular circunscripto,  $p$  y  $r$  el perímetro y

apotema de su semejante inscripto. Tendremos [Teorema CXV] que

$$\begin{aligned}\text{área del polígono circunscripto} &= \frac{1}{2} P R \\ \text{Id. del polígono inscripto} &= \frac{1}{2} p r.\end{aligned}$$

Ahora la diferencia entre estos dos productos puede llegar á ser ménos que cualquier cantidad dada, porque R puede aproximarse á  $r$ , y  $P$  á  $p$  todo cuanto se quiera [Lemas I y II], luego sus productos tambien pueden aproximarse cuanto se quiera, y por tanto la diferencia entre estos productos será menor que cualquier cantidad dada.

### TEOREMA CXXX.

La circunferencia es el limite superior de los perímetros de los poligonos regulares inscriptos en ella. (Fig. 141.)

Sea  $AB$  el lado de un polígono regular inscripto; si dividimos su arco en dos partes iguales y trazamos las cuerdas  $AC$  y  $CB$ , estas serán los lados de un polígono regular inscripto de duplo número de lados, [Teorema LXXXVII, cor.] y si cada uno de los arcos abrazados por estos se divide á su vez en dos partes iguales y se tiran las cuerdas, estas serán los lados de un nuevo polígono de duplo número de lados, y así podemos continuar indefinidamente. Pero cualquiera que sea el número de lados del polígono inscripto que se considere, siempre se puede concebir otro de duplo número de lados, y entre estos lados tendremos la relacion:

$$AB < AC + CB.$$

Luego los perímetros de los poligonos inscriptos van aumentando á medida que crece el número de sus lados.

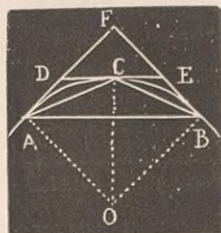


Fig. 141.

Además cualquiera que sea el número de lados tendremos que (5)

$$\text{arco } AC > \text{cuerda } AC,$$

y por tanto, siempre la circunferencia será mayor que el perímetro de un polígono inscripto en ella: luego estos perímetros se van aproximando á la circunferencia á medida que crece el número de lados, y por tanto ella es el *límite superior* de estos perímetros; porque es una cantidad constante á la que se aproxima otra variable tanto como se quiera.

### TEOREMA CXXXI.

*La circunferencia es el límite inferior de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos á ella.* (La misma figura que el anterior)

Sean FA y FB dos medios lados de un polígono regular circunscripto, por el punto medio C del arco ACB, tracemos la tangente DE que será [Teor. LXXXVIII] el lado de un polígono regular de duplo número de lados, siendo DA y EB dos medios lados de este nuevo polígono. En el triángulo DFE tenemos

$$DF + FE > DE.$$

Y sumando á ambos miembros DA y EB y reduciendo

$$FA + FB > DE + DA + EB.$$

Esta igualdad nos manifiesta que dos medios lados, ó sea un lado de un polígono regular circunscripto, es mayor que un lado y dos medios lados, ó sean dos lados, de un polígono regular circunscripto de duplo número de lados que el anterior; luego el perímetro de cualquier polígono regular circunscripto es mayor que el de duplo número de lados; y por tanto los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos disminuyen á medida que aumenta el número de sus lados.



Ahora podemos observar que á medida que aumenta este número de lados, la línea quebrada ADEB se vá aproximando á la circunferencia, y por tanto, que este es el límite inferior de los perímetros de los polígonos circunscriptos, toda vez que la diferencia entre los perímetros de los polígonos inscripto y circunscripto puede llegar á ser tan pequeña como se quiera [*Lema II*] y la circunferencia está siempre comprendida entre ambos perímetros. (\*)

### TEOREMA CXXXII.

*En dos círculos cualesquiera, las circunferencias son proporcionales á los radios ó á los diámetros.*

Si concebimos una série de polígonos regulares circunscriptos á una de las dos circunferencias, cuyos lados vayan siendo duplos, y otra série de polígonos semejantes circunscriptos á la otra circunferencia; tendremos entre sus perímetros y apotemas respectivas P, R y P', R' la proporcion

$$\frac{P}{R} = \frac{P'}{R'} \dots\dots\dots (a)$$

Pero las circunferencias C y C' son los límites inferiores respectivos de los perímetros circunscriptos [*Teorema CXXXI*] y las apotemas R y R' son los radios de dichas circunferencias; luego  $\frac{C}{R}$  y  $\frac{C'}{R'}$  son los límites de las cantidades  $\frac{P}{R}$  y  $\frac{P'}{R'}$ , y como estas son constantemente iguales en sus diversos estados de magnitud, pues siempre se

---

(\*) Esta proposicion y la anterior podrian haberse demostrado fundándose en la siguiente: *Toda línea convexa cerrada, es menor que cualquier otra línea que la envuelve*; pero la demostracion de este teorema tal cual se dá en los tratados elementales, no es completamente rigurosa; y aunque la que hemos dado tampoco lo es, tiene la ventaja, á nuestro entender, de ser más clara.

verificará la proporcion (a), sus límites son iguales; y por tanto

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} \quad \text{ó bien} \quad C : R :: C' : R'.$$

Como los diámetros son duplos de los radios, tambien se verificará que

$$C : 2R :: C' : 2R' \dots\dots\dots (b)$$

**Corolario.** *Cualquiera que sea el círculo que se considere, la relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante. Esta propiedad se deduce inmediatamente de la proporcion (b) que puede ponerse bajo la forma*

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'},$$

la que demuestra que la relacion que existe entre una circunferencia y su diámetro es la misma que la de otra circunferencia cualquiera y su diámetro respectivo.

**Escolio 1.º** El número que representa esta relacion se designa en matemáticas con la letra griega  $\pi$  y es de gran importancia en los cálculos. Se puede demostrar que dicho número está comprendido entre 3 y 4; porque si consideramos el exágono regular inscripto, su perímetro [Teor. CXXVI] será igual á seis radios, y la relacion de este perímetro con el diámetro será el número 3. Si consideramos el cuadrado circunscripto, su lado igual al diámetro, y la relacion de su perímetro con el diámetro igual á cuatro; pero sabemos que la circunferencia es mayor que el perímetro de todo polígono regular inscripto, y menor que el de todo polígono regular circunscripto, y por consiguiente

$\pi$  relacion de la circunferencia al diámetro  $> 3$ , relacion del perímetro del exágono regular inscripto con el diámetro.

$\pi$  relacion de la circunferencia al diámetro  $< 4$ , relacion del perímetro del cuadrado circunscripto con el diámetro.

**Escolio 2.º** De la relacion  $\frac{C}{2R} = \pi$ , se deduce  $C = 2\pi R$ .

Es decir, que para hallar el valor numérico de una circunferencia, basta multiplicar el duplo del número  $\pi$  por el valor numérico del radio. (\*)

### TEOREMA CXXXIII.

*El área de un círculo, es igual á la mitad de l producto de la circunferencia por el radio.*

Supongamos que inscribimos polígonos regulares cuyos lados van aumentando sucesivamente, y llamemos  $P$  el área de uno cualquiera de estos polígonos,  $p$  su perímetro y  $r$  su apotema. Cualquiera que sea el número de sus lados tendremos la relacion constante [*Teor. CXV*]

$$P = \frac{1}{2}pr.$$

Si llamamos  $A$  el área del círculo,  $C$  la circunferencia y  $R$  el radio, es evidente que  $A$  será siempre mayor que el área del polígono inscripto, y que esta se irá aproximando á la del círculo á medida que crezca el número de sus lados; pero tambien el producto  $\frac{1}{2}pr$  se irá aproximando á  $\frac{1}{2}CR$  todo cuanto se quiera; luego las dos cantidades variables  $P$  y  $\frac{1}{2}pr$  que son constantemente iguales, tienen respectivamente por límites  $A$  y  $\frac{1}{2}CR$ ; estos límites, por tanto son iguales, esto es,

$$A = \frac{1}{2}CR,$$

que era lo que se queria demostrar.

Siendo  $C = 2\pi R$  [*Escol. del teor. anterior*], tendremos substituyendo

$$A = \pi R^2.$$

(\*) Esto es lo que se llama rectificar la circunferencia, es decir, hallar una línea recta cuyo valor numérico iguale al de la circunferencia rectificada. Siendo el número  $\pi$  incomensurable como se verá más adelante, tal rectificacion no puede hacerse si no es aproximadamente.



Es decir, que el *área de un círculo es igual al cuadrado de su radio multiplicado por el número constante  $\pi$* .

**Escolio.** La fórmula  $A = \pi R^2$  puede servir para determinar cualquiera de las tres cantidades  $A$ ,  $R$  y  $\pi$  cuando se conoce el valor de las otras dos, pues de ella se deduce que

$$\pi = \frac{A}{R^2}, \quad R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

66. Se llama *sector circular* ó *sector de círculo* la porción de círculo comprendido entre dos radios y el arco.

67. Dos sectores de un mismo círculo ó de círculos iguales son iguales, evidentemente, si abrazan un arco igual.

68. Dos sectores *son semejantes* cuando pertenecen á circunferencias descritas con radios desiguales; pero que abrazan un arco de igual número de grados.

#### PROBLEMA CXXXIV.

*El área de un sector circular, es igual á la mitad del producto de su arco por el radio.*

Segun lo demostrado en el *Teor.* LXXVIII, las áreas de los sectores que tienen igual radio son proporcionales á sus arcos, y por consiguiente el área de su sector será á la del círculo como su arco es á la circunferencia, es decir, llamando  $S$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $C$  respectivamente á estas cuatro cantidades

$$S : A :: a : C.$$

Multiplicando la segunda razon de esta proporcion por  $\frac{1}{2}R$ , tendremos

$$S : A :: a \times \frac{1}{2}R : C \times \frac{1}{2}R.$$

Pero sabemos que  $A = C \times \frac{1}{2}R$  [*Teor. anterior*] luego

$$S = a \times \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}a \times R,$$

que es el enunciado del teorema.

69. Se llama *segmento de círculo* cualquiera de las dos porciones de círculo comprendidas entre una cuerda y cada uno de sus arcos.

### TEOREMA CXXXV.

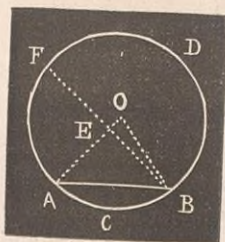


Fig. 142.

*El área de un segmento de círculo, es igual a la mitad del producto del radio por la diferencia, ó la suma, de su arco y la mitad de la cuerda del arco duplo. (Fig. 142)*

1.º Sea el segmento ACB menor que medio círculo. Es evidente que su área se compone de la del sector AOB, menos la del triángulo AOB,

$$\text{área del sector AOB} = \frac{1}{2} AO \times \text{arco ACB}. [\text{Teor. anterior.}]$$

Si consideramos como base del triángulo AOB el lado OA, su altura BE será la mitad de la cuerda BF [Teorema LX] del arco duplo; luego

$$\text{área del triángulo AOB} = \frac{1}{2} AO \times BE.$$

Restando estas dos igualdades, tendremos que

$$\text{área del segmento ACB} = \frac{1}{2} AO (\text{arco ACB} - BE) = \frac{1}{2} R (\text{arco ACB} - BE).$$

2.º Sea el segmento ADB mayor que medio círculo, es evidente que se compone del sector ADB, mas el triángulo AOB. Pero tenemos

$$\text{área del sector ADB} = \frac{1}{2} AO \times \text{arco ADB}.$$

$$\text{área del triángulo AOB} = \frac{1}{2} AO \times BE.$$

Sumando estas dos igualdades, resulta

$$\text{área del segmento ADB} = \frac{1}{2} AO (\text{arco ADB} + BE) = \frac{1}{2} R (\text{arco ADB} + BE).$$

70. Se llama *trapezio circular* la porcion de plano  $ABCD$  (Fig. 143) comprendida entre dos sectores semejantes; y *corona circular* ó *anillo* la parte de plano comprendida entre dos círculos concéntricos.

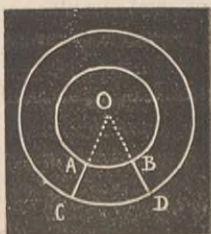


Fig. 143.

Es evidente que el área del trapezio es igual á la diferencia entre los dos sectores  $OCD$  y  $OAB$ , y la de la corona circular la de los dos círculos concéntricos, cuyos radios son  $OC$  y  $OA$ . Llamando á estos radios respectivamente  $R$  y  $r$ , tendremos

$$\begin{aligned} \text{área del trapezio } ABCD &= \frac{1}{2} OC \times CD - \frac{1}{2} OA \times AB = \\ &= \frac{1}{2} R \times CD - \frac{1}{2} r \times AB. \end{aligned}$$

$$\text{área de la corona} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r).$$

**Escolio.** Si hallamos una media proporcional entre las dos rectas  $R + r$  y  $R - r$  y le llamamos  $R'$ , tendremos que  $R'^2 = (R + r)(R - r)$ , y sustituyendo en la expresion del área de la corona circular, resultará

$$\pi (R + r)(R - r) = \pi R'^2.$$

Es decir, que *el área de la corona es equivalente á la de un círculo, cuyo radio sea medio proporcional entre la suma y la diferencia de los radios de los dos círculos que determinan dicha corona.*

### TEOREMA CXXXVI.

*Las áreas de dos círculos, son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

En efecto, es evidente que siendo  $R$  y  $r$  los radios

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2,$$

pues en esta proporcion la primera razon es igual á la segunda multiplicada por el número constante  $\pi$ ; pero los términos de dicha primera razon indican las áreas de los dos círculos.



Como los diámetros son proporcionales á los radios, y los semi-círculos son proporcionales á los círculos, tambien se verifican las proporciones

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: D^2 : d^2, \quad \frac{\pi R^2}{2} : \frac{\pi r^2}{2} :: R^2 : r^2 :: D^2 : d^2.$$

### TEOREMA CXXXVII.

*Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se*

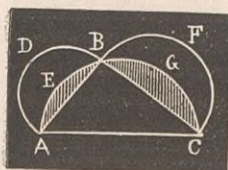


Fig. 144.

*construyen tres semi-círculos, el área del construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos. (Fig. 144)*

En efecto, tenemos por el teorema anterior que las áreas de los tres semi-círculos serán proporcionales á los cuadrados de sus diámetros; pero siendo rectángulo el triángulo ABC, entre sus lados que son los diámetros de los círculos, existe la relacion

$$\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2} \text{ [Teor. de Pitágoras.]}$$

Luego entre las áreas existe la misma relacion, esto es, (si llamamos A, B y C las áreas)

$$A = B + C.$$

**Corolario.** *Si se trazan tres semi-círculos sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, el área de este es equivalente á la suma de las áreas de las dos figuras que limitan los arcos, llamadas lúnulas de Hipócrates. (Fig. 144.)*

En efecto, si del área del semi-círculo trazado sobre la hipotenusa se restan los segmentos AEB y BGC, queda el triángulo, y si del área de los dos semi-círculos trazados sobre cada uno de los catetos se restan dichos segmentos, quedan las lúnulas de Hipócrates: luego

$$\text{área del triáng. ABC} = \text{lúnula ADBEA} + \text{lúnula BFCGB.}$$

## LIBRO III.

PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

### CAPÍTULO I.

CONSTRUCCION DE LAS LINEAS PROPORCIONALES.

#### PROBLEMA XIX.

*Dividir una recta en un número cualquiera de partes iguales. (Fig. 145.)*

Sea por ejemplo, dividir la recta AB en cuatro partes iguales. Por uno de sus extremos A trazo una recta indefinida AC que forme con ella un ángulo cualquiera, y sobre esta con una abertura de

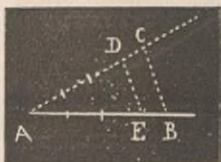


Fig. 145.

compás arbitraria á partir del punto A, tomo cuatro partes iguales, uno el último punto de division C con B, trazo por D (penúltimo punto de division) la paralela DE á la CB, y EB será la cuarta parte de AB, por lo que llevando la EB sobre la AB, quedará esta dividida en cuatro partes iguales.

En efecto, por ser ED paralela á BC sabemos [Teorema XCI], que

$AC : DC :: AB : EB$ , y como  $DC = \frac{1}{4} AC$  por construccion;  
tambien  $EB = \frac{1}{4} AB$ .

**Escolio.** Se podrán tambien trazar paralelas á las CB y DE por los demás puntos de division, y quedará la recta AB dividida en partes iguales. [Teor. LXXXIX]

Este problema puede tambien resolverse fundándose en el teorema CIII.





1.<sup>a</sup> **Construccion.**—Se forma un ángulo cualquiera y sobre uno de sus lados á contar desde el vértice y á continuacion uno de otro, se toman dos segmentos  $AB=M$ ,  $BC=N$ ; en el otro lado se toma el segmento  $AD=P$ , se traza la recta  $BD$

y por el punto  $C$ , se tira la recta  $CE$  paralela á  $BD$ : el segmento  $DE$ , es la cuarta proporcional buscada. En efecto, tenemos por ser la recta  $BD$  paralela á  $CE$ ,

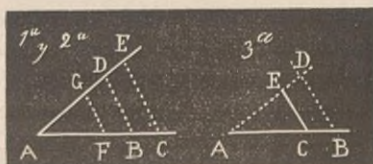


Fig. 147.

$$AB : BC :: AD : DE, \text{ ó bien } M : N :: P : X.$$

2.<sup>a</sup> **Construccion.**—En vez de llevar las dos rectas  $M$  y  $N$  á continuacion una de otra, pueden tomarse á partir del mismo vértice  $A$ ; de manera que  $AB=M$ ,  $AF=N$ ,  $AD=P$ , trazando la recta  $BD$  y por el punto  $F$  la paralela  $FG$ , la recta  $AG$  será la cuarta proporcional. En efecto, tenemos

$$AB : AF :: AD : AG, \text{ ó bien } M : N :: P : X.$$

Esta construccion es preferible á la anterior, porque la figura ocupa ménos extension.

3.<sup>a</sup> **Construccion.**—Sobre una recta cualquiera y á partir de un mismo punto  $A$  tomemos  $AB=M$ ,  $AC=N$ , y por el punto  $B$  tracemos una recta que forme con la  $AB$  un ángulo cualquiera, tomando en ella  $BD=P$ . Unamos  $A$  con  $D$  y por el punto  $C$  trazamos la paralela  $CE$  que será la cuarta proporcional. En efecto, en los triángulos semejantes  $ABD$  y  $ACE$  tenemos

$$AB : AC :: BD : CE, \text{ ó bien } M : N :: P : X.$$

## PROBLEMA XXII.

**Construir una tercera proporcional á dos rectas dadas.**  
(Fig. 148.)

Este problema no es más que un caso particular del anterior, pues se reduce á construir una recta que forme el último término de una proporción geométrica continua; por consiguiente, bastará en las construcciones del problema anterior suponer  $N=P$ ; pero conviene en algunos casos emplear otras que vamos á indicar. Supongamos  $M$  y  $N$  las dos rectas dadas.

1.<sup>a</sup> Construcción.—Sobre una recta indefinida tome-

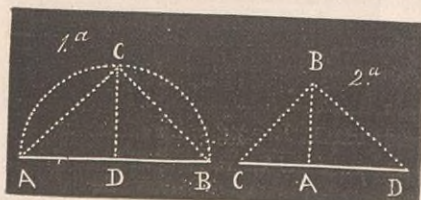


Fig. 148.

mos una parte  $AB=M$ , y construyamos sobre ella como diámetro una semi-circunferencia. Desde el punto

$A$  con un radio  $AC=N$ , tracemos un arco que corte á la semi-circunferencia en el punto  $C$ ; bajemos la perpendicular  $CD$  al diámetro  $AB$ , y el segmento  $AD$ , será la tercera proporcional. En efecto, sabemos [*Teor. CV, cor.*] que

$$AB : AC :: AC : AD, \text{ ó bien } M : N :: N : X.$$

2.<sup>a</sup> Construcción.—En un punto cualquiera  $A$  de una recta levantemos una perpendicular  $AB=N$ , y desde el mismo punto  $A$  tomemos  $AC=M$ ; uniendo  $C$  con  $B$  y trazando la  $BD$  perpendicular á  $CB$ , la recta  $AD$  será la tercera proporcional. En efecto, en el triángulo rectángulo  $CBD$  tenemos [*Teor. CIV*]

$$AC : AB :: AB : AD, \text{ ó sea } M : N :: N : X.$$

### PROBLEMA XXIII.

Construir una media proporcional á dos rectas dadas.  
(Fig. 149.)

Llamemos  $M$  y  $N$  las dos rectas dadas.

1.<sup>a</sup> **Construccion.**—Sobre una recta indefinida tomemos á continuacion una de otra, dos partes  $AB=M$  y  $BC=N$ ; construyamos sobre  $AC=M+N$  una semi-circunferencia y levantando en el punto B la perpendicular BD al diámetro, esta será la média proporcional. En efecto, sabemos [Teor. CIV, cor.] que

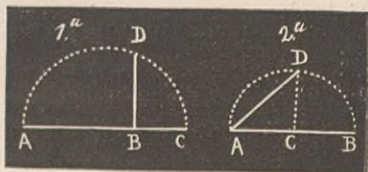


Fig. 149.

$$AB : BD :: BD : BC, \text{ ó bien } M : X :: X : N.$$

2.<sup>a</sup> **Construccion.**—Sobre una recta indefinida tomemos  $AB=M$  y  $AC=N$ , sobre AB como diámetro construyamos una semi-circunferencia y levantemos por el punto C la perpendicular CD, la cuerda AD [Teor. CV, cor.] es média proporcional entre AB y AC, esto es, entre M y N. (\*)

## PROBLEMA XXIV.

*Dividir una recta en média y extrema razon.* (Fig. 150)

En uno de los extremos A de la recta dada AB, levanto la perpendicular  $AO=\frac{1}{2}AB$ , y desde el punto O con el radio OA trazo una circunferencia. Tiro la recta BO que prolongo hasta C, y llevando la recta BD sobre la AB, en el punto E estará AB dividida en média y extrema razon.

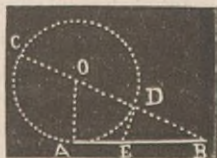


Fig. 150.

(\*) Podrian tambien construirse las cuartas, terceras y médias proporcionales apoyándose en las propiedades demostradas en los teoremas CXXIII, CXXIV y CXXV; pero las construcciones no serian tan fáciles.



En efecto, sabemos [Teor. CXXV] que

$$BC : AB :: AB : DB,$$

de donde

$$BC - AB : AB :: AB - DB : DB.$$

Pero por construccion  $AB = CD$  y  $DB = BE$ , y por consiguiente

$$EB : AB :: AE : EB, \text{ ó bien } AB : EB :: EB : AE.$$

Luego la recta  $AB$  está dividida en média y extrema razon en el punto  $E$ .

**Escolio.** Sabemos tambien que la secante  $CB$  está dividida en  $D$  en média y extrema razon. [Escolio del teorema CXXV].

## CAPÍTULO II.

INSCRIPCION Y CIRCUNSCRIPCION DE LOS POLÍGONOS  
REGULARES.

### PROBLEMA XXV.

*Dado un círculo, inscribirle ó circunscribirle un exágono regular.*

Para inscribir el exágono basta llevar el radio del círculo sobre la circunferencia que quedará así dividida en seis arcos iguales [Teor. CXXVI], y trazar las cuerdas correspondientes á estos arcos.

Si por los puntos de division de la circunferencia se trazan tangentes, quedará circunscripto al círculo un exágono regular. [Teor. LXXXVII.]

### PROBLEMA XXVI.

*Dado un círculo, inscribirle ó circunscribirle un triángulo equilátero.*

Procédase como para inscribir el exágono regular, y trácese las cuerdas de los arcos duplos, con lo que quedará

un triángulo equilátero inscripto; ó bien trácense tangentes por los vértices de este triángulo [*Teor.* LXXXVII].

### PROBLEMA XXVII.

*Dados un círculo, inscribirle ó circunscribirle un cuadrado.*

Tirando dos diámetros perpendiculares entre sí y uniendo por cuerdas sus extremos quedará inscripto el cuadrado, pues estos diámetros dividen la circunferencia en cuatro partes iguales [*Teor.* LXXXVI]. Trazando tangentes por estos puntos de division se tendrá el cuadrado circunscripto.

### PROBLEMA XXVIII.

*Dado un círculo, inscribirle ó circunscribirle un decágono regular.*

Divídase el radio en média y extrema razon [*Problema* XXIV], llevando la parte mayor de él como cuerda, quedará dividida la circunferencia en diez partes iguales [*Teor.* CXXIX], y trazando las cuerdas quedará inscripto el decágono.

Para circunscribir un decágono regular se tiran las tangentes por los puntos de division.

### PROBLEMA XXIX.

*Dado un círculo, inscribirle ó circunscribirle un pentágono regular.*

Procédase como para el decágono y trácense las cuerdas de los arcos duplos, con lo que el pentágono quedará inscripto.

Trazando tangentes por los vértices de este, quedará circunscripto un pentágono regular.

### PROBLEMA XXX.

*Dado un círculo, inscribirle ó circunscribirle un pentedecágono regular.*

El problema quedará resuelto si dividimos la circunferencia en quince partes iguales, pues trazando las cuerdas que unen estos puntos, ó tangentes por ellos, quedarán inscripto ó circunscripto, respectivamente, un pentedécagono regular. [Teor. LXXXVII.]

Si se toma sobre el círculo el arco del exágono regular que vale  $\frac{1}{6}$  de la circunferencia, y desde uno de sus extremos el del decágono [Prob. XXVIII] que vale  $\frac{1}{10}$ , la diferencia será

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15},$$

es decir, el arco que abraza el pentedécagono, luego si la cuerda de este arco se lleva sobre la circunferencia, quedará esta dividida en quince partes iguales.

**Escolio general.** Sabemos que estando inscripto ó circunscripto un polígono regular en un círculo, se puede inscribir ó circunscribir otro de doble número de lados [Teor. LXXXVIII], por consiguiente, se pueden inscribir ó circunscribir en un círculo los polígonos regulares que indican las progresiones siguientes:

|     |     |     |      |      |          |
|-----|-----|-----|------|------|----------|
| 3,  | 6,  | 12, | 24,  | 48,  | 96.....  |
| 4,  | 8,  | 16, | 32,  | 64,  | 128..... |
| 5,  | 10, | 20, | 40,  | 80,  | 160..... |
| 15, | 30, | 60, | 120, | 240, | 480..... |

### PROBLEMA XXXI.

*Dado el valor de un lado del polígono regular inscripto,*

*hallar el valor del lado del polígono regular circunscripto semejante al propuesto. (Fig. 151.)*

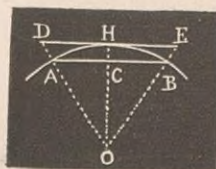


Fig. 151.

Sea  $AB=m$  el lado del polígono regular inscripto: trazando el radio OH perpendicular á la cuerda, y la tangente  $DE=n$  por el punto

H, esta será el lado del polígono regular circunscripto y semejante al propuesto. [Teorema LXXXVIII.]



Los dos triángulos OAB y ODE son semejantes y por consiguiente [Teor. XCIV]

$$OC : OH :: AB : DE, \text{ ó bien, } OC : R :: m : n \quad (a)$$

Pero en el triángulo rectángulo OAC, tenemos que el cateto

$$OC = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}m^2}.$$

Sustituyendo este valor de OC en la proporción (a) tendremos

$$\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}m^2} : R :: m : n,$$

de donde despejando finalmente á  $n$ , ó sea el valor del lado del polígono regular circunscripto

$$n = \frac{R \times m}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}m^2}} \quad (b)$$

**Escolio.** La relación que expresa la ecuación (b) puede servir para hallar una cualquiera de las tres cantidades,  $m$ ,  $n$  ó  $R$ , conocidas las otras dos, y por consiguiente con ella pueden resolverse tres problemas distintos.

## PROBLEMA XXXII.

*Dado el valor de un lado de un polígono regular inscripto, hallar el valor del lado del polígono regular inscripto de duplo número de lados. (F. 152)*

Sean  $AB = m$  el lado conocido,  $AC = n$  el del lado del polígono de doble número de lados que se quiere conocer, y  $R$  el radio del círculo que se supone conocido. El ángulo AOC necesariamente es agudo, porque es mitad del AOB

[Teor. II, cor, 4.º], y por consiguiente, en el triángulo

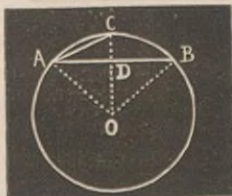


Fig. 152.

AOC la recta  $AC = n$ , se opone á un ángulo agudo, por lo que tendremos la relacion [Teor. CVII]

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times OD,$$

ó bien substituyendo los valores convenidos

$$n^2 = 2R^2 - 2R \times OD.$$

Pero en el triángulo OAD el cateto  $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} =$

$$\sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}, \text{ luego finalmente } n^2 = 2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}$$

$$\text{y extrayendo raiz cuadrada } n = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}}$$

**Escolio.** La relacion que expresa la ecuacion anterior puede servir para determinar una cualquiera de las tres cantidades  $m$ ,  $n$  y  $R$ , conocidas las otras dos.

### PROBLEMA XXXIII.

*Conocidos los valores de los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscripto y otro circunscripto á un mismo círculo; calcular los perímetros de los polígonos regulares inscripto y circunscripto de duplo número de lados. (Fig. 153.)*

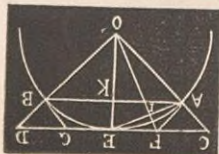


Fig. 153.

1.º Sean  $CD$  y  $AB$  los lados de los polígonos semejantes cuyos perímetros  $P$  y  $p$  son conocidos; tracemos el radio  $OE$  y por los puntos  $A$  y  $B$  las tangentes  $AF$  y  $BG$  y la cuerda  $AE$ . Los lados de los polígonos inscripto y circunscripto de duplo número de lados serán respectivamente  $AE$  y  $FG$ .

Entre los perímetros y los radios de los polígonos conocidos tendremos la proporcion

$$P : p :: CO : AO = OE.$$

Pero siendo OF bisectriz del ángulo en O, tendremos  
[Teor. XCIII],  $CO : OE :: CF : FE$ .

Teniendo estas dos proporciones una razon comun, resulta:

$$P : p :: CF : FE, \text{ de donde } P + p : 2p :: CF + FE : 2FE, (a)$$

Observemos que

$CF + FE = CE =$  la mitad del lado del polígono circunscripto.

$2FE = FG =$  lado del polígono circunscripto de duplo número de lados que el propuesto.

Pero la relacion entre las dos rectas CE y FG, es la misma que la de los perímetros P y P' de los dos polígonos circunscriptos (siendo P' el perímetro del polígono de duplo número de lados); porque CE está contenida tantas veces en P, como FG en P'. Por consiguiente, la proporcion (a) puede ponerse bajo la forma

$$P + p : 2p :: P : P', \text{ de donde } P' = \frac{P \times 2p}{P + p} \dots\dots (a')$$

2.º Para calcular el perímetro p' del polígono regular inscripto de duplo número de lados que el propuesto, observaremos que los dos triángulos FIE y AEK tienen iguales sus ángulos, y por consiguiente, son semejantes, de donde resulta

$$EI : FE :: AK : AE.$$

Pero EI y FE que son respectivamente mitades de un lado de los perímetros p' y P' de los polígonos inscripto y circunscripto de duplo número de lados que los conocidos, estarán en la misma relacion que estos perímetros: y AK y AE que están contenidas un mismo número de veces, respectivamente en p y p', estarán en la relacion de estos perímetros, luego de la proporcion última se deduce que

$$p' : P' :: p : p', \text{ de donde } p' = \sqrt{P'p} \quad (b)$$



# CAPÍTULO III.

SEMEJANZA Y EQUIVALENCIA DE LOS POLÍGONOS.

## PROBLEMA XXXIV.

*Sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de un lado de un triángulo, construir otro triángulo semejante á él. (Fig. 154)*

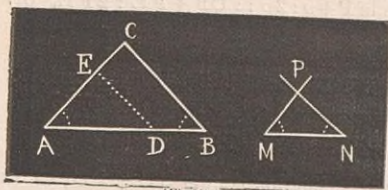


Fig. 154.

1.<sup>a</sup> Construcción.

—Sea la recta dada MN. Construyo en

una de sus extremidades un ángulo  $M=A$  del triángulo dado, y en la otra extremidad un ángulo  $N=B$ ; el triángulo MPN que así resulta es semejante al ABC. [Teorema XCV, cor. 1.<sup>o</sup>]

2.<sup>a</sup> Construcción. —Sobre la recta AB (ó sobre su prolongacion si  $MN > AB$ ) tomo la recta  $AD=MN$ , por el punto D trazola paralela DE al lado CB; el triángulo ADE que así resulta es semejante al propuesto ABC, y tiene un lado  $AD=MN$ . Luego si sobre MN construyo un triángulo MPN igual al ADE [Prob. VIII], este triángulo será el pedido.

## PROBLEMA XXXV.

*Sobre una recta considerada como lado homólogo de un polígono dado, construir un polígono que sea semejante al dado. (Fig. 155)*

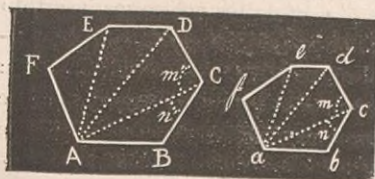


Fig. 155.

Sea el polígono ABCDEF, y la recta dada  $ab$ , que se con-

sidera como lado homólogo de AB. Trazo las diagonales

AC, AD y AE. Construyo sobre  $ab$  el triángulo  $abc$  semejante al ABC [*Problema anterior*], y sobre  $ac$  el triángulo  $acd$  semejante con el ACD, y así sucesivamente. El polígono  $abcdef$  que resulta es semejante al ABCDEF [*Teor. C.*]

### PROBLEMA XXXVI.

*Dado un polígono, construir otro semejante con él, y tal que las áreas de ellos estén en la relación  $m : n$ . (Fig. 156)*

Si pudiéramos obtener un lado del polígono que se desea construir, el problema quedaria reducido al precedente.

**Análisis.** Sea  $P$  el área del polígono dado,  $X$  el del que se desea construir,  $a$  un lado del primero, y  $x$  su homólogo en el segundo. Por ser semejantes los polígonos tendremos

$$P : X :: a^2 : x^2,$$

y por el enunciado del problema

$$P : X :: m : n,$$

luego

$$m : n :: a^2 : x^2 \quad (a)$$

Vemos, pues, que los cuadrados de los lados homólogos son proporcionales á las cantidades conocidas  $m$  y  $n$ .

**Síntesis.** Sobre una recta cualquiera tomemos á continuación una de otra, dos partes  $AB=m$  y  $BC=n$ , y sobre la recta AC como diámetro tracemos una semicircunferencia. Tiremos la perpendicular BD al diámetro y las cuerdas AD y DC.

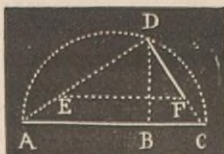


Fig. 156.

Ahora desde el punto D tomemos  $DE=a$  (prolongando la DA si fuese necesario) y trazando la paralela EF al diámetro, la recta DF es el lado  $x$  del polígono, homólogo con el lado  $a$ .

En efecto, tenemos que [*Teor. XCIV.*]

$AD : CD :: DE : DF$ , y por tanto,  $\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{DF}^2$ .

Pero sabemos que [*Teor. CV, cor. 2.º*]

$$\overline{AD}^2 : \overline{CD}^2 :: AB : BC :: m : n.$$

Luego

$$m : n :: \overline{DE}^2 : \overline{DF}^2, \text{ ó bien, } m : n :: a^2 : \overline{DF}^2. \quad (b)$$

Comparando las dos proporciones (a) y (b) vemos que tienen tres términos iguales; luego

$$x^2 = \overline{DF}^2, \text{ ó bien, } x = DF,$$

lado del polígono que se desea construir.

### PROBLEMA XXXVII.

*Dado un polígono reducirlo á otro equivalente que tenga un lado ménos.* (Fig. 157)

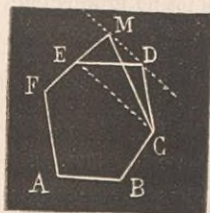


Fig. 157.

Sea el polígono  $ABCDEF$ , trazo una diagonal  $EC$  que con dos lados consecutivos forme un triángulo  $EDC$ . Por el vértice  $D$  del triángulo tiro la paralela  $DM$  á la diagonal  $EC$ , y prolongo el lado del polígono  $FE$  hasta que en  $M$  encuentre á dicha paralela.

Trazo la recta  $CM$  y el polígono  $ABCMF$  es el que se desea obtener.

En efecto, los dos triángulos  $EMC$  y  $EDC$  son equivalentes [*Teor. CXV, cor. 1.º*]; pero si agregamos cada uno de estos triángulos á la figura  $ABCEF$ , resultan respectivamente los polígonos  $ABCMF$  y  $ABCDEF$ .

### PROBLEMA XXXVIII.

*Dado un polígono, reducirlo á triángulo equivalente.*

Se reduce el polígono á otro equivalente que tenga un lado ménos, el polígono que resulte á otro equivalente que



tenga un lado ménos, y así se continúa hasta llegar al triángulo que será equivalente al polígono propuesto, y tambien á todos los intermedios.

### PROBLEMA XXXIX.

*Dado un triángulo, reducirlo á cuadrado equivalente.*

Se halla una média proporcional entre la mitad de la base y la altura del triángulo, y esta recta será el lado del cuadrado.

En efecto, siendo  $x$  la média proporcional hallada entre la mitad de la base  $\frac{1}{2}b$ , y la altura  $a$ , tendremos la proporción

$$\frac{1}{2}b : x :: x : a, \text{ ó bien } x^2 = \frac{1}{2}ba.$$

Pero  $x^2$  representa el área de un cuadrado cuyo lado es  $x$ , y  $\frac{1}{2}ba$  el área del triángulo propuesto.

### PROBLEMA XL.

*Dado un polígono, reducirlo á cuadrado equivalente.*

Se reduce á triángulo y despues éste á cuadrado.

### PROBLEMA XLI.

*Dado un paralelógramo ó un rectángulo, reducirlo á cuadrado equivalente.*

Se halla una média proporcional entre la base y la altura del paralelógramo ó el rectángulo; y el cuadrado construido sobre dicha média proporcional será el equivalente. (\*)

---

(\*) La demostracion es igual á la del problema XXXIX.

## CAPÍTULO IV.

### PROBLEMAS RELATIVOS Á LA CIRCUNFERENCIA Y AL CÍRCULO.

#### PROBLEMA XLII.

**Hallar la razon aproximada de la circunferencia rectificada con el diámetro.**

Sabemos que la relacion que existe entre una circunferencia y su diámetro es igual á la de otra circunferencia cualquiera con su diámetro respectivo. De manera, que determinada dicha relacion para un círculo, el problema queda resuelto.

Supongamos un círculo cuyo radio tomamos por unidad, y en él inscripto un exágono regular. El perímetro de este exágono valdrá 6 [Teorema CXXVI], y la relacion de este perímetro con el diámetro será  $\frac{6}{2}=3$ .

Supongamos inscripto en el mismo círculo un dodecágono regular, el valor de su lado podemos calcularlo por la fórmula del problema XXXII, la que nos dá

Valor del lado del dodecágono regular inscripto  $n = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Idem id. del perímetro de id. id.  $p = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Relacion del perímetro del dodecá-

gono al diámetro .....  $= \frac{12\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Con el auxilio de la citada fórmula del problema XXXII, podríamos hallar el valor del lado del polígono regular de 24 lados, inscripto en el mismo círculo, cuyo radio hemos supuesto igual á la unidad, y encontraremos que la relacion del perímetro al radio será

$$12\sqrt{2 - \sqrt{4 - n^2}}$$

siendo el valor del lado del dodecágono regular inscripto.

Continuando este mismo procedimiento, podríamos hallar los valores de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos de 48, 96, 192, 384..... lados, y por tanto, sus relaciones con el diámetro, cuyo valor constante es 2.

Ahora, sabemos que á medida que el número de lados de los polígonos inscriptos crece, sus perímetros se van aproximando á la circunferencia que es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, luego tomando un polígono inscripto de suficiente número de lados, la relacion de su perímetro con el diámetro (es decir, su semiperímetro) puede tomarse como valor de  $\pi$ , aproximado hasta donde se quiera. (\*)

Para calcular el error cometido al tomar por valor de  $\pi$  la relacion entre el perímetro de un polígono inscripto con el diámetro, bastará hallar por medio de la fórmula del problema XXXI, al valor del lado del polígono regular circunscripto semejante con el inscripto, y la relacion de su perímetro con el diámetro del círculo; y la relacion de la circunferencia al diámetro, ó sea el número  $\pi$ , estará comprendida entre dichas dos relaciones.

Así, por ejemplo, si en la série sucesiva de cálculos que hemos indicado, llegásemos al polígono regular inscripto de 96 lados, veríamos que el valor de su perímetro (tomando siempre el radio por unidad), es 6,282, y el del semejante circunscripto 6,285, luego

|                                                                                |       |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Relacion del perímetro al diámetro del polígono inscripto de 96 lados.....     | 3,141 |
| Relacion del perímetro al diámetro del polígono circunscripto de 96 lados..... | 3,142 |

---

(\*) M. Legendre ha demostrado no sólo la incomensurabilidad del número  $\pi$ , sino es tambien la de su cuadrado. Siendo incomensurable la relacion expresada por el número  $\pi$ , es evidente que todos los valores en que entre dicho número son aproximados.



Relacion de la circunferencia al diámetro

en ménos de una milésima.....  $\pi = 3,141$  (\*)

Conviene conocer los siguientes valores aproximados del número  $\pi$  determinados por varios geómetras.

|                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| ARQUÍMEDES .....    | $\frac{22}{7}$    |
| Adriano Mecio ..... | $\frac{355}{113}$ |
| Ricart.....         | $\frac{333}{106}$ |

Veamos ahora el valor de  $\pi$ , obtenido con aproximacion de 150 cifras decimales, y los de su logaritmo, raiz cuadrada, &c.

$$\pi = \begin{cases} 3,1415926535 & 8979323846 & 2643383279 & 5028841971 & 6939937510 \\ 5820974944 & 5923078164 & 0628620899 & 8628034825 & 3421170679 \\ 8214808651 & 3282306647 & 0938446095 & 5058237172 & 5359408128 \end{cases}$$

$$\log. \pi = 0,4971498726 \quad 9413385435 \quad 1268288291$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098861 \quad 83791. \quad \sqrt{\pi} = 1,7724538.$$

### PROBLEMA XLIII.

*Dado un arco de circunferencia valuado en grados, hallar su relacion con el radio ó con el diámetro, tomados por unidad.*

Siendo  $\pi$  la relacion de la circunferencia al diámetro, ó de la semi-circunferencia al radio, es evidente que  $\frac{n}{2}$  será la relacion del cuadrante rectificado al radio; luego sabiendo la relacion que existe entre el arco dado  $A$  y el cuadrante (relacion que se expresa por la del número de grados, minutos y segundos que mide el arco comparados

(\*) El valor aproximado de  $\pi$  se puede hallar por el procedimiento de los polígonos isoperímetros y por el de las áreas; pero no hemos creído oportuno el consignarlos, porque hay otros procedimientos mas rápidos y exactos; pero que no pertenecen á la geometría elemental: con ellos se ha calculado el valor de  $\pi$  aproximado hasta 150 cifras decimales.

con los  $90^\circ$  que mide el cuadrante); multiplicando el número abstracto que representa esta relacion por  $\frac{\pi}{2}$  este producto será la relacion del arco rectificado con el radio. De modo, que siendo  $m$  esta relacion, tendremos

$$A = m \times \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO.—¿Cuánto será el valor de un arco de  $30^\circ$  tomando por unidad al radio?

En este caso  $m$  es igual á  $\frac{1}{3}$ ; porque  $\frac{30^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{3}$ , luego

$$A = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} = 0.52359.....$$

Si quisiéramos determinar la relacion del arco rectificado con el diámetro, la forma seria

$$A = m \times \frac{\pi}{4}.$$

Siendo evidente que en todos los casos el valor del arco seria la mitad que si se tomase por unidad al radio.

#### PROBLEMA XLIV. [Recíproco del anterior]

*Conocido el valor de un arco rectificado y comparado con el radio, hallar su valor en grados.*

De la fórmula  $A = m \times \frac{\pi}{1}$  obtenida en el problema anterior se deduce

$$m = A : \frac{\pi}{2} = \frac{2A}{\pi}.$$

EJEMPLO.—¿Cuántos grados tendrá un arco cuyo valor numérico es 2, es decir, que rectificado es igual al diámetro?

$$m = \frac{2 \times 2}{\pi} = \frac{360^\circ}{3.141595} = 114^\circ, 559156.$$

# APÉNDICE

## DE LA GEOMETRÍA PLANA.

### CAPÍTULO I.

#### NOCIONES SOBRE LOS EJES Y CENTROS DE SIMETRÍA.

**Simetría.** Las figuras que están situadas en un mismo plano pueden ser *simétricas* respecto á un punto, que se llama *centro de simetría*; ó respecto á una recta que en tal caso se denomina *eje de simetría*.

**Centro de simetría.** Todo punto que tiene la propiedad de dividir en dos partes iguales á todas las rectas que pasan por él y terminan en el contorno de una figura cualquiera (terminada por una curva ó por líneas rectas), se llama **centro de simetría**, ó simplemente **centro**. (Fig. 158.) Así el punto O es centro del polígono ABCDEF, si satisface á la condición de que cualquier recta MN que pasa por él queda dividida en dos partes  $MO = ON$ .

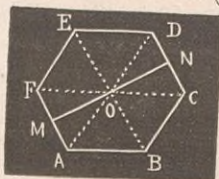


Fig. 158.

Como consecuencias de esta definición tenemos:

- 1.º Que el centro de curvatura de un círculo, es á la vez centro de figura y de simetría.
- 2.º Que el centro del círculo inscripto ó circunscripto á un polígono regular, de un número par de lados, es centro de simetría de dicho polígono.
- 3.º Que el punto de concurso de las diagonales de un paralelogramo, de un rectángulo, de un rombo ó de un cuadrado, es centro de cada uno de estos cuadriláteros.



**Centro de simetría de dos figuras.** *Dos figuras cualesquiera son simétricas respecto á un punto, ó tienen un centro de simetría, cuando cualquier recta que pasa por dicho punto y termina en su contorno queda dividida en dos partes iguales.* (Fig. 159.)

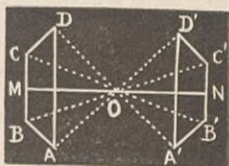


Fig. 159.

De manera que el punto O es centro de simetría de las dos figuras ABCD y A'B'C'D', si cualquier recta MN que pase por O y termine en sus contornos satisface á la condicion de quedar dividida en dos partes  $OM = ON$ .

**Eje de simetría.** *Dos puntos son simétricos respecto á una recta, ó una recta es eje de simetría de dos puntos, si estos se hallan situados en la misma perpendicular á dicha recta y á igual distancia de ella.* (Fig. 160.)

De manera que los puntos A y A', B y B', C y C', D y D' &c., son simétricos con respecto á la recta MN, si se hallan en las perpendiculares AA', BB', CC', DD'.... á dicha recta y á iguales distancias de MN, que lleva el nombre de *eje de simetría*.

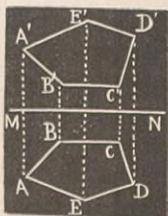


Fig. 160.

Son simétricos dos polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' con respecto á la recta MN, si lo son sus vértices. En tal caso todas las rectas perpendiculares á la MN, que encuentren al perímetro quedan divididas en partes iguales por dicha recta.

*Dos partes de polígono son simétricas con respecto á una recta, cuando las rectas que unen sus vértices dos á dos, son perpendiculares á ella y quedan divididas en dos partes iguales.* (Fig. 161)

Las porciones de polígono ABCD y A'B'C'D' son simétricas respecto al eje MN.

El *diámetro* de un círculo es uno de sus ejes de simetría. La *bisectriz* de un ángulo es un eje de simetría de sus lados. La línea de los centros de dos círculos es *eje de simetría* de estos dos círculos.

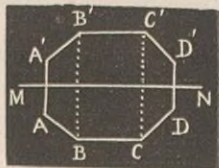


Fig. 161.

*Dos figuras simétricas son superponibles.*

*Toda figura que tiene dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, tiene por centro de simetría la comun interseccion de ellos.*

## CAPÍTULO II.

### NOCIONES SOBRE LAS CURVAS. — ELIPSE, PARÁBOLA É HIPÉRBOLA.

**Definicion general.** Las curvas se consideran, en general, como líneas quebradas compuestas de infinitos lados, infinitamente pequeños, cada uno de los cuales se llama un *elemento* de la curva. En tal concepto se considera á la circunferencia (única curva que se estudia en la Geometría elemental) como un polígono regular compuesto de infinitos lados, infinitamente pequeños.

**Tangente y normal.** La *tangente* en un punto de una curva es la prolongacion del elemento de ella en dicho punto, y se considera como una secante tal que sus dos puntos de interseccion se reunen en un sólo elemento infinitesimal. La *normal* es la perpendicular á la tangente.

**Círculo osculador.** Es evidente que por un punto B (F. 162) de una curva se pueden hacer pasar muchas circunferencias

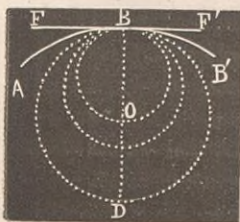


Fig. 162.

que tengan un elemento comun con ella y por consiguiente que tengan con la curva la tangente comun FF', que lo es de la curva en el punto B; pero entre todos estos círculos hay uno que se aproxima á la curva más que todos los demás y que por esta circunstancia se llama *círculo osculador*; cuya propiedad fundamental es

que tiene dos *elementos consecutivos* de la curva comun con él; por cuya razon tiene dos tangentes consecutivas comunes. De modo que siendo DB el diámetro del círculo osculador de la curva ABB', en el punto B existen dos elementos comunes á la curva y al círculo. Como dos elementos comunes determinan tres puntos que no están en línea recta, se comprende que en

un punto dado no puede existir más que un círculo osculador, para una curva determinada.

**Radio y centro de curvatura.** Se llama *centro de curvatura* de una curva en un punto cualquiera B (Fig. 162) el centro O del círculo osculador, y *radio de curvatura* del mismo punto al radio OB del expresado círculo.

**Convexidad y concavidad.** En las curvas *convexas y cerradas* (esto es, que limitan una parte de plano) la tangente no corta nunca á la curva; pero en las *cóncavas* puede la tangente en un punto ser secante en otro ú otros. La curva ABCD es convexa (Fig. 163) y la A'B'C'D' cóncava: vemos que la tangente MN en la primera es toda exterior á ella, á excepcion del punto de contacto, y en la segunda la tangente en el punto  $m'$  es secante en los puntos  $p'$  y  $q'$ . Puede tambien observarse que los radios de curvatura de la curva convexa ABCD se dirigen hácia la parte interior de la curva, y en la porcion cóncava de la curva A'B'C'D' (que se halla en las proximidades del punto  $m'$ ), los radios de curvatura son exteriores á la porcion de plano circunscripto por la curva.

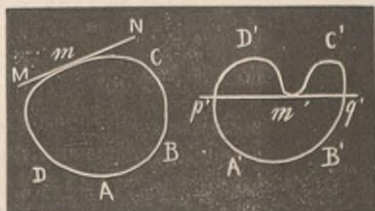


Fig. 163

**Punto de inflexion.** Cuando una curva cambia en un punto la direccion de su curvatura, esto es, de convexa se transforma en cóncava, ó recíprocamente, dicho punto se llama de *inflexion*. (Fig. 164)

El punto  $a$  es de inflexion en la curva  $abcdef$ . La tangente en el punto de inflexion es secante de la curva en otro punto.

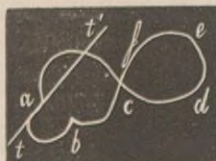


Fig. 164.

**Punto de retroceso.** El punto  $b$  en que una curva bruscamente vuelve sobre sí, se llama de *retroceso*. En este punto la tangente debe ser comun á las dos ramas.



**Puntos múltiples.** Si la curva pasa más de una vez por un mismo punto como en *c*, este se llama un *punto múltiplo*. En él hay tantas tangentes como ramas tenga la curva. Este es el carácter diferencial entre este punto y el de retroceso.

Los puntos de inflexion, de retroceso y múltiples, se denominan en general *puntos singulares* de las curvas.

**Asíntota.** Hay algunas curvas que tienen la propiedad de aproximarse indefinidamente á una recta, sin que llegue jamás á encontrarla. En tal caso la recta se dice *asíntota* de la curva, ó recíprocamente la curva es *asíntota* de la recta.

También puede suceder que una curva sea asíntota de otra curva.

## ELIPSE.

**Definicion.** Se llama *elipse* una curva plana tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos, *M* por ejemplo, (Fig. 165) á dos puntos fijos *F* y *F'* es constante é igual á una línea dada  $2a$ , mayor que  $FF'$ .

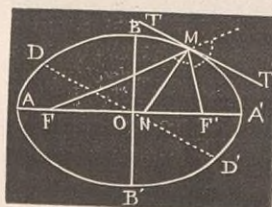


Fig. 165.

**Focos, ejes y centro.** Los dos puntos fijos *F* y *F'* se llaman *focos*, la recta *AA'* *eje mayor* y la *BB'* perpendicular á ella en su punto medio *eje menor* de la elipse.

Estas dos rectas son ejes de simetría de la curva. El punto *O* en que los ejes se encuentran es el *centro de figura* ó de *simetría* de la curva.

**Radio vector.** Las rectas *FM* y *F'M* trazadas desde los dos focos á un punto cualquiera *M* de la curva se llaman *radio vector*, la suma de estos radio vectores es constante segun la definicion, é igual á la recta *AA'*, es decir, al *eje mayor*.

**Excentricidad.** La distancia *FF'* que existe entre los focos se llama *excentricidad*. Cuando dos elipses tienen igual distancia focal se denominan *homofocales*.

**Diámetro.** Cualquier recta *DD'* que pase por el centro de la elipse es un *diámetro* de ella, y la divide en dos partes iguales. Todo diámetro es menor que el *eje mayor* *AA'*, y mayor que el *eje menor* *BB'*.

**Tangente y normal.** La tangente  $TT'$  en un punto cualquiera  $M$  de una elipse, es bisectriz del ángulo formado por el radio vector  $MF'$  y la prolongación del otro radio vector  $FM$ .

La normal  $MN$  es bisectriz del ángulo  $FMF'$  formado por los dos radios vectores.

**Área de la elipse.** El área de la porción de plano encerrado por la elipse es igual al producto de sus dos semi-ejes multiplicado por la relación de la circunferencia al diámetro. Es decir,

$$\text{área de la elipse} = \pi \times AO \times OB.$$

**Construcción de la elipse.** Conocido el eje mayor y los focos es muy fácil construir la elipse por un movimiento continuo. En efecto, fijando en los puntos  $F$  y  $F'$  las extremidades de un hilo flexible é inextensible cuya longitud sea igual á  $AA'$  (cantidad igual á la suma de los radios vectores de un punto cualquiera de la curva) con un lapiz se extiende este hilo y se trazan todos los puntos posibles deslizándolo en todas las direcciones y con la condición que el hilo esté siempre tenso. Claro es que en cualquier posición en que el lapiz señale, la distancia de este punto á los focos es igual al eje mayor.

**Observaciones sobre la elipse.** La elipse es una curva convexa y limitada en todas direcciones.

El círculo es una elipse cuya excentricidad  $FF'$  se reduce á cero.

### PARÁBOLA.

**Definición.** La parábola es una curva plana (Fig. 166) tal que cada uno de sus puntos  $M$  equidista de un punto fijo  $F$ , llamado **foco**, y de una recta fija  $DD'$  que se denomina **directriz**.

**Eje y vértice.** Si desde el foco  $F$  bajamos á la directriz la perpendicular  $FC$ , esta recta se llama el **eje** de la parábola, y es su **eje de simetría**. Según la definición el punto medio  $A$  de la recta  $CF$  es un punto de la curva, pues evidentemente equidista del foco  $F$  y de la recta  $DD'$ . Este punto  $A$  es el **vértice** de la curva.



Fig. 166.

**Radio vector.** Cualquier recta FM tirada desde el foco á un punto de la curva se llama *radio vector*.

**Construccion de un punto cualquiera.** Para construir un punto cualquiera M de la parábola; en un punto P del eje, levantemos la perpendicular indefinida  $MM'$ , y haciendo centro en F con un radio igual CP tracemos una circunferencia que cortará á la recta  $MM'$  en los puntos M y M' simétricos con respecto al eje, y que distarán igualmente del foco y de la directriz.

La curva es indefinida en una de sus direcciones y limitada en el punto A, ó sea en su vértice, en direccion opuesta. Por consiguiente, esta curva no es cerrada como lo son el círculo y la elipse.

**Tangente y normal.** La *tangente* de la parábola es bisectriz del ángulo formado por el radio vector y una paralela al eje trazada por el punto de contacto. De manera que siendo  $TT'$  tangente en el punto M, es bisectriz del ángulo EMF. La *normal* de un punto cualquiera es bisectriz del ángulo formado por la prolongacion del radio vector y la paralela al eje. De manera que siendo MN la normal en el punto M es bisectriz del ángulo EMR.

La parábola es una curva *convexa*, abierta é ilimitada en una de sus direcciones.

## HIPÉRBOLA.

**Definicion** La hipérbola es una curva plana (Fig. 167) tal

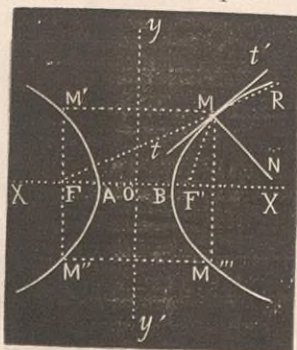


Fig. 167.

que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos M, á dos puntos fijos F y F', llamados **focos**, es igual á una cantidad constante  $2a$ , menor que  $FF'$ .

**Ejes, centros y vértices.** La recta  $XX'$  que pasa por los focos F y F' se llama *eje transverso*, y la perpendicular á ella trazada por el punto medio O de  $FF'$ , es el *eje no transverso*. Las dos son ejes de simetría.



pero el primero corta á la curva en los puntos A y B, que se llaman *vértices*, y el YY' no encuentra á la curva. El punto de concurso O de los dos ejes es el *centro* de la curva, y es su centro de simetría.

**Distancia focal.** La porcion de recta FF' comprendida entre los focos es la *distancia focal*.

**Ramas y forma general de la curva.** La curva tiene dos ramas simétricas con respecto á los dos ejes, cuyas ramas vuelven su convexidad al eje no transversal, y se limitan en un sentido por los vértices A y B, que son los puntos más cercanos á este eje, siendo ilimitadas ambas en sentido opuesto, ó sea hacia donde las ramas vuelven su concavidad.

**Construccion de un punto cualquiera.** Para construir un punto M de la curva se hace centro en un foco, F por ejemplo, y con un radio cualquiera, pero mayor que FB, se traza un arco de círculo; desde el otro foco F' con un radio que se diferencie del anterior en la cantidad constante  $2a$ , se traza otro, y los puntos de interseccion de las dos circunferencias serán puntos de la curva, segun la definicion de ella.

Así resultarán los dos puntos M y M'', simétricos con respecto al eje XX'; pero trazando circunferencias con los radios invertidos, esto desde F con el radio F'M y desde F' con el radio FM, resultarán otros dos puntos M' y M'', pertenecientes á la curva. Estos cuatro puntos M, M', M'' y M''' forman por consiguiente un rectángulo, cuyos lados son paralelos á los ejes, y cuyos vértices equidistan del centro O.

**Tangente y normal.** La *tangente* tt' en un punto M de la curva es *bisectriz* del ángulo F'MF' formado por los radios vectores FM y F'M de dicho punto.

La *normal* MN es *bisectriz* del ángulo adyacente F'MR.

**Observacion general.** La elipse, parábola é hipérbola se llaman *curvas de segundo grado*, porque sus ecuaciones son de segundo grado, y tambien llevan el nombre de *secciones cónicas*, porque resultan de la interseccion de un plano con una superficie cónica. (\*)

(\*) Se llama *Geometría analítica* á la que se ocupa del estudio de la Geometría haciendo aplicacion de los principios del álgebra; en ella es donde se demuestra que la elipse, parábola é hipérbola son curvas de segundo grado.

### CAPÍTULO III.

#### EJERCICIOS DE LA GEOMETRÍA PLANA. (\*)

##### TEOREMAS.

1. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes, **son perpendiculares entre sí.**
2. La bisectriz del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles **es perpendicular á la base y la divide en dos partes iguales.** [Teor. XIX.]
3. La mayor de las dos diagonales de un paralelogramo, **es la opuesta á los dos ángulos obtusos.** [Teor. XXI.]
4. **Dos polígonos de  $n$  lados son iguales** si tienen  $(n-1)$  lados consecutivos iguales, y tambien los  $(n-2)$  ángulos comprendidos entre ellos. [Teor. LV.]
5. Las perpendiculares bajadas desde los tres vértices de un triángulo á sus lados opuestos, **se cortan en un mismo punto.** [Teor. XXXV.]
6. La recta tirada por el centro de una circunferencia y por el punto medio de una cuerda, **es perpendicular á ella y pasa por los puntos medios de los arcos subtendidos.** [Teorema LX.]
7. La recta que une los puntos medios de los arcos subtendidos por una cuerda, **es un diámetro perpendicular á la cuerda.** [Teor. LIX.]
8. En todo cuadrilátero circunscripto, **la suma de dos lados opuestos es igual á la de los otros dos.**
9. La línea recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, **es paralela al tercer lado é igual á su mitad.** [Teor. XCII.]

(\*) Nuestro objeto al insertar estos ejercicios, es proporcionar á los alumnos sobresalientes un corto número de teoremas y problemas fáciles, que les sirvan para fijar mejor los que se hallan demostrados ó resueltos en el texto, mediante el enlace natural que entre unos y otros existe. A este fin, se anotan al terminar los enunciados, los teoremas ó problemas del libro que más íntimamente se relacionan con los de los ejercicios.

Para los que deseen ejercitarse más profundamente, recomendamos los excelentes trabajos de los Sres. *Echegaray, Amiot, Ritt y La Fremoire.*

10. Las rectas que unen los puntos medios de un cuadrilátero, **forman un paralelógramo.** [*Teor. L.*]

11. Los perímetros de los triángulos semejantes, **son proporcionales á los radios de los círculos inscriptos y á los de los circunscriptos.**

12. Las áreas de dos triángulos semejantes **son proporcionales á los cuadrados de los radios de los círculos inscripto ó circunscripto.**

13. Las sumas de las perpendiculares tiradas desde un punto cualquiera interior á un polígono regular sobre cada uno de los lados, **es una cantidad constante.** [*Teor. CXV.*]

14. La suma de las áreas de los triángulos que tienen por base respectiva dos lados opuestos de un paralelógramo y por vértice comun un punto cualquiera interior, **es una cantidad constante é igual á la mitad del área de dicho paralelógramo.** [*Teoremas CXII y CXIII.*]

15. En toda recta dividida en média y extrema razon, la suma de los cuadrados de la recta total y de su segmento menor, **es equivalente á tres veces el cuadrado del segmento mayor.** [*Teor. CXIX y Esc. 1.º del teor. CXXV.*]

16. La suma de los cuatro cuadrados contruidos sobre los cuatro segmentos de dos cuerdas que se cortan perpendicularmente, **es equivalente al cuadrado contruido sobre el diámetro.** [*Teor. de Pitágoras.*]

17. Si dos cuerdas se cortan rectangularmente, los cuatro círculos contruidos sobre los segmentos de estas cuerdas como diámetros, **son equivalentes al círculo total dado.** [*Teorema citado anteriormente.*]

18. En todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera **es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercer lado, mas el duplo del cuadrado de la recta que une el punto medio de este lado con el vértice opuesto.** [*Teoremas CVII y CVIII.*]

19. En todo cuadrilátero la suma de los cuadrados de sus lados, **es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, mas cuatro veces el cuadrado de la recta que une los puntos medios de estas diagonales.** [*Teor. anterior.*]



20. El área de un triángulo es igual á su perímetro multiplicado por la mitad de su apotema. [*Teor. CXIII.*]

# PROBLEMAS.

1. Trazar una circunferencia tangente á una recta en un punto dado y que pase por otro punto dado fuera de la recta. [*Teoremas LX y LXI.*]
2. Describir una circunferencia tangente á una recta en un punto dado y á una circunferencia dada. [*Prob. anterior.*]  
—Discusion de este problema.
3. Por un punto dado trazar una recta que forme ángulos iguales con otras dos rectas dadas. [*Teor. XXV.*]
4. Por un punto dado, trazar una recta que equidiste de otros dos puntos dados. [*Teor. IX.*]
5. Por un punto dado en el interior de un ángulo, trazar una recta tal que quede dividida por los lados del ángulo en dos partes iguales, siendo el punto medio el dado.
6. Construir un paralelógramo, conociendo sus diagonales y uno de sus ángulos. [*Teoremas XLII y XLV.*]
7. Dados dos puntos situados á un mismo lado de una recta, hallar un punto sobre la recta tal que la suma de las distancias de él á los dos puntos dados sea un mínimo.
8. Dados dos puntos situados á un mismo lado de una recta, hallar un punto sobre la recta tal que la diferencia de sus distancias á los dos puntos dados sea un máximo.
9. Dados dos puntos uno á cada lado de una recta, determinar en ella otro punto que la diferencia de las distancias á los dos puntos dados sea un máximo.
10. Un lado de un octógono regular inscripto, vale 16 metros. ¿Cuál será el valor del lado del polígono regular de 16 lados inscripto en el mismo círculo? [*Prob. XXII.*]
11. Los perímetros de dos exágonos regulares inscriptos y circunscriptos valen 32 y 43 metros respectivamente. ¿Cuáles serán los valores de los perímetros de los dodecágonos regulares inscriptos y circunscriptos en el mismo círculo. [*Problema XXXIII.*]
12. El valor de una circunferencia rectificada es 3250 metros. ¿Cuál será el de un arco de ella de  $15^{\circ}20'$  y  $32''$ ?

13. Un arco de  $28^\circ$  rectificado vale 16 metros, ¿cuál será el valor de la circunferencia rectificada?

14. Hallar el área de un círculo, cuyo radio es igual á 22,3 metros.

15. Hallar el área de un sector de  $30^\circ$  y  $15'$ , correspondiente á un círculo, cuyo radio es de 27 metros.

16. Hallar el área de un segmento de círculo, que abraze  $30^\circ$  y en un círculo cuyo radio es 45 metros.

17. Hallar el área de una corona circular, sabiendo que un arco de  $45^\circ$  del círculo mayor vale 15 metros, y un arco de  $60^\circ$  del círculo menor vale 10 metros.

18. Determinar el arco que deberá tener un sector, cuyo área sea 45 metros cuadrados, sabiendo que el área del círculo á que pertenece es  $124\text{m}^2$ .

19. El área de un paralelógramo es 13 metros cuadrados. ¿Cuál será la de otro que tenga la base doble que el anterior y la altura igual á la tercera parte?

20. El área de un polígono es  $234\text{m}^2$ . ¿Cuál será el de otro polígono semejante con él y tal que sus lados homólogos estén en la relacion con el primero de  $\sqrt{6}$ ?

# GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

## SECCION PRIMERA.

DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

### LIBRO I.

PLANOS Y CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES PLANAS.

#### CAPÍTULO I.

PERPENDICULARES Y OBLÍCUAS A UN PLANO.

