FERNANDEZ
Y CARDIN

MATEMÁTICAS

ARITMÉTICA

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

DON JOAQUIN MARIA FERNANDEZ Y CARDIN,

Catedrático de dicha asignatura en el Instituto de San Isidro, agregado á la Universidad Central.

MADRID.—1858.

IMPRENTA Á CARGO DE M. MORALES Y RODRIGUEZ,
Carrera de San Gerónimo, 41, pral.

9202

INDICE.

Capítulos.		Páginas.
	Introduccion	1
	ARITMÉTICA.	
	Preliminares	5
Primero.	Numeracion	7
	Numeracion oral	id.
	Numeracion escrita	10
II.	Operaciones aritméticas *principales*	15
	Adicion de los números enteros	id.
	Sustraccion ó resta	20
	Multiplicacion	23
	Division	35
III.	Quebrados comunes	54
	Nociones preliminares	id.
	Propiedades de los quebrados	57
	Reduccion de quebrados á un comun denom.r	59
	Simplificacion de los quebrados	61
	Adicion	65
	Sustraccion	68
	Multiplicacion	70
	Division	74
	Valuacion de los mismos	79
IV.	Quebrados decimales	82
	Numeracion	id.
	Propiedades de los números decimales	85
	Adicion	86
	Sustraccion	88
	Multiplicacion	89
	Division	91
	Valuacion de estos quebrados	96
V.	Números complejos	99
	Reduccion de un número complejo á incomplejo de una cualquiera de sus especies distinta de la inferior	id.
	Adicion de los números complejos	100
	Sustraccion	101
	Multiplicacion (método ordinario)	102
	Id. método de las partes alícuotas	106
	Aplicacion del método de las partes alícuotas á la multiplicacion de números mistos imcomplejos y complejos	112

ERRATAS NOTABLES.

Páginas.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
9	2. de la N.	millon de millon	millar de millon
33	19 y 20	904 / 11	904 / 113
57	5	$\frac{3\times 6}{9}$	$\frac{3\times 6}{6}$
60	13	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$
id.	14	$\frac{642}{616}$	$\frac{462}{616}$
66	9	$1\frac{14}{9}$	$1\frac{4}{9}$
67	14	$\frac{350}{420}+\frac{316}{420}=\frac{1291}{420}=4\frac{11}{42}$	$\frac{360}{420}+\frac{315}{420}=\frac{1291}{420}=3\frac{31}{420}$
69	11	$\frac{12}{35}$	$\frac{14}{35}$
id.	12	$7\frac{18}{35}$	$7\frac{16}{35}$
86	21	1000	10000
104	14	57	(54)
106	9	27	17
109	5	$1\frac{1}{43}$	$\frac{1}{34}$
110	5	720	3720
112	16 y 17	$\frac{1}{4}$ de líneas ó línea	$\frac{1}{4}$de 4 líns. ó 1 lín.
113	16	$20\frac{1}{5}$	$20\frac{1}{4}$
127	9	69	60
130	2	Hecto-área.. 10 á.	Hect-area...100 á.
132	13	(114)	(104)
150	23	(49)	(45)
156	14	menos términos	menores términos
162	25	$\frac{6}{125}47,39$	$\frac{6}{125}$, 47,39
185	22	$\sqrt{\frac{5471}{100}}$	$\frac{\sqrt{5471}}{100}$
191	5	80	80^3
id.	16	12^2	12^3
196	21		
197	7		
199	1	$\sqrt{}$	$\sqrt[3]{}$
id.	17		
204	10		
200	26	$\sqrt[3]{\frac{7762392}{100}}$	$\frac{\sqrt[3]{7762392}}{100}$

PRÓLOGO.

«Un libro elemental de matemáticas es una obra muy fácil ó muy difícil, dice un sábio matemático del pasado siglo; es muy fácil si el autor no se propone mas que hacer un libro, ó una compilacion que mas pábulo dé ó materia de ejercicio á la memoria que á la reflexion y al entendimiento; y es muy difícil si el autor se ciñe á escribir con arreglo á sus ideas propias y á no aceptar las de otro sino apropiándoselas con imparcial exámen y meditacion detenida; si quiere conciliar la sencillez y la claridad con el rigor y la precision, ocupar la inteligencia sin fatigar la memoria, y no decir mas de lo conveniente dejando adivinar lo que se calla. Por eso son tan raros los buenos libros elementales en medio de la *estéril abundancia* de tratados de matemáticas, que por todas partes nos cerca y nos agobia sin enriquecernos.»

Grandes son en efecto las dificultades con que hemos luchado al realizar en nuestra obra el segundo extremo de esta máxima, y nos queda en el ánimo un prudente recelo de no haberlo alcanzado por completo á pesar de que al escribirla ni por un momento hemos perdido de vista la sabiduría del consejo, y de que hemos aportado á este trabajo todo el caudal de esperiencia que pudimos adquirir en nuestra enseñanza. Quédanos, sin embargo, la consoladora idea de que en esta clase de trabajos no es la perfeccion absoluta lo que debe pedirse sino la relativa al objeto á que el libro se consagra; y bajo este punto de vista creemos haber hecho lo posible por acercarnos á conseguirlo.

Una obra destinada á servir de texto para el estudio de las matemáticas en la *segunda enseñanza* debe proponerse dos fines, en nuestro juicio inseparables, y que deben realizarse completa y simultáneamente. De estos fines el primero es desenvolver, dar fuerza, vigor y precision al entendimiento de la juventud que empieza á dar sus primeros pasos en la carrera de las ciencias; y el segundo nutrirlo con una suma de conocimientos utilísimos para todas las profesiones científicas ó industriales, y siempre necesarios en todas las situaciones de la vida. Convertir el estudio de las matemáticas en una verdadera gimnástica del espíritu, é implantar al propio tiempo en él las nociones fundamentales y eminentemente científicas de la cantidad, de la relacion, y de la forma, debe ser el pensamiento superior y dominante de los libros de texto que se ponen en manos de la juventud. Mucho órden y mucha claridad, en suma, mucho *método*, son indispensables para lograr el fin primero; una razonable estension al par que una sobria y atinada eleccion de las teorias son necesarias para lograr el fin segundo.

Fieles á este doble pensamiento que reina en toda la obra, hemos procurado que la esposicion de la doctrina en la *Aritmética* y en el *Algebra* vaya siempre animada por el espíritu del *análisis*. Antes de sentar una conclusion ó de establecer una regla, preparamos el camino que debe recorrer la mente principiando por el caso particular ó por el ejemplo determinado, y observando todas las circunstancias que pueden restringir, ampliar ó modificar el enunciado teórico, ó la regla práctica que al fin ponemos. Seguimos así los mismos pasos que naturalmente sigue el espíritu, el cual nunca aprende las cosas en general, sino que por lo particular que percibe se eleva á la nocion abstracta y universal. El método analítico, rico por la multitud de circunstancias que va haciendo notar, y ameno por la variedad de puntos de vista que ofrecen sus horizontes, convierte la enseñanza en un cómodo y distraido viage que se hace de un pueblo á otro intentando escursiones acá y allá y recogiendo noticias útiles y agradables por un estenso y variado territorio. Deja además al entendimiento juvenil la siempre útil persuasion de hacer por sí mismo el descubrimiento á que insensiblemente se le va conduciendo.

No es de nuestro propósito encomiar ahora la utilidad de los estudios matemáticos para justificar la estension que les damos en nuestra obra elemental: son demasiado comunes é interesantes, se palpan por do quiera sus aplicaciones así en la vida práctica de las sociedades modernas, como en la region mas elevada de las ciencias: ninguna carrera puede emprenderse hoy, que no exiga esta necesaria iniciacion, ninguna profesion ú oficio puede escogerse que no tenga que acudir alguna vez á estos conocimientos. Menester es, pues, que se hallen adornados de ellos, no solamente los que van para carreras letradas, sino los que á nada mas aspiran que á sacar de la segunda enseñanza la suma de conocimientos indispensables para los usos mas comunes de la vida doméstica y social.

Esta es la razon por que no hemos sido escasos en las teorias, ni mucho menos en sus aplicaciones, que en seguida de cada una de ellas hemos intercalado. Al lado de la esplicacion teórica ponemos la realizacion práctica y concreta; y con este método, cuya ventaja sabemos por esperiencia, procuramos templar la aridez especulativa de la teoria ó de la regla, con el sabor de práctica utilidad que lleva el fruto que en seguida se coje y se aprovecha.

De intento hemos dejado para el fin de la Aritmética todas aquellas teorías, que consideramos mas difíciles y áridas, formando un complemento, cuyo provechoso estudio necesita de alguna preparacion.

Hémosle compuesto de las teorías que tratan de propiedades de los números, máximo comun divisor, mínimo comun múltiplo, con sus aplicaciones á los quebrados comunes y decimales; completándole con la estraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

Creemos que todo lo relativo á las razones y proporciones, á las progresiones y á los logaritmos tiene un lugar mas oportuno en el álgebra que en la aritmética; porque tan importantes teorias tienen allí su demostracion general, y son mas comprensibles los desarrollos y aplicaciones prácticas de esta parte mas elevada de la ciencia de los números.

Procuramos cuanto podemos ser breves sin pecar de oscuros, y en la esposicion de las reglas omitimos de intento aquellas preparaciones ó disposiciones puramente gráficas que sin ser parte de ellas inhabilitan al discípulo para concebir y emprender las prácticas mas libres y mas variadas que se usan en ulteriores tratados de esta vasta ciencia (*).

Siempre nos proponemos por norte la mayor facilidad y la mayor utilidad en el estudio; porque esto es lo menos que puede pedirse á una obra de texto, siquiera esta sea considerada como un medio material, como un instrumento de la enseñanza. La esperiencia que en ella nos ha guiado, será en adelante nuestro mejor criterio: á ella apelamos y con ella ilustrada por el maduro consejo de nuestros dignos comprofesores contamos para dar á nuestra obra la perfeccion gradual y progresiva á que debe aspirar toda obra humana.

(*) En las *Nociones de Aritmética* que acompañan á nuestro trabajo sobre las pesas y medidas de Asturias, publicado en 1853, hemos hecho ya esta pequeña variacion, que no tenemos motivo para omitir al presente.

ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS.

INTRODUCCION.

1. *Se llaman* MATEMÁTICAS *las ciencias que tratan de la cantidad.*

2. CANTIDAD *es todo aquello que se concibe como compuesto de partes y divisible en ellas;* como una porcion de monedas, un grupo de árboles, la distancia entre dos puntos, la superficie de un terreno, etc.

3. La cantidad puede ser *contínua ó discreta.*

CANTIDAD CONTÍNUA es *aquella cuyas partes están unidas entre sí;* como la superficie de un terreno.

CANTIDAD DISCRETA es *aquella cuyas partes no tienen union ó enlace entre sí;* como una porcion de monedas.

La cantidad contínua es *mensurable* y la discreta es *numerable.*

4. Las matemáticas se dividen en dos ramas principales: ARITMÉTICA, *que trata de la cantidad discreta ó numerable, y* GEOMETRÍA *que trata de la cantidad contínua ó mensurable.*

Otra rama superior se concibe que es el ÁLGEBRA, *la cual trata de la cantidad en general, y prescinde de su naturaleza discreta ó contínua.*

5. Las matemáticas no solo son ciencias, sino que son el mas perfecto modelo de la ciencia.

Entiéndese por CIENCIA *una série de verdades dependientes unas de otras y subordinadas todas á un principio.*

Esta subordinacion rigurosa se obtiene por medio de la *demostracion.*

6. *La* DEMOSTRACION *es un raciocinio en que se resuelve una cuestion por principios evidentes.* La *cuestion* es aquel enunciado particular que se propone para ser demostrado.

La demostracion se divide en *directa* é *indirecta* ó *ad-absurdum.* La primera se funda en la relacion que tiene una verdad con un principio evidente por sí mismo ó ya demostrado. La segunda es la que se funda en el absurdo que se seguiria si no fuese verdad lo que se propone.

7. Los principios en que se funda la demostracion matemática se llaman *axiomas.*

Los principales de que haremos frecuente uso son los siguientes:

1.° *Una cosa no puede ser y no ser al mismo tiempo.*

2.° *Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

3.° *El todo es igual á la suma de sus partes y mayor que cada una de ellas.*

4.° *Lo que se hace con todas las partes de un todo, queda hecho con el todo.*

8. Otras verdades hay que se llaman POSTULADOS *ó peticiones, que son aquellas verdades fundamentales que tienen un carácter práctico, por cuanto en ellas se establece la evidente posibilidad de hacer alguna cosa,* como por

ejemplo: De cualquier punto dado, á otro tambien dado, se puede tirar una línea recta. Los postulados figuran principalmente en la geometría.

En otras proposiciones se definen los objetos de la ciencia matemática.

9. Definicion *es la esplicacion de la naturaleza de una cosa por sus caractéres genéricos y diferenciales*, como por ejemplo: Ángulo es la inclinacion de dos rectas que tienen un punto comun.

10. Teorema *es un enunciado especulativo en que se propone una verdad demostrable.*

En todo teorema hay siempre tres cosas: una *hipótesis* que sirve de dato á la demostracion: una *tesis* que espresa la verdad demostrable, y en seguida la *demostracion*, por ejemplo: Si dos términos de un quebrado se multiplican ó dividen por un mismo número (hipótesis), el valor del quebrado no se altera (tesis). Á este enunciado sigue la demostracion.

11. Problema *es un enunciado práctico en que se propone hacer alguna cosa enseñando y legitimando los procedimientos para lograrlo.*

En todo problema hay siempre tres cosas indispensables, una *propuesta*, por ejemplo: multiplicar quebrados; una *solucion* en que se dan las reglas para hacer esta multiplicacion, y una *demostracion* en que se hace ver que el uso de tales reglas conduce siempre á un resultado legítimo. Muy frecuentemente la demostracion de la regla precede á la regla misma que sirve para resolver el problema.

Tambien se llaman *problemas*, en un sentido menos rigoroso, las cuestiones particulares y concretas que se proponen y resuelven como ejemplos ó aplicaciones prácticas de las reglas.

12. Otras proposiciones hay que se llaman COROLARIOS, *que son verdades especulativas ó prácticas que se deducen inmediata y fácilmente de una verdad anterior.*

13. Tambien hay *observaciones*, que son prevenciones ó advertencias que se van intercalando por todo el cuerpo de la ciencia matemática para facilitar las demostraciones.

Las observaciones tienen por objeto principal en esta obra hacer notar en un procedimiento ó en una teoría aquellas circunstancias importantes que pueden erigirse en verdades de la ciencia por su legítima relacion con los principios fundamentales. Las observaciones suelen llamarse tambien *escólios*.

Las demostraciones matemáticas se estienden con mucha frecuencia á los teoremas *recíprocos*.

14. *Son* RECÍPROCOS *aquellos teoremas de los cuales el uno tiene por hipótesis y por tesis la tesis é hipótesis del otro*, por ejemplo: el rádio que divide la cuerda en dos partes iguales, es perpendicular á ella: el rádio que es perpendicular á la cuerda la divide en dos partes iguales. En la geometría es muy frecuente la reciprocidad de los teoremas.

La demostracion de los teoremas recíprocos se funda ordinariamente en el absurdo que se sigue, y es indirecta. El absurdo que se deduce es la destruccion de la verdad establecida en el *teorema directo*.

ARITMETICA.

Preliminares.

15. Aritmética *es la ciencia de los números.*

16. Número *es el todo formado de una pluralidad de unidades*: como treinta varas, veinte libros, siete dias.

17. Unidad *es la cantidad que sirve de medida al número, y al cual este se refiere como el todo á la parte:* la vara, el libro, el dia, son las unidades de aquellos números.

La unidad es muchas veces arbitraria, y á su vez compuesta de otras unidades inferiores, como la vara se compone de tres pies y es un verdadero número de pies.

La unidad *en abstracto* es absolutamente simple é indivisible, y no es número respecto á otras unidades inferiores

18. El número se divide en *entero* y *quebrado.*

Número entero *es una totalidad de unidades no referidas como inferiores á otra unidad superior:* como *veinte* varas.

Número quebrado *es una totalidad de unidades inferiores referidas á otra unidad superior*: como *las dos terceras partes* de una vara.

La reunion de un número entero y un quebrado suele llamarse *número misto*, como veinte varas y dos tercios.

19. Los números pueden ser *abstractos* ó *concretos.*

NÚMERO ABSTRACTO *es el que no determina la especie de la unidad á que se refiere:* como ocho, cuarenta, etc.

NÚMERO CONCRETO *es el que determina la especie de la unidad:* como ocho varas, cuarenta duros, etc.

Los números concretos son HOMOGÉNEOS *cuando se refieren á unidades de una misma especie:* como veinte duros, seis duros: y son HETEROGÉNEOS *cuando se refieren á unidades de distinta especie*: como trece libros, cuarenta y dos varas.

Los números concretos se dividen tambien en *complejos* é *incomplejos*.

Se llaman *números* COMPLEJOS *á los que se componen de varios concretos de diferente especie, pero de la misma naturaleza: como* tres varas, dos pies, cinco pulgadas, dos quintales, una arroba, siete libras, cuatro onzas.

Son números INCOMPLEJOS los concretos de una sola especie, por ejemplo: veinte varas, cuarenta duros.

La aritmética enseña á *espresar* los números y á *componerlos* y *descomponerlos*.

CAPÍTULO PRIMERO.

NUMERACION.

20. Numeracion *es aquella parte de la aritmética que enseña á espresar los números.*

Los números pueden espresarse *de palabra* ó *por escrito:* la numeracion es por lo tanto *oral* ó *escrita*.

ARTÍCULO PRIMERO.

Numeracion oral.

21. La numeracion oral *enseña á espresar todos los números con muy pocas palabras.*

Hé aquí la manera como esto se consigue.

A los primeros números se dieron los nombres siguientes:

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Las unidades que estas nueve primeras palabras espresan se han llamado *simples* ó *de primer órden*; y todo el artificio del sistema consiste en haber tomado la última *diez* unidades de un órden para formar *una* del órden siguiente, y en contar por esta, como por aquellas : así que el número *diez* se considera como *una unidad compuesta*, llamada *decena* ó *unidad de segundo órden*, y se cuenta por decenas como por unidades simples de este modo:

Una decena, dos decenas, tres decenas, cuatro decenas... diez decenas.

A cuya nomenclatura sustituyó el uso otra menos regular, pero mas concisa, que es la siguiente:

Diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa, cien.

Los números compuestos de decenas y unidades simples se espresan añadiendo al número de decenas alguno de los *nueve* nombres de las unidades simples de este modo:

Diez y uno (*), *diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y nueve.* . . . .
noventa y uno, noventa y dos, noventa y tres... noventa y nueve. . . . .

Se considera el número *ciento* como una nueva unidad, llamada *de tercer órden*, y se cuenta por cientos ó *centenas*, como por unidades ó por decenas, del modo siguiente: *cien, dos cientos...* (**), *nueve cientos, diez cientos ó mil.*

Los números comprendidos entre dos números consecutivos de centenas, se espresan añadiendo al menor los *noventa y nueve* primeros números de este modo:

Ciento uno, ciento dos... ciento noventa y nueve..., nuevecientos uno..., nuevecientos dos, nuevecientos noventa y nueve.

Se toma el número *mil* como otra unidad compuesta, que se llama *millar* ó *de cuarto órden*, y se cuentan los millares como las unidades, decenas y centenas, como sigue:

Mil, dos mil..., nuevecientos noventa y nueve mil, mil miles ó *millon.*

(*) Por la anomalía del lenguaje se dice: *once, doce, trece, catorce y quince*, en vez de *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, y diez y cinco.*

(**) En vez de *cinco cientos* se dice *quinientos.*

Los números comprendidos entre dos números consecutivos de millares se espresan añadiendo al menor los *nuevecientos noventa y nueve* números primeros, de este modo :

Mil uno, mil dos... mil nuevecientos noventa y nueve

. . . .

. . . .

nuevecientos noventa mil uno..., nuevecientos noventa y nueve mil nuevecientos noventa y nueve.

Las *decenas* y *centenas de millar* son *unidades de quinto* y *sesto órden*.

Se considera el *millon* como una nueva unidad compuesta, que será *del órden séptimo* y se cuenta por unidades, decenas, centenas; millares, decenas y centenas de millar de millon, como por unidades sencillas.

De modo que los millones son unidades del *órden séptimo*, las decenas de millon del *octavo*, las centenas de millon del *noveno*, los millares de millon del *décimo*, las decenas de millar de millon del *undécimo*, y las centenas de millar de millon del *duodécimo*.

Finalmente, un millon de millones se llama *billon*, un millon de billones *trillon*, etc.; y se cuenta por billones, trillones, etc., como por millones (*).

22. En suma, con los nombres de los *diez* primeros números, y los de *ciento, mil y millon*, modificándolos y combinándolos convenientemente, pueden espresarse todos los números enteros por muy grandes y complicados que sean.

Este sistema admirable se llama DECIMAL Ó DECENARIO; porque *diez unidades de un órden componen una decena*

(*) Los franceses cuentan solo por unidades, decenas y centenas de millon, llamando billon al millon de millon, y trillon al que nosotros billon, etc.

del mismo órden ó una unidad del órden superior inmediato.

Observacion. Nótese que de la misma manera que se formó este sistema, pudo haberse formado otro cualquiera. Si se hubiese convenido, por ejemplo, en que *doce* unidades de un órden compusiesen una del órden siguiente; ó si se contase por *docenas* como por *dieces* ó *decenas*, resultaría el sistema *duodecimal*. Si *dos* unidades de un órden formasen una del siguiente, el sistema sería *binario*, etc.

ARTICULO II.

Numeracion escrita.

23. La numeracion escrita *enseña á representar todos los números con muy pocos signos ó caractéres.* Estos caractéres se llaman *cifras* ó *guarismos.*

Para conseguir esta representacion sistemática, se emplean los diez signos ó cifras siguientes:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
cero,	uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,

La cifra primera, llamada cero, es símbolo de la *nada*, por que *nada* espresa por sí misma; y así se dice que es *cifra no significativa*: las restantes son *cifras significativas*.

Con estas diez cifras se pueden espresar todos los números, conviniendo en que una de ellas colocada á la izquierda de otra represente unidades del orden superior inmediato, y por lo tanto esprese *unidades diez veces mayores que las de la cifra de la derecha*: ó lo que es igual, que la cifra que represente unidades sencillas, se coloque en el primer lugar de la derecha, la que esprese decenas en el segundo, la que centenas en el tercero, etc. De modo que segun este convenio, *cada cifra debe ocupar un lugar igual al órden de unidades que representa contando estos* *lugares de derecha á izquierda*. Así que, el número *cuatrocientos treinta y seis* que contiene cuatro centenas ó unidades de *tercer* órden, tres decenas ó unidades de *segundo* órden y seis unidades sencillas ó del órden *primero*, se escribe:

436.

Noventa y dos mil setecientos trece, que contiene nueve unidades de *quinto* órden, dos del *cuarto*, siete del *tercero*, una del *segundo* y tres del *primero*, se escribe así:

92713.

El CERO sirve para ocupar el lugar de algun órden de unidades que falta en el número que se quiera escribir.

Así: *tres mil noventa*, como faltan centenas y unidades, se escribe:

3090.

24. Del convenio que se acaba de establecer es inmediata consecuencia, que:

1°. Cada cifra tiene dos valores; uno *absoluto*, que es el que se refiere al número de unidades que espresa, y otro *relativo* que depende del órden que estas unidades ocupan en el sistema.

2°. El valor de un número no se altera aunque se pongan uno ó mas ceros á su izquierda; puesto que no se altera el lugar de la cifra, contándose este de derecha á izquierda.

3.° Un número se hace *diez*, *cien*, *mil*, etc. veces mayor, colocando *uno*, *dos*, *tres*, etc. ceros á su derecha porque las unidades de cada cifra se hacen entonces *diez*, *cien*, *mil*, etc. veces mayores.

Por el contrario, un número que termina en ceros se hace *diez, cien, mil*, etc. veces menor suprimiendo *uno*, *dos*, *tres*, etc., ceros á su derecha.

El sistema de numeracion escrita que se acaba de esplicar se llama tambien *decenario* ó *decimal*; porque con *diez* caractéres en ordenada combinacion representa todos los numeros imaginables.

Observaciones. 1.ª Se pudo haber convenido en que las unidades sencillas ocupasen el primer lugar de la izquierda, las decenas el segundo, etc.; mas en tal caso los números no podrian escribirse en el órden con que se espresan de palabra, esto es, principiando por las unidades de órden superior, á no ser que se egecutase en órden inverso á la escritura comun, es decir, de derecha á izquierda.

2ª. Si se hubiese convenido en que toda cifra puesta á la izquierda de otra espresase unidades dos veces mayores que esta; con *dos cifras* solamente se podrian haber escrito todos los números; si *tres veces* mayores, con *tres*.... si *doce veces* mayores se necesitarian *doce cifras*, etc. Todos estos sistemas son mas complicados que el decimal, porque no se conforman con la numeracion verbal que es decimal tambien. Si la numeracion verbal fuese duodecimal, por ejemplo, la numeracion duodecimal escrita seria la mas sencilla.

25. *Un número* de varias cifras ya escrito *se lee dando á cada una el valor absoluto y relativo que tiene*, ó lo que es igual, enunciando las unidades que espresa y la especie de estas segun el lugar que la cifra ocupa.

El número 384 se lee: *tres centenas, ocho decenas* y *cuatro unidades*, ó lo que es igual *trescientos ochenta y cuatro*. 157895 se lee: *una centena de millar, cinco decenas de millar, siete millares, ocho centenas, nueve decenas* y *cinco unidades*, ó sea *ciento cincuenta y siete mil ochocientos noventa y cinco*.

Cuando el número es de muchas cifras, se facilita su lectura dividiéndole en secciones de seis guarismos cada una, empezando por la derecha. En la primera separacion se pone un 1, en la segunda un 2, etc. Cada seccion de seis cifras se divide en dos grupos de á tres con un punto; y todo queda reducido á leer aisladamente cada uno de estos grupos, pronunciando *mil* donde se halle un punto, y *millon*, *billon*, etc., donde se halle el 1, el 2, etc.

La lectura del número 64563700056003 se facilita de este modo:

$$64_2563.700_1056.003$$

y se espresa: *sesenta y cuatro billones quinientos sesenta y tres mil setecientos millones cincuenta y seis mil tres.*

SIGNOS USADOS EN LA ARITMÉTICA.

27. $+$ significa *mas*, así $3+4$ se lee 3 *mas* 4.

$-$ *menos*, así $9-5$ se lee 9 *menos* 5.

. ó $\times$ *multiplicado*, así 7.2, ó 7×2 se lee 7 *multiplicado* por 2.

: ó — *dividido*, así $6:3$ ó $\frac{6}{3}$ se lee 6 *dividido* por 3.

$=$ *igual*, así $7\times2=14$, se lee 7 multiplicado por 2 *igual* 14.

26. MEDIDAS MAS USUALES DEL ANTIGUO Y NUEVO SISTEMA.

SISTEMA ANTIGUO. | NUEVO SISTEMA.

De longitud.

1 legua tiene.	20.000. pies.	1 kilómetro tiene	1000 metros.
1 vara.	3 pies.	1 metro.	10 decímetros.
1 pié.	12 pulgadas.	1 decímetro.	10 centímetros.
1 pulgada.	12 líneas.	1 centímetro.	10 milímetros.

De capacidad.

PARA ÁRIDOS.

1 fanega tiene.	12 celemines	1 hectólitro tiene. . . .	100 litros.
1 celemin.	4 cuartillos.	1 decálitro tiene.	10 litros.
PARA LÍQUIDOS.		1 litro.	10 decílitros.
1 cántaro tiene.	8 azumbres.	1 decílitro.	10 centílitros.
1 azumbre.	4 cuartillos.		
Las medidas para el aceite se arreglan á las de peso.			

De peso.

1 quintal tiene.	4 arrobas.	1 quintal métrico tiene. .	100 kilógramos.
1 arroba.	25 libras.	1 kilógramo.	1000 gramos.
1 libra.	16 onzas.		

De dinero.

1 duro tiene.	20 reales.	1 doblon de Isabel II tiene	100 reales.
1 real.	34 maravedis	1 escudo.	10 reales.
		1 real.	10 décimos.

De tiempo.

1 siglo tiene.	100 años.
1 año.	12 meses.
1 mes (comercial).	30 dias.
1 dia.	24 horas.
1 hora.	60 minutos.
1 minuto.	60 segundos.

CAPÍTULO II.

OPERACIONES ARITMÉTICAS.

28. Las principales operaciones que se ejecutan en la aritmética son la *adicion*, y su contraria la *sustraccion*, la *multiplicacion* y su contraria la *division*. Estas cuatro operaciones pueden, sin embargo, reducirse á la primera, que por esto suele llamarse OPERACION FUNDAMENTAL.

ARTÍCULO PRIMERO.

Adicion de los números enteros.

29. ADICION *es una operacion que tiene por objeto reunir varios números, llamados* SUMANDOS *en uno á que se dá el nombre de* SUMA.

En la adicion pueden distinguirse dos casos: 1.° *sumar un número cualquiera con otro ú otros de una cifra;* 2.° *sumar números de varias cifras.*

30. *Primer caso.* La resolucion de este caso se reduce á agregar sucesivamente á uno de los sumandos las diferentes unidades que el otro contiene. Para ejecutar esta adicion 6+4, puede decirse, 6 y 1 son 7, 7 y 1 son 8, 8 y 1 son 9, 9 y 1 son 10; de modo que 6 + 4 = 10. Es mucho mas breve la operacion, si se saben de memoria los resultados de la adicion de una cifra á un número cualquiera; y para esto venimos preparándonos fácil é insensiblemente desde la edad mas tierna. Para ejecutar

la suma $13+7$, decimos de una vez que componen 20, sin necesidad de hacer las siete adiciones parciales que exigiría la cifra 7. Sin embargo, á este procedimiento solemos acudir cuando olvidamos los resultados de la adicion de las cifras.

La adicion de varias cifras se verifica de la misma manera, pero sucesivamente: al resultado de la adicion de las dos primeras, añadimos la tercera; al resultado que se obtiene añadimos la cuarta, y así se continúa por toda la série de cifras que se quieran sumar, $3+7+5+2$; se realiza diciendo: 3 mas 7 son 10, 10 y 5 son 15, 15 y 2 son 17: así que $3+7+5+2=17$.

31. *Segundo caso.* Si tuviésemos que ejecutar la siguiente adicion $52+167+8+491$, procederíamos por partes, reuniendo primero todas las cifras de las unidades de los sumandos, de esta manera: 2 y 7 son 9, 9 y 8 son 17, 17 y 1 son 18. En seguida reuniríamos todas las cifras de las decenas; mas al ejecutarlo tendríamos presente que el resultado anterior 18, equivale á 8 unidades y 1 decena; consideraríamos á 8 como unidades de la suma y uniríamos la decena á las decenas de los sumandos, diciendo: 1 y 5 (del primer sumando) son 6, 6 y 6 (del segundo), son 12, 12 y 9 son 21. Pasaríamos luego á sumar las centenas, mas como el anterior resultado 21 decenas equivale á 1 decena, y 2 centenas, consideraríamos á la decena como correspondiente á la suma, y agregaríamos las dos centenas á las de los sumandos, diciendo 2 centenas y 1 (del 2.° sumando) son 3, 3 y 4 del (último) son 7 centenas. La suma, pues, que segun el axioma 4.° (7), representa la verdadera adicion ó reunion de los sumandos, es 7 centenas, 1 decena y 8 unidades; ó lo que es igual, 718.

Este procedimiento, que es universal y aplicable á cualquier ejemplo, se formula en la siguiente regla:

Para sumar números de varias cifras, se suman las unidades del mismo órden, principiando por el inferior; esto es, se reunen unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc. *Si de la suma de un órden cualquiera de unidades resultaren una ó mas del órden superior inmediato, se reunirán á este:* y el número formado por estas sumas parciales será la suma pedida (*).

Ejemplo. Sean los sumandos 7846+305+4910+27. Para mayor sencillez se suelen colocar los sumandos unos debajo de otros, de modo que estén en columna las unidades de un mismo órden, que son las que se suman entre sí, como se vé á continuacion:

$$\text{Sumandos}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{r}7846\\305\\4910\\27\\\hline\end{array}\right.$$

$$\text{Suma}\ldots\ldots\ldots\ldots 13088$$

Se suman las cifras de la primera columna ó sean las unidades de este modo: 6 y 5 son 11 y 7 son 18; se escribe el 8 debajo de la columna de las unidades, y se re-

(*) El caso no muy comun en que de la suma de un órden cualquiera de unidades resultan 10 ó mas del siguiente, suele sorprender á los principiantes; mas se resuelve por la regla general, reservando para el órden siguiente las decenas que de él hayan resultado, cualquiera que sea su número. Si al sumar los millares, por ejemplo, llegase esta suma á 123, se escribirían los 3 millares, y las 12 decenas de millar se reservarían para agregarlas á las decenas de millar de los sumandos. Lo mismo sería considerar las 12 decenas como compuestas de 1 centena y 2 decenas, y agregarlas cada una á la columna correspondiente.

En este caso, y siempre que el número de sumandos es muy considerable, conviene, para no equivocarse, dividir la operacion en varias adiciones parciales y sumar luego los resultados que se obtienen.

serva la decena para sumarla con las decenas de la columna inmediata. Las decenas se suman así: 1 y 4 son 5 y 1 son 6 y 2 son 8, que se escribe debajo de las decenas de los sumandos. Se suman ahora las cifras de la tercera columna de este modo: 8 y 3 son 11 y 9 son 20: se escribe el 0 (centenas), debajo de las centenas, y se guardan los dos millares para sumarlos con los de la columna inmediata. Por último, se suman los millares de la manera siguiente: 2 (que resultaron de la adicion de las centenas) y 7 son 9 y 4 son 13, que se escribe á la izquierda del 0 anterior ó sea de las centenas de la suma.

Observaciones. 1.ª El número total de unidades comprendidas en la suma es independiente del órden en que los sumandos estén colocados; de donde resulta que la adicion puede ejecutarse principiando por la parte superior, inferior, etc., de cada columna.

2.ª Al sumar un órden cualquiera de unidades, pueden resultar alguna ó algunas de órden superior inmediato, al que no podrían agregarse fácilmente si las unidades de este último órden estuviesen ya sumadas; por cuya razon, la adicion debe principiarse por las unidades del órden inferior, y continuar por las del superior inmediato, etc.

32. Las reglas de la adicion y las que se dan para las demás operaciones son evidentes; mas al practicarlas, puede cometerse algun error; por lo que, para tomar como ciertos los resultados, *se prueban* las operaciones.

Se llama PRUEBA *de una operacion otra que se ejecuta para cerciorarse de la esactitud de ella.*

Aunque se puede tambien cometer error al practicar la prueba; sin embargo, es tan difícil que el error de esta se compense con el de la operacion principal, que desde luego *se puede tomar como cierto el resultado en que la operacion y la prueba estén conformes.*

De la naturaleza de la prueba se deduce, que no conviene emplearla cuando es mas difícil que la operacion principal: tampoco es ventajosa cuando haya que escribir nuevas cifras: es mejor en estos casos repetir dos ó mas veces la operacion principal.

La adicion se prueba repitiéndola en un órden inverso de aquel en que se ejecutó; es decir, principiando por la parte inferior á sumar las cifras de cada una de las columnas de unidades, decenas, centenas, etc., suponiendo que la vez primera se diese principio por la parte superior de las mismas columnas.

33. La adicion de los números concretos se verifica como la de los abstractos que ya hemos ejecutado; teniendo presente que, para que pueda tener lugar esta operacion *los sumandos han de ser homogéneos.*

PROBLEMA.

Un comerciante tiene paños de seis clases distintas, á saber: 386 varas de primera clase, 89 de segunda, 125 de tercera, 4918 de cuarta, 812 de quinta, 408 de sesta: y quisiera averiguar el número total de varas.

Se escriben los sumandos como aquí vemos:

$$\begin{array}{r} 386 \\ 89 \\ 125 \\ 4918 \\ 812 \\ 408 \\ \hline 6738 \end{array}$$

y se ejecuta la operacion como en el ejemplo anterior;

y el resultado 6738 espresa el número total de varas de paño que el comerciante tiene.

ARTÍCULO II.

Sustraccion ó resta.

34. SUSTRACCION *es una operacion que tiene por objeto determinar uno de dos sumandos, dada la suma y el otro sumando*. Es operacion inversa ó regresiva de la suma.

La suma dada se llama *minuendo;* el sumando conocido *sustraendo*, y el sumando que se determina *resíduo, resto,* ó *resta*, y tambien *diferencia*.

En la sustraccion pueden distinguirse dos casos: 1.° *cuando el sustraendo tiene una cifra, teniendo una ó mas el minuendo; 2.° cuando minuendo y sustraendo tienen mas de una cifra*.

35. *Primer caso*. Este caso se resuelve segun la definicion de la sustraccion, averiguando qué número se ha de sumar con el sustraendo para que resulte el minuendo; y como este es el primer caso de la adicion, que se ejecuta de memoria, con igual facilidad se resuelve el caso presente. Así 8 menos 5 son 3; de manera que 3 es el resto ó diferencia, porque 3 es el número, que sumado con 5, produce 8, ó 8—5=3; del mismo modo 21—8=13.

36. *Segundo caso*. Si hubiésemos de restar de 859, el número 423 procederíamos por partes, como en la adicion, restando primero las unidades de primer órden, luego las decenas, centenas, etc., de este modo: 9 unidades menos 3 unidades dan de resto 6 unidades; ó mas sencillamente: 9 menos 3 son 6, 5 menos 2 son 3, 8 menos 4 son 4. De modo que la diferencia total segun el

axioma 4.° (7) es 4 centenas, 3 decenas y 6 unidades, ó sea 436.

Este caso no ofrece dificultad cuando cada cifra del sustraendo es menor que la de igual órden del minuendo; mas si esto no sucediere, veámos cómo puede obviarse la dificultad. Supongamos que el minuendo fuese 74, y el sustraendo 26, siguiendo el procedimiento anteríor tendríamos que restar 6 de 4, lo que es imposible: para hacer posible la operacion, agregaremos á las 4 unidades del minuendo otras 10, ó sea una decena, lo que convierte en 14 las unidades del minuendo, y restando de estas las unidades del sustraendo quedan 8 de diferencia. Agregando una decena al minuendo, se agrega tambien al resto segun la definicion; luego es preciso para que la diferencia no varíe, quitarle dicha decena, lo que se consigue evidentemente agregándola á las decenas del sustraendo y restando de 7 decenas 3, en lugar de 2 que tiene dicho número; siendo por lo tanto 4 las decenas del resto. La diferencia total es, pues, 4 decenas y 8 unidades, ó lo que es igual, 48.

El procedimienlo empleado en los dos ejemplos precedentes, que es aplicable á cualquier otro, se reduce á la siguiente regla:

Para restar un número de mas de una cifra de otro de varias, se rebajan los diferentes órdenes de unidades del sustraendo de sus iguales del minuendo: esto es, se restan las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc.

Si alguna cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo se agregan á ella 10 *unidades de su órden, se ejecuta esta resta parcial, y al restar las cifras del órden inmediato se añade á la del sustraendo otra uni-*

dad. El número formado por todos los restos parciales es el buscado.

Ejemplo: Sea restar de 490812 el número 82054: ordenaremos la operacion para mayor sencillez como se vé á continuacion:

Minuendo.	490812
Sustraendo.	82054
Resta......	408758

y la ejecuta remos de este modo: 2 menos 4 no puede ser, agregaremos 10 unidades al 2, lo que le convierte en 12; 12 menos 4 son 8, que se escribe en el lugar de las unídades. Agrego 1 al 5 y son 6; 6 de 1 no pueden restarse; agrego á este 10 unidades de su órden, lo que le convierte en 11; 11 menos 6 son 5, que escribo en el lugar de las decenas. Agrego otra unídad al 0, cifra siguiente del sustraendo; 8 menos 1 son 7, que coloco en el lugar de las centenas. 0 menos 2 no puede ser; agrego 10 unidades de su órden al 0, cuarta cifra del minuendo; 10 menos 2 son 8 que se coloca en el lugar de los millares. Agrego otra unidad al 8; 9 menos 9 es 0, que se escribe en el quinto lugar. 4 menos nada son 4 que se escribe á la izquierda del resto anterior. El resto total es, pues, 408758.

En la práctica se puede emplear el lenguaje siguiente que es mas conciso: 12 menos 4 son 8, 11 menos 6 son 5; 8 menos 1 son 7; 10 menos 2 son 8; 9 menos 9 es 0; 4 menos nada son 4.

Observacion. Cuando alguna cifra del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, se ha dicho (36) que se agregaban á aquella 10 unidades de su órden y una á la cifra del superior inmediato del sustraendo, mas como esto no podria verificarse si las unidades del órden superior se hubiesen restado ya, la sustraccion se debe principiar por las unidades de órden inferior, y continuar por las del superior inmediato, etc.

37. *La sustraccion se prueba sumando el sustraendo con el resto, y esta suma*, segun la definicion, *será igual al minuendo*, si la operacion esta bien hecha.

38. La sustraccion de los números concretos se verifica lo mismo que la de los abstractos, advirtiendo únicamente que *minuendo y sustraendo han de ser homogéneos*.

PROBLEMA.

Un bosque tenia 87600 árboles de los que se cortaron 4901 ¿Cuántos quedaron en él?

$$\begin{array}{lr} & 87600 \\ & 4901 \\ \hline \text{Resultado...} & 82699 \end{array}$$

ARTÍCULO III.

Multiplicacion de los números enteros.

39. La MULTIPLICACION *de dos números es la operacion que tiene por objeto hallar un tercer número que sea respecto á uno de ellos lo que el otro es respecto á la unidad.*

Así multiplicar 5 por 3 es determinar un número que contenga al 5 *tres veces*, ó al 3 *cinco veces*, es decir que este número es 15. El resultado de multiplicar 8 por $\frac{1}{2}$ es 4, porque 4 contiene á 8 *media vez* ó es la mitad de 8, y contiene á $\frac{1}{2}$ *ocho veces*.

Esta es la multiplicacion abstracta en la cual es indiferente referir uno, ú otro de los números que se multiplican, llamados *factores*, al número que resulte, llamado *producto*; con tal que el otro factor se refiera á la unidad bajo la misma relacion. Esta reciprocidad de los factores es esencial á la multiplicacion.

En la multiplicacion de números concretos la denominacion de los factores no es indiferente: el que es de la misma especie que el producto que se busca se llama *multiplicando*, y el otro factor se llama *multiplicador*. Si para hallar el número de reales que importan 45 varas á 67 reales cada vara, multiplico 67 por 45, el 67 es multiplicando y 45 multiplicador.

Sin embargo como las operaciones aritméticas *se realizan* sobre los números abstractos, ó despojados de su significacion concreta, *es inalterable el producto cualquiera que sea el órden de los factores*. Lo mismo es multiplicar 67 por 45 que 45 por 67; el producto que resulta de la primera disposicion de los factores no será legítimo sino á condicion de resultar tambien de la segunda.

Con efecto: no puedo multiplicar 67 por 45 sin tomar todas y cada una de las unidades del 67 45 veces, y esto es lo mismo que si formara 45 grupos de 67 unidades cada uno de ellos, ó que si multiplicara 45 por 67.

Segun la definicion de la multiplicacion el producto de dos números enteros se puede determinar tomando uno de ellos como sumando el mismo número de veces que el otro contiene á la unidad. Esta suma, que casi siempre seria muy prolija, se abrevia por los procedimientos propios de la multiplicacion.

En esta se distinguen tres casos: 1° *multiplicar un número de una cifra por otro de una cifra*: 2.° *multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola ó al contrario*; y 3° *multiplicar un número de varias cifras por otro de varias*.

40. *Primer caso*. Para resolver este primer caso, se deben saber de memoria los productos de los números de una

cifra, tales como los presenta la siguiente tabla, llamada *pitagórica*, de su inventor Pitágoras (*).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Esta tabla se forma escribiendo las nueve cifras significativas por su órden en la primera fila superior horizontal: se suma cada cifra consigo misma, y las diferentes sumas colocadas debajo de los sumandos formarán la 2.ª fila. Se suma cada número de la primera fila horizontal con su correspondiente de la segunda y se tendrá la tercera fila. Para formar la cuarta ú otra cualquiera, se suma cada cifra de la primera con el número que tiene debajo de sí en la última.

Del método empleado en la formacion de la *tabla* se sigue que los números de la segunda fila son los diferentes productos que resultan de multiplicar la cifra de la primera por 2: los de la tercera son los productos de la primera por 3, y así sucesivamente.

Luego para hallar el producto de dos números de una cifra, se busca uno de los factores en la fila superior horizontal y el otro en la primera vertical de la izquierda, y donde la fila vertical corespondiente al primero corta á la ho-

(*) Algunos creen que no ha sido inventada por Pitágoras, pero este fué al menos quien la dió á conocer.

rizontal correspondiente al segundo, se encontrará el producto pedido.

Para obtener el produto de 6×8 se baja con la vista por la sesta fila vertical hasta hallar la octava horizontal y el número 48 que está en la casilla donde se cruzan, será el número pedido.

41. *Segundo caso.* Si hubiésemos de multiplicar 4061 por 5, tambien procederíamos por partes multiplicando primero las unidades de este modo: 1 por 5 son 5 *unidades*: multiplicaríamos luego las decenas así: 6 por 5 son 30; mas, como en 30 decenas hay 0 *decenas* y 3 centenas, se reservarian las 3 centenas para añadirlas al producto siguiente, y diríamos: 0 por 5 es 0, que añadéndole 3 forman 3 *centenas*: multiplicaríamos por último los 4 millares por 5, lo que daria 20 *millares*. De manera que el producto buscado segun el axioma 4.° (7), es 20 millares, 3 centenas, 0 decenas y 5 unidades, ó sea 20305.

Este procedimiento, que se puede aplicar á cualquier otro ejemplo, se formula en la siguiente regla.

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola se multiplica cada cifra del multiplicando por el multiplicador, principiando por las unidades y continuando por las decenas, centenas, etc.; y si en alguna de estas multiplicaciones parciales resultan unidades del órden siguiente, deben reservarse para añadirlas al producto inmediato.

Ejemplo: Háyase de multiplicar 91071 por 9. La operacion se dispone colocando el multiplicando debajo de las unidades del multiplicador como á continuacion se vé:

$$\left.\begin{array}{rl} 91071 & \text{multiplicando} \\ 9 & \text{multiplicador} \end{array}\right\} \text{factores del producto}$$

$$\begin{array}{rl} \hline 819639 & \text{producto} \end{array}$$

y se dice: 9 por 1 son 9 (que se escribe en el lugar de las unidades); 9 por 7 son 63 (se coloca el 3 á la izquierda de las unidades) y van 6; 9 por 0 es 0 y 6 son 6 (que se escribe á la izquierda de las 3 decenas); 9 por 1 son 9 (que se escribe á la izquerda de las 6 centenas); 9 por 9 81 (que se pone á continuacion). Resultado 819639.

42. *Tercer caso.* Háyase de multiplicar 17851 por 5036. La operacion quedará egecutada si se multiplica el multiplicando por 6, por 30 y por 5000, que son las partes de que se compone el multiplicador, y sumando luego los productos parciales obtenidos. Segun el caso anterior 17851 por 6 da 107106. Ahora para multiplicar el multiplicando por 30, se observará que es lo mismo (39) que sumarle 30 veces consigo mismo, y como estos 30 sumados se pueden suponer divididos en 10 grupos de á 3 sumandos; cada uno de estos grupos será:

$$17851 \times 3 = 53553$$

y los 10 grupos darán (24—3.°)

$$53553 \times 10 = 535530\text{, ó } 53553 \text{ decenas.}$$

Del mismo modo se vería que para multiplicar el multiplicando por 5000 no habria mas que multiplicarlo por 5 y agregar á este producto tres ceros, ó considerarle como representando millares; así que:

$$17851 \times 5000 = 89255000\text{, ó } 89255 \text{ millares.}$$

Ahora para sumar estos productos parciales, se suman las cifras de un mismo órden (31) como se vé á continuacion:

$$\begin{array}{r} 107106 \\ 53553 \\ 89255 \\ \hline 89897636 \end{array}$$

cuya colocacion se consigue haciendo que la primera cifra de cada producto parcial ocupe el lugar correspondiente al guarismo que sirvió de multiplicador.

Para que resulten menos productos parciales, se debe tomar por multiplicador el número que tenga menos cifras significativas, con lo que el producto total no se varía (39).

Del procedimiento seguido en el ejemplo precedente, que es aplicable á cualquier otro del mismo caso, se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número de varias cifras por otro tambien de varias cifras, se toma por multiplicador el factor que tiene menos cifras significativas, y se multiplica todo el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador: se colocan estos productos unos debajo de otros, de manera que la primera cifra de cada uno esté en el lugar correspondiente á la cifra del multiplicador que sirvió para formarle: se suman los productos parciales, y el resultado es el producto total que se busca.

Ejemplo: sea multiplicar 3087014 por 200715.

La operacion se ordena, para mayor facilidad, como á continuacion se vé:

3087014	Multiplicando.
200715	Multiplicador.
15435070	Productos parciales.
3087014	
21609098	
6174028	
619610015010	Producto total.

La ejecucion no ofrece ninguna dificultad sabida la regla precedente y la del segundo caso (41).

43. El producto de varios factores v. gr. $3\times4\times7\times2$ indica que 3 se ha de multiplicar por 4, el producto 12 por 7, y el producto 84 por 2; de modo que:

$$3\times4\times7\times2=12\times7\times2=84\times2=168.$$

Teorema. *Un producto de varios factores enteros no se varía, cualquiera que sea el órden de colocacion de estos.*

Sea, por ejemplo, el producto $3\times2\times5\times4$.

Si mudamos de lugar á dos factores consecutivos, v. gr., 2 y 5, el producto no se varía. En efecto, $3\times2=3+3$: multiplicando ambos miembros por 5 será

$$3\times2\times5=3\times5+3\times5=3\times5\times2.$$

Si ahora se multiplica el primero y último miembro de esta igualdad por 4, resultará:

$$3\times2\times5\times4=3\times5\times2\times4.$$

Mudando de lugar á dos factores consecutivos todas las veces necesarias, cada factor llegará á ocupar el lugar que se desee, sin que por esto se altere el producto. Luego un producto de varios factores, etc.

Corolario 1.° *Para multiplicar un producto de dos ó mas factores por un número entero, basta multiplicar uno de lòs factores por este número.*

En efecto: si quisiéramos multiplicar el producto $7\times5\times6$ por 2, bastaría multiplicar, por ejemplo, el factor 5 por 2, pues

$$7\times10\times6=7\times5\times2\times6=7\times5\times6\times2.$$

Corolario 2.° *Cuando en la multiplicacion uno ó mas factores terminan en ceros, se ejecuta la operacion prescindiendo de ellos, y poniéndolos en seguida á la derecha del producto.*

Ya se ha visto (24) que para hacer á un número 10, 100, 1000, etc., veces mayor, ó sea *para multiplicarle por* 10, 100, 1000, etc., *basta agregarle uno,* *dos, tres, etc. ceros;* de donde se infiere que todo nùmero terminado en ceros se puede descomponer en dos factores, uno formado de las cifras que hay antes de los ceros, y otro de la unidad seguida de tantos como al fin lleve dicho número; así

$$3700 = 37 \times 100;\ 8060 = 806 \times 10.$$

Esto supuesto:

$$3700 \times 435, \text{ó } 435 \times 3700 = 435 \times 37 \times 100 = 1609500$$

Del mismo modo:

$$450 \times 600 = 45 \times 10 \times 6 \times 100 = 45 \times 6 \times 10 \times 100 = 270 \times 1000 = 270000.$$

Estas operaciones se ordenan en la práctica como se vé á continuacion:

1.ª		2.ª	
	435		450
	3700		600
	3045	Resultado...	270000
	1305		
Resultado...	1609500		

Observacion. Un producto de dos factores tiene tantas cifras como estos ó una menos.

Así 3378×456 tiene 6 ó 7 cifras.

En efecto, el producto anterior está evidentemente comprendido entre

$$3378 \times 100 = 337800$$

$$\text{y } 3378 \times 1000 = 3378000;$$

luego tendrá á lo menos 6 cifras como el primero, y á lo mas 7 como el segundo.

44. *Se llama* MÚLTIPLO *de un número á su producto por un entero.* 14 es múltiplo de 2 y de 7, por que es igual á 7×2.

Al producto de un número multiplicado por 2 se le dá el nombre de *dúplo*.

Al producto de un número por 3 se le llama *triplo*.

Al producto de un número por 4 se le dá el nombre de *cuádruplo*, etc.

Todo número es múltiplo de su unidad: la vara es un múltiplo del pié tomando este, por unidad, el metro del decímetro, etc.

45. *Se llama* POTENCIA *de un número al producto que resulta, tomando dicho número varias veces por factor.* 16 es una potencia de 2; porque $16=2\times2\times2\times2$.

Al producto que resulta de tomar un número 2 veces por factor se dá el nombre particular de SEGUNDA POTENCIA *ó* CUADRADO.

Al producto que resulta de tomar un número tres veces por factor se llama TERCERA POTENCIA *ó* CUBO.

Al producto que resulta de tomar un número cuatro veces por factor se dã el nombre de CUARTA POTENCIA, *etc.*

Las potencias de un número se indican escribiendo á la derecha de este y un poco mas elevado, otro número llamado *esponente* ó *grado de la potencia*, el cual contiene tantas unidades como veces está repetido el primero por factor. Así

$3^2=3\times3=9$ es la segunda potencia ó cuadrado de 3.

$3^3=3\times3\times3=27$ es la tercera potencia ó cubo de 3.

$3^4=3\times3\times3\times3=81$ es la cuarta potencia de 3, etc.

Una potencia cualquiera de 1 es igual á 1.

La primera potencia de un número es igual al mismo número.

46. *La multiplicacion se prueba cambiando el multiplicando en multiplicador y este en aquel*: y el producto debe ser igual al obtenido primero (39), si la operacion está bien hecha.

47. (*) *La multiplicacion de números concretos se verifica lo mismo que la de los abstractos.*

El problema general que comunmente se resuelve en la multiplicacion de concretos es el siguiente: *conociendo el valor de una unidad hallar el de un número cualquiera de unidades de la misma especie.*

Ya hemos dicho (39) que el valor de la unidad conocida es el multiplicando, que el otro número que se considera como abstracto, es el multiplicador, y que el producto será de la misma especie que el multiplicando (**).

Observacion. Si el multiplicador no es de la especie de la unidad, cuyo valor es el multiplicando, se reducirá á esta especie como se vé en el problema tercero.

Ejemplo: Un quintal de arroz costó 126 reales, ¿cuánto costarán 32 quintales?

En este ejemplo el valor del quintal, ó sean 126 reales, es el multiplicando, y el número de quintales ó sea 32, considerado como abstracto, será el multiplicador. El producto serán reales, que es la especie del multiplicando.

Problemas.

1.° Teniendo una onza de oro 10880 maravedises, ¿cuántos maravedises tendrán 71 onzas?

$$\begin{array}{r} 10880 \text{ maravedises.} \\ 71 \\ \hline 1088 \\ 7616 \\ \hline \text{Resultado...}\ 772480 \text{ maravedises.} \end{array}$$

(*) Los principios espuestos en este párrafo son generales, y aplicables, por lo tanto, á la multiplicacion de quebrados concretos, ya sean decimales ú ordinarios, y á la de los números complejos.

(**) En la geometría ocurre, sin embargo, la resolucion de problemas en que es preciso multiplicar un número de unidades de longitud

2.° Valiendo un hectólitro de trigo 40 reales, ¿cuánto valdrán 780 hectólitros?

780
40

Resultado... 31200 reales.

En este problema, para ejecutar la operacion con mas facilidad se cambia el multiplicando en multiplicador, y este en aquel, con lo cual no se altera el resultado, que será de la especie del verdadero multiplicando, que es 40 reales.

3.° Si un caballo anda en un minuto 113 metros, ¿cuánto andará en 3 horas?

Para resolver este problema se debe reducir el multiplicador á la especie de la unidad, cuyo valor espresa el multiplicando, es decir, las 3 horas á minutos; y como 3 horas componen 180 minutos, la operacion se ejecuta como se vé á continuacion:

113 metros.
180

904
11

Resultado... 20340 metros.

Otros problemas que se resuelven por medio de la multiplicacion:

1.° 20 pares de mulas emplearon 18 dias en trasportar cierto número de fanegas de trigo; ¿un par de mulas cuántos dias necesitará para trasportar la misma cantidad de trigo?

Este problema y sus análogos no están comprendidos

por otro tambien de unidades de longitud, y unidades de superficie por unidades longitudinales; y en ninguno de estos dos casos se considera el multiplicador como abstracto, siendo además el producto obtenido en el primero unidades de superficie, y el hallado en el segundo unidades de volúmen.

en el que se ha dicho que comunmente se resuelve en la multiplicacion de números concretos. Sin embargo, desde luego se vé que un par de mulas tardará 20 veces 18 dias, y por lo mismo el problema se resuelve como aquí se espresa:

$$\begin{array}{r} 18 \text{ dias.} \\ 20 \\ \hline \text{Resultado... } 360 \text{ dias.} \end{array}$$

2.° 15 años, 7 meses y 14 dias ¿cuántos dias componen? (*)

Este problema quedará evidentemente resuelto, reduciendo primero los años á meses, para lo que basta multiplicar el número de años por doce, y agregar á este producto los 7 meses; reduciendo luego esta suma de meses á dias, para lo que se multiplica por 30, y agregando, por último, á este producto los 14 dias del problema.

La operacion puede disponerse del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 15 \text{ años.} \\ 12 \\ \hline 30 \\ 15 \\ 7 \\ \hline 187 \text{ meses.} \\ 30 \\ \hline 5610 \\ 14 \\ \hline \text{Resultado... } 5624 \text{ dias.} \end{array}$$

(*) A la operacion empleada para resolver este problema y sus análogos se suele llamar *reducion de un número complejo á incomplejo de la especie inferior*.

ARTÍCULO IV.

Division de los números enteros.