71. Sabemos (9) que el *plano* es una superficie de tal naturaleza, que si una recta cualquiera tiene dos puntos comunes con él, todos los puntos de la recta coinciden con la superficie.

72. Los planos ó superficies planas son ilimitadas, como lo es la línea recta; pero en las demostraciones geométricas se indican por medio de un paralelogramo, dándole por consiguiente límites con el fin de hacerlas perceptibles. Sin embargo, debe siempre considerarse prolongada la superficie indefinidamente.

#### TEOREMA CXXXVIII.

*Por tres puntos que no estén en línea recta, 1.º Puede pasar un plano. 2.º No puede pasar más que un solo plano.* (Fig. 168.)

1.º Sean los tres puntos A, B y C: tracemos la recta AB que pasa por dos de ellos, siempre será posible hacer



pasar un plano por esta recta (71), y si este plano gira alrededor de la recta AB, llegará un momento en que pase por el tercer punto C. Luego por estos tres puntos A, B y C puede pasar un plano. 2.º Materialicemos, por decirlo así este plano, y sea el MN (72); vamos á demostrar que por los tres puntos dados no puede pasar otro plano. Para ello, uno los

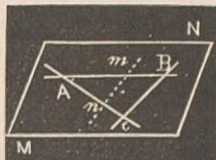


Fig. 168.

puntos por medio de rectas, y tendremos que AB, BC y AC, serán rectas que todos sus puntos estarán en el plano MN. Supongamos por un momento que por dichos tres puntos pasaran dos planos, en tal caso, las tres rectas AB, BC y AC estarían á la vez en los dos planos: y si trazáramos otra recta cualquiera  $mn$ , cortaría en  $m$  á la recta AB y en  $n$  á la recta AC, luego tendrían dos puntos en cada uno de los dos planos, y por tanto dicha recta tendría todos sus puntos en los dos planos. Como lo que hemos dicho de la recta  $mn$ , se puede decir de cualquier otra, resulta que todas las rectas que estuviesen en un plano estarían en el otro, luego los dos planos se confunden, ó lo que es igual, por los tres puntos A, B y C, no pasa más que un sólo plano.

### COROLARIOS.

1.º *Dos rectas que se cortan, determinan la posición de un plano*, porque tomando un punto en cada una de ellas y el punto común, tendríamos tres puntos que no están en línea recta, por los que se puede siempre hacer pasar un plano y nada más que uno.

2.º *Dos rectas paralelas, determinan un plano*; pues por su definición sabemos que están en un plano, y además tomando un punto en la una y dos en la otra, se tendrían tres puntos que no están en línea recta.

3.º *Un arco de círculo, ó dos lados de un polígono, determinan un plano.* Por igual razon que en los dos corolarios anteriores.

4.º *La interseccion comun de dos planos, es una línea recta;* pues si no fuese una línea recta, los dos planos tendrian tres puntos comunes no en línea recta, en cuyo caso se confundirian, lo que se opone á la hipótesis, y por consiguiente, es absurdo.

### TEOREMA CXXXIX.

*Si una recta es perpendicular á otras dos que pasan por su pié en un plano, dicha recta es tambien perpendicular á cualquiera otra que pase por su pié y esté situada en el mismo plano.* (Fig. 169.)

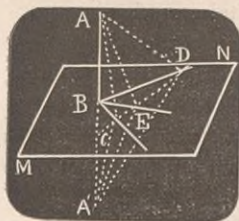


Fig. 169.

Sea la recta AB que suponemos perpendicular á las dos rectas BD y BC que pasan por su pié en el plano MN, vamos á demostrar que dicha recta es tambien perpendicular á otra cualquiera BE que

pasa por su pié B y esté situada en el mismo plano MN. Para ello prolongo la recta AB, una cantidad  $A'B = AB$ , trazo la transversal CD y uno los puntos A y A' con los tres puntos C, E y D.

Los triángulos ABD y A'BD son iguales por ser rectángulos, tener el cateto BD comun y los catetos  $AB = A'B$  por construccion. Luego  $AD = A'D$ .

Los triángulos ABC y A'BC son iguales, por igual razon que los anteriores. Luego  $AC = A'C$ .

Pero entonces los triángulos ACD y A'CD son iguales, por tener iguales sus tres lados, y si consideramos superpuestos estos dos triángulos, resultará que  $AE = A'E$ .

Por consiguiente, la recta BE tiene dos puntos (el pun-

to B y el E) equidistantes de la recta  $AA'$ , y por consiguiente [Teor. XXXIV] es perpendicular á ella.

Lo demostrado para esta recta DE puede demostrarse para cualquier otra que pase por B y que esté en el plano.

### TEOREMA CXL.

*Todas las perpendiculares levantadas á una recta en un punto, están en un mismo plano.* (Fig. 170.)

Sea la recta AB y por el punto B tracemos las perpendiculares á ella BC, BD, BE, BF..... Por dos cualesquiera de estas rectas, por ejemplo, BD y BE, se puede hacer pasar el plano

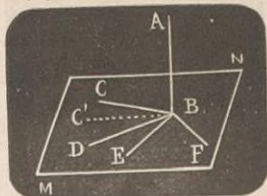


Fig. 170.

MN, y vamos á demostrar que todas las demás estarán en dicho plano. Supongamos por un instante que una cualquiera, la BC, no está contenida en este plano: en tal caso, podremos hacer pasar un plano por las dos rectas AB y BC; este plano cortará al MN en una recta  $BC'$  que será perpendicular á la AB [Teor. anterior]; pero como la BC por el supuesto del teorema es también perpendicular á la AB, tendríamos trazadas por un punto B de una recta AB, dos perpendiculares BC y  $BC'$  en un mismo plano, lo que no puede ser. [Teorema I]

**Escolio.** El lugar geométrico de todas las perpendiculares levantadas en un punto de una recta en el espacio, es un plano según acabamos de demostrar.

**73.** Se dice que una recta es perpendicular á un plano, ó que un plano es perpendicular á una recta, cuando la recta es perpendicular á todas las que pasan por su pié en dicho plano; y es claro que tal condicion quedará satisfecha, si dos de las perpendiculares que pasan por el pié de la recta están contenidas en el plano.



74. Una recta que no es perpendicular, se llama *obliqua* al plano, y recíprocamente.

### TEOREMA CXLI.

*Por un punto cualquiera, no se puede trazar más que una recta perpendicular á un plano. (Fig. 171.)*

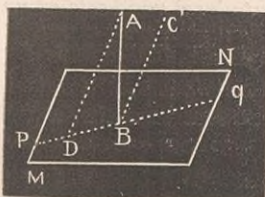


Fig. 171.

Pueden suceder dos casos: que el punto esté situado en el plano, ó que esté fuera de él.

1.º Sea el punto B, digo que por él no puede levantarse más que una recta BA perpendicular al plano MN. En efecto, si admitimos que otra recta cualquiera BC es perpendicular al plano MN, haciendo pasar un plano por las dos rectas BA y BC, cortaría al MN en una recta PQ, á la que las dos rectas AB y BC serían perpendiculares (73); lo que es absurdo. [Teor. I]

2.º Si el punto A se halla fuera del plano, vamos á demostrar que tampoco puede trazarse más que una perpendicular AB; pues si suponemos que hay otra recta AD también perpendicular al plano MN, haciendo pasar un plano por las dos rectas AB y AD, daría una intersección PQ con el MN, á la cual serían perpendiculares AB y AD, lo que no puede ser [Teor. II], y como este absurdo resulta de suponer dos perpendiculares que partan del punto A, se deduce que no puede existir más que una perpendicular.

### TEOREMA CXLII.

*Si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza una perpendicular á una recta situada en dicho plano, la recta que une el pié de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, es también perpendicular á la recta situada en el plano. (Fig. 172.)*

Sea la recta  $AB$  perpendicular al plano  $MN$ , y la recta  $BC$  perpendicular á la  $DE$  que está en el plano  $MN$ , digo que la recta  $CA$  que une el punto  $C$  con un punto cualquiera de la recta  $AB$ , es tambien perpendicular á la  $DE$ .

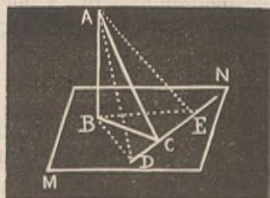


Fig. 172.

Para demostrarlo, desde el punto  $C$  tomo las partes  $CE = DC$ , y trazo las rectas  $BD$  y  $BE$ ,  $AD$  y  $AE$ .

Las dos rectas  $BD$  y  $BE$  son iguales por oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular  $BC$ . Luego los triángulos rectángulos  $ABD$  y  $ABE$  son iguales por tener el cateto  $AB$  comun y los catetos  $BD$  y  $BE$  iguales. Por tanto, las hipotenusas  $AD$  y  $AE$  son iguales.

Pero entonces la recta  $AC$  tiene

El punto  $C$  equidistante de los puntos  $D$  y  $E$ , por construcción. El punto  $A$  equidistante de los puntos  $D$  y  $E$ , por ser  $AD = AE$ .

Luego  $AC$  [Teor. XXXIV] es perpendicular á  $DE$ , que era lo que se queria demostrar.

**Escolio.** Siendo las dos rectas  $CB$  y  $CA$  perpendiculares á la recta  $DE$  en el punto  $C$ , el plano  $ACB$  determinado por estas dos rectas [Teor. CXXXVIII, cor. 1.º] es tambien perpendicular á  $DE$ . (73)

### TEOREMA CXLIII.

*La perpendicular trazada desde un punto á un plano, es menor que cualquiera oblicua tirada desde el mismo punto al plano.* (Fig. 173)

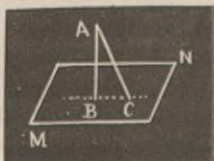


Fig. 173.

En efecto, si desde el punto  $A$  bajamos la perpendicular  $AB$  y la oblicua  $AC$  al plano  $MN$ , uniendo por medio de la recta  $BC$  los puntos de intersección de

estas dos rectas con el plano, tendremos que  $AB$  será perpendicular á  $BC$ , y por consiguiente  $AC$  oblicua, luego  $AB < AC$  [Teor. XXIX.]

TEOREMA CXLIV. [Recíproco del anterior]

*La recta más corta que puede trazarse desde un punto á un plano, es perpendicular al plano.*

(Regla del número 34.)

75. Se llama *distancia* de un punto á un plano la perpendicular bajada desde dicho punto á él.

TEOREMA CXLV.

*Si desde un punto tomado fuera de un plano se trazan la perpendicular y varias oblicuas, 1.º Las oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular, son iguales. 2.º De dos oblicuas, la que más se aparta del pié de la perpendicular, es la mayor.* (F. 174)

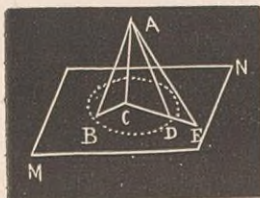


Fig. 174.

1.º Supongamos trazadas desde el punto A las dos oblicuas  $AB$  y  $AD$ , que se apartan igualmente del pié B de la perpendicular  $AC$ , de modo que  $BC =$

$CD$ . Los dos triángulos rectángulos  $ABC$  y  $ACD$  son iguales, por tener iguales sus dos catetos, luego  $AB = AD$ .

2.º Supongamos  $CE > BC$ , y vamos á demostrar que  $AE > AB$ . Tomemos sobre la recta  $CE$  una parte  $CD = BC$ , y trazando la recta  $AD$ , tendremos por lo demostrado anteriormente que  $AD = AB$ ; pero  $AE > AD$  [Teor. XXX]; luego  $AE > AB$ .

**Corolario 1.º** *Un punto cualquiera de la perpendicular á un plano, equidista de todos los puntos de la circunferencia descrita desde su pié como centro y con un radio cualquiera.*



En efecto, si desde el pié C de la perpendicular AC, se traza una circunferencia con un radio BC, todas las rectas AB, AD.... que unen dicho punto con los de la circunferencia, serán oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular.

**Corolario 1.º** *El lugar geométrico de todos los puntos que en el espacio equidistan de los extremos de una recta, es un plano perpendicular á ella en su punto medio; pues si se une cualquier punto del plano con los extremos de la recta, las distancias serán dos oblicuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular.*

**Escolio.** La perpendicular AC se llama *eje del círculo*, cuyo radio es BC.

#### TEOREMA CXLVI. [Recíproco del anterior]

1.º *Las oblicuas iguales, se apartan igualmente del pié de la perpendicular.* 2.º *La mayor de dos oblicuas, se aparta más del pié de la perpendicular.*

(Regla del número 34).

#### TEOREMA CXLVII.

*Por un punto de una recta, no se puede levantar más que un plano perpendicular á ella.*

(Fig. 175)

Supongamos que por el punto B de la recta AB se pudieran trazar los dos planos MN y MP, ambos perpendiculares á la recta AB en dicho punto. En tal caso, si hacemos pasar por AB un plano cualquiera, este cortará á los dos planos MN y MP, respectivamente, en las rectas BD y BC que serian perpendiculares á la AB (73) en un plano, lo que es absurdo. [Teor. I]

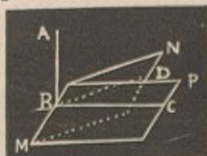


Fig. 175.

#### TEOREMA CXLVIII.

*Por un punto fuera de una recta, no se puede trazar más que un plano perpendicular á ella.* (Fig. 176)

Supongamos por un momento que por el punto C, se pueden trazar dos planos MN y PQ perpendiculares á la recta AB. Sean B y D los puntos de interseccion de la recta con los dos planos MN y PQ respectivamente. Ahora si hacemos pasar un plano cualquiera por la recta AB, dará las intersecciones BC y DC con los dos planos, cuyas intersecciones serán



Fig. 176.

perpendiculares á la recta AB, y como estas intersecciones y la recta AB están en un mismo plano (el plano secante) tal consecuencia es absurda [Teor. II], absurdo que resulta de suponer que por el punto C pueden pasar dos planos perpendiculares á la AB; luego no podrá pasar más que uno, que era lo que se queria demostrar.

## CAPÍTULO II.

### ÁNGULOS DIEDROS.

76. Cuando dos planos se cortan, dividen al espacio en cuatro porciones indefinidas, cada una de las cuales se llama un *ángulo diedro* (Fig. 177). De manera que el ángulo

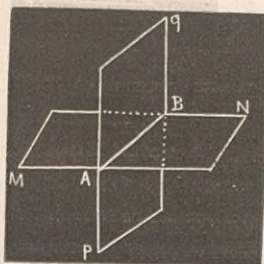


Fig. 177.

lo diedro puede definirse diciendo que es la separacion ó abertura de dos planos que se cortan. *Caras* del ángulo son los dos planos que le forman y *arista* es la comun interseccion de dichos planos.

Un ángulo diedro se designa con cuatro letras, una de cada una de las caras y las dos de la arista que se colocan en medio. De manera que los cuatro

ángulos diedros formados por los dos planos PQ y MN (Fig. 177) se designarán así: QABN, QABM, PABM y PABN; cuyos cuatro ángulos tienen la arista comun AB. Observemos que de este modo quedará perfectamente fijada la posicion de los planos que forman las caras, pues en cada uno se toman tres puntos que no están en línea recta, los que determinan la posicion de dichos planos. [Teorema CXXXVII.]

Si el ángulo diedro está solo, puede señalarse únicamente con las dos letras de la arista, sin que esto induzca á error.

77. Angulos diedros *adyacentes*, son los que tienen una cara comun y la otra en un mismo plano. Son adyacentes (Fig. 177) MABQ con NABQ, NABQ con NABP, &c. Se llaman consecutivos dos ángulos diedros, cuando tienen una cara comun; pero las otras no están en un mismo plano.

78. Dos planos son *perpendiculares entre sí*, cuando forman ángulos adyacentes iguales.

79. Dos planos son *oblicuos entre sí*, si forman ángulos adyacentes desiguales.

80. Los ángulos adyacentes que forman dos planos perpendiculares entre sí, se llaman *ángulos diedros rectos*.

81. Todo diedro menor que el recto se llama *agudo*: y *obtus*, si el ángulo es mayor que el recto.

82. Si la suma de dos ángulos diedros es igual á un diedro recto, cada uno de ellos es *complemento del otro*: ó bien se llaman *complementarios*.

Si la suma de dos ángulos diedros es igual á dos rectos, se llaman *suplementarios* estos ángulos, ó bien suplemento el uno del otro.

83. Dos ángulos que tienen un mismo suplemento ó un mismo complemento son iguales, porque les falta una misma cantidad para valer dos ángulos rectos ó un ángulo recto, respectivamente.



84. Angulos diedros *opuestos por la arista*, son los que las caras del uno están formadas por las prolongaciones de las del otro. Tales son los ángulos (Fig. 177) MABQ y PABN.

### TEOREMA CXLIX.

*Por una recta dada en un plano, no se puede levantar más que un plano perpendicular al primero.*

(Este teorema se demuestra como su análogo [*Teor. I*] de la Geometría plana.)

**Corolario.** *Dos ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

(Se demuestra como su análogo de la Geometría plana, [*Teor. I, cor. 1.º*])

### TEOREMA CL.

*La suma de dos ángulos diedros adyacentes, es igual á dos ángulos rectos.*

#### COROLARIOS.

1.º *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos que se pueden formar á un mismo lado de un plano, es igual á dos rectos.*

2.º *La suma de todos los ángulos diedros consecutivos que se pueden formar alrededor de una recta, es igual á cuatro ángulos rectos.*

3.º *Los cuatro ángulos que forma un plano con otro al que es perpendicular, son rectos.*

4.º *Todo ángulo diedro, es menor que dos ángulos rectos.*

(Se demuestran, este teorema y sus cuatro corolarios, como sus análogos [*Teor. III y sus cor.ºs*] de la Geometría plana.)

### TEOREMA CLI.

*Los ángulos diedros opuestos por la arista, son iguales.*  
(Demostracion igual á la del *Teor. IV.*)

85. Se llama *ángulo plano correspondiente* á un diedro,

el ángulo rectilíneo formado por dos perpendiculares levantadas en un mismo punto de la arista y cada una en una de las caras del diedro.

### TEOREMA CLII.

1.º Si dos ángulos diedros son iguales, sus ángulos planos correspondientes tambien lo son. 2.º Si dos ángulos diedros son desiguales, al mayor diedro corresponde mayor ángulo plano. (Figs. 178 y 179)

1.º Sean los dos ángulos diedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  (Fig. 178) que suponemos iguales, y sean  $bac$  y  $b'a'c'$  sus ángulos planos correspondientes (85), de manera que  $ab$  y  $ac$  sean perpendiculares á la  $BC$  en el punto  $a$  y cada una de ellas en una de las caras; es decir,  $ab$  en la cara  $ACB$  y  $ac$  en la cara  $BCD$  del diedro  $ABCD$ ; y de un modo semejante el ángulo plano  $b'a'c'$  en el diedro  $A'B'C'D'$ .

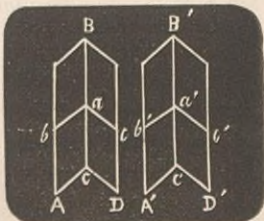


Fig. 178.

Supuesto que los diedros son iguales, se podrán superponer sus caras y su arista, de tal modo, que el punto  $a$  coincida con  $a'$ ; pero en tal caso,  $ac$  coincidirá con  $a'c'$ , porque en un punto de una recta en un mismo plano no se la puede levantar más que una perpendicular [Teor. I]; y por igual razon la recta  $ab$  coincidirá con  $a'b'$ ; luego ángulo  $bac$  = ángulo  $b'a'c'$ .

2.º Supongamos que el diedro  $ABCD$  es mayor que el  $A'B'C'D'$  (Fig. 179). Hagamos pasar por la recta  $BC$  un plano  $BCM$  que forme con el  $ABC$  un ángulo diedro  $ABCM = A'B'C'D'$ . En tal caso

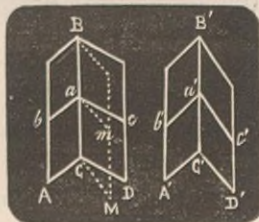


Fig. 179.

áng. plano  $bam$  = áng. plano,  $b'a'c'$ , segun el primer caso:

pero las tres rectas  $ab$ ,  $am$  y  $ac$ , perpendiculares á la  $BC$  en el punto  $a$ , están en un mismo plano [*Teor. CXL*], y por tanto evidentemente

ángulo  $bam < \text{ángulo } bac$ , ó bien ángulo  $b'a'c' < bac$ ,  
que era lo que se queria demostrar.

**Escolio.** Como el ángulo plano se puede trazar desde un punto cualquiera de la arista, y siempre resultaria demostrado el teorema, se deduce *que todos los ángulos planos correspondientes á un diedro son iguales.*

### TEOREMA CLIII. [*Recíproco del anterior*]

1.º *Si dos ángulos planos correspondientes á dos diedros son iguales, dichos diedros tambien son iguales.* 2.º *Si dos ángulos planos correspondientes á dos diedros son desiguales, al mayor corresponde mayor diedro.*

(Regla del número 34.)

### TEOREMA CLIV.

*Dos ángulos diedros, son proporcionales á sus ángulos planos correspondientes.*

(Fig. 180)

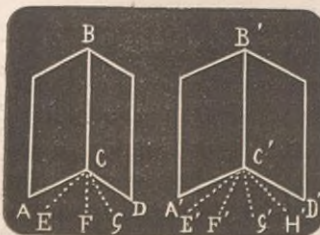


Fig. 180.

Sean los dos diedros  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ ; pueden suceder dos casos: que los ángulos planos  $ACD$  y  $A'C'D'$  sean comensurables, ó que no lo sean.

1.º Siendo comensurables los ángulos planos  $ACD$  y  $A'C'D'$ , supongamos contenida la medida comun de ellos 4 veces en el primero y 5 en el segundo, tendremos que

$$ACD : A'C'D' :: 4 : 5.$$

Hagamos pasar planos por las aristas  $BC$  y  $B'C'$ , y por las rectas divisorias  $CE$ ,  $CF$ ,  $CG$  del uno, y  $C'E'$ ,



$C'F'$ ,  $C'G'$ ,  $C'H'$  del otro. De este modo quedará el diedro  $ABCD$  dividido en 4 diedros parciales, y el  $A'B'C'D'$  en 5. Todos estos diedros son iguales, porque sus ángulos planos correspondientes lo son; luego

$$ADCD : A'B'C'D' :: 4 : 5.$$

De las proporciones que anteceden, se deduce que

$$ABCD : A'B'C'D' :: ACD : A'C'D'$$

que era lo que se quería demostrar.

2.º Si los ángulos planos  $ACD$  y  $A'C'D'$  fuesen incommensurables, se demostraría apoyándose en la misma propiedad y por el mismo razonamiento que el 2.º caso del teorema  $XC$ .

**Corolario.** *Todo ángulo diedro, tiene por medida su ángulo plano correspondiente.* Este corolario se deduce evidentemente del teorema, pues que si se toma por unidad para medir los ángulos diedros el diedro recto, la misma relacion habrá entre el diedro propuesto y la unidad, que entre el ángulo plano correspondiente al primero y el ángulo plano correspondiente al ángulo.

### TEOREMA CLV.

*Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella es tambien perpendicular á dicho plano.* (Fig. 181)

Sea la recta  $AB$  perpendicular al plano  $MN$ : hagamos pasar por ella el plano  $PQ$ , cuya interseccion con el  $MN$  es la recta  $PR$ . Trazo en el plano  $MN$  la recta  $CD$  perpendicular á la  $PR$  en el punto  $B$ ; y tendremos que  $CBA$  y  $ABD$ , serán los ángulos planos correspondientes á los dos diedros adyacentes formados por los dos planos. Pero siendo  $AB$

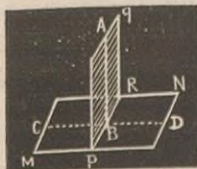


Fig. 181.

perpendicular al plano MN lo es tambien á la recta CD que pasa por su pié en dicho plano; luego los ángulos CBA y ABD son rectos; y por consiguiente, los diedros MPRQ y NPRQ lo son tambien; luego el plano PQ es perpendicular al MN.

**Escolio.** Como por una recta pueden pasar infinitos planos, se deduce *que por una recta perpendicular á un plano pueden pasar infinitos planos perpendiculares al primero.*

### CAPÍTULO III.

#### PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SÍ.

#### TEOREMA CLVI.

*Si dos planos son perpendiculares entre sí, y en el uno se tira una perpendicular á la interseccion, dicha perpendicular lo es tambien al otro plano.* (Fig. 181)

Si los planos MN y PQ son perpendiculares entre sí y la recta AB es perpendicular á su comun interseccion, tendremos que los ángulos planos CBA y ABD deberán ser rectos (por corresponder á diedros rectos); luego la recta AB es perpendicular á la CD, y como por el supuesto lo es tambien á la PR, resulta que dicha recta AB es perpendicular á las dos rectas PR y CD que pasan por su pié en el plano MN, y por tanto es perpendicular al plano. (73)

#### TEOREMA CLVII. [Recíproco del anterior]

*Si dos planos son perpendiculares entre sí y en un punto de la interseccion se levanta una perpendicular al uno, dicha perpendicular estará contenida en el otro.* (Fig. 182)

Supongamos que los dos planos MN y PQ son perpendiculares entre sí, y que la recta AB es perpendicular al

MN; digo que dicha recta está contenida en el plano PQ. Supongamos por un momento que no estuviese contenida en dicho plano, sino en otro cualquiera PQ'; en tal caso, este plano sería perpendicular al MN [Teor. CLV], y como por el supuesto lo es PQ, tendríamos por la recta PR levantados dos planos perpendiculares al MN, lo que es absurdo.

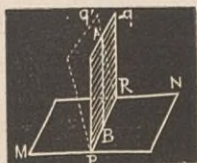


Fig. 182.

**Corolario.** *El lugar geométrico de todas las perpendiculares á un plano levantadas por los puntos de una recta situada en él, es otro plano perpendicular al primero. Esto se deduce inmediatamente del teorema.*

### TEOREMA CLVIII.

*Si dos planos son perpendiculares á un tercero, la interseccion de los dos primeros planos será perpendicular tambien al tercero. (Fig. 183)*

En efecto, si por el punto A, comun á los tres planos, quisiéramos levantar una perpendicular al plano MN, dicha perpendicular tendria que estar á la vez en los dos planos PQ y QR que se suponen perpendiculares al MN [Teorema anterior]; luego esta perpendicular seria necesariamente la interseccion de ellos AQ, que por tanto es perpendicular al plano MN.

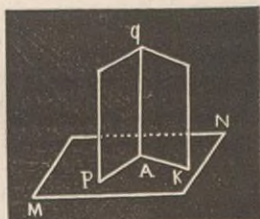


Fig. 183.

### TEOREMA CLIX.

*Por una recta oblicua ó paralela á un plano, no pueden pasar dos planos perpendiculares al primero.*

Pues si pasasen, su interseccion que seria la recta dada, habria de ser perpendicular al plano [Teor. anterior].



contra la hipótesis del teorema que dice que la recta es oblicua ó paralela á él.

### TEOREMA CLX.

*Si desde un punto tomado en el interior de un ángulo diedro se bajan dos rectas perpendiculares á sus caras, el ángulo formado por dichas perpendiculares es suplemento del diedro. (Fig. 184)*

Sean las dos rectas AB y AC respectivamente perpendiculares á las caras MQ y MN del diedro. Hagamos

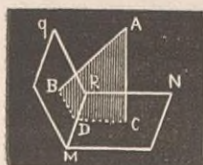


Fig. 184.

pasar un plano por dichas rectas, y sean BD y DC las intersecciones de este plano con las dos caras del diedro. El plano determinado por las dos rectas AB y AC es perpendicular al plano MN y al MQ, por pasar por dichas rectas que son perpendiculares

respectivamente á ellos [Teor. CLV]; luego, recíprocamente, los planos MQ y MN son perpendiculares al plano ABCD, y por consiguiente, también la comun interseccion MR es perpendicular al plano ABCD [Teorema CLVIII]; pero en tal caso, la MR es perpendicular á las dos rectas BD y DC que pasan por su pié D en el plano ABCD. Vemos, por consiguiente, que BDC es el ángulo plano correspondiente al diedro propuesto QMRN; pero en el cuadrilátero ABCD, los ángulos B y C son rectos, luego el ángulo A es suplemento del BDC.

## CAPÍTULO IV.

### DE LAS RECTAS Y PLANOS PARALELOS.

### TEOREMA CLXI.

*Dos rectas perpendiculares á un mismo plano, son paralelas entre si. (Fig. 185)*

Sean las dos rectas  $AB$  y  $CD$  perpendiculares al plano  $MN$ . Hagamos pasar un plano por las rectas  $AB$  y por el punto  $D$ , este plano será perpendicular al  $MN$ , por contener á la recta  $AB$  [*Teor. CLV*], pero la recta  $BD$  tambien está en el plano  $ABD$ , porque es perpendicular al plano  $MN$  y está levantada en un punto  $D$  de la interseccion [*Teor. CLVII*]; luego

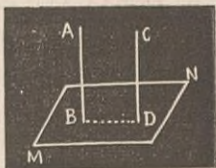


Fig. 185.

las dos rectas  $AB$  y  $CD$  están en un mismo plano; además estas rectas no se pueden encontrar por más que se prolonguen, pues si se encontrasen, desde el punto de su union se podrian bajar dos perpendiculares al plano  $MN$ , lo que es absurdo; luego son paralelas. (24)

### TEOREMA CLXII.

*Por un punto del espacio, no puede pasar más que una paralela á una recta.*

En efecto, si se traza otra recta cualquiera que pase por el punto, ó estará en el mismo plano que las dos rectas paralelas, ó estará en otro plano. Si está en el plano no puede ser paralela, porque por un punto en un plano no se puede trazar á una recta más que una paralela; si está fuera del plano tampoco será paralela, pues dos paralelas deben estar en un mismo plano, segun su definicion. (24)

### TEOREMA CLXIII. [*Recíproco del CLXI*]

*Si una de dos paralelas es perpendicular á un plano, tambien lo será la otra. (Fig. 185)*

Supongamos que las dos rectas  $AB$  y  $CD$  son paralelas, y que la  $AB$  es perpendicular al plano  $MN$ ; vamos á demostrar que la  $CD$  tambien lo será. En efecto, supongamos que la  $CD$  no es perpendicular al plano; por el

punto D siempre será posible levantar una recta que sea perpendicular al plano MN. Esta recta será paralela á la AB [Teor. CCXI]; luego por el punto D tendremos trazadas dos rectas paralelas á la AB, lo que es absurdo. [Teor. anterior.]

### TEOREMA CLXIV.

*Si dos rectas son paralelas á una tercera en el espacio, son paralelas entre sí.*

Llamemos á las tres rectas A, B y C, y supongamos que las rectas A y B son paralelas á la C. Si hacemos pasar un plano perpendicular á la recta C, lo será á sus paralelas A y B [Teor. anterior]; luego las dos rectas A y B son perpendiculares á un mismo plano, y, por consiguiente, son paralelas entre sí. [Teor. CLXI.]

86. Una recta y un plano son *paralelos*, si prolongados indefinidamente no se encuentran.

87. Dos planos se llaman *paralelos*, si prolongados indefinidamente no se encuentran.

### TEOREMA CLXV.

*Si una recta es paralela á otra que está situada en un plano, también es paralela al plano.*  
(Fig. 186)

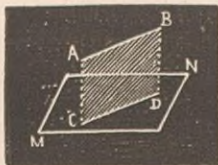


Fig. 186.

Sea la recta AB paralela á la CD que está en el plano MN, vamos á demostrar que dicha recta AB es paralela al plano. En efecto, si por las dos rectas AB y CD hacemos pasar el plano ABCD, éste solo tiene comun con el MN, la recta CD; pero como la AB es paralela por hipótesis á CD, nunca podrá encontrar á esta, ni por consiguiente, al plano MN; luego AB es paralela á este plano. (86)



### TEOREMA CLXVI.

*Dos planos perpendiculares á una recta, son paralelos.*

(Fig. 187)

En efecto, si los planos MN y PQ son perpendiculares á la recta AB, no se podrán encontrar; pues si supusiéramos que existía un punto O en el cual se encontrasen, la recta OA estaría toda en el plano PQ, por tener los dos puntos A y O en él; por igual razón la OB estaría en el plano MN. Pero entonces las rectas OA y OB serían perpendiculares á la AB, lo que es imposible [Teor. II]; luego los planos no se encuentran, y por tanto son paralelos. (87)

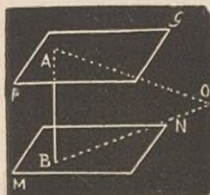


Fig. 187.

### TEOREMA CLVII.

*Si á dos planos paralelos corta un tercer plano, las intersecciones son paralelas.*

En efecto, las intersecciones son dos rectas que están en el plano secante, y no pueden encontrarse por más que se prolonguen, por estar situadas en planos paralelos; luego dichas rectas son paralelas. (24)

### TEOREMA CLXVIII.

*Las partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos, son iguales.* (Fig. 188)

En efecto, si hacemos pasar un plano por las paralelas AB y CD, cortará á los dos planos MN y PQ en dos rectas AC y BD, paralelas entre sí [Teorema anterior]; luego la figura ABCD es un paralelogramo, y por consiguiente,

$$AB = CD.$$

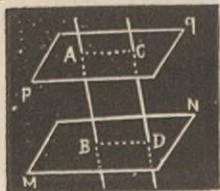


Fig. 188.

**Corolario.** *Todos los puntos de un plano, equidistan de su paralelo; porque todas las perpendiculares bajadas desde los puntos de un plano al otro, son paralelas entre sí y por tanto iguales.*

**TEOREMA CLXIX.**

*Si dos ángulos que están en diferentes planos tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, dichos ángulos son iguales.* (Fig. 189)

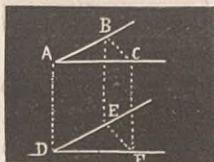


Fig. 189.

Tomemos sobre los ángulos BAC y EDF las partes  $AB=DE$  y  $AC=DF$ , y tracemos las rectas AD, BE, CF, BC y EF. En el cuadrilátero ABDE, siendo AB igual y paralela á DE, tendremos [Teorema XLIV] que AD es también igual y paralela á BE, y en el cuadrilátero ACDF, por ser AC igual y paralela á DF, lo serán entre sí AD y CF; luego en el cuadrilátero BCEF, BE y CF son iguales y paralelas entre sí, y por tanto también BC y EF. Los triángulos ABC y DEF son por consiguiente iguales, por tener sus tres lados iguales; luego ángulo A = ángulo D.

**TEOREMA CLXX.**

*Si dos rectas que se cortan son paralelas á otras dos que se cortan también, el plano que pasa por las dos primeras, es paralelo al que pasa por las dos segundas.* (Fig. 190)

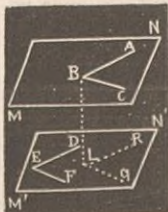


Fig. 190.

Sea las rectas AB y BC que determinan el plano MN, y las rectas ED y EF que determinan el M'N' cuyas rectas suponemos respectivamente paralelas (AB á la ED, y BC á la EF). Si por el punto B bajamos la perpendicular BL al plano M'N' y por el pié L de ella trazamos las rectas LQ y LR respectiva-

mente paralelas á EF y ED; tendremos que siendo BL perpendicular al plano M'N' lo será á las rectas LQ y LR que pasan por su pié en el plano; pero por construccion LR es paralela á ED, y por suposicion la misma ED es paralela á BA, luego BA y LR son paralelas [Teorema CLXIV]; por iguales razones la recta LQ es paralela á la BC; luego si BL es perpendicular á las rectas LO y LR (segun hemos demostrado) lo será tambien á sus paralelas AB y BC; pero entonces lo será al plano PQ; de lo que se deduce que los planos MN y PQ son paralelos entre sí, por ser ambos perpendiculares á la recta BL.

85. Cuando á dos planos cualesquiera corta un tercero, forma ocho ángulos diedros cuyas denominaciones son iguales á las que se dan á los ángulos planos formados por dos rectas cortadas por una secante.

### TEOREMA CLXXI.

*Si á dos planos paralelos corta un tercer plano,*

- 1.º Los ángulos diedros alternos internos son iguales.
- 2.º Los ángulos diedros alternos externos son iguales.
- 3.º Los diedros correspondientes son iguales.
- 4.º Los diedros internos de un mismo lado del plano secante, son suplementarios.
- 5.º Los diedros externos de un mismo lado del plano secante, son suplementarios.

Las intersecciones AB y CD (Fig. 191) del plano secante XY con los planos paralelos PQ y MN son paralelos [Teor. CLXVII]; luego si por un punto O de la interseccion AB se traza un plano perpendicular á ella tambien lo será á la CD. Las intersecciones EF y

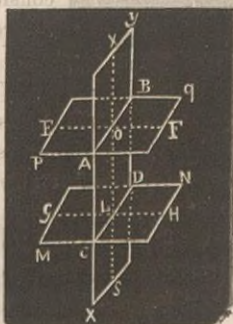


Fig. 191. (\*)

(\*) Correccion.—La X de la parte superior de esta fig.<sup>a</sup> debe ser R.



RS de dicho plano con los planos PQ y RS son perpendiculares á la recta AB en el punto O, porque son rectas que pasan por su pié O en el plano perpendicular á la recta AB; por igual razon las intersecciones GH y RS son perpendiculares á la CD en el punto L; luego los ocho ángulos que forma la recta RS con las rectas paralelas EF y GH, son los ángulos planos correspondientes á los ocho diedros, formados por el plano secante XY y los dos planos paralelos MN y PQ. Pero entre los ángulos planos formados por dichas dos rectas y la secante se verifican las propiedades que indican las cinco tésis de este teorema (que son las mismas del teorema XII); luego entre los diedros tambien se verificarán.

### TEOREMA CLXXII.

*Tres planos paralelos que cortan á dos rectas cualesquiera, las dividen en partes proporcionales. (Fig. 192)*

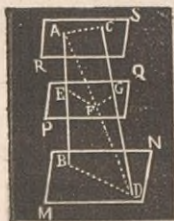


Fig. 192.

Sean los tres planos paralelos MN, PQ y RS, que cortan á las dos rectas AB y CD. Unamos el punto A con D: considerando el plano que pasa por las dos rectas AB y AD, las intersecciones EF y BD con los planos PQ y MN serán paralelas [Teor. CLXVII], así como las intersecciones FG y AC del plano que pasa por ADC con los planos PQ y RS.

Ahora los triángulos ABD y AEF son semejantes [Teorema XCIV] y tambien los triángulos DAC y DFG; por consiguiente, tenemos las proporciones:

$$\left. \begin{array}{l} AE : EB :: AF : FD \\ CG : GD :: AF : FD \end{array} \right\} \text{ De donde } AE : EB :: CG : GD.$$

**Escolio.** Si las dos rectas AB y CD estuvieran en un mismo plano, este teorema se reduciria al XC.

88. Se llama *proyeccion* de un punto sobre un plano el

pié de la perpendicular trazada desde el punto al plano; y *proyeccion* de una línea cualquiera sobre un plano, la línea formada por las proyecciones de sus puntos sobre el plano. El plano sobre el que se proyecta una línea se llama *plano de proyeccion*.

### TEOREMA CLXXIII.

*La proyeccion de una recta sobre un plano, es otra recta.* (Fig. 193)

En efecto, para determinar la proyeccion de la línea recta sobre el plano se bajarán perpendiculares desde cada uno de sus puntos al plano (86); pero todas estas perpendiculares  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ... están en un mismo plano; porque las dos rectas  $AA'$  y  $BB'$  por ser paralelas están en un mismo plano, cuyo plano coincide con el de las dos paralelas  $BB'$  y  $CC'$  por tener los tres puntos comunes  $B$ ,  $B'$  y  $A$  [Teorema CXXXVIII]; y como lo mismo puede decirse de todas las perpendiculares bajadas desde los puntos de la recta  $AC$ , queda demostrado que dichas perpendiculares están en un mismo plano. Pero la proyeccion de la recta dada sobre el plano  $MN$  es la interseccion del plano en que se hallan las perpendiculares con él, y por tanto es una línea recta. [Teor. CXXXVIII, cor. 4.º]

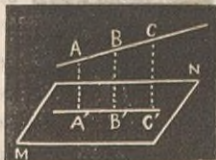


Fig. 193.

**Escolio.** El plano que contienen las perpendiculares que proyectan los puntos de una recta sobre un plano, se llama *plano proyectante*, y es claro que es perpendicular al de *proyeccion*, quedando determinada por la recta dada y una cualquiera de las perpendiculares. Siendo la proyeccion de una recta sobre un plano otra recta, dicha proyeccion quedará determinada, proyectando dos de sus puntos. Si la recta tiene un punto en el plano bastará determinar la proyeccion de otro.



89. Se llama *ángulo de una recta y un plano*, el que forma dicha recta con su proyección sobre el plano.

90. El *ángulo de dos rectas que no se cortan en el espacio* es el que forma una de ellas, y una paralela á la otra en un punto cualquiera de la primera; ó bien el ángulo formado por dos rectas tiradas desde un punto cualquiera del espacio paralelamente á las rectas en cuestion.

### TEOREMA CLXXIV.

*El ángulo de una recta y un plano, es menor que el que*

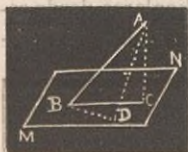


Fig. 194.

forma dicha recta con cualquiera que pasa por su pié en el plano de proyección. (Fig. 194)

Sea la recta  $AB$ : para hallar su proyección bajemos desde el punto  $A$  la perpendicular  $AC$  al plano  $MN$ , y  $BC$  será dicha proyección. Tracemos otra recta cualquiera  $BD$  y tomemos en ella  $BD = BC$ : uniendo el punto  $A$  con  $D$ .

Los dos triángulos  $ABC$  y  $ABD$ , tienen el lado  $AB$  comun y el lado  $BD = BC$  por construcción; pero siendo  $AC$  perpendicular,  $AD$  es oblicua, y por consiguiente mayor que  $AC$ , luego [Teorema XXIV] el ángulo  $ABC <$  ángulo  $ABD$ .

### TEOREMA CLXXV.

*Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones sobre un mismo plano tambien son paralelas.*

Si desde un punto de cada una de ellas se bajan perpendiculares al plano de proyección, estas perpendiculares son paralelas [Teor. CLXI], y como las rectas lo son tambien, los planos proyectantes de las dos rectas dadas son paralelos porque contienen respectivamente dos rectas paralelas; luego las intersecciones de estos planos pro-



yectantes con el plano de proyección, que son las proyecciones de las rectas, son paralelas. [Teor. CLXVII]

## CAPÍTULO V.

### DE LOS ÁNGULOS POLIEDROS.

91. Se llama *ángulo poliedro*, ó impropriamente *ángulo sólido*, la porción indefinida del espacio comprendida entre tres ó más planos, que se cortan en un punto. Este punto es el *vértice* del ángulo poliedro, y cada uno de los planos que lo determinan se llama *cara*.

Si el ángulo poliedro está formado por tres planos, ó tiene tres caras, se denomina *ángulo triedro*.

Se designa un ángulo poliedro con la letra de su vértice, ó con dicha letra seguida de otra de cada arista; si el ángulo poliedro está aislado, y por tanto no puede confundirse con otro, se puede designar sólo con la letra del vértice.

92. Ángulo poliedro *convexo* es el que una recta no puede cortar más que dos de sus caras; ó también el que si se considera prolongada cualquiera de sus caras, todo el ángulo queda á un mismo lado de ella.

93. Los ángulos poliedros cóncavos, tienen propiedades contrarias, pero de estos no nos ocuparemos en este tratado.

### TEOREMA CLXXVI.

Un ángulo plano cualquiera de un ángulo triedro, es: 1.º menor que la suma de los otros dos. 2.º mayor que su diferencia. (Fig. 195)

1.º Sea T el ángulo triedro y ATC el mayor de sus

ángulos planos (\*) vamos á demostrar que

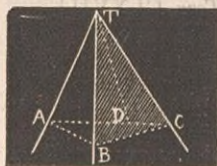


Fig. 195.

$$ATC < ATB + BTC. \quad (a)$$

Para ello en la cara' ATC tracemos la recta TD que forme un ángulo  $ATD = ATB$ , y por un punto cualquiera D de esta recta tiremos la AC que corte á las aristas TA y TC, tomando en la otra arista TB una parte  $TB = TD$ , y uniendo por último, A con B, y C con B.

Los triángulos ATD y ATB son iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego  $AD = AB$ ; pero en el triángulo ABC tenemos que  $AC = AD + DC < AB + BC$ ; luego  $DC < BC$ . (b)

Ahora los triángulos DTC y BTC tienen dos lados iguales, y los terceros lados desiguales (b); luego ángulo  $DTC < \text{ángulo } BTC$ , y sumando á esta desigualdad los ángulos iguales por construcción ATD y ATB, resultará finalmente

$$ATD + DTC = ATC < ATB + BTC.$$

2.º Demostrada la propiedad  $ATC > ATB + BTC$ , si restamos de ambos miembros ATB resultará  $ATC - ATB < BTC$ , ó bien, invirtiendo los términos,  $BTC > ATC - ATB$ .

### TEOREMA CLXXVII.

*La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro, es menor que cuatro rectos. (Fig. 196)*

Sea el ángulo poliedro P, vamos á demostrar que la suma de los ángulos planos  $APB + BPC + CPD + DPE + EPA < 4$  ángulos rectos. Para ello tracemos

(\*) Demostrada la propiedad para el mayor de los ángulos planos, queda demostrada con mayor razon para los otros dos.



un plano que corte á todas las aristas y que determinará un polígono  $ABCDE$  de tantos lados como caras tenga el ángulo poliedro; tomemos en el interior de este polígono un punto  $O$  y tracemos desde él rectas á todos los vértices. Es evidente que el polígono quedará dividido en tantos triángulos como vértices, y por consiguiente cada uno de sus lados puede considerarse como base comun de uno de los triángulos del polígono y de uno de los triángulos laterales; luego el número de triángulos laterales es igual al número de triángulos del polígono sección. Por tanto la suma de todos los ángulos de los triángulos  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ... del polígono, cuyo vértice comun está en  $O$ , será igual á la suma de los triángulos laterales  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCD$ ... cuyo vértice comun está en  $P$ .

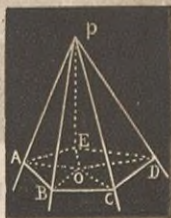


Fig. 196.

Pero observemos que en cada uno de los vértices  $A, B, C$ ... hay formado un ángulo triedro, y que en cada uno de ellos, por ejemplo en el  $B$ , se verifica segun el teorema anterior que  $ABP + CBP > ABC$ ; luego la suma de todos los ángulos de las bases de los triángulos laterales es mayor que la suma de todos los ángulos de las mismas bases del polígono  $ABCDE$ ; luego la suma de todos los ángulos en  $P$  (ángulos planos del poliedro) tiene que ser menor que la suma de todos los ángulos en  $O$ ; pero esta es igual á cuatro rectos [Teor. III, cor. 2.º], luego finalmente

**Suma de los ángulos planos del poliedro  $< 4$  ángulos rectos.**

94. Dos ángulos triedros se llaman suplementarios, cuando los ángulos planos del uno son suplementos de los diedros del otro.

### TEOREMA CLXXVIII.

*Si desde un punto interior á un ángulo triedro se bajan*



perpendiculares á sus caras, el triedro que resulta limitado

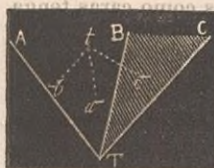


Fig. 197.

por estas rectas como aristas, es suplementario del propuesto. (Fig. 197)

Sea el ángulo triedro  $TABC$  y desde el punto  $t$  bajemos las perpendiculares  $ta$ ,  $tb$  y  $tc$ , respectivamente á las caras  $ATC$ ,  $ATB$  y  $BTC$ , vamos á demostrar que los

dos triedros  $TABC$  y  $tabc$  son suplementarios. (94)

En efecto, los ángulos planos  $bta$ ,  $btc$  y  $cta$  son suplementos respectivamente de los diedros  $TA$ ,  $TB$ , y  $TC$ , por tener sus lados perpendiculares á las caras que lo forman [Teor. CLX]; pero tambien el triedro  $TABC$  tiene sus aristas respectivamente perpendiculares á las caras del triedro  $tabc$ ; porque los planos  $ATB$  y  $BTC$  son perpendiculares al plano  $btc$  que contiene las dos perpendiculares  $tb$  y  $tc$  á dichos planos  $ATB$  y  $BTC$ , por consiguiente la  $TB$  comun interseccion de estos planos, es perpendicular al plano  $btc$ , [Teor. CLVIII]; por igual razon la arista  $TC$  es perpendicular á la cara  $atc$ , y la  $TA$  á la cara  $atb$ ; luego el triedro  $TABC$  tiene sus aristas perpendiculares á las caras del triedro  $tabc$ , y por tanto los ángulos planos del primero son suplementos de los diedros del segundo; luego, por último, el triedro  $T$  es suplementario del triedro  $t$ .

### TEOREMA CLXXIX.

La suma de los tres ángulos diedros de un triedro, es menor que seis rectos y mayor que dos.

Que dicha suma es menor que seis rectos, es evidente, porque no pudiendo ningun diedro llegar á valer dos rectos, la suma de los tres será siempre menor que seis rectos.

Para demostrar la segunda parte del teorema, llamemos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  los ángulos diedros del triedro, y  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,

los ángulos planos del triedro suplementario; tendremos según la definición (94)

$$A = 2R - a', \quad B = 2R - b', \quad C = 2R - c'.$$

Y sumando estas tres igualdades miembro á miembro

$$A + B + C = 6R - (a' + b' + c').$$

La suma  $(a' + b' + c')$  de los ángulos planos del triedro suplementario es menor que cuatro rectos (*Teorema CLXXVII*], luego

$$A + B + C > 2R.$$

**Escolio.** Un ángulo triedro puede tener un ángulo diedro recto, ó los dos, ó los tres, llamándose *rectángulo*, *bi-rectángulo* ó *trirectángulo*, en cada uno de estos casos respectivamente.

### TEOREMA CLXXX.

*Si un ángulo triedro tiene dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos opuestos tambien son iguales.* (F. 198)

Sea el triedro  $TABC$  en el que suponemos el ángulo diedro  $TA = TC$ . Prolonguemos sus tres aristas en sentido contrario al suyo, y resultará el triedro  $TDEF$ .

Pero en tal caso tendremos que

ángulo diedro  $TA =$  ángulo diedro  $TF$ ,  
por opuestos por la arista;

ángulo diedro  $TA =$  ángulo diedro  $TC$ , por hipótesis.

Luego

$$\text{ángulo diedro } TC = \text{ángulo diedro } TF. \quad (a)$$

Por iguales consideraciones se deduce que

$$\text{ángulo diedro } TA = \text{ángulo diedro } TD, \quad (b)$$



Fig. 198.

Ahora coloquemos el triedro TDEF sobre el TABC, de manera que la arista TF coincida sobre la TC, en cuyo caso la arista TD seguirá la dirección TA, por ser iguales los ángulos planos ATC y DTF, como opuestos por el vértice; las caras FTE y DTE seguirán las direcciones CTB y ATB, por ser respectivamente iguales los diedros TC y TA, con TF y TD, según acabamos de demostrar (a) (b); luego la arista TE coincidirá con la TB; ó lo que es igual, el triedro TABC coincidirá con el TDEF, de donde se deduce que

$$\text{ángulo } 1 = \text{ángulo } 4, \text{ y ángulo } 2 = \text{ángulo } 3.$$

Pero los ángulos 1 y 3 son iguales por opuestos por el vértice, luego  $\text{ángulo } 1 = \text{ángulo } 2$ , que era lo que se quería demostrar.

### TEOREMA CLXXXI.

*Si un ángulo triedro tiene dos ángulos diedros desiguales, al mayor se opone mayor ángulo plano.* (Fig. 199)

Sea el triedro TABC en el que se supone que el diedro  $TA > TC$ , y vamos á demostrar que el ángulo  $BTC > ATB$ .

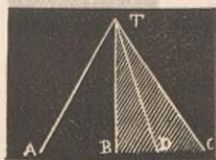


Fig. 199.

Tracemos por la arista TA un plano que forme con el ATC un ángulo diedro CTAD igual al diedro TC; sea TD la intersección de este plano con la cara BTC del triedro propuesto. En el triedro TADC tendremos, según el teorema anterior, que

$$\text{ángulo } ATD = \text{ángulo } DTC.$$

Pero en el triedro TABD, tendremos [Teor. CLXXXI] que

$$ATD + BTD > ATB.$$



Y substituyendo en vez de ATD su igual DTC, tendremos

$$DTC + BTD > ATB, \text{ ó bien, } BTC > ATB.$$

TEOREMA CLXXXII. [Recíproco del CLXXX]

*Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos iguales, los ángulos diedros opuestos son iguales.*

(Regla del número 34)

TEOREMA CLXXXIII. [Recíproco del CLXXXI]

*Si un ángulo triedro tiene dos ángulos planos desiguales, al mayor se opone mayor ángulo diedro.*

(Regla del número 34)

95. Dos ángulos triedros que tienen el vértice comun y las aristas del uno son prolongaciones de las del otro, se llaman *simétricos*.

TEOREMA CLXXXIV.

*Dos ángulos triedros simétricos tienen sus elementos (ángulos planos y diedros) respectivamente iguales; pero no pueden coincidir si los tres ángulos planos de cada uno son desiguales. (Fig. 200)*

En efecto, los dos triedros simétricos TABC y TDEF tienen todos sus ángulos planos iguales, por opuestos por el vértice, y sus ángulos diedros iguales por opuestos por la arista.

Vamos á demostrar ahora, que no pueden coincidir. En efecto, siendo desiguales los ángulos planos del triedro TABC, tambien lo serán sus ángulos diedros opuestos [Teor. CLXXXIII], y por consiguiente los del triedro simétrico TDEF.

Si hacemos coincidir el ángulo plano DTF con su igual

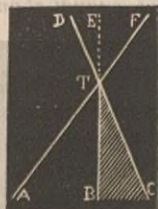


Fig. 200.

ATC, de manera que la arista TE caiga hácia el mismo lado del plano de la figura que la TB (es decir, por la parte anterior del plano de la cara ATC) la arista TD seguirá la dirección TA y la arista TF la dirección TC; pero el ángulo diedro TC no coincidirá con el ángulo diedro TF que es igual al diedro TA: por igual razón el ángulo diedro TD no coincidirá con TA; luego los triedros no coinciden.

Si hacemos coincidir el ángulo plano DTF con su igual ATC, pero de modo que la arista TE caiga á distinto lado del plano ATC que la arista TB, tampoco pueden coincidir los triedros. Vemos, pues, que los triedros simétricos tienen iguales respectivamente sus elementos, pero dispuestos en distinto orden, y por tanto no pueden coincidir.

**Escolio.** Los triedros simétricos coincidirían, ó serían iguales, si el ángulo diedro  $TC=TA$ . [Véase el *teorema CLXXX.*]

### TEOREMA CLXXXV.

*Dos ángulos triedros son iguales cuando tienen dos ángulos planos respectivamente iguales, igualmente dispuestos, é igual el ángulo diedro comprendido. (Fig. 201).*

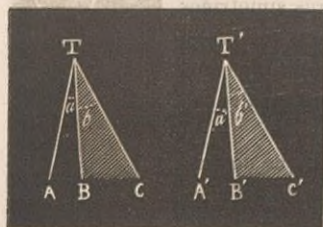


Fig. 201.

Sean los dos triedros TABC y T'A'B'C', en los que suponemos ángulo  $a=$  ángulo  $a'$ , ángulo  $b=$  ángulo  $b'$ , y ángulo diedro  $TB=T'B'$ . Coloquemos el triédro T'A'B'C' sobre el TABC, de manera que el ángulo  $a$  coincida con su igual  $a'$ ; como los diedros TB y T'B' son iguales, el plano B'T'C' caerá sobre BTC, y por ser iguales los án-



gulos  $b'$  y  $b$ , la arista  $T'C'$  coincidirá con  $TC$ . Luego coincidirán las tres aristas del triedro  $T'A'B'C'$  con los del  $TABC$ .

**Escolio.** Si los ángulos planos fueran iguales, pero dispuestos inversamente, los triedros serian simétricos, es decir, tendrían iguales sus elementos (ángulos planos y diedros) pero no podrían coincidir.

### TEOREMA CLXXXVI.

*Dos ángulos triedros son iguales cuando tienen un ángulo plano igual y los diedros adyacentes iguales é igualmente dispuestos. (Fig. 201)*

Supongamos que los dos triedros  $TABC$  y  $T'A'B'C'$  tienen: ángulo  $a = \text{ángulo } a'$ , diedro  $TA = T'A'$ , y diedro  $TB = T'B'$ .

Si colocamos la cara  $A'T'B'$  sobre su igual  $ATB$ , el plano  $B'T'C'$  seguirá la dirección  $BTC$ , y el plano  $A'B'C'$  seguirá la dirección  $ATC$ , por ser iguales los diedros  $TA$  y  $TB$  respectivamente á  $T'A'$  y  $T'B'$ , luego la arista  $T'C'$  coincidirá con  $TC$ ; y por consiguiente también los triedros.

**Escolio.** Si los triedros tienen un ángulo plano igual y los diedros adyacentes iguales, pero inversamente dispuestos, los triedros son simétricos.

### TEOREMA CLXXXVII.

*Dos ángulos triedros son iguales si tienen sus tres ángulos planos iguales é igualmente dispuestos. (Fig. 202)*

Sean los triedros  $TABC$  y  $T'A'B'C'$ , en los que suponemos  $\text{áng. } ATB = A'T'B'$ ,  $BTC = B'T'C'$ , y  $ATC = A'T'C'$ , y dispuestos de igual manera. El teorema quedaría demostrado, si pudiésemos hacer ver que uno de los ángulos diedros, por ejemplo  $TA$  era igual á  $T'A'$ , pues



en tal supuesto se reduciría este teorema al CLXXXV.

Para ello tomo sobre las aristas las partes iguales entre

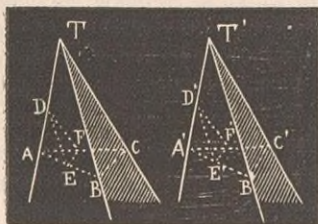


Fig. 202.

si  $TA=TB=TC=T'A'=T'B'=T'C'$ , y trazo las rectas  $AB, BC$  y  $AC, A'B', B'C'$  y  $A'C'$ . Tendremos las igualdades siguientes: triángulos  $ATC=A'T'C'$ ,  $BTC=B'T'C'$ , y  $ATB=A'T'B'$  [T. XIX] (a)

Luego tambien son iguales los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  [Teor. XXII]

Como todos los triángulos (a) son isósceles, por construccion, los ángulos que insisten sobre las bases (considerando como vértices los puntos  $T$  y  $T'$ ) son agudos.

Ahora tomemos en las aristas  $TA$  y  $T'A'$  á partir de los puntos  $A$  y  $A'$  las rectas  $AD=A'D'$ , y construyamos los ángulos planos  $EDF$  y  $E'D'F'$  correspondientes á los diedros  $TA$  y  $T'A'$ . Las rectas  $DE$  y  $DF$  que forman el ángulo plano  $D$  encontrarán respectivamente á las  $AB$  y  $AC$  [Teor. VII] en los puntos  $E$  y  $F$ ; y por igual razon las rectas  $D'E'$  y  $D'F'$  caerán en los puntos  $E'$  y  $F'$  interiores á los ángulos  $T'A'B$  y  $T'A'C'$ . Tracemos las rectas  $EF$  y  $E'F'$ .

Los triángulos rectángulos  $ADE$  y  $ADF$  son respectivamente iguales á  $A'D'E'$  y  $A'D'F'$  [Teor. XXIII, 2.º]; luego

$$AE=A'E', AF=A'F', DE=D'E', DF=D'F'.$$

Pero entonces los triángulos  $AEF$  y  $A'E'F'$  son iguales [Teor. XIX], y por tanto  $EF=E'F'$ . Luego, finalmente, los triángulos  $EDF$  y  $E'D'F'$  son iguales por tener sus tres lados iguales, y por tanto

ángulo plano D correspondiente al diedro  $TA$  = ángulo plano  $D'$  correspondiente al diedro  $TA'$ ,

luego los triedros  $TABC$  y  $T'A'B'C'$  son iguales.

**Escolio.** Si los dos triedros tuvieran sus ángulos planos iguales, pero no igualmente dispuestos, serian simétricos.

### TEOREMA CLXXXVIII.

*Dos ángulos triedros son iguales, si tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Sean  $T$  y  $T'$  los dos triedros propuestos, en los que suponemos que sus ángulos diedros que podemos llamar  $A, B, C$ , y  $A', B', C'$ , son respectivamente iguales; esto es  $A=A', B=B', C=C'$ , ( $a$ ) é igualmente dispuestos.

Llamemos  $S$  y  $S'$  los triedros suplementarios de los propuestos, y sean  $a, b, c$ , los ángulos planos del primero,  $a', b', c'$ , los del segundo: tendremos

$$\begin{aligned} A+a=2R, B+b=2R, C+c=2R, A'+a'=2R, \\ B'+b'=2R, C'+c'=2R. \end{aligned} \quad (b)$$

Pero en atencion á lo expuesto en las igualdades ( $a$ ) resulta que

ángulos planos  $a=a', b=b', c=c'$ , é igualmente dispuestos.

Por consiguiente, los triedros suplementarios  $S$  y  $S'$  de los propuestos, tienen sus ángulos planos iguales é igualmente dispuestos, y por tanto [*Teorema anterior*], son iguales.

Pero siendo iguales los triedros  $S$  y  $S'$ , sus ángulos diedros serán iguales, y por tanto, los ángulos planos de los triedros suplementarios  $T$  y  $T'$  [por lo demostrado en las igualdades ( $a$ ) y ( $b$ )] son iguales é igualmente dispuestos; pero en tal caso estos triedros son iguales, segun el teorema anterior.

**Escolio.** Si los triedros propuestos tuvieran iguales sus ángulos diedros, pero no igualmente dispuestos, serian simétricos.

## CAPÍTULO VI.

POLIEDROS EN GENERAL.—PIRÁMIDES.—PRISMAS.

96. Se llama *poliedro* el espacio circunscripto por varios planos que se cortan; estos planos forman las *caras* del poliedro que, por consiguiente, son polígonos. Los lados de los polígonos-caras son las *aristas* del poliedro, y los puntos de interseccion de las aristas forman los *vértices*: que son tambien vértices de los ángulos poliedros del poliedro. *Diagonales* del poliedro son las rectas que unen dos vértices no situados en una misma cara; y *planos diagonales* los que pasan por tres vértices no situados en una misma cara.

97. Los poliedros se designan con el número de sus caras: así se llama *tetraedro* (es el poliedro de menor número de caras posibles) el que tiene cuatro caras; *pentáedro* el que tiene cinco; *hexaedro* el que tiene seis; *heptáedro* el que tiene siete, &c.

98. Los *poliedros convexos* (que serán los únicos que han de ocuparnos), son aquellos que cortados por un plano, la seccion es siempre un polígono convexo, ó que una recta no pueda encontrar á su superficie más que en dos puntos.

99. Un poliedro es *regular* cuando todos sus ángulos diedros y poliedros son iguales, y las caras que lo forman son polígonos regulares, iguales entre sí.

### TEOREMA CLXXXIX.

No pueden existir más que cinco especies de *poliedros regulares*. (Fig. 203)



En efecto, para formar un ángulo poliedro se necesitan cuando ménos tres planos que se corten, y que los ángulos planos que forman el ángulo poliedro sean tales que su suma no llegue á cuatro rectos. [Teor. CLXXVII.]

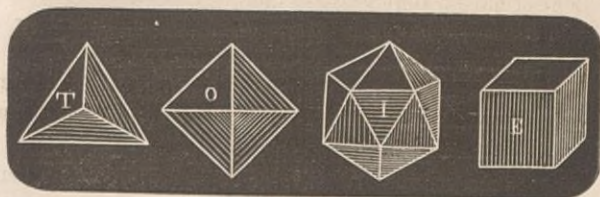


Figura 203.

**Tetráedro regular.** Si consideramos agrupados, formando un ángulo triedro, tres ángulos de triángulo equilátero, podrá formarse un triedro, porque siendo el valor de cada ángulo plano  $\frac{2}{3}$  de recto, el de los tres será 2 rectos; el poliedro que así resulta (Fig. 203, T) es el *tetráedro regular* compuesto de cuatro triángulos equiláteros.

**Octáedro regular.** Agrupando cuatro ángulos de triángulos equiláteros, se podrá formar un ángulo poliedro, puesto que la suma de sus ángulos planos valdrá

$$\frac{8}{3} \text{ recto} < 4 \text{ rectos.}$$

Cerrando este ángulo poliedro con otro igual, resulta el *octáedro regular* (O).

**Icosáedro regular.** Cinco ángulos de triángulos equiláteros pueden agruparse para formar un ángulo poliedro de cinco caras, pues la suma de ellos será igual á  $\frac{10}{3}$  recto  $< 4$  rectos. El poliedro que resulta de cerrar con otros tres ángulos poliedros iguales el espacio, es el *icosáedro regular*, compuesto de veinte triángulos equiláteros. (I)

Con seis ó más ángulos del triángulo equilátero no pue-

de formarse ángulo poliedro, porque la suma de las caras sería igual á cuatro, ó más de cuatro, ángulos rectos, lo que es absurdo.

**Exáedro regular ó cubo.** Tres ángulos de cuadrados pueden formar un ángulo triedro, pues su suma vale tres rectos. El poliedro que así resulta es el *exáedro regular* ó *cubo* (E), compuesto de seis caras que son cuadrados.

Con cuatro ó más ángulos de cuadrado, no puede formarse ángulo poliedro, porque su suma sería igual, ó mayor que cuatro ángulos rectos.

**Dodecáedro regular.** El valor de un ángulo de un pen-



Fig. 204.

tágono regular es  $\frac{6}{5}$  de rectos; por tanto, tres ángulos de pentágono regular valen  $\frac{18}{5}$  rectos  $< 4$  rectos, y con ellos puede formarse ángulo sólido; cerrando este por la agrupación de otros tres triedros iguales, resulta el *dodecáedro regular*

(D), compuesto de doce caras pentagonales.

Cuatro ángulos de pentágono regular valen  $\frac{24}{5}$  rectos  $> 4$  rectos, y por tanto con ellos no puede formarse ángulo poliedro.

Un ángulo de un exágono regular vale  $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$  de recto, luego la suma de tres ángulos de exágono regular es igual á  $\frac{12}{3} = 4$  rectos. Por tanto, con tres ó más ángulos de exágono regular no se puede formar ángulo poliedro.

Siendo el valor de un ángulo de un polígono regular  $\frac{2R(n-2)}{n} = 2R - \frac{1}{n}$ , vemos que mientras mayor sea el número  $n$  de sus lados mayor será el valor del ángulo, lue-

go si con tres ángulos de exágono no se puede formar ángulo sólido, porque su suma es igual á cuatro rectos, con tres ángulos de eptágono, octógono, eneágono &c., regulares, con mayor razon no se podrán formar ángulos poliedros; luego no pueden existir más especies de poliedros regulares que los cinco ya enunciados.