48. Division *es una operacion que tiene por objeto hallar un factor, dado un producto y el otro factor.*

El producto dado se llama *dividendo*, el factor conocido *divisor*, y el factor que se determina ó se halla *cociente*.

La division es operacion contraria y regresiva de la multiplicacion.

Segun esta definicion, como un producto de dos factores enteros contiene á uno de estos tantas veces como unidades tiene el otro factor (39); *el cociente espresa las veces que el dividendo contiene al divisor*. De donde se infiere, que *para dividir un número por otro bastará restar el divisor del dividendo todas las veces que se pueda, y el número de sustracciones verificadas será el cociente.* Así 12 : 4=3; porque 4 se puede restar 3 veces de 12.

Del mismo modo 17 : 7=2 y quedan 3; porque 7 se puede restar de 17, 2 veces, y deja en la segunda sustraccion 3 de resto, de quien no puede restarse el divisor.

Este procedimiento sería muy largo en el caso de que el cociente hubiese de tener varias cifras; por cuya razon se emplea otro de que vamos á ocuparnos.

49. Se llama *division exacta* aquella en que el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor. En tal caso se dice, que el dividendo *es divisible* por el divisor, y á este se le dá tambien el nombre de factor ó *parte alicuota* del dividendo. Así en 12 : 4=3 el 12 es divisible por 4, y 4 es un divisor, factor ó parte alicuota del 12.

La unidad es divisor de un número entero cualquiera:

el pié y la pulgada son divisores de la vara; el decímetro y el centímetro del metro, etc.

Se llama *division inexacta* aquella en que el dividendo no contiene un número exacto de veces al divisor.

Cociente entero en la division inexacta es el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor; y *residuo* es el resto que queda quitado del dividendo el producto del cociente entero por el divisor. En 17 : 7 el cociente entero es 2, y el resíduo 3. *El resíduo es siempre menor que el divisor.*

En la division exacta el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo, segun la definicion dada (48).

En la division inexacta el producto del cociente por el divisor, mas el resíduo es tambien igual al dividendo.

En la division se pueden distinguir dos casos: 1.° cuando *el dividendo es menor que* 10 *veces el divisor y este tiene una sola cifra;* 2.° cuando *el dividendo es mayor que* 10 *veces el divisor, ó este tiene mas de una cifra.*

50. *Primer caso.* Para resolver este primer caso, se halla por medio de la tabla de multiplicar una cifra, que multiplicada por la del divisor dé el dividendo ó el producto próximo menor, sino le hubiese igual. Así:

$$\frac{30}{5} \text{ ó } 30 : 5=6; \text{ porque } 6\times5=30.$$

Del mismo modo 76 : 9=8 y quedan 4 de resíduo; porque $9\times8=72$, que es el mayor producto de 9, comprendido en 76, una vez que $9\times9=81$, producto mayor que el dividendo; y como la diferencia entre 72 y 76 es 4, el resíduo de la division es 4.

Observacion. Cuando la division es inexacta, el resultado puede indicarse así:

$$76 : 9=8+\frac{4}{9};$$

porque lo que hay que agregar al cociente entero ha de ser una cantidad que multiplicada por el divisor produzca el resto (48): luego debe agregársele el cociente del resto por el divisor. El cociente entero, mas el resto partido por el divisor, forman el cociente completo de la division inexacta.

51. *Segundo caso*. Sea dividir 928984 : 371. Como el cociente es un número que multiplicado por el divisor debe dar el dividendo (48); como por otra parte :

$$371 \times 1000 = 371000 \text{ menor que } 928984,$$
$$\text{y } 371 \times 10000 = 3710000 \text{ mayor que } 928984,$$

el cociente ha de ser mayor que 1000, y menor que 10000; luego tendrá 4 cifras ó sean millares, centenas, decenas y unidades; luego el dividendo 928984 ha de contener la suma de los 4 productos parciales siguientes: 1.º millares del cociente por el divisor 371: 2.º centenas del cociente por 371 : 3.º decenas del cociente por 371: 4.º unidades del cociente por el mismo 371; y 5.º el resíduo si la division no fuese exacta.

Para determinar los millares del cociente observaremos que el producto de un número exacto de millares por el divisor es el producto de un número que termina en tres ceros por 371 ; luego ha de ser un número que tambien termine en tres ceros (42), ó sea un número exacto de millares; luego dicho producto se encuentra en los 928 millares del dividendo. Este número de millares puede hallarse aumentado por los millares que resulten del producto de las centenas, decenas y unidades del cociente por el divisor, y alguna vez tambien por los millares del resíduo de la division ; luego dividiendo los 928 millares del dividendo por el divisor, se hallará un número que no puede ser menor que los millares del cociente. Tampoco puede ser mayor; pues en tal caso escedería al menos en un millar á los millares del verdadero cociente; y como un millar vale mas que las centenas, decenas y unidades que el cociente puede tener, resultaría, que dividiendo solo los millares del dividendo por el divisor, darían mayor cociente que dividiendo todo el dividendo por el divisor, lo que es absurdo.

Luego los millares del cociente se hallan dividiendo los millares del dividendo por todo el divisor.

La cifra de los millares del cociente se puede determinar ensayando la multiplicacion del divisor por cada cifra significativa, principiando el ensayo por las inferiores, hasta hallar un producto igual ó próximo mayor que los millares del dividendo. Así: como

$371 \times 1 = 371$ menor que 928 (que son los millares del dividendo),
$371 \times 2 = 742$, menor que 928,
$371 \times 3 = 1113$, mayor que 928,
los millares del cociente son 2.

Para determinar las centenas del cociente recordaremos primero que el dividendo está compuesto de la suma de los cuatro productos parciales, millares, centenas, decenas y unidades del cociente por el divisor, mas el resíduo si le hay; luego si restamos de los millares del dividendo el primero de estos productos parciales, nos quedarán en el dividendo los otros tres, y además el resíduo. De modo que

$$\begin{array}{r} 928984 \\ 742 \\ \hline \end{array}$$

la diferencia....... 186984 contiene el producto de las centenas del cociente por el divisor; el de las decenas del cociente por el divisor; el de las unidades del mismo cociente por el divisor, y el resíduo si le hay.

Del mismo modo que se hallaron los millares del cociente, dividiendo los millares del dividendo por el divisor, se hallan las centenas del cociente dividiendo las centenas de este segundo dividendo por el divisor; esto es, dividiendo 1869 por 371. Mas como

$371 \times 4 = 1484$, menor que 1869,

$371 \times 5 = 1855$, menor que 1869.

y $371 \times 6 = 2226$, mayor que 1869,

las centenas del cociente son 5.

Para determinar las decenas del cociente se resta el producto de las centenas del mismo por el divisor de las centenas del segundo dividendo y

$$\begin{array}{l} 186984 \\ \underline{1855} \end{array}$$

la diferencia . . . . 1484 es el producto de las decenas y unidades del cociente por el divisor mas el resíduo si le hay.

De igual modo que se hallaron las centenas del cociente, dividiendo las centenas del segundo dividendo por el divisor, se hallan las decenas del cociente dividiendo las 148 decenas del tercer dividendo por el divisor 371. Mas como 148 es menor que 371, no hay decenas en el cociente. Debe, sin embargo, escribirse 0 en lugar de las decenas, para que los millares y centenas ocupen el lugar correspondiente.

Son, pues, 0 las decenas del cociente.

Para determinar las unidades del cociente, una vez que no hay decenas y que, por consiguiente 1484 está solo formado del producto del divisor por dichas unidades, basta dividir el mismo 1484 por el divisor. Mas como

$$371 \times 4 = 1484,$$

que es igual al cuarto dividendo, las unidades del cociente son 4.

El cociente total es por lo tanto 2 millares, 5 centenas, 0 decenas y 4 unidades, ó sea 2504.

Observaciones. 1.ª El primer dividendo parcial 928 puede obtenerse desde luego tomando á la izquierda tantas cifras como sean necesarias para formar un número, que considerado como unidades sencillas, sea tan grande al menos como el divisor y menor que 10 veces este; es decir, que tenga tantas cifras como el divisor ó una mas. El segundo dividendo parcial 1869 se obtiene restando del primero el producto de la primera cifra de órden superior del cociente por el divisor, y poniendo á la derecha del resto 186 la cifra siguiente 9 del dividendo: y de una manera análoga á esta última se forman los dividendos parciales, tercero, cuarto, etc.

2.ª Si al principio de la operacion se formasen los productos del divisor por 1, 2, 3, etc., hasta 9; la simple inspeccion de estos productos nos daria cada cifra del cociente una vez obtenido el correspondiente dividendo parcial, cuyo medio es preferible á cualquier otro en divisiones en que el cociente deba tener muchas cifras.

De estas observaciones y del procedimiento empleado en el ejemplo anterior se deduce la siguiente regla:

Para dividir un número por otro, cuando el dividendo contiene mas de 10 veces al divisor ó este tiene mas de una cifra, se toman de la izquierda del dividendo tantas cifras *como tiene el divisor ó una mas, si tantas formasen un número que, considerado como unidades sencillas, fuese menor que el divisor. Estas cifras del dividendo total forman el primer dividendo parcial, que dividido por el divisor, da la primera cifra de órden superior del cociente. Se multiplica esta cifra del cociente por el divisor y el producto se resta del primer dividendo parcial. Á la derecha del resto se pone la cifra siguiente del dividendo total, el número así obtenido es el segundo dividendo parcial; se divide por el divisor, y la cifra que resulte es la segunda del cociente, que se coloca por lo tanto á la derecha de la que primero se obtuvo. Se multiplica la segunda cifra del cociente por el divisor, y el producto se resta del segundo dividendo parcial. Á la derecha del resto se coloca la cifra siguiente del dividendo: el número así formado es el tercer dividendo parcial, que dividido por el divisor, da la tercera cifra del cociente. Así se continúa hasta que no haya mas cifras en el dividendo total.*

Si despues de colocar á la derecha de un resto la cifra siguiente del dividendo resultase un número menor que el divisor, se escribe 0 *en el cociente, y se pone á la derecha del dividendo parcial la cifra siguiente del dividendo total.*

Formado un dividendo parcial se determina la cifra que le corresponde en el cociente, ensayando la multiplicacion de los números de una cifra por el divisor, y la cifra que dé dicho dividendo ó el producto próximo menor comprendido en él será la verdadera.

Observacion. Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en el cociente una cifra mayor que la verdadera, cuando el producto de esta cifra por el divisor no puede restarse del correspondiente dividendo parcial; y si se ha puesto de menos cuando el resto sea mayor que el divisor (49).

Ejemplo. Divídase 164538 : 279.

La operacion se puede ordenar del modo siguiente.

Dividendo	1645.3.8.	279 divisor.
	1395	589 cociente entero$+\frac{207}{279}$
	2503	
	2232	
	2718	
	2511	
Resíduo...	207	

Como las tres primeras cifras 164 del dividendo forman un número menor que el divisor 279, se toman los cuatro 1645, separándolas con un punto, para formar el primer dividendo parcial. Siendo $5\times279=1395$ y $6\times279=1674$; se vé que la primera cifra del cociente es 5. Se coloca el producto de esta cifra por el divisor, debajo del primer dividendo parcial, se resta de él, y al lado de la diferencia 250 se baja la cifra siguiente 3 del dividendo, anotándola con un punto.

Ahora; como $279\times8=2232$ y $279\times9=2511$, la segunda cifra del cociente es 8. Se coloca el producto de esta cifra por el divisor, debajo del segundo dividendo parcial 2503, se resta de este, y al lado de la diferencia 271 se baja la última cifra del dividendo, anotándola con otro punto. Siendo $279\times9=2511$, menor que el último dividendo parcial 2718, la última cifra del cociente, ó sean las unidades, es 9. Se resta el producto de esta cifra por el divisor del tercer dividendo parcial 2718, y el resto 207 es el resíduo de la operacion; de modo que el cociente completo es $589+\frac{207}{279}$(50—obs.)

La sustraccion del producto de cada cifra del cociente por el divisor puede ejecutarse al mismo tiempo que se forma dicho producto, para lo que se resta de la cifra de las unidades del dividendo parcial el producto de la cifra del cociente por las unidades del divisor, de la cifra de las decenas del mismo dividendo el producto del cociente por las decenas del divisor, y así sucesivamente; cuidando de agregar, si es preciso, á cada cifra del dividendo suficiente número de decenas de su órden para hacer la sustraccion posible, y añadiendo al producto parcial siguiente otras tantas unidades para que el resto no padezca alteracion (56).

Ejecutemos la division anterior con esta modificacion:

1645.3.8.	279
250 3	$589+\frac{207}{279}$
27 1 8	
2 0 7	

Sabiendo que 1645 : 279 da el cociente 5, se multiplica este por las unidades del divisor: como el producto 45 no puede restarse del 5, unidades del dividendo, se agregan á este 4 decenas formando otras 45 unidades y como 45—45=0 se escribe 0 debajo de las unidades del dividendo. Se multiplica ahora el mismo cociente 5 por la cifra siguiente 7 del divisor y al producto 35 se le agregan 4 unidades (por haber agregado 4 decenas al minuendo anterior), lo que forma el sustraendo 39; mas como de 4, cifra siguiente del dividendo, no pueden restarse 39, se agregan al 4 otras 4 decenas, que forman por consiguiente 44, de cuyo número restado el 39 quedan 5 de resto, que se escriben debajo de la cifra 4 del dividendo. Se multiplica el cociente por la cifra 2, siguiente del divisor, y al producto 10 se agregan 4 unidades; la suma 14 se resta de 16, y la diferiencia 2 se escribe debajo del 6, ó sea al lado del resto anterior.

Bajando al lado del resto total 250 el 3, cifra siguiente del dividendo, y sabiendo que 2503 : 279 da de cociente 8, se procede de este modo, análogo al anterior, pero en lenguaje mas conciso: 8 por 9 son 72 á 73 va 1 (que se escribe debajo del 3) y se llevan 7 para agregar al producto siguiente: 8 por 7 son 56 y 7 son 63, á 70 van 7 (que se escribe debajo del 0) y se llevan otras 7 para el producto siguiente: 8 por 2 son 16 y 7 son 23 á 25 van 2 (que se escribe debajo del 5). Despues de bajar al lado del resto total 271 la última cifra del dividendo y de averiguar que 2718 : 279 da el cociente 9, se continúa del mismo modo: 9 por 9 son 81, á 88 van 7 y se llevan 8: 9 por 7 son 63 y 8 son 71 á 71, va 0, y se llevan 7: 9 por 2 son 18 y 7 son 25, á 27 van 2; y 207 es el resíduo de la division.

Observacion. Puede tambien principiarse la multiplicacion por las unidades de especie superior del divisor, con tal que este producto se reste de la cifra de especie superior del dividendo parcial ó de las dos primeras si este tuviese una cifra mas que el divisor; multiplicando en seguida el cociente por la cifra del divisor de órden inmediato inferior á la primera y restando este producto de la cifra de igual órden ó sea de la siguiente del dividendo parcial precedida del resto anterior si le hubo, y continuando así la operacion hasta haber restado el producto del cociente por las unidades del divisor del resto penúltimo con la última cifra del dividendo total á su derecha.

Ejecutando las multiplicaciones y sustracciones anteriores segun esta observacion obtendriamos: 5 por 2 son 10 que restado de 16 quedan 6, cuyo resto unido á la cifra siguiente forman 64; 5 por 7 son 35 que restado de 64 quedan 29, cuyo resto unido á la cifra siguiente forman 295; 5 por 9 son 45, que restado de 295 quedan 250, como anteriormente se ha visto.

Continuaríamos la segunda multiplicacion y sustraccion: 8 por 2 son 16, que restado de 25 quedan 9, cuya resta con la cifra siguiente forma 90; 8 por 7 son 56, que restado de 90 quedan 34, cuyo número con la cifra siguiente forma 343; 8 por 9 son 72 que restado de 343 quedan 271 como se halló por el método anterior. Del mismo modo se podria restar el producto del divisor 279 por la última cifra 9 del cociente, del último dividendo parcial 2718.

El medio indicado en la regla (51) para determinar cada cifra del cociente, formado el correspondiente dividendo parcial, aunque seguro, no es siempre el mas espedito. Por lo tanto daremos á conocer otro que es el que se emplea con mas ventaja, cuando se ha adquirido ya alguna práctica en la operacion.

Supongamos para fijar las ideas que se trata de dividir 1645 por 279.

Despues de ordenada la operacion como se ha visto (51) para determinar la primera cifra del cociente, siendo 1645 el primer dividendo parcial y 279 el divisor; observaremos que el producto de las dos centenas del divisor por la cifra del cociente que vamos á determinar es un número exacto de centenas, que debe hallarse en las 16 centenas del dividendo parcial; luego dividiendo las 16 centenas del dividendo por las 2 del divisor se tendrá la verdadera cifra del cociente, ó un número mayor que ella; puesto que en las 16 centenas del dividendo pueden hallarse tambien las centenas que resultan de la suma de los productos de las decenas y unidades del divisor por la cifra que se trata de determinar en el cociente, y las del resto de esta division parcial si las hubiese.

$$\begin{array}{r|l} 1645.3.8. & 279 \\ \cline{2-2} 250\ 3 & 589+\frac{207}{279} \\ 2718 & \\ 207 & \end{array}$$

Para averiguar si la cifra de este modo determinada es mayor que la verdadera, se multiplica por el divisor y se vé si este producto se puede restar del dividendo parcial; pudiendo restarse, será la verdadera; pero si no se le rebaja una unidad, y se ensaya esta nueva cifra; continuando así hasta que la sustraccion pueda verificarse. Es conveniente para abreviar estos tanteos que la multiplicacion y sustraccion se principien por las unidades de especie superior (obs. ant.). Así diremos 16 entre 2 á 8; 8 por 2 son 16, que restado de 16 deja 0: este resto unido á la cifra siguiente forma 4; 8 por 7 son 56, que como no puede restarse de 4, indica que la cifra 8 es mayor que la verdadera. Rebájese una unidad y continúese: 7 por 2 son 14, que restado de 16 deja 2: este resto unido á la cifra siguiente forma 24; 7 por 7 son 49, que como tampoco puede restarse de 24, indica tambien que la cifra 7 es mayor que la verdadera. Rebajándole otra unidad se tendrá: 6 por 2 son 12 que restado de 16 deja 4: este resto unido á la cifra siguiente forma 44: 6 por 7 son 42, que restado de 44 deja 2: este resto unido á la cifra siguiente forma 25; mas como 6 por 9 son 54, que no puede restarse de 25, resulta tambien que la cifra 6 es mayor que la verdadera. Rebajándole otra unidad tendremos: 5 por 2 son 10, que restado de 16 deja 6: este resto unido á la cifra siguiente compone 64; 5 por 7 son 35, que restado de 64 deja 29: este resto unido á la cifra siguiente forma 295; 5 por 9 son 45, que puede restarse de 295 y deja

250 de resto; luego la verdadera cifra del cociente es 5, y el resto total 250.

Todos estos raciocinios se hacen de memoria con tal que no sea preciso continuar la sustraccion cuando el minuendo formado por el resto último y la cifra siguiente no llegue á 100; por que con facilidad se resta mentalmente de un número que no pasa de dos cifras otro que tampoco puede esceder de 81 unidades. Se consigue esto advirtiendo que tan luego como el resto que se obtenga en una sustraccion, que se principia por las unidades de especie superior, (como las anteriores) es igual ó mayor que la cifra que se ensaya, esta ya no es mayor que la verdadera. En efecto tanteando la cifra 5 dijimos: 5 por 2 son 10, que restado de 16 deja 6: este resto, aunque solo fuese 5, unido á las dos cifras siguientes del dividendo parcial compondria al menos 500, y como la cifra 5 que se ensaya multiplicada por las dos que restan del divisor da un producto menor que 500, resulta que el producto del cociente por el divisor ya puede restarse del dividendo parcial, luego la cifra 5 que se tantea es la verdadera. Obtenida la verdadera cifra del cociente, la sustraccion del producto de esta por el divisor del dividendo parcial se ejecuta principiando por las unidades sencillas para evitar sustracciones parciales difíciles de ejecutar de memoria.

Segun esto, la determinacion de la 2.ª cifra del cociente, siendo el dividendo parcial 2503 y 279 el divisor, se verificará así: 25 entre 2 á 9: 9 por 2 son 18, que restado de 25 deja 7: este resto con la cifra siguiente compone 70; 9 por 9 son 81, que como no se puede restar de 70, el 9 es cifra grande: 25 entre 2 á 8; 8 por 2 son 16, que restado de 25 deja de resto 9, mayor que la cifra 8 que se ensaya; luego dicha cifra es la verdadera.

Igualmente siendo el tercer dividendo parcial 2718 y

279 el divisor, diríamos: 27 entre 2 á 9; 9 por 2 son 18, que restado de 27 deja el resto 9, que es igual á la cifra que se tantea; luego dicha cifra 9 es el verdadero cociente.

Del procedimiento empleado en este ejemplo, que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para determinar cada cifra del cociente se divide la primera ó dos primeras del dividendo parcial (segun tenga tantas como el divisor ó una mas que este) *por la primera del divisor, y el resultado será la cifra que se busca del cociente ó mayor que ella. A fin de cerciorarse si dicha cifra es ó no mayor que la verdadera, se multiplica por el divisor, y se resta el producto del dividendo parcial, principiando estas operaciones para mayor brevedad por las unidades de especie superior* (obs. ant.). *Si la sustraccion puede verificarse la cifra que se ensaya es la verdadera; si no se le rebaja una unidad y se continúa el tanteo con la cifra así obtenida. Se sigue de este modo hasta que la sustraccion pueda verificarse, ó hasta que se halle un resto parcial igual ó mayor que la cifra que se ensaya, en cuyos casos dicha cifra es la verdadera.*

Observacion. El número de cifras del cociente entero es igual segun esta regla á la diferencia entre el número de cifras del dividendo y divisor, ó á esta diferencia aumentada en una unidad.

52. *Abreviaciones de la division.* 1.ª La division de un número de varias cifras por otro de una sola puede ejecutarse, comprendida la regla anterior, con la sencillez que se vé en el siguiente

EJEMPLO. Sea dividir 8719 por 6

$$\begin{array}{l|l} 8719 & 6 \\ 1453+\frac{1}{6} & \end{array}$$

8 entre 6 á 1 (que se escribe debajo del dividendo 8), y

quedan 2, que unidas á la cifra siguiente forman 27. Ahora 27 entre 6 á 4 (que se escribe á la derecha del cociente anterior) y quedan 3 que con la cifra siguiente forman 31. Este número dividido por 6, da 5, y queda 1, que unido á la última cifra forma 19. Dividiendo 19 por 6, el cociente parcial 3 es la ultima cifra del cociente total, y el resto 1 el resíduo de la operacion; siendo (50) el cociente completo $1453+\frac{1}{6}$

2.ª La division de un número terminado en ceros por 10, 100, 1000, y en general por la unidad seguida de ceros, se ejecuta suprimiendo á la derecha del dividendo tantos ceros como acompañen á la unidad. (24—3.º) Así 39000: 100=390.

Teorema. *Para dividir un producto de dos ó mas factores por un divisor de cualquiera de estos, se divide el factor que da cociente exacto por el divisor, y el cociente obtenido multiplicado por los factores restantes es el cociente total.*

Porque el cociente total multiplicado por el divisor produce el dividendo, que es el producto dado.

Así para dividir 48×13 por 12 basta dividir 48 por 12 y multiplicar el cociente 4 por 13 porque (43)

$$4\times 13\times 12=12\times 4\times 13=48\times 13;$$

luego el cociente multiplicado por el divisor da el dividendo: luego dicho cociente 4×13 es el verdadero (48).

Corolario 1.º *Un cociente no se altera dividiendo dividendo y divisor por un divisor de ambos.*

Porque como el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor, dividiendo dividendo y divisor por el mismo número no se altera esta igualdad; por lo tanto el cociente permanece el mismo. Así 365 : 120=73 : 24, dividiendo ambos términos por 5.

Corolario 2.° (Otra abreviacion de la division). *Cuando dividendo y divisor terminan en ceros, se simplifica la division suprimiendo en los dos términos tantos ceros como hay en el que tiene menos.*

Porque esto equivale á dividir dividendo y divisor (24—3.°) por un mismo número. Así dividir 3400 por 80, es lo mismo que dividir 340 por 8.

53. *La division se prueba multiplicando el cociente por el divisor, y agregando á este producto el resto, si le hubiese; y el resultado debe ser igual al dividendo* (48), *si es que la operacion está bien hecha.*

54. (*) La division de los números concretos se ejecuta como la de los abstractos; distinguiendo, sin embargo, para mayor claridad dos casos:

1.° *que el dividendo y divisor sean de distinta naturaleza*, en cuyo caso el divisor se considera como abstracto y el cociente de la especie del dividendo; porque el primero debió ser el multiplicador y el segundo el multiplicando en la operacion que produjo al dividendo.

2.° *Que dividendo y divisor sean de la misma naturaleza*, en cuyo caso se considera el cociente como abstracto; porque el divisor debió ser el multiplicando y el cociente el multiplicador en la operacion que produjo el dividendo. La especie del cociente será la que el mismo problema indique.

Primer caso. El problema general que comunmente se resuelve en este caso es el siguiente: *conocido el valor de un número cualquiera de unidades, hallar el de la unidad de la misma especie.*

(*) Los principios espuestos en este párrafo son generales y aplicables por lo mismo á la division de quebrados concretos, ya sean decimales ú ordinarios, y á la de números complejos.

El valor de las unidades conocidas es el dividendo, y el número de estas, que se considera como abstracto, *el divisor*.

Observacion. Si el divisor no fuere de la especie de la unidad cuyo valor se va á determinar, se reducirá á dicha especie, como se verá en el problema 3.°

Ejemplo: 32 quintales de arroz costaron 4032 reales ¿á cómo costó el quintal?

El dividendo es 4032 reales, el divisor 32, que se considera como abstracto, y el cociente serán reales.

Problemas.

1.° 317 metros de paño costaron 19020 reales ¿á cómo costó el metro?

19020	317
00	60

Resultado 60 reales.

2.° Un padre dejó 34505 reales para repartir entre 6 hijos ¿cuánto corresponde á cada uno?

34505 reales.	6
$5750+\frac{5}{6}$	

Resultado: 5750 reales$+\frac{5}{6}$ de real.

3.° 13 quintales costaron 156 duros ¿á cómo costó la arroba?

Para resolver este problema se debe reducir el divisor á la especie de la unidad cuyo valor se trata de conocer, es decir los 13 quintales á arrobas; y como 13 quintales componen 52 arrobas, la resolucion se ejecuta como á continuacion se vé:

156 duros.	52
0	3 duros.

Resultado: costó cada arroba 3 duros.

Segundo caso. Si dividendo y divisor son de una misma naturaleza, *el problema indica cuál es el dividendo, cuál el divisor, y la especie del cociente.*

PROBLEMAS.

1.° Un hectólitro de trigo costó 52 reales ¿cuántos hectólitros se comprarán con 4680 reales.

Evidentemente se compran tantos hectólitros cuantas veces 4680 contenga á 52. Luego será:

$$\begin{array}{r|l} 4680 & 52 \\ \cline{2-2} 00 & 90 \end{array}$$

Resultado: 90 hectólitros.

2.° Teniendo una vara 36 pulgadas, ¿1889 pulgadas cuántas varas componen?

$$\begin{array}{r|l} 1889 & 36 \\ \cline{2-2} 89 & \\ 17 & 52+\frac{17}{36} \end{array}$$

Resultado: 52 varas$+\frac{17}{36}$

Otros problemas qne se resuelven por la division.

1.° Un albañil empleó 360 dias en hacer una obra, 9 albañiles ¿cuántos dias tardarán en hacer otra igual?

Este problema y sus análogos, aunque comprendidos en el primer caso de division de concretos, no lo están, sin embargo, en el problema general que comunmente se resuelve en dicho caso. No obstante fácilmente se observará, que 9 albañiles tardarán la novena parte del tiempo que empleó uno solo en hacer igual obra; y por lo mismo que el problema se resuelve como á continuacion se espresa:

$$\begin{array}{r|l} 360 \text{ dias} & 9 \\ 40 \text{ dias} & \end{array}$$

Resultado: 40 dias.

2.° 16614 onzas ¿cuántos quintales, arrobas, libras y onzas componen? (*).

Desde luego se observa que para resolver este problema hay que dividir las 16614 onzas por 16, y el cociente serán libras, y el resto las onzas que quedan: dividiendo luego este cociente por 25, el nuevo cociente serán arrobas, y el resto las libras que han de quedar en el resultado; y así se continúa, ordenando la operacion como á continuacion se espresa:

16614 onzas.	16		
061	1038 libras.	25	
134	38	41 arrobas.	4
6 onzas.	13 libras.	01 arrobas.	10 quintales.

Resultado: 10 quintales, 1 arroba, 13 libras y 6 onzas.

(*) A la operacion empleada para resolver este problema y sus análogos se suele llamar *reduccion de un número de especie inferior á complejo.*

CAPÍTULO III.

QUEBRADOS COMUNES.

ARTÍCULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

55. Se ha visto (50 obs.) que el cociente completo en las divisiones inexactas se componia del cociente entero y de la division indicada del resíduo por el divisor; así que 76 : $9=8+\frac{4}{9}$. Para formar una idea del cociente $\frac{4}{9}$, se supone la unidad dividida en nueve partes iguales entre sí: una de estas partes será un noveno de unidad, y cuatro serán 4 novenos.

Luego el cociente de un número menor por otro mayor se determina suponiendo dividida una unidad del dividendo en tantas partes iguales entre sí como unidades tiene el divisor, y tomando tantas de estas partes como unidades tenga el dividendo.

La cantidad $\frac{4}{9}$ y sus análogos se llaman *quebrados* (18) ó *fracciones*.

Es, pues, EL QUEBRADO *un número de partes ó unidades inferiores referidas á una unidad superior por una denominacion cualquiera,* por ejemplo: un número de cuartas, de novenas, de vigésimas, de centésimas etc. partes de una unidad que se llama *entera*. La denominacion que fija el grado de inferioridad del quebrado respecto á su unidad propia, no es concreta como lo es la de *pié* respecto á *vara*, la de *onza* respecto á *libra* etc.; sino abstracta y púramente numérica: en lugar de *pié* diremos *tercia* de vara; en vez de *onza* diremos *décima sesta* parte de libra, etc.

56. El quebrado necesita, pues, para su espresion de dos números que se llaman *numerador* y *denominador*.

DENOMINADOR *es el número que espresa las partes en que se considera dividida la unidad;* y NUMERADOR *el que espresa las partes de la unidad que contiene el quebrado.*

Al numerador y denominador juntos se les llama *términos* del quebrado ó de la *fraccion*.

Un quebrado se escribe, como ya se ha visto, poniendo el numerador sobre una raya horizontal y debajo el denominador.

Para espresar de palabra un quebrado se espresa el numerador con los numerales absolutos 1, 2, 3, etc., y luego el denominador, si no pasa de 10, con los partitivos *medios, tercios, cuartos*, etc.; y si pasa de 10 se espresa tambien con los numerales absolutos agregando la terminacion *avos*. Así los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{13}{21}$ etc., se espresan: *un medio, tres cuartos, cinco décimos, siete once avos, trece veintiun avos*, etc.

57. TEOREMA. *El cociente de toda division indicada es igual á un quebrado cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor.*

Digo que 22 : 5, ó 22 partido por 5 es igual á $\frac{22}{5}$, ó sea á veinte y dos quintos. Dividir 22 por 5 es lo mismo que tomar la quinta parte de 22; la quinta parte de 1 es $\frac{1}{5}$. luego la de 22 será la quinta parte de 1 repetida 22 veces, ó sea veinte y dos quintos; luego $22 : 5 = \frac{22}{5}$.

Igual raciocinio se haria con otra division cualquiera; luego el cociente de toda division etc.

Corolario 1.° *El numerador de un quebrado puede ser menor, igual ó mayor que su denominador.*

Un quebrado en que el numerador es menor que el denominador vale menos que la unidad y por esto *se llama* QUEBRADO PROPIO.

Ejemplos. $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{17}{20}$ etc.

Un quebrado en que el numerador es igual ó mayor que el denominador vale la unidad ó mas que la unidad, y por esto *se llama* QUBRADO IMPROPIO.

Ejemplos. $\frac{3}{3}$, $\frac{7}{6}$ etc.

Corolario 2.° *Para hallar los enteros que contiene un quebrado impropio* se *divide* el *numerador por el denominador*. Así:

$$\frac{18}{6}=3,\ \frac{17}{4}=4+\frac{1}{4}$$

que tambien se escribe $4\frac{1}{4}$, suprimiendo el signo $+$ para mayor sencillez.

Teorema recíproco. *Todo número entero se puede poner en forma de quebrado cuyo denominador sea otro número cualquiera, multiplicando este por el entero y poniendo al producto por denominador el dado; y todo número misto se puede reducir á quebrado multiplicando el entero por el denominador añadiendo al producto el numerador y poniendo á la suma por denominador el del quebrado propuesto.*

Pues en el primer caso el entero se puede considerar como el cociente de una division exacta en que el denominador dado es el divisor; y en el segundo el número misto se puede tambien considerar como el cociente completo de una division inexacta en que la parte entera, forma el cociente entero, el numerador del quebrado el resíduo de la division y el denominador el divisor.

De modo que reduciendo 3 enteros á quebrado cuyo denominador sea 6, se tendrá:

$$\frac{3\times 6}{9}=\frac{18}{6};\ y\ 4\ \frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

Observaciones. 1.ª Todo número entero se puede poner en forma de quebrado poniéndole por denominador la unidad. De modo que:

$$7=\frac{7}{1}$$

2.ª El denominador de la unidad, puesta en forma de quebrado puede ser un número cualquiera. Así:

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}\text{etc.}$$

ARTÍCULO II.

Propiedades de los quebrados.

58. Segun la idea que se acaba de dar de los quebrados, *un quebrado será tanto mayor cuanto mayor sea el número de partes que se tomen, y cuanto mayor sea cada una de estas partes; y al contrario.* Un quebrado será 2, 3, 4... veces mayor que otro cuando dividida la unidad en el mismo número de partes, se tome de estas un número 2, 3, 4... veces mayor, ó cuando tomando de ellas igual número el valor de cada una sea 2, 3. 4... veces mayor; y al contrario.

De donde se infiere que:

1.º *De dos quebrados que tienen igual denominador, es mayor el que tiene mayor numerador: de dos quebrados que tienen igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador.*

Así que $\frac{7}{9}$ es mayor que $\frac{5}{9}$; y $\frac{6}{13}$ es mayor que $\frac{6}{14}$

2.° *Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por dicho número entero, permaneciendo igual el denominador*. De modo que.

$$\frac{4}{11}\times 2=\frac{4\times 2}{11}=\frac{8}{11}$$

3.° *Para multiplicar un quebrado por un divisor cualquiera de su denominador, basta dividir este por dicho divisor, dejando el mismo numerador*. Así que:

$$\frac{7}{15}\times 5=\frac{7}{15:5}=\frac{7}{3}$$

4.° *Para dividir un quebrado por un número entero, se multiplica el denominador por dicho número entero permaneciendo igual el númerador*. De modo que:

$$\frac{3}{5}:4=\frac{3}{5\times 4}=\frac{3}{20}$$

5.° *Para dividir un quebrado por un divisor cualquiera de su numerador, basta dividir este por dicho divisor, dejando el mismo denominador*. Así que:

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$$

Como segun el principio 2.° multiplicando el numerador de un quebrado por un número entero el quebrado queda multiplicado por dicho número; y conforme al 4.° multiplicando el denominador por el mismo entero el quebrado queda dividido por él, se deduce tambien que:

6.° *Un quebrado no varia de valor multiplicando sus dos términos por un mismo número entero.*

Igualmente se infiere de los principios 3.° y 5.° del mismo número que:

7.° *Un quebrado no varia de valor dividiendo sus dos términos por un divisor comun á ambos* (*).

ARTÍCULO III.

Reduccion de quebrados á un comun denominador.

59. *Reducir quebrados á un comun denominador es convertirlos en otros equivalentes, que tengan denominadores iguales.*

Para reducir quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro si no fuesen mas que dos los quebrados, ó por el producto de los denominadores de los demás si pasasen de dos.

De este modo se hallan quebrados de igual valor que los primitivos, pues resultan de multiplicar los dos términos de cada uno por un mismo número entero, con lo que no se altera su valor (58—6.°): y tienen á la vez denominadores iguales, pues cada uno viene á formarse del producto de todos los denominadores de los quebrados que se quiere reducir, y dicho producto es el mismo para todos ellos(43).

Ejemplos. 1.° Sean los quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$: para reducirlos á un comun denominador se multiplican los términos del

(*) No se deduce de esta proposicion y la del párrafo anterior, como á primera vista puede parecer, que tampoco un quebrado varía de valor agregando ó quitando de sus dos términos una misma cantidad; pues agregando, crece el quebrado propio y disminuye el impropio, y quitando sucede lo contrario. Así que $\frac{2+4}{7+4}=\frac{6}{11}$ es mayor que $\frac{2}{7}$, y $\frac{4+2}{3+2}=\frac{6}{5}$ menor que $\frac{4}{3}$.

primero por 7 y los del segundo por 5, resultando:

$$\frac{14}{35} \text{ y } \frac{20}{35},$$

que son los quebrados buscados.

2.° Sean los quebrados

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ y } \frac{5}{7}:$$

se multiplican los dos términos del primero por el producto de 3 por 7 ó sea por 21; los dos términos del segundo por el producto de 2 por 7 ó sea por 14; y los dos términos del último por el producto de 2 por 3 ó sea por 6; resultando:

$$\frac{21}{42}, \frac{28}{42} \text{ y } \frac{30}{42}$$

3.° Del mismo modo se hallaría que los quebrados

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{6}{11}$$

se convierten en $\frac{642}{616}, \frac{308}{616}, \frac{440}{616}, \frac{336}{616}$

Observacion. Cuando los denominadores tienen factores comunes la reduccion puede hacerse mas fácilmente, observando por qué número conviene multiplicar los dos términos de cada quebrado para conseguir que todos tengan igual denominador (*).

(*) La regla general para el caso en que los denominadores tienen factores comunes, veáse en el complemento número 146.

EJEMPLOS.

1.° Sean los quebrados

$$\frac{7}{10}, \frac{3}{5}, \frac{13}{20}, \frac{1}{2},$$

y observaremos que si se multiplican los dos términos del primero por 2, los del segundo por 4 y los del último por 10, se convertirán en

$$\frac{14}{20}, \frac{12}{20}, \frac{13}{20}, \frac{10}{20},$$

quebrados equivalentes á los propuestos y que tienen un mismo denominador.

2.° De una manera análoga se hallaría que:

$$\frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6},$$

se pueden convertir en

$$\frac{21}{36}, \frac{27}{36}, \frac{20}{36}, \frac{24}{36}, \frac{6}{36}.$$

ARTÍCULO IV.

Simplificacion de los quebrados.

60. Aunque nos proponemos por ahora ocuparnos brevemente de la simplificacion de los quebrados, deben, sin embargo, precederle unas ligeras nociones sobre la divisibilidad de los números que faciliten su ejecucion.

Se llama CIFRA PAR *la que puede descomponerse en dos sumandos enteros é iguales.*

Son cifras pares 2, 4, 6 y 8.

Se llama CIFRA IMPAR *la que no puede descomponerse en dos sumandos enteros é iguales.*

Son cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9.

61. TEOREMA 1.° *Si un número divide exactamente á dos ó mas sumandos divide tambien la suma de estos.*

Porque cada uno de los sumandos es igual al divisor multiplicado por el cociente (que es entero por hipótesis); luego la suma será igual al divisor multiplicado por la reunion de los cocientes enteros; luego dicha suma dividida por el divisor da un cociente exacto.

Así siendo divisibles cada uno de los números 12, 6 y 24 por 6 la suma lo es igualmente. En efecto:

$$12+6+24=2\times6+1\times6+4\times6=(2+1+4)\times6=7\times6;$$

luego el cociente de la suma por el divisor es 7, y por consiguiente exacto.

Corolario. *Si un número divide exactamente á otro, divide tambien á un múltiplo cualquiera de este.*

Porque el múltiplo del número dado es este mismo número repetido varias veces por sumando; cada sumando es divisible por el divisor; luego tambien lo será la suma.

Así un múltiplo cualquiera de 20 es igual á $20+20+20+\ldots$; luego si 5 divide exactamente á 20, dividirá del mismo modo á dicho múltiplo.

62. TEOREMA 2.° *Un número es divisible por 2, si termina en cero ó cifra par.*

Porque si termina en cero es múltiplo de 10 y por lo tanto divisible por 2. (61 corol.) Si termina en cifra par se puede descomponer en dos sumandos uno que contenga las decenas y por lo tanto que termina en cero, y otro las unidades espresadas por la cifra par; luego los dos sumandos son divisibles por 2, luego tambien la suma, ó sea el número dado.

De este modo 50 y 900 son divisibles por 2; porque

$$50=5\times 10,\ 900=90\times 10;$$

luego son múltiplos de 10, y por lo tanto divisibles por 2.

De la misma manera 34 y 396 son divisibles por 2, porque:

$$34=30+4,\ 396=390+6;$$

estos sumandos son divisibles por 2; luego tambien la suma.

63. Teorema 3.° *Un número es divisible por 3 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es 3 ó un múltiplo de 3.*

Porque cada unidad de un órden superior al primero es un múltiplo de 9 mas 1, así:

$$10=9+1,\ 100=99+1, \text{ etc.};$$

luego 2, 3, 4, etc., unidades de un órden superior al primero son un múltiplo de 9 mas 2, 3, 4, etc. unidades sencillas, así:

$$400=100\times 4=(99+1)4=99\times 4+4;$$

luego todo número se puede concebir compuesto de diferentes múltiplos de 9, y de la suma de los valores de sus cifras; luego si esta última es divisible por 3, como los múltiplos de 9 lo son (61 corol.), lo será tambien el número (61). Así:

342 es divisible por 3, porque

$$312=300+10+2=3(99+1)+1(9+1)+2=99\times 3+3+9\times 1+1+2=99\times 3+9\times 1+(3+1+2)=99\times 3+9\times 1+6;$$

luego todos los sumandos son divisibles por 3; luego la suma ó sea el número dado es divisible por 3.

64. TEOREMA. 4.° *Un número es divisible por 5 si termina en cero ó en 5.*

Porque si termina en 0 es múltiplo de 10 y por lo tanto divisible por 5 (61 corol.); si termina en 5 se puede descomponer en dos sumandos, uno que contenga las decenas y otro las unidades; el que contiene las decenas termina en 0, y las unidades están formadas por la cifra 5; luego los dos sumandos son divisibles por 5; luego tambien la suma.

De modo que 50, 115, 800, etc., son divisibles por 5.

65. *Simplificar un quebrado es reducirle á otro de igual valor y cuyos términos sean menores.*

Como un quebrado no varia de valor dividiendo sus dos términos por un divisor comun á ambos (58—7.°); y ejecutando esta division disminuyen numerador y denominador, se infiere que:

Para simplificar un quebrado se dividen sus dos términos por 2, las veces que se pueda, luego por 3, por 5, y en general por todo número por quien se conozca que ambos términos son divisibles (*).

EJEMPLO: Si se quiere simplificar el quebrado $\frac{18}{36}$, se vé desde luego que sus dos términos son divisibles por 2 (62) y ejecutada la division queda reducido á $\frac{9}{18}$. Este quebrado tiene sus dos términos divisibles por 3 (63) y hecho, se convierte en $\frac{5}{6}$, cuyos dos términos son otra vez divisibles por 3, dando por resultado $\frac{1}{2}$, quebrado de igual valor que el primero, pero mucho mas sencillo.

El anterior raciocinio puede en resúmen espresarse de esta manera:

$$\frac{18}{36}=\frac{9}{18}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(*) La regla general para la simplificacion de los quebrados véase en el complemento, número 144.

De un modo semejante se hallaria que:

$$\frac{840}{1440}=\frac{84}{144}=\frac{42}{72}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

ARTÍCULO V.

Adicion de los quebrados.

En la adicion de los quebrados se pueden distinguir dos casos: 1.° *Sumar quebrados con quebrados*. 2.° *Sumar números mistos*.

66. *Primer caso*. Para resolver este primer caso, y para otras operaciones, que se ejecutan con los quebrados, conviene recordar (55) que los *medios*, *tercios, cuartos*, etc. de la unidad son especies diferentes de magnitud como los *metros*, *decímetros*, *centímetros*, etc.; de modo que un quebrado podria considerarse como una cantidad concreta, en que el denominador indica la especie y el numerador las unidades que de esta especie deben tomarse. Segun esto los quebrados abstractos y los que se refieren á una misma unidad son de igual especie cuando tienen denominadores iguales, y de diversa especie cuando los denominadores son diferentes. Luego

Para sumar quebrados que tienen denominadores iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador comun.

Si los quebrados no tienen denominador comun se reducen primeramente á él (59) *y luego se suman segun se acaba de esponer*.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{3}{9}+\frac{5}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{3+5+1+4}{9}=\frac{13}{9}$

2.° $\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{20}{140}+\frac{84}{140}+\frac{105}{140}=\frac{20+84+105}{140}=\frac{209}{140}$

Observacion. Debiendo ser los resultados de las operaciones lo mas sencillos que sea posible; cuando en la adicion ó cualquiera de las otras operaciones que se ejecutan con los quebrados se obtengan quebrados impropios, convendrá, por regla general, hallar los enteros que contienen (57. cor. 2.°), y si resultasen quebrados que puedan simplificarse, tambien convendrá ejecutar la simplificacion (65).

Así en el primer ejemplo $\frac{13}{9}$ se convierte en $1\frac{4}{9}$; y en el segundo $\frac{209}{140}=1\frac{69}{140}$.

67. Segundo caso. *Para sumar números mistos basta evidentemente sumar los enteros con los enteros y los quebrados con los quebrados, principiando la operacion por estos, para que si de su suma resulta alguna unidad, sea agregada á los enteros.*

La operacion se dispone como se vé en los siguientes

EJEMPLOS.

	1.°	2.°	
Sumandos...	$17\frac{1}{4}$	$76\frac{1}{2}$	$\cdots\frac{105}{210}$
	$8\frac{3}{4}$	$25\frac{2}{3}$	$\cdots\frac{140}{210}$
	$10\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\cdots\frac{168}{210}$
	$76\frac{2}{4}$	$13\frac{3}{7}$	$\cdots\frac{90}{210}$
Resultado...	$112\frac{3}{4}$	90	
		$206\frac{83}{210}$	

En el primer ejemplo la suma de los quebrados es $\frac{7}{4}$ y sacando los enteros será $1\frac{3}{4}$. Se escribe el quebrado en el lugar correspondiente, y se lleva el entero para sumar con las unidades.

En el segundo hay que principiar por reducir los quebrados á un comun denominador, resultando de esta operacion los nuevos quebrados que se ponen al frente de los primitivos. La suma de aquellos es $\frac{503}{210}$, y sacando los enteros resulta $2\frac{83}{210}$. Los enteros se suman con los enteros como en el ejemplo anterior.

Observacion. La adicion de los números mistos puede ejecutarse tambien reduciéndolos á quebrados (57 recip.), mas este procedimiento es mas largo en la práctica que el que acabamos de enseñar.

68. *Problemas de adicion de quebrados concretos.*

1.° Un comerciante tenía varios retales de paño : uno de $\frac{4}{5}$ de vara, otro de $\frac{2}{3}$, otro de $\frac{6}{7}$ y otro de $\frac{3}{4}$, y desea saber cuánto componen todos juntos.

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{6}{7}+\frac{3}{4}=\frac{336}{420}+\frac{280}{420}+\frac{360}{420}+\frac{315}{420}=\frac{1291}{420}=4\frac{11}{42}$$

Resultado 4 varas y $\frac{11}{42}$ de vara.

2.° Un comerciante recibió cinco partidas de té: la primera de 18 $\frac{1}{4}$ libras, la segunda de 13 $\frac{1}{2}$, la tercera de 4 $\frac{3}{4}$, la cuarta de 76 y la quinta de 12 $\frac{1}{2}$ y quiere averiguar el total de las libras recibidas.

La operacion se ejecuta como se vé á continuacion: advirtiendo que los quebrados quedan reducidos á un comun denominador (59—obs.), multiplicando por 2 los dos términos del segundo y cuarto; siendo el resultado 125 libras.

$$\begin{array}{r} 18\frac{1}{4} \\ 13\frac{2}{4} \\ 4\frac{3}{4} \\ 76 \\ 12\frac{2}{4} \\ \hline 125 \text{ libras.} \end{array}$$

ARTICULO VI.

Sustraccion de los quebrados.

La sustraccion de los quebrados comprende tres casos: 1.° *restar un quebrado de otro:* 2.° *restar un quebrado de un entero,* y 3.° *restar números mistos.*

69. *Primer caso.* Como los quebrados son de la misma ó diferente especie, segun tengan un mismo denominador ó denominadores distintos (66), resulta que:

Para restar un quebrado de otro cuando tienen denominadores iguales se restan los numeradores y á la resta se pone por denominador el denominador comun.

Si los quebrados no tienen un denominador comun se reducen primeramente á él, y luego se restan como se ha dicho.

EJEMPLOS.

1.° $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$. 2.° $\frac{3}{4}-\frac{2}{7}=\frac{21}{28}-\frac{8}{28}=\frac{13}{28}$.

70. *Segundo caso. Para restar un quebrado de un entero se toma del entero una unidad, la que se pone en forma de quebrado, cuyo denominador sea igual al denominador del sustraendo* (57—2.ª): *se resta este del quebrado así formado, y el resto se une al entero rebajándole una unidad.*

Así para restar $\frac{3}{4}$ de 6, ejecutaríamos la operacion como á continuacion se vé:

$$6-\frac{3}{4}=5\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=5\frac{1}{4}$$

Tambien puede ponerse la unidad por denominador del entero (57—obs. 1.ª) y queda este caso reducido al primero de la sustraccion. Así:

$$6-\frac{3}{4}=\frac{6}{1}-\frac{3}{4}=\frac{24}{4}-\frac{3}{4}=\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$$

Mas, como desde luego se observa, este procedimiento es mas largo que el anterior.

71. Tercer caso. *Para restar números mistos, se resta el quebrado del quebrado y el entero del entero, y la reunion de estos dos restos forma el resultado que se busca.*

La operacion se puede ordenar como se vé en los siguientes

Ejemplos.

1.° Sea restar $10\frac{1}{5}$ de $18\frac{2}{5}$. 2.° Restar $3\frac{2}{5}$ de $10\frac{6}{7}$

$$\begin{array}{lr} & 18\frac{2}{5} \\ & 10\frac{1}{5} \\ \hline \text{Resultado......} & 8\frac{1}{5} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 10\frac{6}{7}\cdots\frac{30}{35} \\ & 3\frac{2}{5}\cdots\frac{12}{35} \\ \hline \text{Resultado..} & 7\frac{18}{35} \end{array}$$

3.° Restar $\frac{4}{9}$ de $3\frac{1}{2}$ 4.° Restar $7\frac{2}{5}$ de 11

$$\begin{array}{lr} & 3\frac{1}{2}\cdots\frac{9}{18} \\ & \frac{4}{9}\cdots\frac{8}{18} \\ \hline \text{Resultado..} & 3\frac{1}{18} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & 11\ldots\ldots\frac{5}{5} \\ & 7\frac{2}{5}\ldots\frac{2}{5} \\ & 3 \\ \hline \text{Resultado.} & 3\frac{1}{5} \end{array}$$

Puede ocurrir en este caso de la sustraccion que el quebrado del minuendo sea menor que el del sustraendo: si quisiéramos restar, por ejemplo, $3\frac{5}{7}$ de $8\frac{2}{7}$, como $\frac{5}{7}$ no se puede restar de $\frac{2}{7}$ agregaríamos á este quebrado una unidad, lo que le convertiría (57. Teor. recíp.) en $\frac{9}{7}$. Se efectúa la sustraccion de los quebrados y el resto de estos es $\frac{4}{7}$. Al restar los enteros se agrega otra unidad al sustraendo para que por la primera agregacion no varíe el resto: de modo que la diferencia total es $4\frac{4}{7}$. Luego

Para restar números mistos, cuando el quebrado del minuendo es menor que el del sustraendo, se agrega á aquel una unidad y otra al entero del sustraendo para que el res-

to no se altere: despues se ejecuta la operacion por la regla anterior.

EJEMPLOS.

1.° Sea restar $5\frac{6}{9}$ de $7\frac{4}{9}$ 2.° Restar $10\frac{1}{3}$ de $18\frac{2}{11}$

$$7\frac{4}{9}\cdots\frac{13}{9} \qquad 18\frac{2}{11}\cdots\frac{6}{33}\cdots\frac{39}{33}$$

$$5\frac{6}{9},\cdots\frac{6}{9} \qquad 10\frac{1}{3}\cdots\frac{11}{33}\cdots\frac{11}{33}$$

Resultado..... $1\frac{7}{9}$ Resultado... $7\frac{28}{33}$

Observacion. Tambien puede resolverse este caso de la sustraccion de números mistos, reduciendo estos á quebrados; pero este procedimiento es mas largo que el espuesto.

72. *Problemas de sustraccion de quebrados concretos.*

1.° De una regla de $\frac{3}{4}$ de vara de largo se quitó $\frac{1}{8}$ de vara ¿qué longitud le quedó?

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

Resultado... $\frac{5}{8}$

2.° De una caja de azúcar que contenia $14\frac{3}{5}$ arrobas se vendieron $6\frac{1}{2}$ arrobas ¿qué arrobas de azúcar quedaron?

$$14\frac{3}{5}\cdots\frac{6}{10}$$

$$6\frac{1}{2}\cdots\frac{5}{10}$$

Resultado.. $8\frac{1}{10}$

ARTICULO VII.

Multiplicacion de los quebrados.

En la multiplicacion se pueden distinguir tres casos:

1.° *Multiplicar un quebrado por otro; 2.° multiplicar un quebrado por un entero; 3.° multiplicar números mistos.*

73. *Primer caso.* Sea multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$. Si el multiplicador fuese $\frac{1}{4}$, el producto de $\frac{5}{7}$ por $\frac{1}{4}$ sería, segun la definicion de la multiplicacion (39), un número 4 veces menor que el multiplicando; luego (58—4.°) seria $\frac{5}{7\times4}$. Ahora si el producto de $\frac{5}{7}$ por $\frac{1}{4}$ es $\frac{5}{7\times4}$, el producto del mismo número por $\frac{3}{4}$ se hallará evidentemente multiplicando el anterior por 3; luego el producto buscado será:

$$\frac{5}{7\times4}\times3=(58-2.^{\circ})\frac{5\times3}{7\times4}=\frac{15}{28}$$

De donde se deduce que

Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; y el producto de los numeradores será el numerador y el de los donominadores el denominador del quebrado que se busca. Así:

$$\frac{6}{11}\times\frac{3}{8}=\frac{18}{88}=(95)\frac{9}{44}$$

Corolario. *El producto de un quebrado por el mismo quebrado invertido es igual á la unidad.* Así:

$$\frac{5}{7}\times\frac{7}{5}=\frac{35}{35}=1$$

74. El producto de varios factores quebrados $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{7}\cdots$ indica que $\frac{3}{4}$ se ha de multiplicar por $\frac{2}{5}$, este producto por $\frac{5}{7}$ etc.

Corolario. 1.° *Para multiplicar varios quebrados se mul-*

tiplican los numeradores y al produto se pone por denominador el producto de todos los denominadores.

De modo que

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{1\times2\times5}{4\times3\times7}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

2.° *Un producto de varios factores quebrados no varia cualquiera que sea el órden de colocacion de estos factores.*

Porque el numerador del producto está formado del producto de los numeradores, y el denominador del producto de los denominadores; y estos productos de factores enteros no varían, cualquiera que sea el órden de colocacion de sus factores (43). Así:

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

3.° *Tampoco varía un producto de factores enteros y quebrados cualquiera que sea el órden de colocacion de sus factores.*

Porque poniendo á los enteros por denominador la unidad (57—obs. 1.ª) queda este corolario reducido al anterior. Asi:

$$\frac{3}{4}\times5=5\times\frac{3}{4}$$

75. *Se llama* QUEBRADO DE QUEBRADO *la espresion que representa una ó varias partes de un quebrado cualquiera.* Así $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ es un quebrado de quebrado.

Si tratásemos de reducir á un quebrado solo el quebrado de quebrado que precede, observaríamos que $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ es equivalente (39) á $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=(73)\ \frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Del mismo modo se vería que $\frac{1}{6}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ equivale á

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{168}=\frac{5}{56}.$$ Luego

Para hallar el quebrado equivalente á un quebrado de quebrado se multiplican entre sí todos los quebrados que espresan el dado.

76. Segundo caso. *Para multiplicar un quebrado por un entero, ó lo que es igual* (74—3.°) *un entero por un quebrado, se multiplica el numerador por dicho número entero, dejando el mismo denominador* (58—2.°); *ó se divide el denominador por el entero permaneciendo igual el denominador* (58—3.°)

Observacion. El primero de estos procedimientos es general y fácil de aplicar á cualquier ejemplo; mas el segundo dá un resultado mas sencillo, siempre que el denominador del quebrado sea divisible por el entero, y es por lo tanto preferible en este caso al anterior. Así:

$$\frac{3}{4}\times 5=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4};\quad \frac{5}{6}\times 2=\frac{5}{6:2}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

77. *Tercer caso. Para multiplicar números mistos se reducen primeramente á quebrados* (57. Teor. recip.), *y luego se ejecuta la operacion como se ha manifestado para el primero ó segundo caso.*

EJEMPLOS.

$$1.^\circ\ 3\frac{1}{2}\times 2\frac{3}{4}=\frac{7}{2}\times\frac{11}{4}=\frac{77}{8}=9\frac{5}{8}$$

$$2.^\circ\ \frac{3}{5}\times 6\frac{1}{8}=\frac{3}{5}\times\frac{49}{8}=\frac{147}{40}=3\frac{27}{40}$$

$$3.^\circ\ 2\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$$

$$4.^\circ\ 4\frac{2}{3}\times 5=\frac{14}{3}\times 5=\frac{70}{3}=23\frac{1}{2}$$

$$5.^\circ\ 8\times 5\frac{7}{9}=8\times\frac{52}{9}=\frac{416}{9}=46\frac{2}{9}$$

Observacion. Cuando uno de los factores es entero y el otro número misto, se ejecuta la operacion con mas brevedad, multiplicando separadamente las dos partes del misto por el entero, y sumando estos productos.