Es útil el tener idea exacta de los

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LOS CINCO POLIEDROS REGULARES.

|                      | Ángulos diedros. | Ángulos poliedros. | Ángulos planos. | Valores de uno de los ángulos planos. | Valores de uno de los ángulos diedros. |
|----------------------|------------------|--------------------|-----------------|---------------------------------------|----------------------------------------|
| <b>Tetraédro....</b> | 6                | Triedros. . . . 4  | 12              | 60°                                   | 70° 31' 43", 6                         |
| <b>Exáedro.....</b>  | 12               | Idem . . . . . 8   | 24              | 90°                                   | 90°                                    |
| <b>Octáedro.....</b> | 12               | De cuatro caras 6  | 24              | 60°                                   | 109° 28' 16", 4                        |
| <b>Dodecaédro..</b>  | 30               | Triedros . . . 20  | 60              | 108°                                  | 116° 3' 143", 2                        |
| <b>Icosáedro....</b> | 30               | De cinco caras 12  | 60              | 60°                                   | 138° 19' 22", 20                       |

En todo poliedro, el número de ángulos diedros y de aristas es el mismo, así como el número de vértices y de ángulos poliedros; pues cada arista supone un ángulo diedro y cada vértice un ángulo poliedro.

PIRÁMIDES. (Fig. 204)

100. Se llama *pirámide* el poliedro cuyas caras son: un polígono cualquiera  $ABCDE$  llamado *base* y todas las demás triángulos  $ASB$ ,  $BSC$ .... que tienen un mismo vértice  $S$ , el cual se llama *vértice* ó *cúspide* de la pirámide.

La perpendicular  $SF$  bajada desde el vértice á la base, es la *altura*.

101. Las pirámides se distinguen con el número de lados que tiene el polígono base; así, si es-

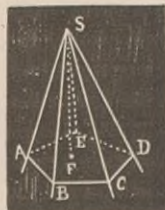


Fig. 204.



ta es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, &c., la pirámide se llamará respectivamente *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, &c.

El tetráedro (97) es una pirámide triangular, y se compone de cuatro triángulos, pudiendo ser base cualquiera de ellos, y la altura será la perpendicular bajada desde el vértice opuesto á dicha base.

102. De la definicion de la pirámide se deduce, que si todas las aristas de un ángulo poliedro S, son cortadas por un plano ABCD, el espacio comprendido desde el plano secante al vértice determinará una pirámide SABCDE, de tantos lados en su base como planos formen el ángulo poliedro. Así es, que un ángulo triedro cortado en sus aristas por un plano, forma un tetráedro ó pirámide triangular; un ángulo de cuatro caras determinará por su interseccion con un plano, una pirámide cuadrangular, &c.

103. *Pirámide regular* es la que tiene por base un polígono regular y todas sus aristas laterales iguales. De esta definicion se deduce: 1.º *Que todos los triángulos laterales de una pirámide regular son isósceles é iguales* [Teor. XXII.] 2.º *Que la altura de la pirámide cae en el centro de la base.* [Teor. CXLVI.]

104. Si se cortan por un plano todas las aristas de una pirámide, la porcion comprendida entre la base y el plano secante se llama *pirámide troncada* ó *tronco de pirámide*. Así la porcion de pirámide comprendida entre los planos ABCDE y *abcde* (Fig. 205) es un tronco de pirámide.

### TEOREMA CXC.

*Todo plano paralelo á la base de una pirámide: 1.º Divide á las aristas y á la altura en partes proporcionales. 2.º Determina una seccion semejante á la base.* (Fig. 205)

1.º Sea la pirámide  $SABCDE$  cortadas sus aristas por el plano  $abcde$  paralelo á la base. Tracemos por el vértice  $S$  el plano  $MN$  paralelo á la base de la pirámide (y por consiguiente á la seccion); tendremos que los tres planos  $MN$ ,  $abcde$  y  $ABCDE$  paralelos entre sí, dividen á las rectas comprendidas entre ellos en partes proporcionales [Teor. CLXXII], luego

$$\frac{AS}{aS} = \frac{BS}{bS} = \frac{CS}{cS} \dots = \frac{SF}{Sf}.$$

2.º Del paralelismo de los dos planos  $ABCDE$  y  $abcde$ , resulta que estos dos polígonos tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; por cuya razon sus ángulos son iguales. Además, siendo semejantes los triángulos  $SAB$ , con  $Sab$ ,  $SBC$  con  $Sbc$ , &c., por tener un ángulo comun y los lados opuestos paralelos, resulta

$$\left. \begin{array}{l} SB : Sb :: AB : ab \\ SB : Sb :: BC : bc \end{array} \right\} \text{ de donde } AB : ab :: BC : bc.$$

De igual manera se probaria la proporcionalidad de los otros lados de los polígonos  $ABCDE$  y  $abcde$ ; luego estos polígonos tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales, y por tanto son semejantes.

105. Conviene estudiar los

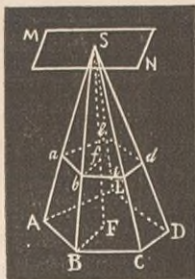


Fig. 205.

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE UNA PIRÁMIDE CUYA BASE ES UN POLÍGONO DE  $n$  LADOS.

|                                 |                |
|---------------------------------|----------------|
| Caras .....                     | $n + 1$        |
| Aristas ó ángulos diedros ..... | $2n$           |
| Vértices .....                  | $n + 1$        |
| Ángulos triedros.. .....        | $n$            |
| Ángulos planos .....            | $n + 3n = 4n.$ |

NOTA.—Si la pirámide es triangular todos los ángulos poliedros son triedros y entonces el número de estos es igual al del vértice  $n+1$ .

# PRISMAS. (Fig. 206)

106. Se llama *prisma* á un poliedro cuyas caras son dos polígonos planos iguales y paralelos, llamados *bases*, y todas las demás paralelógramos en número igual al de los lados de cada base; á estas caras se las llama *laterales*.

De esta definicion se deduce que todos los ángulos poliedros del prisma son *triedros*.

*Altura* es la distancia entre las dos bases, ó sea la perpendicular bajada desde un punto de una base al plano de la otra.

Los prismas se distinguen por el número de lados que tienen sus bases; así se llama un prisma *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, &c., segun que sus bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos, &c.

107. Si por los vértices de un polígono cualquiera ABCDE (Fig. 206) se trazan en una direccion arbitraria rectas paralelas é iguales entre sí, AA', BB', CC..., quedará formado un prisma cuyas bases son los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E'; porque los cuadriláteros AB'

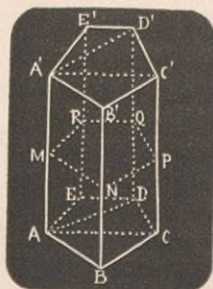


Fig. 206.

BC', CD'.... son evidentemente paralelógramos [Teor. XLIV], y los dos polígonos bases son iguales.

108. *Prisma recto* es el que sus aristas laterales son perpendiculares á la base. Las caras laterales son en tal caso rectángulos, y la altura del prisma es igual á cualquiera de dichas aristas laterales.

109. Cuando las bases de un pris-



ma son paralelógramos, toma el nombre de *paralelepípedo*; y se compone de seis caras paralelográficas. *Paralelepípedo recto* es el que sus aristas son perpendiculares á las bases; y *paralelepípedo rectángulo* si además las bases son rectángulos. El *paralelepípedo recto* que tiene por bases cuadrados y las aristas laterales son iguales á las de la base, es el *cubo* ó *exáedro regular*, que ya tenemos definido.

140. Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se llaman *prismas regulares*: sus caras laterales son rectángulos iguales entre sí.

141. *Tronco de un prisma* es la porcion del prisma comprendida entre una base y la seccion de un plano no paralelo á las bases.

### TEOREMA CXCI.

*Toda seccion paralela á las bases de un prisma, es igual á dichas bases.* (Fig. 206)

Sea MNPQR una seccion dada por un plano paralelo á las bases. Los polígonos ABMN, BCNP, CDPQ.... son paralelógramos [*Teor. CLXVII*], luego  $AB=MN$ ,  $BC=NP$ ,  $CD=PQ$ ....; además los ángulos del polígono ABCDE y MNPQR son iguales por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego dichos polígonos son iguales.

**Escolio.** Es evidente que el prisma total ABCDE, A'B'C'D'E', queda dividido por el plano MNPQR en dos prismas parciales.

### TEOREMA CXCII.

*Las caras laterales opuestas de un paralelepípedo, son iguales y paralelas.* (Fig. 207)

En efecto, las aristas AB y EF son respectivamente

iguales y paralelas á las DC y HG, por lados opuestos de paralelógramos; luego los dos paralelógramos AF y DG son iguales, y además sus planos paralelos. [Teor. CLXX]. De igual modo se demuestra que las caras AH y BG son iguales y paralelas.

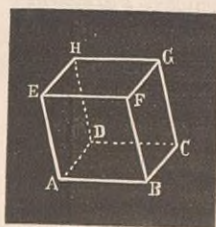


Fig. 207.

Escolio. Siendo el paralelepípedo un prisma cuadrangular que tiene sus caras paralelas de dos en dos, pueden tomarse como bases cualesquiera de estas dos caras paralelas entre sí; si el paralelepípedo es recto se toman por bases generalmente las caras que no son rectangulares.

### TEOREMA CXCIH.

*En todo paralelepípedo rectángulo el cuadrado de cada diagonal, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman un ángulo triedro. (Fig. 208)*

Sea el paralelepípedo rectángulo AG, si trazamos la diagonal EC y la diagonal de la base AC, tenemos que por ser rectángulos los triángulos ACB y ACE (Teor. de Pitágoras)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2, \text{ por ser } AD = BC.$$

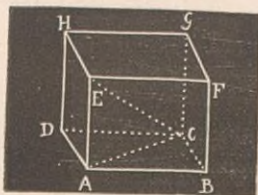


Fig. 208.

$$\text{También } \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2.$$

Sustituyendo en la segunda igualdad en vez de  $\overline{AC}^2$  su valor, resulta finalmente

$$\overline{CE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

412. Estudiemos ahora los

ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE UN PRISMA DE  $n$  LADOS EN SUS BASES.

|                                   |                    |
|-----------------------------------|--------------------|
| Caras .....                       | $n + 2$            |
| Aristas ó ángulos diedros .....   | $3n$               |
| Vértices ó ángulos triedros ..... | $2n$               |
| Ángulos planos .....              | $n + n + 4n = 6n.$ |

NOTA.—Como caso particular está comprendido en estas fórmulas el exáedro regular ó cubo.

## CAPÍTULO VII.

### IGUALDAD DE LOS POLIEDROS.

#### LEMA.

*Si dos poliedros convexos son tales que todos sus vértices pueden coincidir, dichos poliedros son iguales.*

Esta proposicion es casi evidente; pues si los vértices de ambos poliedros coinciden, coincidirán las aristas, y por consiguiente las caras, y de la coincidencia de estas resultará la de los ángulos diedros, y de la de estos la superposicion de los ángulos poliedros; luego los dos poliedros coincidirán completamente.

#### TEOREMA CXCIV.

Dos tetraédros son iguales. 1.º *Si tienen dos caras respectivamente iguales, igualmente dispuestas, é igual el ángulo diedro comprendido.* 2.º *Si tienen una cara igual adyacente á tres ángulos diedros iguales, é igualmente dispuestos.* 3.º *Si tienen tres caras iguales é igualmente dispuestas.* (Fig. 209)

1.º Supongamos que los dos tetraédros  $TABC$  y  $T'A'B'C'$  tienen igualmente dispuestas las caras  $ATB=A'T'B'$ ,  $ATC=A'T'C'$  y diedro  $AT=A'T'$ .

El ángulo diedro  $T'A'$  se podrá hacer coincidir con su igual  $TA$  de manera que los puntos  $T'$  y  $A'$  coincidan con  $T$  y  $A$ ; con cuyo caso los puntos  $B'$  y

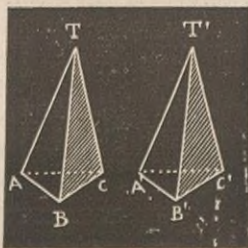


Fig. 209.



C' coincidirán con B y C, por ser iguales respectivamente los triángulos TAC y TBC con T'A'C' y T'B'C'; luego los cuatro vértices de los dos tetráedros coinciden, y por consiguiente estos tetráedros son iguales. [*Lema.*]

2.º Supongamos que los dos tetráedros dados tienen

$$\text{cara } ATC = A'T'C'$$

y los ángulos diedros  $AT = A'T'$ ,  $TC = T'C'$  y  $AC = A'C'$ .

Claro es que si hacemos coincidir la cara A'T'C' con su igual ATC, las otras tres caras adyacentes coincidirán, y por tanto el punto B' coincidirá con B; luego los tetráedros se confundirán. [*Lema.*]

3.º Supongamos ahora que tienen las

$$\text{caras } ATC = A'T'C', ATB = A'T'B' \text{ y } BTC = B'T'C'.$$

En tal caso, el ángulo triedro T será igual al T' [*Teorema CLXXXVII*], y por tanto podrán coincidir; pero entonces los vértices A', B' y C' coincidirán respectivamente con A, B y C, luego &c.

### TEOREMA CXCV.

*Dos pirámides son iguales si tienen uno de los ángulos triedros de la base iguales respectivamente, é iguales las tres caras que lo forman.*

En efecto, en tal caso por ser iguales las bases de las dos pirámides podrán coincidir los vértices de estas bases y por ser iguales uno de los ángulos triedros y las caras que lo forman, coincidirán las cúspides de las dos pirámides; luego las dos pirámides coinciden. [*Lema.*]

### TEOREMA CXCVI.

*Dos prismas cualesquiera son iguales, si tienen un án-*

*gulo triedro igual y las tres caras que lo forman iguales é igualmente dispuestas* (F. 210)

Supongamos que los dos prismas  $AH$  y  $A'H'$  tienen igualmente dispuestas las caras

$$ABCDE = A'B'C'D'E',$$

$$ABFG = A'B'F'G'$$

$$BCGH = B'C'G'H'$$

y el ángulo triedro en  $B = B'$ .

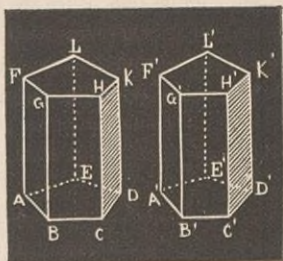


Fig. 210.

Superpongamos el polígono  $A'B'C'D'E'$  sobre su igual  $ABCDE$ , por ser iguales los triedros en  $B$  y en  $B'$ , las caras  $ABFG$  y  $BCGH$  coincidirán con  $A'B'F'G'$  y  $B'C'G'H'$ , y por ser iguales dichas caras los puntos  $F'$ ,  $G'$  y  $H'$  coincidirán con  $F$ ,  $G$  y  $H$ ; pero en este caso los planos de las bases superiores tendrán tres puntos comunes, y por tanto coincidirán; luego los otros vértices  $L'$  y  $K'$  también se confundirán con  $L$  y  $K$ , y por tanto los dos prismas coinciden. [*Lema.*]

### TEOREMA CXCVII.

**Dos prismas rectos son iguales, si tienen una base igual y una de las aristas laterales.**

En efecto, haciendo coincidir la base igual, todas las aristas laterales coincidirán por ser perpendiculares á la base é iguales entre sí, luego los vértices de la otra base también coincidirán, y por tanto los dos prismas.

**113. Descòmposicion de un poliedro en tetraédros.**— Hemos visto en la geometría plana que un polígono puede descomponerse en triángulos de dos maneras: ó tomando un punto interior y trazando rectas á todos los vértices, ó trazando rectas desde un vértice del polígono á todos los no adyacentes; quedando el polígono descompuesto en el primer caso en tantos triángulos como lados

tenga, y en el segundo en tantos triángulos como lados tenga, menos dos. Pues de un modo análogo puede todo poliedro descomponerse en tetraédros tomando un punto interior, como vértice comun de todos los tetraédros, ó uno de los vértices del poliedro, como dicho vértice comun; de tal manera que el tetraédro puede considerarse como el cuerpo elemental entre los poliedros, así como el triángulo lo es respecto de los polígonos.

**1.<sup>a</sup> descomposicion.** Si consideramos un punto en el interior de un poliedro y trazadas por él rectas á todos los vértices, quedarán formadas tantas pirámides como caras tenga el poliedro, y dichas pirámides tendrán su cúspide comun. Ahora si se tiran las diagonales de los polígonos que forman las caras del poliedro y por cada una de ellas y el vértice de las pirámides se hacen pasar planos, es evidente que dichas pirámides quedarán divididas en tetraédros, y por consiguiente tambien el poliedro en cuestion. Es fácil establecer una fórmula que exprese el número  $N$  de tetraédros que resultará de esta descomposicion, pues llamando  $n, n', n'', n''' \dots$  los números de lados de cada una de las caras del poliedro, teniendo presente que cada una de ellas será dividida por sus diagonales en dos triángulos ménos que el número de sus lados, tendremos que

$$N = (n-2) + (n'-2) + (n''-2) + (n'''-2) + \dots$$

Así, por ejemplo, el número de tetraédros que resulta de dividir los cinco poliedros regulares en tetraédros tomando un punto interior, será, sustituyendo en la fórmula en vez de  $n, n', n'' \dots$  sus valores, y teniendo presente que todos estos números son iguales entre sí.

$$\text{Tetraédro} \dots = 4(3-2) = 4 \text{ tetraédros.}$$

$$\text{Octaedro} \dots = 8(3-2) = 8 \quad \text{id.}$$



$$\text{Icosáedro} \dots = 20(3-2) = 20 \text{ tetraédros.}$$

$$\text{Exáedro} \dots = 6(4-2) = 12 \quad \text{id.}$$

$$\text{Dodecáedro} = 12(5-2) = 36 \quad \text{id.}$$

**2.<sup>a</sup> descomposicion.** Si desde un vértice del poliedro se trazan rectas á los vértices de las caras que no concurren en él, quedará tambien el poliedro dividido en tantas pirámides como caras tenga menos el número de las que forman el ángulo poliedro del vértice tomado; trazando despues las diagonales de estas caras y por ellas y por el vértice comun planos, quedará el poliedro dividido tambien en tetraédros. Es fácil comprender que el número de tetraédros es igual al de los triángulos en que pueden dividirse todas las caras, menos las que terminen en el vértice comun. De modo, que si llamásemos  $n, n', n'' \dots$  los números que representan los lados de las caras que no forman el ángulo poliedro cuyo vértice se toma como punto de partida para la descomposicion, tendremos

$$N = (n-2) + (n'-2) + (n''-2) + \dots$$

Veamos el número de tetraédros que resultan de dividir cada uno de los poliedros regulares, tomando un vértice como punto de partida.

$$\text{Tetraédro} \dots = (3-2) = 1 \text{ tetraédro.}$$

$$\text{Octáedro} \dots = 4(3-2) = 4 \quad \text{id.}$$

$$\text{Icosáedro} \dots = 15(3-2) = 15 \quad \text{id.}$$

$$\text{Exáedro} \dots = 3(4-2) = 6 \quad \text{id.}$$

$$\text{Dodecáedro} = 9(5-2) = 27 \quad \text{id.}$$

En esta descomposicion pueden resultar tetraédros que tengan una sóla cara en la superficie del poliedro descompuesto (que necesariamente será uno de los triángulos en que se ha dividido una de las caras del poliedro), á estos tetraédros se les llama *interiores*, ó tetraédros que tengan dos ó tres de sus caras en la superficie del poliedro, en cuyo caso se llaman *exteriores*.

## TEOREMA CXCVIII.

Dos poliedros cualesquiera son iguales, si están compuestos de igual número de tetraédros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

Pues haciendo coincidir dos de los tetraédros respectivamente iguales, coincidirán los adyacentes, por estar igualmente dispuestos y ser iguales, y así todos los demás; y por consiguiente, los vértices de ambos poliedros se confundirán, y por tanto dichos poliedros serán iguales.

## LIBRO II.

### CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS.

### CAPÍTULO I.

#### DEL CONO RECTO.

114. Se llama *cono recto* (Fig. 211) el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo SOB que gira alrededor de uno de sus catetos SO. El cateto movable OB evidente-

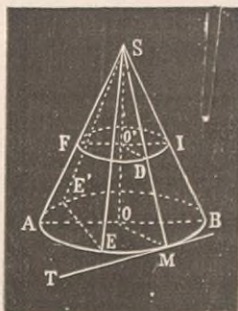


Fig. 211.

mente engendra un círculo cuyo centro está en O y del cual OB es el radio; pues en todas las posiciones de OB el punto B equidista del punto O, y además como OB es perpendicular á la SO, la curva engendradora está en un plano [Teor. CXL]. Dicho círculo es la *base* del cono: *altura* ó *eje* es el cateto fijo SO, y *superficie cónica* la engendradora por la hipotenusa SB del triángulo regenerador. *Vértice del cono* es el punto S, y

*lados ó generatrices* del cono son las posiciones de la hipotenusa SB, tales son SM, SE, SA, SE'....

*Cono truncado ó tronco de cono*, es la parte de cono comprendida entre la base y un plano que corte á todas las generatrices.

115. Se llama *plano tangente* al cono, el que tiene una sola generatriz comun con la superficie cónica; dicho plano tiene la propiedad de contener en sí, ó ser el lugar geométrico, de todas las tangentes tiradas por todos los puntos de contacto á todas las curvas que pueden trazarse sobre la superficie cónica.

### TEOREMA CXCIX.

*Todo plano que pase por el vértice de un cono y por una cuerda de la base, corta á la superficie lateral del cono en dos generatrices.* (Fig. 211)

En efecto, el plano que pase por S y por EE', corta á la superficie cónica en las dos rectas SE y SE', que son dos generatrices ó lados del cono.

**Escolio.** La seccion total SEE' es un triángulo. Si el plano pasa por el eje dará un triángulo tal como el SAB isósceles, y las dos generatrices en que corte á la superficie cónica se llaman *opuestas*.

### TEOREMA CC.

*La seccion dada á un cono por un plano paralelo á la base, es un circulo cuyo centro está en el eje.* (Fig. 211)

Sea la seccion FDI. Por el eje y por las generatrices SB, SM y SA, hagamos pasar planos, los que cortarán á la base y á la seccion en rectas respectivamente paralelas. [Teor. CLXVII]; luego los triángulos semejantes SOB y SO'I, SOM y SO'D, SOA y SO'F, nos darán las proporciones



$$\left. \begin{array}{l} SO : SO' :: OB : O'I \\ SO : SO' :: OM : O'D \\ SO : SO' :: OA : O'F \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Estas proporciones tienen sus tres primeros} \\ \text{términos respectivamente iguales; luego} \\ O'I = O'D = O'F. \end{array}$$

Por consiguiente, la curva FDI... es plana (por ser intersección de un plano con el cono) y sus puntos equidistan de otro interior; por tanto, dicha curva es una circunferencia y su centro O' está en el eje SO.

### TEOREMA CCI.

*Todo plano que pasa por un lado del cono y por la tangente á la base en el punto en que dicho lado toca á la base, es tangente al cono.* (Fig. 211)

Consideremos un plano que pasa por SM y por la tangente TM á la circunferencia de la base en el punto M. Como la recta TM no tiene comun con la base más que el punto M, el plano en cuestion tampoco tiene con la base más punto comun que el punto M, y por tanto dicho plano no puede tener comun con el cono más que la generatriz SM, luego es tangente. (215)

### TEOREMA CCII. [Recíproco del anterior]

*Todo plano tangente al cono, corta al plano de la base en una recta tangente á dicha base.* (Fig. 211)

En efecto, si el plano SMT es tangente, no puede tener más que la generatriz SM comun con el cono; luego su intersección TM con el plano de la base no puede tener más que el punto M comun con la circunferencia de la base.

**Corolario.** *Por un punto de la superficie lateral de un cono, no puede pasar más que un plano tangente; pues dicho plano contendrá la generatriz que pasa por dicho punto y la tangente á la base tirada por el pié de la generatriz;*

y sabemos que por dos rectas que se cortan no puede pasar más que un plano.

## CAPÍTULO II.

### DEL CILINDRO RECTO.

116. Se llama *cilindro recto* el cuerpo engendrado por un rectángulo (Fig. 212) ABCD que gira alrededor de uno de sus lados AB, que se denomina *eje* del cilindro. Los dos lados AC y BD perpendiculares al eje describen dos círculos iguales y paralelos, llamados *bases* del cilindro, cuyos planos son perpendiculares á dicho eje AB; el lado CD del rectángulo generador describe una superficie curva, que constituye la *superficie lateral* del cilindro; y cada una de las posiciones del lado CD movable, es un *lado*, *generatriz* ó *arista* del cilindro; tales son CD, GE, MN, C'D'.... *Altura* del cilindro es la distancia entre sus dos bases, y por tanto es igual al eje AB, ó á cualquiera de las generatrices.

117. *Plano tangente* al cilindro es un plano que tiene con la superficie cilíndrica una sóla generatriz comun; dicho plano posee la misma propiedad que el plano tangente al cono, es decir, que contiene, ó es el lugar geométrico, de todas las tangentes tiradas por todos los puntos de contacto, á todas las curvas que pueden trazarse sobre la superficie cilíndrica.

### TEOREMA CCIII.

*Todo plano paralelo al eje de un cilindro y que pasa por una cuerda de la base, corta á la superficie cilíndrica en dos generatrices.* (Fig. 212)

Supongamos un plano que sea paralelo al eje AB y que

pase por la cuerda EF; dicho plano que pasa por el punto E y es paralelo á la AB, debe contener á la generatriz EG que es paralela á AB; por igual razon, pasando dicho plano por el punto F, debe contener á la generatriz FK; por consiguiente, las dos generatrices EG y FK, son las intersecciones del plano con la superficie cilíndrica.

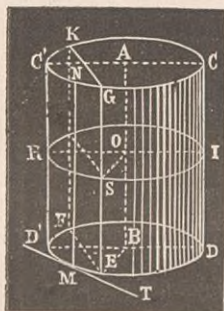


Fig. 212.

**Escolio.** Es evidente que la seccion total que resulta GFKF es un rectángulo, toda vez que las generatrices son perpendiculares á la base, segun la generacion del cilindro. Si el plano secante pasa por el eje, entonces la seccion seria un rectángulo DD'C'C doble del rectángulo generador, y las dos generatrices CD y C'D' se llaman *opuestas*.

#### TEOREMA CCIV.

*Toda seccion plana paralela á la base de un cilindro, es un circulo igual á los de cada base y su centro está en el eje. (Fig. 212)*

Sea la seccion RSI paralela á las bases; si por el eje y las generatrices CD, GE y C'D' hacemos pasar planos, sus intersecciones con las bases y con el plano secante serán paralelas [*Teor. CLXVII*]; luego las figuras ORD'B, OSEB, OIDB..... serán paralelógramos, y por tanto,  $OR=BD'$ ,  $OS=BE$ ,  $OI=BD$ ....

Todos los segundos miembros de estas igualdades son iguales entre sí, por radios de un mismo círculo; luego los primeros lo serán tambien, y por consiguiente

$$OR=OS=OI.....$$

Pero entonces la curva RSI es plana y sus puntos equi-



distan del punto O, luego es una circunferencia, cuyo centro está en el eje AB.

### TEOREMA CCV.

*Todo plano que pasa por una generatriz del cilindro y la tangente á la base en el pié de esta generatriz, es tangente al cilindro.* (Fig. 212)

En efecto, el plano que pase por la generatriz NM y la tangente TM de la base en el punto M, no tiene comun con dicha base más que el punto M; luego todas las generatrices del cilindro están fuera de él, á excepción de la MN; y por tanto es tangente, (217).

### TEOREMA CCVI. [Recíproco del anterior]

*Todo plano tangente al cilindro corta al plano de la base, en una recta tangente á la base en el punto de contacto.* (Se demuestra como su análogo al teorema CCII).

**Corolario.** *Por un punto de la superficie lateral del cilindro, no puede pasar más que un plano tangente; pues dicho plano contiene al lado del cilindro que pasa por el punto dado, y á la tangente de la base trazada por el pié de dicho lado.*

## CAPÍTULO III.

### DE LA ESFERA.

418. Se llama *esfera* el cuerpo engendrado por un semicírculo que gira alrededor del diámetro (Fig. 213). En este movimiento, un punto cualquiera E del semicírculo generador ACB, describe una circunferencia cuyo radio es la distancia EM de dicho punto al diámetro AB, y cuyo centro es el punto M. Centro de la esfera es el centro del semicírculo generador; *radios* de la esfera son las

rectas que van del centro á la superficie esférica; *diámetro* es la recta que pasa por el centro y termina en la superficie esférica. *Todos los radios de una esfera son iguales*; pues son los radios del semicírculo generador: *todos los diámetros de una esfera son iguales*, por componerse de dos radios.

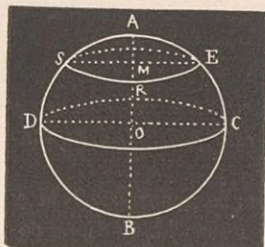


Fig. 213.

La propiedad de tener sus radios iguales, sirve para definir la esfera diciendo: *que es un cuerpo terminado por una superficie, que todos sus puntos equidistan de otro interior llamado centro.*

119. De la definición de la esfera se deduce que dos esferas del mismo radio son iguales.

### TEOREMA CCVII.

*La seccion que resulta de cortar una esfera por un plano, es un círculo cuyo centro está en el pié de la perpendicular bajada desde el centro de la esfera al plano.* (F. 214)

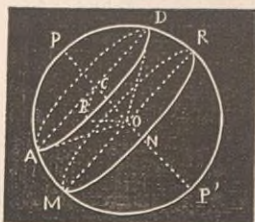


Fig. 214.

Sea la seccion plana ABD; si desde el centro de la esfera trazamos los radios OA, OB, OD..... á los puntos de la seccion ABD, todas estas rectas serán iguales (como radios de la esfera) y por tanto se apartarán igualmente del pié C de la perpendicular OC al plano secante [Teorema CXLVI]; luego todas las rectas CA, CB, CD..... son iguales, y por consiguiente la línea ABD es una circunferencia (13) cuyo centro está en C.

**Escolio.** Si el plano pasase por el centro de la esfera, la

seccion obtenida MNR se llama *círculo máximo* de la esfera y tiene un radio igual al de la esfera ó al del semicírculo generador. Es evidente, que todos los círculos máximos de una esfera son iguales.

Los planos secantes que no pasan por el centro de la esfera determinan los que se llaman *círculos menores* de la esfera, tal es el ABD.

Si llamamos R al radio de una esfera,  $r$  al radio de una seccion cualquiera ABD (Fig. 214), y  $d$  la distancia OC del centro de la esfera al plano de la seccion, tendremos en el triángulo rectángulo OCD,

$$R^2 = r^2 + d^2, \text{ de donde } r = \sqrt{R^2 - d^2},$$

cuya fórmula nos demuestra que el radio del círculo secante vá siendo menor á medida que el plano secante dista más del centro de la esfera.

### TEOREMA CCVIII.

*Dos círculos máximos de una misma esfera, se cortan entre si en partes iguales.*

En efecto, pasando por el centro los dos planos de dichos círculos, su interseccion será un diámetro de la esfera, que á la vez será diámetro de ambos círculos, el cual sabemos que los dividirá en partes iguales.

### TEOREMA CCIX.

*Todo círculo máximo divide á la esfera en dos hemisferios ó partes iguales.* (Fig. 214)

Si superponemos las dos porciones MPR y MP'R en que queda dividida la esfera por el círculo máximo MNR, todos los puntos de la superficie de la una deberán coincidir con los de la otra; porque los radios de la esfera son iguales.



TEOREMA CCX.

*Cuatro puntos que no están en un mismo plano, determinan la posición y magnitud de una esfera. (Fig. 215)*

Sean los cuatro puntos A, B, C y D. Por los tres puntos A, B, C, puede pasar un plano y un círculo, así como por los tres puntos ADC. La recta AC será la intersección de dichos dos planos.

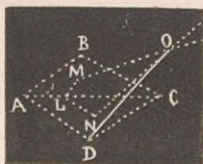


Fig. 215.

Sean los puntos M y N los centros de los círculos que pasan por A, B, C, y A, D, C, respectivamente. Levantemos por dichos puntos M y N las perpendiculares MO y NO á los planos ABC y ADB; dichas perpendiculares se encontrarán, y el punto O de intersección equidistará de los cuatro puntos A, B, C, D; luego la esfera cuyo centro sea O y tenga por radio OD pasará por los cuatro puntos dados.

Vamos ahora á demostrar que por dichos puntos no puede pasar más que una esfera. En efecto, supongamos que pasara otra, el centro de esta esfera estaria en la recta MO que es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos A, B, C [*Teor. CXLV, cor. 1.º*], y por igual razon dicho centro deberá estar en la recta NO, luego estaria en la intersección de estas dos rectas ó sea en el punto O; por consiguiente, esta esfera tendria por centro O y por radio OD, luego se confundiria con la anterior. (119)

**Corolario.** *Los vértices de un tetrédredro determinan una esfera; este corolario se deduce evidentemente del teorema.*

**Escolio.** Si los cuatro puntos están en un mismo plano y no corresponden á una circunferencia, por ellos no puede pasar una esfera, porque la intersección de un plano

con una esfera es un círculo. Si estando los cuatro puntos en un plano corresponden á una circunferencia, por ellos podrán pasar infinitas esferas; pues cualquier punto de la perpendicular levantada por el centro de dicha circunferencia equidista de los cuatro puntos dados.

120. Se llama *eje* de un círculo de la esfera el diámetro perpendicular al plano de dicho círculo (dicho eje pasa por el centro del círculo); y *polos* las extremidades de dicho diámetro. Segun esta definicion es evidente que el eje y los polos de un círculo, lo son tambien de todos sus paralelos.

### TEOREMA CCXI.

*Los polos de un círculo equidistan de todos los puntos de la circunferencia de dicho círculo. (Fig. 216)*

Segun la definicion de polos que acabamos de dar, la recta PQ es perpendicular al plano del círculo AA'A'', luego las rectas PA, PA', PA''..... son iguales, por oblicuas que se apartan igualmente del pié Q de la perpendicular. Lo mismo se demuestra que el polo P' equidista de todos los puntos de la circunferencia AA'A''.

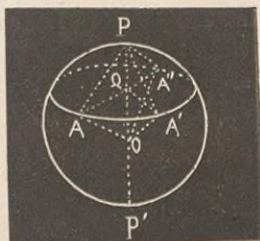


Fig. 216.

**Escolio.** Los puntos de la circunferencia de un círculo máximo, distan un cuadrante de su polo.

### TEOREMA CCXII. [Recíproco del anterior]

*El lugar geométrico de todos los puntos de la superficie de una esfera equidistantes de otro punto de dicha superficie, es una circunferencia de círculo del que es polo dicho punto. (La misma figura.)*

En efecto, si suponemos que los puntos A, A', A''.....

equidistan del punto P, tirando el diámetro de la esfera que pasa por este punto, y los radios OA, OA', OA"..... tenemos que los triángulos OAP, OA'P, OA"P..... tienen sus tres lados iguales, y por tanto son iguales. Si desde el punto A bajamos la perpendicular AQ sobre la PP' y trazamos las rectas A'Q, A"Q.... los triángulos APQ, A'PQ, A"PQ... serán iguales [Teor. XIX]; y como el APQ es rectángulo por construcción, también lo serán los demás. Por consiguiente, todos los puntos A, A', A".... están en un mismo plano perpendicular á PP' [Teor. CXL], y además equidistan del punto Q, luego dichos puntos pertenecen á una circunferencia de círculo, del que es polo el punto P.

121. Se llama *plano tangente* á la esfera, el que no tiene con ella más que un punto común; dicho plano contiene todas las tangentes trazadas á las diferentes curvas situadas en su superficie y que pasan por el punto de contacto. (\*)

### TEOREMA CCXIII.

*Todo plano perpendicular al radio en el punto en que este toca á la esfera, es tangente á la esfera.* (Fig. 217)

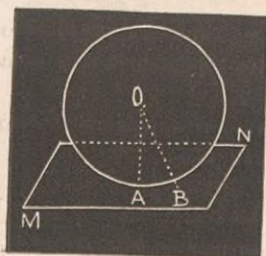


Fig. 217.

Siendo el plano MN perpendicular al radio OA en el punto A, cualquier recta OB que una el centro de la esfera con el plano MN es mayor que OA; luego el plano MN no tiene más punto común con la esfera que el punto A, y por tanto es tangente á la esfera.

(\*) Esta última parte de la definición que como se vé es más bien una propiedad, así como sus análogas de los planos tangentes á las superficies cónicas y cilíndricas, tiene su demostración, que no hemos creído oportuno dar en estos elementos.



TEOREMA CCXIV. [Recíproco del CLXXXI]

*Todo plano tangente á una esfera, es perpendicular al radio en el punto de contacto.* (La misma figura.)

En efecto, si el plano MN es tangente á la esfera en el punto A, el radio OA será menor que cualquier recta OB que una el centro de la esfera con el plano; luego dicho radio OA será perpendicular al plano MN.

**Corolario.** *Por un punto de la esfera, no se puede trazar más que un plano tangente á la esfera; porque por un punto de una recta no se puede trazar más que un plano perpendicular á ella.*

122. Sabemos que una esfera puede ser engendrada por uno cualquiera de sus círculos máximos que gira alrededor de uno de sus diámetros; por consiguiente, se puede deducir la posición relativa de dos esferas de las de sus círculos generadores, pues si concebimos que estos giran alrededor de la línea de los centros, dichas esferas tendrán iguales posiciones relativas que los expresados círculos.

Por tanto, podemos establecer el siguiente teorema que comprende las cinco posiciones que pueden tener dos esferas, y que se demuestra como sus análogos los teoremas LXX al LXXIV de la Geometría plana, considerando la sección dada por un plano que pase por los centros de las dos esferas.

TEOREMA CCXV.

1.º *Si dos esferas son exteriores la una á la otra, la distancia de sus centros es mayor que la suma de los radios.*

2.º *Si dos esferas son tangentes exteriormente, la distancia de sus centros es igual á la suma de sus radios.*

3.º *Si dos esferas se cortan, la distancia de sus centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia.*

4.º Si dos esferas son tangentes interiormente, la distancia de sus centros es igual á la diferencia de sus radios.

5.º Si dos esferas son interior la una á la otra, la distancia de sus centros es menor que la diferencia de sus radios. (\*)

## CAPÍTULO IV.

### DE LOS TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS ESFÉRICOS.

123. El valor de un ángulo curvilíneo se aprecia siempre por las tangentes tiradas á sus lados en el punto de su interseccion.

124. Se llama *ángulo esférico* la separacion ó abertura de dos arcos AB y AC (Fig. 218) de círculo máximo que se cortan en un punto A, que es el *vértice* del ángulo. *Lados* del ángulo son los dos arcos que lo forman.

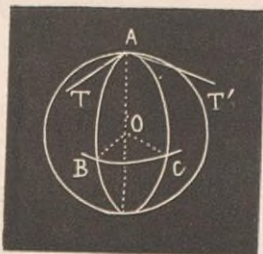


Fig. 218.

El valor de un ángulo esférico BAC se aprecia por el del ángulo rectilíneo TAT' que forman las dos tangentes AT y AT' trazadas á los lados por el vértice A.

Siendo las dos tangentes AT y AT' perpendiculares á la recta AO en el punto A, TAT' es

el ángulo plano correspondiente al diedro BAOC formado por los planos de los arcos AB y AC, de modo que el ángulo esférico BAC tiene la misma medida que el diedro formado por los planos que determinan sus dos lados.

125. Se llama *triángulo esférico* la porcion ABC de la superficie esférica comprendida en tres arcos AB, AC, BC de círculos máximos, menores cada uno que media

(\*) El recíproco de este teorema es cierto, y se demuestra lo mismo que su análogo de la Geometría plana.

circunferencia. *Lados* del triángulo son los arcos que lo forman, y *vértices* del triángulo los de los ángulos esféricos.

Angulo triedro *correspondiente* á un triángulo esférico es el terminado por los radios OA, OB, OC de la esfera tirados á los vértices del triángulo; y recíprocamente el triángulo esférico ABC se llama *correspondiente* al triedro OABC.

126. Podemos observar que los lados AB, AC, BC del triángulo esférico son las medidas de los ángulos planos AOB, AOC, BOC de su triedro correspondiente [*Teorema LXXX*], y que los ángulos A, B, C del triángulo esférico son las medidas, respectivamente, de los diedros del triedro cuyas aristas son OA, OB y OC (125); de tal modo que las mismas relaciones de magnitud existen entre los ángulos diedros y los planos de un triedro, que entre los ángulos esféricos y los lados de su triángulo esférico correspondiente.

La porcion de esfera OABC comprendida entre dicho triedro y su triángulo esférico correspondiente, se llama *tetráedro esférico*.

127. Se llama *polígono esférico* la porcion de superficie esférica ABCDE (Fig. 219) terminada por varios arcos de círculos máximos. Si se trazan los radios OA, OB, OC..... que terminan en los vértices del polígono, queda formado un ángulo sólido OABCDE, que se llama *correspondiente* al polígono esférico, porque los ángulos planos tienen por medida los lados de dicho polígono y los ángulos diedros los ángulos esféricos.

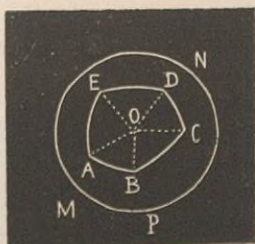


Fig. 219.

La porcion de esfera OABCDE comprendida entre dicho ángulo sólido y su polígono esférico correspondiente se llama *pirámide esférica*.



### TEOREMA CCXVI.

*Un lado cualquiera de un triángulo esférico, es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. (Fig. 220)*

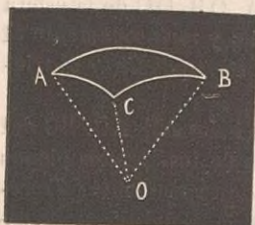


Fig. 220.

En efecto, si unimos los tres vértices A, B, C, del triángulo esférico con el centro O de la esfera, resultará el triedro correspondiente OABC, en el que sabemos [Teor. CLXXVI] que

$$\left. \begin{array}{l} AOB < AOC + BOC \\ AOB > AOC - BOC. \end{array} \right\} \text{ Luego } \left\{ \begin{array}{l} AB < AC + BC \\ AB > AC - BC. \end{array} \right.$$

**Escolio.** Este teorema es cierto también para el polígono esférico.

### TEOREMA CCXVII.

*La suma de todos los lados de un triángulo, ó de un polígono esférico, es menor que cuatro rectos.*

(La demostración se funda en el teorema CLXXVII.)

### TEOREMA CCXVIII.

*En todo triángulo esférico isósceles, á los lados iguales se oponen ángulos iguales.*

[Teor. CLXXX.]

### TEOREMA CCXIX.

*En todo triángulo esférico, á mayor lado se opone mayor ángulo.*

[Teor. CLXXXI.]

**NOTA.**—Los recíprocos de estos dos teoremas se demuestran por la regla del número 34.

### TEOREMA CCXX.

*La suma de los ángulos de un triángulo esférico, es menor que seis rectos y mayor que dos.*

[Teor. CXXIX.]

128. Un triángulo esférico puede tener uno, dos ó tres ángulos rectos. El triángulo esférico que tiene un ángulo recto se llama *rectángulo*, el que tiene dos ángulos rectos *birectángulo*, y el que tiene tres *trirectángulo*.

En el triángulo esférico rectángulo se denominan *catetos* los lados que forman el ángulo recto, y el lado opuesto *hipotenusa*.

129. Dos triángulos esféricos son *suplementarios* cuando los lados del uno son suplementos de los ángulos del otro.

130. Dos triángulos esféricos se llaman *simétricos*, cuando pertenecen á triedros simétricos.

### TEOREMA CCXXI.

*Los triángulos esféricos correspondientes á dos triedros suplementarios, son suplementarios.*

### TEOREMA CCXXII.

Dos triángulos esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, cuando tienen dos lados respectivamente iguales, igualmente dispuestos, é igual el ángulo comprendido. (Fig. 221)

Si los triángulos ABC y A'B'C' situados en una misma esfera ó en esferas iguales tienen

ángulo A = ángulo A'  
lado AB = lado A'B'  
lado AC = lado A'C',

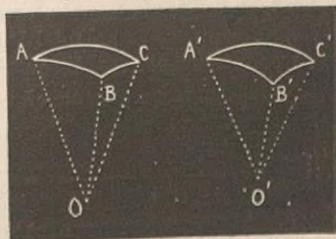


Fig. 221.

los triedros correspondientes  $OABC$  y  $O'A'B'C'$  serán iguales [Teor. CLXXXV], y por tanto, haciéndolos coincidir, coincidirán los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ .

**Escolio.** Si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tuvieran los elementos respectivamente iguales; pero no colocados en el mismo orden, sus triedros correspondientes serian simétricos, y los triángulos tambien serian simétricos; estos triángulos no pueden coincidir aunque sus elementos son iguales.

#### TEOREMA CCXXIII.

Dos triángulos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, si tienen un lado igual y los ángulos adyacentes iguales respectivamente é igualmente dispuestos. (Fig. 221)

#### TEOREMA CCXXIV.

Dos triángulos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, si tienen sus tres ángulos iguales é igualmente dispuestos. (Fig. 221)

#### TEOREMA CCXXV.

Dos triángulos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, si tienen sus tres lados iguales é igualmente dispuestos. (Fig. 221) (\*)

#### TEOREMA CCXXVI.

*En todo triángulo esférico birectángulo:* 1.º El vértice del ángulo oblicuo es polo del lado opuesto. 2.º El ángulo en el polo tiene por medida el lado opuesto. (Fig. 222)

1.º Supongamos que en el triángulo  $ABC$ , los ángulos  $B$  y  $C$  son rectos. Tracemos los radios de la es-

---

(\*) Estos tres teoremas últimos se demuestran fácilmente apoyándose en la igualdad de los triedros correspondientes, como hemos demostrado el teorema CCXXII.



fera OA, OB y OC, que formarán el triedro correspondiente OABC. Ahora siendo los diedros OB y OC rectos por serlo los ángulos esféricos que son sus medidas, los dos planos AOB y AOC son perpendiculares al plano BOC, y por tanto, la comun interseccion AO tambien es perpendicular [Teorema CCVIII] al plano BOC, luego A es uno de los polos del arco BC. (120).

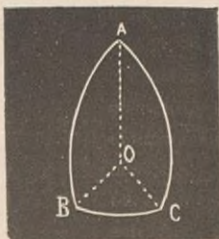


Fig. 222.

2.º Por ser la recta AO perpendicular al plano BOC es perpendicular á las dos rectas OB y OC que pasan por su pié en dicho plano; luego el ángulo plano BOC es la medida del diedro AO, ó bien del ángulo esférico A. (124)

**Corolario.** En todo triángulo esférico trirectángulo: 1.º Cada vértice es polo del lado opuesto: 2.º Cada lado es medida del ángulo opuesto.

#### LEMA.

De dos arcos de círculos que tienen una cuerda comun es mayor el que tiene menor radio. (Fig. 223)

Sean los dos arcos ACB y ADB descritos respectivamente con los radios  $O'A < OA$ . En los dos triángulos  $AO'B$  y  $AOB$  evidentemente el ángulo  $AO'B > AOB$ , luego el número de grados del arco  $ACB > ADB$ . Pero los valores de estos arcos rectificados se expresarán [Problema XLV] por

$$A = m \times \frac{\pi}{2}$$

$$A' = m' \times \frac{\pi}{2}.$$

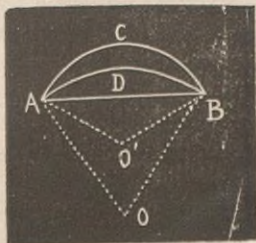


Fig. 223.

Siendo  $m$  y  $m'$  las relaciones de los arcos ACA y ADB

con sus respectivos cuadrantes; luego por ser ángulo  $\angle AO' > \angle AOB$ , resulta que  $m > m'$ , y por consiguiente,  $A < A'$ .

### TEOREMA CCXXVII.

*La línea más corta que puede trazarse sobre la superficie esférica entre dos de sus puntos, es el arco menor de circunferencia máxima que pasa por ellos.*

En efecto, la línea trazada entre los dos puntos dados podrá ser: 1.º Un arco de círculo menor. 2.º Una reunion de arcos de círculos máximos. 3.º Una reunion de arcos de círculos menores de la esfera de magnitud finita, ó infinitamente pequeños.

En el primer caso el teorema está demostrado, porque el arco de círculo menor, tiene menor radio que el de círculo máximo, y por tanto, este es menor que aquel [*Lema anterior*]. En el segundo caso, la reunion de todos los arcos formará un polígono esférico, en el que un lado cualquiera (que es el arco de círculo máximo que pasa por los dos puntos de la esfera) es menor que la suma de todos los demás. Por último, si entre los dos puntos dados pasa una reunion de arcos de círculos menores, como cada uno de ellos es mayor que el de la circunferencia máxima que pasa por sus extremos, la reunion de todos ellos será mayor que la reunion de arcos de círculos máximos que pasa por sus extremos.

## CAPÍTULO V.

### DE LOS POLIEDROS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS.

131. Una pirámide está *inscrita* en un cono, cuando el vértice del cono y el de la pirámide coinciden, y la base de la pirámide está inscrita en la del cono. En tal caso, el cono está *circunscripto* á la pirámide.

132. Una pirámide está *circunscripta* á un cono, cuando el vértice del cono y el de la pirámide se confunden y la base de la pirámide está *circunscripta* á la del cono. En tal caso, el cono está inscripto en la pirámide y las caras laterales de la pirámide son tangentes al cono.

Si se considera *circunscripto* al cono una pirámide regular de infinitos lados en su base, el perímetro de este se confundirá con la circunferencia de la base del cono, luego *puede considerarse al cono como una pirámide regular de infinitas caras.*

133. Un prisma está *inscripto* en un cilindro, cuando las bases del prisma están inscriptas en las del cilindro. En este caso, el cilindro está *circunscripto* al prisma.

134. Un prisma está *circunscripto* á un cilindro cuando las bases del prisma están *circunscriptas* á las del cilindro. En este caso, el cilindro está inscripto al prisma: las caras laterales del prisma son tangentes al cilindro.

Si consideramos un prisma regular inscripto, y suponemos que el número de lados de las bases se hace infinito, el perímetro del polígono de la base se confundirá con la circunferencia de las bases del cilindro de donde se sigue que *el cilindro puede considerarse como un prisma regular de un número infinito de caras.*

135. Por consiguiente, los prismas ó las pirámides están inscriptas ó *circunscriptas* al cilindro ó al cono, respectivamente, cuando sus bases están inscriptas ó *circunscriptas*.

136. Un poliedro está *inscripto* en una esfera, cuando todos sus vértices están en la superficie esférica; en cuyo caso la esfera está *circunscripta* al poliedro.

137. Un poliedro está *circunscripto* á una esfera, cuando sus caras son tangentes á la esfera; en tal caso, la esfera está inscripta en el poliedro.



# TEOREMA CCXXVIII.

*Todo poliedro regular puede inscribirse en una esfera.*  
(Fig. 224)

Sean  $ABCD....$  y  $ABC'D'....$  dos caras contiguas del poliedro regular, desde los centros  $I, I'$  de estas caras levantemos las perpendiculares  $IO, I'O$ , que serán los ejes de los círculos inscritos ó circunscriptos á los polígonos  $ABCD$  y  $ABC'D'....$  Dichas perpendiculares se encontrarán en el punto  $O$ , cuyo punto equidista [Teor. CXLV, cor. 1.º] de los puntos  $A, B, C, D, C', D'....$  Como podíamos hacer iguales consideraciones sobre otra cara cualquiera contigua, resulta que el punto  $O$  equidista de todos los vértices del poliedro, y por tanto, considerando este punto como centro de una esfera, cuyo radio sea la distancia de este punto á uno de los vértices, el poliedro quedará inscripto en ella. (137)

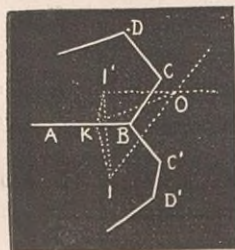


Fig. 224.

# TEOREMA CCXXIX.

*Todo poliedro regular puede circunscribirse á una esfera.* (La misma figura.)

De la demostracion del teorema anterior se deduce que todas las perpendiculares  $OI, OI'....$  á las caras del poliedro son iguales; luego una esfera cuyo centro esté en  $O$  y que tenga por radio una de estas perpendiculares, será tangente á todas las caras del poliedro, y por tanto, éste quedará circunscripto á ella. (137)

**Escolio.** Las rectas tiradas desde el punto  $O$  á los vértices del poliedro regular, forman con las caras de dicho poliedro pirámides inscriptas ó circunscriptas á las esferas: cuyo vértice comun está en el centro  $O$ .

## LIBRO III.

PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

### CAPÍTULO I.

PROBLEMAS REFERENTES Á LOS PLANOS Y Á LAS LÍNEAS  
SITUADAS EN EL ESPACIO.

#### PROBLEMA XLV.

*Desde un punto dado fuera de un plano bajar una perpendicular á dicho plano. (Fig. 225)*

Desde el punto dado A tírense tres rectas iguales AB, AC, AD hasta el plano MN; hállese el centro O de la circunferencia que pasa por los tres puntos B, C y D, y la recta AO será la perpendicular al plano MN.

En efecto, siendo iguales las tres rectas AB, AC, AD, los puntos B, C, D, equidistarán del pié de la perpendicular, luego O centro de la circunferencia que pasa por ellos es el pié de la perpendicular.

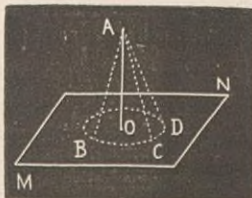


Fig. 225.

#### PROBLEMA XLVI.

*Por un punto dado en un plano, levantar una perpendicular á dicho plano. (Fig. 226)*

Sea el punto A, para levantar por él una perpendicular al plano MN; tomo un punto cualquiera D fuera del plano, y por él bajo la perpendicular CD á MN [problema anterior]; ahora por el punto A trazo la recta AB paralela á CD, y AB será perpendicular al plano MN. [Teor. CLXII.]

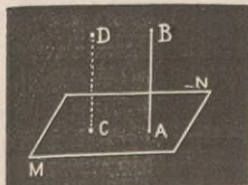


Fig. 226

# PROBLEMA XLVII.

*Dadas dos rectas que no están en un mismo plano, hallar su más corta distancia.*

(Fig. 227)

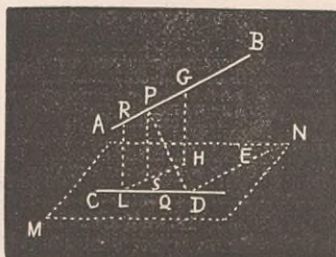


Fig. 227.

Sean las dos rectas  $AB$  y  $CD$  situadas en distintos planos. Por un punto  $D$  tomado en una de ellas trazo una paralela  $DE$  á la otra  $AB$ , y construyo el plano  $MN$  que pasa por  $CD$  y  $DE$ .

Por un punto  $G$  de la  $AB$  bajo la perpendicular  $GH$  á dicho plano, y por el pié  $H$  de esta perpendicular trazo la  $HL$  paralela á la recta  $DE$ , y por tanto á la  $AB$  [Teorema CLXIV]. Si por el punto  $L$  trazo la  $LR$  paralela á la  $GH$ , dicha  $LR$  será perpendicular á las dos rectas dadas.

En efecto, por ser paralela  $LR$  á  $GH$  es perpendicular al plano  $MN$ , luego [Teor. CLXIII] es perpendicular á las dos rectas  $CD$  y  $LH$  ó bien á las  $CD$  y  $AB$ , (pues  $AB$  es paralela á  $LH$ .)

Vamos ahora á demostrar que  $LR$  es la línea más corta que puede trazarse entre  $AB$  y  $CD$ . Trazo otra cualquiera  $PQ$ , y por el punto  $P$  la paralela  $PS$  á la  $RL$ . Por ser  $PS$  paralela á la recta  $RL$  es perpendicular al plano  $MN$ ; luego  $PS < PQ$ , pero  $PS = RL$ ; por tanto,  $RL < PQ$ .

**Escolio.** Este problema suele enunciarse: *dadas dos rectas que no están en un mismo plano, tirarles una perpendicular comun.*



## CAPÍTULO II.

### PROBLEMAS RELATIVOS Á LA ESFERA. (\*)

#### PROBLEMA XLVIII.

*Dada una esfera hallar su radio por una construccion geométrica. (Fig. 228)*

**Análisis.** Si tomamos dos puntos A y B sobre la superficie esférica, el centro de la esfera equidistará de ellos, y este centro estará en un plano perpendicular en su punto medio á la recta que une dichos puntos A y B, cuyo plano determinará un círculo máximo RQS. Ahora todos los puntos de este plano equidistarán de los puntos A y B [*Teor. CXLV, cor. 2.º*]; luego los puntos de la circunferencia tambien equidistan de A y B.



Fig. 228.

**Síntesis.** Tomemos sobre la esfera dada dos puntos cualesquiera A y B; con una abertura de compás arbitraria (pero mayor que la mitad de la distancia AB) tracemos desde dichos puntos como centros dos arcos de circunferencia que se cortarán en R, por ejemplo; determinemos por otras dos construcciones análogas (variando los radios) los puntos Q y S, y tendremos fijados tres puntos R, Q y S, que pertenecen á una misma circunferencia máxima de la esfera. Si sobre una hoja de papel trazamos despues un triángulo igual al RQS (para cuyo

---

(\*) Para la resolucion de estos problemas, suponemos que se hace uso del *compás esférico*, con el que se pueden trazar circunferencias sobre la superficie esférica, apoyando una de las puntas y marcando con la otra. El centro así determinado es polo del círculo que se traza, segun el teorema CCXII.

fin tomamos sus lados ó cuerdas del círculo), el radio de la circunferencia circunscripta á él será igual al radio de la esfera.

### PROBLEMA XLIX.

Describir la circunferencia de círculo máximo que pasa por dos puntos de la esfera. (F. 229)

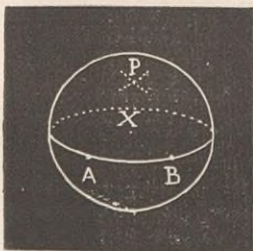


Fig. 229.

Sean los puntos A y B. Desde estos puntos con una abertura de compás igual á la cuerda de un cuadrante, se describen dos arcos de círculo máximo que se cortarán en P, despues desde este punto como polo y con la misma abertura de compás tra-

cemos la circunferencia ABX, que será la buscada [*Escolio del teor. CCXI*].

**Discusion.** Si los dos puntos A y B están situados en las extremidades de un diámetro, las dos circunferencias descritas desde ellos como centros coincidirán en todos sus puntos; por consiguiente, por dichos dos puntos podrán pasar infinitas circunferencias de círculos máximos, lo que por otra parte es evidente, pues todos los planos que pasen por el diámetro de la esfera que determinan dichos dos puntos, darán por seccion con ella círculos máximos.

### PROBLEMA L.

*Dada una esfera determinar la cuerda de su cuadrante ó de un arco cualquiera de círculo máximo.*

Se determina su radio [*Problema XLVIII*], y construido el círculo máximo de la esfera, en él se toma la cuerda del arco que se desea determinar.

# SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION  
CONSIDERADA EN EL ESPACIO.

---

## LIBRO I.

CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES PLANAS.

---

### CAPÍTULO I.

SEMEJANZA DE LOS POLIEDROS.

---

138. Dos tetráedros ó dos poliedros, en general, son *semejantes*, cuando tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos, y las caras homólogas que los forman semejantes. Se llaman *caras homólogas* las adyacentes á los diedros respectivamente iguales, *aristas homólogas* las pertenecientes á estos diedros, *vértices homólogos* los formados por tres ó más caras homólogas, *puntos homólogos* los que unidos á tres vértices homólogos producen tetráedros semejantes, y *líneas homólogas* las que unen dos puntos homólogos.

139. Segun la definicion de poliedros semejantes, y debiendo ser semejantes las caras homólogas, sus lados homólogos (que son las aristas de los poliedros) serán proporcionales; de donde se deduce que los poliedros semejantes *tienen todas sus aristas homólogas respectivamente proporcionales*.

140. La relacion constante que existe entre dos aristas homólogas, se llama *razon de semejanzas*; cuando esta es igual á la unidad, esto es, cuando los dos poliedros sien-



do semejantes tienen una arista homóloga igual, los poliedros son iguales.

141. Si dos poliedros son semejantes á un tercero, son semejantes entre sí.

142. Es evidente que dos poliedros regulares de igual nombre ó especie son siempre semejantes, pues todos los ángulos diedros son respectivamente iguales y las caras que los forman semejantes.

### TEOREMA CCXXX.

*Si un tetraédro se corta por un plano paralelo á una cara, el tetraédro parcial que resulta es semejante al tetraédro propuesto. (Fig. 230)*

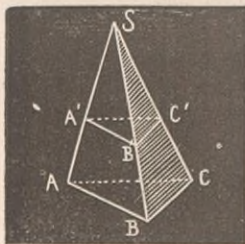


Fig. 230.

Sea el tetraédro SABC cortado por el plano, paralelo á la base,  $A'B'C'$ . Tenemos que los ángulos diedros segun las aristas SA, SB, SC del tetraédro SABC, son los mismos que los diedros  $SA'$ ,  $SB'$ ,  $SC'$  del tetraédro  $SA'B'C'$ , y los ángulos diedros

segun las aristas AB, BC y AC son iguales respectivamente á los diedros  $A'B'$ ,  $B'C'$  y  $A'C'$  por correspondientes entre los planos paralelos ABC y  $A'B'C'$ . Luego dichos tetraédros tienen todos sus ángulos diedros iguales é igualmente colocados.

Ahora las caras laterales SAB, SBC y SAC, son respectivamente semejantes á las  $SA'B'$ ,  $SB'C'$  y  $SA'C'$ , por ser respectivamente paralelas las rectas AB, BC y AC, á las rectas  $A'B'$ ,  $B'C'$  y  $A'C'$ ; y la base ABC es semejante á la  $A'B'C'$  [Teor. CXC]; luego los dos tetraédros son semejantes. (138)

# TEOREMA CCXXXI.

Dos tetraédros son semejantes, cuando tienen dos caras respectivamente semejantes, semejantemente dispuestas, é igual el ángulo comprendido. (Fig. 231)

Supongamos que los tetraédros  $SABC$  y  $S'A'B'C'$  tienen

diedro  $SA = \text{diedro } S'A'$   
 trián.  $SAB$  semejante al trián.  $S'A'B'$   
 trián.  $SAC$  id. id.  $S'A'C'$

Tomemos sobre la arista  $SA$  una parte  $SD = S'A'$ , y por el punto  $D$  tracemos un plano  $DEF$  paralelo al  $ABC$ . El tetraédro  $SDEF$  es semejante al  $SABC$

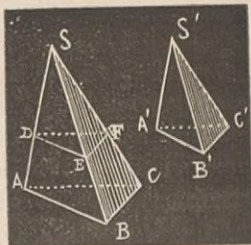


Fig. 231.

[Teorema anterior]; luego si probamos que los tetraédros  $SDEF$  y  $S'A'B'C'$  son iguales, el teorema quedará demostrado. Pero estos dos tetraédros tienen las caras  $S'A'B'$  y  $SDE$  iguales [Teor. XX], y también iguales las caras  $SDF$  y  $S'A'C'$ ; además el ángulo diedro comprendido por dichas caras  $SD = S'A'$ ; luego son iguales [Teorema CXCV, 1.º]

# TEOREMA CCXXXII.

Dos tetraédros son semejantes cuando tienen una cara semejante adyacente á tres ángulos diedros iguales y semejantemente dispuestos. (La misma figura)

Supongamos que

triángulo  $SAC = \text{triángulo } S'A'C'$   
 ángulos diedros  $SA = S'A'$ ,  $SC = S'C'$ ,  $AC = A'C'$ .

Tomemos sobre la arista  $SA$  una parte  $SD = S'A'$ , y tiremos el plano  $DEF$  paralelo al  $ABC$ . El tetraédro  $SDEF$  es semejante con el  $SABC$ ; luego si probamos que

dicho tetraédro SDEF es igual al  $S'A'B'C'$ , quedará demostrado el teorema. Pero estos dos tetraédros tienen

|                                        |                   |                                                                                |
|----------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| triángulo $SDF=S'A'C'$ [Teor. XX]      | } Por suposicion. | } Luego los tetraédros<br>SDEF y $S'A'B'C'$<br>son iguales [Teorema CXCV, 2.º] |
| diedro $SD=S'A$                        |                   |                                                                                |
| diedro $SF=S'C$                        |                   |                                                                                |
| diedro $DF=AC=A'C'$ [Teor. CLXXI, 3.º] |                   |                                                                                |

### TEOREMA CCXXXIII.

Dos tetraédros son semejantes cuando tienen sus caras semejantes y semejantemente dispuestas. (La misma figura)

Tomando en la arista SA una parte  $SD=S'A'$  y tirando un plano DEF paralelo al ABC, es fácil demostrar de un modo análogo á los dos teoremas anteriores, que el tetraédro SDEF es igual al  $S'A'B'C'$ , por tener sus caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas.

### TEOREMA CCXXXIV.

Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la pirámide propuesta. (Fig. 232)

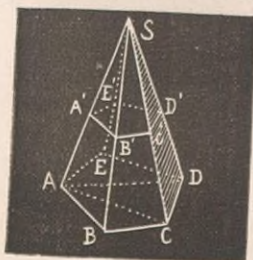


Fig. 232.

[Este teorema se demuestra del mismo modo que el CCXXX.]

### TEOREMA CCXXXV.

Las bases de dos pirámides semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas ó á los de sus aristas homólogas. (Fig. 233)

En efecto, siendo semejantes los dos polígonos ABCDE y  $A'B'C'D'E'$ , tendremos que [Teor. CXVII]

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: \bar{AB}^2 : \bar{A'B'}^2. (a)$$

Pero los triángulos semejantes SAB,  $SA'B'$  y  $SA_s$ ,



$SA's'$ , que tienen los lados comunes  $SA, SA'$ , nos dan la série de razones iguales.

$$AB : A'B' :: SA : SA' :: Ss : S's:$$

Y elevando al cuadrado

$$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2 :: \overline{Ss}^2 : \overline{S's'}^2. (b)$$

Entre las (a) y (b) existe la razón comun  $\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ ; luego

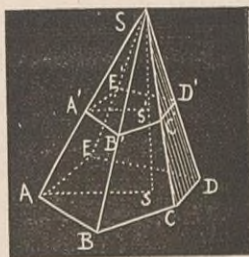


Fig. 233.

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 :: \overline{SA}^2 : \overline{SA'}^2 :: \overline{Ss}^2 : \overline{S's'}^2.$$

**Corolario.** Si dos pirámides de bases equivalentes é igual altura se cortan por dos planos paralelos á las bases y equidistantes de sus vértices, las secciones que resultan son equivalentes. (Fig. 234)

Sean las dos pirámides  $SABCDE$  y  $S'PQR$  y consideremos las dos secciones  $A'B'C'D'E'$  y  $P'Q'R'$  equidistantes de los vértices  $S$  y  $S'$ .

Segun lo demostrado en el teorema, tenemos:

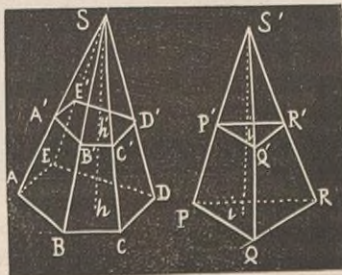


Fig. 234.

$$ABCDE : A'B'C'D'E' :: \overline{Sh}^2 : \overline{Sh'}^2$$

$$PQR : P'Q'R' :: \overline{S'i}^2 : \overline{S'i'}^2.$$

Pero  $ABCDE = PQR$ ,  $Sh = S'i$ ,  $Sh' = S'i'$ , luego

$$A'B'C'D'E' = P'Q'R'.$$

### TEOREMA CCXXXVI.

*Dos poliedros compuestos del mismo número de tetráedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.* (Fig. 235)

Sean los dos poliedros  $ABCDEFGH$  y  $A'B'C'D'E'F'G'H'$ , los que suponemos que se componen de los

$$\text{tetraédros} \left\{ \begin{array}{lll} ABCG & \text{semejante á} & A'B'C'G' \\ ACGH & \text{id.} & \text{á } A'C'H' \\ ACHD & \text{id.} & \text{á } A'C'H'D' \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

y semejantemente dispuestos.