Sea, por ejemplo, multiplicar $136\frac{1}{2}$ por 73; la operacion se dispone y ejecuta de este modo:

$$\begin{array}{r} 136\frac{1}{2} \\ 73 \\ \hline 408 \\ 952 \\ 36\frac{1}{2} \\ \hline \text{Resultado...}\quad 9964\frac{1}{2} \end{array}$$

78. *Problemas de multiplicacion de quebrados concretos.*

1.° $\frac{4}{5}$ de arroba de azúcar á razon de 39 reales arroba, ¿cuánto importan?

$\frac{4}{5}\times 39=\frac{156}{5}=31\frac{1}{5}$. Resultado 31 reales $\frac{1}{5}$ de real.

2.° $12\frac{2}{3}$ varas de paño á razon de $20\frac{1}{4}$ reales vara, ¿cuánto importan?

$$12\frac{2}{3}\times 20\frac{1}{4}=\frac{38}{3}\times\frac{81}{4}=\frac{3078}{12}=256\frac{1}{2}$$

Resultado $256\frac{1}{2}$ reales.

ARTÍCULO VIII.

División de los quebrados.

La division de los quebrados comprende cuatro casos: 1.° *Dividir un quebrado por otro*; 2.° *dividir un quebrado por un entero;* 3.° *dividir un entero por un quebrado;* y 4.° *dividir números mistos.*

79. *Primer caso*. Sea dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{7}$ como el cociente multiplicado por el divisor dá el dividendo (48), dicho

cociente es el producto del dividendo por el divisor invertido, esto es, $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$; pues este producto multiplicado por $\frac{5}{7}$ es igual al dividendo $\frac{2}{3}$ (73 cor.); en efecto

$$\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

Luego

Para dividir un quebrado por otro se multiplica el dividendo por el divisor invertido: ó lo que es igual, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor, siendo el primero de estos productos el numerador, y el segundo el denominador del cociente buscado. De modo que

$$\frac{4}{5}:\frac{10}{11}=\frac{44}{50}=(65)\frac{22}{25}$$

Corolorario. *Para dividir dos quebrados de igual denominador basta dividir el numerador del dividendo por el numerador del divisor.* En efecto

$$\frac{3}{7}:\frac{5}{7}=\frac{3\times 7}{5\times 7}=\frac{3}{5}$$

80. Segundo caso. *Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero, permaneciendo el mismo el numerador* (58—4.°); *ó se divide el numerador por el entero dejando el mismo denominador.* (58—5.°)

Observacion. El primero de estos procedimientos es general y fácilmente aplicable á cualquier ejemplo; el segundo dá un resultado mas sencillo, siempre que el númerador sea divisible por el entero, y es preferible en este caso al anterior. Así

$$\frac{5}{9} : 4 = \frac{5}{36}\ ;\quad \frac{8}{11} : 2 = \frac{4}{11}$$

81. *Tercer caso*. Sea dividir 9 por $\frac{5}{7}$; poniendo al entero por denominador la unidad (57—obs. 1.ª) se convierte la operacion en $\frac{9}{1} : \frac{5}{7} = \frac{9 \times 7}{5}$, segun el primer caso; luego

Para dividir un entero por un quebrado se multiplica el denominador de este por el entero, y al producto se le pone por denominador el numerador del quebrado.

De modo que

$$6 : \frac{3}{4} = \frac{6 \times 4}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Corolario. *El cociente de la unidad por un quebrado es igual al mismo quebrado invertido:* en efecto

$$1 : \frac{5}{7} = \frac{1 \times 7}{5} = \frac{7}{5}.$$

82. Cuarto caso. *Para dividir números mistos se reducen á quebrados, y luego se ejecuta la operacion que corresponde, segun las reglas dadas para los casos precedentes.*

EJEMPLOS.

1.° $5\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{11}{2} : \frac{7}{4} = \frac{44}{14} = 3\frac{2}{14} = 3\frac{1}{7}$.

2.° $\frac{2}{3} : 8\frac{1}{5} = \frac{2}{3} : \frac{41}{5} = \frac{10}{123}$.

3.° $4\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{14}{3} : \frac{3}{4} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$.

4.° $7 : 3\frac{1}{2} = 7 : \frac{7}{2} = \frac{14}{7} = 2$.

5.° $6\frac{1}{3} : 4 = \frac{19}{3} : 4 = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$.

Observacion. Como el producto de un número cualquiera por un quebrado propio es menor que el multiplicando, segun la definicion de la multiplicacion (39), resulta tambien (48), que cuando el divisor es un quebrado propio, el cociente es mayor que el dividendo.

83. *Problemas de division de quebrados concretos*.

1.° $\frac{3}{4}$ de arroba de azúcar costaron 32 reales, ¿á cuánto salió la arroba?

$$32 : \frac{3}{4} = \frac{128}{3} = 42\,\frac{2}{3}.$$

Resultado 42 reales $\frac{2}{3}$ de real.

2.° 6 artesanos se comprométieron á hacer $76\,\frac{4}{5}$ varas de pared, ¿cuántas tiene que hacer cada uno?

$$76\frac{4}{5} : 6 = \frac{384}{5} : 6 = \frac{384}{30} = 12\,\frac{24}{30} = 12\,\frac{4}{5}.$$

Resultado: 12 varas $\frac{4}{5}$ de vara.

3.° $16\,\frac{1}{2}$ varas de terciopelo costaron $1167\,\frac{3}{8}$ reales. ¿A cuánto salió la vara?

$$1167\frac{3}{8} : 16\,\frac{1}{2} = \frac{9339}{8} : \frac{33}{2} = \frac{18678}{264} = 70\,\frac{198}{264} = 70\,\frac{3}{4}.$$

Resultado á 70 $\frac{3}{4}$ reales vara.

84. *Observacion general*. Las reglas dadas para las diferentes operaciones que se ejecutan con los quebrados se fundan en los principios consignados en el número 58... 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, 6.° y 7.°

Si, pues, hacemos ver que estos principios son ciertos cualesquiera que sean los términos de los quebrados y las cantidades que los multipliquen ó dividan, las reglas espuestas serán tambien generales.

Generalizacion y demostracion del segundo principio indicado.

Multiplicando el numerador de un quebrado, cuyos términos puedan á su vez ser quebrados, por un número cualquiera, el valor del quebrado queda multiplicado por este mismo número.

Sea $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}}$ el quebrado, y $\frac{11}{9}$ el número por el que se ha de multiplicar el numerador, digo que:

$$\frac{\frac{3}{5}\times\frac{11}{9}}{\frac{7}{4}}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}}\times\frac{11}{9}$$

La 1.ª de estas operaciones equivale (73) á

$$\frac{\frac{3\times 11}{5\times 9}}{\frac{7}{4}}=(57)\frac{3\times 11}{5\times 9}:\frac{7}{4}=(79)\frac{3\times 11\times 4}{5\times 9\times 7}$$

La 2.ª equivale (79) á

$$\frac{3\times 4}{5\times 7}\times\frac{11}{9}=(73)\frac{3\times 4\times 11}{5\times 7\times 9}=(44)\frac{3\times 11\times 4}{5\times 9\times 7}$$

Estos dos resultados son iguales; luego la igualdad anterior es verdadera; y como lo mismo se hubiera demostrado, si al denominador, numerador ó cantidad porque este se multiplica fuese un entero, el principio queda demostrado.

Con un razonamiento análogo se probaria que los principios del número 58 enunciados con la misma generalidad que el precedente son verdaderos.

Luego *las reglas dadas para las diferentes operaciones de los quebrados son generales.*

ARTÍCULO IX.

Valuacion de los quebrados ordinarios.

85. VALUAR UN QUEBRADO es determinar su valor en unidades inferiores de una *denominacion concreta.* (*)

Sea valuar, por ejemplo, el quebrado $\frac{3}{8}$ de duro, esto es, hallar su valor en reales y maravedises. Como un duro tiene 20 reales, para determinar los reales que tiene el quebrado propuesto basta multiplicar el numerador 3 por 20 y partir el producto 60 por el denominador 8. De modo que $\frac{3}{8}$ de duro$=\frac{3\times 20}{8}$rs.$=\frac{60}{8}$rs.$=7\frac{4}{8}$ de real.

Ahora para hallar el valor de $\frac{4}{8}$ de real en maravedises se procede de una manera análoga á la anterior, multiplicando el numerador 4 por 34 maravedises que el real contiene, y partiendo el producto por el mismo denominador 8. Así

$$\frac{4}{8}\text{rs.}=\frac{4\times 34}{8}\text{ mrs.}=\frac{136}{8}\text{mrs.}=17\text{ mrs.}$$

De suerte que $\frac{3}{8}$ de duro equivalen á 7 reales y 17 maravedises.

De este procedimiento que es aplicable á cualquier otro ejemplo se deduce la siguiente regla:

Para valuar nu quebrado ordinario se multiplica el numerador por el número de veces que la unidad á que se refiere el quebrado contiene la inferior inmediata; este producto se divide por el denominador, y el cociente entero es el número de unidades de superior especie que el quebrado contiene: el resíduo se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene á la de especie inferior inmediata; el producto se divide por el mismo denominador, y el cociente entero es el número de unidades de se-

---

(*) A esta operacion se le llama tambien *reduccion de un quebrado de especie superior á complejo.*

gunda especie que contiene el quebrado: y así se continúa hasta que se halle cociente exacto, ó se llegue á la ínfima especie.

La operacion se ordena de este modo:

3 duros.	
20	
60 reales.	8
4 reales.	7 reales, 17 mrs., resultado pedido.
34	
136 mrs.	
56	
0	

Observaciones. 1.ª *Si el quebrado que ha de valuarse, fuere impropio, se divide desde luego el numerador por el denominador y se continúa la valuacion como en el caso anterior.*

Sea valuar $\frac{17}{3}$ de arroba.

17 arrobas.	3
2 arrobas.	5 ar., 16 lib., 10 onz., 10 adarmes, 2 tomines, resultado pedido.
25	
50 libras	
20	
2 libras	
16	
32 onzas.	
2 onzas.	
16	
32 adarmes.	
2 adarmes.	
3	
6 tomines.	
0	

Valúese por último, el quebrado $\frac{4}{6}$ de cántara.

4 cántaras	
8	
32 azumbres	9
5 azumbres	3 azumbres 2 cuartillos $\frac{8}{9}$ de copa, resultado pedido.
4	
20 cuartillos	
2 cuartillos	
4	
8 copas	

2.ª Cuando, como en este ejemplo, despues de llegar á la ínfima especie usual resulta quebrado, puede hacerse desaparecer despreciándole, si el númerador no llega á la mitad del denominador, ó añadiendo en vez de él una unidad á las unidades á que se refiere si llega ó pasa de dicha mitad.

Así que el resultado anterior puede considerarse tambien igual á 3 azumbres, 2 cuartillos y 1 copa.

CAPÍTULO IV.

QUEBRADOS DECIMALES.

ARTÍCULO PRIMERO.

Numeracion.

86. Si una unidad se considera dividida en 10 partes iguales, estas partes se llaman *décimas:* si se considera dividida en 100 partes se llaman *centésimas*: si en 1000 se llaman *milésimas* si en 10000 *diez milésimas:* si en 100000 *cien milésimas:* si en 1000000 *millonésimas* y así sucesivamente. A las décimas, centésimas, milésimas, etc., se les llama tambien *unidades decimales* de *primero, segundo*, *tercero*, etc. órden.

Segun esto, una unidad de un órden decimal cualquiera contiene diez del órden inferior inmediato; del mismo modo que una unidad de un órden cualquiera en los enteros contiene tambien diez del inmediato inferior (23). Así que *una unidad* entera tiene *diez décimas*, una *décima* diez *centésimas*, una *centésima* diez *milésimas* etc.; del mismo modo(21) que un millar contiene diez centenas, una centena diez decenas y una decena diez unidades.

Se llaman quebrados decimales á los que espresan una ó varias partes de estas en que acabamos de considerar dividida la unidad. La *denominacion* de estos quebrados es regular, y sistemática. Domina en ellos el mismo sistema decenario que en los enteros.

87. De la relacion que existe entre las partes decimales que forman los quebrados del mismo nombre, se infiere que estos pueden espresarse de palabra ó por escrito de igual modo que los números enteros (21 y 23), con solo la diferencia de manifestar al fin el nombre del último órden decimal; cosa que en los enteros es innecesaria, atendiendo á que el órden inferior es en ellos constante é igual á las unidades sencillas. De modo que, por ejemplo, 4 décimas, 7 centésimas y 8 milésimas se espresan por 478 *milésimas*; así como 5 centenas 9 decenas y 8 unidades representan 598 unidades.

Puede evitarse en la escritura de los quebrados decimales el escribir al fin la especie de la última cifra, recordando que en los enteros (23) á medida que una cifra avanza un lugar hácia la izquierda, se hace diez veces mayor y que por consiguiente se hace tambien diez veces menor por cada lugar que retrocede hácia la derecha. Si, pues, se fija el lugar de las unidades escribiendo cero en lugar de ellas, y un signo convencional despues, como una coma, por ejemplo, la cifra que se coloque á la derecha de la coma espresará un órden de unidades diez veces menores que las unidades sencillas, esto es, espresará *décimas* ó unidades decimales de primer órden, la que se coloque en el segundo lugar centésimas ó unidades de segundo órden, etc. Luego

Para escribir los quebrados decimales, se señala el lugar de las unidades con un cero y una coma despues de él, y se coloca la cifra que representa las décimas en el primer lugar á la derecha de las unidades ó de la coma, la que espresa centésimas en el segundo, la que milésimas en el tercero, etc.; de modo que cada cifra debe ocupar un lugar igual al órden de unidades decimales que representa, contando estos lugares desde la coma hácia la derecha.

Así 3 décimas, 5 centésimas y 6 milésimas, ó 356 milésimas, se escribe: 0,356.

El cero sirve, lo mismo que en los enteros, para ocupar el lugar de algun órden intermedio de unidades decimales que falta en el número que se escribe. De modo que 4 centésimas y 7 diez milésimas ó 407 diez milésimas se escribe: 0,0407.

Cuando el número sea misto, es decir, tenga enteros y decimales, no se necesita escribir cero en lugar de las unidades, sino que se pondrá la coma despues de estas.

Así 46 enteros, 1 décima y 3 centésimas, ó sea 46 enteros y 13 centésimas, se escribe: 46,13.

A veces se refieren á la última denominacion decimal los mismos enteros que acompañan al quebrado: así 72 décimas se escribe 7,2.

88. *Los quebrados decimales se leen como si fueran números enteros, espresando al fin el órden decimal á que corresponde la última cifra.*

El quebrado 0,73506 se lee setenta y tres mil quinientas seis cien milésimas. Si el número fuese misto, la parte entera se lee como los números enteros, y la decimal como se acaba de indicar.

Tambien estos números mistos pueden leerse como si formasen solo un número entero, espresando al fin el órden decimal á que corresponde la última cifra.

Así 74,36 se lee setenta y cuatro enteros y treinta y seis centésimas, ó siete mil cuatrocientas treinta y seis centésimas.

89. Pueden tambien escribirse los quebrados decimales en forma de quebrados comunes. Sea, por ejemplo, el quebrado 0,051: una milésima es $\frac{1}{1000}$; luego $0,051=\frac{51}{1000}$.
Del mismo modo

$47,39=47+0,39=47+\frac{39}{100}=$(57. Teor. recip.) $\frac{4739}{100}$

Luego

Para reducir un quebrado decimal escrito en forma de entero á quebrado ordinario, se pone por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras haya á la derecha de la coma, y por numerador el número entero formado por las cifras decimales, ó si el número dado fuese misto de entero y decimal y se quiere escribir en forma de quebrado impropio, se pondrá por numerador el número propuesto, omitiendo la coma.

Recíprocamente, una vez que $\frac{4739}{100}=47,39$ y $\frac{51}{1000}=0,051$

Para reducir un quebrado decimal escrito en forma de ordinario á quebrado decimal escrito en forma de entero, ó lo que es igual, para dividir un entero por la unidad seguida de ceros, se separan con una coma de derecha á izquierda tantas cifras del numerador ó del dividendo como ceros acompañen á la unidad; y si no hubiese bastantes cifras que separar, se suplirán con ceros á la izquierda.

ARTÍCULO II.

Propiedades de los números decimales. (*)

90. El valor relativo de las cifras que forman un número decimal depende solo del lugar que cada una ocupa respecto de la coma ó de las unidades; así el número no varía no alterándose dicha colocacion; mas por cada lugar que la coma avanza hácia la derecha el valor de cada cifra se hace tambien diez veces mayor, suce-

(*) Bajo la denominacion genérica de *número decimal* se comprenden los quebrados decimales y los números mistos ó formados por un entero y un quebrado decimal.

diendo lo contrario cuando la coma retrocede hácia la izquierda. De donde se infiere que:

1.° *Un número decimal no varía poniendo ó quitando ceros á continuacion de las cifras significativas.* Así 34,4=34,400...

2.° *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros acompañan á la unidad ; y si no hubiese bastantes cifras á la derecha de la coma se suplirán con ceros*

EJEMPLOS.

1.° 7,451.×100=745,1. 2.° 7,451×1000=7451

3.° 7,451×10000=74510

3.° *Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros acompañen á la unidad; y si no hubiere bastantes cifras á la izquierda de la coma, se suplirán con ceros, puestos tambien á la derecha de los enteros.*

EJEMPLOS.

1.° 658,45 : 100=6,5845 2.° 658,45:1000=0,65845

3.° 658,45: 1000=0,065845

Observacion. Todo número entero se puede poner en forma de decimal colocando á la derecha de las unidades una coma, y despues de esta los ceros que se quiera. Así 372=372,00.....

ARTÍCULO III.

Adicion de los números decimales.

91. Segun se ha visto (87), los diferentes órdenes de unidades de un número decimal, están sujetos á la mis-

ma ley de composicion que los números enteros; de donde se infiere que la adicion y aun la sustraccion de los decimales se puede verificar por las mismas reglas que iguales operaciones con los enteros. Luego

La adicion de los números decimales se verifica sumando como en los enteros, las unidades de un mismo órden principiando por el inferior, y la coma se escribe en la suma en el lugar correspondiente.

La operacion se ordena para no equivocarse, colocando los sumandos unos debajo de otros, de manera que las comas estén en columna.

Así 37,5+125,46+8342,05+0,459+2,64 se suman de este modo:

```
           37,5
          125,46
         8342,05
            0,459
            2,64
        ---------
Suma. . . . . 8508,089
```

92. *Problema de adicion de números decimales concretos.*

Un comerciante compra por una parte 56,4 metros de paño, por otra 134,65, por otra 7,46, por otra72,136 y por otra 0,75 y desea averiguar el total de metros.

```
             56,4
            134,65
              7,46
             72,136
              0,75
          ---------
Resultado. . .  271,396 metros.
```

ARTÍCULO IV.

Sustraccion de los números decimales.

93. *Para restar números decimales se rebajan, como en los enteros, los diferentes órdenes de unidades del sustraendo de sus correspondientes del minuendo, principiando por el inferior; y la coma se escribe en el resto en el lugar correspondiente.*

Para no equivocarse se ordena la operacion colocando el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las comas estén en columna.

Así 45,76—7,28 se restan de este modo:

$$\begin{array}{lr} & 45{,}76 \\ & 7{,}28 \\ \hline \text{Resto. . . . . .} & 38{,}48 \end{array}$$

Si el minuendo y sustraendo no tuvieren igual número de cifras decimales se igualarán con ceros á la derecha; lo que no altera el valor de los datos (90.—1°).

EJEMPLOS.

1.° Restar 0,1765 de 0,46.

$$\begin{array}{r} 0{,}4600 \\ 0{,}1765 \\ \hline 0{,}2835 \end{array}$$

2.° Restar de 13,5074 la cantidad 6,85

$$\begin{array}{r} 13{,}5074 \\ 6{,}8500 \\ \hline 6{,}6574 \end{array}$$

94. *Problema relativo á la sustraccion de números decimales concretos.*

De una saca de 5,7 quintales de arroz se sacaron 2,45 quintales, ¿cuántos quedaron en ella?

$$\begin{array}{lr} & 5{,}70 \\ & 2{,}45 \\ \hline \text{Resultado. . . .} & 3{,}25 \text{ quintales.} \end{array}$$

ARTÍCULO V.

Multiplicacion de numeros decimales.

En la multiplicacion de números decimales se pueden distinguir tres casos: 1.° *Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de uno ó mas ceros*. 2.° *Multiplicar un número decimal por un entero, ó lo que es lo mismo un entero por otro decimal*. 3.° *Multiplicar un número decimal por otro decimal*.

95. Primer caso. *Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de uno ó mas ceros se corre la coma tantos lugares hácia la derecha como ceros acompañan á la unidad*. (90—2.°)

96. *Segundo caso*. Háyase, por ejemplo, de multiplicar 17,54 por 13. Si prescindimos de la coma en el número decimal se convertirá la operacion en multiplicar 1754 por 13;mas la supresion de la coma en el factor decimal equivale á correrla dos lugares á la derecha y por consiguiente á multiplicarle por 100 (90—2.°); luego el producto de 1754 por 13, ó sea 22802 es (43, cor.—1.°) 100 veces mayor de lo que le corresponde: luego haciéndole 100 veces menor, ó separando las dos últimas cifras de la derecha con la coma (90—3.°) se convertirá en el producto buscado; luego dicho producto es 228,02.

Como en cualquier otro ejemplo se puede hacer un raciocinio análogo al anterior se deduce que:

Para multiplicar un número decimal por un entero se prescinde de la coma, se hace la multiplicacion como si fuesen ambos factores números enteros, y luego se separan de derecha á izquierda tantas cifras como decimales habia en el factor que las llevaba.

EJEMPLOS. 1.° Multiplicar 47 por 3,51.

	3,51
	47
	24 57
	140 4
Producto buscado..	164,97

2.° Multiplíquese 0,00035 por 124.

	124	
	0,00035	
	620	
	372	
Resultado.....	0,04340	ó 0,0434 (90).

97. *Tercer caso.* Si hubiésemos de multiplicar 13, 42 por 5,4 prescindiríamos de la coma en el multiplicando y multiplicador, lo que equivaldría á multiplicar el primero por 100 y el segundo por 10 (90—2.°); luego el producto 72468 así obtenido seria (43, cor.—1.°) 1000 veces mayor de lo que le corresponde; separando, pues, las tres cifras últimas con una coma (90—3.°) se convertirá en 72,468, producto buscado. Luego

Para multiplicar un número decimal por otro decimal, se prescinde de las comas, se hace la multiplicacion como si fuesen enteros, y en el producto se separan de derecha á izquierda tantas cifras como decimales habia en ambos factores.

EJEMPLOS. 1.° Multiplicar 18,36 por 0,34.

$$\begin{array}{r} 18,36 \\ 0,34 \\ \hline 7344 \\ 5508 \\ \hline \end{array}$$

Producto...... 6,2424

2.° Multiplíquese 0,0072 por 1,23.

$$\begin{array}{r} 1,23 \\ 0,0072 \\ \hline 246 \\ 861 \\ \hline \end{array}$$

Resultado.... 0,008856

98. *Problema relativo á la multiplicacion de números decimales concretos.*

Un comerciante compró 96,24 kilógramos de té á 90,4 reales kilógramo, ¿cuál es el importe total?

$$\begin{array}{r} 96,24 \\ 90,5 \\ \hline 48120 \\ 86616 \\ \hline \end{array}$$

Resultado.... 8709,720 rs ó 8709,72 rs.

ARTÍCULO VI.

División de los números decimales.

En la division de los números decimales se pueden tambien distinguir tres casos. 1.° *Dividir un número decimal por la unidad seguida de uno ó mas ceros.* 2.° *Dividir un número decimal por un entero.* 3.° *Dividir un número decimal por otro decimal.*

99. Primer caso. *Para dividir un número decimal por*

la unidad seguida de uno ó mas ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la izquierda como ceros acompañen á la unidad (90—3.°).

Ejemplos. 1.° 375,18:100=3,7518.

2.° 1,465:1000=0,001465.

100. *Segundo caso.* Como los diferentes órdenes de unides de un número decimal están subordinados á la misma ley de composicion que los números enteros (87), la division en este caso se verifica con leve diferencia de igual manera que si ambos términos fuesen enteros.

Si hubiésemos de dividir, por ejemplo, 4876,872 por 78 dividiríamos primero las 4876 unidades por 78, y 62 sería la parte entera del cociente. Para hallar la parte decimal observaríamos que las 40 unidades del último resto de los enteros equivalen á 400 décimas, que con las 8 del dividendo forman 408; dividiendo ahora las 408 décimas por el divisor el cociente 5, serán 5 decimas, que para que ocupen el lugar que les corresponde en el cociente debemos escribir una coma despues de las unidades y colocarlas á la derecha de ellas; y luego se continúa la operacion como si se dividiesen números enteros. Luego

Para dividir un número decimal por un entero se ejecuta la division como si el dividendo fuese tambien número entero; pero tan luego como la primera cifra decimal forme parte de un dividendo se pone coma en el cociente antes de ejecutar la division parcial.

Ejemplos. 1.° Ejecútese la division anterior. La operacion se ordena del modo siguiente:

4876,872	78
196	62,524
40 8	
1 87	
312	
0	

2.° Dividir 35, 426 por 218

35,426	218
1362	
546	0,162
110	

Como el dividendo es menor que el divisor, puesto que el primero vale menos de 36 unidades , y el segundo son 218, el cociente no tiene parte entera, se escribe por lo mismo cero en lugar de las unidades, y una coma despues de ellas. Tomando ahora por primer dividendo parcial las tres primeras cifras del dividendo, que son 354 décimas; y dividiendo este número por el divisor, el cociente 1 son las décimas, ó la primera cifra del cociente. La operacion se continúa despues del mismo modo que en los números enteros; advirtiendo que el quebrado $\frac{110}{218}$ que completaría el cociente espresa partes de la unidad del último órden decimal, es decir $\frac{110}{218}$ de milésima.

3.° Sea dividir 0,34589 por 57.

0,34589	57
389	
47	0,00606

Como aquí tienen que formar el primer dividendo parcial las tres cifras 345 del dividendo, y estas tres cifras espresan *milésimas*, se escribe cero y coma en el cociente y despues de la coma otros dos ceros para que la primera cifra 6 del cociente ocupe el lugar que le corresponde que es el de las *milésimas*. La division se continúa despues como si se dividiesen números enteros, teniendo tambien presente que el quebrado que completa el cociente es $\frac{47}{57}$ de cien milésimas. Luego

Cuando el dividendo es menor que el divisor se pone en el cociente cero y coma, y despues de esta los ceros que sean necesarios para que la primera cifra del cociente ocupe el lugar que le corresponde; esto es, se escriben despues de la coma tantos menos uno como cifras decimales se necesita tomar para el primer dividendo parcial.

101. *Tercer caso*. Sea dividir 38,272 por 5,2. El cociente multiplicado por el divisor 52 décimas debe dar por producto el dividendo 38,272 (49), luego 38,272 representa 52 décimas del cociente; pero una décima del cociente se halla dividiendo el dividendo por 52, luego diez décimas del cociente ó sea el cociente buscado se encontrará multiplicando el cociente hallado por 10. Mas este mismo resultado se obtiene multiplicando el dividendo por 10 (43.—cor. 1.°) ó sea corriendo un lugar la coma hácia la derecha, luego el cociente se halla dividiendo 382,72 por 52.

De este raciocinio, fundado tambien en que *el cociente de dos números cualesquiera no varía multiplicando dividendo y divisor por una misma cantidad*, y aplicable á todos los ejemplos del presente caso, se deduce la siguiente regla:

Para dividir un número entero ó decimal por otro decimal se multiplican ambos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, lo que sin alterar el cociente reduce este caso al anterior, ó á la division de números enteros.

Ejemplos: 1.° Si hubiésemos de dividir 35,046 por 3,25, multiplicaríamos entrambos números por 100 y el caso quedaría reducido á dividir 3504,6 por 325.

2.° Habiendo de dividir 47,92 por 1,85 multiplicaríamos uno y otro por 100 y vendria á ser la division de 4792 por 185.

3.° La division de 748 por 5,329 se convertirá en la de 748000 por 5329, multiplicando por 1000 dividendo y divisor.

Observaciones. 1.ª En la division de decimales, cuando el cociente no es esacto, el error que se comete tomándole por tal, es menor que una unidad del último órden decimal de dicho cociente.

Así en el ejemplo 2.° del caso 2.°, el cociente completo seria $0,162 + \frac{110}{218}$ de milésima; mas valiendo el quebrado $\frac{110}{218}$ menos de una unidad, el error que se comete omitiéndola es menor tambien que una milésima.

2.ª Como un número decimal no varía poniendo ceros á continuacion de las cifras significativas (90-1.°), y como por cada cero que se escribe resulta una cifra decimal mas en el cociente, se deduce que este se puede aproximar al verdadero tanto como se quiera (*).

Si en el ejemplo 3.° del 2.° caso quisiéramos hallar mas aproximacion en el cociente, añadiríamos un cero al último resto 47, y dividiendo 470 por 57 el cociente sería la cifra de las millonésimas: así se podria continuar añadiendo un cero al último resto por cada cifra decimal que se quisiese obtener.

3.ª Pudiendo considerar á todo número entero como una fraccion decimal (90—obs.), *para aproximar por decimales un cociente inesacto de números enteros, basta escribir una coma despues del cociente entero y agregar un cero al*

(*) Los casos en que no es esacta la operacion continuándola suficientemente, se verán en el complemento, núm. 153.

último resto, y sucesivamente otro á cada uno de los que despues vayan resultando.

Sea la division de 428 por 17; despues de hallar el cociente entero 25, se pone una coma despues de este, se agrega un cero al último resto 3, y el número 30 se divide por el mismo divisor 17, al resto se agrega otro cero, y el cociente de dividirle por 17 se escribe á la derecha del cociente anterior 1, y así se continúa como se vé á continuacion:

$$\begin{array}{r|l} 428 & 17 \\ \cline{2-2} 88 & 25,176\ldots. \\ 30 & \\ 130 & \\ 110 & \\ 8 & \end{array}$$

Corolario. *Para convertir un quebrado ordinario en quebrado decimal se considera aquel quebrado como una division indicada del numerador por el denominador* (57), *y el cociente se aproxima por decimales como se ha visto en la division anterior.*

102. *Problema relativo á la division de números decimales concretos.*

Un comerciante compró en 6784,92 rs. 96,24 libras de té ¿á cómo costó la libra?

$$\begin{array}{r|l} 678492 & 9624 \\ \cline{2-2} 48120 & 70,5 \\ 0 & \end{array}$$

Resultado 70,5 rs.

ARTÍCULO VII.

Valuacion de los quebrados decimales.

103. Sea valuar el quebrado 0,53 de hora, esto es (85) hallar los minutos, segundos, etc., que contiene. Teniendo

la hora 60 minutos, para averiguar los minutos que comprende el quebrado dado no hay mas que multiplicarle por 60. Así 0,53 de hora=0,53 × 60 minutos=31,80 minutos=31 minutos y 0,8 de minuto. Para determinar ahora los segundos que este último quebrado contiene basta multiplicarle tambien por 60. De modo que 0,8 de minuto=0,8 × 60 segundos=48 segundos.

El quebrado 0,53 de hora equivale, pues, á 31 minutos y 48 segundos. De este procedimiento se deduce que:

Para valuar un quebrado decimal se multiplica por el número de veces que la unidad á que se refiere contiene la inferior inmediata, y se hace igual operacion con los quebrados que vayan resultando, hasta que desaparezca el quebrado ó se llegue á la especie ínfima.

La operacion se puede ordenar de este modo (repitiendo el ejemplo anterior.)

$$\begin{array}{rl} 0{,}53 & \text{horas} \\ 60 & \\ \hline 31{,}80 & \text{minutos} \\ 60 & \\ \hline 48{,}00 & \text{segundos} \end{array}$$

Valúese el quebrado 0,46 de vara.

$$\begin{array}{rl} 0{,}46 & \text{varas} \\ 3 & \\ \hline 1{,}38 & \text{pies} \\ 12 & \\ \hline 76 & \\ 38 & \\ \hline 4{,}56 & \text{pulgadas} \\ 12 & \\ \hline 112 & \\ 56 & \\ \hline 6{,}72 & \text{líneas} \end{array}$$

Resultado 0,46 de vara=1 pie, 4 pulgadas, 6 líneas y 0,72 de línea.

Observacion. Cuando, como en este último caso, despues de llegar á la ínfima especie usual, resulte quebrado puede hacerse desaparecer despreciándole si no llega á 5 décimas, ó añadiendo en lugar de él una unidad á las unidades á que se refiere, si llega ó pasa de 5 décimas. Así que en el ejemplo anterior puede decirse que el resultado es: 1 pié, 4 pulgadas y 7 líneas.

CAPÍTULO V.

NUMEROS COMPLEJOS.

ARTÍCULO PRIMERO.

Reduccion de un número complejo á incomplejo de una cualquiera de sus especies distinta de la inferior.

104. Trátase, por ejemplo, de reducir á meses al complejo 15 años 7 meses y 14 dias (*).

Reducido dicho número á dias (47) y poniendo el resultado 5624 dias por denominador 30, que es el número de dias que tiene el mes (comercial), al quebrado $\frac{5624}{30}$ meses será el incomplejo buscado. Luego:

Para reducir un número complejo á incomplejo de una especie cualquiera distinta de la inferior, se reduce primero á esta (**), *y al resultado se le pone por denominador el número de veces que la unidad de especie inferior está contenida en aquella á que quiere reducirse el complejo.*

105. Las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos enteros ó quebrados, se ejecutan reduciendo, segun las reglas que preceden, los datos á incomplejos de la especie conveniente.

Esta regla general, aunque sencilla en teoría, no lo es igualmente en la práctica; por lo mismo vamos á espo-

(*) Los números del nuevo sistema de pesos y medidas, cuyos múltiplos y divisores se ajustan á la numeracion decimal, se consideran como incomplejos. Así 4 hectólitros, 5 decálitros y 7 decílitros que se pueden espresar por 450, 7 litros, ó 4507 decílitros etc., forman un número incomplejo.

(**) Los números complejos se reducen á incomplejos de la especie inferior como se vé en el número 47, problema último.

ner otras especiales para cada una de las indicadas operaciones (*).

ARTÍCULO II.

Adicion de los números complejos.

Para sumar los números complejos se suma cada especie de unidades separadamente; de modo que se ejecutan tantas adiciones parciales como especies distintas contengan los sumandos. La operacion se principia por la especie inferior, se continúa por la superior inmediata y así sucesivamente; á fin de que si en alguna suma parcial resultan unidades de la especie superior siguiente se lleven para agregarlas á esta.

Ejemplos: 1.° Súmense 13 dias, 7 horas y 4 minutos; con 2 dias 18 horas y 13 minutos; con 10 dias, 20 horas y 36 minutos.

La operacion se ordena del modo siguiente:

	1		
	13 dias	7 horas	4
	2	18	13
	10	20	36
Resultado....	26 dias	21 horas	53

Se suman los minutos y luego las horas; mas como la suma 45 de estas compone 1 dia y 21 horas se escribirán estas y se lleva 1 para sumar con los dias: sumando despues los dias queda terminada la operacion.

(*) La sencillez de la mayor parte de estas reglas y la analogía que guardan con las correspondientes de los números incomplejos hacen innecesario en muchos casos el método analítico que nos hemos propuesto seguir.

2.° 10 duros	13 reales	24 $\frac{2}{3}$ mrs...		$\frac{8}{12}$
9	12	16		
416	»	4 $\frac{1}{2}$	....	$\frac{6}{12}$
18	8	15 $\frac{3}{4}$	....	$\frac{9}{12}$
6	15	» $\frac{5}{6}$	....	$\frac{10}{12}$
461 duros	9 reales	27 $\frac{3}{4}$		

Al sumar los maravedises en este último ejemplo, como son números mistos, se ejecutará la operacion segun se ha dicho (67) en la adicion de estos.

ARTÍCULO III.

Sustraccion de los números complejos.

107. *Para restar números complejos se restan las unidades de la misma especie; de modo que se ejecutan tantas sustracciones parciales como especies distintas contengan los datos. Si al ejecutar alguna de estas operaciones el sustraendo parcial fuese mayor que el minuendo, se agregan á este tantas unidades de su especie como contenga una de la superior inmediata, y se añadirá otra unidad al sustraendo inmediato superior; por cuya causa se da principio á la operacion por las unidades de especie inferior, se continúa por la superior inmediata y asi sucesivamente.*

Ejemplos. 1.° De 18 fanegas, 3 celemines, y 2 cuartillos, réstense 11 fanegas, 10 celemines y 1 cuartillo.

La operacion se ordena de este modo:

	18 fanegas,	3 celemines,	2 cuartillos.
	11	10	1
Resultado.	6 fanegas,	5 celemines,	1 cuartillo.

Despues de restar de 2 cuartillos 1 cuartillo, se pasa á hacer igual operacion con los celemines; mas de 3 no se pueden restar 10, por cuya razon se agrega al minuendo 1 fanega descompuesta en celemines, que con los 3 forman 15; de esta suma se restan los 10 del sustraendo, y en la siguiente operacion parcial se agrega otra fanega á las 11 del sustraendo.

2.° 13 varas menos 7 varas 2 piés y $10\frac{1}{2}$ pulgadas, ¿cuánto componen?

	13 varas	0 piés	0 pulgadas.
	7	2	$10\frac{1}{2}$
Resultado.	5 varas	0 piés	$1\frac{1}{2}$ pulgadas.

3.° ¿Qué edad tenia en 13 de Febrero de 1858 un sugeto que nació en 10 de Octubre de 1781?

Tiempo trascurrido hasta la época á que se refiere la pregunta. . . .	1858 años,	1 mes,	13 dias.
Tiempo trascurrido hasta el nacimiento del sugeto.	1780	9	10
Diferencia ó edad pedida..	77 años	4 meses	3 dias.

ARTÍCULO IV.

Multiplicacion de los numeros complejos.

En la multiplicacion de números complejos se suelen distinguir dos casos:

1.° *Multiplicar un número complejo por otro incomplejo.*

2.° *Multiplicar un número cualquiera complejo ó incomplejo por otro complejo.*

MÉTODO ORDINARIO.

Primer caso. *Para multiplicar un número complejo por* *otro incomplejo se multiplican las especies de unidades del multiplicando por el multiplicador; de modo que se ejecuten tantas multiplicaciones parciales como especies distintas contenga el primero. La operacion se principia por la especie inferior, se continúa por la superior inmediata y así sucesivamente; para que si de algun producto parcial resultan unidades de la especie superior siguiente, se reserven para agregarlas al producto de estas.*

Ejemplos. 1.° 1 arroba de arroz costó 26 reales y 17 maravedises, ¿cuánto costarán 5 arrobas? (*).

La operacion se dispone como se vé á continuacion.

	26 reales 17 mrs.
	5
Resultado. . . .	132 reales 17 mrs.

Se multiplican primero los 17 mrs. por el 5 multiplicador; y como el producto 85 componen 2 rs. y 17 mrs. se escriben estos y los 2 rs. se llevan para agregarlos al producto de 26 rs. por el mismo 5.

Cuando los productos parciales son complicados, la reduccion de unidades de especie inferior á la superior inmediata se efectúa despues, como se verá en los ejemplos que siguen.

2.° ¿Cuánto pesarán 72 fanegas de trigo habiendo pesado 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas una fanega?

	3 arrobas	5 libras	4 onzas
	72		
Resultado. . .	216 arrobas	360 libras	288 onzas,
ó sea	231 arrobas	3 libras	0 onzas.

(*) Para distinguir en este ejemplo y siguientes el multiplicando del multiplicador, recuérdese lo dicho (47).

3.° Una azumbre de vino costó 6 rs. y 12 mrs. ¿Cuánto costarán 10 cántaras?

Aquí debe primeramente reducirse el multiplicador á azumbres(47, obs.); y como 10 cántaras componen 80 azumbres, la operacion se egecuta como se vé á continuacion.

	6 reales	12 mrs.
	80	
Resultado. . .	480 reales	960 mrs.
ó sea	508 reales	8 mrs.

4.° Una vara de paño costó 72 rs. y 16 mrs. ¿Cuánto costarán 10 tercios ó piés de la misma tela?

Reduciendo el multiplicador á varas (47 obs.) se convierte 57 en $\frac{10}{3}$ de vara:

Luego el problema se resuelve como á continuacion se vé:

	72 reales	16 mrs.
	$\frac{10}{3}$	
Producto por el numerador 10,	720	160
que dividido por el denominador 3 (76) da.	240 reales	$53\frac{1}{3}$ mrs.
ó sea	241 reales	19 mrs.

5.° 17 pares de mulas emplearon 18 horas y 36 minutos en trasportar cierto número de fanegas de trigo. Para trasportar el mismo número de fanegas un par de mulas ¿cuántas horas necesitan?

Este problema y sus análogos no están comprendidos en el que se ha dicho (47) que comunmente se resuelve en la multiplicacion de números concretos. Desde luego se observa, sin embargo, que si 17 pares de mulas tardan 18 horas y 36 minutos, un par tardará 17 veces mas tiempo.

Luego será:

	18 horas	36 minutos.
	17	
	126	252
	18	36
Resultado. . .	306 horas	612 minutos.
Que equivale á	316 horas	12 minutos.

109. Segundo caso. *Para multiplicar un número complejo incomplejo por otro complejo se reduce el multiplicador á incomplejo de aquella unidad cuyo valor es el multiplicando* (47), *y queda este caso reducido al anterior ó á la multiplicacion de dos incomplejos.*

Ejemplos. 1.° 10 cahices, 4 fanegas y 3 celemines de trigo á 30 reales y 24 maravedises la fanega, ¿cuánto importan?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de fanega (104) se convierte en $\frac{1495}{12}$ de fanega.

Luego será:

	30 reales	24 mrs.
	$\frac{1491}{12}$	
	44730	5964
		2982
Producto por el numerador 1491,	44730	35784
que dividido por el denominador 12 da	3727 rs.	2999 mrs.
ó sea. . . .	3815 rs.	7 mrs.

2.° 13 arrobas y 5 libras á 16 rs. la libra ¿cuánto importan?

Reduciendo el multiplicador á incomplejo de libra (47) se convierte en 330 libras.

Luego será:

$$
\begin{array}{r}
16 \text{ reales} \\
330 \\
\hline
48 \\
48 \\
\hline
5280 \text{ reales.}
\end{array}
$$

ARTÍCULO V.

Método de las partes alícuotas. (*).

110. *Primer caso.* 5 varas de paño á 26 reales y 27 maravedises la vara, ¿cuánto importan?

La resolucion de este problema se reduce á multiplicar 26 reales y 17 maravedises por 5 (108); lo que se consigue multiplicando el número de reales y el de maravedises por dicho multiplicador 5.

Es evidente que 26 rs. $\times$ 5=130 rs. es el valor de las 5 varas de paño á 26 reales cada una. Ahora para multiplicar los 17 maravedises por el mismo 5, se discurre de este modo: si en lugar de 17 maravedises fuese 1 real el número por quien se ha de multiplicar el 5, el producto seria 5 reales; mas como 17 maravedises componen solo $\frac{1}{2}$ de real, dicho producto será la mitad de 5 reales; ó sea 2 reales y 17 maravedises.

Luego el producto total se compone de 130 rs. por una parte y 2 rs. 17 mrs. por otra, ó lo que es igual de 132 rs. 17 mrs.

(*) Se le da este nombre, porque para practicarle es preciso descomponer los números de las especies inferiores que contienen los factores en partes *alícuotas* (49) de la unidad de especie superior inmediata.

La operacion se dispone para mayor sencillez como se vé á continuacion.

	26 rs.	17 mrs.
	5	
Producto por 26 rs..	130 reales	
Por $\frac{1}{2}$ de real ó sean 17 mrs..	2	17 mrs.
Resultado....	132 rs.	17 mrs.

2.° Ejemplo: Cuánto pesarán 72 fanegas de trigo habiendo pesado 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas una fanega? (*).

	3 arrobas	5 libras 4 onzas
	72	
Producto por 3 arrobas..	216 arrobas	
por $\frac{1}{4}$ de arroba ó sean 5 libras.	14	10 libras
por $\frac{1}{5}$ de 5 libras ó sea 1 libra.	2	22 producto auxiliar
por $\frac{1}{4}$ de libra ó sea 4 onzas ..		18
Resultado..	231 ar.	3 libras.

Dispuesta la operacion como en el ejemplo 1.°, se multiplican las 3 arrobas por 72, y el producto parcial es 216 arrobas. Para multiplicar por 5 libras se observa, que si fuese por la arroba, el producto sería 72 arrobas luego siendo por 5 libras, que forman $\frac{1}{5}$ de arroba, sera $\frac{1}{5}$ de 72 arrobas, ó sea 14 arrobas y 10 libras.

Al multiplicar por 4 onzas se vé que este número es una parte alícuota muy complicada del factor anterior 5 libras; por lo tanto se halla el *producto auxiliar* por 1 libra, para

(*) Este problema y sus análogos se resuelven en la práctica con suma facilidad reduciendo el complejo á *cuarterones*, el que se convierte en 321, multiplicándole por 72, y separando con una coma las dos cifras de la derecha del producto 23112; de modo que el resultado es 231, 12 arrobas, ó, valuando (103) las 0,12 de arroba, 231 arrobas y 3 libras. El procedimiento se funda en que la arroba tiene 100 cuarterones; luego reduciendo aquellas á estos un factor se hace 100 veces mayor; luego el producto 23112 será (43, cor.—1.) 100 veces mayor de lo que le corresponde; luego separando las dos últimas cifras de la derecha (90) quedará convertido en el verdadero.

lo que basta tomar $\frac{1}{5}$ del producto por 5 libras, lo que da 2 arrobas y 22 libras. Ahora, como 4 onzas son $\frac{1}{4}$ de libra, se toma la cuarta parte de dicho producto auxiliar, y se tiene el correspondiente á 4 onzas, que es 18 libras.

Al sumar estos productos parciales se prescinde del producto por una libra, que solo se halló como *auxiliar* para determinar con mayor sencillez el de las 4 onzas. De modo que el resultado es:

162 ar. + 14 ar. + 10 lib. + 18 + lib. = 231 ar. y 3 lib., como en la resolucion que precede.

Del procedimiento empleado en los dos ejemplos anteriores se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplican las unidades de especie superior del multiplicando por el multiplicador: las de inferior especie se descomponen en PARTES ALÍCUOTAS *de la unidad de especie superior ó de otra cuyo producto correspondiente se halle determinado, y se toman iguales partes alícuotas del multiplicador ó de dicho producto conocido. La suma de los productos parciales, omitidos los auxiliares si los hay, será el producto total.*

3er. ejemplo. Una azumbre costó 6 rs. y 12 mrs. ¿cuánto costarán 10 cántaras?

Reduciendo las cántaras á azumbres (47) se tendrá:

	6	reales	12	mrs.
	80			
Producto por 6 reales.. . .	480	reales		
por $\frac{1}{34}$ de real ó sea 1 mar. .	2		12	mrs.
por 11 mrs.	25		30	
Resultado.	508	reales	8	mrs.

4.° Una vara de paño costó 72 reales y 16 mrs. ¿Cuánto costarán 10 tercias ó pies de la misma tela?

Reduciendo á varas el multiplicador (54) será:

	72 reales 16 mrs.	
	$\frac{10}{3}$	
Producto por 72 reales. . .	240 reales	
por $1\frac{1}{43}$ de real ó sea 1 maravedí.		$3\frac{1}{3}$ mrs.
por 15 mrs.	1	16
Resultado.	241 reales	$19\frac{1}{3}$ mrs.

5.° 17 pares de mulas emplearon 18 horas y 36 minutos en trasportar cierto número de fanegas de trigo. Para trasportar el mismo número de fanegas un par de mulas ¿cuántas horas necesita?

	18 horas	36 minutos
	17	
Producto por 18 horas.	126 horas 18	
por $\frac{1}{2}$ de hora ó sean 30 minutos.	8	30 minutos
por $\frac{1}{5}$ de media hora ó sean 6 minutos.	1	42
Resultado.	316 horas	12 minutos

111. *Segundo caso.* Sea multiplicar 30 rs. y 24 maravedises por 124 fanegas y 3 celemines; lo que equivale á hallar el valor de 124 fanegas y 3 celemines, en el supuesto de que 1 fanega importa 30 reales y 24 mrs.

Despues de haber multiplicado todo el multiplicando por las 124 fanegas, como en el primer caso, para hallar el valor de los 3 celemines componiendo estos $\frac{1}{4}$ de fanega no hay mas que tomar $\frac{1}{4}$ de 30 rs. y 24 mrs, importe total de la fanega, y sumar este producto con los anteriores.

La operacion se dispone como se vé á continuacion, donde se notará que se espresan las especies del multiplicador lo que solo tiene por objeto recordar la relacion que entre ellas hay.

		30 reales	24 mrs.
		124 fanegas	3 celemines
Valor de las 124 fanegas	Producto por 30 rs....	720 reales	
	por $\frac{1}{2}$ ó sean 17 mrs....	62	
	por $\frac{1}{17}$ de medio real ó sea 1 maravedí.....	3	22 mrs.
	por 6 maravedises.....	21	30
Valor de $\frac{1}{4}$ de fanega ó sean 3 celemines...............		7	23
	Resultado..........	3815 reales	7 mrs.

2.° ejemplo. Un móvil recorre en una hora con movimiento uniforme, 13 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 6 líneas ¿qué espacio recorrerá sujeto á iguales condiciones en 20 horas, 36 minutos y 20 segundos?

		13 varas	2 píes	5 pulgadas	6 líneas.
		20 horas	36	minutos	20 segundos.
Valor de (ó espacio recorrido en) 20 horas.	Producto por 13 varas........	260 varas			
	por $\frac{1}{3}$ de vara ó sea 1 pié........	6	2 piés		
	por id. id.......	6	2		
	por $\frac{1}{3}$ de pié ó 4 pls.	2		8 pulgadas.	
	por $\frac{1}{4}$ de 4 puls. ó 1 pulgada....		1	8	
	por $\frac{1}{2}$ de pul. ó 6 líneas.......			10	
Valor de $\frac{1}{2}$ de hora ó 30 minutos..........		6	2	8	9 líneas.
de $\frac{1}{5}$ de media hora ó 6 minutos........		1	1	1	9
de 1 minuto.....				8	$3\frac{1}{2}$ valor auxil.
de $\frac{1}{3}$ de minuto ó 20 segundos.......				2	$9\frac{1}{6}$
Resultado....		284 varas	2 pies	3 pul.	$3\frac{1}{6}$ líneas.

Ordenada la operacion del modo que precede, se multiplica todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador ó sea por las 20 horas, del modo que se practicó en el primer caso (110).

Se descomponen luego los 36 minutos en 30 mas 6. Como 30 minutos componen $\frac{1}{2}$ de hora y el multiplicando es el espacio recorrido por el móvil en 1 hora, el valor de 30 minutos se halla tomando la mitad del multiplicando. Siendo 6 minutos $\frac{1}{5}$ de 30, el valor de los 6 minutos se halla tomando $\frac{1}{5}$ del valor de 30 minutos.

Para hallar el valor de (ó el espacio recorrido en) 20 segundos, se observa que estos no son una parte alícuota sencilla de 6 minutos, y se determina el *valor auxiliar* de 1 minuto.

Se suman los productos parciales, omitiendo solo el auxiliar, y la suma es el resultado pedido.

Del procedimiento empleado en los dos ejemplos anteriores se deduce la siguiente regla:

Para multiplicar un número complejo ó incomplejo por otro complejo se multiplica todo el multiplicando por las unidades de especie superior del multiplicador, como se dijo en el primer caso: las unidades de especie inferior se descomponen en partes alícuotas de la unidad de especie superior ó de otra cantidad cuyo valor esté determinado, y se toman iguales partes alícuotas del valor de la unidad de especie superior ó de dicha cantidad de valor conocido. La suma de los productos parciales, omitiendo los auxiliares si los hay, será el producto total.

3.^{er} ejemplo. ¿Cuánto importan 987 varas 2 pies 7 pulgadas y 5 líneas á 65 reales y 23 maravedises la vara? (*)

		65 rs.	23 mrs.
		987 varas	2 pies 7 pulgadas 5 líneas
Valor de 987 Varas	Producto por 65 rs.	4935 5922	
	por 17 mrs........	493 rs.	17 mrs.
	por $\frac{1}{17}$ de real ó 1 maravedí.........	29	1
	por 5 mrs.........	145	5
Valor de $\frac{1}{3}$ de vara ó 1 pié		21	30 $\frac{1}{3}$ .... $\frac{144}{432}$
	de id......... ó id....	21	30 $\frac{1}{3}$ .... $\frac{144}{432}$
	de $\frac{1}{2}$ de pié, ó 6 pul.	10	32 $\frac{1}{6}$ .... $\frac{72}{432}$
	de $\frac{1}{6}$ de 6 pulgadas ó 1 pulgada...	1	28 $\frac{1}{36}$ .... $\frac{12}{432}$
	de $\frac{1}{3}$ de pulgada ó 4 líneas..........		20 $\frac{73}{108}$ .... $\frac{292}{432}$
	de $\frac{1}{4}$ de líneas, ó línea...........		5 $\frac{73}{432}$ .... $\frac{73}{432}$
	Resultado.............	64879 rs.	33 $\frac{305}{432}$ mrs.

Este ejemplo, aunque complicado, se resuelve por la regla dada de una manera análoga á los dos precedentes.

ARTÍCULO VI.

Aplicacion del método de las partes alicuotas á la multiplicacion de números mistos incomplejos y complejos.

112. 1.er ejemplo. 18 libras á 82 $\frac{3}{4}$ reales la libra ¿cuánto importan?

(*) Hemos elegido este problema para que se vea que ningun método simplifica lo bastante la resolucion de algunos cuyos datos están espresados en medidas del antiguo sistema.

	$82\ \frac{3}{4}$ reales.	
	18	
Producto por 82 reales...	656 82	
por $\frac{1}{2}$ de real........................	9 reales.	
por $\frac{1}{2}$ de medio real, ó $\frac{1}{4}$ de real.	4	17 mrs.
Resultado...........	1489 reales	17 mrs.

2.° ¿Cuánto importan $6\ \frac{4}{5}$ arrobas, habiendo costado una arroba 46 reales?

	46	reales.	
	$6\ \frac{4}{5}$		
Valor de 6 arrobas.. Producto por 46 reales.....	276	reales.	
Valor de $\frac{1}{5}$ de arroba........................	9		$6\ \frac{4}{5}$ mrs.
de $\frac{3}{5}$ de arroba......	27		$20\ \frac{2}{5}$
Resultado........	312	reales.	$27\ \frac{1}{5}$ mrs.

3.° ¿Cuánto importan $12\ \frac{2}{3}$ varas de paño á $20\ \frac{1}{5}$ reales la vara?

	$20\ \frac{1}{4}$ rs.		
	$12\ \frac{2}{3}$		
Valor de 20 varas. Producto por 20 rs.	240	rs.	
por $\frac{1}{4}$ de real.	3		
Valor de $\frac{1}{3}$ de vara......	6		$33\ \frac{3}{4}$ mrs.
de $\frac{1}{3}$ de idem.....	6		$33\ \frac{3}{4}$
Resultado....	256	rs.	$33\ \frac{1}{2}$ mrs.

4.° Un móvil anda en 1 minuto $50\ \frac{3}{4}$ varas. ¿Cuánto andará con igual movimiento en 10 minutos y 25 segundos?

$50\ \frac{3}{4}$ varas.
10 minutos. 25 segundos.

Valor de (ó espacio recorrido en) 10 minutos.	Producto por 50 varas.	500 varas			
	por $\frac{1}{2}$ vara..	5			
	por $\frac{1}{2}$ de media vara ó $\frac{1}{4}$ vara..	2	1 pié	6 pulgadas.	
	Valor de $\frac{1}{3}$ de minuto ó 20 segundos......	16	2	9	
	Valor de $\frac{1}{4}$ de la tercera parte de minuto ó 5 segundos........	4		8	3 líneas.
	Resultado.....	528 varas	1 pié	11 pulgs.	3 líneas.

5.° Una arroba costó 20 duros y 12 rs. ¿$6\frac{7}{8}$ arrobas cuánto costarán?

20 duros. 12 reales.
$6\ \frac{7}{8}$

Valor de 6 arrobas.	Producto por 20 duros.......	120 duros		
	por $\frac{1}{2}$ duros ó 10 rs...	3		
	por $\frac{1}{5}$ de 10 rs. ó 2 rs.		12 rs.	
	Valor de $\frac{4}{8}$ de arroba ó $\frac{1}{2}$ de arroba..........	10	6	
	de $\frac{2}{8}$ de arroba ó $\frac{1}{2}$ de media arroba.......	5	3	
	de $\frac{1}{8}$ de arroba ó $\frac{1}{2}$ de un cuarto de arroba....	2	11	17 mrs.
	Resultado......	141 duros	12 rs.	17 mrs.

ARTÍCULO VII.

Division.

Cuando dividendo y divisor son de diferente naturaleza (54) se distinguen otros dos casos:

1.° *Dividir un número complejo por otro incomplejo,*
2.° *Dividir un número complejo ó incomplejo por otro complejo.*

Primer caso. *Para dividir un número complejo por otro incomplejo* (de distinta naturaleza) *se dividen las diferentes especies de unidades del dividendo por el divisor; de modo que hay que ejecutar varias divisiones parciales. La operacion se principia por las unidades de especie superior, se continúa por la inferior inmediata, y así sucesivamente á fin de que si en alguna division parcial resulta resíduo se reduzca á la especie inmediata inferior, y se sume con las unidades que de esta haya en el dividendo para formar el dividendo parcial siguiente:*

Ejemplos. 1.° 72 fanegas de trigo pesaron 231 arrobas y 3 libras, ¿cuánto pesará la fanega? (*)

La operacion se ordena del modo siguiente:

1.er dividendo parcial....231 ar. 3 libras.	72
15	3 ar. 5 lib. 4 onz.
25	
75	
30	
375 libras.	
3 id.	
2.° dividendo parcial....378 libras.	
18	
16	
108	
18	
3.er dividendo parcial....288 onzas.	
0	

(*) Para distinguir el dividendo del divisor en este ejemplo y siguientes, recuérdese lo dicho en el número 54.