Todas las caras de estos poliedros serán semejantes, porque, por ejemplo, las caras  $ABCH$  y  $A'B'C'H'$  se componen de los triángulos  $ABC$  y  $ACH$  respectivamente semejantes á  $A'B'C'$  y  $A'C'H'$ , por pertenecer á tetraédros semejantes y semejantemente dispuestos.

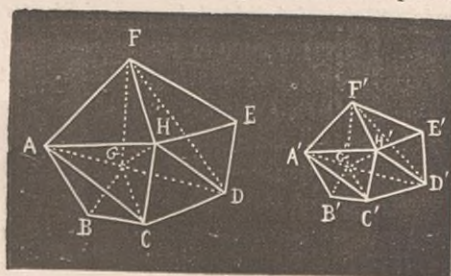


Figura 235.

Todos los ángulos diedros de los poliedros son iguales, pues ó son ángulos diedros pertenecientes á los tetraédros semejantes, ó están formados por la reunion del mismo número de ángulos diedros respectivamente iguales, por pertenecer á tetraédros semejantes, y semejantemente dispuestos. Así, por ejemplo, los diedros segun  $BC$  y  $B'C'$  son iguales por pertenecer á los tetraédros semejantes  $ABCG$  y  $A'B'C'G'$ , y los diedros segun las aristas  $AC$  y  $A'C'$  son iguales por componerse respectivamente de la suma de los diedros  $BACG$  y  $GACH$ ,  $B'A'C'G'$  y  $G'A'C'H'$ , que son iguales por pertenecer á tetraédros semejantes. Además estos ángulos diedros estarán seme-

juntamente dispuestos, por estarlo por suposición los tetraédros.

Luego los dos poliedros tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos, y las caras homólogas que los forman semejantes (138).

TEOREMA CCXXXVII. [Recíproco del anterior]

*Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraédros semejantes y semejantemente dispuestos.* (La misma figura.)

Supongamos que los dos poliedros ABCDEFGH y A'B'C'D'E'F'G'H' son semejantes; tomando como vértice comun el punto A, descompongamos el primero de dichos poliedros en tetraédros (113), y desde el vértice A' homólogo con A, hagamos igual descomposición con el poliedro A'B'C'D'E'F'G'H'.

Los poliedros quedarán divididos en igual número de tetraédros (*fórmula del núm. 113*), y vamos á demostrar que estos tetraédros son semejantes y están semejantemente dispuestos.

Todos los triángulos en que las caras (no triangulares) quedarán divididas, serán semejantes por serlo dichas caras, y estarán semejantemente dispuestos [*Teor. CI*].

Ahora tenemos que los tetraédros ABCG y A'B'C'G' son semejantes, porque tienen las caras ABC y ABG respectivamente semejantes á A'B'C' y A'B'G', y los ángulos diedros  $AB=A'B'$ . [*Teor. CCXXX*]. Los tetraédros ACGH y A'C'G'H' son tambien semejantes porque tienen la cara ACG semejante á A'C'G' por pertenecer á los tetraédros anteriores que hemos demostrado ser semejantes; la cara ACH semejante á A'C'H' por triángulos semejantes y semejantemente colocados de las caras semejantes de los poliedros, y el ángulo diedro  $AH=A'H'$ , por serlo de los poliedros propuestos. Los



tetráedros  $DCGH$  y  $D'C'G'H'$  son semejantes por tener las caras  $CGH$  semejante á  $C'G'H'$  y  $CDH$  semejante á  $C'D'H'$ , y el ángulo diedro comprendido  $CH = C'H'$  por componerse cada uno de ellos de la diferencia entre dos ángulos respectivamente iguales á saber:

$$\begin{aligned} \text{ángulo diedro } ACHB &= \text{áng.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Por ángulos diedros homólogos} \\ \text{diedro } A'C'H'B' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{de los dos poliedros propuestos.} \\ \end{array} \right. \\ \text{ángulo diedro } ACHG &= \text{áng.} \left\{ \begin{array}{l} \text{Por pertenecer respectivamente} \\ \text{diedro } A'C'H'G' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{á los tetráedros semejantes} \\ \text{ACHG y } A'C'H'G'. \end{array} \right. \end{aligned}$$

De igual manera podría demostrarse la semejanza de todos los demás tetráedros, teniendo presente que las caras de éstos son triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, y que los ángulos diedros ó son los mismos que los de los poliedros y por tanto iguales, ó se componen de la diferencia entre los ángulos diedros homólogos de los dos poliedros y uno ó más ángulos diedros respectivamente iguales, por pertenecer á tetráedros que se ha demostrado ya ser semejantes.

## CAPÍTULO II.

### ÁREAS DE LOS POLIEDROS.

143. El área de la superficie de un poliedro cualquiera es claro que se puede hallar determinando el área de cada una de sus caras y sumándolas; pero algunos poliedros tienen por área una expresión tan sencilla, que conviene conocerla, atendiendo á sus varias aplicaciones.

#### TEOREMA CCXXXVIII.

*El área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perimetro de su base por la altura de uno de los triángulos laterales. (\*)*

(\*) A esta altura se suele llamar *apotema* de la pirámide.

Siendo la pirámide regular, la altura de todos los triángulos laterales así como las bases son iguales.

Llamemos á la altura de uno de los triángulos laterales  $a$ , á su base  $b$  y  $n$  al número de triángulos: tendremos

área de uno de los triángulos....  $\frac{1}{2} ba$

área de los  $n$  triángulos.....  $\frac{1}{2} ban = \frac{1}{2} nb \times a$ .

Pero  $nb$  es el perímetro de la base, luego el teorema queda demostrado.

### TEOREMA CCXXXIX.

*El área lateral de una pirámide troncada de bases paralelas, es igual al producto de la altura de uno de los trapecios laterales por la semisuma de los perímetros de las dos bases.*

Siendo la pirámide regular, todos los lados de la base mayor son iguales entre sí, así como los de la menor; y los trapecios que forman el área lateral son iguales entre sí, y por tanto tambien lo son sus alturas.

Llamemos á la altura de uno de los trapecios  $a$ ,  $b$  y  $b'$  las bases, tendremos:

área de uno de los trapecios....  $a \times \frac{b+b'}{2}$

área de todos los trapecios.....  $a \times \frac{b+b'}{2} \times n = a \times \frac{bn+b'n}{2}$ ,

pero  $bn$  y  $b'n$  son los perímetros de las dos bases del tronco de pirámide; luego queda demostrado el teorema.

### TEOREMA CCXL.

*El área lateral de un prisma recto, es igual al producto de su altura por el perímetro de una de sus bases.*

Siendo recto el prisma las caras laterales son rectángulos, y tomando como bases de estos rectángulos los lados

de las bases del prisma, sus alturas son las aristas laterales que son iguales á la altura de prisma.

Llamemos á la altura del prisma  $a$ , y á los lados de una de las bases  $b, b', b'', b''' \dots$ , tendremos que las

áreas de los rectángulos serán  $ab, ab', ab'', ab''' \dots$   
 área lat. del prisma  $ab+ab'+ab''+ab''' \dots = a(b+b'+b''+b''' \dots)$

pero  $b+b'+b''+b''' \dots$  es el perímetro de una de las bases del prisma.

### TEOREMA CCXLI.

*El área lateral de un prisma oblicuo, es igual al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de su sección recta. (Fig. 236)*

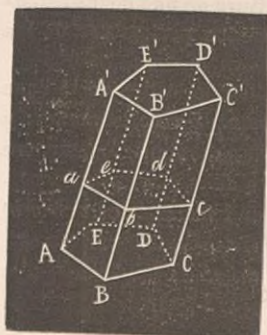


Fig 236.

Sea el prisma oblicuo  $A'C'$ , la sección recta  $abcde$  será perpendicular á las aristas, luego si tomamos como base de los paralelogramos que forman las caras laterales del prisma las aristas laterales, las alturas respectivas serán los lados del polígono  $abcde$ . Por consiguiente tendremos

$$\begin{aligned} \text{área del paralelogramo } AB' &= AA' \times ab \\ \text{id. del } & \text{,,} \quad BC' = BB' \times bc \\ \text{id. del } & \text{,,} \quad CD' = CC' \times cd \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Y como todas las aristas laterales del prisma son iguales, el área lateral del prisma  $A'C' = AA' (ab+bc+cd \dots)$   
 $= AA' \times \text{perímetro de la sección recta.}$



# CAPÍTULO III.

## VOLUMENES DE LOS POLIEDROS.

144. Volúmen de un cuerpo es la medida del espacio que este cuerpo ocupa. (4)

Se toma como medida para determinar el volúmen de un cuerpo un cubo.

145. Es evidente que el volúmen de un poliedro cualquiera es igual á la suma de los volúmenes de los tetráedros en que siempre puede descomponerse. (113)

### TEOREMA CCXLII.

*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectos que tienen iguales bases, son proporcionales á sus alturas.* (Fig. 237)

1.º Supongamos que los paralelepípedos EC y ec que tienen iguales bases, tengan sus alturas AE y ae comensurables, y que la comun medida de estas alturas se

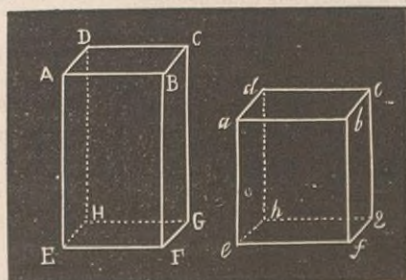


Fig. 237.

halle contenida en ellas respectivamente  $m$  veces y  $n$  veces, tendremos la proporcion

$$AE : ae :: m : n.$$

Pero trazando por los puntos de division de las alturas planos paralelos á las bases, el paralelepípedo EC quedará dividido en  $m$  paralelepípedos parciales, y el paralelepípedo ec en  $n$ ; todos estos paralelepípedos parciales son iguales, pues son rectos y tienen sus bases y alturas iguales, por tanto

paralelepípedo  $EC$  : paralelepípedo  $ec$  ::  $m : n$ .

De las dos proporciones anteriores se deduce que  
paralelepípedo  $EC$  : paralelepípedo  $ec$  :: altura  $AE$  : altura  $ae$ .

2.º Si las alturas fuesen incommensurables, se demostraría como los demás teoremas análogos.

146. Se llaman *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo las tres aristas que forman un ángulo triedro, y estas tres aristas miden las tres dimensiones de este cuerpo, es decir, su *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *altura* (4). En tal caso puede decirse, atendiendo al teorema anterior, *que los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones iguales son proporcionales á sus terceras dimensiones.*

### TEOREMA CCXLIII.

*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimension igual, son proporcionales á los productos de sus otras dos dimensiones.*

Llamemos  $P$  y  $P'$  los volúmenes de los dos paralelepípedos rectángulos, y sean  $a, b, c$ , las tres dimensiones del primero, y  $a', b', c'$ , las del segundo.

Consideremos un tercer paralelepípedo rectángulo  $P''$  que tenga dos dimensiones iguales con cada uno de los dos propuestos, esto es, que sean sus dimensiones  $a, b$  y  $c'$ .

Segun el teorema anterior, tendremos entre los paralelepípedos  $P$  y  $P''$  la proporcion

$$P : P'' :: c : c'.$$

Y por igual razon tendremos entre los dos paralelepípedos  $P''$  y  $P'$  la proporcion:

$$P'' : P' :: b : b'.$$

Multiplicando estas dos proporciones ordenadamente y

suprimiendo en la primera razon el factor comun  $P'$ , resulta el enunciado del teorema, esto es:

$$P : P' :: b \times c : b' \times c'.$$

### TEOREMA CCXLIV.

*Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus tres dimensiones.*

Sean  $P$  y  $P'$  los volúmenes de los dos paralelepípedos, las dimensiones del primero,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y las del segundo  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ .

Si concebimos un tercer paralelepípedo  $P''$  que tenga una dimension comun con uno de ellos, y las otras dos con el otro, es decir, que sus tres dimensiones sean  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ , tendremos segun los dos teoremas que acabamos de demostrar:

$$\left. \begin{array}{l} P : P'' :: b \times c : b' \times c' \\ P'' : P' :: a : a' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{De donde multiplicando y suprimiendo } P'', \\ P : P' :: a \times b \times c : a' \times b' \times c'. \end{array}$$

### TEOREMA CCXLV.

*Si la unidad lineal es el lado del cubo, que sirve de unidad volumétrica, el volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, esto es, de su base por su altura.*

En efecto, sea  $P$  el paralelepípedo,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sus tres dimensiones,  $C$  el cubo que se toma por unidad y  $l$  su lado.

Recordando que el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales, tendremos que

$$P : C :: a \times b \times c : l.$$

Pero siendo  $l$  igual á la unidad, de esta proporcion resulta que

$$\frac{P}{C} = a \times b \times c, \text{ que es el teorema.}$$



Si  $a$  es la altura,  $b \times c$  es el área de la base, de manera que el volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

**Corolario.** El volumen de un cubo es igual á la tercera potencia de su lado; esto se deduce inmediatamente de la definicion del cubo, pues sus tres dimensiones son iguales. (\*)

### TEOREMA CCXLVI.

*Dos paralelepípedos cualesquiera que tengan iguales bases é igual altura son equivalentes.*

Siendo iguales las bases, se puede trasportar el uno sobre el otro de manera que sus bases inferiores coincidan; en cuyo caso, por tener igual altura, las bases superiores se encontrarán en un mismo plano paralelo á ellas; pero entonces pueden ocurrir dos casos, que estas bases superiores estén comprendidas entre las mismas paralelas como en la figura 238, ó que tengan una posicion relativa cualquiera, como en la figura 239.

1.º Sean los dos paralelepípedos  $ABCDEFGH$  y  $ABCE'D'F'G'H'$  (Fig. 238) en los que se han hecho coin-

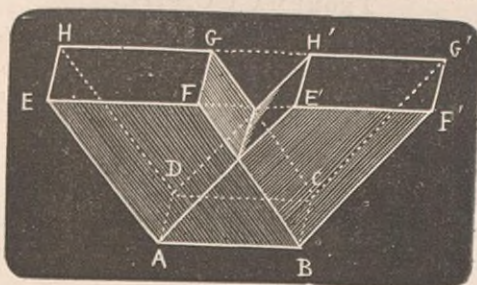


Figura 238.

cidir sus bases inferiores, y las superiores caen entre rec-

(\*) De esta propiedad viene el nombre de *cubo* que se dá á la tercera potencia de un número; pues expresa el volumen de un *cubo* cuyo lado tenga por valor dicho número.

tos paralelas. Los dos prismas triangulares  $AEE'DHH'$  y  $BEF'CGG'$  son iguales entre sí por tener un ángulo triedro igual, el primero en A, y el segundo en B, y las tres caras que los forman respectivamente iguales, á saber:

$$AEE'=BFF', ADHE=BCGF \text{ y } ADH'E'=BCG'F'.$$

Pero si del volúmen total  $ABCDG'HEF'$  se resta sucesivamente cada uno de dichos prismas triangulares, quedan cada uno de los dos paralelepípedos  $AB C D E F G H$  y  $A B C D E' F' G' H'$ , luego estos son equivalentes.

2.º Sean ahora los dos paralelepípedos  $AB C D E F G H$  y  $A' B' C' D' E' F' G' H'$  (Fig. 239) cuyas caras inferiores se han hecho coincidir y las superiores tienen una posicion cual-

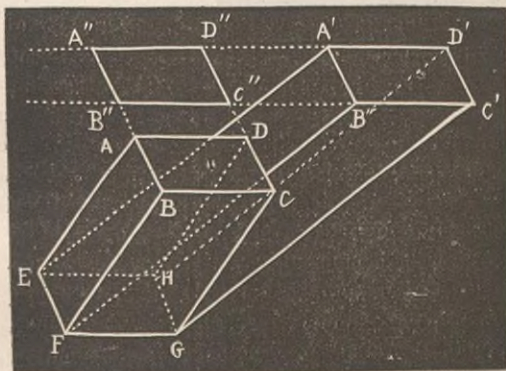


Figura 239.

quiera, pero están en un mismo plano. Como los lados de estas bases  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  son paralelos cuatro á cuatro; siempre es posible prolongando los lados  $A'D'$ ,  $B'C'$  y los  $AB$ ,  $DC$ , formar otro paralelógramo  $A''B''C''D''$  igual á los  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$ .

Si consideramos un paralelepípedo que tenga por bases  $EFGH$  y  $A''B''C''D''$  (del que no se marcan las aristas laterales por no confundir la figura) este paralelepí-

pedo, segun el teorema anterior, es equivalente á cada uno de los dos propuestos; luego estos son equivalentes entre sí.

### TEOREMA CCXLVII.

*Un paralelepípedo oblicuo cualquiera, es equivalente á otro paralelepípedo rectángulo de igual altura que él y cuya base sea equivalente á la del paralelepípedo propuesto.*

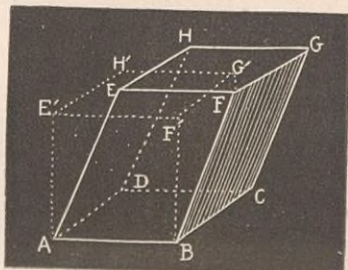


Fig. 240.

Se sea el paralelepípedo oblicuo  $ABCDEFGH$  (Fig. 240); por los vértices  $A, B, C, D$ , de la base inferior levantemos perpendiculares al plano de esta base, prolongándolas hasta que encuentren al plano de la base superior en los puntos  $E', F', G', H'$ . Unidos estos puntos resultará un paralelogramo  $E'F'G'H'$  igual á los de las bases del paralelepípedo propuesto; y por consiguiente el paralelepípedo recto  $ABCDE'F'G'H'$  es equivalente al propuesto, segun el teorema precedente.

Para no confundir la figura, supongamos que este paralelepípedo recto es el  $A'B'C'D'E'F'G'H'$  (Fig. 241). Por

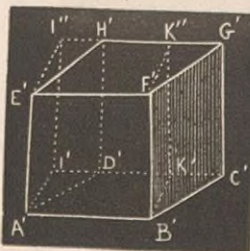


Fig. 241.

los vértices  $A', B'$  de la base inferior, tiremos perpendiculares  $A'I'$  y  $B'K'$  á la recta  $A'B'$ , las que determinarán un rectángulo  $A'B'K'I'$  equivalente al paralelogramo  $A'B'C'D'$ ; despues por los puntos  $I', K'$ , tracemos  $I'I''$ ,  $K'K''$  paralelas á  $A'E'$ ,  $B'F'$ , y unamos los puntos  $E', F'$ , con los puntos  $I'', K''$ , en que estas paralelas encuentran á



$G'H'$ , resultará un paralelepípedo rectángulo  $A'B'K'I'$   $E'F'K''I''$  que es equivalente al paralelepípedo recto  $A'G'$ , puesto que puede considerarse como base comun de los dos el rectángulo  $A'B'E'F'$ , y por altura la recta  $A'I'$ .

Luego si el paralelepípedo propuesto  $AG$  (Fig. 240) es equivalente al recto  $AG'$  y este ó su igual  $A'G'$  (F. 241), es equivalente al paralelepípedo rectángulo  $A'K''$ , este y el propuesto son equivalentes, que era lo que se queria demostrar.

### TEOREMA CCXLVIII.

*El volúmen de un paralelepípedo oblicuo cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, segun el teorema anterior, el paralelepípedo oblicuo es equivalente á otro rectángulo de igual altura y de base equivalente, pero el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura; luego el del paralelepípedo oblicuo tambien lo será.

**Escolio.** Tambien puede decirse que el volúmen de un paralelepípedo oblicuo es igual al producto de sus *tres dimensiones*, entendiéndose que estas son las dos dimensiones de la base y la altura del paralelepípedo.

### COROLARIOS.

1.º *Dos paralelepípedos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

2.º *Dos paralelepípedos de la misma base ó de bases equivalentes, son proporcionales á sus alturas.*

3.º *Dos paralelepípedos de igual altura son proporcionales á sus bases.*

Estos corolarios se deducen inmediatamente de la equivalencia entre los paralelepípedos oblicuos y los rectángulos de igual altura y equivalente base.

# TEOREMA CCLIX.

*Todo prisma triangular oblicuo es la mitad de un paralelepípedo de base doble y de la misma altura. (Fig. 242)*

Sea el prisma  $ABDEFH$ ; por los puntos  $B, D$ , de la base inferior, tracemos las rectas  $BC, DC$ , respectivamente paralelas á  $AD$  y  $AB$ , lo que determinará un paralelogramo  $ABCD$  doble del triángulo base  $ABD$ . Por el punto  $C$  tiremos  $CG$  paralela á  $AE$ , prolongándola hasta que corte en  $G$  al plano de la base superior del prisma triangular dado, uniendo  $G$  con  $H$  y con  $F$  resultará el paralelogramo  $EFGH$  tambien doble del triángulo  $EFH$ ; y por tanto, un paralelepípedo  $AG$  cuya base es doble de la del prisma triangular y su altura igual. El teorema quedaria demostrado si hiciéramos ver que los dos prismas triangulares  $ABDEFH$  y  $BCDFGH$  son equivalentes.

Para ello cortemos el paralelepípedo por un plano  $MNPQ$  perpendicular á sus aristas (\*) prolonguemos la

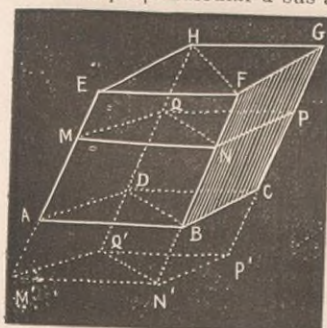


Fig. 242.

arista  $EA$  tomando  $AM' = ME$ , y tirando por el punto  $M'$  un plano  $M'N'P'Q'$  paralelo al  $MNPQ$ , resultará un paralelepípedo recto  $M'P$ , que se halla dividido por el plano diagonal  $HFQ'N'$  en dos prismas triangulares rectos  $M'N'Q'MNQ$ ,  $Q'N'P'QNP$  iguales

[Teor. CXCVI.] Ahora vamos á demostrar que estos dos prismas rectos son equivalentes á los dos prismas triangulares oblicuos  $ABDEFH, BCDFGH$ .

(\*) Sabemos que esta se llama la *seccion recta* del paralelepípedo oblicuo.

En efecto, si imaginamos que el sólido  $M'N'Q'ABD$  se desliza á lo largo de la arista  $M'E$  de manera que el triángulo  $M'N'Q'$  conservándose paralelo á su primitiva posicion, viene á coincidir con su igual  $MNQ$ , las rectas  $M'A$ ,  $N'B$  y  $Q'D$ , seguirán las direcciones  $ME$ ,  $NF$  y  $QH$ , por ser perpendiculares á un mismo plano, y como por construccion  $ME=AM'$ , el punto  $A$  coincidirá con  $E$ , y por tanto los triángulos iguales  $ABD$  y  $EFH$  que estaban en planos paralelos se confundirán. Luego los dos prismas triangulares  $ABDEFH$  y  $M'N'Q'MNQ$  son equivalentes, por tener una parte comun  $ABDMNQ$  y otra parte superponible.

De igual manera se demuestra la equivalencia de los otros dos prismas triangulares; pero siendo iguales entre sí los dos prismas rectos queda demostrada la equivalencia de los dos prismas oblicuos. (\*)

#### TEOREMA CCL.

*El volumen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

Si el prisma es triangular, el teorema queda demostrado, pues segun el precedente, dicho prisma es mitad de un paralelepípedo de igual altura y de base doble, y teniendo este por medida de su volumen el producto de la base por su altura, el del prisma tendrá tambien por medida el producto de la base (mitad de la del paralelepípedo) por su altura.

Si el prisma es de base poligonal, como puede descomponerse en prismas triangulares de igual altura, se deduce que el volumen del prisma propuesto (suma de los volúmenes de los prismas triangulares) es igual al producto de la base del prisma (suma de las bases de los prismas parciales) por la altura.

---

(\*) Obsérvese que no decimos *igualdad* de los dos prismas oblicuos, pues aunque son equivalentes no son iguales, sino *simétricos*.



### COROLARIOS.

1.º *Dos prismas cualesquiera que tienen la misma base, ó bases equivalentes y la misma altura, son iguales.*

2.º *Dos prismas de iguales ó equivalentes bases, son proporcionales á sus alturas.*

3.º *Dos prismas de iguales alturas, son proporcionales á sus bases.*

### TEOREMA CCLI.

*Dos tetraédros que tienen las bases equivalentes é igual altura, son equivalentes (Fig. 243)*

Sean los dos tetraédros  $SABC$  y  $S'A'B'C'$  que suponemos colocados en un mismo plano horizontal, y por con-

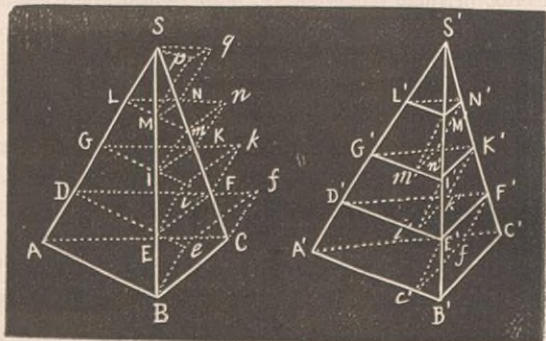


Figura 243.

siguiente que sus vértices están en un mismo plano horizontal, que equidistará de las bases una cantidad igual á la altura de dichos tetraédros.

Supongamos por un momento que los volúmenes de estos tetraédros  $S$  y  $S'$  no son iguales y que existe entre ellos una diferencia cualquiera  $\delta$ , tendremos

$$S - S' = \delta,$$

y digo que este supuesto es absurdo.

Para demostrarlo, dividamos las alturas iguales en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division tracemos planos paralelos á las bases; estos planos determinan en los dos tetráedros secciones DEF y D'E'F', GIK y G'I'K'.... equivalentes [Teor. CXG]. Considerando á estas secciones como bases, construyamos prismas *externos ó excedentes* al tetráedro SABG y prismas *internos ó deficientes* al tetráedro S'A'B'C'.

Si comparamos estos prismas, vemos que el primer prisma externo á contar del vértice es igual al primero interno, por tener bases equivalentes é igual altura; el segundo externo igual al segundo interno, y así sucesivamente, pero el último externo no tiene equivalente entre los internos; de donde resulta que la diferencia entre la suma de todos los prismas externos que llamaremos P, y la de los interiores que designaremos por P', es el prisma ABCDef, esto es,

$$P - P' = ABCDef.$$

Pero evidentemente esta diferencia es mayor que la que existe entre los dos tetráedros, de modo que

$$P - P' = ABCDef > S - S' = \delta.$$

Pero el prisma ABCDef puede reducirse á una cantidad tan pequeña como se quiera, dividiendo en un número suficiente de partes la altura de los tetráedros, y como  $\delta$  es menor que esta cantidad, en el límite se reduce á cero; pero siendo  $\delta$  cero queda demostrado el teorema, pues de

$$S - S' = 0, \text{ resulta } S = S'.$$

## TEOREMA CCLII.

*El volúmen de una pirámide cualquiera, es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Pueden suceder dos casos, que la pirámide sea triangular ó que sea poligonal.

1.º Sea la pirámide triangular ó tetraédro  $SABC$  (F. 244). Por los vértices  $A$  y  $C$  de la base trazo las dos rectas  $AD$

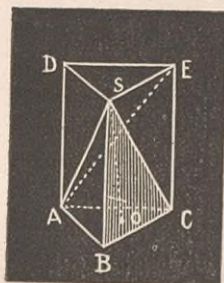


Fig. 244.

y  $CE$  paralelas é iguales á la  $SB$ , y uno los tres puntos  $S$ ,  $D$  y  $E$ : quedará así formado un prisma triangular  $AE$  que tiene la misma base del tetraédro é igual altura  $SO$ ; luego si demostramos que el volúmen del tetraédro es la tercera parte del volúmen del prisma, el teorema quedará demostrado. [*Teorema CCL*].

En efecto, si del prisma triangular consideramos separado el tetraédro  $SABC$ , quedará la pirámide cuadrangular  $SACDE$ , y si tiramos el plano  $SAE$  esta pirámide quedará dividida en los dos tetraédros  $SADE$  y  $SAEC$  que tienen bases iguales y la misma altura, y por tanto, son equivalentes segun el teorema anterior. Ahora el tetraédro  $SAED$ , considerando su vértice en  $A$ , tiene por base la del prisma  $DSE$  y por altura tambien la del prisma, y por tanto es equivalente al propuesto: luego los



Fig. 245.

tres tetraédros son equivalentes entre sí; y como entre los tres componen el prisma, el tetraédro propuesto  $SABC$  es la tercera parte del prisma triangular, y su volúmen, por consiguiente, igual á un tercio del producto de su base por su altura.

2.º Sea la pirámide  $SABCDE$  (Fig. 245), si por su vértice y las diagonales de la base consideramos trazados planos, quedará dividida en tantos tetraédros como triángulos la base; todos estos tetraédros tienen la misma altura  $SO$ . El



volúmen de cada uno de estos tetráedros es igual á un tercio del producto de su base por su altura, luego el de la pirámide será igual al producto de un tercio de su altura por la suma de las bases de los tetráedros, que es la base de la pirámide.

### COROLARIOS.

1.º *Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera de base equivalente é igual altura, son iguales.*

2.º *Los volúmenes de dos pirámides de bases equivalentes, son proporcionales á sus alturas.*

3.º *Los volúmenes de dos pirámides de igual altura, son proporcionales á sus bases.*

Estos corolarios se deducen inmediatamente de la expresion del volúmen de una pirámide cualquiera que acabamos de demostrar:  $V = \frac{B \times A}{3}$ , en la que V es el volúmen, B la base y A la altura.

### TEOREMA CCLIII.

*El volúmen de una pirámide troncada de bases paralelas, es igual al tercio de su altura multiplicada por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Pueden suceder dos casos, que el tronco sea de un tetráedro, ó de una pirámide poligonal cualquiera.

1.º Sea el tronco de tetráedro ABCDEF (Fig. 246), cuyas bases ABC y DEF son paralelas; si por el vértice E y la arista AC hacemos pasar un plano, quedará señalado el tetráedro EABC que tiene por base la mayor del tronco y por altura la misma que este.

Separado este tetráedro quedará la pirámide cuadrangular EADFC que puede dividirse en dos tetráedros por

el plano  $EDC$ . El tetraédro  $ECDF$ , considerado su vértice en  $C$ , tiene por base la menor del tronco y por altura la misma que este.

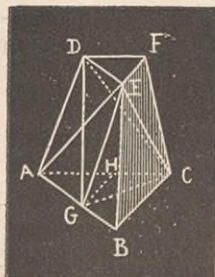


Fig. 240.

Nos queda el tetraédro  $EADC$ ; pero tirando por el punto  $E$  la recta  $EG$  paralela á la  $AD$ , los tetraédros  $EADC$  y  $GADC$  son equivalentes, porque tienen la misma base  $ADC$  y la misma altura, pues sus vértices están en la línea recta  $EG$  paralela al plano de su base; ahora en el tetraédro  $GADC$  puede considerarse como vértice el punto  $D$ , y su altura será la del tronco, y su base el triángulo  $AGC$ : vamos ahora á probar que esta base es média proporcional entre las dos bases del tronco.

Para ello tracemos la recta  $GH$  paralela á la  $EF$ , y por consiguiente á  $BC$ . El triángulo  $AGH$  es igual al  $DEF$ , por tener  $AG=DE$  por lados opuestos del paralelógramo, y los ángulos adyacentes respectivamente iguales por estar formados por rectas paralelas y dirigidas en el mismo sentido. Pero sabemos [*Teor. CXVI cor.*] que el área del triángulo  $AGC$  es média proporcional entre la de los triángulos  $ABC$  y  $AGH=DEF$ .

Por consiguiente, hemos descompuesto el tronco de tetraédro en tres tetraédros que tienen por altura la del tronco, y por bases respectivas, la mayor del tronco, la menor y una média proporcional entre estas; luego el teorema queda demostrado.

2.º Sea ahora el tronco de pirámide cualquiera de bases paralelas (Fig. 247)  $ABCDEA'B'C'D'E'$ , supongamos construida la pirámide total  $SABCDE$ , y construyamos un tetraédro  $S'PQR$  que tenga igual altura que la pirámide y la base equivalente; claro es que la pirámide y el tetraédro son equivalentes.

Si se traza el plano secante  $P'Q'R'$ , á igual distancia del vértice  $S'$  del tetráedro que lo está del de la pirámide el  $A'B'C'D'E'$ , las secciones son equivalentes [Teor. CCXXXV, cor.], por consiguiente, también los volúmenes de la pirámide deficiente  $SA'B'C'D'E'$  y del tetráedro  $S'P'Q'R'$  son equivalentes; y por tanto el volúmen del tronco de pirámide pro-

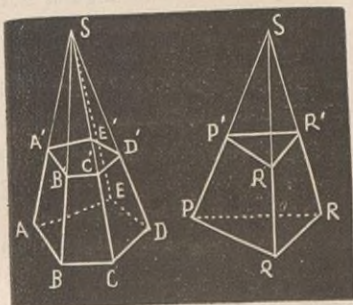


Fig. 247.

puesto es equivalente al volúmen del tronco de tetráedro  $PQRP'Q'R'$ ; pero este es igual á un tercio de su altura por su base mayor, la menor y una média proporcional entre ellas; luego el del tronco de pirámide también tendrá igual expresion.

Si llamamos  $B$  y  $b$  las bases de un tronco de pirámide de bases paralelas,  $A$  su altura, y  $V$  su volúmen, éste se expresará por la fórmula

$$V = \frac{1}{3} A (B + b + \sqrt{Bb}).$$

### TEOREMA CCLIV.

*Todo prisma triangular troncado, es equivalente á la suma de tres tetráedros, que tengan por base comun la del prisma y cuyos vértices son los de la seccion del prisma. (Fig. 248)*

Sea el prisma triangular troncado  $AF$ , tracemos los tres planos  $AEC$ ,  $BDC$  y  $AFB$  que marcan los tres tetráedros  $EABC$ ,  $DABC$  y  $FABC$  que tienen por base la del tronco y por vértices respectivamente  $E$ ,  $D$  y  $F$ . Vamós á demostrar que el volúmen del prisma es equivalente á la suma de los de estos tres tetráedros.



Separado del tronco de prisma propuesto el tetraédro EABC (que es uno de los tres de la equivalencia) queda la pirámide cuadrangular EACFD que puede dividirse en dos tetraédros EADC y EDCF por medio del plano EDC.

El tetraédro EADC es equivalente al BADC ó DABC (uno de los tres de la equivalencia que se quiere demostrar) por tener iguales bases, y sus vértices E y B en la recta EB paralela á la base.

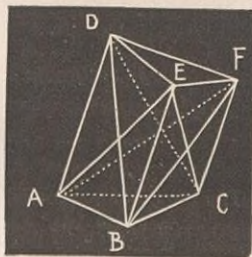


Fig. 248

Por último, el tercer tetraédro EDCF es equivalente al BDCF por tener igual base y sus vértices en la recta EB, equidistante de la base por ser paralela, y este tetraédro BDCF, considerado su vértice en D (esto es, DBCF) es equivalente al ABCF, ó bien FABC.

Luego queda demostrada la equivalencia del prisma con la suma de los tres tetraédros.

**Corolario.** *El volumen de un prisma triangular truncado es igual al producto de un tercio de su base por la suma de las tres perpendiculares bajadas desde los tres vértices de la sección.*

Esta es una consecuencia inmediata del teorema.

## CAPÍTULO IV.

COMPARACION DE LAS ÁREAS Y DE LOS VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS.

### TEOREMA CCLV.

*Las áreas de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de las aristas, diagonales, ó líneas homólogas cualesquiera.*

Sean A, B, C, D.... las caras de uno de los dos polie-

dros;  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ .... las respectivamente homólogas en el segundo, y designemos por  $a$  y  $a'$  dos líneas homólogas cualesquiera en ambos poliedros (aristas, diagonales, &c.) que sabemos serán proporcionales respectivamente, y que por tanto la misma razón existirá entre  $a$  y  $a'$  que entre otras dos líneas homólogas cualesquiera.

Siendo semejantes las caras de los dos poliedros serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, y por tanto, tendremos

$$\begin{array}{l} A : A' :: a^2 : a'^2 \\ B : B' :: a^2 : a'^2 \\ C : C' :: a^2 : a'^2 \\ D : D' :: a^2 : a'^2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{De donde se deduce que} \\ A : A' :: B : B' :: C : C' ..... :: a^2 : a'^2 \\ \text{ó bien} \\ A + B + C ..... : A' + B' + C' ..... :: a^2 : a'^2 \end{array} \right.$$

es decir,

*área total de un poliedro : es al área total del otro ::  $a^2 : a'^2$ .*

### TEOREMA CCLVI.

*Los volúmenes de dos poliedros semejantes, son proporcionales á los cubos de sus aristas, diagonales, ó líneas homólogas.*

1.º Consideremos primeramente dos tetraédros semejantes, sean  $B$  y  $b$  sus bases,  $A$  y  $a$  sus alturas. Sabemos que

$$B : b :: A^2 : a^2,$$

y como evidentemente  $\frac{1}{3}A : \frac{1}{3}a :: A : a$ , tendremos multiplicando ordenadamente estas proporciones

$$\frac{1}{3}AB : \frac{1}{3}ab :: A^3 : a^3.$$

Pero siendo  $\frac{1}{3}AB$  y  $\frac{1}{3}ab$  los volúmenes de los dos tetraédros, queda demostrado que son proporcionales á los cubos de sus alturas, y como estas alturas son proporcionales á las líneas homólogas, queda demostrado el teorema para los tetraédros semejantes.

2.º Supongamos ahora dos poliedros semejantes cuales-

quiera: se podrán descomponer en igual número de tetráedros semejantes y semejantemente dispuestos [*Teorema CCXXXVII*]. Sean V y V' los volúmenes de estos poliedros, T, T', T'', T'''.... los tetráedros que componen el primero, t, t', t'', t'''.... los que componen el segundo, a y a' dos líneas homólogas cualesquiera (aristas, diagonales, &c., pues se sabe que la razón entre ellas es igual), tendremos la serie de razones iguales

$$T : t' :: T' : t'' :: T'' : t''' \dots a^3 : a'^3,$$

luego

$$T + T' + T'' \dots t + t' + t'' \dots :: a^3 : a'^3,$$

y finalmente

$$V : V' :: a^3 : a'^3.$$

## LIBRO II.

CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS.

### CAPÍTULO I.

ÁREAS DEL CILINDRO Y DEL CONO.

#### TEOREMA CCLVII.

*El área de la superficie lateral de un cilindro recto, es igual al producto de la circunferencia de su base multiplicada por su generatriz ó altura.*

En efecto, el cilindro recto puede considerarse como un prisma recto regular de infinito número de caras (134); y como el área lateral de un prisma recto, cualquiera que sea el número de sus caras, es igual al producto del perímetro de su base por su altura [*Teor. CCXL*], la del cilindro tendrá por expresión el perímetro de su base, que es la circunferencia, por su altura ó generatriz.



Es evidente que el área total del cilindro se hallará sumando al área lateral, la de los círculos que le sirven de bases.

Si llamamos  $R$  al radio de las bases del cilindro y  $L$  su lado, generatriz ó altura, el área lateral  $A$ , y el área total  $T$ , se expresarán del modo siguiente:

$$A = 2\pi R \times L, \quad T = 2\pi R \times L + 2\pi R^2 = 2\pi R(L + R).$$

**Escolio.** Puede notarse que el área lateral del cilindro es igual á la de un rectángulo que tenga por base la circunferencia rectificada y por altura el lado del cilindro. Este rectángulo representa el desarrollo de la superficie lateral del cilindro sobre un plano.

### TEOREMA CCLVIII.

*El área de la superficie lateral de un cono recto, es igual al producto de la circunferencia de su base por la mitad de su arista, generatriz ó lado.*

Sabemos (182) que el cono puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras; pero el área lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por la altura de uno de los triángulos laterales [*Teor.* CCXXXVIII]; luego el área lateral del cono será igual tambien al perímetro de su base (circunferencia) por la altura de una de sus caras (que es el lado del cono.)

Es evidente que el área total del cono se hallará sumando al área lateral la del círculo de la base.

Sean  $R$  y  $L$  el radio y el lado de un cono recto, el área lateral  $A$ , y el área total  $T$ : tendremos las expresiones

$$A = \pi R \times L, \quad T = \pi R \times L + \pi R^2 = \pi R(L + R).$$

**Escolio.** Puede observarse que el área lateral de un

cono recto es igual á la de un sector circular, cuyo arco sea equivalente á la circunferencia de la base del cono, y su radio igual al lado del cono. Este sector circular representa el desarrollo de la superficie lateral del cono sobre un plano.

Como el área de un sector es igual á la de un triángulo que tenga por base el arco del sector rectificado y por altura el radio del sector, se deduce que el área lateral de un cono es tambien igual á la de un triángulo que tenga por base la circunferencia rectificada y por altura el lado del cono.

### TEOREMA CCLIX.

*El área lateral de un tronco de cono de bases paralelas, es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus bases. (Fig. 249)*

Sea el tronco  $ABCA'B'C'$ , supongamos construido el cono total  $SABC$ . Es evidente que el área lateral del tronco es igual á la diferencia entre las áreas laterales de los dos conos  $SABC$  y  $SA'B'C'$ .

Pero el área lateral del cono  $SABC$  es igual á la del sector  $SCA$ , que tiene por radio el lado del cono y por arco el equivalente á la circunferencia de la base  $ABC$ ;

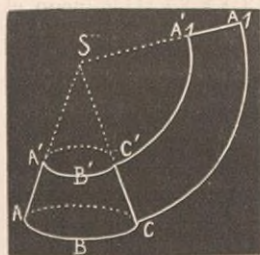


Fig. 249.

el área lateral del cono  $S'A'B'C'$  es igual á la del sector  $SC'A'$ ; luego el área lateral del tronco de cono es igual á la del trapezio circular  $CC'A_1A'_1$ . Este trapezio circular es equivalente á un trapezio rectilíneo cuyas bases sean los arcos  $CA_1$  y  $C'A'_1$ , rectificados, y su altura  $CC'$ ; el

cual tendrá por área su altura  $CC'$ , multiplicado por la semisuma de las bases; luego tambien el área lateral del

tronco será igual á su lado  $CC'$  por la semisuma de las circunferencias de sus bases.

Si llamamos  $R$  y  $r$  á los radios respectivos de las bases  $ABC$  y  $A'B'C'$  y  $L$  al lado  $CC'$  del tronco, tendremos que su área

$$A = L(\pi R + \pi r) = \pi L(R + r).$$

**Escolio general.** Las ecuaciones que expresan las áreas laterales ó totales de las superficies cilíndricas ó cónicas y las que acabamos de formular antes, ligan entre sí dichas áreas con los radios, alturas y lados de dichos cuerpos; y pueden servir para determinar una cualquiera de estas cantidades, conocidas las demás. Así, por ejemplo, de la ecuacion del área lateral del cilindro  $A = \pi 2R \times L$  que nos dá á conocer esta cuando se conocen el radio y el lado del cilindro, se deducen estas otras dos despejando en ellas el radio ó el lado.

$$R = \frac{A}{2\pi L} \quad L = \frac{A}{2\pi R}.$$

Que nos darian á conocer el radio si el área lateral y el lado del cilindro eran conocidos; ó el lado si el área y el radio se conocieran.

## CAPÍTULO II.

ÁREAS DE LA SUPERFICIE TOTAL Ó PARCIAL DE LA ESFERA.

### LEMA I.

*Si una recta de longitud determinada gira alrededor de otra que está situada en su mismo plano, el área de la superficie engendrada por una revolucion completa de la primera, es igual á su proyeccion sobre la recta que sirve de eje, multiplicada por la circunferencia cuyo radio es igual á la perpendicular levantada á dicha recta por su punto medio, prolongada hasta tocar el eje. (Fig. 250)*



Tres casos pueden suceder: 1.º Que la recta (AB) no sea paralela ni toque al eje. 2.º Que la recta (A'B') no sea paralela y toque en uno de sus extremos al eje. 3.º Que la recta (A''B'') sea paralela al eje.

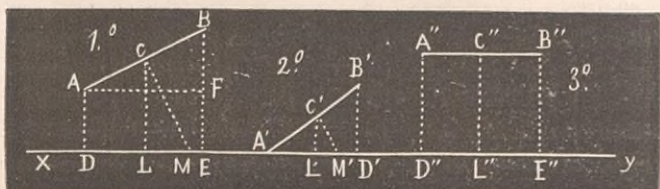


Fig. 250.

1.º Sea la recta AB, tracemos las perpendiculares AD y BE al eje XY, y por el punto medio de ella C, la perpendicular CL á dicho eje, y la perpendicular CM á dicha recta AB, trazando además por el punto A la recta AF paralela al eje. Se va á demostrar que la

*superficie engendrada por AB*  $= DE \times 2\pi CM$ .

En efecto, esta superficie es evidentemente la lateral de un tronco de cono de bases paralelas, luego [Teorema anterior]

*sup. eng. por AB*  $= AB \times (\pi AD + \pi BE) = AB \times \pi (AD + BE)$ .

Pero  $CL = \frac{AD + BE}{2}$  [Teor. L], luego

*superficie engendrada por AB*  $= AB \times 2\pi CL$ .

Ahora los triángulos ABF y CLM son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y nos darán la proporción

$$AB : CM :: AF : CL,$$

de donde

$$AB \times CL = AF \times CM.$$

Sustituyendo en la expresión anterior en vez de  $AB \times CL$ , su igual  $AF \times CM$ , tendremos finalmente

*sup. eng. AB*  $= AF \times 2\pi CM = DE \times 2\pi CM$ , por ser  $AF = DE$ .

2.º Sea la recta  $A'B'$ , tracemos las rectas  $C'L'$  y  $C'M'$  por el punto medio de la  $A'B'$  y respectivamente perpendiculares á las  $A'D'$  y  $A'B'$ .

La superficie engendrada por la revolucion de la recta  $A'B'$  es evidentemente la lateral de un cono, luego tendremos [*Teor.* CCLVIII]

$$\text{super. eng. por } A'B' = A'B' \times \pi B'D' = A'B' \times 2\pi C'L'.$$

Pero los triángulos  $A'B'D'$  y  $M'C'L'$  son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, por consiguiente

$$A'B' : C'M' :: A'D' : C'L',$$

de donde

$$A'B' \times C'L' = C'M' \times A'D'.$$

Y substituyendo en la igualdad anterior, tendremos

$$\text{super. eng. por } A'B' = A'D' \times 2\pi C'M'.$$

3.º Sea la recta  $A''B''$  que al girar engendrará la superficie lateral de un cilindro recto, por tanto, tendremos desde luego

$$\text{superf. eng. por } A''B'' = A''B'' \times 2\pi B''E'' = D'E'' \times 2\pi C''L''.$$

147. Se llama *sector poligonal* (Fig. 251) la porcion OAB CD.... de polígono regular comprendida entre dos radios y dos ó mas lados del polígono: *base* del sector poligonal es la línea quebrada ABCD.... que forman sus lados.

## LEMA II.

*Si un sector poligonal gira alrededor de uno de sus radios, el área de la superficie engendrada por su base, es igual á su proyeccion sobre el eje multiplicada por la circunferencia del circulo inscripto.* (Fig. 251)

Sea el sector poligonal ABCD.... que gira alrededor

de la recta  $AA'$ ; según el lema anterior, tendremos

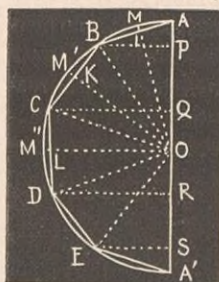


Fig. 251.

área engendrada por  $AB = AP \times 2\pi IO$

id.  $BC = PQ \times 2\pi KO$

id.  $CD = QR \times 2\pi LO$

luego tendremos sumando y teniendo presente que  $IO = KO = LO \dots$  y llamando  $R$  al radio del círculo inscripto

área eng. por  $ABCD \dots = (AP + PQ + QR \dots) \times 2\pi R.$

148. Se llama *zona esférica*, la superficie engendrada por un arco de sector circular que gira alrededor de uno de sus diámetros: si el arco generador toca por uno de

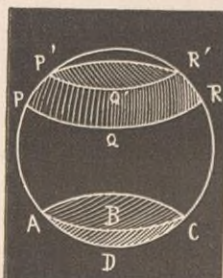


Fig. 252.

sus extremos al eje, este punto será fijo y el otro extremo describirá una circunferencia. En tal caso la zona se llama de una sola *base*. (Fig. 252) que es el círculo  $ABD$  que la termina, y se denomina también *casquete esférico*; pero si el arco generador no toca al eje, los dos puntos extremos describen dos circunferencias paralelas  $PQR$  y  $P'Q'R'$

y la zona tiene dos bases que son los círculos que la terminan. *Altura* de una zona es la proyección del arco generador sobre el radio que se toma por eje.

### TEOREMA CCLX.

*El área de una zona esférica, es igual á la circunferencia de círculo máximo de la esfera multiplicada por la altura de la zona. (Fig. 251)*

En efecto, según el *Lema II* el área engendrado por el sector poligonal  $ABCD$  que llamaremos

$A = \text{su proyección sobre } AR \times 2\pi O M.$



Esta igualdad es cierta cualquiera que sea el número de sus lados; luego si consideramos que el número de lados es infinito, el sector poligonal se convertirá en un sector circular, la recta OM se confundirá con el radio del círculo ABDA', y la superficie engendrada será una zona esférica; luego

$$\text{área de la zona} = AR \times 2\pi OA.$$

Pero AR es la altura de la zona y OA el radio de la esfera á que pertenece, luego finalmente área de una zona

$$Z = a \times 2\pi R;$$

siendo  $a$  la altura de la zona, y  $R$  el radio del círculo máximo de la esfera.

### TEOREMA CCLXI.

*El área de la superficie total de la esfera, es igual al producto de su diámetro por la circunferencia del círculo máximo.*

En efecto, si la esfera se corta por un plano quedará dividida su superficie en dos zonas de una base, cuyas dos alturas componen el diámetro de la esfera.

Luego llamando á estas alturas  $a$  y  $a'$ , tendremos que las áreas de las dos zonas  $Z$  y  $Z'$  serán

$$\left. \begin{array}{l} Z = a \times 2\pi R \\ Z' = a' \times 2\pi R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando estas dos zonas tendremos} \\ \text{área de la esfera} = (a + a') 2\pi R. \end{array}$$

Como  $a + a' = 2R$ , tendremos, por último, llamando  $A$  al área de la esfera

$$A = 2R \times 2\pi R = 4\pi R^2.$$

Vemos que el área de la esfera es cuádruple de la de su círculo máximo.

149. Se llama *huso esférico* á la parte de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencias máxi-

mas. Es claro, segun esta definicion, *que dos husos esféricos son iguales cuando sus ángulos esféricos son iguales;* pues si se hacen coincidir estos ángulos, las dos semicircunferencias máximas de un huso coincidirán con las del otro, y por tanto la parte de superficie esférica que abrazan. Tambien se deduce de la definicion que dos círculos máximos perpendiculares entre sí dividen á la superficie esférica en cuatro husos iguales entre sí, cuyos ángulos son rectos. Como el área de la esfera es  $4\pi R^2$ , el de uno de estos husos será  $\pi R^2$ , es decir, *igual al área del círculo máximo de la esfera.*

### TEOREMA CCLXII.

*Si se toma por unidad de ángulos el ángulo recto, el área de un huso esférico es igual á la del círculo máximo*

*de la esfera multiplicada por el ángulo del huso. (Fig. 253)*

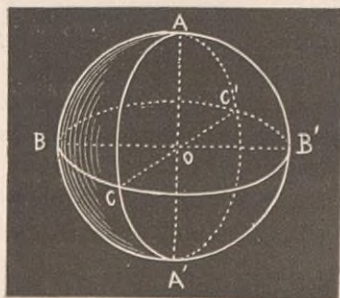


Fig. 253.

Sea el huso esférico ABA'CA, tracemos por el centro de la esfera el plano BCB'C' perpendicular al diámetro AA' (interseccion de los dos planos de las circunferencias que limitan al

huso). Sabemos que el arco BC es la medida del ángulo esférico BAC del huso.

Ahora tenemos evidentemente la proporcion

*huso ABA'CA : área de la esfera :: arco BC : circunf. BCB'C'*  
ó bien

*huso ABA'CA : 4 husos rectos :: ángulo A : 4 rectos,*

ó dividiendo por 4 los consecuentes

*huso ABA'CA : huso recto :: ángulo A : 1.*

Y como el huso recto es igual al círculo máximo de la esfera

$$\text{huso } ABA'CA : \pi R^2 :: \text{áng. } A : 1,$$

de donde

$$\text{huso } ABA'CA = \pi R^2 \times \text{áng. } A.$$

**Corolario.** Si se toma el uso recto por unidad, el área de un huso esférico cualquiera está expresada por su ángulo.

En efecto, de la igualdad

$$\text{huso esférico} = \pi R^2 \times \text{áng. } A,$$

se deduce suponiendo el área  $\pi R^2$  del huso recto igual á la unidad,

$$\text{área del huso esférico } ABA'CA = \text{áng. esférico } A.$$

### TEOREMA CCLXIII.

*Dos triángulos esféricos simétricos, son equivalentes.*  
(Fig. 254)

Sean los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ , en los que se suponen los lados  $AB=A'B'$ ,  $BC=B'C'$ ,  $AC=A'C'$ , así como los ángulos opuestos; pero dispuestos simétricamente.

Sea  $P$  uno de los polos del círculo menor que pasa por los tres puntos  $A, B, C$ , y unamos el punto  $P$  con  $A, B, C$ , por medio de arcos de círculo máximo  $PA, PB, PC$ , que serán iguales entre sí [*Teor. CCXI*]. Tracemos sobre la superficie del triángulo  $A'B'C'$ , un arco de círculo máximo  $A'P'$  que forme con  $A'B'$  un ángulo esférico  $P'A'B' = PAB$  y tomemos  $A'P' = AP$ .

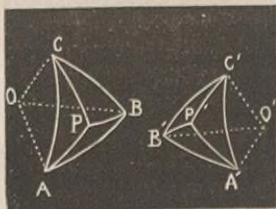


Fig. 254.

Los dos triángulos esféricos  $APB$  y  $A'P'B'$  son iguales, por tener  $AB=A'B'$ ,  $AP=A'P'$  y el ángulo comprendido igual: además son isósceles, pues de  $AP=PB$ , se deduce que  $A'P' = P'B'$ .



De un modo análogo se puede demostrar que los triángulos esféricos  $APC$  y  $A'P'C'$  son iguales por tener  $AP = A'P'$ ,  $AC = A'C'$ , y los ángulos  $PAC$  y  $P'A'C'$  iguales por ser diferencia entre dos ángulos respectivamente iguales, siendo además isósceles.

Por último, los dos triángulos  $PCB$  y  $P'C'B'$ , por igual razón que los anteriores, son iguales.

Luego cada uno de los dos triángulos propuestos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se componen de tres triángulos superponibles, y por tanto, son equivalentes.

**Escolio.** Como el punto  $P$  equidista de los  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , se deduce que dicho punto es uno de los polos del triángulo  $A'B'C'$  [Teor. CCXI].

#### TEOREMA CCLXIV.

*Tomando por unidad de ángulos el ángulo recto, el área de un triángulo esférico es igual á la del círculo máximo multiplicada por la semisuma de los tres ángulos del triángulo disminuida de una unidad. (Fig. 255)*

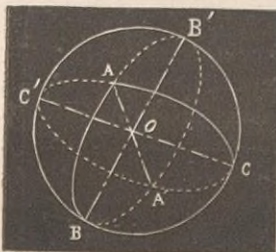


Fig. 255.

Sea el triángulo esférico  $ABC$ , vamos á demostrar que su área

$$T = \pi R^2 \left( \frac{A + B + C}{2} - 1 \right).$$

Prolonguemos sus tres lados hasta que formen circunferencias completas. Los dos triángulos esféricos  $A'BC$  y  $AB'C'$  son simétricos y por tanto equivalentes. El huso esférico cuyo ángulo es  $A$  se compone del triángulo propuesto  $ABC$  y del  $BA'C = AB'C'$ ; el huso esférico cuyo ángulo es  $B$  se compone del triángulo propuesto y del  $AB'C$ ; y el uso esférico cuyo ángulo es  $C$  se compone del triángulo propuesto y del  $AC'B$ ; pero segun el teorema CCLXII, tenemos

$$T + C'AB' = \pi r^2 \times A$$

$$T + ABC = \pi r^2 \times B$$

$$T + AC'B = \pi r^2 \times C.$$

Sumando y teniendo presente que el triángulo propuesto  $ABC = T$  con los  $C'AB'$ ,  $AB'C$  y  $AC'B$  componen la superficie de média esfera que es igual á  $2\pi R^2$ , tendremos

$$2T + 2\pi R^2 = \pi R^2 (A + B + C).$$

De donde pasando al segundo miembro  $2\pi R^2$ , sacando factor comun  $\pi R^2$  y dividiendo por 2, tendremos

$$T = \pi R^2 \left( \frac{A + B + C}{2} - 1 \right)$$

Escolio. El área de un polígono esférico se hallará dividiéndolo en triángulos esféricos, y sumando las áreas de estos triángulos.

### CAPÍTULO III.

#### VOLÚMENES DEL CILINDRO Y DEL CONO.

#### TEOREMA CCLXV.

*El volúmen de un cilindro recto, es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto, el cilindro puede ser considerado como un prisma recto de un número infinito de caras laterales; pero sabemos que el volúmen de un prisma recto es igual al producto de su base por su altura; luego el volúmen del cilindro tambien lo será.

Si llamamos  $R$  al radio de la base del cilindro y  $A$  á la altura, tendremos que su volúmen

$$V = \pi R^2 \times A = \pi R^2 A.$$

Escolio. Los corolarios de este teorema son análogos á los del *Teor. CCL*.

### TEOREMA CCLXVI.

*El volúmen de un cono recto, es igual á un tercio del producto de su base por su altura.*

Pudiendo considerarse el cono recto como una pirámide regular de infinito número de caras, su volúmen tendrá por expresion el tercio producto de su base por su altura, que es la del volúmen de una pirámide cualquiera. [*Teor.* CCLII].

Llamemos á la altura del cono A, al radio de su base R, su volúmen será

$$V = \pi R^2 \times \frac{1}{3} A = \frac{\pi R^2 A}{3}.$$

*Escolio.* Los corolarios de este teorema son análogos á los del CCLII.

### TEOREMA CCLXVII.

*El volúmen de un tronco de cono de bases paralelas, es igual al tercio de su altura multiplicado por la suma de sus bases y de una média proporcional entre ellas.*

Considerando un tetráedro de base equivalente á la del cono total y de igual altura, y una seccion dada en este tetráedro á igual distancia de su base que la altura del tronco de cono; el teorema se demuestra como su análogo el teorema CCLIII.

Llamemos á los radios de las dos bases del tronco de cono R y r, á la altura del tronco A, tendremos que su volúmen

$$V = \frac{A}{3} (\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr) = \frac{\pi A}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

porque la média proporcional entre las dos bases será

$$\sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2} = \pi Rr.$$

*Escolio general.* Puede hacerse respecto á las fórmulas



que hemos hallado en este capítulo, igual observación que la que hicimos en el *escolio del teorema CCLXI*.

## CAPÍTULO IV.

### VOLÚMENES TOTAL Y PARCIAL DE LA ESFERA.

#### LEMA I.

*Si un triángulo gira alrededor de una recta exterior á él y que pasa por su vértice en su plano, el volúmen del espacio engendrado por dicho triángulo, es igual al área de la superficie descrita por la base multiplicada por el tercio de su altura. (Fig. 256)*

Pueden suceder tres casos: 1.º Que uno de los lados del triángulo coincida con el eje. 2.º Que la base del triángulo

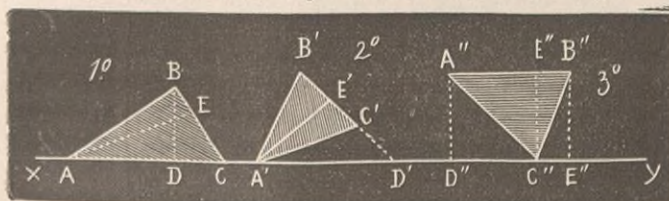


Figura 256.

prolongada encuentre al eje. 3.º Que la base sea paralela al eje.

1.º Sea el triángulo ABC que gira alrededor de la recta XY, tracemos la altura AE del triángulo y la perpendicular BD á la recta XY.

El volúmen engendrado por el triángulo ABC, se compone evidentemente de la suma de los conos descritos por los dos triángulos rectángulos ABD y BDC, los que sabemos tienen por expresion [Teor. CCLXVI],  $\frac{1}{3} AD \times \pi BD^2$  y  $\frac{1}{3} DC \times \pi BD^2$ , luego

$$\text{volúmen eng. por ABC} = \frac{1}{3} (AD + DC) \pi BD^2 = \frac{1}{3} AC \times \pi BD^2.$$

Pero los productos  $AC \times BD$  y  $AE \times BC$  son iguales, porque cada uno es doble del área del triángulo  $ABC$ , por consiguiente, sustituyendo en la igualdad anterior, tendremos

$$\text{volumen eng. por } A'B'C' = \frac{1}{3} AE \times \pi BD \cdot BC;$$

pero  $\pi BD \cdot BC$  es el área de la superficie cónica descrita por la base  $BC$  del triángulo, luego el teorema queda demostrado. (\*)

2.º Sea el triángulo  $A'B'C'$ , prolonguemos su base  $B'C'$  hasta que encuentre al eje en  $D'$ . El cuerpo descrito por dicho triángulo es la diferencia de los cuerpos descritos por los triángulos  $A'B'D'$ , y  $A'C'D'$ , que se hallan en el caso anterior; luego

$$\text{volumen eng. por } A'B'C' = \frac{1}{3} A'E' \times \text{área eng. por } B'D',$$

$$\text{volumen eng. por } A'C'D' = \frac{1}{3} A'E' \times \text{área eng. por } C'D';$$

luego restando ordenadamente

$$\text{volumen eng. por } A'B'C' = \frac{1}{3} A'E' \times \text{área eng. por } B'C'.$$

3.º Sea el triángulo  $A''B''C''$ , en el que la base  $A''B''$ , es paralela al eje  $XY$ . Tracemos las perpendiculares  $A''D''$ ,  $E''C''$ ,  $B''E''$  á este eje.

El volumen engendrado por el triángulo se compone del cilindro que engendra el rectángulo  $A''B''E''D''$ , menos los dos conos que describen los triángulos rectángulos  $A''D''C''$  y  $B''C''E''$ . Pero sabemos que

$$\text{cilindro eng. por } A''B''D''E'' = \pi A''\overline{D''}^2 \times A''B''$$

$$\text{cono eng. por } A''D''C'' = \pi A''\overline{D''}^2 \times \frac{1}{3} D''C''$$

$$\text{cono eng. por } B''C''E'' = \pi A''\overline{D''}^2 \times \frac{1}{3} C''E''$$

---

(\*) Puede ocurrir que uno de los ángulos adyacentes al lado  $AC$ , sea recto ú obtuso, pero estos casos se demuestran de un modo análogo, teniendo presente que si el ángulo es recto engendrará un cono, y si uno de los ángulos  $A$  ó  $C$  es obtuso, la perpendicular caerá fuera del triángulo, y el volumen descrito será la diferencia entre los volúmenes de dos conos.

Restando miembro á miembro de la primera de estas igualdades, la suma de las otras dos, y teniendo presente que  $\frac{1}{3} D''C'' + \frac{1}{3} C''E'' = \frac{1}{3} A''B''$ , resulta

$$\begin{aligned} \text{vol. eng. por } A''B''C'' &= \pi A''D''^2 (A''B'' - \frac{1}{3} A''B'') \\ &= \pi A''D''^2 \times \frac{2}{3} A''B'' = \frac{2}{3} A''D'' \times 2\pi A''D'' \cdot A''B''. \end{aligned}$$

Pero  $2\pi A''D'' \times A''B''$  es el área engendrada por la base del triángulo; luego el teorema queda demostrado. (\*)

## LEMA II.

Si un sector poligonal gira alrededor de uno de sus radios, el volúmen del espacio engendrado por dicho sector es igual al área descrita por la base multiplicada por el tercio del radio del círculo inscripto. (Fig. 257)

En efecto, el volúmen engendrado por cada uno de los triángulos isósceles que componen el sector poligonal, segun el lema anterior, es igual al área descrita por la base multiplicada por el tercio de su altura (que es el radio del círculo inscripto); luego el volúmen engendrado por el sector suma de los volúmenes de los triángulos, será igual al área descrita por todas las bases de los triángulos (que forman la base del sector) multiplicado por el tercio de la altura de uno de ellos.

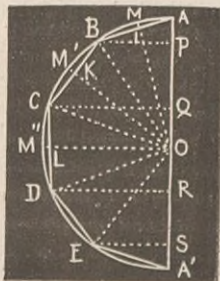


Fig. 257.

150. Se llama *sector esférico* la parte de esfera engendrada por un sector circular OAB (Fig. 258), que gira alrededor de uno de los radios Ob del semicírculo generador de la esfera. El arco AB del sector circular engendrará en

(\*) También en este caso podrá ocurrir que uno de los ángulos  $A''$  ó  $B''$  sea recto ú obtuso; pero la demostración es extremadamente sencilla dado el caso general que acabamos de demostrar.



su movimiento una zona esférica que es la correspondiente al sector esférico.

### TEOREMA CCLXVIII.

*El volúmen de un sector esférico, es igual al producto del área de la zona correspondiente, multiplicada por el tercio del radio. (Fig. 258)*

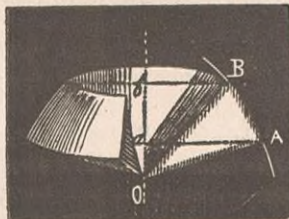


Fig. 258.

El sector circular OAB que engendra en su movimiento el sector esférico, puede considerarse compuesto de infinitos triángulos isósceles que

tengan por vértice común el punto O y por bases los elementos del arco AB, constituyendo así un sector poligonal de infinito número de lados. Pero sabemos [*Lema II*] que el volúmen del espacio engendrado por el sector poligonal es igual al área descrita por su base multiplicada por el tercio del radio; luego el volúmen del sector esférico tendrá también por expresión este producto.

Si llamamos al área de la zona Z y al radio de la esfera R, tendremos que el volúmen del sector esférico

$$V = \frac{1}{3} R \times Z.$$

Y como el área de la zona Z [*Teor. CCIX*] tiene por expresión  $2\pi R \times a$ , tendremos también

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \times a.$$

Es decir, *que el volúmen de un sector esférico es igual á dos tercios del área del círculo máximo multiplicada por la altura de la zona.*

### TEOREMA CCLXIX.

*El volúmen de una esfera, es igual al producto de su área por el tercio del radio.*

La esfera podemos considerarla engendrada por dos sec-

tores circulares que compongan al semicírculo generador, y por consiguiente, su volúmen será igual al de dos sectores esféricos, cuyas zonas forman la superficie total de la esfera. Si llamamos  $Z$  y  $Z'$  las dos zonas de estos dos sectores esféricos, tendremos que el volúmen de la esfera,

$$V = \frac{1}{3} R Z + \frac{1}{3} R Z' = \frac{1}{3} R (Z + Z').$$

Como las dos zonas  $Z$  y  $Z'$  forman la superficie esférica que tiene por expresion [Teor. CCLXI]  $4\pi R^2$  tendremos

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

que es el volúmen de la esfera en funcion de su radio. Puede escribirse esta expresion del siguiente modo:

$$V = 2R \times \frac{2}{3} \pi R^2,$$

es decir, que el volúmen de la esfera es igual á su diámetro multiplicado por los  $\frac{2}{3}$  del área del círculo máximo.