Se dividen las 231 arrobas por 72, y el cociente 3 arrobas formarán las unidades de especie superior del resultado: el residuo 15 arrobas de esta division se reduce á libras y añadiéndole las 3 que hay en el complejo se forma el 2.° dividendo parcial 378 libras. Se reduce el resto de la última division 18 libras á onzas, y las 288 que compone, una vez que no hay onzas en el complejo, constituyen el 3.er dividendo parcial. Se efectúa esta tercera division y su cociente reunido á los anteriores compone el cociente total.

El resultado es, pues, 3 arrobas, 5 libras y 4 onzas.

2.° 10 cántaras de vino costaron 308 rs. y 8 maravedises, ¿á cómo costó la azumbre?

Aquí debe reducirse el divisor á azumbres (54, obs.) y luego la division se ejecuta como en el ejemplo anterior y á continuacion se vé:

308 reales 8 maravedises.	80
28	6 reales 12 maravedises.
34	
112	
84	
952 maravedises.	
8 id.	
960 maravedises.	
160	
0	

Resultado: 6 reales y 12 maravedises.

3.° 10 tercias ó piés de paño costaron 241 reales y $19\frac{1}{3}$ maravedises ¿á cómo costó la vara?

Reduciendo el divisor á varas (54 obs.) se convierte en $\frac{10}{3}$ de vara; será, pues, 241 rs. $19\ \frac{1}{3}$ mrs. dividido por $\frac{10}{3}$.

Para ejecutar esta division hay que multiplicar todo el dividendo por el denominador 3 y luego dividir este producto por el numerador 10 (81). De modo que tendremos:

$$(241 \text{ reales } 19\tfrac{1}{3} \text{ mrs}) \times 3 : 10$$

ó sea:

```
723 reales 58 maravedíses.  |10
  3                         |72 rs. 16 mrs.
 34                         |
 ------
102 maravedises.
 58   id.
 ------
160 maravedises.
  0
```

Resultado: 72 rs. y 16 mrs.

4.° Un par de mulas empleó 316 horas y 12 minutos en trasportar una cantidad de trigo; para trasportar la misma cantidad 17 pares de mulas, ¿qué horas necesitan?

Este problema y sus análogos no están comprendidos en el que se ha dicho (54) que comunmente se resuelve en la division de números concretos. Desde luego se observará, sin embargo, que 17 pares de mulas tardarán en trasportar la indicada cantidad de trigo 17 veces menos tiempo que el empleado por un par en iguales circunstancias.

Luego será:

```
316 hora 12 minutos.  |17
146                   |18 horas 36 minutos.
 10                   |
 60
------
600 minutos.
 12   id.
------
612 minutos.
102
  0
```

Resultado: 18 horas y 36 minutos.

114. Segundo caso. *Para dividir un número complejo ó incomplejo por otro complejo* (de distinta naturaleza), *se reduce el divisor á incomplejo de aquella unidad cuyo valor se va á determinar, y queda este caso reducido al anterior ó á la division de dos números incomplejos.*

Ejemplos. 1.° 124 fanegas y 3 celemines de trigo costaron 3815 reales y 7 maravedises, ¿á cómo costó la fanega?

Reduciendo el divisor á incomplejo de fanega (104) se convierte en $\frac{1491}{12}$ fanegas; luego (como en el problema 3.° del caso anterior) se tendrá:

(3815 reales 7 maravedises) $\times$ 12 : 1491

45780 rs. 84 mrs.	1491
1050	30 rs. 24 mrs.
34	
420	
315	
35700 mrs.	
84 id.	
35784 mrs.	
5964	
0	

Resultado 30 reales 24 maravedises.

2.° 13 arrobas y 5 libras costaron 5280 reales: ¿á cómo costó la libra?

Reduciendo el divisor á incomplejo de libra se convierte en 330 libras.

Luego será:

528 reales.	33
198	16 reales.
0	

Costó, pues, á 16 reales la libra.

Cuando dividendo y divisor son de una misma naturale-

za (54) *para ejecutar la division se convierten ambos términos en incomplejos de una misma especie, y queda este caso reducido á la division de dos números incomplejos.*

EJEMPLO. Una vara de paño costó 52 reales y 12 maravedises ¿cuántas varas se podrán comprar con 721 rs. y 16 mrs?

Es evidente que se podrán comprar tantas varas como veces 52 reales y 12 maravedises están contenidos en 721 reales y 16 maravedises. Luego este último número es el dividendo, el primero el divisor, y el cociente espresará varas, ó varas y divisores de la vara si no fuese exacto.

Reduciendo dividendo y divisor á maravedises (porque reducidos á reales se convierten en quebrados, y la division de estos no es tan sencilla) se convierte la operacion en dividir 24530 por 1780 ó (53, cor. 1.°) en dividir 2453 por 178, que se ejecuta como se vé á continuacion:

	2453	178
	673	13 varas 2 piés 4 $\frac{10}{89}$ pulgds.
Resíduo.	139	
que reducido á piés. .	3	
dá.	417	
Nuevo residuo.	61	
que reducido á pulgds. .	12	
	122	
	61	
dá.	732	
Ultimo resíduo.	20	

Resultado: $13\frac{139}{178}$ varas, ó 13 varas, 2 piés 4 $\frac{10}{89}$ pulgadas.

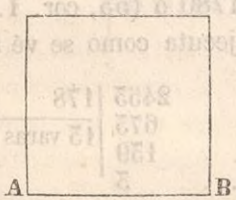
CAPÍTULO VI.

SISTEMAS DE PESOS Y MEDIDAS.

ARTICULO PRIMERO.

Preliminares.

115. CUADRADO (en geometría) *es una figura terminada por cuatro rectas iguales, y que se reunen formando escuadra ó ángulos rectos*, (como la figura siguiente).



LADO *del cuadrado es una de las cuatro rectas que lo forman*, como A B.

Se llama VARA CUADRADA, PIÉ CUADRADO, METRO CUADRADO, DECÍMETRO CUADRADO, etc., *á cuadrados cuyos lados son respectivamente una vara, un pié, un metro, un decímetro*, etc.

Las medidas de superficie en un sistema cualquiera son casi siempre (*) cuadrados que tienen por lados las me-

(*) Decimos casi siempre; porque hay algunas medidas de superficie que no son cuadrados, ni pueden reducirse á cuadrado, cuyo lado tenga un número exacto de medidas longitudinales, el *celemin de tierra*, por ejemplo, podrá representarse por un rectángulo que tenga 12 estadales de base y 4 de altura; pero nunca por un cuadrado cuyo lado tenga un número exacto de estadales, de varas ni de piés.

El *dia de bueyes*, medida asturiana, es tambien un rectángulo, cuyos lados son por lo general, 60 y 30 varas; mas tampoco se puede reducir á cuadrado, cuyo lado tenga un número exacto de medidas lonjitudinales.

didas de lonjitud del mismo sistema; mas la relacion entre los múltiplos y divisores de estas medidas de superficie es muy distinta de la que hay entre las lonjitudinales que les sirven de lado. Propongamos, por ejemplo, averiguar cuántos piés cuadrados contiene la vara. Para esto dividamos dos lados opuestos del cuadrado en pies, y uniendo por rectas las divisiones que se encuentran á la misma altura, se tendrá la vara cuadrada dividida en tres fajas de un pié de ancho y tres de largo (como aparece de la figura siguiente):

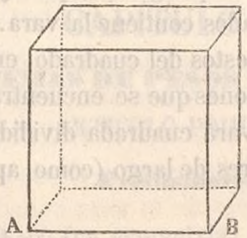
luego cada una de estas tres fajas contiene 3 pies cuadrados; luego las tres contendrán 3×3; luego la vara cuadrada contiene 3^2 pies cuadrados (45).

Como se puede hacer un raciocinio análogo con otras dos medidas ó cuadrados de iguales condiciones, resulta que

Para averiguar las veces que una medida cuadrada mayor en un sistema contiene otra menor en el mismo, se eleva á la segunda potencia el número de veces que el lado de la mayor contiene al de la menor. Así una vara cuadrada contiene $3^2=9$ piés cuadrados, un metro cuadrado $10^2=100$ decimetros cuadrados, etc.

116. Cubo (en geometría) *es un sólido terminado por*

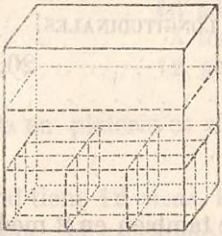
seis; cuadrados (tiene la forma de un dado, como la siguiente figura):



Arista *en un cubo es cada una de las ocho línias formadas por la interseccion de dos cuadrados;* la cual es igual á un lado de este, como A B.

Se llama vara cúbica, pie cúbico, metro cúbico, decímetro cubico, etc., *á cubos cuyos aristas son respectivamente una vara, un pié, un metro, un decímetro*, etc.

Las medidas de volúmen en un sistema cualquiera son siempre cubos que tienen por aristas las medidas lonjitudinales del mismo sistema; pero la relacion entre los múltiplos y divisores de las medidas de volùmen ó cúbicas es muy distinta de la que existe entre las lonjitudinales que forman las aristas. Propongámonos averiguar cuántos piés cúbicos, por ejemplo, tiene la vara cúbica. Dividiremos cuatro aristas opuestas en tres partes iguales cada una ó sea en tres pies, y suponiendo cortado el sólido por las divisiones que están á la misma altura se tendrá dividido en tres trozos de un pié de espesor cada una, (como aparece en esta figura):



Dos caras opuestas de estos trozos tienen una vara cuadrada que se puede suponer dividida (115) en nueve pies cuadrados: sobre cada uno de estos y dentro de dicho trozo se puede colocar un pié cúbico; luego cada trozo contiene 9 pies cúbicos; luego los tres contendrán 9×3, ó $3\times3\times3$; luego la vara cúbica contiene 3^3 pies cúbicos (45).

Como se puede hacer un raciocinio análogo con otros dos cubos de iguales condiciones se deduce que

Para hallar las veces que una medida cúbica mayor en un sistema contiene á otra menor en el mismo, se eleva á la tercera potencia el número de veces que la arista de la mayor contiene á la de la menor. Así una vara cúbica contiene $3^3=27$ pies cúbicos, un metro cúbico $10^3=1000$ decímetros cúbicos etc.

ARTICULO II.

Sistema antiguo.

Medidas que estaban en uso al plantearse el nuevo sistema métrico.

LONGITUDINALES.

117. *La legua* tiene.	20,000	piés. (*)
La vara.	3	pies.
El pié.	12	pulgadas.
La pulgada.	12	líneas.
La línea.	12	puntos.

La legua se divide tambien en 2 medias y en 4 cuartos.

La vara en 4 *cuartas* ó *palmos* y en 8 *ochavas*. Tambien se divide en 3 *tercias*.

El pié en 16 *dedos*.

El dedo en 2 medios, 4 cuartos etc.

En agrimensura se usa del *estadal* que contiene 4 varas.

DE CAPACIDAD PARA ÁRIDOS.

El cahiz tiene	12	fanegas.
La fanega.	12	celemines.
El celemin.	4	cuartillos.
El cuartillo.	4	ochavos.
El ochavo.	4	ochavillos.

La fanega se divide tambien en 2 medias fanegas, y en 4 cuartillas.

DE CAPACIDAD PARA LÍQUIDOS (escepto el aceite).

El moyo tiene.	16	cántaras.
La cántara.	8	azumbres.
La azumbre.	4	cuartillos.
El cuartillo.	4	copas.

(*) *La legua tiene* 6666 $\frac{2}{3}$ varas. El no formar un número entero de varas provino de que las leguas se referian siempre al *paso doble* que representa 5 piés, y nunca á la vara; de manera que la legua contiene 4000 pasos dobles.

De peso.

El quintal tiene.......	4 arrobas.
La arroba..........	25 libras.
La libra..........	16 onzas.
La onza..........	16 adarmes.
El adarme..........	3 tomines.
El tomin...........	12 granos.

La unidad usada en platería es el *marco* que contiene 8 onzas.

La libra medicinal tiene 12 *onzas*, la onza 8 *dracmas*, la dracma 3 *escrúpulos*, el escrúpulo 2 *óbolos*, y el óbolo 12 *granos*.

Las medidas para el aceite están arregladas al peso, y se usa la arroba, que se divide en 2 medias, en 4 cuartos de arroba, en 8 medios cuartos, y en 25 libras. La libra contiene 2 medias, 4 cuarterones ó *panillas*, ú 8 medias panillas.

Agrarias y de superficie.

La legua cuadrada tiene (115)..	$20.000^2=400.000.000$ piés cuadrados.
La fanega de tierra que es un cuadrado de 24 estadales de lado tiene.......	$24^2=576$ estadales cuadrados.
El estadal cuadrado tiene....	$4^2=$ 16 varas cuadradas.
La vara cuadrada	$3^2=$ 9 piés cuadrados.
El pié cuadrado.	$12^2=144$ pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada.....	$12_2=144$ líneas cuadradas.

La fanega de tierra sedivide en 12 *celemines*, y el celemin en 4 *cuartillos*.

Tambien se usa como medida agraria la *aranzada* que es un cuadro de 20 estadales de lado, y que tiene por consiguiente (115) $20^2=400$ estadales cuadrados.

De volumen.

La vara cúbica tiene (116).	$3^3=$	27 piés cúbicos.
El pié cúbico.	$12^3=$	1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada cúbica.	$12^3=$	1728 líneas cúbicas.

De dinero.

El duro tiene.	20 reales.
El real.	34 maravedises.

Medidas antiguas que subsistirán despues de planteado el nuevo sistema, porque no han sido reemplazadas por otras.

De tiempo (*).

El siglo tiene.	100 años.
El año (**).	12 meses.

(*) La inconmesurabilidad que hay entre el año y el día, unidades naturales del tiempo, impidió que estas medidas fuesen reemplazadas por otras acomodadas al sistema decimal ó mas sencillas que las actuales.

(**) *Año* es el tiempo que la tierra emplea en hacer una revolucion completa al rededor del sol.

Dia es el tiempo que tarda la misma en ejecutar una revolucion sobre su eje.

Estos dos tiempos no tienen entre sí relacion exacta; así aunque se dice que el año comun es de 365 dias, tiene 365 dias, 5 horas 48 minutos y 49,7 segundos. De modo que de 4 en 4 años se forma uno de 366 dias llamado *bisiesto*. Los números de años de cada siglo divisibles por 4 son por esta razon bisiestos, por ejemplo, los años 4, 8, 12..... 56, 60, 64, etc.

Suponiendo que la diferencia 5 horas, 48 minutos 49,7 segundos compone cada 4 años un dia; se comete un error de $11\frac{1}{6}$ minutos próximamente. Para compensarle se cuenta solo como bisiesto un año *secular* de 4 en 4, entendiéndose por año secular el terminado en dos ó mas ceros.

Habiéndose pues contado como bisiesto el año *secular* 1600, no lo serán ya los de igual clase hasta el 2000.

Siguiendo esta regla, que es la *Gregoriana*, todavía se comete el error de cerca de un dia cada 3000 años, error insignificante en tan largo periódo. y que aun podia corregirse declarando que los años divisibles por 4000 no fuesen tampoco *bisiestos*.

El mes (comercial). . . . . . 30 dias (*).
El dia. . . . . 24 horas.
La hora. . . . . 60 minutos.
El minuto. . . . . 60 segundos.

Tambien es medida de tiempo la *semana* que tiene 7 dias; contándose 52 por año.

DE LA CIRCUNFERENCIA.

La *circunferencia* tiene. . . . 360 grados (**)
El *grado*. . . . . 69 minutos
El *minuto*. . . . . 60 segundos

ARTÍCULO III.

Nuevo sistema ó sea sistema métrico decimal.

119. Las *unidades* de las diferentes medidas de este sistema son las siguientes:

El METRO para las medidas de longitud (***).
El LITRO para las de capacidad de áridos y líquidos (****).
El GRAMO para las de peso (*****).
El ÁREA para las de superficie (******).
El METRO CÚBICO para las de volúmen.

(*) Los meses *comunes* de abril, junio, setiembre, y noviembre tienen 30 dias: febrero tiene 28, escepto en los años bisiestos que tiene 29: los 7 meses restantes tienen 31 dias cada uno.

(**) Esta es la division antigua llamada *sexagesimal*. Modernamente se adoptó en Francia otra llamada *centesimal*, que considera la circunferencia dividida en 400 grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos; mas subsiste aun la division antigua por las escasas ventajas y muchos inconvenientes que presenta esta variacion.

(***) *Metro* se deriva de *METRON*, palabra griega que significa medida.

El *metro* tiene poco mas de 3 piés y 7 pulgadas de la vara de Búrgos.

(****) *Litro* se deriva del griego *LITRA*, nombre de medida y de peso entre los griegos.

El *litro* equivale casi á dos cuartillos castellanos.

(*****) *Gramo* se deriva de *GRAMMA*, palabra griega que significa *una medida de peso*.

El *gramo* equivale á poco mas de medio adarme.

(******) *Area* se deriva de la palabra latina *área*, que significa campo ó superficie destinada al cultivo.

La *área* tiene próximamente 143 varas cuadradas.

El *metro* es la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París: su magnitud depende, pues, de las dimensiones de la tierra.

Las demás unidades se derivan del metro (que por esta razon se llama *unidad fundamental*) de este modo:

El *litro* es un vaso de igual capacidad que un cubo cuyas dimensiones lineales interiores sean la décima parte del *metro*.

El *gramo* es lo que pesa en el vacío, y á la temperatura de cuatro grados centígrados, un volúmen de agua destilada igual á un cubo cuya arista sea la centésima parte del *metro*.

El *área* es un cuadrado, cuyo lado tiene diez *metros* de largo.

El metro cúbico, es un cubo cuya arista tiene un metro (116).

120. Los *múltiplos* de estas diferentes unidades se forman anteponiendo á cada una las palabras griegas (*),

	DECA,	HECTO,	KILO,	MIRIA,
que significan...	diez,	ciento,	mil	y diez mil,

y los *divisores* anteponiendo á las mismas unidades las voces latinas

	DECI,	CENTI,	y MILI,
que equivalen á...	décimo,	centésimo	y milésimo,

como se vé á continuacion:

(*) Se adoptaron palabras griegas y latinas para la formacion de la nomenclatura del sistema, con el objeto de que fuese invariable y pudiese ser admitida en todas partes.

MEDIDAS LONGITUDINALES.

Múltiplos..	Miriá-metro..........................	10000	metros.
	Kiló-metro..........................	1000	metros,
	Hectó-metro..........................	100	metros.
	Decá-metro	10	metros.
Unidad usual.....METRO.			
Divisores.	Decí-metro..........................	0,1	de id.
	Centí-metro..........................	0,01	de id.
	Milí-metro..........................	0,001	de id.

DE CAPACIDAD.

Múltiplos..	*Miriá-litro*..........................	10000	*lit.* (*).
	Kiló-litro ó tonelada de arqueo	1000	litros.
	Hectó-litro..........................	100	litros.
	Decá-litro..........................	10	litros.
Unidad usual............... LITRO.			
Divisores..	Decí-litro..........................	0,1	de litro.
	Centí-litro..........................	0,01	de litro.
	Milí-litro..........................	0,001	*de litro.*

DE PESO.

Múltiplos..	*Miriá-gramo*..........................	10000	*gramos*
	Kiló-gramo..........................	1000	gramos.
	Hectó-gramo..........................	100	gramos.
	Decá-gramo	10	gramos.
Unidad usual...............GRAMO (**).			
Divisores..	Decí-gramo..........................	0,1	de id.
	Centí-gramo..........................	0,01	de id.
	Milí-gramo	0,001	de id.

(*) Los múltiplos y divisores omitidos por nuestra ley de pesos y medidas van de letra cursiva. Aunque realmente son innecesarios, los hemos puesto, sin embargo, para que se vea mejor el artificio del sistema.

(**) *El gramo* ha sido la unidad en la formacion del sistema; pero la unidad usual es hoy el kilógramo, como se verá mas adelante (124).

AGRARIAS (*).

Múltiplo...........	Hecto-área......	10 áreas.
Unidad usual......	ÁREA.	
Divisores...........	Centi-área.......	0,01 de área.

CÚBICAS.

Unidad usual............ METRO CÚBICO.

Divisores.	Decímetro cúb. (116)	$0{,}1^3 = 0{,}001$	de met. cúb.
	Centímetro cúb.......	$0{,}01^3 = 0{,}000001$	de met. cúb.
	Milímetro cúbico.....	$0{,}001^3 = 0{,}000000001$	de met. cúb.

121. Desde luego se observa que las palabras *deca, hecto, kilo* y *miriá* se pueden sustituir con *decena, centena, millar* y *decena de millar* de la unidad á que se juntan y las voces *deci, centi* y *mili* se pueden sustituir tambien con *décima, centésima* y *milésima* de la unidad á que van unidas. Así que, siendo el *metro* la *unidad* de longitud sus múltiplos son *decenas, centenas, millares* y *decenas de millar* de *metro* y sus divisores *décimas, centésimas* y *milésimas de* metro; pudiéndose decir otro tanto del *litro* y del *gramo*.

La naturaleza especial de las medidas de superficie y cúbicas (115 y 116) hace que sus múltiplos sean en las primeras de 100 en 100 veces mayores, y de 1000 en 1000 en las segundas, si fuese preciso formarles; y que los divisores sean respectivamente de 100 en 100 y de 1000 en 1000 veces menores.

Para espresar, pues, por escrito un número cualquiera

(*) Notaráse que no se cuenta la *deca-área* entre los múltiplos del *área* ni la *deci-área* entre sus divisores; y esto es porque las superficies se valúan casi siempre (115) refiriéndolas á cuadrados, y ni 1000 metros cuadrados que representa la primera ni 10 á que equivale la segunda, pueden reducirse á cuadrado, cuyo lado tenga número exacto de metros.

que contenga múltiplos y divisores de la unidad, se escribe como si fuese un número decimal (87) *colocando la* COMA *despues de las unidades, antes de estas y en el lugar correspondiente los* MÚLTIPLOS; *y despues, en el lugar que tambien corresponda, los* DIVISORES; *cuidando de espresar al fin la especie de las unidades.*

Así 3 *decá*metros, 5 metros, 4 *decí*metros y 6 *centí*metros, como que equivalen á 3 decenas, 5 unidades, 4 décimas y 6 centésimas de metro, se escriben 35,46 metros.

7 *decá*litros, 9 litros y 6 *decí*litros, se escriben 79,6 litros.

6 *hectá*reas, 18 areas y 3 *centi*areas, se escriben 618,03.

29 metros cúbicos, 46 *decí*metros cúbicos y 718 *centí*metros cúbicos se escriben 29,046718 metros cúbicos.

122. Recíprocamente *para leer cada uno de estos números, se leen las cifras que están antes de la coma, como enteros, espresando al fin la especie de la unidad, y las que están despues se leen como decimales espresando tambien la especie de la última cifra segun se hace con aquellos* (88).

El número 325,76 litros se lee 325 litros y 76 *centí*litros cuyo número equivale á 3 *hectó*litros, 2 *decá*litros, 5 litros, 7 *decí*litros y 6 *centí*litros, que son los litros, múltiplos y divisores, que contiene el número dado. Del mismo modo 7856,06 áreas se lee 7856 áreas y 6 *centi*áreas, y 731,856 metros cúbicos se espresa por 731 metros cúbicos y 856 *decí*metros cúbicos.

123. El nombre especial que se dá á cada múltiplo y á cada divisor, sirve solo para el caso en que sea necesario cambiar de unidad, bien para ejecutar alguna operacion, ó bien porque la unidad empleada en la formacion del sis-

tema es muy pequeña ó demasiado grande, respecto de la cantidad que con relacion á ella se quiere espresar.

Así que las grandes distancias, como las que hoy se valúan por leguas deben espresarse en *kiló*metros ó *miriá*metros; y las menores que el metro en *centí*metros y *milí*metros.

Las cantidades de áridos ó líquidos que en el antiguo sistema se espresan por fanegas, se valúan en *hectó*litros, y las menores que el litro en *centí*litros, etc.

El *cambio de unidad en cualquiera de sus múltiplos* (que equivale á la reduccion de un número complejo del antiguo sistema á incomplejo de alguna de sus especies (114) *se consigue corriendo la coma uno, dos, tres, etc., lugares hácia la izquierda, segun dicho múltiplo contenga á la unidad* 10, 100, 1000, *etc. veces; y en cualquiera de sus divisores, corriendo la coma uno, dos, tres, etc., lugares hácia la derecha, segun que la unidad contenga* 10, 100, 1000, *etc. veces á dicho divisor* (*).

Así, para espresar este número 37470,7 metros en *kiló*metros, bastará correr la coma tres lugares á la izquierda, puesto que el *kiló*metro tiene 1000 metros y será 37,4707 *kiló*metros.

Del mismo modo 3,672 litros equivale á 367,2 *centílitros*.

(*) Se observará que el valor del número, considerado como abstracto, varía corriendo la coma uno ó varios lugares á la izquierda ó á la derecha (90); pero que no sucede así considerándole como concreto, con tal que se varíe tambien la denominacion de las unidades de una manera conveniente. Así, el primero de los dos números 734707 metros y 37,4707 kilómetros, considerado como abstracto, es 1000 veces mayor que el segundo; mas si se le considera como concreto, se vé que la unidad á que se refiere es tambien 1000 veces menor que la de esta, y por consiguiente que los dos tienen un valor igual.

Particularidades de las medidas de peso, de superficie y cúbicas.

MEDIDAS DE PESO.

124. El *gramo* ha sido la unidad de peso en la formacion del sistema; pero se vió luego que por su pequeñez no llenaba las necesidades ordinarias del comercio, y se tomó el *kilógramo* por unidad usual. Por una razon análoga fué preciso aumentar el único múltiplo del *kilógramo*, el *miriá*gramo, con otros dos múltiplos mas, que son el *quintal métrico* y la *tonelada de peso*, de los que el primero, siguiendo la ley general de formacion, tiene 10 miriágramos ó 100 *kilógramos*, y el segundo 1000.

Nuestra ley de pesos y medidas adoptó tambien estas modificaciones, que afectan poco el mecanismo del sistema.

De manera que la unidad usual en estas medidas, sus múltiplos y divisores legales son los que á continuacion se espresan:

Múltiplos.	Tonelada de peso...	1000 kilóg.	ó sean..	1000.000 gramos.
	Quintal métrico....	100 kilóg.	ó sean..	100000 gramos.
	Miriágramo..........	10 kilóg.	ó sean..	10000 gramos.
Unidad usual KILÓGRAMO..				1000 gramos.
Divisores.	Hectógramo ...	0,1	de kilóg. ó sean.....	100 gramos.
	Decágramo.....	0,01	de kilóg. ó sean. ...	10 gramos.
	Gramo..........	0,001	de kilóg,	
	Decígramo.....	0,0001	de kilóg. ó sea.....	0,1 de id.
	Centígramo....	0,00001	de kílóg. ó sea....	0,01 de íd.
	Milígramo......	0,000001	de kilóg. ó sea...	0,001 de id.

El *quintal métrico* y la *tonelada de peso* se toman por unidades cuando se quieren espresar cantidades de un peso considerable. Cuando por el contrario haya que indicar pequeñas cantidades como las que hoy se espresan, por onzas, adarmes y granos, será la unidad el *gramo*.

DE SUPERFICIE.

125. En estas medidas solo se hizo mérito (120) del *área*, su múltiplo la *hectárea* y su divisor la *centiárea*, que como medidas agrarias, son suficientes, mas no para valuar en ellas toda clase de superficies. Para esto se puede formar una escala de medidas tan estensa como sea preciso, tomando por base las de longitud, como se indicó (120) y se vé á continuacion:

Múltiplos.	Miriámetro cuadrado (115)....	$10000^2=$	100000000	metros cuadrados.
	Kilómetro cuad...	$1000^2=$	1000000	metros cuadrados.
	Hectómetro cuad. ó hectárea.......	$100^2=$	100000	metros cuadrados.
	Decámetro cuad. ó área...........	$10^2=$	100	metros cuadrados.
Uni.	Met. cuad. ó centiá..	$1^2=$	1	id. ó sean 100 decím. id.
Divisores.	Decímetro cuad...	$0,1^2=$	0,01	de id. ó sean 100 centí. id.
	Centímetro cuad..	$0,01^2=$	0,0001	de id. ó sean 100 mili. id.
	Milímetro cuad....	$0,001^2=$	0,000001	de id.