Si quisiéramos expresar el volúmen de la esfera en funcion del diámetro  $D$ , tendríamos

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8} = \frac{1}{6} \pi D^3.$$

**451. Segmento esférico** es la porcion de esfera comprendida entre una zona y la base ó bases que la terminan. (Fig. 259) (\*)

El segmento esférico puede tener una ó dos bases, segun tenga una ó dos bases su zona correspondiente.

Para hallar el volúmen de un segmento esférico de una sola base pueden suceder dos casos: que el segmento sea menor que média esfera ó mayor.

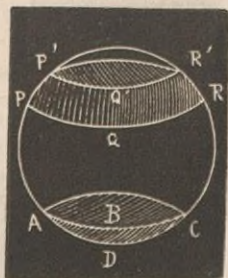


Fig. 259.

1.º Si el segmento es menor que média esfera como el

---

(\*) Algunos autores llaman *segmento esférico* al volúmen en-

engendrado por  $ABP$  (Fig. 261) al girar sobre  $AA'$ , su volúmen se compone evidentemente del sector esférico engendrado por el sector circular  $OAB$ , menos el volúmen del cono engendrado por el triángulo  $OBP$ .

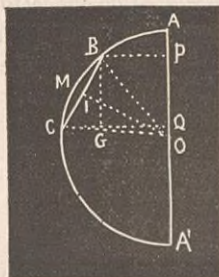


Fig. 261.

2.º Si el segmento esférico de una sola base es mayor que média esfera como, por ejemplo, el engendrado por  $A'CBP$ , su volúmen es igual al del sector esférico  $OA'B$ , mas el del cono engendrado por  $OBP$ .

Si el segmento esférico, es de dos bases, como el engendrado por la figura  $QCBP$ , su volúmen será igual á la diferencia entre los volúmenes de dos segmentos esféricos



Fig. 262.

de una sola base, á saber: el engendrado por  $QCA$  y el engendrado por  $PBA$ , cuyos volúmenes sabemos determinar.

152. Se llama *casco esférico* (Fig. 262) la porcion de esfera comprendida por un huso esférico  $PAP'B$  y los dos semicírculos que lo terminan. Por un razonamiento enteramente igual al del

engendrado por un segmento circular  $AMB$  en la revolucion del círculo generador de la esfera á que pertenece (Fig. 260). Se vé

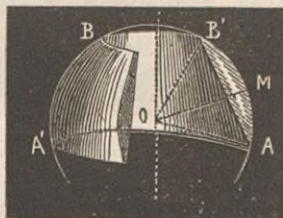


Fig. 260.

que este volúmen es la diferencia entre el del sector esférico engendrado por el sector circular  $OAB'$  y el engendrado por el triángulo isósceles  $OAB'$ , que tiene por base la cuerda del arco del sector. En los autores franceses es comun esta definicion del segmento esférico, que tiene su razon de ser en la circunstancia de ser engendrado por un segmento circular.



*teorema CCLXII* se demuestra que tomando por unidad el casco esférico recto (es decir, aquel cuyo huso esférico es recto), el volúmen de un casco esférico es igual á el del casco esférico recto multiplicado por su ángulo.

El volúmen del casco esférico recto, siendo evidentemente la cuarta parte del de la esfera, estará representado por  $\frac{1}{4}\pi R^3$ , de manera que el volúmen de un casco esférico cualquiera se expresará

$$V = \frac{1}{4}\pi R^3 \times A,$$

siendo A su ángulo.

## CAPÍTULO II.

COMPARACION DE LAS ÁREAS Y DE LOS VOLÚMENES  
DE LOS CUERPOS REDONDOS. (\*)

153. Se dá el nombre de conos *semejantes* á aquellos cuyos triángulos generadores son semejantes, y por tanto que sus alturas, lados y radios son proporcionales.

154. Se llaman cilindros *semejantes* los que sus rectángulos generadores lo son, y por tanto sus alturas y radios son proporcionales.

### TEOREMA CCLXX.

*Las áreas laterales de dos conos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, á los de sus alturas, ó á los de sus lados.*

Llamemos R y r los radios, A y a las alturas, L y l los lados de los dos conos semejantes. Tenemos (153) que

$$L : l :: R : r;$$

y evidentemente

$$\pi R : \pi r :: R : r;$$

multiplicando entre sí estas proporciones

$$\pi R L : \pi r l :: R^2 : r^2.$$

(\*) Al cilindro, cono y esfera se les suele llamar, aunque no con una propiedad, los tres *cueros redondos*.

Pero  $\pi RL$  es el área lateral de uno de los conos,  $\pi r \ell$  la del otro, y como los radios, lados y alturas, son proporcionales, tambien lo serán sus cuadrados, luego finalmente

$$\pi RL : \pi r \ell :: R^2 : r^2 :: A^2 : a^2 :: L^2 : \ell^2.$$

### TEOREMA CCLXXI.

*Las áreas laterales de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó á los de sus alturas.*

Sean  $R$  y  $r$  los radios de las bases,  $A$  y  $a$ , las alturas, tenemos (154), que

$$A : a :: R : r,$$

y evidentemente

$$2\pi R : 2\pi r :: R : r;$$

luego multiplicando estas dos proporciones y teniendo presente lo dicho en el teorema anterior,

$$2\pi RA : 2\pi ra :: R^2 : r^2 :: A^2 : a^2.$$

### TEOREMA CCLXXII.

*Las áreas de dos esferas, son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

En efecto, tenemos evidentemente que

$$4\pi R^2 : 4\pi r^2 :: R^2 : r^2.$$

Y como los radios son proporcionales á los diámetros, tendremos

$$4\pi R^2 : 4\pi r^2 :: R^2 : r^2 :: D^2 : d^2.$$

### TEOREMA CCLXXIII.

*Los volúmenes de dos conos semejantes, son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, á los de sus alturas, ó á los de sus lados.*

En efecto, tenemos que

$$A : a :: R : r.$$

Y evidentemente

$$\frac{1}{3} \pi R^2 : \frac{1}{3} \pi r^2 :: R^2 : r^2.$$

Multiplicando y atendiendo á la proporcionalidad ya sabida

$$\frac{1}{3} \pi R^2 A : \frac{1}{3} \pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3.$$

#### TEOREMA CCLXXIV.

*Los volúmenes de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, ó á los de sus alturas.*

Sabemos que

$$A : a :: R : r,$$

y como

$$\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2,$$

tendremos

$$\pi R^2 A : \pi r^2 a :: R^3 : r^3 :: A^3 : a^3.$$

#### TEOREMA CCLXXV.

*Los volúmenes de dos esferas, son proporcionales á los cubos de sus radios, ó á los de sus diámetros.*

Pues tenemos evidentemente

$$\frac{4}{3} \pi R^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 :: R^3 : r^3 :: D^3 : d^3.$$



## LIBRO III.

PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

### CAPÍTULO I.

POLIEDROS.

#### PROBLEMA LI.

*Conocidas las bases y la altura de un tronco de tetráedro ó de pirámide cualquiera de bases paralelas, calcular*

*la altura de la pirámide total y de la pirámide deficiente. (Fig. 263)*

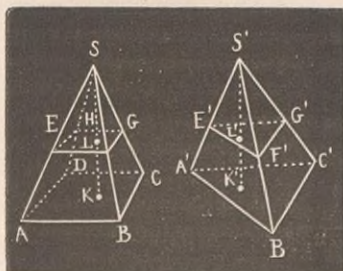


Fig. 263.

Llamemos á las bases  $B$  y  $b$ , á la altura del tronco  $A$ , y á las alturas desconocidas de la pirámide total y de la deficiente  $X$  y  $x$ ; es evidente que  $X - x = A$ .

Ahora sabemos que entre las bases  $B$  y  $b$ , y las alturas  $X$  y  $x$  de las pirámides, hay la proporción [*Teorema CCXXXV*],

$$B : b :: X^2 : x^2, \text{ de donde } \sqrt{B} : \sqrt{b} :: X : x.$$

De esta última proporción se deduce comparando la diferencia entre los antecedentes y los consecuentes, con sus respectivos antecedentes ó consecuentes: las dos proporciones

$$\sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{B} :: X - x : X$$

$$\sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{b} :: X - x : x.$$

De estas proporciones se pueden obtener los valores de  $X$  y  $x$  en función de las bases y de la altura del tronco,

pues  $X - x = A$ . Tendremos, pues,

$$X = \frac{A \cdot \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}, \quad x = \frac{A \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Si llamamos  $C^2$  y  $c^2$  á los cuadrados equivalentes á las dos bases, estas dos fórmulas se convierten en

$$X = \frac{A \cdot C}{C - c}, \quad x = \frac{A \cdot c}{C - c}.$$

### PROBLEMA LII.

*Conocida la arista de un tetraédro regular, hallar su volumen.* (Fig. 264)

Sea el tetraédro regular VABC, y su altura VO, que sabemos caerá en el centro O del triángulo equilátero ABC [Teor. CXLVI]. Su volumen [Teor. CCLII] será

$$V = \frac{1}{3} VO \times ABC.$$

Pero VO es un cateto del triángulo rectángulo AOV, por consiguiente, llamando  $a$  la arista del tetraédro, según el teorema de Pitágoras, tendremos

$$VO = \sqrt{a^2 - AO^2}$$

y siendo AO el radio del círculo circunscrito al triángulo, tendremos [Teor. CXXVIII]

$$\frac{a}{AO} = \sqrt{3}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{a^2}{AO^2} = 3, \quad \text{de donde} \quad AO^2 = \frac{a^2}{3},$$

luego substituyendo en el valor de VO, será

$$VO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Conocida la altura del tetraédro en función de su arista, nos falta hallar el área del triángulo ABC que sabe-

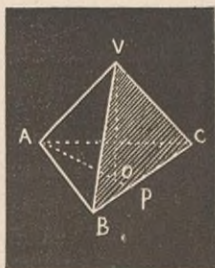


Fig. 264.

mos tiene por expresion

$$ABC = \frac{a}{2} \times AP.$$

Pero AP en el triángulo rectángulo ABP será, teniendo presente que  $BP = \frac{1}{2}a$ ,

$$AP = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3},$$

luego sustituyendo en el área del triángulo

$$ABC = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

Tomando el valor de la altura VO en funcion de la arista del tetráedro así como el área de la base, tendremos el volúmen del tetráedro que será

$$V = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}.$$

## CAPÍTULO II.

### CUERPOS REDONDOS.

#### PROBLEMA LIII.

*Conocidas las bases y la altura de un tronco de cono de bases paralelas, hallar el valor de la altura del cono total y la del cono deficiente.*

Este problema se resuelve de un modo análogo al LI, y por tanto las alturas incógnitas serán

$$X = \frac{A \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}, \quad x = \frac{A \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Si sustituimos los valores de las bases B y b en funcion de los radios R y r, tendremos,

$$X = \frac{A \cdot \sqrt{\pi R^2}}{\sqrt{\pi R^2} - \sqrt{\pi r^2}}, \quad x = \frac{A \cdot \sqrt{\pi r^2}}{\sqrt{\pi R^2} - \sqrt{\pi r^2}}.$$



Cuyas expresiones pueden transformarse en las siguientes, suprimiendo el factor comun  $\sqrt{\pi}$ ,

$$X = \frac{AR}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad x = \frac{Ar}{\sqrt{R^2 - r^2}};$$

y extrayendo la raíz cuadrada en los dos términos de los denominadores

$$X = \frac{AR}{R-r}, \quad x = \frac{Ar}{R-r}.$$

#### PROBLEMA LIV.

*Suponiendo esférica la tierra y sabiendo que la circunferencia de círculo máximo es igual á 40.0000 kilómetros, determinar su radio, el área de su superficie y su volúmen.*

Para hallar el radio, tenemos

$$R = \frac{C}{2\pi}, \text{ de donde } \log R = \log \frac{1}{2} C - \log \pi = 3.803880$$

y por consiguiente

$$R = 6366,2 \text{ kilómetros.}$$

El área de la superficie será

$$S = 4\pi R^2, \text{ de donde } \log S = \log 4 + \log \pi + 2\log R = 8.706970.$$

$$S = 509296000 \text{ kilómetros cuadrados.}$$

El volúmen será

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

que calculado por logaritmos como el radio y el área será

$$V = 1080760000 \text{ myriámetros cúbicos.}$$

# A P É N D I C E

## DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

### CAPÍTULO I.

#### DEFINICIONES DE LOS CENTROS, EJES Y PLANOS DE SIMETRÍA.

**Centro de simetría.** Dos puntos son simétricos respecto á otro que se llama *centro de simetría*, cuando la línea recta que une aquellos puntos pasa por este y queda dividida en dos partes iguales. Así, por ejemplo, los puntos (Fig. 265) A y C', B y B', A' y C son simétricos respecto al centro O, si tenemos  $OA = OC'$ ,  $OC = OA'$ ,  $OB = OB'$ .

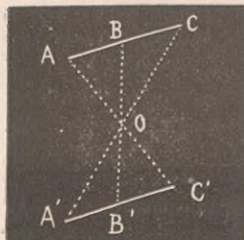


Fig. 265.

Dos rectas AC y A'C' son simétricas con respecto al centro O si lo son sus extremos.

Dos polígonos son simétricos, si lo son sus lados, y por consiguiente, si lo son sus vértices.

Dos poliedros son simétricos, si lo son sus caras, y por tanto si lo son sus aristas, ó sus vértices.

Dos partes de un mismo poliedro son simétricas si lo son las caras que forman estas partes, ó bien sus aristas, ó sus vértices.

Las rectas ó los polígonos planos que son simétricos respecto á un punto ó que tienen un *centro de simetría*, son superponibles; pero los poliedros simétricos respecto á un punto en general no pueden coincidir, pues aunque tienen sus elementos iguales, están coordinados de distinta manera.

**Simetría de posición y de forma.** De aquí resulta que para los poliedros hay dos clases de simetría, la de *posición* y la de

*forma ó figura.* Así, por ejemplo, en los tetraédros (Fig. 266)  $TABC$  y  $TA'B'C'$  que suponemos simétricos respecto al punto  $T$ , existe la simetría de posición que conservarán mientras persista la que relativamente tienen, y la simetría de forma que subsistirá cualquiera que sea la colocación de ellos. Esta *simetría de forma* que consiste en que los elementos son iguales pero colocados en distinto orden, es lo que hace que los poliedros simétricos no puedan coincidir, por regla general.

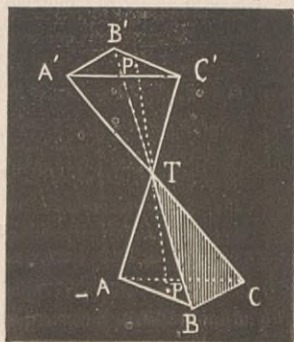


Fig. 266.

Los centros de figura de los poliedros regulares son *centros de simetría* de los mismos.

En dos poliedros simétricos respecto á un punto se verifica:

- 1.º *Que sus superficies son equivalentes.*
- 2.º *Que sus volúmenes son equivalentes.*

**Eje de simetría.** Dos puntos  $A$  y  $A'$  (Fig. 267) son simétricos respecto á una recta, que se llama *eje de simetría*, cuando se hallan en una misma recta  $AA'$  perpendicular á este eje é igualmente distantes, de modo que  $Aa = A'a$ .

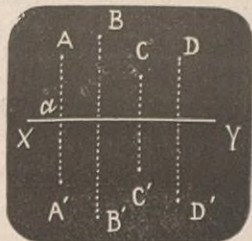


Fig. 267.

Dos rectas son simétricas respecto á un eje cuando lo son sus extremos.

Dos polígonos son simétricos, si lo son sus lados, y por tanto si lo son sus vértices.

Dos poliedros ó dos porciones de poliedro, son simétricas respecto á un eje si lo son sus caras, y por consiguiente si lo son sus aristas ó sus vértices.

Los poliedros simétricos respecto á un eje son superponibles y por tanto la simetría con relación á un eje, solo es de posición.

La altura de una pirámide regular es eje de simetría de es-



ta pirámide; la recta que une los centros de las bases de un prisma regular es eje de simetría del prisma.

En todo poliedro simétrico con respecto á un eje se verifica:

1.º Que toda recta perpendicular al eje y que termina en la superficie queda dividida en dos partes iguales por él.

2.º Todo plano que pasa por el eje, divide al poliedro en dos partes iguales.

3.º Todo plano perpendicular al eje determina un polígono que es simétrico respecto al punto de interseccion del plano con dicho eje.

**Plano de simetría.** Dos puntos A y A' (Fig. 268) son simétricos respecto á un plano, cuando se hallan situados en una perpendicular á este plano y equidistantes de él, de manera que  $Aa = A'a$ .

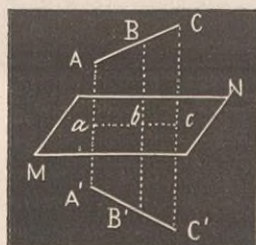


Fig. 268.

Dos rectas son simétricas respecto á un plano, si lo son sus extremos.

Dos poliedros son simétricos, si lo son sus caras, ó sus aristas ó sus vértices.

Si un poliedro es simétrico respecto á dos planos perpendiculares entre sí, la interseccion de estos planos es un eje de simetría del poliedro.

Si un poliedro es simétrico respecto á tres planos perpendiculares entre sí, el punto de interseccion de estos tres planos es un centro de simetría del poliedro.

## CAPÍTULO II.

NOCIONES SOBRE LAS SUPERFICIES CÓNICAS, CILÍNDRICAS Y DE REVOLUCION.

### SUPERFICIES CÓNICAS.

**Generacion.** Se llama *superficie cónica* la engendrada por una recta SA (Fig. 269) que se llama *generatriz*, que pasa en todas sus posiciones por el punto S apoyándose sobre una línea cualquiera ABCD.... llamada *directriz*. El punto S se denomina *vértice* ó *cúspide* de la superficie cónica.

**Variedades.** Las superficies cónicas se distinguen segun sus directrices, denominándose superficies cónicas *circulares, elípticas, parabólicas, &c.*, segun que su directriz sea una circunferencia, una elipse, ó una parábola, &c.

El plano es un caso particular de este género de superficies, pues si la directriz fuera una recta, la generatriz engendraria un plano.

**Conos.** Si la directriz de la superficie cónica es una curva cerrada y se cortan todas sus generatrices hácia un mismo lado del vértice

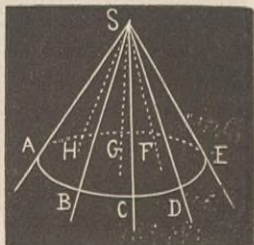


Fig. 269. A

por un plano, el cuerpo comprendido entre este plano y la superficie cónica es el *cono*, que tiene por base el plano secante, por cúspide la de la superficie cónica y por la altura la perpendicular bajada desde este punto á la base.

**Cono circular recto.** El cono que hemos estudiado (engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo) en la geometría elemental, no es más que un caso particular; pues si la curva ABCD fuera una circunferencia y el punto S estuviera en la perpendicular levantado á su plano por su centro, el cuerpo SABCD sería un cono circular recto.

Si siendo la directriz una circunferencia el vértice no estuviera en la perpendicular á la base levantada en su centro, el cono sería circular oblicuo.

**Propiedades.** Cualquiera que sea la directriz, en las infinitas especies de superficie cónica, se verifican las siguientes propiedades:

- 1.º Todos los planos paralelos determinan secciones semejantes.
- 2.º Los planos tangentes pasan por una generatriz.
- 3.º La superficie cónica puede desarrollarse sobre un plano.

## SUPERFICIES CILÍNDRICAS.

**Generacion.** Se llama superficie cilíndrica (Fig. 270) la que tiene por generatriz una recta A'B' que se apoya en su movimiento sobre una línea cualquiera *abcd* (*directriz*) conservándose en todas sus posiciones paralela ó una direccion RS.

La superficie cilíndrica, puede considerarse como un caso particular de las cónicas, porque si en estas se supone el vértice en el infinito, las generatrices son paralelas.

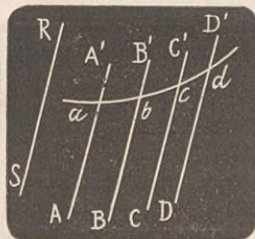


Fig. 270.

**Variedades.** Las variedades de las superficies cilíndricas son análogas á las de las cónicas; de manera que se llaman *circulares*, *elípticas*, *parabólicas*, &c., segun que la directriz sea una circunferencia, una elipse, una parábola.

El plano es tambien un caso particular de este género de superficies, pues resulta engendrado si la directriz es una línea recta.

**Cilindros.** Si la directriz de la superficie cilíndrica es una curva cerrada, y se cortan todas sus generatrices por dos planos paralelos  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$  (Fig. 271), el cuerpo comprendido

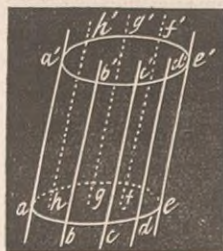


Fig. 271.

entre estos y la superficie cilíndrica es el cilindro, cuyas bases son las secciones planas, y su altura la distancia entre las dos bases.

**Cilindro circular recto.** El cilindro recto (engendrado por la revolucion de un rectángulo) es un caso particular; pues si la directriz es una circunferencia y la generatriz es perpendicular á su plano, engendrará en su movimiento la superficie lateral de un cilindro recto.

**Propiedades.** En todas las infinitas especies de superficies cilíndricas que pueden existir se verifica:

- 1.º Que los planos paralelos determinan secciones iguales.
- 2.º Que los planos tangentes contienen á una generatriz.
- 3.º Que la superficie puede desarrollarse sobre un plano. (\*)

(\*) Las superficies cilíndricas y cónicas se hallan comprendidas en otra generacion más general de superficies que se llaman *desarrollables*, y que tienen por principales caracteres ser desarrollables sobre un plano y admitir por generatriz una línea recta, con la condicion que en dos de sus posiciones infinitamente próximas, se halle en un mismo plano.



## SUPERFICIES DE REVOLUCION.

**Generacion.** Se llama *superficie de revolucion* la engendrada por una línea cualquiera ABC.... (Fig. 272) que gira alrededor de la recta fija XY llamada *eje*. En este movimiento cada uno de los puntos de la generatriz ABC describirá una circunferencia cuyo radio será la perpendicular bajada desde él hasta el eje, y por tanto cuyo centro estará en el eje.

*Sólido ó cuerpo de revolucion* es la porción del espacio circunscripta por dicha superficie; cuyo espacio será *limitado ó indefinido*, segun que la generatriz sea una curva cerrada ó indefinida. Cuando el sólido es limitado, se llaman polos á las extremidades del eje de revolucion.

El *cono recto*, el *cilindro recto* y la *esfera*, son tres sólidos de revolucion cuyas superficies tienen respectivamente por generatrices, una recta que encuentra al eje, una recta paralela al eje, y una semicircunferencia cuyo diámetro es el eje de revolucion.

**Meridianos.** Todo plano que pasa por el eje de una superficie de revolucion determina una seccion ABC, A'B'C' simétrica respecto al eje, que se llama *meridiano* de la superficie. Todos los meridianos son iguales.

En la esfera el meridiano es un círculo máximo, en el cilindro un rectángulo, y en el cono un triángulo isóscele.

**Paralelos.** Todo plano perpendicular al eje determina una seccion circular llamada un *paralelo* de la superficie de revolucion.

En la esfera los paralelos son círculos que van decreciendo desde la seccion que pasa por el punto medio del eje (que es un círculo máximo igual al generador) hasta los polos. La seccion média se llama *ecuador*.

En el cilindro todos los paralelos son iguales.

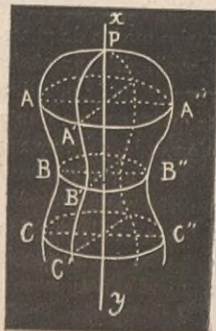


Fig. 272.

En el cono los paralelos van decreciendo desde la base hasta el vértice.

**Nota general sobre la generacion de superficies.** Cuando una línea cambia de posicion, sea quedando idéntica en su dimension y forma, sea cambiando su magnitud ó su forma, ó ambas; la reunion de todas las posiciones sucesivas de esta línea forma una superficie, de la que es *generatriz* la línea en cuestion.

La ley ó sean las condiciones fijas, en que se verifica el movimiento constituye el *modo de generacion* de la superficie, cuyo modo en un gran número de casos lo determina la *directriz*, es decir, otra línea que regula y determina el movimiento generador.

Fácil es comprender que una misma superficie, puede tener varios modos de generacion; así hemos visto que las superficies cilíndricas y cónicas (circulares) pueden engendrarse ó por revolucion de una línea recta, ó por el movimiento de una recta que fija en un punto ó paralela constantemente á una direccion dada, se mueve apoyándose en una circunferencia.

Pero un mismo *modo de generacion* no conviene más que á un género de superficies, en el sentido de que todas las superficies engendradas de un modo igual, tienen muchas propiedades comunes que se derivan de su generacion y de las que gozan con exclusion de las demás.

Las superficies cilíndricas, cónicas y de revolucion, que hemos definido nos dan una idea de esta verdad.

No podemos extendernos en este punto, que sale de los límites de la Geometría Elemental.

---

### CAPITULO III.

#### NOCIONES SOBRE LA HÉLICE.

---

**Definicion.** Supongamos que la superficie lateral de un cilindro recto de base circular BD (*Fig. 273*) se desarrolla en un plano en el rectángulo ADQP. Dividamos su altura AD

en un número cualquiera de partes iguales  $AE$ ,  $EF$ ,  $FD$ , y tomemos sobre el lado opuesto una longitud  $PR = AE$ , tirando la recta  $AR$ , y sus paralelas  $ES$ ,  $FQ$ . Si se vuelve á enrollar el rectángulo  $ADQP$  sobre el cilindro, las rectas  $AR$ ,  $ES$ ,  $FQ$  trazarán sobre la superficie del cilindro una curva continua que se llama *hélice*.

La curva es continua, pues al arrollarse el rectángulo, sus dos lados  $AD$  y  $PQ$  se confunden en una sóla generatriz, y el punto  $R$  se confundirá con  $E$ , el  $S$  con  $F$ , el  $Q$  con  $D$ .

**Espira y paso.** Cada uno de los arcos de la curva que tiene sus extremidades sobre una misma generatriz es una *espira* de la hélice; y se llama *paso* de la hélice la distancia constante que

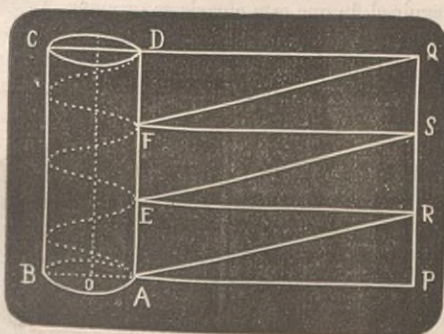


Figura 273.

existe entre dos puntos de la curva situados en una misma generatriz. Esta distancia es igual á  $AE = EF = FD$ .

La circunferencia de la base del cilindro rectificado, el paso de la hélice y una de las espiras rectificadas forman un triángulo rectángulo  $ARP$ . Por consiguiente, la hélice será conocida, si se dan dos de estas tres cantidades.

**Propiedades.** En la hélice se verifica

1.º Que la distancia de un punto de la curva á la base del cilindro es proporcional al arco de esta curva comprendido desde la base á dicho punto.

2.º Que la tangente á la curva en un punto cualquiera forma un ángulo constante con la generatriz del cilindro que pasa por dicho punto.



## CAPÍTULO IV.

### BREVÍSIMAS NOCIONES DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

#### PRELIMINARES.

**Definición.** La *Geometría descriptiva* tiene por objeto representar gráficamente, sobre un plano, la magnitud y la posición absoluta ó relativa de las cantidades geométricas que se hallan generalmente en distintos planos.

**Proyecciones.** Entre los métodos que pueden emplearse para conseguir el fin que esta ciencia se propone, vamos á indicar el de las *proyecciones* por ser el más importante en este ramo de las Matemáticas, cuya invención es debida en su mayor parte al ilustre Monge, uno de los fundadores de la Escuela Politécnica de París.

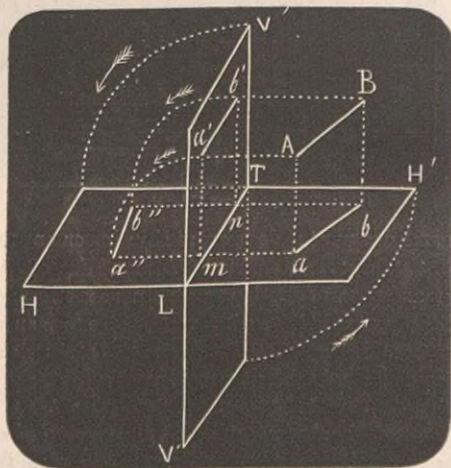


Figura 274.

**Planos de proyección.** Consideremos dos planos perpendiculares entre sí, uno  $HH'$  (Fig 274) *horizontal* y el otro  $VV'$

*vertical*, estos planos se llaman de *proyeccion* y se cortan en una línea horizontal LT que es la *línea de tierra*. Se llaman *proyecciones* de un punto A del espacio, sus dos proyecciones (*Geometría* 88) *a* y *a'* sobre los dos planos de proyeccion; *a* es la proyeccion horizontal y *a'* la vertical. (\*)

Las proyecciones de una recta, de una curva, ó de un cuerpo en general es el conjunto de las proyecciones de sus puntos.

Si consideramos una recta AB en el espacio y sus proyecciones horizontal y vertical *ab*, *a'b'*, los planos que debemos imaginar por la recta AB perpendiculares respectivamente al horizontal HH' y al vertical VV' de proyeccion, se denominan *planos proyectantes de la recta*, y vemos que las intersecciones de estos planos con los de proyeccion determinan las proyecciones de la recta del espacio AB, que, por consiguiente, son tambien *rectas*.

**Trazas de un plano.** La proyeccion de un plano sobre los de proyeccion se determina por medio de las intersecciones de aquel con estos, que se llaman *trazas horizontal y vertical* segun se hallen en el plano horizontal ó en el vertical de proyeccion.

**Superposicion de los planos de proyeccion.** Como en el último resultado los problemas de la Geometría descriptiva hay que resolverlos en un sólo plano (el de la hoja de papel que sirve para las construcciones gráficas) se consideran los dos planos de proyeccion superpuestos; de manera que el plano vertical VV' se supone que gira alrededor de la línea de tierra (segun indican las flechas de la figura hasta venir á coincidir con el horizontal; así es que trazada la línea de tierra, la parte de plano que hay debajo de ella representa la parte anterior del plano horizontal y la inferior del vertical, y la parte del plano que se encuentra sobre la línea de tierra representa la parte posterior del plano horizontal y la superior del vertical; pero en la imaginacion siempre hay que considerar levantado el plano vertical formando los cuatro ángulos diedros rectos que en su verdadera posicion resultan de la interseccion con el plano horizontal. A estos ángulos diedros se les llama 1.º, 2.º, 3.º y 4.º

---

(\*) Se ha convenido siempre en acentuar las proyecciones verticales.

El 1.º es el que está formado por la parte anterior del plano horizontal y la superior del vertical  $HLTV$ ; el 2.º su adyacente  $HLTV$ ; el 3.º el opuesto por la arista al primero  $HLTV$ ; y el 4.º su adyacente  $VLTH$  y opuesto por la arista al segundo, de modo que en resumen el 1.º y 3.º, 2.º y 4.º son opuestos por la arista.

**Correlacion de las proyecciones de un punto.** *Las proyecciones de un punto del espacio tienen que estar en una recta perpendicular á la línea de tierra.* En efecto, siendo (Fig. 274)  $a$  y  $a'$  las proyecciones del punto  $A$  del espacio, el plano  $aAa'$  es perpendicular á los dos planos de proyeccion y por consiguiente á la línea de tierra, luego cortará á los planos de proyeccion en dos rectas,  $am$  y  $a'm$  perpendiculares á  $LT$  en un mismo punto  $m$ ; de donde se deduce que al girar el plano vertical para rebatirse en el horizontal el punto  $a$  se rebatirá en  $a''$  que estará en la prolongacion  $ma''$  de la perpendicular á la línea de tierra.

Se puede observar en el rectángulo  $Aama'$ , que la distancia de un punto del espacio al plano horizontal es igual á la distancia  $a'm$  de su proyeccion vertical á la línea de tierra, y que la de dicho punto al plano vertical es igual á la distancia de su proyeccion horizontal á la línea de tierra.

**Determinacion de una recta por sus proyecciones.** *Si se conocen las proyecciones horizontal y vertical de una recta del espacio, en general la recta queda determinada.* En efecto, siendo  $ab$  y  $a'b'$ , las proyecciones de una recta  $AB$  que está en el espacio, si consideramos por ellas los planos  $abAB$ ,  $a'b'AB$  respectivamente perpendiculares á los de proyeccion (que son los planos proyectantes de la recta) estos planos se cortarán segun la recta  $AB$  que es la recta del espacio.

**Proyeccion de las rectas paralelas.** *Si dos rectas son paralelas, sus proyecciones horizontales y verticales tambien lo son.* Los planos proyectantes verticales de estas dos rectas son paralelos, pues contienen cada uno dos rectas paralelas entre sí que son las dos rectas dadas y las perpendiculares al plano horizontal; luego las intersecciones de estos planos proyectantes con el plano horizontal serán paralelas: pero estas intersecciones son las proyecciones horizontales de las dos rectas, luego



queda demostrada la proposición. Lo mismo se demuestra para las proyecciones verticales.

**Recta y plano perpendiculares entre si.** Cuando una recta es perpendicular á un plano, las proyecciones de la recta son perpendiculares á las trazas del plano. Supongamos que la recta  $AB$  (Fig. 275) es perpendicular al plano  $QGR$ . El plano proyectante  $ABab$  es perpendicular al plano horizontal de proyección  $MN$ , y al plano propuesto, luego es perpendicular á la comun interseccion  $GR$ , ó lo que es igual la recta  $GR$  es perpendicular al plano  $ABab$ ; pero entonces dicha recta  $GR$  es perpendicular á la  $ab$  que pasa por su pié en el plano; que es lo que se queria demostrar.

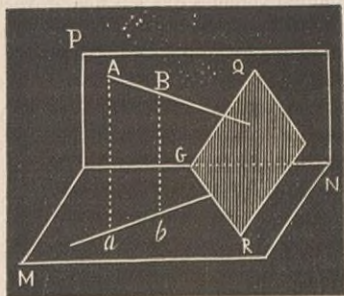


Fig. 275.

Lo mismo se demuestra para la proyeccion vertical de la recta  $AB$ .

**Proyecciones de un punto segun su situacion en el espacio.** Sea  $LT$  (Fig. 276) la línea de tierra; en esta figura así

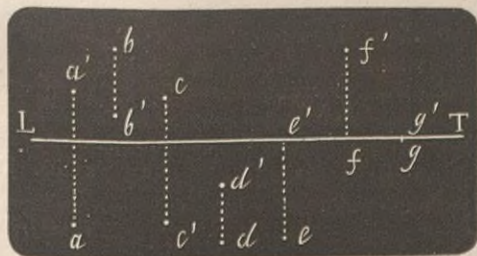


Figura 276.

como en todas las que siguen consideraremos superpuestos los dos planos de proyeccion.

Si el punto está situado en el primer ángulo, su proyeccion vertical estará en la parte superior del plano vertical y la pro-

yeccion horizontal en la parte anterior del plano horizontal, luego  $a, a'$  serán sus proyecciones.

Si está en el segundo ángulo, haciendo un razonamiento análogo veremos que sus dos proyecciones  $b, b'$  deben caer en la parte superior de la línea de tierra.

Cuando el punto está en el tercer ángulo sus proyecciones son  $c, c'$  (\*)

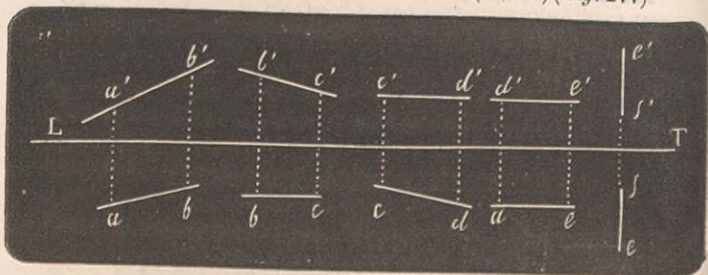
Si está en el cuarto ángulo las proyecciones serán  $d, d'$ .

Si el punto está situado en el plano horizontal, su proyeccion vertical estará en la línea de tierra, tal es el  $e, e'$ .

Si está en el plano vertical, su proyeccion horizontal se encuentra en la línea de tierra, como  $f, f'$ .

Por último, si el punto está en la misma línea de tierra, sus proyecciones se confunden en el mismo punto, tal es,  $g, g'$ .

**Proyecciones de una recta segun su posicion en el espacio.** Si la recta tiene una posicion cualquiera oblicua á los dos planos de proyeccion, las proyecciones serán  $(ab, a'b')$  (Fig. 277)



[Figura] 277.

Si es paralela al plano vertical, su proyeccion [horizontal será paralela á la línea de tierra [Geom. teorema CLXVII] tal es  $(bc, b'c')$ .

Si la recta es paralela al plano horizontal, su proyeccion vertical es paralela á la línea de tierra  $(cd, c'd')$ .

Si fuera paralela á los dos planos, esto es, á la línea de tierra, sus dos proyecciones serian paralelas á esta línea, tal es  $(de, d'e')$ .

(\*) Hay que tener presente que la proyeccion vertical se expresa siempre con la letra acentuada.

Si es perpendicular al plano horizontal, su proyeccion sobre este plano evidentemente es un punto y sobre el otro será perpendicular á la línea de tierra; lo contrario sucede cuando la recta es perpendicular al plano vertical.

Si fuera la recta perpendicular á la línea de tierra, sus dos proyecciones serian perpendiculares á esta línea; pues los dos planos proyectantes de la recta se confundirian en uno sólo, cuyas intersecciones con los dos planos serian las proyecciones de la recta, tal es la recta ( $ef, e'f'$ .)

Por último, si la recta estuviese situada en uno de los planos de proyeccion, ella misma seria su proyeccion en este plano en que estaba situada y su otra proyeccion estaria en la línea de tierra.

Puede observarse, que en todos estos casos la recta queda determinada por su proyeccion, si se exceptúa cuando es perpendicular á la línea de tierra, en cuyo caso la proyeccion pertenece á todas las infinitas rectas que pueden trazarse en el único plano proyectante.

**Trazas de un plano segun su posicion en el espacio.** Sabemos que se llaman trazas de un plano, á las intersecciones de este plano con los de proyeccion.

Un plano cualquiera, inclinado con respecto á los de proyeccion, tiene por trazas dos rectas inclinadas respecto á la línea de tierra, tal es el plano  $MNN'$  (Fig. 278).

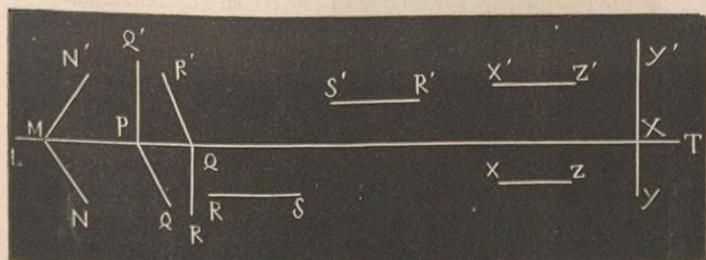


Figura 278.

Si el plano es perpendicular al horizontal de proyeccion; su traza vertical es perpendicular á la línea de tierra. [*Geom. teor.*



CCVIII] así el plano  $Q'PQ$  es perpendicular al plano horizontal.

Si el plano es perpendicular al vertical, su traza horizontal es perpendicular á la línea de tierra: tal es  $RQR'$ .

Si es paralelo al vertical, es evidente que no cortará á este plano, y su única traza, la horizontal, será paralela á la línea de tierra [*Geom. teor.* CLXVII]: plano  $RS$ .

Si fuera paralelo al horizontal, su única traza, la vertical, sería paralela á la línea de tierra: tal es  $S'R'$ .

Si fuera paralelo á la línea de tierra, sus trazas serían paralelas á dicha línea: plano  $XZ$ ,  $X'Z'$ .

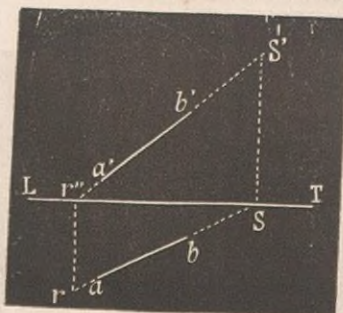
Por último, si fuese perpendicular á la línea de tierra, sus dos trazas serían perpendiculares á esta línea; y por tanto prolongación una de otra: plano  $YXY'$ .

Puede observarse que en todos estos casos el plano queda determinado por sus trazas.

#### PROBLEMAS.

1.º Dadas las proyecciones de una recta, hallar sus trazas con los planos de proyección. (*Fig.* 279)

Sean las proyecciones  $(ab)$   $(a'b')$  de una recta  $(AB)$  del espacio. La traza vertical de la recta, siendo un punto de ella que



*Fig.* 279.

está en el plano vertical, su proyección horizontal estará en la línea de tierra. Por igual razón la proyección vertical de la traza horizontal de la recta, será un punto de la línea de tierra. Luego si se prolonga la proyección horizontal de la recta, hasta la línea de tierra  $s$  y se levanta la perpendicular  $ss'$  á dicha línea hasta que

en  $s'$  encuentre á la proyección vertical  $a'b'$  prolongada, el punto  $s'$  es la traza vertical de la recta. De un modo análogo se determinará la traza horizontal de la recta que es el punto  $r$ .

Si se nos dieran las trazas  $r$  y  $s$ , de una recta, para construir sus proyecciones, bastaría bajar las perpendiculares  $rr'$  y  $ss'$  á la línea de tierra y las  $rs$  y  $r's'$  serían las proyecciones buscadas.

2.º Dadas las proyecciones de una recta limitada, hallar su longitud. (Fig. 280)

Sean las proyecciones ( $ab$ ) ( $a'b'$ ). La recta del espacio  $AB$  forma con su proyeccion horizontal  $ab$  y con las perpendiculares que proyectan los puntos  $a$  y  $b$ , un trapezio vertical, del que conocemos sus dos bases que son estas perpendiculares, y el lado  $ab$ . Por consiguiente, si consideramos que este trapezio se rebate sobre el plano

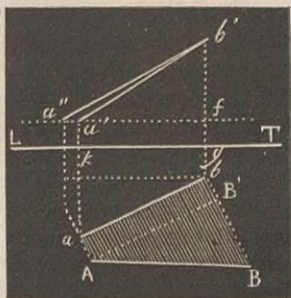


Fig. 280.

horizontal de proyeccion, las bases serán  $aA = ka'$ ,  $bB = gb'$ , perpendiculares á  $ab$ , y uniendo  $A$  con  $B$ ,  $AB$  es la recta del espacio en su verdadera magnitud.

Podemos observar que el plano rebatido  $abAB$ , no es más que el proyectante vertical de la recta.

Si por el punto  $A$  trazamos la recta  $AB'$  paralela á  $ab$ , quedará formado el triángulo rectángulo  $ABB'$ , del que conocemos  $AB' = ab$ ,  $BB' = fb'$ . Dicho triángulo rectángulo es muy fácil de construir en el plano vertical; para ello se traza por el punto  $a'$  la recta  $a'f$  paralela á la línea de tierra, y llevando sobre ella prolongada la distancia  $fa'' = ba$ , la recta  $b'a'' = AB$ , es la recta del espacio en su verdadera magnitud.

3.º Por un punto dado, trazar una recta paralela á otra.

Debiendo ser las proyecciones de estas dos rectas paralelas, para resolver el problema bastará por las proyecciones ( $a$  y  $a'$ ) del punto dado trazar rectas respectivamente paralelas á las proyecciones de la recta dada.

4.º Construir las trazas de un plano que pasa por tres puntos dados. (Fig. 281)

Sean los tres puntos dados ( $a, a'$ ) ( $b, b'$ ) ( $c, c'$ ), debiendo es-

tos puntos estar contenidos en el plano, tambien lo estarán las rectas que los unen, y las trazas de estas rectas serán puntos

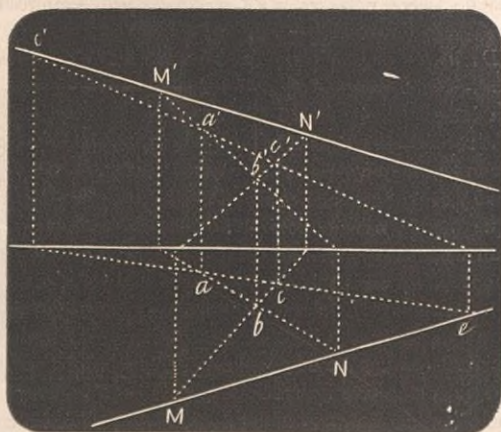


Figura 281.

de las trazas del plano. Luego si hallamos las trazas  $N$ ,  $M'$  de la recta  $ab$ ,  $a'b'$ , y las de la recta  $bc$ ,  $b'c'$ , que son  $M'$ ,  $N'$ , las rectas  $M'N'$  y  $MN$  son las trazas del plano.

Como comprobacion de que la construccion gráfica está bien ejecutada, pueden hallarse las trazas  $e$ ,  $e'$ , de la recta  $ac$ ,  $a'c'$ , que deben ser puntos de la traza del plano.

5.º **Hallar las trazas de un plano que pasa por un punto y una recta.**

6.º **Hallar las trazas de un plano que pasa por dos rectas paralelas.**

Estos dos problemas se resuelven de un modo análogo al problema 4.º

7.º **Por un punto dado trazar un plano paralelo á otro dado.** (Fig. 282)

Sean el plano  $NMN'$  y el punto  $(a, a')$ . Como los dos planos son paralelos, sus trazas horizontales y verticales serán respectivamente paralelas; luego bastaria conocer un punto de cada una de las trazas del plano desconocido.



Para ello hagamos pasar por el punto dado una paralela á la traza horizontal del plano conocido, esta recta estará contenida en el plano que se quiere hallar, y sus proyecciones serán paralelas á las de dicha traza horizontal MN, que son esta recta y la línea de tierra; por consiguiente, si por el punto ( $a, a'$ ) se trazan la recta  $ab$  paralela á MN y la  $a'b'$  paralela á la línea de tierra, estas serán las proyecciones de una recta paralela á MN y por tanto al plano NMN', y como dicha recta está contenida en el plano cuyas trazas se quieren construir, la traza vertical  $b'$  será un punto de la traza vertical del plano.

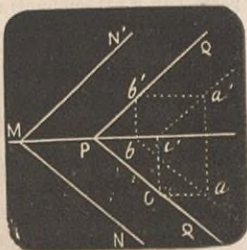


Fig. 282.

De un modo análogo si por el punto ( $a, a'$ ) se tira la recta ( $ac, a'c'$ ) paralela á la MN', su traza horizontal  $c$  será un punto de la traza horizontal del plano buscado. Luego trazando por los puntos  $b'$  y  $c$  las rectas PQ' y PQ respectivamente á MN' y MN, el plano quedará determinado.

Si la construcción está bien hecha, las dos trazas del plano deben encontrarse en un mismo punto P de la línea de tierra.

**8.º Dados dos planos, construir la proyección de su comun intersección. (Fig. 283)**

Sean los dos planos NMN' y QPQ', cuyas trazas verticales se cortan en  $b'$  y las horizontales en  $a$ ; estos puntos evidentemente pertenecen á la comun intersección y además son las trazas de esta recta: luego si bajamos desde  $b'$  y  $a$  perpendiculares  $b'b$

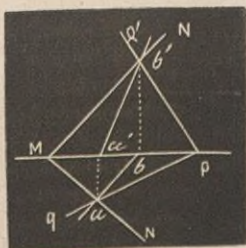


Fig. 283.

y  $aa'$  á la línea de tierra, las rectas  $a'b'$  y  $ab$  son las proyecciones de la comun intersección de los dos planos.

**9.º Hallar la intersección de una recta con un plano. (F. 284)**

Sea la recta ( $ab, a'b'$ ) y el plano NMN', si consideramos el plano vertical que ha servido para determinar la proyección horizontal  $ab$  de la recta, sus trazas serán la misma recta  $ab$

y una perpendicular  $b'n'$  á la línea de tierra. Este plano cortará al propuesto en una línea que contendrá el punto en que la recta  $(ab, a'b')$  encuentra al plano  $NMN'$ .

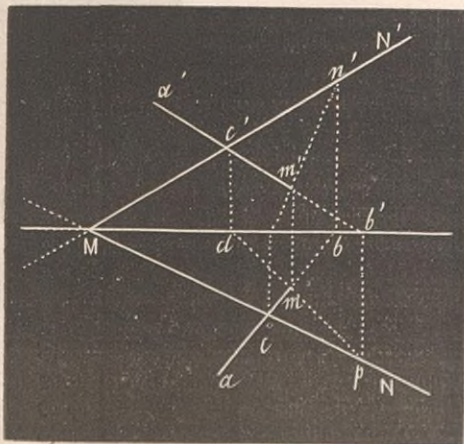


Figura 284.

Luego hallando la proyección vertical  $n'm'$  de la común intersección de los dos planos, el punto  $m'$  es la proyección vertical del punto en que la recta  $(ab, a'b')$  encuentra al plano dado, y por tanto su proyección horizontal es  $m$ .

Para comprobar que está la construcción bien hecha, se

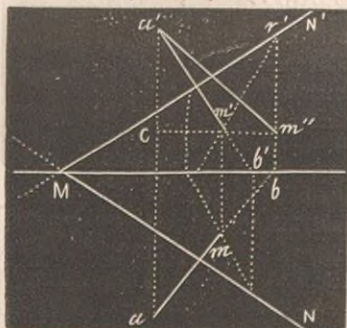


Fig. 285

puede hallar la proyección horizontal  $dp$  de la intersección del plano que proyecta la recta en el vertical de proyección con el plano dado; y esta proyección horizontal debe pasar por el punto  $m$ .

10. Dado un punto fuera de un plano hallar la distancia de este punto al plano. (Fig. 285.)

Sea el punto  $(a, a')$  y

el plano  $NMN'$ , para hallar la distancia del punto al plano bastará bajarle una perpendicular hasta que encuentre á dicho plano.

Pero sabemos que si un plano y una recta son perpendiculares entre sí, las proyecciones de la recta son perpendiculares á las trazas del plano; luego las rectas  $ab, a'b'$ , perpendiculares respectivamente á  $MN$  y  $MN'$  son las proyecciones de la recta.

Hallemos ahora la interseccion de la recta  $(ab, a'b')$  con el plano  $NMN'$  [*Problema anterior*], y  $am, a'm'$  serán las proyecciones de la perpendicular al plano levantado hasta su punto de encuentro con el plano. Su verdadera magnitud  $a'm''$  se hallará por el problema 2.º

Para comprobar si la construccion está bien ejecutada, puede hallarse la interseccion del plano que proyecta la recta verticalmente, cuyas proyecciones deben pasar por el punto  $(m, m')$ .

**11. Dadas las proyecciones de una recta, hallar los ángulos que forma con los planos de proyeccion. (Fig. 286)**

Sea la recta  $(ab, a'b')$  hallaremos sus trazas  $r$  y  $r'$ . Sabemos que el ángulo que forma una recta con un plano es el que forma con su proyeccion sobre él; luego el ángulo que for-

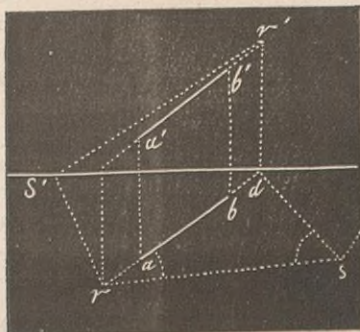


Fig. 286.

ma la recta del espacio con el horizontal de proyeccion será el que forma dicha recta con  $ab$ ; pero observemos que la recta del espacio forma con  $rd$  y con  $dr'$  un triángulo rectángulo del que conocemos los catetos que son estas rectas. Luego si rebatimos este triángulo rectángulo en el plano horizontal, que será  $rd s$ , el ángulo  $drs$  es el que forma la recta con el plano horizontal; de un modo análogo se halla el ángulo que la recta forma con el vertical de proyeccion.

**12. Dadas las proyecciones de dos rectas, hallar su más corta distancia. (Fig. 287)**



Sabemos [*Geom. problema XLVII*] cuales son las construcciones que hay que emplear para resolver este problema, y sólo se trata de realizar estas construcciones por medio de los principios de la *Geometría descriptiva*; y cada una de ellas es

fácil de ejecutar, pues constituye uno de los problemas que hemos resuelto.

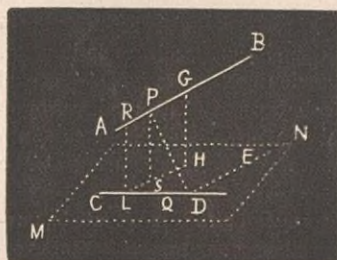


Fig. 287.

Así, siendo las rectas AB y CD (que se darán conocidas por sus proyecciones) por un punto de una de ellas se trazará una paralela DE á la otra. [*Prob. 3.º*]

Se construirá el plano de las dos rectas CD y DE [*Problema 4.º*]

Desde un punto cualquiera de AB se bajará una perpendicular á este plano, determinando el pié de esta perpendicular. [*Prob. 10.*]

Por este pié H se trazará una paralela á la DE [*Prob. 3.º*]

Y desde el punto L en que esta paralela encuentre á la CD se trazará la paralela RL á GH, y por consiguiente perpendicular al plano MN, cuya paralela RL es la recta pedida.

## CAPÍTULO V.

### EJERCICIOS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO. (\*)

#### TEOREMAS.

1. Cuando tres rectas que pasan por el mismo punto son dos á dos perpendiculares entre sí, **cada una de ellas es perpendicular al plano de las otras dos y los tres planos que terminan son perpendiculares entre si.**

2. Dos rectas paralelas **forman ángulos iguales con un mismo plano.**

(\*) Véase la nota de la página 168.

3. Dos planos paralelos **forman ángulos iguales con un mismo plano.**

4. El plano bisector de un ángulo diedro es el **lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de sus caras**

5. El plano que pasa por la bisectriz de un ángulo perpendicular al plano de este ángulo, es el **lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de sus lados.**

6. Si dos prismas son semejantes, las **secciones perpendiculares á las aristas laterales son polígonos semejantes.**

7. **Dos pirámides son semejantes**, cuando todas sus aristas son paralelas respectivamente y dirigidas en el mismo sentido.

8. El área lateral del cilindro recto circunscripto á la esfera, es **igual al área de la esfera.**

9. El volúmen del cilindro recto circunscripto á la esfera, es **al de la esfera como 3 es á 2.**

10. Si los diámetros de cuatro esferas son proporcionales á los números 3, 4, 5 y 6, el **volúmen de la mayor es igual á la suma de los volúmenes de las otras tres.**

## PROBLEMAS.

1. **¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias á dos planos paralelos están en una relacion constante  $m : n$ ?**

2. **¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de las aristas de un triedro?** [Teor. 5.º]

3. **¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de las caras de un triedro?** [Teor. 4.º]

4. El volúmen de un tetráedro regular es  $148\text{m}^3$ , **¿cuál será el valor de su arista?**

5. **Determinar el volúmen de un tronco de cono recto**, siendo el radio de la base  $12\text{m}$ , el de la seccion paralela á la base  $9\text{m}$  y la altura  $8\text{m}$ . [Teor. CCLXVII.]

6. **Determinar el valor del lado de un cubo** que su volúmen sea duplo del de otro conocido.

7. **Determinar el área de la esfera terrestre**, suponiéndola esférica, sabiendo que un arco de círculo máximo de  $9^\circ$  es 1.000 kilómetros. [Teor. CCLXI.]

8. **Hallar el área de un triángulo esférico**, suponiendo que sus tres ángulos son  $A=87^\circ$ ,  $B=76^\circ$  y  $C=52^\circ$ , y el radio de la esfera á que pertenece  $125^m$  [*Teor.* CCLXIV.]

9. **Determinar el área de una zona esférica**, que su altura sea igual á la mitad del radio de la esfera, y el valor del cuadrante del círculo máximo de esta esfera igual á  $88^m$ . [*Teorema* CCLX.]

10. **Hallar el volúmen de un sector esférico**, cuya altura sea igual á un tercio del radio, siendo el área de la esfera á que pertenece  $68^m^2$ .

FIN DE LA GEOMETRIA.



TRIGONOMETRIA RECTILINEA Y ESFERICA.

## ADVERTENCIA A LOS ALUMNOS.

---

Los teoremas, problemas, fórmulas y párrafos de la Trigonometría, llevan una numeración correlativa desde el principio hasta el fin, con el objeto de facilitar las continuas citas.

Cuando las referencias pertenezcan á los teoremas, problemas ó párrafos de la Geometría, se indicará así; en otro caso se entenderá que son de la Trigonometría.

# TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

---

## LIBRO I.

### LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

---

## CAPÍTULO I.

### NOCIONES PRELIMINARES.

---

1. La *Trigonometría* tiene por objeto la resolución numérica de los triángulos, es decir, el determinar los valores numéricos de sus ángulos y lados por medio de un número de datos suficiente.

2. La *Trigonometría rectilínea* se ocupa de los triángulos rectilíneos, y la *esférica* de la resolución de los triángulos esféricos.

3. Sabemos por la Geometría que un triángulo rectilíneo se puede construir dados tres de sus seis elementos, con tal que en ellos entre un lado; pero las construcciones gráficas que se ejecutan para resolver estos problemas, no pueden alcanzar gran exactitud, atendiendo á la necesaria imperfección de los instrumentos que para ellas se emplean; no sucede así en la *resolución trigonométrica* de los triángulos, en la que los datos y las incógnitas están ligadas por ecuaciones que rigurosamente se deducen, y los cálculos se fundan en las leyes generales de la cantidad, que son de una exactitud completa.

4. El problema general de la resolución numérica ó trigonométrica de los triángulos quedaria resuelto, si se pudiesen hallar las leyes ó relaciones que ligan los valores



de los lados de un triángulo cualquiera con sus ángulos; pues estas leyes expresadas algebraicamente nos darian fórmulas ó ecuaciones, que nos servirian para el fin expresado; pero las relaciones entre los lados de un triángulo y sus ángulos son muy complicadas; así es que los géometras en vez de los ángulos ó de los arcos que los miden, han introducido ciertas líneas rectas auxiliares, cuyos valores dependen del que tenga el ángulo y recíprocamente, siendo sus relaciones con los lados del triángulo sencillas, y por tanto fáciles de traducir en fórmulas. Estas líneas auxiliares se llaman *líneas trigonométricas*, y á las relaciones que ligan estas con sus arcos *funciones circulares*.

5. Las líneas trigonométricas de un arco cualquiera, son: *seno*, *tangente*, *secante* y *seno-verso*.

6. Se llama *seno* de un arco, ó de su ángulo correspondiente, *la perpendicular bajada desde un extremo del arco al radio ó diámetro que pasa por el otro extremo*.

7. *Tangente* de un arco es *la parte de tangente geométrica tirada desde un extremo del arco hasta el radio ó diámetro prolongado que pasa por el otro extremo*.

8. *Secante* de un arco, ó de su ángulo correspondiente, es *la recta trazada desde el centro del arco hasta la extremidad de la tangente*.

9. *Seno-verso* de un arco, es *la parte de radio comprendida entre el pié del seno y la extremidad de dicho radio*.

10. Se llaman *coseno*, *cotangente*, *cosecante* y *coseno-verso* de un arco, el seno, tangente, secante y seno-verso de su complemento, entendiéndose por complemento de un arco, ó de su ángulo, lo que le falta ó sobra para valer un cuadrante. Como la idea de ángulos ó arcos complementarios es recíproca, se deduce que el seno, tangente, secante y seno-verso de un ángulo, son respectivamente coseno, cotangente, cosecante y coseno-verso, de su complemento y *vice versa*.

11. De manera que las líneas trigonométricas de un arco son ocho, á saber: *seno*, *tangente*, *secante*, *seno-verso*, *coseno*, *cotangente*, *cosecante* y *coseno-verso*: en todo rigor no hay más que las cuatro primeras, pues las otras cuatro pertenecen al arco complementario, y por eso se llaman *co-líneas trigonométricas* del arco en cuestion. En el día tienen poquísimo uso la secante y el seno-verso, y por tanto la cosecante y el coseno-verso, que son líneas trigonométricas de igual naturaleza que las dos anteriores: de modo que en definitiva son importantes para la resolución de los triángulos dos líneas trigonométricas que son el seno y la tangente y sus co-líneas, esto es, el coseno y la cotangente.

12. Dadas estas definiciones, indiquemos las líneas trigonométr.ª de los arcos AM, ABM', ABM'' y ABM''' (F. 288)

| Arco AM.           | Arco ABM'           | Arco ABM''.         | Arco ABM'''.        |
|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| seno..... = MC     | seno..... = M'C'    | seno..... = M''C'   | seno..... = M'''C   |
| tangente.... = AT  | tangente.... = A T' | tangente.... = A T' | tangente.... = A T' |
| secante..... = OT  | secante..... = OT'  | secante..... = OT   | secante..... = OT'  |
| seno verso... = AC | seno verso.. = A'C' | seno verso.. = A'B' | seno verso... = AC  |
| coseno = MD = OC   | coseno = M'D = O C' | coseno = M'D = OC'  | coseno = M'D = OC   |
| cotangente... = BR | cotangente... = BR' | cotangente... = BR  | cotangente... = BR' |
| cosecante ... = OR | cosecante.... = OR' | cosecante.... = OR  | cosecante.... = OR' |
| coseno-verso = BD  | coseno verso = BD   | coseno-verso = A'C' | coseno-verso = B'D' |

Puede observarse que el coseno es siempre igual á la distancia que hay entre el pié del seno y el centro. (\*)

13. Al considerar los arcos, así como sus líneas trigonométricas, debemos tener presente no sólo sus valores absolutos, sino

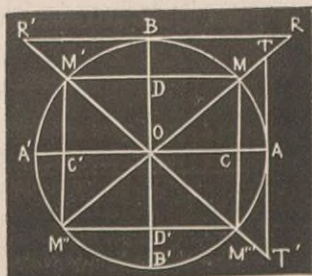


Fig. 288.

(\*) Conviene el que los principiantes se ejerciten mucho en

tambien sus signos; es decir, la posicion en que se encuentran, haciendo para ello uso del teorema de Descartes; esto es, *afectar con signos contrarios las magnitudes (líneas trigonométricas, arcos, &c.) que se cuentan en sentidos opuestos*. De este modo las fórmulas adquieren más generalidad.

De modo que si convenimos en considerar como positivos los arcos contados en la direccion  $AMM'M''M'''$  (Fig. 288), serán negativos los arcos contados en la direccion  $AM'''M''M'M$ ; y si consideramos como positivas las líneas trigonométricas de los arcos del primer cuadrante, serán negativas las líneas trigonométricas que tengan posicion contraria.

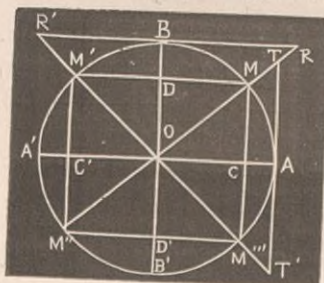


Fig. 288.

Así, por ejemplo, los valores absolutos del seno, tangente, coseno y cotangente del arco  $ABM'''$ , son respectivamente  $M'''C$ ,  $AT'$ ,  $CO$  y  $BR'$ ; pero atendiendo á sus signos serán  $-M'''C$ ,  $-AT'$ ,  $OC$  y  $-BR'$ ; porque el seno,

la tangente y la cotangente se hallan en direcciones opuestas á las de los arcos del primer cuadrante.

### TEOREMA I.

*El seno de un arco es mitad de la cuerda del arco duplo.* (Fig. 288)

Sea el arco  $AM$ , si prolongamos el seno hasta que encuentre á la circunferencia en  $M'''$ , por ser  $OA$  perpendicular á  $MM'$ , tendremos que [Geom. teor. LX.]

seno  $MC = \frac{1}{2}$  cuerda  $MM'''$  y arco  $AM = \frac{1}{2}$  arco  $MA M'''$ .

trazar las líneas trigonométricas de diferentes arcos, para que adquieran facilidad en *ver pronto* dichas líneas en todas las posiciones y magnitudes de los arcos.



## TEOREMA II.

*Los cosenos de dos arcos iguales y de signos contrarios son iguales, y los senos, tangentes y cotangentes son iguales y de signos contrarios.*

Sean los dos arcos  $AM$  y  $AM'''$  que suponemos iguales en magnitud, pero en direccion opuesta á partir del punto  $A$ , por el que suponemos que se empiezan á contar los arcos, y que en tal concepto se llama *origen de los arcos*.

Si trazamos las líneas trigonométricas de estos arcos, vemos que el coseno  $OC$  es comun á los dos arcos, los senos  $M'''C$  y  $MC$  son iguales en magnitud por ser iguales los triángulos rectángulos  $OMC$  y  $OM'''C$  [*Geom. teorema XXIII*], pero se hallan en direccion opuesta; lo mismo sucede á las tangentes  $AT$  y  $AT'$  y á las cotangentes  $BR$  y  $BR'$ , por ser iguales los triángulos rectángulos  $OAT$  y  $OAT'$ ,  $OBR$  y  $OBR'$ .

Si llamamos  $a$  al arco  $AM$ , el  $AM'''$  se llamará  $-a$ , y segun lo demostrado tendremos

$$\left. \begin{array}{ll} \text{sen } (-a) = -\text{sen } a. & \cos (-a) = \cos a. \\ \text{tang } (-a) = -\text{tang } a. & \cot (-a) = -\cot a. \end{array} \right\} [1]$$

14. De las definiciones de las líneas trigonométricas de un arco y de las de su complemento (10) se deduce, atendiendo al teorema anterior, que

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } (90^\circ - a) = \cos a \\ \cos (90^\circ - a) = \text{sen } a \\ \text{tang } (90^\circ - a) = \cot a \\ \cot (90^\circ - a) = \text{tang } a \end{array} \right\} [2]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } (90^\circ + a) = \cos (-a) = \cos a \\ \cos (90^\circ + a) = \text{sen } (-a) = -\text{sen } a \\ \text{tang } (90^\circ + a) = \cot (-a) = -\cot a \\ \cot (90^\circ + a) = \text{tang } (-a) = -\text{tang } a \end{array} \right\} [3]$$



Supongamos (Fig. 288), que siendo A el origen de los arcos y contándose los positivos en el sentido ABA'B'...., el arco se reduce al punto A; es decir, que sus dos extremidades coinciden, y por tanto su valor es cero. Su seno y su tangente se reducen á cero; su coseno será OB, es decir, el radio y su cotangente será la tangente geométrica AT hasta que encuentre al radio OB; pero como estas dos rectas son paralelas, no se encontrarán si no es en el infinito. Tenemos, pues, que si el arco = 0

$$\text{sen } 0 = 0, \quad \text{cos } 0 = R, \quad \text{tang } 0 = 0, \quad \text{cot } 0 = \infty.$$

Si el arco vá creciendo desde A hasta B, el seno y la tangente crecen y el coseno y la cotangente disminuyen, siendo todos positivos. (13)

Si el arco es AB, es decir, igual á un cuadrante, es fácil ver que

$$\text{sen } 90^\circ = R, \quad \text{cos } 90^\circ = 0, \quad \text{tang } 90^\circ = \infty, \quad \text{cot } 90^\circ = 0.$$

Si creciendo siempre el arco llega á un punto M' comprendido entre B y A', es decir, que el arco vá creciendo de  $90^\circ$  á  $180^\circ$ , los valores absolutos del seno y de la tangente disminuyen, y los del coseno y la cotangente aumentan. Respecto á los signos, el seno es positivo; el coseno, la tangente y la cotangente son negativos.

Si el arco es ABA', es decir, vale dos cuadrantes, tenemos que

$$\text{sen } 180^\circ = 0, \quad \text{cos } 180^\circ = -R, \quad \text{tang } 180^\circ = 0, \quad \text{cot } 180^\circ = -\infty.$$

Si el arco vá aumentando desde A' hasta B', esto es, desde  $180^\circ$  á  $270^\circ$ , el seno y la tangente aumentan (\*) y el coseno y la cotangente disminuyen; siendo positivas las

---

rectos, y por tanto, el arco que le mide nunca puede llegar á valer média circunferencia; pero las fórmulas trigonométricas no sólo se aplican para la resolución de los triángulos, sino también para otras cuestiones en las que se consideran arcos positivos ó negativos de todas magnitudes

(\*) Siempre nos referimos á los valores absolutos.



tangentes y las cotangentes, y negativos el seno y coseno.

Si el arco llega al punto B', es decir, vale tres cuadrantes ó  $270^\circ$

$\text{sen } 270^\circ = -R$ ,  $\text{cos } 270^\circ = 0$ ,  $\text{tang } 270^\circ = -\infty$ ,  $\text{cot } 270^\circ = 0$ .

Si el arco vá aumentando desde B' hasta A, ó sea desde  $270^\circ$  á  $360^\circ$ , su seno y su tangente disminuyen, y aumentan su coseno y su cotangente; siendo positivo el

coseno, y negativos el seno, la tangente y la cotangente.

Por último, si el arco llega á valer una circunferencia, es decir, empieza en A y concluye en el mismo punto, sus líneas trigonométricas son iguales á las del arco  $= 0$ .

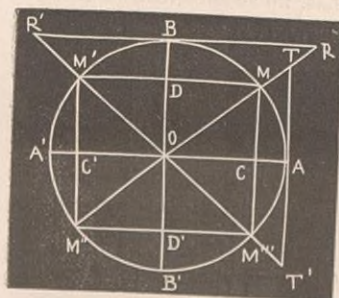


Fig. 288.

Es evidente que para los arcos mayores que una circunferencia, los valores de las líneas trigonométricas van siendo iguales á las de los arcos menores que una circunferencia.

Para fijar mejor estas ideas damos el siguiente cuadro:

| Arco $= 0^\circ$ | ARCO AUMENTA<br>de $0^\circ$ á $90^\circ$ | ARCO DE $90^\circ$<br>á $180^\circ$ | ARCO DE $180^\circ$<br>á $270^\circ$ | ARCO DE $270^\circ$<br>á $360^\circ$ |
|------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| sen. $= 0$       | sen. crec. de $0$ á $R$                   | sen. dis. de $R$ á $0$              | sen. crec. de $0$ á $-R$             | sen. dis. de $-R$ á $0$              |
| tag. $= 0$       | tag. „ de $0$ á $\infty$                  | tag. „ de $\infty$ á $0$            | tag. „ de $0$ á $-\infty$            | tag. „ de $-\infty$ á $0$            |
| cos. $= R$       | co. dis. de $R$ á $0$                     | cos. crec. de $0$ á $-R$            | cos. dis. de $-R$ á $0$              | cos. aum. de $0$ á $R$               |
| cot. $= \infty$  | cot. „ de $\infty$ á $0$                  | cot. „ de $0$ á $-\infty$           | cot. „ de $-\infty$ á $0$            | cot. „ de $0$ á $\infty$             |

17. Podemos observar: 1.º Que el mayor valor absoluto del seno ó del coseno es el radio y el menor es cero. 2.º Que el mayor valor absoluto de la tangente ó de la cotangente es  $\infty$ , y el menor es cero. 3.º Que cuando crece

una línea trigonométrica de un arco, disminuye su co-línea y recíprocamente; de manera que cuando el seno es cero (que es el mínimo valor) el coseno es el radio (que es el máximo) y recíprocamente; lo mismo podemos decir de la tangente y de la cotangente. 4.º Que los arcos que están en el primer cuadrante tienen todas sus líneas trigonométricas positivas; los del segundo (\*) tienen positivo el seno, y negativos el coseno, la tangente y la cotangente; los del tercero positivos la tangente y la cotangente, y negativos el seno y el coseno; y los del cuarto cuadrante, positivo el coseno y negativos el seno, la tangente y la cotangente.

18. Si observamos que en el primer cuadrante, esto es, de  $0^\circ$  á  $90^\circ$ , las líneas trigonométricas pasan por todos sus estados de magnitud, creciendo el seno desde 0 al radio y la tangente desde 0 hasta el  $\infty$ , y que estos crecimientos son progresivos á medida que el arco crece; podemos asegurar que dada una cantidad cualquiera positiva desde 0 hasta el  $\infty$ , *siempre hay en el primer cuadrante un arco tal que el valor numérico de su tangente, ó de su cotangente, es igual á dicha cantidad*; y que dada una cantidad positiva comprendida desde 0 al valor del radio, *siempre existe en el primer cuadrante un arco tal que el valor de su seno, ó de su coseno, es igual á esta cantidad*.

Es evidente, que si á un arco se le añade un número cualquiera de circunferencias positivas ó negativas, esto es, contadas en la direccion ABA'.... ó AB'A'... los extremos de los nuevos arcos que resultan serán iguales, y por tanto, sus líneas trigonométricas serán iguales. De modo que si llamamos  $a$  el valor de un arco cualquiera, tendremos

---

(\*) Se entiende que empiezan en el origen y terminan en el primero, segundo cuadrante, &c.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(2k\pi + a) &= \operatorname{sen} a. & \operatorname{tang}(2k\pi + a) &= \operatorname{tang} a \\ \cos(2k\pi + a) &= \cos a. & \cot(2k\pi + a) &= \cot a \end{aligned} \right\} [5]$$

Suponiendo el radio igual á la unidad y á  $k$  un número entero cualquiera, positivo, negativo ó nulo; de manera que hay una infinidad de arcos que tienen las mismas líneas trigonométricas.

### CAPÍTULO III.

#### RELACIONES ENTRE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE UN ARCO.

19. Tomemos á partir del punto A (Fig. 288) un arco

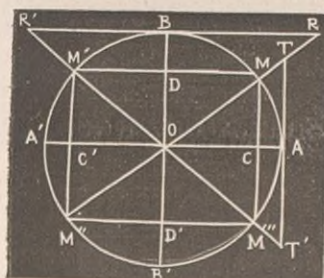


Fig. 288.

AM =  $a$ , positivo y menor que un cuadrante, y tracemos sus líneas trigonométricas. Llamemos  $r$  al radio del círculo.

En el triángulo rectángulo OMC tenemos

$$\begin{aligned} MC^2 + OC^2 &= OM^2, \\ \text{ó bien,} \quad \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a &= r^2. \quad [6] \end{aligned}$$

Los triángulos semejantes OCM y OAT, nos dan las relaciones

$$\begin{aligned} OA : OC :: AT : CM :: OT : OM, \\ \text{ó bien,} \quad r : \cos a :: \operatorname{tang} a : \operatorname{sen} a :: \sec a : r. \end{aligned}$$

De las que se deducen las dos ecuaciones

$$\operatorname{tang} a = \frac{r \operatorname{sen} a}{\cos a} [7] \quad \text{y} \quad \sec a = \frac{r^2}{\cos a} [8]$$

Los dos triángulos semejantes OBR y ODM, nos dan las relaciones

$$OB : OD :: BR : DM :: OR : OM;$$



es decir,

$$r : \operatorname{sen} a :: \cot a : \cos a :: \operatorname{cosec} a : r.$$

De las que se deducen las dos ecuaciones

$$\cot a = \frac{r \cos a}{\operatorname{sen} a} \quad [9] \quad \text{y} \quad \operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\operatorname{sen} a} \quad [10]$$

Tenemos evidentemente:

$$AC = OA - OC \quad \text{y} \quad BD = OB - OD.$$

Y substituyendo estas líneas por sus valores, nos darán las dos ecuaciones

$$\operatorname{sen} \operatorname{ver} a = r - \cos a \quad [11] \quad \text{y} \quad \cos \operatorname{ver} a = r - \operatorname{sen} a \quad [12]$$

20. Las fórmulas que acabamos de encontrar [6], [7], [8], [9], [10], [11] y [12], en el supuesto de ser el arco positivo y menor que un cuadrante, son generales; esto es, sirven para todos los casos posibles cualquiera que sea su magnitud. En efecto, cualquiera que sea el arco (no siendo múltiplo de un cuadrante), existirán las mismas relaciones entre los lados de los triángulos que nos han servido para establecer dichas fórmulas; luego entre los valores absolutos de las líneas trigonométricas siempre existirán las mismas relaciones. Nos falta probar que estas fórmulas son generales, aun teniendo en cuenta los signos de las líneas trigonométricas.

Supongamos un arco que termina en el segundo cuadrante, sabemos que en tal caso (16) el seno es positivo y el coseno negativo.

La fórmula [6] se verificará desde luego. Sustituyendo ahora en las fórmulas [7] y [9] de la tangente y la cotangente, resultará

$$\operatorname{tang} a = \frac{r \operatorname{sen} a}{-\cos a}, \quad \cot a = \frac{-r \cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

Es decir, que la tangente y cotangente son negativas, lo que está conforme con lo que ya sabemos.

De igual manera se puede comprobar la generalidad de las fórmulas para todos los arcos.

Si el arco es cero, ó un cuadrante, ó un múltiplo de cuadrante, los triángulos dejan de existir, puesto que la tangente ó la cotangente es paralela al radio ó diámetro del origen. Parece, pues, que para estos casos las fórmulas no deben satisfacer. Sin embargo, vamos á demostrar que todavía son aplicables, quedando con esto probada su generalidad.

Supongamos, por ejemplo, que el arco es  $a=90^\circ=AB$  (Fig. 288). Sabemos (16) que

$$\text{sen } 90^\circ = r. \quad \text{cos } 90^\circ = 0. \quad \text{tang } 90^\circ = \infty. \quad \text{cot } 90^\circ = 0.$$

Si sustituimos en las fórmulas [6], [7], [8], [9], [10], [11] y [12], estos valores, resultarán los siguientes:

$$0^2 + r^2 = r^2 \quad (\text{Una identidad.})$$

$$\infty = \frac{r \times r}{0} = \infty \quad (\text{Id. id.})$$

$$\text{sec } 90^\circ = \frac{r^2}{0} = \infty. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Siendo la tangente infinita tiene que} \\ \text{serlo la secante.} \end{array} \right.$$

$$0 = \frac{r \times 0}{r} = 0. \quad (\text{Una identidad.})$$

$$\text{cosec } 90^\circ = \frac{r^2}{r} = r. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En efecto, siendo la cotangente el} \\ \text{punto B, } OB=r \text{ es la secante.} \end{array} \right.$$

$$\text{sen ver } 90^\circ = r - 0 = r. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En efecto, siendo } OB \text{ el seno del arco} \\ \text{de } 90^\circ, \text{ el seno-verso es } OA=r. \end{array} \right.$$

$$\text{cos ver } 90^\circ = r - r = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Siendo el punto B el coseno, el cose-} \\ \text{no-verso se reduce á cero.} \end{array} \right.$$

Luego estas fórmulas quedan satisfechas para el arco de  $90^\circ$ .

De un modo análogo se demostrará la generalidad de las fórmulas para dos, tres, ó cuatro cuadrantes.

21. Las relaciones entre las líneas trigonométricas de

un arco, que hemos determinado, componen un sistema de siete ecuaciones distintas, formadas por las ocho líneas trigonométricas y el radio, que se supone conocido; de manera que dado el valor de una de ellas, resultará un sistema de siete ecuaciones con igual número de incógnitas, pudiéndose determinar el valor de estas en *funcion* (\*) del radio y de la línea trigonométrica conocida.

Siendo ocho las líneas trigonométricas, pueden resolverse ocho problemas distintos, de los que para que sirva de ejemplo, ponemos el siguiente:

### PROBLEMA I.

*Conocida la tangente de un arco, hallar los valores de las otras líneas trigonométricas en funcion de dicha tangente.*

Para resolver este problema bastará seguir uno cualquiera de los métodos de eliminacion conocidos; pero la sencillez de las fórmulas permite simplificar mucho la eliminacion. En efecto, si determinamos los valores del seno y del coseno, el problema está resuelto; porque todas las demás líneas están en dichas fórmulas en funcion del seno y del coseno.

Vemos que las ecuaciones [6] y [7] contienen á la tangente y al seno y coseno. Elevando la [7] al cuadrado tendremos

$$\operatorname{tang}^2 a = \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a},$$

que se puede poner bajo la forma

$$\operatorname{tang}^2 a : r^2 :: \operatorname{sen}^2 a : \cos^2 a.$$

De esta proporcion resultan las siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tag}^2 a : r^2 + \operatorname{tag}^2 a :: \operatorname{sen}^2 a : \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2 \quad (\text{segun la fór. [6]}) \\ r^2 + \operatorname{tag}^2 a : r^2 :: \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2 : \cos^2 a. \end{aligned}$$

---

(\*) Se dice que una cantidad está en *funcion* de otra, cuando su valor depende del de esta otra.



De la primera proporcion resulta despejando

$$\operatorname{sen} a = \frac{r \operatorname{tang} a}{\pm \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a}} \quad [14]$$

De la segunda id. id.

$$\cos a = \frac{r^2}{\pm \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a}} \quad [15]$$

Sustituyendo el valor del coseno en la [8] dará

$$\sec a = \pm \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a} \quad [16]$$

Idem en la [9] los valores del seno y coseno,

$$\cot a = \frac{r^2}{\operatorname{tang} a} \quad [17]$$

Idem en la [10] el valor del seno,

$$\operatorname{cosec} a = \frac{\pm r \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a}}{\operatorname{tang} a} \quad [18]$$

Idem en la [11] el valor del coseno,

$$\operatorname{sen} \operatorname{ver} a = r - \frac{r^2}{\pm \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a}} \quad [19]$$

Idem en la [12] el valor del seno,

$$\cos \operatorname{ver} a = r - \frac{r \operatorname{tang} a}{\pm \sqrt{r^2 + \operatorname{tang}^2 a}} \quad [20]$$

Que son las fórmulas de todas las líneas trigonométricas de un arco en funcion de su tangente. Los dobles signos que llevan provienen de la resolucion de las ecuaciones de segundo grado que sirvieron para determinar el seno y coseno. De ellas se tomarán los que correspondan, segun el valor que tenga el arco. (16)

[22. Con el objeto de simplificar las fórmulas, se supone que el radio es igual á la unidad, en lo que no hay inconveniente, pues que la unidad es una cantidad arbitraria. En este supuesto, las ecuaciones de las líneas trigonomé-

tricas de un arco, y estas mismas en funcion de la tangente se transforman así:

FUNCIONES CIRCULARES, SUPONIENDO EL RADIO IGUAL Á LA UNIDAD.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a &= 1 \\
 \text{tang } a &= \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a} \\
 \text{sec } a &= \frac{1}{\text{cos } a} \\
 \text{cot } a &= \frac{\text{cos } a}{\text{sen } a} \\
 \text{cosec } a &= \frac{1}{\text{sen } a} \\
 \text{sen ver } a &= 1 - \text{sen } a \\
 \text{cos ver } a &= 1 - \text{sen } a
 \end{aligned} \right\} [21]$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{sen } a &= \frac{\text{tang } a}{\pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}} \\
 \text{cos } a &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}} \\
 \text{sec } a &= \pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a} \\
 \text{cot } a &= \frac{1}{\text{tang } a} \\
 \text{cosec } a &= \frac{\pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}{\text{tang}^2 a} \\
 \text{sen ver } a &= 1 - \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}} \\
 \text{cos ver } a &= 1 - \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tang}^2 a}}
 \end{aligned} \right\} [22]$$

23. Si dada una fórmula en el supuesto de ser la unidad el radio, quisiéramos transformarla en otra en la que el radio fuera una cantidad cualquiera  $r$ , bastaría dividir cada línea trigonométrica por el radio; porque, en efecto, la relacion entre una línea trigonométrica de un arco y su radio será siempre constante; de modo que siendo  $a$  el arco que tiene por unidad el radio y  $a'$  otro arco de igual número de grados que el  $a$ , pero descrito con un radio  $r$ , siempre tendremos la relacion

$$\frac{\text{sen } a}{1} = \frac{\text{sen } a'}{r}, \quad \frac{\text{cos } a}{1} = \frac{\text{cos } a'}{r}, \quad \frac{\text{tang } a}{1} = \frac{\text{tang } a'}{r} \dots\dots$$

ó bien

$$\text{sen } a = \frac{\text{sen } a'}{r}, \quad \text{cos } a = \frac{\text{cos } a'}{r}, \quad \text{tang } a = \frac{\text{tang } a'}{r} \dots\dots$$

Por ejemplo, si quisiéramos transformar la fórmula hallada en el supuesto de ser el radio la unidad,

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a},$$

en su correspondiente suponiendo el radio igual á  $r$ , tendríamos

$$\frac{\text{tang } a}{r} = \frac{\frac{\text{sen } a}{r}}{\frac{\cos a}{r}},$$

de la que se deduce suprimiendo el divisor  $r$  de los dos términos del quebrado del segundo miembro y despejando

$$\text{tang } a = \frac{r \text{ sen } a}{\cos a} \text{ que es la fórmula [7] (*).}$$

## CAPÍTULO IV.

VALORES DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ARCOS PARTICULARES EN FUNCION DEL RADIO.

24. Sabemos [Teor. I] que el seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo; luego si el arco es de  $30^\circ$ , su seno será la mitad de la cuerda de  $60^\circ$ , ó sea la mitad del lado del exágono regular inscripto; por tanto

$$\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{r}{2} \quad [23]$$

$$\cos 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{r \sqrt{3}}{2} \text{ (Mitad del lado del triáng. equilátero.) } [24]$$

$$\text{tang } 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{r \text{ sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r \sqrt{3}}{3} \quad [25]$$

$$\cot 30^\circ = \text{tang } 60^\circ = \frac{r \cos 30^\circ}{\text{sen } 30^\circ} = r \sqrt{3} \quad [26] (**)$$

El complemento del arco de  $45^\circ$  es otro arco de  $45^\circ$ ; por consiguiente, el seno y coseno son iguales, así como la tangente y la cotangente.

(\*) Esto es lo que se llama *restablecer el radio* en una fórmula, ó *hacerla homogénea*, es decir, que todos sus términos tengan igual número de factores literales.

(\*\*) No teniendo importancia para la resolución de los triángulos las otras cuatro líneas trigonométricas, apenas nos ocuparemos de ellas en lo sucesivo.



De modo que tendremos

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ (Mitad del lado del cuadrado inscripto.) } [27]$$

$$\text{tang } 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{r \text{ sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} = r. [28]$$

Determinados los valores de las líneas trigonométricas de los arcos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $45^\circ$ , se pueden hallar los de sus arcos respectivamente suplementarios  $150^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $135^\circ$ , [Teor. III.] Así resulta que

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2} [29] \quad \text{tag } 135^\circ = -\text{tag } 45^\circ = -r [35]$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{r}{2} [30] \quad \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -r [36]$$

$$\text{tag } 120^\circ = -\text{tag } 60^\circ = -r\sqrt{3} [31] \quad \text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{r}{2} [37]$$

$$\cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{r\sqrt{3}}{3} [32] \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{r\sqrt{2}}{2} [38]$$

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2} [33] \quad \text{tag } 150^\circ = -\text{tag } 30^\circ = -\frac{r\sqrt{3}}{3} [39]$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{r\sqrt{2}}{2} [34] \quad \cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -r\sqrt{3} [40]$$

## CAPÍTULO V.

RELACIONES ENTRE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS  
DE VARIOS ARCOS.

### PROBLEMA II.

25. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y de la diferencia de dichos arcos.* (Fig. 289)

Sea un arco  $AB=a$ , y este arco mayor que  $CB=b$ ; será el arco  $AC=a+b$ . Si trazamos la perpendicular  $CM$  al radio  $OB$  prolongándola hasta  $C'$ , el arco  $AC'=a-b$ .

El seno  $a$  y  $\cos a$ , que se suponen conocidos, son las lí-

neas BD y OD; el seno  $b$  y cos  $b$ , que tambien se suponen conocidos, son CM y OM.

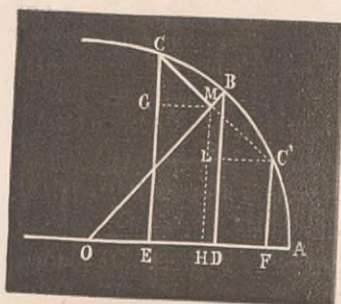


Fig. 289.

Ahora tracemos las rectas CE, MH y C'F, perpendiculares al radio OA, y las rectas GM y C'L, paralelas á dicho radio. Los dos triángulos rectángulos CGM y MLC', son iguales [Teorema XXIII, 1.º]; luego  $CG=ML$  y  $GM=LC'$ .

Observemos ahora que  $CE=\text{sen } (a+b)$ ,  $C'F=\text{sen } (a-b)$ ,  $OE=\text{cos } (a+b)$  y  $OF=\text{cos } (a-b)$ .

De modo que podemos establecer las siguientes igualdades

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } (a+b) &= CE = MH + CG \\ \text{sen } (a-b) &= C'F = MH - CG \\ \text{cos } (a+b) &= OE = OH - GM \\ \text{cos } (a-b) &= OF = OH + GM \end{aligned} \right\} (a)$$

En las que los valores que deseamos determinar están en funcion de las cuatro líneas MH, CG, OH y GM, luego si pudiéramos determinarlas en funcion del sen  $a$ , cos  $a$ , sen  $b$  y cos  $b$ , que son conocidas, así como el radio  $r$ , el problema estaria resuelto.

Los triángulos semejantes OMH y OBD, nos dan las proporciones

$$MH : \text{sen } a :: \text{cos } b : r. \quad OH : \text{cos } a :: \text{cos } b : r.$$

De las que se deducen las igualdades

$$MH = \frac{\text{sen } a \cos b}{r}, \quad OH = \frac{\text{cos } a \cos b}{r}.$$

Los dos triángulos CGM y OBD son semejantes [Geometría, teorema XCVII] y nos dan las proporciones

$$CG : \text{cos } a :: \text{sen } b : r. \quad GM : \text{sen } a :: \text{sen } b : r.$$

De donde resulta

$$CG = \frac{\cos a \sin b}{r} \quad \text{y} \quad GM = \frac{\sin a \sin b}{r}.$$

Sustituyendo estos valores en las igualdades (a) y suponiendo el radio igual á la unidad, resulta finalmente

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad [41]$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \quad [42]$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad [43]$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad [44]$$

26. Las fórmulas que acabamos de consignar están halladas en el supuesto de que la suma de los dos arcos es menor que un cuadrante; pero vamos á demostrar que son generales, y que por tanto son aplicables á todos los arcos. Dividiremos la demostracion en varios casos, fijándonos en las fórmulas [41] y [43], pues demostrada la generalidad de estas, fácilmente se demostrará la de las fórmulas [42] y [44]

**1.º caso.** Las fórmulas [41] y [43] se verifican siendo  $a$  y  $b$  positivos y menores que un cuadrante, y su suma mayor que un cuadrante.

Si llamamos  $a'$  y  $b'$  á los complementos de  $a$  y  $b$ , tendremos que

$$\sin a' = \cos a, \cos a' = \sin a, \sin b' = \cos b, \cos b' = \sin b,$$

$$\sin(a'+b') = \sin(a+b), \cos(a'+b') = -\cos(a+b).$$

Ahora como  $(a'+b') < 90^\circ$ , las fórmulas [41] y [43] se verificarán para los arcos  $a'$  y  $b'$ . Luego

$$\sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b'$$

$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

Pero sustituyendo en vez de estos valores sus correspondientes en funcion de las líneas trigonométricas de los arcos complementarios  $a$  y  $b$ , resulta

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

$$-\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b,$$



que son iguales á los [41] y [43], mudando el signo á los dos miembros de la segunda.

2.º caso. Si las fórmulas [41] y [43] son ciertas para dos arcos cualesquiera, tambien lo serán aumentando  $90^\circ$  á uno de dichos arcos.

Sabemos por las fórmulas [3], que

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } (90^\circ + a) = \cos (-a) = \cos a \\ \cos (90^\circ + a) = \text{sen } (-a) = -\text{sen } a \end{array} \right\} (a)$$

Luego por igual razon tendremos

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } (90^\circ + a + b) = \cos (a + b) \\ \cos (90^\circ + a + b) = -\text{sen } (a + b) \end{array} \right\} (b)$$

Por consiguiente, si tenemos por el supuesto que son ciertas las fórmulas

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{sen } b \\ \cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b, \end{array} \right\}$$

sustituyendo en ellas en lugar de  $\text{sen } (a + b)$ ,  $\cos (a + b)$ ,  $\text{sen } a$  y  $\cos a$ , los valores  $(a)$  y  $(b)$  que acabamos de indicar, tendremos variando de signo á los dos miembros de la primera

$$\left. \begin{array}{l} \cos (90^\circ + a + b) = \cos (90^\circ + a) \cos b - \text{sen } (90^\circ + a) \text{sen } b \\ \text{sen } (90^\circ + a + b) = \text{sen } (90^\circ + a) \cos b + \cos (90^\circ + a) \text{sen } b, \end{array} \right\}$$

que son las fórmulas [43] y [41].

Lo que acabamos de demostrar para el arco  $a$ , puede aplicarse al arco  $b$ , y por tanto, como las fórmulas son ciertas para dos arcos menores que un cuadrante, tambien lo serán para estos arcos aumentados de  $90^\circ$ , y si son ciertas para estos, tambien lo serán para otros que tengan  $90^\circ$  más, y así sucesivamente; de modo que las fórmulas son ciertas para la série de arcos

$$\begin{array}{l} a, \quad a + 90^\circ, \quad a + 180^\circ, \quad a + 270^\circ, \quad a + 360^\circ \dots\dots \\ b, \quad b + 90^\circ, \quad b + 180^\circ, \quad b + 270^\circ, \quad b + 360^\circ \dots\dots \end{array}$$

es decir, para todos los arcos positivos.

3.º caso. Si las fórmulas [41] y [43] son ciertas para dos arcos cualesquiera, tambien lo serán restando de uno de ellos  $90^\circ$ .

Sabemos [Teor. II] que

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(b-90^\circ) &= -\operatorname{sen}(90^\circ-b) = -\cos b \\ \cos(b-90^\circ) &= \cos(90^\circ-b) = \operatorname{sen} b \end{aligned} \right\} (c)$$

Y por consiguiente,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b-90^\circ) &= -\cos(a+b) \\ \cos(a+b-90^\circ) &= \operatorname{sen}(a+b) \end{aligned} \right\} (d)$$

Luego, si por suposición tenemos satisfechas para los arcos  $a$  y  $b$  las dos igualdades

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \end{aligned} \right.$$

Sustituyendo en ellas los valores tomados de las ecuaciones (c) y (d), resultará

$$\left. \begin{aligned} \cos(a+b-90^\circ) &= -\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-90^\circ) + \cos a \cos(b-90^\circ) \\ \operatorname{sen}(a+b-90^\circ) &= \cos a \operatorname{sen}(b-90^\circ) + \operatorname{sen} a \cos(b-90^\circ), \end{aligned} \right.$$

que son iguales á las [41] y [43].

Lo que hemos demostrado para el arco  $b$  puede demostrarse para el arco  $a$ ; luego si las fórmulas [41] y [43] son ciertas como hemos visto, para dos arcos  $a$  y  $b$  positivos y menores cada uno que un cuadrante, también lo serán para estos arcos disminuidos de  $90^\circ$ , y si son ciertas para estos últimos, lo serán para otros que tengan  $90^\circ$  ménos y así sucesivamente; luego son ciertas para la série indefinida de arcos,

$$\begin{aligned} a, & a-90^\circ, a-180^\circ, a-270^\circ, a-360^\circ, \dots\dots\dots \\ b, & b-90^\circ, b-180^\circ, b-270^\circ, b-360^\circ, \dots\dots\dots \end{aligned}$$

es decir, para todos los arcos negativos.

Queda, pues, demostrado, que las fórmulas [41] y [43] son ciertas para todos los arcos positivos ó negativos.

Vamos ahora á demostrar la generalidad de las fórmulas [42] y [44]; pero demostrada la generalidad de las fórmulas [41] y [43] para cualquier valor (positivo ó negativo) de  $b$ , cambiando en estas  $b$  en  $-b$ , resulta,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Que son las fórmulas} \\ [42] \text{ y } [44] \end{array}$$

NOTA.— Las fórmulas [41], [42], [43] y [44], son también ciertas cuando  $a$  ó  $b$ , ó los dos arcos son iguales á 0, á  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ..... ó cuando su suma ó su diferencia es igual á 0,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ..... (\*)

### PROBLEMA III.

*Conocidas las tangentes de dos arcos hallar las tangentes de la suma y de la diferencia de dichos arcos.*

Sabemos [9] que

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Dividiendo los dos términos de este quebrado por  $\cos a \cos b$ , resultará

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}.$$

Pero atendiendo á la fórmula [7], hallaremos finalmente

$$\operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \quad [45]$$

Por igual medio se hallaría que

$$\operatorname{tang}(a-b) = \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b} \quad [46]$$

Suponiendo el arco  $a=45^\circ$  y recordando que  $\operatorname{tang} 45^\circ=r=1$  [48], estas fórmulas se transforman en

$$\operatorname{tang}(45^\circ+b) = \frac{1 + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} b} \quad [47]$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ-b) = \frac{1 - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} b} \quad [48]$$

---

(\*) Aconsejamos á los alumnos sobresalientes que se propongan la resolución de estas cuestiones, para adquirir facilidad en los cálculos trigonométricos.



# PROBLEMA IV.

Conocido el seno, coseno y tangente de un arco, hallar el seno, coseno y tangente del arco duplo.

Si en las fórmulas [41], [43] y [45], hacemos  $a=b$ , se convertirán en

$$\text{sen } (a+a) = \text{sen } a \cos a + \text{sen } a \cos a$$

$$\cos (a+a) = \cos a \cos a - \text{sen } a \text{ sen } a$$

$$\text{tang } (a+a) = \frac{\text{tang } a + \text{tang } a}{1 - \text{tang } a \text{ tang } a}$$

Reduciendo términos semejantes y efectuando los productos indicados

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } 2a &= 2 \text{ sen } a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \text{sen}^2 a \end{aligned} \right\} [49]$$

$$\text{tang } 2a = \frac{2 \text{ tang } a}{1 - \text{tang}^2 a} [50]$$

Estas fórmulas resuelven el problema.

# PROBLEMA V.

Dado el coseno de un arco, hallar el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de su mitad.

Si en la fórmula [49] hacemos  $2a=A$ , ó bien,  $a=\frac{1}{2}A$ , se transformará en

$$\cos A = \cos^2 \frac{1}{2} A - \text{sen}^2 \frac{1}{2} A.$$

Además sabemos, que cualquiera que sea el arco [7], tenemos

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2} A + \text{sen}^2 \frac{1}{2} A.$$

En estas dos ecuaciones conocemos la suma y la diferencia de las dos incógnitas  $\cos \frac{1}{2} A$  y  $\text{sen} \frac{1}{2} A$  elevadas al cuadrado; luego

$$\left. \begin{aligned} \text{sen}^2 \frac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{2} \\ \cos^2 \frac{1}{2} A &= \frac{1 + \cos A}{2} \end{aligned} \right\} [51]$$

De donde resulta [7]

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}, \quad \cot^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A},$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros en estas cuatro ecuaciones, resultan las siguientes que resuelven el problema

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad [52]$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \quad [53]$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \quad [54]$$

$$\cot \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} \quad [55]$$

De estos dobles signos se tomarán los que correspondan según el valor del ángulo  $A$ .

## PROBLEMA VI.

*Dado el seno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Para resolver este problema bastará sustituir en las fórmulas [52] y [53] del problema anterior, el valor de  $\cos A$  en función del  $\operatorname{sen} A$ , deducido de la primera de las fórmulas [21], que nos dá

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}.$$

De modo que tendremos

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \pm \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}}}{2} \quad [56]$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \pm \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 A}}}{2} \quad [57]$$

# PROBLEMA VII.

Convertir la suma ó la diferencia de dos senos ó de dos cosenos, en productos.

Sumemos y restemos las dos fórmulas [41] y [43] entre sí, y tambien las [42] y [44], resultará

$$\text{sen } (a+b) + \text{sen } (a-b) = 2 \text{ sen } a \cos b$$

$$\text{sen } (a+b) - \text{sen } (a-b) = 2 \cos a \text{ sen } b$$

$$\cos (a+b) + \cos (a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\cos (a+b) - \cos (a-b) = -2 \text{ sen } a \text{ sen } b$$

Estas ecuaciones resuelven el problema; pero vamos á darles otra forma.

Hagamos  $a+b=A$ ,  $a-b=B$ , de donde  $a = \frac{A+B}{2}$ ,  $b = \frac{A-B}{2}$ , tendremos sustituyendo estos valores en las cuatro últimas fórmulas.

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B). \quad [58]$$

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \text{ sen } \frac{1}{2} (A-B). \quad [59]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B). \quad [60]$$

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{1}{2} (A+B) \text{ sen } \frac{1}{2} (A-B). \quad [61]$$

27. Estas fórmulas sirven para poder aplicar logaritmos á la suma ó la diferencia de dos senos ó de dos cosenos, convirtiéndolas en expresiones equivalentes calculables por logaritmos. Sea, por ejemplo, tomar logaritmos de la expresion  $\text{sen } 48^\circ - \text{sen } 36^\circ$ , vemos que esto no es posible, porque las expresiones de suma y resta no son calculables por logaritmos; pero aplicando la fórmula [59] tendremos

$$\text{sen } 48^\circ - \text{sen } 36^\circ = 2 \cos 42^\circ \text{ sen } 6^\circ.$$

Por tanto

$$\log (\text{sen } 48^\circ - \text{sen } 36^\circ) = \log 2 + \log \text{sen } 42^\circ + \log \text{sen } 6^\circ.$$

Si la expresion fuera la suma ó la diferencia entre un



seno y un coseno, sería fácil convertirla en dos senos ó dos cosenos, tomando sus complementos. Así, por ejemplo, si se quiere calcular por logaritmos  $\text{sen } 64^\circ + \text{cos } 28^\circ$ , poniendo en vez de  $\text{cos } 28^\circ$ , su igual  $\text{sen } 62^\circ$ , tendríamos, segun la fórmula [58]

$$\begin{aligned}\text{sen } 64^\circ + \text{sen } 62^\circ &= 2 \text{ sen } 63^\circ \cos 1^\circ; \text{ luego } \lg (\text{sen } 64^\circ + \text{cos } 28^\circ) = \\ &= \lg (\text{sen } 64^\circ + \text{sen } 62^\circ) = \lg 2 + \lg \text{sen } 63^\circ + \lg \cos 1^\circ.\end{aligned}$$

Sucede á veces el tener que calcular por logaritmos la suma de un seno y un coseno, afectados cada uno de un factor, sea el siguiente

### PROBLEMA VIII.

*Transformar la expresion  $m \text{ sen } a + n \text{ cos } a$ , en otra calculable por logaritmos.*

Si en dicha expresion separamos el coeficiente de  $\text{cos } a$ , como factor comun, resultará

$$m \text{ sen } a + n \text{ cos } a = n \left( \frac{m}{n} \text{ sen } a + \text{cos } a \right).$$

Pero sabemos que cualquiera que sea el valor de  $\frac{m}{n}$  (18) existe siempre un ángulo que tiene por tangente, ó por cotangente, dicho valor. Si llamamos á este ángulo  $\alpha$ , tendremos la ecuacion  $\frac{m}{n} = \cot \alpha$  (\*), de la que puede determinarse el valor de dicha cotangente, y por consiguiente del ángulo  $\alpha$ . Ahora sustituyendo en la ecuacion resulta,

$$\begin{aligned}m \text{ sen } a + n \text{ cos } a &= n (\cot \alpha \text{ sen } a + \text{cos } a) = n \left( \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \text{ sen } a + \text{cos } a \right) \\ &= \frac{n}{\text{sen } \alpha} (\cos \alpha \text{ sen } a + \text{sen } \alpha \text{ cos } a) = \frac{n}{\text{sen } \alpha} \text{ sen } (\alpha + a).\end{aligned}$$

---

(\*) Tambien puede hacerse  $\frac{m}{n} = \text{tag } \alpha$ .

Esta expresion ya es calculable por logaritmos, pues tenemos

$$m \operatorname{sen} a + n \cos a = \frac{m}{\operatorname{sen} a} \operatorname{sen} (\alpha + a),$$

de donde

$$\log (m \operatorname{sen} a + n \cos a) = \log m + \log \operatorname{sen} (\alpha + a) - \log \operatorname{sen} a. \quad [62].$$

28. Si dividimos cada una de las cuatro fórmulas [58], [59], [60] y [61], por las que le siguen en el orden que están colocadas, resultan las seis fórmulas siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \operatorname{tag} \frac{1}{2}(A+B) \cot \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\operatorname{tag} \frac{1}{2}(A+B)^{(*)}}{\operatorname{tag} \frac{1}{2}(A-B)} \quad [63]$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tag} \frac{1}{2}(A+B). \quad [64]$$

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A-B). \quad [65]$$

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \operatorname{tag} \frac{1}{2}(A-B). \quad [66]$$

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A+B). \quad [67]$$

$$\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A+B) \cot \frac{1}{2}(A-B). \quad [68]$$

29. Estas fórmulas, lo mismo que todas las de las matemáticas, no son más que expresiones abreviadas de ciertas propiedades ó relaciones que se verifican entre las cantidades que las forman; por consiguiente, pueden traducirse al lenguaje vulgar: <sup>(\*\*)</sup> por sus muchas aplicaciones conviene enunciar las del número [63] que nos expresa que

*La suma de los senos de dos arcos es á su diferencia*

$$(*) \text{ De } \operatorname{tag} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}, \text{ se deduce } \operatorname{tag} a \cot a = 1,$$

$$\text{ó bien, } \cot a = \frac{1}{\operatorname{tag} a}.$$

(\*\*) Aconsejamos á los alumnos que se propongan como ejercicio la traduccion al lenguaje comun de todas las fórmulas que llevamos demostradas.

como la tangente de la semisuma de dichos arcos es á la tangente de la semidiferencia.

## CAPÍTULO VI.

### CONSTRUCCION DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

30. Las *tablas trigonométricas* contienen los arcos que crecen de  $0^\circ$  á  $90^\circ$ , de  $1'$  en  $1'$ , ó de  $10''$  en  $10''$ , ó de  $1''$  en  $1''$  (segun su aproximacion), y correspondiéndose con estos arcos, sus senos, cosenos, tangentes y cotangentes respectivos, ó mejor dicho, los logaritmos de los valores de estas líneas trigonométricas. Veamos cómo pueden calcularse estos valores: para ello vamos á anteponer las propiedades que demostraremos en los dos teoremas siguientes:

#### TEOREMA IV.

*Todo arco menor que un cuadrante, es: 1.º Mayor que su seno. 2.º Menor que su tangente.* (Fig. 290)

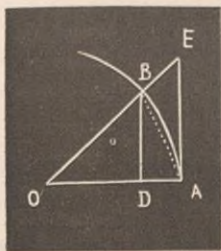


Fig. 290.

1.º Sea el arco AB, tiremos la cuerda AB y tendremos que por ser BD perpendicular á la OA

$$BD < AB,$$

y como

$$\text{arco } AB > \text{cuerda } AB,$$

resulta con mayor razon

$$\text{arco } AB > BD.$$

2.º El triángulo OAE es evidentemente mayor que el sector circular OAB; pero

$$\left. \begin{array}{l} \text{área del sector } OAB = \frac{1}{2} OA \times \text{arco } AB \\ \text{área del triángulo } OAE = \frac{1}{2} OA \times AE \end{array} \right\} \text{Luego arco } AB < AE.$$



# TEOREMA V.

*El seno de un arco menor que un cuadrante, es mayor que la diferencia que hay entre el arco y la cuarta parte del cubo de este arco.*

En efecto, segun el teorema anterior, tenemos que siendo  $\frac{1}{2}a$  un arco menor que un cuadrante,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a, \quad \text{ó bien} \quad \sin \frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a.$$

Multiplicando los dos miembros de esta desigualdad por  $2 \cos \frac{1}{2}a$ , se convertirá en

$$2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a > a \cos^2 \frac{1}{2}a = a(1 - \sin^2 \frac{1}{2}a).$$

Ahora sabemos [49], que  $2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a = \sin a$ , y  $1 - \sin^2 \frac{a}{2} > 1 - \frac{a^2}{4}$ , toda vez que  $\sin \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}a$ ; luego

$$\sin a > a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \text{de donde} \quad \sin a > a - \frac{a^3}{4}.$$

Vamos á determinar el valor del seno del arco  $1'$ .

De la igualdad

$$\frac{C}{2r} = \pi, \text{ se deduce suponiendo el radio igual á la unidad, } \frac{C}{2} = \pi.$$

Es decir, que el número  $\pi$  es igual á la semicircunferencia rectificada; esto es, arco de  $180^\circ = 3,14159\ 26535\dots$

Luego, si quisiéramos hallar el valor del arco de  $1'$ , bastaria dividir el número  $\pi$  por el número de minutos que tiene el arco de  $180^\circ = 180 \times 60 = 10800'$ .

Por consiguiente,

$$\text{arco } 1' = \frac{3,14159\ 26535\dots}{10800} = 0,00029\ 088821\dots < 0,0003.$$

Pero, segun el teorema que acabamos de demostrar

$$\sin 1' < 0,00029\ 088821\dots (a)$$

$$\begin{aligned} \text{sen } 1' &> 0,00029 \ 088821 \dots - \frac{(0,0003)^3}{4} = (*) \\ &0,00029 \ 088821 \dots - 0,00000 \ 00000 \ 27. \end{aligned}$$

ó bien

$$\text{sen } 1' > 0,00029 \ 08882 \quad (b)$$

Si tomamos como valor del seno  $1'$ , el de su arco, vemos que está comprendida,  $(a)$   $(b)$ , entre dos cantidades que no se diferencian en las diez primeras cifras decimales, y que por consiguiente,

$$\text{sen } 1' = 0,00029 \ 08882,$$

con un error menor de una unidad del undécimo orden decimal.

Conocido el seno  $1'$ , se puede determinar el coseno por la fórmula

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \text{sen}^2 1'}.$$

Para hallar el seno y el coseno de  $2'$ , emplearemos las fórmulas [49] y [50], y tendremos

$$\text{sen } 2' = 2 \text{ sen } 1' \cos 1', \quad \cos 2' = \cos^2 1' - \text{sen}^2 1'.$$

El seno y el coseno de  $3'$ , se determinan por las fórmulas [41] y [43], haciendo en ellas  $a = 2'$  y  $b = 1'$ . De modo que

$$\begin{aligned} \text{sen } 3' &= \text{sen } (2' + 1') = \text{sen } 2' \cos 1' + \cos 2' \text{ sen } 1' \\ \cos 3' &= \cos (2' + 1') = \cos 2' \cos 1' - \text{sen } 2' \text{ sen } 1'. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente.

Conocidos los senos y cosenos, las tangentes y cotangentes se determinarán por las fórmulas

$$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\text{sen } a},$$

en las que ya se conocen los senos y cosenos del arco  $a$ .

(\*) Tomando en vez de arco de  $1'$  el valor 0,0003 que es mayor que dicho arco, y por tanto satisface con mayor razón la desigualdad.

Si el radio no fuese igual á la unidad, se multiplicarían los valores de las líneas trigonométricas por el valor del radio. El radio de las tablas, generalmente es  $10^{10} = 10.000.000.000$ , y su logaritmo, por consiguiente, es 10; de manera que si los logaritmos de las tablas corresponden á líneas trigonométricas calculadas en el supuesto de ser el radio la unidad, bastará sumarles 10 unidades para que se refieran al radio  $10^{10}$ .

No se calculan más líneas trigonométricas que la de los arcos de  $0^\circ$  á  $45^\circ$ , pues para los arcos mayores hasta  $90^\circ$ , se hallan las de sus complementos; y los valores absolutos de los arcos superiores á  $90^\circ$  son iguales á los del primer cuadrante. (\*)

## CAPÍTULO VII.

### DISPOSICION Y USO DE LAS TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

31. No podemos dar una explicacion general de todas las tablas, porque la disposicion varía en cada autor. Siendo las del Sr. Vazquez Queipo las más usadas en los Institutos, tomamos de ellas casi literalmente los párrafos que siguen. Debemos advertir que nos referimos á la úl-

(\*) Hemos dado cabida á este capítulo para dar una idea de la posibilidad de construir las tablas trigonométricas; pero generalmente se calculan por series convergentes, cuya deducción algebraica no podemos insertar aquí, tales son:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

$$\operatorname{cos} x = x - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

En las que se supone  $x$  un arco cualquiera rectificado y comparado con el radio.



tima edicion de dichas tablas (\*) en la que se supone el radio igual á la unidad, y por consiguiente su logaritmo es cero. Todos los ejemplos numéricos que lleva este libro se han calculado con dicha última edicion; pero son muy fáciles de verificar con otras tablas en que el radio sea  $10^{10}$ , porque basta sumar, segun hemos dicho, al logaritmo de cada línea trigonométrica el número 10, y restablecer el radio en las fórmulas que no sean homogéneas.

Dice el Sr. Vazquez Queipo: (\*\*)

**"Explicacion de las tablas.** *Estas tablas se refieren á la antigua y generalmente seguida division de la circunferencia en  $360^\circ$ , y no comprende directamente sino los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes naturales de minuto en minuto suponiendo el radio igual á 1.*

*"Como el seno y tangente de un ángulo son los mismos que los de su suplemento, é iguales al coseno y cotangente de su complemento, las tablas trigonométricas no se extienden nunca más allá de los  $45^\circ$  continuándolas en un sentido inverso hasta los  $90^\circ$ .*

*"Para esto debe tenerse presente, que cada dos llanas forman una sola plana que abraza un grado. A la derecha é izquierda de cada llana hay dos columnas señaladas, que quiere decir minutos: la de la izquierda empieza por cero, y termina en la segunda llana por 60, que es el número de minutos que tiene un grado. Sirve esta columna para buscar los logaritmos de los senos, tangentes, etc., de los grados y minutos del arco marcado á la parte superior de cada plana. La de la derecha, que sigue un orden inverso, esto es, que se lee de abajo arriba, sirve para el mismo objeto respecto de los arcos mayores de  $45^\circ$ , que van marcados en la parte inferior de cada plana.*

---

(\*) Décima sétima edicion estereotípica, aumentada en un duplo y enteramente correcta.

(\*\*) Al final de este libro transcribimos la parte de las tablas que nos ha hecho falta para la conveniente claridad de este capítulo; pero los alumnos deben proveerse de ellas para la resolucion numérica de los triángulos que lleva el texto, y para la de los ejercicios que en la clase practiquen.

"Téngase muy presente para el más fácil manejo de las tablas, que los ángulos expresados por estas columnas sobre la misma línea horizontal son recíprocamente complementarios. Así se vé que el ángulo de  $2^{\circ} 4'$  leído en la columna izquierda de los minutos, corresponde en la columna derecha de los mismos al ángulo de  $87^{\circ} 56'$  que son complemento el uno del otro.

"Conviene advertir igualmente que los logaritmos de los senos y tangentes van siempre aumentando desde  $0^{\circ}$  hasta  $90^{\circ}$ , y que al contrario disminuyen sucesivamente los de los cosenos y cotangentes.

"Los logaritmos de los senos, tangentes, cotangentes y cosenos, se encuentran enfrente de cada minuto, y en las columnas que van precedidas del nombre de aquellas líneas. Así, por ejemplo, el logaritmo del seno  $42^{\circ} 10'$  se encuentra en la plana en cuya parte superior vá marcado el  $42^{\circ}$  enfrente del número de minutos 10, en la columna encabezada *seno*; y será 1.826910. Del mismo modo hallaríamos que la cotangente de  $42^{\circ} 5'$  se encuentra en la plana en cuya parte superior vá marcado el  $42^{\circ}$ , y enfrente del  $5'$  en la columna que en su parte inferior lleva las iniciales *cotang.*; cuyo logaritmo es 0.044292.

"Con el fin de evitar la confusion que resulta de cuajar todas las tablas con números, sin dejar algun blanco en que se repose la vista, hemos expresado solamente la característica de 5 en 5 minutos, cuando es constante para cada período; de modo, que debe entenderse repetida aquella para todos ellos.

"Nuestras tablas, como casi todas las que se destinan á los usos comunes, no contienen directamente sino los logaritmos de los arcos expresados en *grados y minutos*. Para obtener el de los *segundos*, se emplean generalmente las diferencias de los logaritmos consecutivos, que se colocan en columnas al lado de estos. Nosotros hemos preferido otra disposicion más exacta para los cuatro primeros y últimos *grados*; reemplazando dichas diferencias por las dos columnitas que se hallan entre las de los senos y tangentes, cuyo uso explicaremos en el párrafo siguiente:

"En los demás grados hemos sustituido á las diferencias su parte proporcional, por ser este método suficientemente exac-

to é infinitamente mucho más expedito que el seguido en casi todas las demás tablas. Hemos colocado, pues, tres columnas señaladas 1", que es el signo de los *segundos*: la primera á la derecha de los *senos*, y sirve para estos: la segunda entre las tangentes y cotangentes comun á ambas líneas, porque *siendo sus logaritmos recíprocamente complementarios*, las diferencias entre dos consecutivos de cada columna son iguales: la tercera al lado de los *cosenos*, y sirve para estos, como veremos en el párrafo siguiente:

"Estas partes proporcionales son comunes á todos los logaritmos comprendidos entre una de ellas y la inmediata en el orden descendente de la plana. Así, por ejemplo, la parte proporcional del seno de  $42^\circ$  hasta  $42^\circ 10'$  es 2,33, y esta misma tambien para el seno de su complemento  $47^\circ 50'$  hasta  $48^\circ$ .

"**Uso y manejo de las tablas.** Dos problemas generales pueden ocurrir en el uso de las tablas trigonométricas, que son: 1.º *Dado un ángulo hallar el valor del logaritmo de su línea trigonométrica.* 2.º *Dado un logaritmo de una línea trigonométrica, hallar su ángulo.*

## PROBLEMA 1.º

*Dado un ángulo, hallar por medio de las tablas el logaritmo de su seno, coseno, tangente ó cotangente.*

"Cuando el ángulo dado no comprende sino grados y minutos el logaritmo buscado se halla directamente en las tablas. Basta, pues, considerar el caso en que el ángulo contiene segundos. En este supuesto hay que distinguir tres casos: 1.º *Que el ángulo dado esté comprendido entre  $3^\circ$  y  $87^\circ$ .* 2.º *Que sea menor que estos límites.* 3.º *Que sea mayor.*

"**1.º caso.** Propongámonos hallar el log del seno  $42^\circ 28' 34''$ . Búsquese en la tabla el logarit. del seno  $42^\circ 28'$  que es 1,829407; multiplíquese el número de segundos 34 por la parte proporcional 2,30 que está enfrente en la columna 1" correspondiente á los senos, y añádase su producto, despreciando las dos notas decimales, al logaritmo anterior, su suma 1,829485 expresará el que se busca.



"Fúndase esta regla en que las diferencias de los logaritmos de las líneas trigonométricas comprendidos entre los arcos  $3^{\circ}$  y  $87^{\circ}$ , se consideran como proporcionales á los segundos que aumenta cada arco.

"Si quisiéramos saber cuál es el logaritmo de la cotangente  $42^{\circ} 5' 24''$ , buscaríamos como antes digimos el logaritmo de la cotangente de  $42^{\circ} 5'$  que es 0,044292, multiplicaríamos  $24''$  por 4,23 y su producto, descartada la parte decimal, lo *restaríamos* del anterior para tener el que se busca que sería 0,044191.

"La razon de restar el producto y no sumarlo como en el caso anterior, *es porque las cotangentes y los cosenos van disminuyendo segun el arco aumenta*, y por consiguiente, el logaritmo de la cotangente de  $42^{\circ} 5' 24''$  es menor que el de  $42^{\circ} 5'$  en la parte que corresponde á  $24''$  que por lo mismo se rebaja.

"**2.º caso.** Se pide el seno de  $2^{\circ} 6' 15''$ . *Reduciremos este arco á segundos, lo que dá 7575'', cuyo logaritmo buscado en las tablas de logaritmos es 3,879383; sumaremos este logaritmo con el 6,685478, cuyas tres últimas cifras se encuentran enfrente del  $2^{\circ} 6'$  en la columnita que está á su derecha, y las cuatro primeras en la cabeza de la misma columna, su suma 2,564861 expresa el logaritmo buscado.*

"Fúndase este método en que los logaritmos comprendidos en las dos columnitas que hay entre las de los senos y tangentes, expresan respectivamente á unas y otras líneas, la diferencia entre sus logaritmos y el que corresponde á su mismo ángulo expresado en segundos; de suerte, que añadiendo dicha diferencia á este último, que se encuentra fácilmente en la tabla de los números, se tendrá el logaritmo del seno del ángulo dado.

"Los cosenos de los ángulos menores de  $3^{\circ}$  difieren tan poco entre sí que á la simple vista puede determinarse la parte proporcional que debe restarse por el aumento de segundos. En efecto, la mayor diferencia entre dos cosenos consecutivos de la tabla, que difieren en  $60''$  ó  $1'$  no pasa de 7 unidades; de modo que *dividiendo  $60''$  por esta diferencia, se tiene el número de segundos que corresponde á cada unidad.*

"Si el logaritmo pedido fuese el de la tangente  $2^{\circ} 6' 15''$ , acudiré como en los senos á la tabla para reducir este ángulo á segundos y hallar su logaritmo que sería por lo dicho 3.879383, y lo sumaré con el otro logaritmo 6,685769, cuyas cuatro primeras cifras están en la cabeza de la columna y las tres restantes enfrente de  $2^{\circ} 6'$  á la izquierda de la columna de las tangentes. La suma 2,565152 es el logaritmo buscado.

"Si se tratara de una cotangente, se operaría sobre la tangente del mismo ángulo en los términos que acabamos de indicar y tomaríamos el complemento del resultado, que en el caso del ángulo  $2^{\circ} 6' 15''$  sería 1,434848.

"**3.<sup>er</sup> caso.** Si los ángulos estuviesen comprendidos entre  $87^{\circ}$  y  $90^{\circ}$  se reducen á ángulos menores de  $3^{\circ}$  tomando sus complementos y se opera sobre las líneas inversas (esto es, sobre los cosenos y cotangentes, si se trata de los senos ó de las tangentes y vice versa), en la forma arriba indicada.

"Cuando los ángulos son obtusos, ó escedan de  $90^{\circ}$ , sus líneas trigonométricas son exactamente las de su suplemento, y basta operar sobre estos conforme á las reglas que acabamos de exponer para los ángulos agudos.

## PROBLEMA 2.<sup>o</sup>

*Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el ángulo á que pertenece.*

"Cuando el logaritmo se encuentra en las tablas, éstas dan directamente el ángulo que se busca en grados y minutos. Así por ejemplo, si quisiéramos hallar el ángulo del logaritmo tangente 1,959769, veríamos recorriendo la columna de las tangentes que es  $42^{\circ} 21'$ .

"Si el logaritmo no se encuentra contenido exactamente en las tablas, sino entre dos consecutivos de las mismas, hay que distinguir dos casos: **1.<sup>o</sup>** Cuando el logaritmo se encuentre en las tres primeras planas; esto es, cuando corresponde á un ángulo menor que  $3^{\circ}$  ó mayor que  $87^{\circ}$ . **2.<sup>o</sup>** Cuando el logaritmo cae fuera de las tres primeras planas, esto es, cuando corresponde á un ángulo mayor de  $3^{\circ}$  y menor de  $87^{\circ}$ .

"1.<sup>er</sup> caso. Propongámonos buscar el ángulo cuyo seno tiene por logaritmo  $\bar{2},625565$ ; buscaré en la columna de los senos el logaritmo menor que más se le aproxime que es  $\bar{2},624965$ , y como este cae dentro de las tres primeras planas, buscaré el logaritmo  $6,685446$  que le corresponde en la columna *auxiliar* inmediata de la derecha, y lo restaré del logaritmo dado  $2,625565$ , su diferencia  $3,940119$  expresará el logaritmo del número de segundos contenidos en el arco buscado, cuyo valor hallaremos por medio de la tabla de los números. En efecto, encontramos que el logaritmo de  $3,940119$  corresponde al número  $8712''$ , ó reduciendo al ángulo  $2^{\circ} 25' 12''$ .

"Si el coseno pertenece á un ángulo menor de  $3^{\circ}$ , el caso se reduce muy fácilmente por la simple inspeccion de las tablas, supuesto que la mayor diferencia entre dos logaritmos consecutivos no excede de 7 unidades, y puede por consiguiente calcularse el número de segundos que corresponde á cada una, teniendo presente lo que hemos dicho anteriormente, esto es, dividiendo mentalmente los  $60''$  por el número de unidades que exprese la diferencia.

"Resta, pues, el caso en que el *coseno* corresponde á un ángulo mayor de  $87^{\circ}$ , esto es, cuando hay que buscarlo en las columnas ascendentes que son las que llevan á su pié  $87^{\circ}$ ,  $88^{\circ}$  y  $89^{\circ}$ . Como la columna *ascendente* de los cosenos es la misma que la *descendente* de los senos, se opera entonces con el logaritmo dado, como si fuera el de un seno menor de  $3^{\circ}$ , y se toma el complemento del ángulo hallado, el cual está marcado al pié de la plana y en la columna derecha de los *minutos* enfrente del seno hallado.

"Propongámonos hallar el ángulo del log. coseno  $\bar{2},686408$ . Buscaré en la columna ascendente de los *cosenos* ó en la descendente de los *senos* el log. menor que más se aproxime al dado y operaré como si se tratase de su seno, y hallaré que el log.  $4,00104$  expresará el número de segundos que tiene el complemento del ángulo que se busca. Este logaritmo corresponde en la tabla de los números á  $10.029''$ , ó sea  $2^{\circ} 47' 3''$ , cuyo complemento  $87^{\circ} 12' 57''$  es el ángulo que se busca.

"Hallar el ángulo del logaritmo *tang*  $\bar{2},577942$ . Buscaré en



la columna de las tangentes el log. menor más próximo al dado que será  $\overline{2,577877}$  y corresponde á  $2^{\circ} 10'$ . Restaré del logaritmo dado el  $\overline{6,685782}$  que está enfrente de este último en la tablita auxiliar: su diferencia  $\overline{3.892160}$  expresará el logaritmo del número de segundos del arco buscado, que hallaremos en la tabla de los números y será  $\overline{7801''} = 2^{\circ} 10' 1''$ .

"Cuando el log. tang se encuentra en la columna ascendente ó lo que es igual, corresponden á un arco mayor que  $87^{\circ}$ , se opera sobre su complemento que es la tangente de un arco menor que  $3^{\circ}$ . Determinado que sea éste, se hallará el ángulo que se busca tomando el complemento del resultado.

"**2.º caso.** Cuando el logaritmo dado cae fuera de las tres primeras planas, esto es, cuando corresponde á un ángulo mayor de  $3^{\circ}$  y menor de  $87^{\circ}$ , se emplean para hallar los segundos las partes proporcionales que van expresadas en las columnas marcadas  $1''$ , según se vé en los ejemplos que siguen:

"*Supongamos que se pide el ángulo del logarit. sen  $\overline{1,828264}$ .* Búsquese en la columna de los senos el log.  $\overline{1,828162}$  inferior y más próximo al dado que corresponde á  $42^{\circ} 19'$ : para hallar los segundos que deben añadirse, tómese la diferencia  $\overline{102}$  entre ambos logaritmos y divídase por  $\overline{2,32}$  que es la parte proporcional que le corresponde en la columna  $1''$ ; el cociente  $\overline{43'',96}$  expresará los segundos que deben añadirse al ángulo pedido que será  $42^{\circ} 19' 43'',96$ .

"*Se pide el ángulo del logaritmo tangente  $0,039356$ .* Como esta tangente corresponde á un ángulo mayor de  $45^{\circ}$ , cuyo log. es  $\overline{0,000000}$ , busco dicha tangente en la columna ascendente que lleva á su pié la inicial tang., y tomo el inmediatamente menor  $\overline{0,039216}$  que le corresponde á  $47^{\circ} 35'$ . Para averiguar los segundos que deben añadirse, tómese la diferencia  $\overline{140}$  entre ambos logaritmos, y divídase por la parte proporcional  $\overline{4,23}$  que está enfrente en la columna  $1''$ ; su cociente  $\overline{33}$  dará el número de segundos buscado, y el ángulo completo será  $47^{\circ} 35' 33''$ .

"Si el ángulo que se buscase fuera correspondiente al logaritmo de un coseno ó de una cotangente, se procedería de un modo igual al de los anteriores ejemplos; pero el número de segundos habria que restarlo, puesto que las cotangentes y

los cosenos de los ángulos menores que  $90^\circ$  van disminuyendo á medida que crece el ángulo.

"Tambien puede tomarse en la tabla el  $\log. \cot$  ó  $\log \cos$  inmediatamente mayor del propuesto, en cuyo caso en lugar de restar se añadirán los segundos al ángulo hallado en las tablas.

---

## LIBRO II.

### RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS.

---

#### CAPÍTULO I.

##### TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

---

32. Para mayor claridad en las fórmulas, los ángulos de los triángulos los indicamos con las letras del vértice, y los lados opuestos con las mismas letras minúsculas; así en el triángulo ABC (Fig. 291) los ángulos son, A, B y C, y los lados opuestos respectivamente son  $a$ ,  $b$  y  $c$ , de modo que  $a=CB$ ,  $b=CA$  y  $c=AB$ . Supondremos que el radio de las tablas es igual á la unidad; pues ya sabemos cómo pueden transformarse las fórmulas para el caso de no serlo.

#### TEOREMA VI.

*En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo comprendido. (Fig. 291)*

Sea el triángulo ABC, describo con un radio igual á

la unidad el arco DH y trazo el seno DE de este arco ó del ángulo C. Los dos triángulos semejantes CBA y CDE nos dan las proporciones

$$AB : DE :: CB : CD.$$

$$CA : CE :: CB : CD.$$

Sustituyendo en estas proporciones los valores convenidos, se convierten en

$$c : \text{sen } C :: a : 1,$$

$$b : \text{cos } C :: a : 1.$$

De donde

$$c = a \text{ sen } C. \quad [69] \quad b = a \text{ cos } C. \quad [70]$$

### TEOREMA VII.

*En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la tangente del ángulo opuesto, ó por la cotangente del otro ángulo agudo. (La misma figura.)*

Tracemos la tangente HF, los dos triángulos rectángulos CBA y CFH nos dan la proporción

$$AB : HF :: CA : CH, \text{ ó bien } c : \text{tang } C :: b : 1.$$

De donde

$$c = b \text{ tang } C. \quad [71]$$

Como los ángulos B y C del triángulo rectángulo son complementarios, la tangente del uno es la cotangente del otro, y por tanto, también tenemos

$$c = b \text{ cotang } B. \quad [72]$$

Estas fórmulas pueden deducirse de las [69] y [70], pues dividiendo estas recíprocamente nos dan

$$\frac{c}{b} = \frac{a \text{ sen } C}{a \text{ cos } C} = \text{tang } C, \text{ de donde } c = b \text{ tang } C,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a \text{ cos } C}{a \text{ sen } C} = \text{cot } C, \text{ de donde } b = c \text{ cot } C,$$

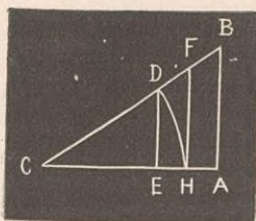


Fig. 289.



33. Los dos teoremas anteriores y el de Pitágoras, sirven para la resolución trigonométrica de los triángulos rectángulos. Como en estos se conoce el ángulo recto, bastará conocer dos de los otros elementos del triángulo para que el problema sea determinado, con tal que en los datos entre un lado. (3)

Esto dá origen á cuatro combinaciones, que forman otros tantos casos, que son:

- 1.º *Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.*
- 2.º *Dados un cateto y un ángulo agudo.*
- 3.º *Dados los dos catetos.*
- 4.º *Dados un cateto y la hipotenusa.*

### PROBLEMA IX.

**Resolver un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa  $a$ , y el ángulo agudo  $B$ .**

El cateto  $b$  se hallará por la fórmula [69]  $b = a \operatorname{sen} B$ , de donde

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B.$$

El cateto  $c$  se hallará por la fórmula [70]  $c = a \cos B$ , de donde

$$\log c = \log a + \log \cos B. (*)$$

El ángulo agudo  $C = 90^\circ - B$ .

Con lo que quedarán determinados los tres elementos desconocidos del triángulo. Pongamos un ejemplo numérico para que se vea la disposición de los cálculos.

(\*) Si el radio de las tablas no fuese la unidad, las ecuaciones serian

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{r}, \quad c = \frac{a \cos B}{r},$$

de donde

$$\begin{aligned} \log b &= \log a + \log \operatorname{sen} B - \log r, \\ \log c &= \log a + \log \cos B - \log r. \end{aligned}$$

Igual observacion podemos hacer para las otras fórmulas.

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a = 22750$  metros.  $B = 48^\circ 28' 50''$ .

$$\text{Fórmulas } \left\{ \begin{array}{l} b = a \operatorname{sen} B \\ c = a \cos B \\ C = 90^\circ - B. \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Log} b = \operatorname{log} a + \operatorname{log} \operatorname{sen} B \\ \operatorname{Log} c = \operatorname{log} a + \operatorname{log} \cos B \end{array} \right.$$

Cálculo del cateto  $b$ .

$$\begin{array}{l} \operatorname{log} 22750 = 4,356981 \\ \operatorname{log} \operatorname{sen} (48^\circ 28' 50'') = 1,874326 \\ \hline \operatorname{log} b = \text{suma } 4,231307 \\ \text{cateto } b = 17086^m, 62. \end{array}$$

Cálculo del cateto  $c$ .

$$\begin{array}{l} \operatorname{log} 22750 = 4,356981 \\ \operatorname{log} \cos (48^\circ 28' 50'') = 1,821431 \\ \hline \operatorname{log} c = \text{suma } 4,178412 \\ \text{cateto } c = 15080^m, 39. \end{array}$$

$$\text{ángulo } C = 90^\circ - B = 90 - 48^\circ 28' 50'' = 41^\circ 31' 10''.$$

Fórmulas de comprobacion. (\*)  $a^2 = b^2 + c^2$ .

$$c = a \operatorname{sen} C, \text{ de donde } \operatorname{log} \operatorname{sen} C = \operatorname{log} c - \operatorname{log} a.$$

PROBLEMA X.

Resolver un triángulo conocidos el cateto  $c$  y el ángulo agudo  $B$ .

Para hallar el cateto  $b$  tenemos [71]

$$b = c \operatorname{tang} B, \text{ de donde } \operatorname{log} b = \operatorname{log} c + \operatorname{log} \operatorname{tang} B.$$

La hipotenusa se puede determinar por la ecuacion

$$c = a \cos B, \text{ de la que resulta } \operatorname{log} a = \operatorname{log} c - \operatorname{log} \cos B.$$

El ángulo agudo  $C = 90^\circ - B$ .

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $c = 450$  metros.  $B = 47^\circ 28'$ .

$$\text{Fórmulas } \left\{ \begin{array}{l} b = c \operatorname{tag} B \\ c = a \cos B \\ C = 90^\circ - B. \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Log} b = \operatorname{log} c + \operatorname{log} \operatorname{tag} B \\ \operatorname{Log} a = \operatorname{log} c - \operatorname{log} \cos B \end{array} \right.$$

(\*) En este caso como en todos los demás, conviene comprobar la exactitud de los cálculos aritméticos valiéndose de algunas de las propiedades demostradas y de las que no se haya hecho uso en la resolución del triángulo. En este ejemplo hemos indicado la propiedad del teorema de Pitágoras para los lados, y la de la fórmula [69]; también podríamos aplicar las ecuaciones [70] y [71].

| Cálculo del cateto $b$ .                      | Cálculo de la hipotenusa $a$ .         |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\log 450 = 2,653213$                         | $\log 450 = 2,653213$                  |
| $\log \text{tang } (47^\circ 28') = 0,037440$ | $\log \cos (47^\circ 28') = 1,829959$  |
| $\log b = \text{suma } 2,690653$              | $\log a = \text{diferencia } 2,823254$ |
| cateto $b = 490^m, 51$ .                      | hipotenusa $a = 665^m, 66$ .           |

$$\text{ángulo } C = 90^\circ - B = 90^\circ - 47^\circ 28' = 42^\circ 32'.$$

Fórmulas de comprob.<sup>n</sup>  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $b = a \text{ sen } B$ .

## PROBLEMA XI.

Resolver un triángulo rectángulo conocidos los dos catetos  $b$  y  $c$ .

El ángulo  $B$  se determina por la fórmula  $b = c \text{ tang } B$ , de la que resulta

$$\log \text{tang } B = \log b - \log c.$$

La hipotenusa se halla por la fórmula  $b = a \text{ sen } B$ , de donde

$$\log a = \log b - \log \text{sen } B.$$

El ángulo  $C = 90^\circ - B$ .

### EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $b = 2324$  metros  $c = 2532$  metros.

$$\text{Fórmulas } \left\{ \begin{array}{l} b = c \text{ tang } B \\ b = a \text{ sen } B \\ C = 90^\circ - B. \end{array} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{array}{l} \lg \text{ tang } B = \lg b - \lg c \\ \lg a = \lg b - \lg \text{sen } B \end{array} \right.$$

| Cálculo del ángulo $B$ .                            | Cálculo de la hipotenusa $a$ .                    |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\log 2324 = 3,366236$                              | $\log 2324 = 3,366236$                            |
| $\log 2532 = 3,403464$                              | $\log \text{sen } (42^\circ 32' 50'') = 1,830074$ |
| $\log \text{tang } B = \text{diferencia } 1,962772$ | $\log a = \text{diferencia } 3,536162$            |
| $B = 42^\circ 32' 50''$ .                           | hipotenusa $= 3436, 79$ .                         |

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 42^\circ 32' 50'' = 47^\circ 27' 10''.$$

Fórmulas de comprob.<sup>n</sup>  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $c = b \text{ tang } C$ .



# PROBLEMA XII.

Dados la hipotenusa  $a$  y un cateto  $b$ , resolver el triángulo.

El cateto  $c$  puede hallarse por la fórmula

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

De donde

$$c = \sqrt{(a + b)(a - b)}$$

y tomando logaritmos

$$\log c = \frac{1}{2}[\log(a + b) + \log(a - b)].$$

El ángulo  $B$  se deduce de la fórmula  $b = a \text{ sen } B$ .

Y el ángulo  $C = 90^\circ - B$ .

## EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a = 22750$  metros.

$b = 17034$ .

$$\begin{array}{l} \text{Fórmulas.} \left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{(a+b)(a-b)} \\ b = a \text{ sen } B \\ C = 90^\circ - B. \end{array} \right\} \text{ de } \left\{ \begin{array}{l} \lg c = \frac{1}{2}[\lg(a+b) + \lg(a-b)] \\ \text{donde } \lg \text{ sen } B = \log b - \log a. \end{array} \right. \end{array}$$

Cálculo del cateto  $c$ .

$$\lg(a+b) = \lg 39784 = 4,599704$$

$$\lg(a-b) = \lg 5716 = 3,757092$$

$$\text{Suma } 8,356796$$

$$\log a = \text{mitad } 4,178398$$

$$\text{cateto } c = 15080.$$

Cálculo del ángulo  $B$ .

$$\log 17034 = 4,231308$$

$$\log 22750 = 4,356981$$

$$\log \text{ sen } B = \text{diferencia } 1,874327$$

$$\text{ángulo } B = 48^\circ 28' 51''.$$

$$C = 90^\circ - 48^\circ 28' 51'' = 41^\circ 31' 9''.$$

Fórmula de comprobación.  $b = c \text{ tang } B$ .

Elementos de un triángulo rectángulo para que sirva de comprobación resolviendo cada uno de los cuatro casos que pueden ocurrir.

$$a=12520, b=8150, c=9504, B=40^\circ 36' 50'', C=49^\circ 23' 10''.$$

## CAPÍTULO II.

### TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

34. Las *analogías* ó ecuaciones que sirven para resolver los triángulos en general, son las que vamos á demostrar en los tres teoremas siguientes:

#### TEOREMA VIII.

*En todo triángulo, los lados son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos.* (Fig. 292)

Sea un triángulo cualquiera  $ABC$ , bajemos desde uno de los vértices una perpendicular  $BD$  al lado opuesto; pueden suceder dos casos, que esta perpendicular caiga dentro ó fuera del triángulo.

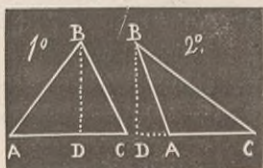


Fig. 292.

1.º Si la perpendicular cae dentro, tendremos en los triángulos  $ABD$  y  $DBC$  [*Teorema VI*]

$$BD = c \operatorname{sen} A, \quad BD = a \operatorname{sen} C,$$

de donde

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A, \quad \text{ó bien,} \quad a : c :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C.$$

2.º Si la perpendicular cae fuera, tendremos en los dos triángulos  $DBC$  y  $DBA$

$$BD = a \operatorname{sen} C, \quad BD = c \operatorname{sen} DAB = c \operatorname{sen} A \quad [\textit{Teor. III}],$$

y por tanto

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A, \quad \text{ó bien} \quad a : c :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C.$$

Este teorema puede tambien demostrarse directamente sin auxilio de los triángulos rectángulos.

En efecto, sea  $ABC$  (Fig. 293) un triángulo cualquiera, circunscribámosle una circunferencia, y desde su centro

O con un radio igual á la unidad tracemos otra  $A'B'C'$ , tirando los radios  $OA$ ,  $OB$  y  $OC$ , y las cuerdas  $A'B'$ ,  $A'C'$  y  $B'C'$ . El triángulo  $A'B'C'$  es semejante al  $ABC$ . Luego

$$AB:A'B'::BC:B'C'::AC:A'C' \quad (a)$$

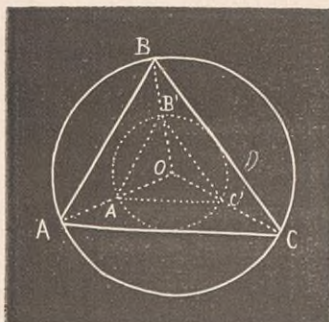


Fig. 292.

Pero el ángulo  $A=A'$  tiene por medida la mitad del arco  $B'C'$  [*Geometría teor.* XXXI], luego la cuerda  $B'C'$  es el duplo del seno de  $A'$  [*Teor.* I]; lo mismo podemos decir del ángulo  $B$  respecto á la cuerda  $A'C'$  y del ángulo  $C$  respecto á  $A'B'$ ; por consiguiente, la série de razones iguales (a) puede escribirse

$$c : 2 \text{ sen } C :: a : 2 \text{ sen } A :: b : 2 \text{ sen } B,$$

ó dividiendo por 2 los consecuentes

$$c : \text{sen } C :: a : \text{sen } A :: b : \text{sen } B.$$

### TEOREMA IX.

*En todo triángulo, el cuadrado de un lado, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo del producto de estos por el coseno del ángulo comprendido. (Fig. 292)*

1.º Si el ángulo  $A$  es agudo, sabemos [*Geom. teorema CVII*], que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \times AD.$$

Pero en el triángulo rectángulo  $ABD$ ,  $AD = c \cos A$ , luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2.º Si el ángulo  $A$  es obtuso, sabemos [*Geom. teorema CVIII*], que

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \times DA.$$



Pero en el triángulo rectángulo ABD, tenemos

$$AD = c \cos DAB = -c \cos A \text{ [Teor. II];}$$

por tanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

### TEOREMA X.

*En todo triángulo la suma de dos de sus lados es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de la semidiferencia.*

En efecto, segun el teor. VIII, tenemos

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B},$$

de donde comparando la suma de antecedente y consecuente con su diferencia, resulta

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B}.$$

Pero sabemos [63] que

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)};$$

por consiguiente,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)},$$

que es el enunciado del teorema.

El teor. VIII aplicado á los tres lados del triángulo nos dá dos ecuaciones distintas, que con la que indica la propiedad de la suma de los tres ángulos de un triángulo, son *tres ecuaciones distintas*, en las que entran los seis elementos del triángulo: estas son

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} \\ \frac{a}{c} &= \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C} \\ A+B+C &= 180^\circ \end{aligned} \right\} [73]$$

El teorema IX, aplicado á cada uno de los lados de un triángulo nos dá tres *ecuaciones distintas*, en las que entran los seis elementos del triángulo, á saber:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \right\} [74]$$

El teorema X nos dá las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)} \\ \frac{a+c}{a-c} &= \frac{\tan \frac{1}{2}(A+C)}{\tan \frac{1}{2}(A-C)} \\ A+B+C &= 180^\circ \end{aligned} \right\} [75] (*)$$

35. Podemos observar que en cualquiera de estos tres sistemas entran los seis elementos del triángulo, y por tanto, que con *uno cualquiera de ellos bastaria para todos los casos de resolucion de los triángulos*. Además, como las relaciones que estas fórmulas expresan *son siempre ciertas*, implícitamente se hallan las propiedades que indica un sistema contenidas en los demás; es decir, que pueden deducirse unas fórmulas de otras, incluidas las de los triángulos rectángulos que no son más que casos particulares de las ecuaciones generales que acabamos de formular.

36. Por via de ejemplo vamos á demostrar *que del sistema [73] de ecuaciones se pueden deducir algebráicamente todas las analogías ó ecuaciones que hemos demostrado*; esto es, las fórmulas [69], [70], [71] y [72], el teorema de Pitágoras y los sistemas de ecuaciones [74] y [75].

(\*) Puede notarse que en el sistema de ecuaciones [73] y [75], la tercera ecuacion que podia formularse en cada sistema

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B+C)}{\tan \frac{1}{2}(B-C)}$$

se deduce de las otras dos ecuaciones del sistema, y por consiguiente no forman una nueva ecuacion.

En efecto, si en la ecuacion  $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$  suponemos  $A = 90^\circ$ , esto es, que el triáng. es rectáng., el  $\text{sen } A = \text{sen } 90^\circ = r = 1$ , luego se transforma en

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{\text{sen } B} \text{ ó bien } \dots \dots b = a \text{ sen } B \\ \text{Siendo } B + C &= 90^\circ, \text{ tendremos } c = a \cos B \\ \text{Dividiendo la una por la otra } &b = c \text{ tag } B \\ \text{Y por ser } B + C &= 90^\circ. \dots c = b \cot B \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Que son las fórmulas} \\ [69] [70] [71] \text{ y } [72] \end{array}$$

Elevando al cuadrado las dos fórmulas  $b = a \text{ sen } B$  y  $c = a \cos B$  y sumándolas tendremos, recordando que  $\text{sen}^2 B + \cos^2 B = 1$ ,

$$b^2 + c^2 = a^2 (\text{sen}^2 B + \cos^2 B) = a^2.$$

Que es el teorema de Pitágoras.

Vamos ahora á deducir el sistema de ecuaciones [74]. Para ello, de las ecuaciones

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}, \quad A + B + C = 180^\circ$$

deduzco eliminando  $C$  entre las dos últimas

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } (180^\circ - (A + B)) = a \text{ sen } (A + B).$$

Pero

$$\text{sen } (A + B) = \text{sen } A \cos B + \text{sen } B \cos A,$$

luego

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } A \cos B + a \text{ sen } B \cos A.$$

Sustituyendo en vez de  $a \text{ sen } B$ , su igual sacado de la ecuacion primera  $b \text{ sen } A$ , tendremos

$$c \text{ sen } A = a \text{ sen } A \cos B + b \text{ sen } A \cos A.$$

Dividiendo esta ecuacion por  $\text{sen } A$

$$c = a \cos B + b \cos A. \quad (a)$$

La primera de las ecuaciones [73] nos dá  $\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$ ,

de donde  $\text{sen}^2 B = \frac{b^2 \text{ sen}^2 A}{a^2}$  y como sabemos que  $\cos B = \sqrt{1 - \text{sen}^2 B}$ , tendremos

$$\cos B = \sqrt{1 - \frac{b^2 \text{ sen}^2 A}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 \text{ sen}^2 A}{a^2}}.$$



Sustituyendo este valor de  $\cos B$  en la ecuacion (a), será

$$c = \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A} + b \cos A.$$

De donde

$$c - b \cos A = \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}.$$

Elevando al cuadrado

$$c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A = a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A.$$

Trasponiendo y teniendo presente que  $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1$ , resulta finalmente

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ que es la fórmula [74]}$$

Si en esta fórmula, y en sus dos homólogas, se supone que el ángulo es recto, resulta el teorema de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Respecto á la transformacion del sistema de ecuaciones [73], en el [75] ya hemos visto cómo se efectúa. [*Teorema X.*]

Luego queda demostrada la generalidad del sistema de ecuaciones [73], pues que de él se deducen todas las otras fórmulas ó analogías de los triángulos rectángulos y oblicuángulos.

37. Al resolver los triángulos oblicuángulos, pueden ocurrir los cuatro casos siguientes:

- 1.º *Dados un lado y dos ángulos.*
- 2.º *Dados dos lados y el ángulo comprendido.*
- 3.º *Dados los tres lados.*
- 4.º *Dados dos lados y el áng. opuesto á uno de ellos. (\*)*

### PROBLEMA XIII.

*Suponiendo conocidos el lado a y los ángulos B y C, resolver el triángulo.*

El tercer ángulo desde luego puede hallarse, pues

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

---

(\*) Hemos creído más oportuno este órden, por ser el de lo más fácil á lo más complicado. Igual razon nos ha guiado al clasificar los casos en la resolucion de los triángulos rectángulos.

Los dos lados  $b$  y  $c$  se hallan por las fórmulas [73]

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } C},$$

de las que resultan tomando logaritmos

$$\log b = \log a + \log \text{sen } B - \log \text{sen } A,$$

$$\log c = \log a + \log \text{sen } C - \log \text{sen } A.$$

#### EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a = 1200$  metros.  $B = 45^\circ 38' 29''$ , 5.  $C = 40^\circ 25' 35''$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ 38' 29'' + 40^\circ 25' 35'') = 93^\circ 55' 55''$$

Fórmulas.  $\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} \\ c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} \end{array} \right\}$  de  $\left\{ \begin{array}{l} \log b = \log a + \log \text{sen } B - \log \text{sen } A \\ \log c = \log a + \log \text{sen } C - \log \text{sen } A \end{array} \right\}$  donde

Cálculo del lado  $b$ .

$$\begin{array}{r} \log a = 3,079181 \\ \log \text{sen } (45^\circ 38' 29'') = \bar{1},854292 \\ \hline \text{Suma } 2,933474 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\lg \text{sen } (93^\circ 55' 55'') = \bar{1},998977 \\ \log b = \text{diferencia } 2,934497 \\ \text{lado } b = 860 \text{ metros.} \end{array}$$

Cálculo del lado  $c$ .

$$\begin{array}{r} \log a = 3,079181 \\ \log \text{sen } (40^\circ 25' 34'') = \bar{1},811890 \\ \hline \text{Suma } 2,891071 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lg \text{sen } (93^\circ 55' 55'') = \bar{1},998977 \\ \text{Diferencia} = \log c = 2,892094 \\ \text{lado } c = 780 \text{ metros.} \end{array}$$

Fórmula de comprob.<sup>n</sup> Siendo  $A > B > C$ , tiene que ser  $a > b > c$ ,

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } C}, \text{ de donde } \log b = \log c + \log \text{sen } B - \log \text{sen } C.$$

#### PROBLEMA XIV.

Conocidos los lados  $a$  y  $b$  y el ángulo comprendido  $C$ , resolver el triángulo.

Desde luego se conoce la suma de los otros dos ángulos, porque de la ecuación  $A + B + C = 180^\circ$ , se deduce  $A + B = 180^\circ - C$ .

Si conociéramos la diferencia de dichos ángulos, se sa-

be que conocida la suma y la diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Las fórmulas [75] nos van á proporcionar el medio de conocer dicha diferencia. En efecto, de

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B)}$$

se deduce

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) - \log(a+b).$$

En la que podemos determinar  $\frac{1}{2}(A-B)$ , y por tanto, duplicando, el arco  $(A-B)$ . Luego los dos ángulos  $A$  y  $B$  quedan determinados, pues sabemos que será el mayor el que se oponga al mayor lado, y los dos lados  $a$  y  $b$  son conocidos.

Podemos observar que la tangente  $\frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2} C$ , porque de

$A+B=180^\circ-C$ , se deduce  $\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-\frac{1}{2}C$ , y por tanto

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2} C.$$

Así es, que no se necesita buscar en las tablas el logaritmo tangente de  $\frac{1}{2}(A+B)$ , sino el de su igual  $\cot \frac{1}{2} C$ , es decir, el del arco mitad del ángulo conocido.

Conocidos los ángulos, para determinar el lado  $c$  tenemos

$a:c::\sin A:\sin C$ , de donde  $\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$ .

#### EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a=1200$ ,  $b=860$ ,  $C=40^\circ 26'$

|                                                         |                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Fórmulas<br/>[75] y [73]<br/>tomados logaritmos.</p> | $\left\{ \begin{array}{l} \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \lg(a-b) + \lg \cot \frac{1}{2} C - \lg(a+b). \\ \log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A. \end{array} \right.$ |
| <p>Valores auxiliares,...</p>                           | $\left\{ \begin{array}{l} (a-b) = 340. \\ \frac{1}{2} C = 20^\circ 13'. \\ (a+b) = 2060. \end{array} \right.$                                                                         |



**Cálculo de los ángulos A y B.**

$$\log (a-b)=2,531479$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C=0,433847$$

$$-\log (a+b)=-3,313867$$

$$Su.^a \text{ alg.} = \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B)=\overline{1},651459$$

$$\frac{1}{2} (A-B)=24^{\circ} 8' 28''$$

$$\text{Siendo } \frac{1}{2} (A+B)=69^{\circ} 47'$$

Por ser  $a > b$  tendremos

$$A=93^{\circ} 55' 28''$$

$$B=45^{\circ} 38' 32''$$

**Cálculo del lado  $c$ .**

$$\log a=3,079181$$

$$\log \operatorname{sen} C=\overline{1},811752$$

$$-\log \operatorname{sen} A=-\overline{1},998979$$

$$Su.^a \text{ alg.} = \log c=2,892154$$

$$\text{lado } c=780,1.$$

*Fórmulas de comprobación.*

$$A+B+C=180^{\circ}.$$

$$a : b :: \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B.$$

**PROBLEMA XV.**

*Dados los tres lados  $a, b, c$ , resolver el triángulo.*

Para determinar el ángulo  $A$  emplearemos la fórmula [74]

$$a^2=b^2+c^2-2bc \cos A.$$

De la que se deduce

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Esta ecuación resuelve el caso, pues su segundo miembro se compone de cantidades conocidas; pero no siendo calculable por logaritmos, la vamos á transformar en otra que lo sea. Para ello sumemos á sus dos miembros la unidad y tendremos

$$1+\cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Pero sabemos [Prob. V], que

$$1+\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A,$$

luego

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Si llamamos al perímetro del triángulo  $2p$ , tendremos

$$b + c + a = 2p$$

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Sustituyendo estos valores

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{2p \times 2(p-a)}{2bc} = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

De donde dividiendo por 2 ambos miembros y extrayendo raíz cuadrada

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \quad (*)$$

Aplicando el mismo procedimiento para los ángulos B y C, nos dará fórmulas análogas, de modo que tendremos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned} \right\} [76]$$

cuyas tres fórmulas son calculables por logaritmos y determinan los ángulos  $\frac{1}{2} A$ ,  $\frac{1}{2} B$ ,  $\frac{1}{2} C$ .

La simetría de estas fórmulas las hace fácilmente recordables, pues vemos que el coseno de la mitad de un ángulo de un triángulo, es igual á la raíz cuadrada del producto del semi-perímetro por este disminuido del lado opuesto al ángulo, y dividido por el producto de los dos lados que forman dicho ángulo.

38. Sabemos por la Geometría, que para que un triángulo exista, se necesita que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

(\*) No se pone el doble signo al radical, porque  $\cos \frac{1}{2} A$  siempre tiene que ser positivo puesto que  $\frac{1}{2} A < 90^\circ$ .

Esta condicion la podemos demostrar por medio de las fórmulas halladas. En efecto, para que sean reales es preciso que se verifique

$$p-a > 0, \quad p-b > 0, \quad p-c > 0,$$

ó bien teniendo presente que  $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$b+c-a > 0, \quad a+c-b > 0, \quad a+b-c > 0.$$

De donde

$$b+c > a, \quad a+c > b, \quad a+b > c,$$

ó bien

$$b > a-c, \quad c > b-a, \quad a > b-c.$$

Si en la ecuacion propuesta y sus análogas en vez de sumar la unidad á ambos miembros la hubiésemos restado, llegaríamos á las expresiones

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(a-c)}{bc}} \\ \text{sen } \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \text{sen } \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{aligned} \right\} [77]$$

Fórmulas tambien simétricas y fáciles de retener en la memoria.

Si se divide este sistema de fórmulas por sus correspondientes anteriores, nos darán

$$\left. \begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \text{tang } \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \text{tang } \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned} \right\} [78]$$

Cualquiera de los tres sistemas de ecuaciones [76], [77] y [78] puede servir para resolver este caso, pues que nos



dan los valores de los ángulos (ó de sus líneas trigonométricas) en funcion de sus lados que son conocidos. En el sistema [76] hay que hallar siete logaritmos, en el [77] seis, y solamente cuatro logaritmos en el [78]; de modo, que cuando van á hallarse *los tres ángulos de un triángulo conocidos los tres lados, es preferible el sistema de ecuaciones* [78].

En todo rigor, bastaria hallar el valor de dos ángulos, pues el tercero será suplemento de la suma de los otros dos; pero se halla directamente como un medio de comprobación.

Veamos la disposicion de los cálculos en un

EJEMPLO NUMÉRICO. (\*)

Datos.  $a=57.770$ .  $b=71.577$ .  $c=87.811$ .

Fórmulas [78]  $\left\{ \begin{array}{l} \log \tan \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [\log (p-b) + \log (p-c) - \log p - \log (p-a)] \\ \log \tan \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} [\log (p-a) + \log (p-c) - \log p - \log (p-b)] \\ \log \tan \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} [\log (p-a) + \log (p-b) - \log p - \log (p-c)] \end{array} \right.$

tomados logaritmos.

Valores auxil.<sup>s</sup>  $p=108.579$ ,  $(p-a)=50.809$ ,  $(p-b)=37.002$ ,  $(p-c)=70.768$ .

| Cálculo del áng. A.                               | Cálculo del áng. B.                               | Cálculo del áng. C.                               |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\log (p-b) = 4,568225$                           | $\log (p-a) = 4,705941$                           | $\log (p-a) = 4,705941$                           |
| $\log (p-c) = 4,317395$                           | $\log (p-c) = 4,317395$                           | $\log (p-b) = 4,568225$                           |
| $-\log p = -5,035750$                             | $-\log p = -5,035750$                             | $-\log p = -5,035750$                             |
| $-\log (p-a) = -4,705941$                         | $-\log (p-b) = -4,568225$                         | $-\log (p-c) = -4,317395$                         |
| Suma algebr. = 1,445029                           | Suma algebr. = 1,419361                           | Suma algebr. = 1,921021                           |
| $\lg \lg \frac{1}{2} A = \text{mitad} = 1,571965$ | $\lg \lg \frac{1}{2} B = \text{mitad} = 1,709680$ | $\lg \lg \frac{1}{2} C = \text{mitad} = 1,960510$ |
| $\frac{1}{2} A = 20^{\circ} 28'.$                 | $B = 27^{\circ} 8' 4'', 24.$                      | $\frac{1}{2} B = 42^{\circ} 23' 55'', 56$         |
| áng. A = 40° 56'.                                 | áng. B = 54° 16' 8'', 48.                         | áng. C = 84° 47' 51'', 52                         |

Fórmulas de comp.  $A+B+C=180^{\circ}$ ,  $A < B < C$ , por ser  $a < b < c$ .

(\*) Los alumnos deberán resolver este mismo ejemplo empleando las fórmulas [76] y [77].

# PROBLEMA XVI.

*Conocidos a y b y el ángulo A opuesto al primero, resolver el triángulo.*

El ángulo B se puede determinar por la fórmula

$$a : b :: \text{sen } A : \text{sen } B,$$

de donde

$$\log \text{sen } B = \log b + \log \text{sen } A - \log a.$$

El ángulo  $C = 180^\circ - (A + B)$ .

El lado  $c$  se halla por la proporcion

$$c : a :: \text{sen } C : \text{sen } A,$$

de donde

$$\log c = \log a + \log \text{sen } C - \log \text{sen } A.$$

Si no quiere hacerse uso del ángulo C, valiéndose únicamente de los datos del problema, puede calcularse el lado  $c$  directamente, mediante la fórmula  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  que es una ecuacion completa de segundo grado con respecto á  $c$ , resolviéndola nos dá,

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 (\cos^2 A - 1) + a^2}$$

y como de  $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$ , resulta  $-\text{sen}^2 A = \cos^2 A - 1$ , sustituyendo en la cantidad subradical, tendremos

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \text{sen}^2 A}. \quad (a)$$

Esta fórmula no está dispuesta para el cálculo logarítmico, por lo que vamos á trasformarla en otra que lo esté. Si sacamos  $a^2$  factor comun de la cantidad subradical, tendremos

$$a^2 - b^2 \text{sen}^2 A = a^2 \left( 1 - \frac{b^2 \text{sen}^2 A}{a^2} \right);$$

pero el segundo término de este binomio no puede ser mayor que uno, es decir, que el radio; pues si lo fuera, la cantidad radical seria imaginaria, el lado  $c$  no existi-

ria, y por consiguiente, no habria triángulo. De aquí resulta, que se puede siempre hacer (18)

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \operatorname{sen} \alpha \quad (b)$$

De donde la ecuacion (a) se convierte en

$$c = b \cos A \pm \cos \alpha.$$

Sustituyendo en esta por  $b$  su valor sacado de la ecuacion auxiliar (b) que es

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} A},$$

tendremos

$$c = \frac{a \operatorname{sen} \alpha \cos A}{\operatorname{sen} A} \pm a \cos \alpha = \frac{a (\operatorname{sen} \alpha \cos A \pm \cos \alpha \operatorname{sen} A)}{\operatorname{sen} A}.$$

Pero teniendo presente las fórmulas [41] y [42], se transformará en

$$c = \frac{a \operatorname{sen} (\alpha \pm A)}{\operatorname{sen} A},$$

fórmula calculable por logaritmos, y en la que el valor del ángulo  $\alpha$  puede hallarse fácilmente mediante la ecuacion auxiliar

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},$$

de la que resulta

$$\log \operatorname{sen} \alpha = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log a.$$

**39. Discusion.** El ángulo B hemos visto que se determina por su seno, y como los senos de dos ángulos suplementarios son iguales, resulta que dicho ángulo es susceptible, en general de dos valores. Estudiemos los diversos casos que pueden ocurrir.

I.  $a > b$ , el ángulo  $A > B$ , y por consiguiente, B no podria ser ni recto ni obtuso, luego en este caso no hay más que una solucion.



II. Si  $a=b$ , tampoco podría ser B obtuso y por tanto, no hay más que un triángulo isóscele.

III. Si  $a < b$ , ángulo  $A < B$ , y por tanto B puede tener dos valores suplementarios y ambos mayores que el del ángulo A, existiendo en tal caso dos triángulos distintos, que satisfacen á la cuestion.

En efecto, la ecuacion  $a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$  que nos ha servido para determinar el ángulo B, prueba que si  $a < b$  tiene que ser  $\text{sen } B > \text{sen } A$ , y como de dos ángulos agudos es mayor el que tiene mayor seno, se deduce que  $B > A$ , y por tanto, *que el problema tiene dos soluciones.*

Podemos observar que para que el problema sea posible, es preciso que en la ecuacion  $a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$ , sea menor que la unidad  $\text{sen } B$  (pues ningun seno puede ser mayor que el radio), de donde se deduce que  $a > b \text{ sen } A$ ; pero siendo el triángulo ACB (Fig. 294), vemos que  $b \text{ sen } A$  es el valor de la perpendicular CD, y es evidente que el triángulo no podría existir si  $a$  no fuera mayor que CD.

Si fuera  $a = b \text{ sen } A = D$ , entonces el triángulo del problema sería el ACD, pues substituyendo el valor de  $a$  en la ecuacion que ha servido para determinar el ángulo B, tendríamos

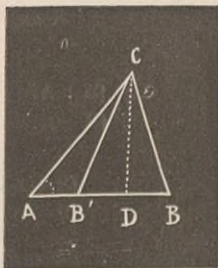


Fig. 294.

$b \text{ sen } A \text{ sen } B = b \text{ sen } A$ , de donde  $\text{sen } B = 1$ .

Es decir, que el ángulo B es recto.

NOTA.—Estos resultados están perfectamente de acuerdo con los que hemos visto en la discusion geométrica de este mismo problema.

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a=7158$ .  $b=5777$ .  $A=54^{\circ} 16'$ . (\*)

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log a \\ C = 180^{\circ} - (A + B) \\ \log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A. \end{cases}$$

Cálculo del ángulo  $B$ .

$$\begin{aligned} \log b &= 3,761702 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1},909419 \\ -\log a &= -3,854792 \\ \text{Su.}^a \text{ alg.} &= \lg \operatorname{sen} B = \bar{1},816329 \\ B &= 40^{\circ} 55' 47''. \end{aligned}$$

Cálculo del lado  $c$ .

$$\begin{aligned} \log a &= 3,854792 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},998211 \\ -\log \operatorname{sen} A &= -\bar{1},909419 \\ \text{Suma alg.} &= \log c = 3,943584 \\ c &= 8781, 81. \end{aligned}$$

$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 84^{\circ} 48' 13''.$$

*Elementos de un triángulo oblicuángulo para que sirva de ejemplo en los cuatro casos:*

$$a=28442, \quad b=17803, \quad c=30338.$$

$$A=66^{\circ} 38' 12'', \quad B=35^{\circ} 4' 22'', \quad C=78^{\circ} 17' 26''.$$

(\*) En este caso no hay más que una solución, porque  $a > b$  y por tanto  $A > B$ , no pudiendo ser  $B$  obtuso.

# TRIGONOMETRIA ESFERICA.

## CAPÍTULO I.

### FÓRMULAS GENERALES.

40. Sabemos (2) que la trigonometría esférica tiene por objeto la resolución numérica por medio del cálculo, de los triángulos esféricos. Para conseguir este fin vamos á fijar las relaciones que ligan á los lados y ángulos de los triángulos esféricos, ó más exactamente, las relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de dichos elementos de los triángulos esféricos.

### TEOREMA XI. (\*)

*En todo triángulo esférico el coseno de un lado, es igual al producto de los cosenos de los otros dos, mas el producto de los senos de estos lados, por el coseno del ángulo comprendido.*

Admitamos la misma convencion que en la trigonometría rectilínea para designar los lados y los ángulos, esto es, que siendo ABC el triángulo esférico, A, B, C designan sus ángulos, y  $a, b, c$  los lados respectivamente opuestos á dichos ángulos. Tratamos de demostrar que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

(\*) Este teorema suele llamarse fundamental, porque de él pueden deducirse todos los demás teoremas ó *analogías* de la trigonometría esférica.



Sea el triángulo  $ABC$  (Fig. 295); supongamos que los dos lados  $b$  y  $c$  son menores que un cuadrante, pudiendo ser el lado  $a$  menor ó mayor que un cuadrante. Constru-  
yamos el triedro correspondiente  $OABC$ , y desde el cen-  
tro  $O$  de la esfera tomemos en el

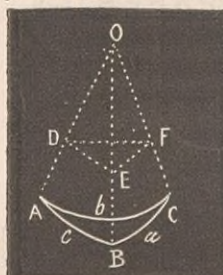


Fig. 295.

radio  $OA$  una parte  $OD=1$ , trazando por el punto  $D$  el ángulo plano  $EDF$  correspondiente al diedro  $OAC$ , y por consiguiente, medida del ángulo esférico  $A$ . Si unimos el punto  $E$  con  $F$ , tendremos en los dos triángulos  $OEF$  y  $DEF$  [Teor. IX.]

$$EF^2 = OE^2 + OF^2 - 2OE \times OF \cos a. \quad (a)$$

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \times DF \cos A. \quad (b)$$

Pero observemos que en los triángulos rectángulos  $ODE$  y  $ODF$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} DE = \tan c, \quad DF = \tan b \\ OE = \frac{1}{\cos c}, \quad OF = \frac{1}{\cos b} \end{array} \right\} \quad [\text{Teor. VI y VII}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OE^2 - DE^2 = OD^2 = 1 \\ OF^2 - DF^2 = OD^2 = 1 \end{array} \right\} \quad [\text{Teor. de Pitágoras.}]$$

Restando las ecuaciones (a) y (b) y teniendo presente estas últimas igualdades, tendremos

$$0 = 2 - 2OF \times OE \cos a + 2DF \times DE \cos A.$$

Dividiendo por 2 y sustituyendo los valores de las ecuaciones (c), resulta

$$0 = 1 - \frac{1}{\cos b \cos c} \cos a + \tan b \tan c \cos A.$$

Multiplicando por  $\cos b \cos c$ , trasponiendo y teniendo presente que

$$\tan b \cos b = \sin b \quad \text{y} \quad \tan c \cos c = \sin c,$$

resulta en fin

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \quad (\alpha)$$

41. Hemos supuesto que los lados  $b$  y  $c$  son menores que un cuadrante, pero el teorema es cierto cualquiera que sean los valores de estos lados.

1.<sup>er</sup> caso. Sean  $b > 90^\circ$  y  $c < 90^\circ$ , (Fig. 296). Prolongando los lados  $b$  y  $a$  hasta su encuentro en  $C'$ , el triángulo esférico  $ABC'$  tiene los dos lados  $AC'$  y  $AB$ , menores que un cuadrante, y por tanto en él se verificará que

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos BAC'.$$

Pero tenemos que

$$b' = 180^\circ - b$$

$$a' = 180^\circ - a$$

$$BAC' = 180^\circ - A.$$

Por consiguiente,

$$\left. \begin{aligned} \cos b' &= -\cos b \\ \cos a' &= -\cos a \end{aligned} \right\} [Teor. III]$$

$$\cos BAC' = -\cos A$$

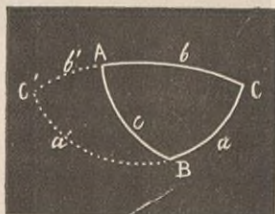


Fig. 296.

Luego substituyendo en la fórmula correspondiente al triángulo  $C'BA$ , nos dará

$$-\cos a = -\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A,$$

ó bien:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

2.<sup>o</sup> caso. Supongamos en el triángulo  $ABC$  (Fig. 296)  $b > 90^\circ$ ,  $c > 90^\circ$ . En este caso el triángulo  $ABC'$  tiene cuando ménos al lado  $b < 90^\circ$  y por tanto el teorema se verificará por estar comprendido en el 1.<sup>er</sup> caso; luego entonces tambien se verificará para el triángulo  $ABC$ .

3.<sup>er</sup> caso. Sea  $b = 90^\circ$  (Fig. 297). Tomemos sobre el arco  $AB$  una parte  $AA' = 90^\circ$  y describamos el arco de círculo máximo  $A'C$ ; el polo de este arco será  $A$  [Geom. teor. CCXI, escolio] y por tanto la medida de este ángulo el expresado arco  $A'C$ .

Ahora podrá suceder: 1.º que el arco  $A'C$  sea un cuadrante. 2.º que el arco  $A'C$  no sea un cuadrante.

1.º Si el arco  $A'C$  es un cuadrante, el punto  $C$  es polo del arco  $AA'B$ , luego también  $BC$  es un cuadrante;

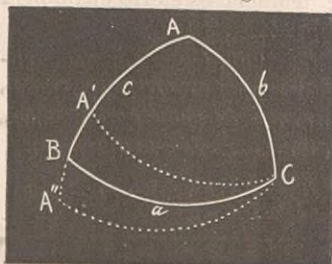


Fig. 297.

pero entonces la ecuación ( $\alpha$ ) se verifica, pues siendo  $\cos a = 0$ ,  $\cos b = 0$  y  $\cos A = \cos A'C = 0$ , tenemos, que dicha ecuación se convierte en

$$0 = 0,$$

es decir, una identidad.

2.º Si el arco  $A'C$  no es un cuadrante, como  $BA'$  tampoco lo es, apliquemos la fórmula ( $\alpha$ ) al triángulo  $A'BC$  [1.º caso ó segundo], y tendremos:

$$\cos BC = \cos BA' \cos A'C + \sin BA' \sin A'C \cos B A' C.$$

Pero tenemos

$$\cos BC = \cos a$$

$$\cos B A' = \cos (\pm (90^\circ - c)) = \pm \sin c.$$

$$\cos A'C = \cos A.$$

$$\cos B A' C = \cos 90^\circ = 0.$$

Luego sustituyendo estos valores en la anterior fórmula, se convertirá en

$$\cos a = \pm \sin c \cos A.$$

que es á lo que se reduce la fórmula ( $\alpha$ ) suponiendo  $b = 90^\circ$ .

4.º caso. Si  $b = 90^\circ$  y  $c = 90^\circ$ , el lado  $a$  es la medida del ángulo  $A$ , y como la fórmula ( $\alpha$ ) se transforma en este supuesto en

$$\cos a = \cos A,$$

esta es una identidad, y la ecuación queda satisfecha.



Por consiguiente, queda demostrada la generalidad de la fórmula (α) para todos los valores posibles.

Aplicando el teorema que acabamos de demostrar á los tres lados del triángulo, tendremos las tres ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} [79]$$

42. Estas tres ecuaciones son distintas y contienen los seis elementos de un triángulo esférico; por consiguiente, con ellas pueden resolverse todos los problemas de la trigonometría esférica; pues conocidos tres de los seis elementos del triángulo, tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Sin embargo, vamos á deducir de estas ecuaciones otras que son de más fácil aplicación en algunos casos de resolución de dichos triángulos. Estas transformaciones del sistema [79] dan origen á otros teoremas que pasamos á demostrar.

## TEOREMA XII.

*En todo triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Si elimináramos el lado  $c$  en las dos primeras ecuaciones del sistema [79], quedaria una relacion entre los otros dos lados  $a$  y  $b$  y sus ángulos opuestos  $A$  y  $B$ , la que convenientemente transformada habria de darnos necesariamente el enunciado del teorema.

Para efectuar esta eliminacion, sumemos y restemos dichas ecuaciones y tendremos

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b &= \cos c (\cos a + \cos b) + \sin c (\sin b \cos A + \sin a \cos B) \\ \cos a - \cos b &= \cos c (\cos b - \cos a) + \sin c (\sin b \cos A - \sin a \cos B). \end{aligned}$$

Que se pueden escribir de este otro modo, sacando  $\cos a + \cos b$  factor comun en la primera,  $\cos a - \cos b$ ,

en la segunda y trasponiendo

$$\begin{aligned}(\cos a + \cos b) (1 - \cos c) &= \sin c (\sin b \cos A + \sin a \cos B) \\(\cos a - \cos b) (1 + \cos c) &= \sin c (\sin b \cos A - \sin a \cos B).\end{aligned}$$

Ahora, si multiplicamos miembro á miembro estas dos ecuaciones teniendo presente que

$$(1 + \cos c) (1 - \cos c) = 1 - \cos^2 c = \sin^2 c,$$

resultará dividiendo por  $\sin^2 c$

$$\begin{aligned}(\cos a + \cos b) (\cos a - \cos b) &= (\sin b \cos A + \sin a \cos B) \\&(\sin b \cos A - \sin a \cos B)\end{aligned}$$

efectuando la multiplicacion indicada

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B.$$

Y poniendo los valores de los cosenos en funcion de los senos

$$1 - \sin^2 a - 1 + \sin^2 b = \sin^2 b - \sin^2 b \sin^2 A - \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 B.$$

Reduciendo términos semejantes, trasponiendo y extrayendo raíz cuadrada

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

De donde se deduce la proporcion

$$\sin a : \sin b :: \sin A : \sin B.$$

Aplicando el teorema á los tres lados del triángulo, nos dará las tres ecuaciones

$$\left. \begin{aligned}\sin a : \sin b :: \sin A : \sin B \\ \sin a : \sin c :: \sin A : \sin C \\ \sin b : \sin c :: \sin B : \sin C\end{aligned} \right\} [80]$$

### TEOREMA XIII.

*En todo triángulo esférico la cotangente de un lado por el seno de otro es igual al coseno de este por el coseno del ángulo comprendido, mas el seno de este ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primer lado.*

Como se trata aquí de hallar una relacion entre los lados  $a$  y  $b$  y los ángulos  $A$  y  $C$ , será preciso eliminar el lado  $c$  entre las ecuaciones 1.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> del sistema [79].

Para ello sustituyo en la primera el valor  $\cos c$  que indica el segundo miembro de la tercera, y tendré

$$\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A.$$

Ahora para eliminar  $\sin c$  de esta ecuacion, sustituyo su valor sacado de la segunda ecuacion (ó proporcion) del sistema [80], y tendremos

$$\cos a = \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \frac{\sin a \sin C}{\sin A} \cos A.$$

Efectuada la multiplicacion indicada y recordando que  $\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$ , tendremos

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin C \sin b \cot A.$$

Pasando al primer miembro  $\cos a \cos^2 b$  y sacando factor comun  $\cos a$ , tendremos

$$\cos a (1 - \cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin a \sin C \sin b \cot A.$$

Sustituyendo  $\sin^2 b$  en lugar de  $1 - \cos^2 b$ , y dividiendo por  $\sin a \sin b$ , resulta finalmente

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$$

que es el enunciado del teorema.

Si formamos todas las combinaciones posibles entre dos lados, el ángulo comprendido y el ángulo opuesto, tendremos las seis ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A \\ \cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B \\ \cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C \end{aligned} \right\} [81]$$



# TEOREMA XIV.

*En todo triángulo esférico el coseno de un ángulo es igual á menos el producto de los cosenos de los otros dos, mas el producto de los senos de los mismos, por el coseno del lado opuesto al primero.*

En efecto, sea un triángulo cualquiera ABC, (sus ángulos A, B y C, y sus lados  $a, b, c$ ) consideremos el triángulo A'B'C' suplementario del propuesto. En este triángulo se verificará el teorema XI y por tanto tendremos:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Pero sabemos que en los triángulos suplementarios los lados del uno son suplementos de los ángulos del otro y recíprocamente. Luego sustituyendo en esta fórmula por los lados del triángulo A'B'C', los ángulos del triángulo ABC, y por los ángulos los lados, se transformará en

$$-\cos A = -\cos B \times -\cos C + \sin B \sin C \times -\cos a,$$

ó bien cambiando los signos

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

la fórmula que aplicada á los tres ángulos, nos dá las tres ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{array} \right\} [32]$$

Los cuatro grupos de fórmulas [79] [80] [81] [82] nos presentan las quince combinaciones que pueden hacerse con los seis elementos de un triángulo esférico ( $a, b, c, A, B, C$ ) tomados cuatro á cuatro, de manera que para resolver un triángulo esférico, basta elegir aquellas que más convengan al caso por su mayor facilidad, y hacerlas calculables por logaritmos si no lo son; lo que siempre es

posible atendiendo á que en todos los casos será un binomio que contendrá en uno de los términos el seno y en el otro el coseno de un mismo arco [*Prob. VIII.*]

43. Los cuatro sistemas de fórmulas hallados para los triángulos esféricos en general, se simplifican mucho para el caso en que el triángulo es rectángulo; así, suponiendo el ángulo A recto, tendremos:

$$\cos a = \cos b \cos c \quad [83]$$

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C \end{aligned} \right\} [84]$$

$$\left. \begin{aligned} \tan b &= \tan a \cos C \\ \tan b &= \sin c \tan B \\ \tan c &= \tan a \cos B \\ \tan c &= \sin b \tan C \end{aligned} \right\} [85]$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cot B \cot C \\ \cos B &= \cos b \sin C \\ \cos C &= \cos c \sin B \end{aligned} \right\} [86]$$

Estas diez fórmulas comprenden todas las combinaciones que pueden hacerse con las cinco cantidades  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $B$ ,  $C$ , tomadas de tres en tres y por tanto sirven para todos los casos de resolución de los triángulos esféricos rectángulos. Todas ellas son calculables por logaritmos.

#### TEOREMA XV.

*Los lados de un triángulo esférico rectángulo, son todos menores que un cuadrante, ó bien uno solo es menor que un cuadrante y los otros dos mayores.*

En efecto, si en la ecuación [83]

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

supusiéramos que los tres arcos, ó lados del triángulo, eran mayores que  $90^\circ$ , sus cosenos serian negativos, y tendríamos que el primer miembro de ella seria negativo, y

el segundo positivo, lo que es absurdo; luego los tres lados tienen que ser menores que  $90^\circ$ , ó uno menor y los otros dos mayores que  $90^\circ$ , para que los signos de ambos miembros sean iguales.

### TEOREMA XVI.

*En todo triángulo esférico rectángulo, cada cateto y su ángulo opuesto son de la misma especie, esto es, los dos agudos ó los dos obtusos.*

De la igualdad  $\cos B = \cos b \sin C$ , [86] se deduce que siendo  $\sin C$  siempre positivo,  $\cos B$  y  $\cos b$ , deben tener el mismo signo; y por consiguiente, los dos serán mayores ó menores que  $90^\circ$ .

---

## CAPITULO II.

### RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

---

44. Un triángulo esférico puede ser trirectángulo, pero entonces todos sus elementos son conocidos, pues sus lados son cuadrantes [*Geom. teor.* CCXXVI]; tambien puede ser birectángulo, pero entonces los lados opuestos á los ángulos rectos son cuadrantes, y el tercer lado es la medida del tercer ángulo; así es que no debemos ocuparnos más que de los triángulos unirectángulos.

Los ángulos oblicuos del triángulo rectángulo pueden ser obtusos, de lo que se deduce que los catetos pueden ser mayores que la hipotenusa; al contrario de lo que en los triángulos rectángulos rectilíneos se verifica siempre.

Como en el triángulo rectángulo se conoce uno de los ángulos que llamaremos A (Fig. 298), basta conocer otros dos elementos para resolverlo. Así es que se pueden com-



binar de dos en dos dichos elementos, dando lugar á seis casos de resolucion distintos que dan origen á otros tantos problemas que son:

- 1.º *Dados la hipotenusa y un cateto.*
- 2.º *Dados la hipotenusa y un ángulo oblicuo.*
- 3.º *Dados los dos catetos.*
- 4.º *Dados los dos ángulos oblicuos.*
- 5.º *Dados un cateto y el ángulo adyacente.*
- 6.º *Dados un cateto y el ángulo opuesto.*

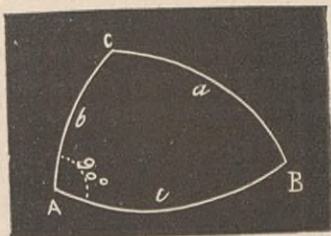


Fig. 298.

### PROBLEMA XVII.

*Dados la hipotenusa a y un cateto b de un triángulo esférico rectángulo, hallar el otro cateto c y los ángulos B y C.*

De la fórmula [83] se deduce inmediatamente el valor del cateto c, pues tenemos

$$\cos a = \cos b \cos c, \text{ de donde } \cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

y tomando logaritmos:

$$\log \cos c = \log \cos a - \log \cos b.$$

El ángulo B se halla por la fórmula [84]

$$\sin b = \sin a \sin B, \text{ de donde } \sin B = \frac{\sin b}{\sin a},$$

y tomando logaritmos:

$$\log \sin B = \log \sin b - \log \sin a.$$

El ángulo C se determina por la fórmula [85]

$$\tan b = \tan a \cos C, \text{ de donde } \cos C = \frac{\tan b}{\tan a},$$

y por consiguiente

$$\log \cos C = \log \tan b - \log \tan a.$$

Aunque el ángulo B se determina por su seno, aquí no puede haber ambigüedad, pues ha de ser de la misma especie que su lado opuesto  $b$  que es conocido [Teor. XVI].

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a = 86^\circ 14'$ .  $b = 72^\circ 40'$ .

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \cos c = \log \cos a - \log \cos b \\ \log \sen B = \log \sen b - \log \sen a \\ \log \cos C = \log \tang b - \log \tang a. \end{cases}$$

**Cálculo del cateto  $c$ .** **Cálculo del áng.  $B$ .** **Cálculo del áng.  $C$ .**

$$\log \cos a = \overline{2},817522$$

$$\log \sen b = \overline{1},979816$$

$$\log \tang b = 0,505701$$

$$\log \cos b = \overline{1},474115$$

$$\log \sen a = \overline{1},999061$$

$$\log \tang a = 1,181539$$

$$\text{Dif.} = \log \cos c = \overline{1},343407$$

$$\text{Dif.} = \log \sen B = \overline{1},980755$$

$$\text{Dif.} = \log \cos C = \overline{1},324162$$

$$c = 77^\circ 15' 41''.$$

$$C = 73^\circ 4' 8''.$$

$$C = 77^\circ 49' 21''. (*)$$

PROBLEMA XVIII.

Conocida la hipotenusa  $a$  y un ángulo oblicuo  $B$  de un triángulo esférico, determinar el otro ángulo  $C$  y los dos catetos  $b$  y  $c$ .

Empleando las fórmulas [84] [85] [86], tendremos:

$$\sen b = \sen a \sen B$$

$$\tang c = \tang a \cos B$$

$$\cos a = \cot B \cot C, \text{ de donde } \cot C = \frac{\cos a}{\cot B},$$

por consiguiente

$$\log \sen b = \log \sen a + \log \sen B$$

$$\log \tang c = \log \tang a + \log \cos B$$

$$\log \cot C = \log \cos a - \log \cot B.$$

(\*) En este y los demás ejemplos se han despreciado las fracciones de segundos que resultan de los cálculos; pues no siendo nuestro objeto más que el presentar la disposición de las operaciones numéricas y el que los alumnos se ejerciten en el uso y manejo de las tablas trigonométricas, nada importa el error cometido.

La exactitud de los valores obtenidos puede comprobarse empleando alguna de las fórmulas halladas para los triángulos que no haya servido para el cálculo y en la que entren estos valores, y viendo si se convierten en una identidad. En la trigonometría rectilínea hemos indicado las fórmulas comprobatorias, que en obsequio á la brevedad no señalamos en los ejemplos de la trigonometría esférica.

Las que nos dan los valores de las tres incógnitas en funcion de los datos.

EJEMPLO NUMÉRICO.

**Datos.**  $a = 86^{\circ} 14'$ .  $B = 73^{\circ} 4' 8''$ .

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \operatorname{sen} b = \log \operatorname{sen} a + \log \operatorname{sen} B \\ \log \operatorname{tang} c = \log \operatorname{tang} a + \log \cos B \\ \log \cot C = \log \cos a - \log \cot B. \end{cases}$$

**Cálculo del cateto  $b$ .** **Cálculo del cateto  $c$ .** **Cálculo del áng.  $C$ .**

|                                                                 |                                                      |                                                   |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\log \operatorname{sen} a = \overline{1},999061$               | $\log \operatorname{tag} a = 1,181539$               | $\log \cos a = \overline{2},817522$               |
| $\log \operatorname{sen} B = \overline{1},980755$               | $\log \cos B = \overline{1},464224$                  | $\log \cot B = \overline{1},483469$               |
| $\text{Suma} = \log \operatorname{sen} b = \overline{1},979816$ | $\text{Suma} = \log \operatorname{tag} c = 0,645763$ | $\text{Dif.} = \log \cot C = \overline{1},334055$ |
| $b = 72^{\circ} 40'.$                                           | $c = 77^{\circ} 15' 41''.$                           | $C = 77^{\circ} 49' 20''.$                        |

PROBLEMA XIX.

*Conocidos los dos catetos  $b$  y  $c$ , hallar la hipotenusa  $a$  y los dos ángulos  $B$  y  $C$ .*

Las fórmulas [83] y [85] nos dan despejando en ellas las cantidades desconocidas,

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c \\ \operatorname{tang} B &= \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c} \\ \operatorname{tang} C &= \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{donde} \end{array} \right. \begin{cases} \log \cos a = \log \cos b + \log \cos c \\ \log \operatorname{tang} B = \log \operatorname{tang} b - \log \operatorname{sen} c \\ \log \operatorname{tang} C = \log \operatorname{tang} c - \log \operatorname{sen} b. \end{cases}$$

EJEMPLO NUMÉRICO.

**Datos.**  $b = 72^{\circ} 40'.$   $c = 77^{\circ} 15' 41''.$

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \cos a = \log \cos b + \log \cos c \\ \log \operatorname{tang} B = \log \operatorname{tang} b - \log \operatorname{sen} c \\ \log \operatorname{tang} C = \log \operatorname{tang} c - \log \operatorname{sen} b. \end{cases}$$

**Cálculo de la hip.<sup>a</sup>  $a$ .** **Cálculo del áng.  $B$ .** **Cálculo del áng.  $C$ .**

|                                                   |                                                       |                                                       |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\log \cos b = \overline{1},474115$               | $\log \operatorname{tag} b = 0,508701$                | $\log \operatorname{tag} c = 0,645762$                |
| $\log \cos c = \overline{1},343415$               | $\log \operatorname{sen} c = \overline{1},989177$     | $\log \operatorname{sen} b = \overline{1},979816$     |
| $\text{Suma} = \log \cos a = \overline{2},817530$ | $\text{Dif.} = \log \operatorname{tang} B = 0,516524$ | $\text{Dif.} = \log \operatorname{tang} C = 0,665946$ |
| $a = 86^{\circ} 14'.$                             | $B = 73^{\circ} 4' 8''.$                              | $C = 77^{\circ} 49' 20''.$                            |



# PROBLEMA XX.

Dados los dos ángulos oblicuos B y C, calcular los tres lados a, b, c.

Las fórmulas [86] en cada una de las cuales no entra más que un lado, son muy á propósito para resolver este problema. De ellas sacamos:

$$\begin{array}{l} \cos a = \cot B \cot C \\ \cos b = \frac{\cos B}{\sin C} \\ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{donde} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \log \cos a = \log \cot B + \log \cot C \\ \log \cos b = \log \cos B - \log \sin C \\ \log \cos c = \log \cos C - \log \sin B. \end{array}$$

## EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $B = 73^{\circ} 4' 8''$ .  $C = 77^{\circ} 49' 20''$ .

$$\text{Fórmulas} \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \cos a = \log \cot B + \log \cot C \\ \log \cos b = \log \cos B - \log \sin C \\ \log \cos c = \log \cos C - \log \sin B. \end{array} \right.$$

| Cálculo de la hip. <sup>a</sup> a.         | Cálculo del cateto b.                      | Cálculo del cateto c.                      |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\log \cot B = \overline{1},483468$        | $\log \cos B = \overline{1},464224$        | $\log \cos C = \overline{1},324162$        |
| $\log \cot C = \overline{1},334054$        | $\log \sin C = \overline{1},990117$        | $\log \sin B = \overline{1},980755$        |
| Suma = $\log \cos a = \overline{2},817522$ | Dif. = $\log \cos b = \overline{1},474107$ | Dif. = $\log \cos c = \overline{1},343407$ |
| $a = 86^{\circ} 14'$ .                     | $b = 72^{\circ} 40'$ .                     | $c = 77^{\circ} 15' 41''$ .                |

# PROBLEMA XXI.

Conocidos un cateto b y el ángulo adyacente C de un triángulo esférico, hallar la hipotenusa a, el otro cateto c y el ángulo B.

De las fórmulas [85] y [86] se deduce:

$$\begin{array}{l} \tan a = \frac{\tan b}{\cos C} \\ \tan c = \sin b \tan C \\ \cos B = \cos b \sin C \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{donde} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \log \tan a = \log \tan b - \log \cos C \\ \log \tan c = \log \sin b + \log \tan C \\ \log \cos B = \log \cos b + \log \sin C. \end{array}$$

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $b = 72^\circ 40'$ .  $C = 77^\circ 49' 20''$ .

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \operatorname{tang} a = \log \operatorname{tang} b - \log \cos C \\ \log \operatorname{tang} c = \log \operatorname{sen} b + \log \operatorname{tang} C \\ \log \cos B = \log \cos b + \log \operatorname{sen} C. \end{cases}$$

| Cálculo de la hip. <sup>a</sup> a.                    | Cálculo del cateto c.                                 | Cálculo del áng. B.                    |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| $\log \operatorname{tang} b = 0,505701$               | $\log \operatorname{sen} b = 1,979816$                | $\log \cos b = 1,474107$               |
| $\log \cos C = 1,384162$                              | $\log \operatorname{tang} C = 0,665946$               | $\log \operatorname{sen} C = 1,990117$ |
| $\text{Dif.} = \log \operatorname{tang} a = 0,181539$ | $\text{Suma} = \log \operatorname{tang} c = 0,645762$ | $\text{Suma} = \log \cos B = 1,464224$ |
| $a = 80^\circ 14'$                                    | $c = 77^\circ 15' 45''$                               | $B = 73^\circ 4' 8''$                  |

PROBLEMA XXII.

Dados un cateto  $b$  y el ángulo opuesto  $B$  de un triángulo esférico, calcular los dos lados  $a$  y  $c$  y el ángulo  $C$ .

Para resolver este problema aplicaremos las fórmulas [84] [85] y [86] que nos dan:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} \\ \operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B} \\ \operatorname{sen} C = \frac{\cos B}{\cos b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{de} \\ \text{donde} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{sen} a = \log \operatorname{sen} b - \log \operatorname{sen} B \\ \log \operatorname{sen} c = \log \operatorname{tang} b - \log \operatorname{tang} B \\ \log \operatorname{sen} C = \log \cos B - \log \cos b. \end{array} \right.$$

45. **Discusion.** Las incógnitas  $a$ ,  $c$  y  $C$ , se determinan por sus senos, por lo que cada uno de estos elementos admitirá dos valores suplementarios; pero el problema no es susceptible de ocho soluciones como á primera vista parece, sino únicamente de dos, atendiendo á que un ángulo oblicuo de un triángulo esférico rectángulo es siempre de la misma especie que su lado opuesto, y á que los tres lados de un triángulo esférico rectángulo son menores que un cuadrante, ó dos mayores que un cuadrante y el otro menor [Teor. XV y XVI].

De modo que si llamamos  $a, c, C$  y  $a', c', C'$ , los valores respectivamente pareados y suplementarios de las tres incógnitas del problema y suponemos:

$$\left. \begin{array}{l} a < 90^\circ \\ c < 90^\circ \\ C < 90^\circ \end{array} \right\} \text{tendremos } \left\{ \begin{array}{l} a' = 180^\circ - a > 90^\circ \\ c' = 180^\circ - c > 90^\circ \\ C' = 180^\circ - C > 90^\circ \end{array} \right.$$

Las únicas combinaciones que pueden hacerse de estos seis valores para que satisfagan las condiciones demostradas en los teoremas XV y XVI son:

$$\begin{array}{l} \text{Si } b < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} 1.^a \quad a < 90^\circ, \quad c < 90^\circ, \quad C < 90^\circ. \\ 2.^a \quad a' > 90^\circ, \quad c' > 90^\circ, \quad C' > 90^\circ. \end{array} \right. \\ \text{Si } b > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} 1.^a \quad a < 90^\circ, \quad c' > 90^\circ, \quad C' > 90^\circ. \\ 2.^a \quad a' > 90^\circ, \quad c < 90^\circ, \quad C < 90^\circ. \end{array} \right. \end{array}$$

Y vemos que en los dos casos (de ser  $b < 90^\circ$ , ó  $b > 90^\circ$ ) solo hay dos triángulos posibles, siendo sus elementos respectivamente suplementarios.

La Geometría confirma estas consideraciones analíticas, pues si tenemos un triángulo esférico rectángulo

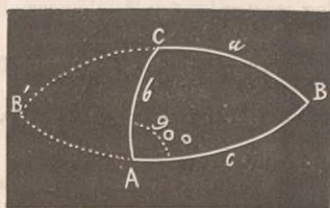


Fig. 299.

ABC (Fig. 299) que satisfaga el problema, prolongado sus lados CB y AB hasta que se encuentre en B', resultará otro triángulo esférico rectángulo en A, que tiene el lado  $b$ , comun con el anterior y

el ángulo  $B' = B$ ; pero este triángulo esférico  $AB'C$ , tiene sus otros dos lados y el otro ángulo suplementarios con los del anterior, porque

$$\begin{array}{l} B'C = 180^\circ - a \\ B'A = 180^\circ - c \\ B'CA = 180^\circ - C. \end{array}$$

Luego dados un lado de un triángulo esférico rectángulo y el ángulo opuesto á él, existen dos triángulos que sa-



*tisfacen á esta condicion, y sus elementos desconocidos son suplementarios respectivamente.*

**EJEMPLO NUMÉRICO.**

**Datos.**  $b = 72^\circ 40'$ .  $B = 73^\circ 4' 8''$ . (\*)

$$\text{Fórmulas} \begin{cases} \log \operatorname{sen} a = \log \operatorname{sen} b - \log \operatorname{sen} B \\ \log \operatorname{sen} c = \log \operatorname{tang} b - \log \operatorname{tang} B \\ \log \operatorname{sen} C = \log \cos B - \log \cos b. \end{cases}$$

**Cálculo de la hip.<sup>a</sup> a.    Cálculo del cateto c.    Cálculo del áng. C.**

$$\log \operatorname{sen} b = \overline{1},979816$$

$$\log \operatorname{tag} b = 0,505701$$

$$\log \cos B = \overline{1},464224$$

$$\log \operatorname{sen} B = \overline{1},980755$$

$$\log \operatorname{tag} B = 0,516524$$

$$\log \cos b = \overline{1},474115$$

$$\text{Dif.} = \log \operatorname{sen} a = \overline{1},999061$$

$$\text{Dif.} = \log \operatorname{sen} c = \overline{1},989177$$

$$\text{Dif.} = \log \operatorname{sen} C = \overline{1},990109$$

$$a = \begin{cases} 86^\circ 14' \\ 93^\circ 46' \end{cases}$$

$$c = \begin{cases} 77^\circ 15' 41'' \\ 102^\circ 44' 19'' \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 77^\circ 49' 21'' \\ 102^\circ 10' 39'' \end{cases}$$

*Elementos de un triángulo.*  $\begin{cases} a = 86^\circ 14', & b = 72^\circ 40', & c = 77^\circ 15' 41'' \\ A = 90^\circ & B = 73^\circ 4' 8'', & C = 77^\circ 49' 21'' \end{cases}$

*Elementos del otro triángulo.*  $\begin{cases} a = 93^\circ 46', & b = 72^\circ 40', & c = 102^\circ 44' 19'' \\ A = 90^\circ & B = 73^\circ 4' 8'', & c = 102^\circ 10' 39'' \end{cases}$

## CAPÍTULO III.

### RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS OBLICUÁNGULOS.

46. Dados tres de los seis elementos de un triángulo cualquiera, puede resolverse el triángulo. El problema es posible y determinado, siempre que los valores de los datos sean tales que puedan satisfacer á las condiciones de existencia de dichos triángulos, demostradas en la Geometría, es decir:

1.º *Que á los lados mayores se opongan los mayores ángulos y reciprocamente.*

(\*) Siendo  $b < 90^\circ$ , las dos soluciones posibles, son

$$1.^a \dots a < 90^\circ, \quad c < 90^\circ, \quad C < 90^\circ$$

$$2.^a \dots a' > 90^\circ, \quad c' > 90^\circ, \quad C' > 90^\circ.$$

2.º Que la suma de sus lados sea menor que una circunferencia.

3.º Que un lado cualquiera sea menor que la suma de los dos y mayor que su diferencia.

4.º Que la suma de sus ángulos sea menor que seis rectos y mayor que dos.

Con tales condiciones, puede resolverse un triángulo con los elementos siguientes:

1.º Conocidos los tres lados.

2.º Conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

3.º Conocidos dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

4.º Conocidos los tres ángulos.

5.º Conocidos dos ángulos y el lado adyacente.

6.º Conocidos dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos.

Estos tres últimos casos pueden refundirse en los tres primeros por medio de los triángulos suplementarios.

### PROBLEMA XXIII.

Conocidos los tres lados  $a, b$  y  $c$  de un triángulo esférico, determinar sus tres ángulos  $A, B, C$ .

Las ecuaciones [79] que contienen cada una los tres lados conocidos y uno de los ángulos, son las más fáciles de aplicar en este caso. La primera de ella nos dá

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad (a)$$

Para hacer calculable por logaritmos esta fórmula, vamos á seguir un método análogo al empleado en el problema XV de la trigonometría rectilínea. Tendremos, sumando la unidad á ambos miembros,

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c}.$$

De donde se deduce segun las fórmulas [51] y [61], su-  
primiendo el factor 2 comun á los dos miembros

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c+a}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Si se representa por  $2p$  el perímetro  $a+b+c$  del trián-  
gulo, tendremos que  $b+c-a=(p-a)$ , luego, sustitu-  
yendo y extrayendo raiz cuadrada

$$\left. \begin{array}{l} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin a \sin c}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin a \sin b}} \end{array} \right\} \text{De igual manera} \quad [87]$$

obtendremos

Si restáramos de la unidad ambos miembros de la ecua-  
cion (a), obtendríamos

$$\left. \begin{array}{l} \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \sin c}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-c)}{\sin a \sin c}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \sin b}} \end{array} \right\} [88]$$

Dividiendo miembro á miembro cada una de las tres  
fórmulas [88] por su correspondiente [87] resultará:

$$\left. \begin{array}{l} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-c) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin p \sin (p-c)}} \end{array} \right\} [89]$$



47. Cualquiera de estos tres grupos de fórmulas, calculables por logaritmos, puede emplearse para hallar los valores de los tres ángulos del triángulo, pero conviene emplear el último [89], porque no exige más que cuatro logaritmos, siendo así que el [88] exige seis, y siete el grupo [87].

48. *Discusion.* La discusion analítica de cualquiera de estas fórmulas, nos puede demostrar las *condiciones geométricas de existencia del triángulo esférico*, que hemos repetido antes del enunciado de este problema. Tomemos, por ejemplo, la fórmula

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Para que el  $\cos \frac{A}{2}$  exista, es preciso que su valor no sea imaginario, lo que á su vez exige que la cantidad subradical sea positiva. Cualquier valor que haga negativa la cantidad subradical indicará una imposibilidad en la existencia del triángulo. Esta cantidad se compone de los cuatro factores  $\sin p$ ,  $\sin (p-a)$ ,  $\sin b$   $\sin c$ . Si siendo positivas tres de ellas una es negativa, evidentemente la cantidad fraccionaria es negativa. Estudiemos estos cuatro casos:

1.º Si  $\sin p < 0$ , el arco  $p > 180^\circ$ , y por tanto  $2p =$  perímetro del triángulo  $> 360^\circ$  resultado absurdo. [*Geomet. teor.* CCXVII.]

2.º Si  $\sin (p-a) = \sin \frac{b+c-a}{2} < 0$ , tal desigualdad no puede existir más que en los dos casos:

$\frac{b+c-a}{2} > 180^\circ$ , de donde  $b+c > 360^\circ + a$ , resultado absurdo.

$\frac{b+c-a}{2} < 0$ , de donde  $b+c > a$ , tambien absurdo.

3.º Si  $\sin b < 0$ ,  $b > 180^\circ$  }  
 4.º Si  $\sin c < 0$ ,  $c > 180^\circ$  } Lo que es absurdo.

Por tanto, suponiendo negativo uno cualquiera de los cuatro factores, y siendo imaginaria en tal caso la cantidad radical, ó sea el coseno  $\frac{A}{2}$  el triángulo no puede existir, por entrañar una imposibilidad geométrica en sus condiciones esenciales.

Podría sin embargo suponerse, que los dos factores del numerador eran negativos, ó los dos del denominador, ó los cuatro factores, ó uno del numerador y otro del denominador, y en cualquiera de estos casos, la cantidad subradical sería positiva; pero tales supuestos son absurdos según acabamos de demostrar. *Por consiguiente, es preciso para que el triángulo exista, que todos los factores de la cantidad subradical sean positivos.*

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a=80^{\circ}14'$ .  $b=70^{\circ}19'$ .  $c=53^{\circ}25'$ .

$$\begin{aligned} \text{Fórmulas.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lg \tan \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} [\log \sin (p-b) + \log \sin (p-c) - \log \sin p - \log \sin (p-a)] \\ \lg \tan \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} [\log \sin (p-a) + \log \sin (p-c) - \log \sin p - \log \sin (p-b)] \\ \lg \tan \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} [\log \sin (p-a) + \log \sin (p-b) - \log \sin p - \log \sin (p-c)] \end{array} \right. \end{aligned}$$

Valores auxiliares.  $p=101^{\circ}59'$ .  $(p-a)=21^{\circ}45'$ .  $(p-c)=48^{\circ}34'$ .

| Cálculo del áng. A.                        | Cálculo del áng. B.                                   | Cálculo del áng. C.                                   |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $\lg \sin (p-b) = \overline{1},720140$     | $\lg \sin (p-a) = \overline{1},568856$                | $\lg \sin (p-a) = \overline{1},568856$                |
| $\lg \sin (p-c) = \overline{1},874903$     | $\lg \sin (p-c) = \overline{1},874903$                | $\lg \sin (p-b) = \overline{1},720140$                |
| $\lg \sin p = -\overline{1},990404$        | $-\lg \sin p = -\overline{1},990404$                  | $-\lg \sin p = -\overline{1},990404$                  |
| $-\lg \sin (p-a) = -\overline{1},568856$   | $-\lg \sin (p-b) = -\overline{1},720140$              | $-\lg \sin (p-c) = -\overline{1},874903$              |
| Suma algebr. = 0,035783                    | Suma algebr. = $\overline{1},733215$                  | Suma algebr. = $\overline{1},423689$                  |
| Mitad = $\lg \lg \frac{1}{2} A = 0,017892$ | Mitad = $\lg \lg \frac{1}{2} B = \overline{1},866607$ | Mitad = $\lg \lg \frac{1}{2} C = \overline{1},711845$ |
| $\frac{1}{2} A = 46^{\circ} 10' 48''$      | $\frac{1}{2} B = 36^{\circ} 20' 7''$                  | $\frac{1}{2} C = 27^{\circ} 15' 2''$                  |
| $A = 92^{\circ} 21' 36''$                  | $B = 72^{\circ} 40' 14''$                             | $C = 54^{\circ} 30' 4''$                              |

PROBLEMA XXIV.

Resolver un triángulo esférico, del que se conocen dos lados a y b y el ángulo comprendido C.

Los incógnitos son  $c$ ,  $A$  y  $B$ .

1.º Para determinar  $c$ , tenemos la fórmula

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Que vamos á transformar para hacerla calculable por logaritmos. Sacando de factor comun en el segundo miembro  $\cos a$ , tendremos:

$$\cos c = \cos a \left( \cos b + \frac{\sin a}{\cos a} \sin b \cos C \right) = \cos a (\cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos C)$$

Hagamos  $\operatorname{tg} a \cos C = \operatorname{tg} \alpha$ , lo que siempre es posible: (18) será

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a (\cos b + \operatorname{tg} \alpha \sin b) = \cos a \left( \cos b + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin b \right) \\ &= \cos a \left( \frac{\cos \alpha \cos b + \sin \alpha \sin b}{\cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

ó finalmente,

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \alpha)}{\cos \alpha} \quad [90]$$

fórmula calculable por logaritmos. (\*)

2.º El ángulo  $A$  se puede determinar por la fórmula [81]

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$$

que contiene á los elementos conocidos y á la incógnita  $A$ : de ella se deduce

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C},$$

fórmula que vamos á transformar en otra calculable por logaritmos. Separemos en el segundo miembro  $\cot a$  como si fuera factor comun, tendremos

$$\cot A = \frac{\cot a \left( \sin b - \cos b \frac{\cos C}{\cot a} \right)}{\sin C}.$$

(\*) El ángulo auxiliar  $\alpha$  se calculará por la ecuacion auxiliar

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} a \cos C.$$

de donde

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} a + \log \cos C.$$



Hagamos ahora como en el caso anterior

$$\frac{\cos C}{\cot a} = \tan a \cos C = \tan a,$$

de donde

$$\begin{aligned} \cot A &= \frac{\cot a (\sin b - \cos b \tan a)}{\sin C} = \frac{\cot a \left( \sin b - \cos b \frac{\sin a}{\cos a} \right)}{\sin C} \\ &= \frac{\cot a (\sin b \cos a - \cos b \sin a)}{\sin C \cos a} = \frac{\cot a \sin (b - a)}{\sin C \cos a} \end{aligned}$$

Ahora, si en esta última expresion sustituimos en vez de  $\cot a$  su valor sacado de la ecuacion auxiliar

$$\frac{\cos C}{\cot a} = \tan a, \text{ de donde } \cot a = \frac{\cos C}{\tan a} = \cos C \cot a,$$

resulta finalmente

$$\cot A = \frac{\cot C \sin (b - a)}{\sin a}. \quad [91]$$

3.º El ángulo B se determinará análogamente por la fórmula [81]

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cos B,$$

de donde

$$\cot B = \frac{\cot b \sin a - \cos a \cos C}{\sin C},$$

de la que por análogas transformaciones y estableciendo la ecuacion auxiliar

$$\tan \epsilon = \tan b \cos C,$$

obtendremos

$$\cot B = \frac{\cot C \sin (a - \epsilon)}{\sin \epsilon}. \quad [92]$$

#### EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a = 80^\circ 24'$ .  $b = 70^\circ 19'$ .  $C = 54^\circ 30' 14''$ .

$$\begin{aligned} \text{Fórmulas generales.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \log \cos c = \log \cos a + \lg \cos (b - a) - \lg \sin a \\ \log \cot A = \log \cot C + \lg \sin (b - a) - \lg \sin a \\ \log \cot B = \log \cot C + \lg \sin (a - \epsilon) - \lg \sin \epsilon \end{array} \right. \\ [90] [91] [92] \end{aligned}$$

$$\text{Fórm.ªs aux.ªs} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lg \tan \alpha = \lg \tan a + \lg \cos C \\ \lg \tan \epsilon = \lg \tan b + \lg \cos C \end{array} \right\} \text{ de } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 73^\circ 29' 19'' \\ \epsilon = 58^\circ 21' 54'' \end{array} \right. \text{ donde}$$

Valores auxiliares.  $(b - \alpha) = -3^{\circ} 10' 19''$ ,  $(a - \epsilon) = 21^{\circ} 52' 6''$ .

**Cálculo del lado c.**    **Cálculo del áng. A.**    **Cálculo del áng. B.**

|                                               |                                                |                                                  |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\log \cos a = \overline{1},229518$           | $\log \cot C = \overline{1},853250$            | $\log \cot C = \overline{1},853250$              |
| $\lg \cos (b - \alpha) = \overline{1},999338$ | $\log \sin (b - \alpha) = \overline{2},742991$ | $\log \sin (a - \epsilon) = \overline{1},571093$ |
| $-\log \cos \alpha = -\overline{1},433634$    | $-\log \sin \alpha = -\overline{1},014530$     | $-\log \sin \epsilon = -\overline{1},930137$     |
| $Su. \lg = \log \cos c = \overline{1},775222$ | $Su. \lg = \lg \cot A = \overline{2},614350$   | $Su. \lg = \lg \cot B = \overline{1},494211$     |
| $c = 58^{\circ} 25' 6''$                      | $A = 92^{\circ} 21' 36''$                      | $B = 72^{\circ} 40' 12''$                        |

## PROBLEMA XXV.

Resolver un triángulo esférico, del que se conocen dos lados  $a$  y  $b$ , y el ángulo  $A$  opuesto á uno de ellos.

1.º El ángulo  $B$  se obtendrá por la fórmula [80]

$$\sin a : \sin b :: \sin A : \sin B,$$

de donde

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

Como este ángulo se determina por su seno, es susceptible de dos valores suplementarios.

2.º El ángulo  $C$  se calcula por medio de la fórmula

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \cot A \sin C.$$

Que para darle una forma propia para el cálculo logarítmico dividiremos por  $\cos b$  y tendremos

$$\cot a \tan b = \cos C + \frac{\cot A}{\cos b} \sin C.$$

El segundo miembro de esta expresion se transformará conforme al problema VIII por medio de la ecuacion auxiliar

$$\tan \alpha = \frac{\cot A}{\cos b},$$

y tendremos

$$\cot a \tan b = \cos C + \tan \alpha \sin C = \cos C + C \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sin C;$$

de donde finalmente se deduce

$$\cot a \operatorname{tang} b = \frac{\cos (C-\alpha)}{\cos \alpha},$$

ó bien

$$\cos \pm (C-\alpha) = \cot a \operatorname{tang} b \cos \alpha, \quad [39]$$

fórmula que nos dará el valor del ángulo  $\pm (C-\alpha)$ , y como  $\alpha$  es conocido por la ecuacion auxiliar, quedará determinado  $C$ . Ponemos el doble signo al ángulo  $(C-\alpha)$  porque  $\cos C \cos \alpha + \sin C \sin \alpha$ , es el desarrollo del coseno  $(C-\alpha)$  ó del coseno  $(\alpha-C)$ .

3.º El lado  $c$  se puede determinar por la fórmula

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

de la que obtenemos sacando  $\cos b$  factor comun

$$\cos a = \cos b (\cos c + \operatorname{tang} b \sin c \cos A.)$$

Ahora vamos á transformar la cantidad encerrada dentro del paréntesis en un producto [*Prob. VIII*], para lo cual estableceremos la ecuacion auxiliar

$$\operatorname{tang} b \cos A = \operatorname{tang} \epsilon = \frac{\sin \epsilon}{\cos \epsilon}.$$

Y substituyendo tendremos

$$\cos a = \cos b \left( \cos c + \frac{\sin \epsilon}{\cos \epsilon} \sin c \right) = \frac{\cos b \cos (c-\epsilon)}{\cos \epsilon}.$$

Luego finalmente

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c-\epsilon)}{\cos \epsilon}, \text{ de donde } \cos (c-\epsilon) = \frac{\cos a \cos \epsilon}{\cos b}. \quad [94]$$

Esta expresion nos dará el valor del ángulo  $(c-\epsilon)$  y como  $\epsilon$  es conocido quedará determinado el lado  $c$ .

49. Determinado el ángulo  $B$  por su seno y siendo susceptible de dos valores suplementarios, vamos á discutir este problema que se conoce con el nombre de *caso dudoso* de la trigonometría esférica. Supongamos que se trata de *construir sobre la superficie de la esfera un trián-*



gulo del que se conocen los lados  $a$ ,  $b$ , y el ángulo opuesto al primero  $A$ .

Para ello, tracemos dos arcos de círculo máximo que formen un ángulo igual á  $A$  (Fig. 300), sobre uno de sus lados tomemos una parte  $AC=b$ , y desde el punto  $C$

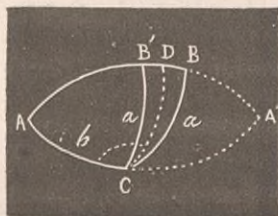


Fig. 300.

como polo, con una abertura de compás esférico igual á la cuerda del lado  $a$ , describamos un arco que corte al otro lado en  $B$ , uniendo  $B$  con  $C$  por medio de un arco de círculo máximo, el triángulo  $ABC$  es el pedido; pero si con-

sideramos el arco de círculo máximo  $CD$  que pasa por el punto  $C$  y es perpendicular al  $ABA'$  podemos establecer preliminarmente los dos siguientes lemas, que nos servirán para facilitar la discusión.

**Lema I.** Si dado un punto  $C$  de la superficie esférica, se traza un arco  $CD$  perpendicular á otro  $ADA'$  y dos arcos oblicuos  $CB$  y  $CB'$  que se apartan igualmente del pié del perpendicular, estos dos arcos oblicuos son iguales.

En efecto, en los triángulos rectángulos  $DBC$  y  $DB'C$  tenemos [83] que

$$\cos BC = \cos CD \cos DB, \quad \cos B'C = \cos CD \cos B'D,$$

pero siendo por el supuesto  $DB = DB'$ , resulta que

$$\cos BC = \cos B'C, \text{ de donde } BC = B'C.$$

**Lema II.** Si desde un punto de la superficie esférica se trazan dos arcos oblicuos que se apartan desigualmente del pié del arco perpendicular, siendo el arco perpendicular menor que un cuadrante, este arco es menor que todos los oblicuos, y el arco oblicuo que se aparte más del pié de la perpendicular será el mayor; pero lo contrario se verifica si el arco perpendicular es mayor que un cuadrante (Fig. 300)

1.º Si el arco perpendicular CD es menor que  $90^\circ$ , tendríamos trazando un arco oblicuo cualquiera (\*) CB, que en el triángulo rectángulo CBD, el ángulo en B es agudo por oponerse á un lado menor que  $90^\circ$  [*Teor. XVI*], y como CB se opone á un ángulo recto [*Geometría teorema CCXIX*],  $DC < CB$ .

Es decir, que el arco perpendicular es menor que cualquier arco oblicuo.

Ahora en dicho triángulo rectángulo CBD tenemos

$$\cos CB = \cos CD \cos BD,$$

pero siendo  $CD < 90^\circ$  y constante, los dos arcos CB y BD serán ambos menores ó mayores que  $90^\circ$ . Si son ambos menores, vemos que á medida que sea mayor BD su coseno será menor, y por consiguiente el coseno de CB, luego CB aumenta á medida que BD aumenta, es decir, que los arcos oblicuos son mayores á medida que se alejan del pié del arco perpendicular. Si los dos lados CB y BD son mayores que  $90^\circ$ , entonces sus cosenos son negativos, y vemos tambien que CB aumenta ó disminuye, segun que aumente ó disminuya BD.

2.º Supongamos ahora que el arco perpendicular  $CD > 90^\circ$ . En tal caso en el triángulo CBD el ángulo B es obtuso, y por tanto mayor que el ángulo D que es recto, luego  $DC > CB$ .

Es decir, el arco perpendicular mayor que cualquier arco oblicuo. En la ecuacion  $\cos CB = \cos CD \cos BD$ , siendo  $CD > 90^\circ$  uno de los dos arcos CB ó BD tiene que ser mayor que  $90^\circ$  [*Teor. XV*]; luego siendo constante el valor de CD, cuando BD aumente, CB disminuye y recíprocamente; es decir, que los arcos oblicuos van siendo menores mientras más se apartan del pié del arco perpendicular.

---

(\*) Se sobreentiende que estos arcos son de círculo máximo.

Esto supuesto, distingamos dos casos principales: 1.º Que el ángulo A sea agudo. 2.º Que el ángulo A sea obtuso. (Se excluye el caso de ser  $A=90^\circ$ , porque entonces el triángulo sería rectángulo.)

1.º caso. Siendo  $A < 90^\circ$ , puede suceder que sea  $b < 90^\circ$ ,  $= 90^\circ$ , ó  $> 90^\circ$ , y en cada uno de estos supuestos puede ocurrir que sea  $a > b$ ,  $= b$ , ó  $< b$ .

I. Siendo  $b < 90^\circ$  y  $a > b$ , en el triángulo rectángulo ACD,  $CD < 90^\circ$ , será el menor de los arcos que pueden trazarse [*Lema II*]; y la circunferencia descrita desde el punto C como polo y con un radio igual á la cuerda del arco  $a$ , envolverá á los puntos A y A' si  $a > CA' = 180^\circ - b$ , ó envolverá al punto A pasando por A', si  $a = 180^\circ - b$ : siendo en ambos casos el problema imposible. Pero si fuese  $a < 180^\circ - b$ , la circunferencia siempre envolviendo al punto A (es decir, quedando A dentro de ella), cortará al arco ADA' en un punto situado entre D y A', tal como B y el triángulo ACB satisface al problema. Además el ángulo B será agudo, porque en el triángulo rectángulo DCB, el lado CD es agudo [*Teor. XVI.*]

II. Si  $a = b$ , la circunferencia descrita desde C como polo cortará el arco ADA' en el punto A y en otro punto B, situado entre D y A'; por tanto habrá una solución. En este caso  $A = B$  [*Geom. teor. CCXVIII.*]

III. Supongamos ahora que  $a < b$ : podrá suceder que  $a$  sea menor que el arco perpendicular CD, igual á este arco, ó mayor.

IV. Si  $a < CD$ , el problema es imposible, porque desde el punto C no puede trazarse ningun arco menor que CD que corte al ADA' [*Lema II.*]

V. Si  $a = CD$ , la circunferencia descrita desde el punto C tocará solamente en el punto D al arco ADA' y por tanto, el triángulo rectángulo ACD, resolverá el problema.

VI. Si  $a > CD$  habrá dos intersecciones B y B', una á



cada lado del arco perpendicular  $CD$  é igualmente distantes de su pié  $D$  [*Lema I*], y por tanto las dos soluciones  $ACB'$  y  $ACB$ . Los ángulos  $B$  y  $B'$  son suplementarios, y como  $B$  es agudo por oponerse en el triángulo rectángulo  $DBC$  al cateto  $CD < 90^\circ$ , el  $B'$  será obtuso.

VII. Supongamos ahora  $b = 90^\circ$ , en tal caso  $CA$  y  $CA'$  son cuadrantes, de manera que si  $a > b$  ó  $a = b$  el problema no es posible, porque la circunferencia descrita desde el punto  $C$  como polo envolverá á los dos puntos  $A$  y  $A'$  en el primer caso, ó tocará en estos puntos en el segundo; pero si  $a < b$  siendo  $a > CD$  habrá dos intersecciones  $B$  y  $B'$ , y por consiguiente dos triángulos  $ACB$  y  $ACB'$  que satisfacen al problema, siendo los ángulos  $B$  y  $B'$  suplementarios.

VIII. Si suponemos  $b > 90^\circ$  siendo  $a > b$  ó  $a = b$ , la circunferencia descrita desde el punto  $C$  envolverá á los dos puntos  $A$  y  $A'$  en el primer caso, ó envolverá á  $A'$  y pasará por  $A$  en el segundo, siendo por consiguiente imposible el problema en ambos casos; pero si  $a < b$  y que  $180^\circ - b$ , habrá dos intersecciones, la una entre  $A$  y  $D$ , y la otra entre  $D$  y  $A'$ , con tal que sea  $a > CD$ , luego en tal caso existen dos soluciones.

IX. Si siendo siempre  $a < b$ , fuese  $a = 180^\circ - b$  ó  $a > 180^\circ - b$  (Fig. 301), la circunferencia cortaría al arco  $ADA'$  entre  $A$  y  $D$  y pasaría por  $A'$  ó envolvería á este punto; luego no habría más que una solución  $ACB$  y el ángulo  $B$  del triángulo sería obtuso; por ser suplemento del ángulo agudo  $CBD$ .

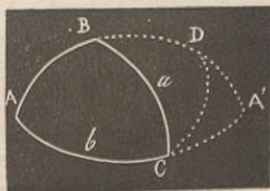


Fig. 301.

2.º caso. Siendo  $A > 90^\circ$  el arco perpendicular  $CD > 90^\circ$  y por consiguiente es mayor que cualquier arco oblicuo, y de dos oblicuos es me-

nor el que más se aparte de su pié D [*Lema II.*] Podríamos hacer una discusion análoga á la anterior, pero en obsequio á la brevedad, en el siguiente cuadro reasumimos todos los resultados de la discusion del problema que nos ocupa.

|                |                | Soluciones                           | Valores<br>del ángulo B.           |
|----------------|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| $A < 90^\circ$ | $b < 90^\circ$ | $a > b, a = 180^\circ - b.$          | ning.                              |
|                |                | $\text{ó } a > 180^\circ - b \dots$  | una. $B < 90^\circ.$               |
|                |                | $a > b, a < 180^\circ - b.$          | una. $B = A.$                      |
|                |                | $a = b \dots$                        | dos. $B < 90^\circ, B > 90^\circ.$ |
|                | $b = 90^\circ$ | $a > b \dots$                        | ning.                              |
|                |                | $a = b \dots$                        | ning.                              |
|                |                | $a < b \dots$                        | dos. $B < 90^\circ, B > 90^\circ.$ |
|                | $b > 90^\circ$ | $a > b \dots$                        | ning.                              |
|                |                | $a = b \dots$                        | ning.                              |
|                |                | $a < b \text{ y } a < 180^\circ - b$ | dos. $B < 90^\circ, B > 90^\circ.$ |
| $A > 90^\circ$ | $b < 90^\circ$ | $a < b \text{ y } a = 180^\circ - b$ | una. $B > 90^\circ.$               |
|                |                | $\text{ó } a > 180^\circ - b \dots$  |                                    |
|                |                | $a > b, a = 180^\circ - b.$          | una. $B < 90^\circ$                |
|                |                | $\text{ó } a < 180^\circ - b \dots$  | dos. $B < 80^\circ, B > 90^\circ.$ |
|                | $b = 90^\circ$ | $a > b \dots$                        | dos. $B < 90^\circ, B > 90^\circ.$ |
|                |                | $a = b \dots$                        | ning.                              |
|                |                | $a < b \dots$                        | ning.                              |
|                | $b > 90^\circ$ | $a > b \dots$                        | dos. $B < 90^\circ, B > 90^\circ.$ |
|                |                | $a = b \dots$                        | una. $B = A.$                      |
|                |                | $a < b, a > 180^\circ - b.$          | una. $B > 90^\circ.$               |
|                | $b > 90^\circ$ | $a < b, a = 180^\circ - b.$          | ninguna.                           |
|                |                | $\text{ó } a < 180^\circ - b \dots$  |                                    |

Por consiguiente, antes de resolver un triángulo del que se conozcan dos lados  $a$  y  $b$  y el ángulo  $A$  opuesto á uno de ellos, se debe empezar por ver con el auxilio de la tabla que antecede, si el problema es ó no posible, y en el caso de serlo si tiene una ó dos soluciones.

EJEMPLO NUMÉRICO.

Datos.  $a=70^{\circ} 19'$ .  $b=53^{\circ} 25'$ .  $A=72^{\circ} 40' 14''$ . (\*)

$$\text{Fórmulas generales.} \quad \begin{cases} \log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} b + \log \operatorname{sen} A - \log \operatorname{sen} a. \\ \log \cos (C - \alpha) = \log \cot a + \log \operatorname{tg} b + \lg \cos \alpha. \\ \log \cos (c - \epsilon) = \log \cos a + \log \cos \epsilon - \lg \operatorname{sen} b. \end{cases}$$

$$\text{Fórmulas aux.}^{\ast} \quad \begin{cases} \lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \cot A - \lg \cos b \\ \lg \operatorname{tg} \epsilon = \lg \operatorname{tg} b + \lg \cos A \end{cases} \quad \text{de } \begin{cases} \alpha = 27^{\circ} 38' 3'' \\ \epsilon = 21^{\circ} 52' \end{cases}$$

| Cálculo de B.                                                      | Cálculo de C.                                              | Cálculo del lado C.                                          |
|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\log \operatorname{sen} b = \overline{1},904711$                  | $\log \cot a = \overline{1},553548$                        | $\log \cos a = \overline{1},527400$                          |
| $\log \operatorname{sen} A = \overline{1},979025$                  | $\log \operatorname{tg} b = 0,129471$                      | $\log \cos \epsilon = \overline{1},907573$                   |
| $-\log \operatorname{sen} a = -\overline{1},973852$                | $-\log \cos \alpha = \overline{1},947464$                  | $-\log \cos b = -\overline{1},776240$                        |
| $\text{Su. alg.} = \lg \operatorname{sen} B = \overline{1},910684$ | $\text{Su.} = \lg \cos (C - \alpha) = \overline{1},630432$ | $\text{Su.} = \lg \cos (c - \epsilon) = \overline{1},719733$ |
| $B = 54^{\circ} 30'.$                                              | $(C - \alpha) = 64^{\circ} 43' 23''$                       | $(c - \epsilon) = 58^{\circ} 22'.$                           |
|                                                                    | $C = 92^{\circ} 21' 26''$                                  | $c = 80^{\circ} 14'.$                                        |

PROBLEMA XXVI.

Conocidos los tres ángulos A, B, C, de un triángulo esférico, determinar sus tres lados a, b, c.

Este problema puede reducirse al problema XXIII, por medio del triángulo esférico suplementario. Pues siendo A', B', C', a', b', c', los elementos de este triángulo, tenemos

$$a' = 180^{\circ} - A, \quad b' = 180^{\circ} - B, \quad c' = 180^{\circ} - C,$$

luego conocemos en el triángulo suplementario sus tres lados. Resuelto éste por las fórmulas del problema XXIII, conoceremos sus tres ángulos A', B', C', de donde

$$a = 180^{\circ} - A', \quad b = 180^{\circ} - B', \quad c = 180^{\circ} - C'.$$

Quedando así resuelto el triángulo propuesto.

Se puede también resolver este triángulo directamente, haciendo uso de la fórmula [82]

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

(\*) En este caso  $A < 90^{\circ}$ ,  $b < 90^{\circ}$ ,  $a > b$  y  $a < 180^{\circ} - b$ , y por tanto aun hay sola solución, siendo  $B < 90^{\circ}$ .



De donde

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Ahora, por medio de transformaciones análogas á las empleadas en las fórmulas del problema XXIII, que son simétricas con la anterior, y haciendo la suma de los tres ángulos  $A+B+C=180^\circ+2E$ , siendo  $2E$  lo que se llama *exceso esférico*, es decir, el exceso de la suma de los tres ángulos sobre dos rectos [*Geom. teor.* CCXX] obtendremos la fórmula

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (A-E)}{\text{sen } B \text{ sen } C}} \\ \text{sen } \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (B-E)}{\text{sen } A \text{ sen } C}} \\ \text{sen } \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (C-E)}{\text{sen } A \text{ sen } B}} \end{array} \right\} [95]$$

Aplic. á las otras dos fórmulas [82] iguales transformaciones.

También se pueden obtener las fórmulas siguientes, empleando un método igual al indicado en el repetido problema XXIII,

$$\left. \begin{array}{l} \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen } (B-E) \text{ sen } (C-E)}{\text{sen } B \text{ sen } C}} \\ \cos \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen } (A-E) \text{ sen } (C-E)}{\text{sen } A \text{ sen } C}} \\ \cos \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen } (A-E) \text{ sen } (B-E)}{\text{sen } A \text{ sen } B}} \end{array} \right\} [96]$$

y dividiendo respectivamente las primeras por las segundas

$$\left. \begin{array}{l} \text{tang } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (A-E)}{\text{sen } (B-E) \text{ sen } (C-E)}} \\ \text{tang } \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (B-E)}{\text{sen } (A-E) \text{ sen } (C-E)}} \\ \text{tang } \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen } E \text{ sen } (C-E)}{\text{sen } (A-E) \text{ sen } (B-E)}} \end{array} \right\} [97]$$

Cualquiera de estos tres grupos resuelve el problema;

pero debemos advertir que si han de hallarse los tres lados del triángulo, este último es preferible, por necesitar solamente cuatro logaritmos. (\*)

### PROBLEMA XXVII.

*Conocidos dos ángulos A y B, y el lado adyacente c, determinar el tercer ángulo C y los otros dos lados a y b.*

Este caso puede resolverse por medio del triángulo suplementario en el que se conocerán dos lados y el ángulo comprendido. [Prob. XXII.]

1.º Si se quiere resolver directamente, emplearemos para determinar el ángulo C la fórmula [82]

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

En la que por iguales transformaciones que las empleadas en la fórmula [79] que sirvió para resolver el problema XXIV, y que es simétrica con la anterior, tendremos suponiendo  $\tan A \cos c = \tan \alpha$

$$\cos C = \frac{\cos A \cos (B - \alpha)}{\cos \alpha} \quad [98]$$

2.º Para hallar el lado a emplearemos la fórmula [81]

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A.$$

Ahora, despejando  $\cot a$  y sacando  $\cos c$  como factor común del segundo miembro

$$\cot a = \frac{\cos c \left( \cos B + \sin B \frac{\cot A}{\cos c} \right)}{\sin c}.$$

Estableciendo la ecuación auxiliar  $\frac{\cot A}{\cos c} = \tan \phi$

(\*) Aconsejamos á los alumnos que hagan aplicación de ellas resolviendo un caso numérico; pues aunque en la práctica puede siempre reducirse este caso al primero por medio del triángulo suplementario, así adquirirán facilidad en los cálculos trigonométricos.

tendremos

$$\cot a = \cot c (\cos B + \sin B \tan \epsilon),$$

de donde

$$\cot a = \frac{\cos c \cos (B - \epsilon)}{\cos \epsilon} \quad [99]$$

3.º El lado  $b$  se halla por medio de la ecuacion

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$$

de la que por idénticas transformaciones que en la anterior se deduce

$$\cot b = \frac{\cot c \cos (A - \varphi)}{\cot \varphi} \quad [100]$$

Siendo

$$\tan \varphi = \frac{\cos B}{\cos c}.$$

### PROBLEMA XXVIII.

*Conocidos dos ángulos  $A$  y  $B$  y el lado  $a$  opuesto á uno de ellos, determinar  $b$ ,  $C$  y  $c$ .*

Con el auxilio del triángulo suplementario este caso se reduce al del problema XXV.

Si queremos resolverlo directamente, tenemos:

1.º El lado  $b$  se determina por la ecuacion

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B} \quad \text{de donde} \quad \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Como este lado  $b$  se determina por su seno, admite dos valores suplementarios. Así es que este caso es dudoso como el del problema XXV y susceptible de una discusion análoga.

2.º El lado  $c$  se halla por la ecuacion

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A,$$

ó bien

$$\cot a \sin c - \cos c \cos B = \sin B \cot A.$$

De donde sacando factor comun  $\cot a$  en el primer



miembro y recordando que  $\frac{1}{\cot a} = \tan a$ , tendremos

$$\cot a (\sin c - \cos c \cos B \tan a) = \sin B \cot A.$$

Y haciendo  $\cos B \tan a = \tan \alpha$ , y sustituyendo este valor en el anterior, tendremos

$$\cot a \frac{\sin (c - \alpha)}{\cos \alpha} = \sin B \cot A.$$

De donde despejando  $\sin (c - \alpha)$ , tendremos

$$\sin (c - \alpha) = \sin B \cot A \cos \alpha \tan a, \quad [101]$$

fórmula calculable por logaritmos y que nos dará el valor del arco  $(c - \alpha)$ , y como  $\alpha$  es conocido por la ecuación auxiliar  $\cos B \tan c = \alpha$ , obtendremos finalmente el lado  $c$ .

3.º El ángulo  $C$  se determina por la ecuación

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

que nos dá

$$\cos A = \cos B (-\cos C + \tan B \cos a \sin C).$$

Haciendo

$$\tan B \cos a = \cot \epsilon,$$

tendremos, sustituyendo,

$$\cos A = \cos B (-\cos C + \cot \epsilon \sin C),$$

de donde

$$\cos A = \frac{\cos B \sin (C - \epsilon)}{\sin \epsilon},$$

luego finalmente

$$\sin (C - \epsilon) = \frac{\cos A \sin \epsilon}{\cos B} \quad [102]$$

fórmula que nos dará el valor del ángulo  $(C - \epsilon)$ , y como  $\epsilon$  es conocido, el valor de  $C$ .

**Elementos de un triángulo esférico** para que sirva de comprobación al resolver los seis casos ó problemas que pueden ocurrir.

$$A = 111^\circ 43' 4''. \quad B = 45^\circ 15' 38''. \quad C = 28^\circ 59' 52''.$$

$$a = 41^\circ 9' 47''. \quad b = 30^\circ 13' 40''. \quad c = 19^\circ 25' 40''.$$

# APÉNDICE

## DE LA TRIGONOMETRÍA.

### CAPITULO I.

ANALOGÍAS DE NÉPER Y DE DELAMBRE Y SU APLICACION.

**Analogías de Néper.** El inventor de los logaritmos ha encontrado las cuatro fórmulas siguientes conocidas con el nombre de *analogías* de Néper.

$$\begin{array}{ll} 1.^a \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} [103] & 3.^a \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} [105] \\ 2.^a \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} [104] & 4.^a \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} [106] \end{array}$$

**Demostracion.** Para demostrar la primera de estas analogías tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2} C} &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A + \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} C + \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}. \quad (a) \end{aligned}$$

Pero sabemos [89] que

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}$$

Por consiguiente, multiplicando de dos en dos nos dará

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \frac{\sin(p-c)}{\sin p}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \frac{\sin(p-b)}{\sin p}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = \frac{\operatorname{sen} (p-a)}{\operatorname{sen} p} \dots$$

Sustituyendo en la fórmula (a) nos dará

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A+B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} (p-a) + \operatorname{sen} (p-b)}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} (p-c)}.$$

Dé donde transformando en producto la suma y la diferencia de los senos del segundo miembro de esta fórmula [58] y [59], suprimiendo en el numerador y el denominador el factor comun  $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$  que resulta, y hechas todas las reducciones, tendremos

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A+B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)},$$

que es la primera de las cuatro analogías de Néper.

La segunda se demuestra por transformaciones idénticas: la tercera y la cuarta sustituyendo en la primera y segunda respectivamente los valores de los ángulos y lados del triángulo esférico suplementario. En efecto, si en la primera, por ejemplo, sustituimos por  $A, B, C, a$  y  $b$  sus suplementos se convertirá en

$$\frac{-\operatorname{tang} \frac{1}{2} (a+b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{-\cos \frac{1}{2} (A+B)},$$

que es la tercera analogía con los signos cambiados en ambos miembros.

**Analogías de Delambre.** Las cuatro analogías de Delambre son:

$$1.^a \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a+b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} [107] \quad 3.^a \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} C} [109]$$

$$2.^a \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (A-B)}{\cos \frac{1}{2} C} [108] \quad 4.^a \frac{\cos \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} [110]$$

**Demostracion.** Para demostrar la primera tenemos [44]

$$\cos \frac{1}{2} (A-B) = \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B + \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} B,$$

sustituyendo en vez de estos senos y cosenos sus valores en funcion de los lados del triángulo esférico [87] y [88], resultará

$$\cos \frac{1}{2} (A-B) = \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C + \frac{\operatorname{sen} (p-c)}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen} \frac{1}{2} C.$$

De donde dividiendo por  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} C$  ambos miembros, tendremos

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C} = \frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} (p-c)}{\operatorname{sen} c},$$



y convirtiendo en producto la suma de los dos senos del numerador del segundo miembro, y poniendo el seno  $c$  en funcion del seno y coseno del arco mitad, segun las fórmulas [58] y [49]

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{2 \sin (2p-c) \cos \frac{1}{2}c}{2 \sin \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}c}.$$

De donde suprimiendo en los dos términos de este quebrado el factor comun  $2 \cos \frac{1}{2}c$  y recordando que

$$(2p-c) = (a+b+c-c) = a+b,$$

tendremos

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}C}$$

que es la primera de las cuatro analogías. De un modo análogo se demuestran las otras tres.

**Aplicacion de las analogías de Néper y de Delambre.** Pueden aplicarse estas analogías en los cuatro siguientes casos de resolucion de triángulos esféricos:

- |                        |   |                                                   |
|------------------------|---|---------------------------------------------------|
| Cuando se conocen..... | { | 1.º Dos lados y el ángulo comprendido.            |
|                        |   | 2.º Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos. |
|                        |   | 3.º Dos ángulos y el lado adyacente.              |
|                        |   | 4.º Dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos. |

**1.º caso.** Si se conocen los dos lados  $a$  y  $b$ , y el ángulo comprendido  $C$ , tendremos por las analogías 1.ª y 2.ª de Néper:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}, \quad \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)}.$$

Con estas dos ecuaciones, calculables por logaritmos, podemos determinar los valores de  $\frac{1}{2}(A+B)$  y  $\frac{1}{2}(A-B)$ , y por tanto, conociendo la semisuma y la semidiferencia de los ángulos, se pueden conocer los dos ángulos  $A$  y  $B$ .

Conocidos estos ángulos, el lado  $c$  puede hallarse por una cualquiera de las dos analogías, 3.ª y 4.ª de Néper.

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}, \quad \frac{\tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}.$$

Tambien puede hallarse el lado  $c$  por cualquiera de las cuatro analogías de Delambre, que tambien son calculables por logaritmos, y nos darán el valor del arco  $\frac{1}{2}c$ , y por tanto de su duplo el lado  $c$  del triángulo.

**2.º caso.** *Dados dos lados a y b, y el ángulo A opuesto á uno de ellos, se determinará el ángulo B por la ecuacion*

$$\text{sen } B = \frac{\text{sen } A \text{ sen } b}{\text{sen } a}.$$

El áng. C se determina por una de las dos analog.<sup>as</sup> de Néper.

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A-B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen } \frac{1}{2}(a+b)}, \quad \frac{\text{tang } \frac{1}{2}(A+B)}{\cot \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}.$$

El lado c puede determinarse como en el caso anterior, esto es, por una de las dos analogías 3.<sup>a</sup> y 4.<sup>a</sup> de Néper, ó por cualquiera de las cuatro de Delambre.

**3.º caso.** *Dados dos ángulos A y B, y el lado adyacente c, las analogías 3.<sup>a</sup> y 4.<sup>a</sup> de Néper que acabamos de indicar nos darán los valores de  $\frac{1}{2}(a+b)$  y  $\frac{1}{2}(a-b)$ , de los que se deducirán a y b. El ángulo C puede hallarse, como en el caso anterior, por cualquiera de las dos primeras analogías de Néper ó por una de las cuatro de Delambre.*

**4.º caso.** *Dados dos ángulos A y B, y el lado a opuesto á uno de ellos.*

El lado b se determina por la fórmula  $\text{sen } b = \frac{\text{sen } a \text{ sen } B}{\text{sen } A}.$

El lado c por cualquiera de las dos últimas analogías de Néper (3.<sup>a</sup> y 4.<sup>a</sup>); y despues el ángulo C por las dos primeras de Néper ó por cualquiera de las cuatro de Delambre.

## CAPÍTULO II.

### EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA.

#### TEOREMAS. (\*)

1.  $(\text{sen } a + \cos a)^2 + (\text{sen } a - \cos a)^2 = 2.$
2.  $\text{sen}^2 a - \cos^2 b = \text{sen}^2 b - \cos^2 a.$
3.  $\sec^2 a - \text{cosec}^2 a = \sec^2 a + \text{cosec}^2 a.$
4.  $\text{tang } a + \cot a = \sec a \text{ cosec } a.$
5.  $\text{sen}^4 a - \cos^4 a = \text{sen}^2 a - \cos^2 a.$
6.  $\text{sen}^3 a + \cos^3 a = (\text{sen } a + \cos a)(1 - \text{sen } a \cos a).$

(\*) Cada fórmula que se indica es el enunciado de un teorema expresado abreviadamente. Así, la primera traducida al lenguaje vulgar, dice: *el cuadrado de la suma del seno y el coseno de un arco, mas el cuadrado de su diferencia es igual á 2.* En estas fórmulas se supone el radio igual á la unidad.

|    | Seno.    | 6.685 |     | Tangent. | Cotang.  | Coseno.  |    |
|----|----------|-------|-----|----------|----------|----------|----|
| 0  | 2.542819 | 487   | 751 | 2.543084 | 1.456916 | 1.999735 | 60 |
| 1  | .546422  | 485   | 754 | .546691  | .453309  | .999735  | 59 |
| 2  | .549995  | 484   | 757 | .550268  | .449732  | .999726  | 58 |
| 3  | .553539  | 482   | 760 | .553817  | .446183  | .999722  | 57 |
| 4  | .557054  | 481   | 763 | .557336  | .442664  | .999717  | 56 |
| 5  | 2.560540 | 479   | 766 | 2.560828 | 1.439172 | 1.999713 | 55 |
| 6  | .563999  | 478   | 769 | .564291  | .435709  | .999708  | 54 |
| 7  | .567431  | 476   | 773 | .567727  | .432273  | .999704  | 53 |
| 8  | .570836  | 475   | 776 | .571137  | .428863  | .999699  | 52 |
| 9  | .574214  | 473   | 779 | .574520  | .425480  | .999694  | 51 |
| 10 | 2.577566 | 471   | 782 | 2.577877 | 1.422123 | 1.999689 | 50 |
| 11 | .580892  | 470   | 785 | .581208  | .418792  | .999685  | 49 |
| 12 | .584193  | 468   | 788 | .584514  | .415486  | .999680  | 48 |
| 13 | .587469  | 467   | 792 | .587795  | .412205  | .999675  | 47 |
| 14 | .590721  | 465   | 795 | .591051  | .408949  | .999670  | 46 |
| 15 | 2.593948 | 463   | 798 | 2.594283 | 1.405717 | 1.999665 | 45 |
| 16 | .597152  | 462   | 802 | .597492  | .402508  | .999660  | 44 |
| 17 | .600332  | 460   | 805 | .600677  | .399323  | .999655  | 43 |
| 18 | .603489  | 458   | 808 | .603839  | .396161  | .999650  | 42 |
| 19 | .606623  | 457   | 812 | .606978  | .393022  | .999645  | 41 |
| 20 | 2.609734 | 455   | 815 | 2.610094 | 1.389906 | 1.999640 | 40 |
| 21 | .612823  | 453   | 818 | .613189  | .386811  | .999635  | 39 |
| 22 | .615891  | 451   | 822 | .616262  | .383738  | .999629  | 38 |
| 23 | .618937  | 450   | 825 | .619313  | .380687  | .999624  | 37 |
| 24 | .621962  | 448   | 829 | .622343  | .377657  | .999619  | 36 |
| 25 | 2.624965 | 446   | 833 | 2.625352 | 1.374648 | 1.999614 | 35 |
| 26 | .627948  | 444   | 836 | .628340  | .371660  | .999608  | 34 |
| 27 | .630911  | 443   | 840 | .631308  | .368692  | .999603  | 33 |
| 28 | .633854  | 441   | 843 | .634256  | .365744  | .999597  | 32 |
| 29 | .636776  | 439   | 847 | .637184  | .362816  | .999592  | 31 |
| 30 | 2.639680 | 437   | 851 | 2.640093 | 1.359907 | 1.999586 | 30 |
|    | Coseno.  | 6.685 |     | Cotang.  | Tangent. | Seno.    |    |



| '  | Seno.            | $\bar{6}.685$ |     | Tangent.         | Cotang.    | Coseno.          | '  |
|----|------------------|---------------|-----|------------------|------------|------------------|----|
| 30 | $\bar{2}.639680$ | 437           | 851 | $\bar{2}.640093$ | $1.359907$ | $\bar{1}.999586$ | 30 |
| 31 | .642563          | 435           | 854 | .642982          | .357018    | .999581          | 29 |
| 32 | .645428          | 433           | 858 | .645853          | .354147    | .999575          | 28 |
| 33 | .648274          | 431           | 862 | .648704          | .351296    | .999570          | 27 |
| 34 | .651102          | 430           | 866 | .651537          | .348463    | .999564          | 26 |
| 35 | $\bar{2}.653911$ | 428           | 869 | $\bar{2}.654352$ | $1.345648$ | $\bar{1}.999558$ | 25 |
| 36 | .656702          | 426           | 873 | .657149          | .342851    | .999553          | 24 |
| 37 | .659475          | 424           | 877 | .659928          | .340072    | .999547          | 23 |
| 38 | .662230          | 422           | 881 | .662689          | .337311    | .999541          | 22 |
| 39 | .664968          | 420           | 885 | .665433          | .334567    | .999535          | 21 |
| 40 | $\bar{2}.667689$ | 418           | 889 | $\bar{2}.668160$ | $1.331840$ | $\bar{1}.999529$ | 20 |
| 41 | .670393          | 416           | 893 | .670870          | .329130    | .999524          | 19 |
| 42 | .673080          | 414           | 897 | .673563          | .326437    | .999518          | 18 |
| 43 | .675751          | 412           | 906 | .676239          | .323761    | .999512          | 17 |
| 44 | .678405          | 410           | 905 | .678900          | .321100    | .999506          | 16 |
| 45 | $\bar{2}.681043$ | 408           | 909 | $\bar{2}.681544$ | $1.318456$ | $\bar{1}.999500$ | 15 |
| 46 | .683665          | 406           | 913 | .684172          | .315828    | .999493          | 14 |
| 47 | .686272          | 404           | 917 | .686784          | .313216    | .999487          | 13 |
| 48 | .688863          | 402           | 921 | .689381          | .310619    | .999481          | 12 |
| 49 | .691438          | 400           | 925 | .691963          | .308037    | .999475          | 11 |
| 50 | $\bar{2}.693998$ | 398           | 929 | $\bar{2}.694529$ | $1.305471$ | $\bar{1}.999469$ | 10 |
| 51 | .696543          | 396           | 933 | .697081          | .302919    | .999463          | 9  |
| 52 | .699073          | 394           | 937 | .699617          | .300383    | .999456          | 8  |
| 53 | .701589          | 392           | 942 | .702139          | .297861    | .999450          | 7  |
| 54 | .704090          | 389           | 946 | .704646          | .295354    | .999443          | 6  |
| 55 | $\bar{2}.706577$ | 387           | 950 | $\bar{2}.707140$ | $1.292860$ | $\bar{1}.999437$ | 5  |
| 56 | .709049          | 385           | 955 | .709618          | .290382    | .999431          | 4  |
| 57 | .711507          | 383           | 959 | .712083          | .287917    | .999424          | 3  |
| 58 | .713952          | 381           | 963 | .714534          | .285466    | .999418          | 2  |
| 59 | .716383          | 379           | 968 | .716972          | .283028    | .999411          | 1  |
| 60 | $\bar{2}.718800$ | 376           | 972 | $\bar{2}.719396$ | $1.280604$ | $\bar{1}.999404$ | 0  |
| '  | Coseno.          | $\bar{6}.685$ |     | Cotang.          | Tangent.   | Seno.            | '  |

| '  | Seno.    | 1"   | Tangent. | 1"   | Cotang.  | Coseno.  | 1"   | '  |
|----|----------|------|----------|------|----------|----------|------|----|
| 0  | 1.825511 |      | 1.954437 |      | 0.045563 | 1.871073 |      | 60 |
| 1  | .825651  | 2.33 | .954691  | 4.23 | .045309  | .870960  | 1.89 | 59 |
| 2  | .825791  |      | .954946  |      | .045054  | .870846  |      | 58 |
| 3  | .825931  |      | .955200  |      | .044800  | .870732  |      | 57 |
| 4  | .826071  |      | .955454  |      | .044546  | .870618  |      | 56 |
| 5  | 1.826211 |      | 1.955708 |      | 0.044292 | 1.870504 |      | 55 |
| 6  | .826351  |      | .955961  |      | .044039  | .870390  | 1.90 | 54 |
| 7  | .826491  |      | .956215  |      | .043785  | .870276  |      | 53 |
| 8  | .826631  |      | .956469  |      | .043531  | .870161  |      | 52 |
| 9  | .826770  |      | .956723  |      | .043277  | .870047  |      | 51 |
| 10 | 1.826910 |      | 1.956977 |      | 0.043023 | 1.869933 |      | 50 |
| 11 | .827049  | 2.32 | .957231  |      | .042769  | .869818  | 1.91 | 49 |
| 12 | .827189  |      | .957485  |      | .042515  | .869704  |      | 48 |
| 13 | .827328  |      | .957739  |      | .042261  | .869589  |      | 47 |
| 14 | .827467  |      | .957993  |      | .042007  | .869474  |      | 46 |
| 15 | 1.827606 |      | 1.958247 |      | 0.041753 | 1.869360 |      | 45 |
| 16 | .827745  |      | .958500  |      | .041500  | .869245  | 1.92 | 44 |
| 17 | .827884  |      | .958754  |      | .041246  | .869130  |      | 43 |
| 18 | .828023  |      | .959068  |      | .040992  | .869015  |      | 42 |
| 19 | .828162  |      | .959262  |      | .040738  | .868900  |      | 41 |
| 20 | 1.828301 |      | 1.959516 |      | 0.040484 | 1.868785 |      | 40 |
| 21 | .828439  | 2.31 | .959769  |      | .040231  | .868670  |      | 39 |
| 22 | .828578  |      | .960023  |      | .039977  | .868555  |      | 38 |
| 23 | .828716  |      | .960277  |      | .039723  | .868440  |      | 37 |
| 24 | .828855  |      | .960530  |      | .039470  | .868324  |      | 36 |
| 25 | 1.828993 |      | 1.960784 |      | 0.039216 | 1.868209 |      | 35 |
| 26 | .829131  | 2.30 | .961038  |      | .038962  | .868093  | 1.93 | 34 |
| 27 | .829269  |      | .961292  |      | .038708  | .867978  |      | 33 |
| 28 | .829407  |      | .961545  |      | .038455  | .867862  |      | 32 |
| 29 | .829545  |      | .961799  |      | .038201  | .867747  |      | 31 |
| 30 | 1.829683 |      | 1.962052 |      | 0.037948 | 1.867631 |      | 30 |
| '  | Coseno   | 1"   | Cotang.  | 1"   | Tangent. | Seno.    | 1"   | '  |

| '  | Seno.    | 1"   | Tangent. | 1"   | Cotang.  | Coseno.  | 1"   | '  |
|----|----------|------|----------|------|----------|----------|------|----|
| 30 | 1.829683 | 2.30 | 1.962052 | 4.23 | 0.037948 | 1.867631 | 1.93 | 30 |
| 31 | .829821  |      | .962306  |      | .037694  | .867515  |      | 29 |
| 32 | .829959  |      | .962560  |      | .037440  | .867399  |      | 28 |
| 33 | .830097  |      | .962813  |      | .037187  | .867283  |      | 27 |
| 34 | .830234  |      | .963067  |      | .036933  | .867167  |      | 26 |
| 35 | 1.830372 | 2.29 | 1.963320 | 4.22 | 0.036680 | 1.867051 | 1.94 | 25 |
| 36 | .830509  |      | .963574  |      | .036426  | .866935  |      | 24 |
| 37 | .830646  |      | .963828  |      | .036172  | .866819  |      | 23 |
| 38 | .830784  |      | .964081  |      | .035919  | .866703  |      | 22 |
| 39 | .830921  |      | .964335  |      | .035665  | .866586  |      | 21 |
| 40 | 1.831058 | 2.28 | 1.964588 | 4.22 | 0.035412 | 1.866470 | 1.95 | 20 |
| 41 | .831195  |      | .964842  |      | .035158  | .866353  |      | 19 |
| 42 | .831332  |      | .965095  |      | .034905  | .866237  |      | 18 |
| 43 | .831469  |      | .965349  |      | .034651  | .866120  |      | 17 |
| 44 | .831606  |      | .965602  |      | .034398  | .866004  |      | 16 |
| 45 | 1.831742 | 2.27 | 1.965855 | 4.21 | 0.034145 | 1.865887 | 1.96 | 15 |
| 46 | .831879  |      | .966109  |      | .033891  | .865770  |      | 14 |
| 47 | .832015  |      | .966362  |      | .033638  | .865653  |      | 13 |
| 48 | .832152  |      | .966616  |      | .033384  | .865536  |      | 12 |
| 49 | .832288  |      | .966869  |      | .033131  | .865419  |      | 11 |
| 50 | 1.832425 | 2.26 | 1.967123 | 4.20 | 0.032877 | 1.865302 | 1.97 | 10 |
| 51 | .832561  |      | .967376  |      | .032624  | .865185  |      | 9  |
| 52 | .832697  |      | .967629  |      | .032371  | .865068  |      | 8  |
| 53 | .832833  |      | .967883  |      | .032117  | .864950  |      | 7  |
| 54 | .832969  |      | .968136  |      | .031864  | .864833  |      | 6  |
| 55 | 1.833105 | 2.25 | 1.968389 | 4.19 | 0.031611 | 1.864716 | 1.98 | 5  |
| 56 | .833241  |      | .968643  |      | .031357  | .864598  |      | 4  |
| 57 | .833377  |      | .968896  |      | .031104  | .864481  |      | 3  |
| 58 | .833512  |      | .969149  |      | .030851  | .864363  |      | 2  |
| 59 | .833648  |      | .969403  |      | .030597  | .864245  |      | 1  |
| 60 | 1.833783 |      | 1.969656 |      | 0.030344 | 1.864127 |      | 0  |
| '  | Coseno   | 1"   | Cotang.  | 1"   | Tangent. | Seno.    | 1"   | '  |



# ÍNDICE.

|                                       | <i>Pág.</i> |
|---------------------------------------|-------------|
| PRÓLOGO.                              |             |
| Advertencia á los alumnos.....        | 7           |
| Cuadro sintético de la Geometría..... | 8           |
| Preliminares.....                     | 9           |

## GEOMETRÍA PLANA.

### SECCION PRIMERA.

#### PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS.

##### Libro I.

##### FIGURAS RECTILÍNEAS.

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| CAP. I.—Ángulos.....                                                                           | 15 |
| II.—Rectas paralelas entre sí.....                                                             | 21 |
| III.—Definiciones de los polígonos. —Principales propiedades de los triángulos y su igualdad.. | 29 |
| IV.—Propiedades de las perpendiculares, oblicuas y bisectrices.....                            | 38 |
| V.—Cuadriláteros.....                                                                          | 45 |
| VI.—Propiedades generales de los polígonos convexos.....                                       | 51 |

##### Libro II.

##### FIGURAS CIRCULARES Y SUS COMBINACIONES CON LA LÍNEA RECTA.

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| CAP. I.—Cuerdas, secantes y tangentes.....                                      | 54 |
| II.—Circunferencias, secantes, tangentes, exteriores é interiores entre sí..... | 61 |
| III.—Medida de los ángulos.....                                                 | 65 |
| IV.—Polígonos inscriptos y circunscriptos.....                                  | 75 |

##### Libro III.

##### PROBLEMAS CORRESPONDIENTES Á ESTA SECCION.

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| CAP. I.—Definiciones preliminares..... | 79 |
| II.—Figuras rectilíneas.....           | 81 |
| III.—Figuras circulares.....           | 93 |

## SECCION SEGUNDA.

### EXTENSION DE LAS FIGURAS PLANAS.

#### Libro I.

##### EXTENSION DE LAS FIGURAS RECTILINEAS.

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Líneas proporcionales.....                             | 95  |
| II.—Triángulos y polígonos semejantes.....                     | 100 |
| III.—Consecuencias de la semejanza de los triáng. <sup>s</sup> | 106 |
| IV.—Áreas de los polígonos.....                                | 112 |
| V.—Comparacion de las áreas.....                               | 118 |

#### Libro II.

##### EXTENSION DE LAS FIGURAS CIRCULARES.

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Cuerdas, secantes y tangentes.....                                               | 125 |
| II.—Relacion de los lados de algunos polígonos<br>regulares inscriptos con el radio..... | 127 |
| III.—Medida del círculo.....                                                             | 130 |

#### Libro III.

##### PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Construccion de las líneas proporcionales..                    | 141 |
| II.—Inscripcion y circunscripcion de los polígo-<br>nos regulares..... | 146 |
| III.—Semejanza y equivalencia de los polígonos..                       | 152 |
| IV.—Problemas relativos á la circunf. <sup>a</sup> y al círculo        | 156 |

##### APÉNDICE DE LA GEOMETRIA PLANA.

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Nociones sobre los ejes y centros de simetría.              | 160 |
| II.—Nociones sobre las curvas.—Elipse, parábola<br>é hipérbola..... | 162 |
| III.—Ejercicios de Geometría plana.....                             | 168 |

## GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

### SECCION PRIMERA.

#### DE LAS FIGURAS CONSIDERADAS EN EL ESPACIO.

#### Libro I.

##### PLANOS Y CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES. PLANAS.

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Perpendiculares y oblicuas á un plano..... | 172 |
| II.—Ángulos diedros.....                           | 180 |
| III.—Planos perpendiculares entre sí.....          | 186 |

|                                               | <i>Pág.</i> |
|-----------------------------------------------|-------------|
| IV.—De las rectas y planos paralelos.....     | 188         |
| V.—De los ángulos poliedros.....              | 197         |
| VI.—Poliedros en general.—Pirámides.—Prismas. | 208         |
| VII.—Igualdad de los poliedros.....           | 217         |

## Libro II.

### CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS.

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Del cono recto.....                       | 222 |
| II.—Del cilindro recto.....                       | 225 |
| III.—De la esfera.....                            | 227 |
| IV.—De los triángulos y polígonos esféricos.....  | 234 |
| V.—De los poliedros inscriptos y circunscriptos.. | 240 |

## Libro III.

### PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Problemas referentes á los planos y á las líneas rectas situadas en el espacio..... | 243 |
| II.—Problemas relativos á la esfera.....                                                    | 245 |

## SECCION SEGUNDA.

### DE LA EXTENSION CONSIDERADA EN EL ESPACIO.

## Libro I.

### CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES PLANAS.

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Semejanza de los poliedros.....                               | 247 |
| II.—Áreas de los poliedros.....                                       | 256 |
| III.—Volumenes de los poliedros.....                                  | 257 |
| IV.—Comparacion de las áreas y de los volúmenes de los poliedros..... | 272 |

## Libro II.

### CUERPOS TERMINADOS POR SUPERFICIES CURVAS.

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Áreas del cilindro y del cono.....                                      | 274 |
| II.—Áreas de la superfi. <sup>o</sup> total ó parcial, de la esfera             | 277 |
| III.—Volumenes del cilindro y del cono.....                                     | 285 |
| IV.—Volumenes total, ó parcial, de la esfera.....                               | 287 |
| V.—Comparacion de las áreas y de los volúmenes del cono, cilindro y esfera..... | 293 |

## Libro III.

### PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| CAP. I.—Poliedros.....    | 296 |
| II.—Cuerpos redondos..... | 298 |



|                                                                              | <i>Pág.</i> |
|------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| APÉNDICE DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO.                                        |             |
| CAP. I.—Definición sobre los centros, ejes y planos de simetría.....         | 300         |
| II.—Nociones sobre las superficies cónicas, cilíndricas y de revolución..... | 302         |
| III.—Nociones sobre la hélice.....                                           | 306         |
| IV.—Brevísimas nociones de Geometría descriptiva                             | 308         |
| V.—Ejercicios de Geometría del espacio .....                                 | 320         |

## TRIGONOMETRÍA.

### TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

#### Libro I.

##### LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Nociones preliminares.....                                                           | 325 |
| II.—Límites de los valores de las líneas trigonom.                                           | 330 |
| III.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco.....                             | 334 |
| IV.—Valores de las líneas trigonométricas de algunos arcos particulares en función del radio | 340 |
| V.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de varios arcos .....                         | 341 |
| VI.—Construcción de las tablas trigonométricas...                                            | 352 |
| VII.—Disposición y uso de las tablas trigonométr. <sup>as</sup>                              | 355 |

#### Libro II.

##### RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS.

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Triángulos rectángulos..... | 363 |
| II.—Triángulos oblicuángulos.....   | 369 |

### TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Fórmulas generales .....                                               | 385 |
| II.—Resolución de los triángulos esféricos rectáng. <sup>s</sup>               | 394 |
| III.—Resolución de los triáng. <sup>s</sup> esféricos oblicuáng. <sup>os</sup> | 401 |

#### APÉNDICE DE LA TRIGONOMETRÍA.

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAP. I.—Analogías de Néper y de Delambre y su aplicación.....                                                                                      | 420 |
| II.—Ejercicios de trigonometría.....                                                                                                               | 423 |
| Logaritmos de las líneas trigonométricas de los arcos de 2° á 3°, 42° á 43°, 47° á 48° y 87° á 88°, para facilitar la inteligencia del texto ..... | 424 |

300  
 301  
 302  
 303  
 304  
 305  
 306  
 307  
 308  
 309  
 310  
 311  
 312  
 313  
 314  
 315  
 316  
 317  
 318  
 319  
 320  
 321  
 322  
 323  
 324  
 325  
 326  
 327  
 328  
 329  
 330  
 331  
 332  
 333  
 334  
 335  
 336  
 337  
 338  
 339  
 340  
 341  
 342  
 343  
 344  
 345  
 346  
 347  
 348  
 349  
 350  
 351  
 352  
 353  
 354  
 355  
 356  
 357  
 358  
 359  
 360  
 361  
 362  
 363  
 364  
 365  
 366  
 367  
 368  
 369  
 370  
 371  
 372  
 373  
 374  
 375  
 376  
 377  
 378  
 379  
 380  
 381  
 382  
 383  
 384  
 385  
 386  
 387  
 388  
 389  
 390  
 391  
 392  
 393  
 394  
 395  
 396  
 397  
 398  
 399  
 400

# TRIGONOMETRIA

## TRIGONOMETRIA RECTANGULA

### Libro I

#### De Trigonometria Rectangula

323  
 324  
 325  
 326  
 327  
 328  
 329  
 330  
 331  
 332  
 333  
 334  
 335  
 336  
 337  
 338  
 339  
 340  
 341  
 342  
 343  
 344  
 345  
 346  
 347  
 348  
 349  
 350  
 351  
 352  
 353  
 354  
 355  
 356  
 357  
 358  
 359  
 360  
 361  
 362  
 363  
 364  
 365  
 366  
 367  
 368  
 369  
 370  
 371  
 372  
 373  
 374  
 375  
 376  
 377  
 378  
 379  
 380  
 381  
 382  
 383  
 384  
 385  
 386  
 387  
 388  
 389  
 390  
 391  
 392  
 393  
 394  
 395  
 396  
 397  
 398  
 399  
 400

### Libro II

#### De Trigonometria Rectangula

399  
 400  
 401  
 402  
 403  
 404  
 405  
 406  
 407  
 408  
 409  
 410  
 411  
 412  
 413  
 414  
 415  
 416  
 417  
 418  
 419  
 420  
 421  
 422  
 423  
 424  
 425  
 426  
 427  
 428  
 429  
 430  
 431  
 432  
 433  
 434  
 435  
 436  
 437  
 438  
 439  
 440  
 441  
 442  
 443  
 444  
 445  
 446  
 447  
 448  
 449  
 450  
 451  
 452  
 453  
 454  
 455  
 456  
 457  
 458  
 459  
 460  
 461  
 462  
 463  
 464  
 465  
 466  
 467  
 468  
 469  
 470  
 471  
 472  
 473  
 474  
 475  
 476  
 477  
 478  
 479  
 480  
 481  
 482  
 483  
 484  
 485  
 486  
 487  
 488  
 489  
 490  
 491  
 492  
 493  
 494  
 495  
 496  
 497  
 498  
 499  
 500

## TRIGONOMETRIA RECTANGULA

499  
 500  
 501  
 502  
 503  
 504  
 505  
 506  
 507  
 508  
 509  
 510  
 511  
 512  
 513  
 514  
 515  
 516  
 517  
 518  
 519  
 520  
 521  
 522  
 523  
 524  
 525  
 526  
 527  
 528  
 529  
 530  
 531  
 532  
 533  
 534  
 535  
 536  
 537  
 538  
 539  
 540  
 541  
 542  
 543  
 544  
 545  
 546  
 547  
 548  
 549  
 550  
 551  
 552  
 553  
 554  
 555  
 556  
 557  
 558  
 559  
 560  
 561  
 562  
 563  
 564  
 565  
 566  
 567  
 568  
 569  
 570  
 571  
 572  
 573  
 574  
 575  
 576  
 577  
 578  
 579  
 580  
 581  
 582  
 583  
 584  
 585  
 586  
 587  
 588  
 589  
 590  
 591  
 592  
 593  
 594  
 595  
 596  
 597  
 598  
 599  
 600





O B I  
DE  
VICENTE RU.

- Estudios sobre la evocacion de los espíritus: refutacion de las teorías espiritistas.*—Cádiz, 1860.  
*Creacion de un Instituto provincial en Cádiz.*—Folleto, Cádiz, 1862.  
*Memoria de la Exposicion Universal de Londres.*—Cádiz, 1862.  
*Consideraciones acerca del escalafon de Catedráticos de Institutos.*—Folleto, Cádiz, 1866.  
*Leyenda fantástica: Adeline.*—Cuadro de costumbres: *Una Comedia de Aficionados.*—Cádiz, 1866.  
*Memoria de la Exposicion Universal de Paris de 1867.*—Cádiz, 1868.

Las Memorias las publicó como delegado de la provincia de Cádiz en las Exposiciones de 1862 y 1867.

PARA LA ENSEÑANZA.

- Elementos de Matemáticas:** Tomo I.—*Aritmética y Algebra:* 3.<sup>a</sup> edicion, 1878. — Tomo II: *Geometría y Trigonometría*, con más de 300 grabados intercalados en el texto, 3.<sup>a</sup> edicion, 1878.

Esta obra ha sido dos veces declarada de texto y colocada en primer lugar para las provincias de Ultramar.—Precio de cada tomo, 30 rs.

*Programa de Aritmética y Algebra*, con todos los enunciados de los teoremas y problemas.—Precio, 4 rs.

*Programa de Geometría y Trigonometría:* con todos los enunciados de los teoremas y problemas.—Precio, 4 rs.

*Nociones de Geografía*, la parte astronómica y física. — Un volumen en 4.<sup>o</sup> de 338 páginas y grabados en el texto, 2.<sup>a</sup> edicion.—Cádiz, 1876.

*Aritmética para la primera enseñanza elemental y superior:* 3.<sup>a</sup> edicion.—Cádiz, 1872.

Esta obra ha sido declarada de texto y colocada en primer lugar para la Isla de Cuba.

Todas estas publicaciones se han impreso en los acreditados talleres de la Revista Médica.