De lo dicho en el número 115 y de lo que aparece en el cuadro presente, se infiere que los múltiplos de las unidades de superficie van siendo de 100 en 100 veces mayores y los divisores de 100 en 100 veces menores; de modo que el *miriámetro cuadrado* tiene 100 *kilómetros cuadrados*, este 100 *hectómetros* tambien *cuadrados* etc.: el *metro cuadrado* 100 *decímetros cuadrados*, este 100 *centímetros*, etc. De donde resulta igualmente que todos los múltiplos se deben escribir con dos cifras (esceptuando el superior que puede llevar una sola), y los divisores con otras dos cada uno. Así, 18 kilómetros cuadrados, 3 decámetros cuadrados, 25 metros cuadrados y 9 decímetros, tambien cuadrados, se escribirán 18000325,09 metros cuadrados.

Recíprocamente 457,65 áreas equivalen á 4 hectómetros cuadrados ó hectáreas, 57 decámetros cuadrados ó áreas y 65 metros cuadrados ó centiáreas (*).

Si, pues, el número de cifras decimales fuese impar se le agregará un cero. De este modo, para leer el número 27,5 metros cuadrados, se le añade un cero; y 27,50 metros cuadrados representa 27 metros cuadrados y 50 decímetros, tambien cuadrados.

El miriámetro y kilómetro cuadrado, pueden tomarse por unidad en el caso de tener que espresar superficies de grande estension, como la de toda la tierra, la de un reino, etc. Cuando por el contrario, se quieren espresar superficies de corta estension, el decímetro, el centímetro ó el milímetro cuadrados, serán la unidad.

CÚBICAS.

126. Al ocuparnos de estas (120), no se hizo mérito de ningun múltiplo del metro cúbico, por haberse omitido en nuestra ley de pesos y medidas; mas su formacion puede ser conveniente en el caso de que sea preciso espresar volúmenes de considerable estension.

Tomando por base las medidas de longitud (119) puede completarse el cuadro de estas medidas como á continuacion aparece:

(*) Por lo dicho se vé claramente que no son una misma cosa miriámetro, kilómetro, hectómetro y decámetro *cuadrados*, que decenas de millar, millares, centenas y decenas de metro *cuadrado*, ni tampoco decímetro, centímetro y milímetro *cuadrados*, que la décima, centésima y milésima parte del metro cuadrado.

Múltiplos.	Miriámetro cúbico (116)....	10000^3=	1000000000000 metros cúbicos
	Kilómetro cúb...	1000^3=	1000000000 metros cúbicos
	Hectómetro cúb.	100^3=	1000000 metros cúbicos
	Decámetro cúb..	10^3=	1000 metros cúbicos
Unid. us.	Metro cúb.	1^3=	1 id. ó sean 1000 decí. id.
Divisores.	Decímetro cúb.....	$0,1^3$=	0,001 de id. ó 1000 centí. id.
	Centímet. cúb....	$0,01^3$=	0,000001 de id. ó 1000 milí. cúb.
	Milímetro cúb....	$0,001^3$=	0,000000001 de id.

De lo que precede y de lo dicho en el número 116 se deduce que los múltiplos de las medidas cúbicas van siendo de 1000 en 1000 veces mayores, y los divisores de 1000 en 1000 veces menores; de modo que el *miriámetro cúbico* tiene 1000 *kilómetros cúbicos*, este 1000 *hectómetros cúbicos* etc.: el metro cúbico 1000 *decímetros cúbicos*, el *decímetro cúbico* 1000 *centímetros cúbicos* etc. De donde resulta igualmente que todos los múltiplos se deben escribir con tres cifras, (escepto el de especie superior, que puede llevar una ó dos) y los divisores con otras tres cada uno (*).

Así, 25 hectómetros cúbicos, 6 decámetros cúbicos, 146 metros cúbicos y 18 decímetros cúbicos se escribe 25006146,018 metros cúbicos.

Recíprocamente 57003,419 hectómetros cúbicos equivale á 57 kilómetros, 3 hectómetros, y 419 decámetros cúbicos.

Si pues el número de cifras decimales no fuese múltiplo de 3 deberá completarse con uno ó dos ceros para que lo sea.

(*) Se vé, pues, que miriámetro, kilómetro, hectómetro y decámetro cúbicos no significan respectivamente 10.000, 1000, 100 y 10 metros *cúbicos*; ni tampoco decímetro, centímetro y milímetro *cúbicos* significan 0,1, 0,01, 0,001 de metro cúbico.

De este modo, para leer el número 785,46 metros cúbicos, se le añade un cero; y 785,460 metros cúbicos, representa 785 metros cúbicos y 460 decímetros cúbicos.

El miriámetro, el kilómetro, el hectómetro y el decámetro cúbicos pueden tomarse por unidad cuando quieren espresar volúmenes de grande estension, como el de el sol, el de la tierra, el de las aguas del mar, el de una montaña, etc. Cuando por el contrario se quieran espresar volúmenes de pequeña estension, el decímetro, el centímetro, ó el milímetro cúbicos serán la unidad.

ADVERTENCIA FINAL.

127. El artículo 9.° de nuestra ley de pesos y medidas autoriza el uso de patrones que sean el doble, la mitad ó el cuarto de las unidades legales, mas esto nada complica el sistema, porque fácilmente se comprende que el *doble metro* serán 2 metros; el *medio metro* 5 décimos de metro ó sean 5 decímetros; y el *cuarto de metro* 25 centésimas de metro ó lo que es igual 25 centímetros, pudiendo decirse otro tanto de las demás unidades legales.

ARTÍCULO IV.

Sistema monetario (*).

128. En este sistema la unidad usual es el *real*: sus múltiplos y divisores son los que á continuacion se espresan (**):

Múltiplos..	Doblon de Isabel..	100 reales.
	Escudo............	10 reales.
Unidad usual.......	REAL.	
Divisores..	Décimo ó décima.	0,1 de id.
	Céntimo..........	0,01 de id.

(*) Ninguna unidad del sistema monetario depende directamente del *métrico*. La moneda de plata que representa el *real* pesa próximamente 1,315 gramos.

(**) Las demás monedas que hoy circulan servian solo para facilitar los cambios.

Como el *escudo* es la decena de real, el *doblon* la centena, el *décimo* la décima parte y el *céntimo* la centésima de real; cuando hubiéremos de escribir reales con sus múltiplos y divisores, se hará en la forma de números decimales. Así, 7 doblones, 3 escudos, 8 reales, 4 décimos y 9 céntimos que siempre se espresan por 738 reales y 49 céntimos, se escriben 738,49 reales.

Se puede cambiar de unidad de la misma manera que en el sistema métrico (123), y solo cuando sea preciso cambiar la unidad usual en *escudos* ó *doblones* se hará uso de estos dos nombres.

PROBLEMAS

que facilitan la inteligencia de los sistemas métrico y monetario decimales, y demuestran las ventajas que ofrecen.

129. 1.° Un comerciante compró cuatro piezas de tela; la primera de 63,4 metros, la segunda de 209,5 id., la tercera de 100 id. y la cuarta de 37,85 id., y desea saber el número de metros que las cuatro piezas componen.

1.ª pieza.	63,4	metros.
2.ª id.	209,5	
3.ª id.	100	
4.ª id.	37,85	
Resultado. .	410,75	

2.° En un terreno labrantío de 32,07 áreas, fué preciso destinar para edificar casa de labor 97,31 metros cuadrados, se desea saber cuánto terreno queda para cultivo.

Aquí hay que cambiar las unidades de uno de los dos modos siguientes:

	32,0700 áreas	3207,00 metros cuadrados.
	0,9731	97,31
Resultado.	31,0969 áreas, ó sean	3109,69 metros cuadrados.

3.° Se compraron 3,017 hectólitros de vino á razon de 0,8 de real de litro ¿cuánto importaron?

En este ejemplo hay que reducir los hectólitros á litros, ó deducir del valor del litro el del hectólitro, como se vé á continuacion:

	301,7 litros	3,017 hectólitros.
	0,8 reales	80 reales.
Resultado.	241,36 reales ó	241,360 reales.

4.° Por trasportar 305 toneladas de peso de un género cualquiera, llevaron 829,5 reales ¿cuánto importó el trasporte de cada tonelada?

El problema se resuelve dividiendo 829,5 reales por 305, como aparece á continuacion:

829,5	305
219 5	2,71
6 00	
2 95	

Resultado.... 2,72 reales (85, obs. 2.ª).

ARTÍCULO V.

Comparacion del antiguo y nuevo sistema de pesos y medidas.

130. Las ventajas mas notables del sistema métrico decimal sobre el antiguo son las siguientes:

1.ª En el primero hay una sola medida de capacidad para áridos y para líquidos, al mismo tiempo que en el segundo hay dos, sin motivo que justifique esta duplicidad.

2.ª Las diferentes unidades del nuevo sistema dependen unas de otras, de modo que si alguna de ellas por el transcurso del tiempo sufre alguna alteracion, se calculará otra por medio de cualquiera de las demás, esactamente igual á la primitiva; no sucediendo otro tanto en el sistema antiguo, donde la inconexion entre las diferentes unidades hace inposible la resolucion de igual poblema.

3.ª Las medidas del sistema métrico decimal tienen un tipo invariable en la naturaleza, de modo que aunque todas variasen de valor, la lonjitud del cuadrante del meridiano bastaria para determinar otras, sin diferencia apreciable, iguales á las primitivas.

4.ª Los múltiplos y divisores en el sistema nuevo se forman de una manera idéntica en cada clase de medidas, multiplicando la unidad por 10, por 100 ó por 1000 para obtener los primeros, y dividiéndola por iguales números para obtener los segundos; cuando en el sistema antiguo la ley de formacion es tan irregular como arbitraria y difícil por lo tanto de conservar en la memoria.

5.ª Acomodándose la formacion del sistema métrico decimal á la numeracion de este nombre, el cálculo con tales medidas es facilísimo, comparado con el de los números complejos á que da lugar la irregularidad entre los múltiplos y divisores del sistema antiguo.

Compárese la resolucion de los problemas de números espresados en forma decimal con los análogos de números complejos, y de esta comparacion se deducirá la inmensa ventaja que bajo este punto de vista ofrece el primero de estos sistemas sobre el segundo.

COMPLEMENTO

DE LA ARITMÉTICA ELEMENTAL.

CAPÍTULO PRIMERO.

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS.

ARTICULO PRIMERO.

Numeros primos.

131. *Se llama* NUMERO PRIMO, Ó FACTOR SIMPLE, *aquel número entero que solo es divisible por si mismo y por la unidad.*

Los números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, etc., son primos.

Se llama NUMERO COMPUESTO Ó FACTOR COMPUESTO *al que es divisible por algun otro número entero además de serlo por si mismo y por la unidad.*

132. Propongámonos averiguar si el número 127, por ejemplo, es ó no primo.

Ningun número es divisible por otro mayor que su mitad; pues el cociente seria menor que 2 y por consiguiente inesacto, á no ser cuando el número se divide por sí mismo. Luego solo hay que ensayar la division del número dado por los enteros menores que su mitad. De estos pueden omitirse los divisores compuestos, una vez que no siendo 127 divisible por 2, 3, 5, 7, etc., no puede serlo por los compuestos de ellos; pues si lo fuese por alguno, por ejemplo 6, lo seria tambien por los factores simples 2 y 3 de que este está formado (61, cor.); lo que es contra lo que manifiestan las operaciones que se suponen practicadas.

Luego, para averiguar si 127 es ó no primo, basta dividirle por los primos sucesivos 2, 3, 5, 7, etc. menores que su mitad.

No siendo 127 divisible por 2, por 3 ni por 5, ensayaremos la division por 7, por 11, y por 13, y veremos que ninguno dá cociente esacto. Ahora se observará que el número dado dividido por 13 dá por cociente entero 9, número menor que el divisor, y que este cociente será con mayor razon menor que el divisor cuando este, sea primo ó no esceda al 13. Mas si en alguna de las divisiones de 127 por un número mayor que 13, el cociente fuese esacto, como en toda division esacta el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor (49), 127 seria divisible por dicho cociente menor que 13, lo que es absurdo.

Luego si dividiendo 127 por los números primos 2, 3, 5, etc, menores que 13, resulta en esta division un cociente menor que el divisor; se puede asegurar que el número propuesto es primo.

Generalizando el procedimiento empleado en este caso, tendremos la siguiente regla:

Para averiguar si un número cualquiera es ó no primo, se divide sucesivamente por los primos 2, 3, 5, 7, etc., *y si, no omitiendo ningun divisor primo intermedio, se llega sin hallar cociente esacto á un cociente entero menor que el* *divisor; el número dado será primo: en el caso contrario no lo será.*

133. *Se llaman números primos entre si, los que no tienen mas divisor comun que la unidad.*

Los números 8 y 15 son primos entre sí.

Corolario 1.° *Si un número primo no divide á otro cualquiera, los dos son primos entre si.*

Porque como el primo solo es divisible por sí mismo, sino divide al otro, no pueden tener mas divisor comun que la unidad.

Así, 13 y 32 son primos entre sí.

Corolario 2.° *Dos números primos son primos entre si.*

ARTÍCULO II.

Máximo comun divisor.

134. MAXIMO COMUN DIVISOR *de dos ó mas números es el mayor número divisor de todos ellos* (48).

El máximo comun divisor de 12 y 18 es 6; el de 9, 18 y 27 es 9.

135. Teorema 1.° *Si un número divide exactamente al minuendo y sustraendo, divide tambien al resto.*

Porque cada término de la sustraccion es igual al divisor multiplicado por el cociente (que es entero por hipótesis); luego la diferencia será igual al divisor multiplicado por la diferencia de los cocientes enteros; luego dicha diferencia dividida por el divisor dá un cociente exacto.

Así, siendo divisibles los números 56 y 24 por 8, la diferencia lo es igualmente: $56-24=7\times8-3\times8=(7-3)\times8=4\times8$; luego el cociente de la diferencia por el divisor es 4.

Corolario 1.° *Si un número divide exactamente á otros* *dos, divide tambien el resíduo de la division del mayor por el menor.*

Porque el resíduo es la diferencia entre el dividendo y el producto del cociente entero por el divisor, y siendo el divisor por hipótesis divisible por el número dado, dicho producto, que es un múltiplo del divisor, tambien lo será (61, corol.); luego minuendo y sustraendo son divisibles por un mismo número; luego tambien lo será la diferencia.

Siendo 42 y 15 divisibles por 3 el resto 12 de la division del primero por el segundo lo será igualmente; porque $42-15\times2=12$ (49); y siendo 42 y 15 divisibles por 3, como 15×2 lo es tambien, la diferencia 12 tiene que serlo, segun el teorema.

Recíprocamente. *Si un número divide exactamente al divisor y al resíduo, divide tambien al dividendo.*

Porque el dividendo es igual al producto del cociente entero por el divisor mas el resíduo; y siendo estos dos sumandos divisibles por un mismo número, la suma, que es el dividendo (49), lo será tambien (61).

Tomando el ejemplo anterior se tiene $42=15\times2+12$; sí, pues, 3 divide á 12 y á 15; dividirá á 15×2 (61 corol.), y por consiguiente tambien á 42.

Corolario 2.° *Si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro no divide tampoco á la suma.*

Porque como un sumando es la diferencia entre la suma y el otro sumando (34), si divide á estos dos últimos dividirá al primero, segun el teorema, lo que es contra la hipótesis.

Si 3 divide á 9 y no divide á 5, no puede dividir á la suma 14, porque si la dividiere, como $14-9=5$, dividiria tambien al sumando 5, lo que es contra la hipótesis.

Observacion. De este corolario se deduce con facilidad que un número no es divisible por 2 cuando no termina en 0 ó en cifra par, por 5 cuando no termina en 0 ó en 5, por 3 cuando la suma de los valores absolutos no es 3 ni múltiplo de 3.

136. Propongámonos determinar el *máximo comun divisor* de 42 y 15.

Es evidente que el máximo comun divisor de dos números no puede esceder al menor de ellos; y como todo número es divisible por sí mismo, si 15 divide á 42 será 15 el número buscado.

Ejecutando la division el cociente entero es 2 y quedan de resíduo 12; luego 15 no es el máximo comun divisor de estos dos números.

Ahora el máximo comun divisor de 42 y 15 divide tambien al residuo 12 (135, cor. 1.°), luego no puede ser mayor que el máximo comun divisor de 15 y 12.

Por otra parte el máximo comun divisor de 15 y 12 divide tambien á 42 (135, rec.); luego tampoco puede ser mayor que el máximo comun divisor de 42 y 15.

De donde se infiere que el máximo comun divisor de 42 y 15 es igual al máximo comun divisor de 15 y 12, ó generalizando que *el máximo comun divisor del dividendo y divisor es igual al máximo comun divisor de divisor y resíduo.*

Esto supuesto hallemos el máximo comun divisor de 15 y 12, para lo que discurriendo como antes, dividiremos 15 por 12, el cociente entero es 1 y el resíduo 3; luego 12 no es el máximo comun divisor pedido.

Mas como el máximo comun divisor de dividendo y divisor es igual al de divisor y resíduo hallaremos el mayor divisor comun de 12 y 3; y como 12 entre 3 dá cociente exacto, resulta que 3 es *el máximo comun divisor* buscado.

De este procedimiento aplicable á cualquiera otro caso se deduce la siguiente regla:

Para hallar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor por el menor, el menor por el primer residuo, este por el segundo y así sucesivamente hasta hallar cociente esacto, en cuyo caso el último divisor es el máximo comun divisor pedido.

Lo operacion se dispone de este modo:

42	15	12	3
12	2)	1)	4
	3	0	

Donde se vé que *el máximo comun divisor* de 42 y 15 es 3.

Ejemplo 2.° Hallar el máximo comun divisor de 462 y 210.

462	210	42
42	2)	5
	0	

Resultado: 42.

3.° Determinar el máximo comun dívisor de 78 y 35.

78	35	8	3	2	1
8	2)	4)	2)	1)	2
	3	2	1	0	

Resultado 1; luego los números dados son primos entre sí (133).

Observaciones. 1.ª Cuando en el curso de la operacion un divisor sea primo, y no dé cociente esacto, no hay necesidad de continuarla porque los números dados son primos entre sí (133, cor. 1.°).

Así que en el ejemplo anterior, visto que el 3 no divide al 8, ya se puede asegurar que 78 y 35 son primos entre sí.

2.ª Haciendo aplicacion de lo dicho en el corolario primero del número 135 al último ejemplo, se verá que si un número divide á 78 y 35 divide tambien el residuo 8; si divíde á 35 y 8 divide al residuo 3; si divíde á 8 y á 3 divide al residuo 2 y así sucesivamente hasta el último residuo, y como este es segun la regla el máximo comun divisor de los dos números, é igual raciocinio puede hacerse con cualquiera otro ejemplo, resulta que

Si un número divide á otros dos, divide tambien al máximo comun divisor de estos.

ARTÍCULO III.

Descomposicion de un número en factores simples.

137. Teorema 1.º *Si se multiplican dividendo y divisor de una division por un número entero cualquiera; el cociente entero no varia y el resto queda multiplicado por el mismo número.*

En efecto, sea 25 el dividendo, 7 el divisor: el cociente entero será 3 y el residuo 4. Se tendrá, pues, $\frac{25}{7}=3+\frac{4}{7}$; multiplicando los dos términos de estos quebrados por 6, por ejemplo, no variarán de valor (58,6.º) y resultará $\frac{25\times 6}{7\times 6}=3+\frac{4\times 6}{7\times 6}$, igualdad que se deduce en cualquiera otro ejemplo, y demuestra el teorema.

Corolario 1.º *Si dos números se multiplican por un entero, el máximo comun divisor de los dos primeros queda multiplicado por el último.*

Al contrario: *si dos números se dividen por un divisor comun, el máximo comun divisor de los dos primeros queda dividido por el mismo divisor comun.*

Porque multiplicando los dos números dados, el resíduo de la division del mayor producto por el menor queda tambien multiplicado por el mismo número, segun el teorema: el resíduo de la division del menor producto por el resíduo primero lo queda igualmente, y así en adelante hasta el último resíduo, que es el máximo comun divisor y queda tambien multiplicado por el mismo número. La segunda parte del corolario es una consecuencia necesaria de la primera.

Corolario 2.° *Si dos números se dividen por su máximo comun divisor, los cocientes son primos entre si.*

Porque dividiendo los dos números dados por su máximo comun divisor, este queda dividido por sí mismo conforme á la segunda parte del corolario anterior, dando por resultado 1; luego el máximo comun divisor de los cocientes es la unidad; luego son primos entre sí (133).

138. Teorema 2.° *Si un número entero divide á un producto de dos factores y es primo con uno de estos, dividirá al otro.*

Si 3 divide á 12×5 y es primo con el factor 5 dividirá á 12, por que el máximo comun divisor de 5 y 3 es 1: multiplicando por 12 á 5 y 3, el máximo comun divisor de 5×12 y 3×12 será $1\times12=12$ (137, cor. 1.°): ahora, 3 divide evidentemente á 3×12 y por hipótesis á 5×12: luego tambien dividirá á 12 máximo comun divisor de estos productos (136, obs. 2.ª).

Corolario 1.° *Si un numero primo divide al producto de varios factores, divide tambien á uno de estos.*

Sea 11 el número primo, $33\times46\times10\times18$ el producto, este producto se puede escribir como si tubiese dos solos factores, de este modo:

$$(33\times46\times10)\times18.$$

Si 11 no divide al factor 18 será primo con él, y dividirá al otro factor $33\times46\times10$.

Este producto ó factor puede espresarse por

$$(33\times 46)\times 10.$$

Si 11 no divide á 10, será primo con él, y dividirá al otro factor espresado por

$$33\times 46.$$

Por último, si 11 no divide á 46 dividirá á 33; luego 11 tiene que dividir á uno de los factores del producto dado, si dividia á este.

Corolario 2.° *Si un número primo divide á una potencia cualquiera de otro número, divide á este.*

Porque una potencia es el producto de un número por si mismo varias veces (46); luego si el número primo divide á este producto, dividirá tambien (138) á uno de sus factores ó sea el número dado.

Así dividiendo 5 á 20^3 dividirá 20; porque

$$20^3=20\times 20\times 20.$$

Corolario 3.° *Las potencias de dos números primos entre sí forman otros dos números tambien primos entre sí.*

Porque si las dos potencias tubiesen un divisor comun, este dividiria á los dos números dados, segun el corolario anterior, lo que es contra la hipótesis.

Así que siendo 8 y 9 primos entre sí, 8^5 y 9^4 lo son tambien; porque si 2, por ejemplo, dividiese á estas dos potencias, dividiria á 8 y 9; lo que es contra la hipótesis.

Corolario 4.° *Si un número es divisible por dos ó mas números primos entre sí dos á dos, es divisible por el producto de todos ellos.*

Porque el número dado es un múltiplo de este producto. Sí 1092 es divisible por 3, por 4 y por 7, es divisible tambien por $3\times 4\times 7$.

En efecto, siendo 1092 divisible por 3, se tendrá (49)

$$1092=364\times 3$$

Ahora, siendo 1092 divisible por 4, tambien lo seria el producto 364×3; y como 4 es primo con 3, dividirá el 364 segun el teorema; luego será:

$$364=91\times 4,\ \text{ó}\ 1092=91\times 4\times 3.$$

Por último, si 1092 es divisible por 7, $91\times 4\times 3$ lo sería igualmente; pero 7 es primo con 4 y con 3, luego dividiria segun el colorario primero á 91 y por consiguiente se tendrá:

$$91=13\times 7,\ \text{ó}\ 1092=13\times 7\times 4\times 3=13\times(7\times 4\times 3);$$

luego 1092 es un múltiplo de $3\times 4\times 7$; luego es divisible por este producto.

Observacion. Luego un número es divisible por 6 cuando lo sea por 2 y por 3: lo será por 12 cuando lo sea por 3 y por 4 etc., etc.

139. Propongámonos descomponer á 126 en factores simples.

126 es divisible por 2 (62); luego se tendrá (49):

$$126=63\times 2$$

63 es divisible por 3 (63); luego resultará igualmente:

$$63=21\times 3,\ \text{y}\ 126=21\times 3\times 2.$$

21 es otra vez divisible por 3; luego tambien se tendrá:

$$21=7\times 3,\ \ \text{y}\ \ 126=7\times 3\times 3\times 2=7\times 3^2\times 2\ (49).$$

Como el último cociente es número primo, se ha terminado la operacion.

Luego 126 descompuesto en factores primos es $7\times 3^2\times 2$.

De este procedimiento aplicable á cualquiera otro ejemplo se deduce la siguiente regla:

Para descomponer un número en factores simples, se divide el número dado por uno de sus divisores primos; el cociente se vuelve á dividir por uno de sus divisores simples, y así sucesivamente hasta llegar á un cociente que sea número primo, el cual se dividirá por sí mismo. Los divisores empleados son los factores simples del número propuesto, y este es igual al producto de todos ellos.

Conviene, para mayor facilidad, que se elijan en primer lugar por divisores los números primos mas sencillos, luego los superiores inmediatos y así en adelante.

La operacion suele ordenarse de este modo:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Luego $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

Otro ejemplo. Descompóngase el número 780 en factores simples:

$$\begin{array}{r|l} 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Luego $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

ARTÍCULO IV.

Mínimo comun múltiplo.

140. *Llámase* MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO *de varios números el menor número divisible por todos ellos.*

El mínimo comun múltiplo de 30 y 20 es 60; el de 8, 12 y 9 es 72.

141. Teorema. *Un número no admite dos descomposiciones distintas en factores simples.*

La diversidad puede consistir: 1.° en que una descomposicion tenga algun factor que no haya en la otra: 2.° en que un mismo factor esté repetido mas veces, ó tenga mayor esponente en una que en otra descomposicion.

Supongamos que $780=2^2\times 4\times 5\times 13$ (139) en otra descomposicion admitiese el factor 7; en tal caso dividiendo 7 á 780 dividiria tambien á uno de los factores del producto $2^2\times 3\times 5\times 13$ (138, cor. 1.°); lo que es imposible porque es primo con cada uno de ellos, incluso 2^2. (138, cor. 3.°)

Supongamos que $780=2^2\times 3\times 5\times 13$ (139) tuviese en otra descomposicion 3^2, es decir que fuese, por ejemplo, $780=2^2\times 3^2\times 5\times 13$: de estas dos igualdades resultaria:

$$2^2\times 3^2\times 5\times 13=2^2\times 3\times 5\times 13;$$

dividiendo por 3 los dos miembros de esta igualdad, se convertiría en

$$2^2\times 3\times 5\times 13=2^2\times 5\times 13;$$

el primer miembro es divisible por 3; luego el segundo tambien; luego 3 divide á uno de los factores del producto $2^2\times 5\times 13$, lo que es absurdo.

Luego un número no puede admitir dos descomposiciones distintas en factores simples.

Corolario. *Un número no es divisible por otro si no contiene todos los factores simples de este, repetido cada uno al menos tantas veces como se halla en el divisor.*

Pues de lo contrario el dividendo admitiria dos descomposiciones distintas en factores simples.

Supongamos que 90, que es igual á $5\times3^2\times2$, fuese divisible por 21, que es igual á 7×3: en tal caso (61, cor.)

$$90=7\times3\times\text{cociente}.$$

En la multiplicacion del cociente por 7×3, el factor 7 no puede desaparecer; luego el 90 contendria entonces un factor 7 que no entra en la primera descomposicion; luego admitiría dos descomposiciones diferentes en factores simples; lo que es absurdo, segun el teorema.

Lo mismo se demuestra que el 90 no puede ser divisible por 12 donde se halla el factor 2^2.

Observacion. Fundándonos en este corolario y en el 4.° del teorema 2.° número 138, podríamos deducir una regla para determinar todos los factores ó divisores compuestos de un número cualquiera.

142. Propongámonos determinar el mínimo comun múltiplo de 20, 12, 70 y 36.

El número que sea divisible por 36, lo será tambien por 12 (61, cor.); luego podemos prescindir de este número en la determinacion del mínimo comun múltiplo.

Los números 20, 70 y 36 descompuestos en factores simples, dan (139): $20=2^2\times5$» $70=2\times5\times7$» $36=2\times3$.

Un número será divisible por 20 si contiene á lo menos á los factores 2^2 y 5, que son primos entre sí (133), lo será por igual razon por 70 si contiene á lo menos á los factores 2, 5 y 7, lo será por la misma razon por 36 si contiene á lo menos á los factores 2^2 y 3^2; luego el número $2^2\times3^2\times5\times7$, que contiene todos los factores indicados es divisible por 20, 70 y 36, y por lo mismo por 12 tambien; luego $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es un múltiplo de todos los números dados.

Otro número que no contenga á los factores 2^2, 3^2, 5 y 7 á lo menos con los mismos esponentes no es divisible á la vez por 20, 70, 36 y 12 (141, cor.); luego $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es el menor entre los infinitos números que pueden concebirse divisibles por 20, 70, 36 y 12; luego $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ es el mínimo comun múltiplo buscado.

Del procedimiento empleado en este caso se deduce la siguiente regla:

Para determinar el mínimo múltiplo comun á varios números se descomponen estos en sus factores simples, omitiendo aquellos que sean divisores de otros, y se forma un producto con los diferentes factores simples poniendo á cada uno de estos el mayor esponente que lleve en las descomposiciones verificadas.

Otro ejemplo. Sea hallar el mínimo comun múltiplo de 40, 16, 64 y 35.

Descomponiendo el 40, 64 y 35 en factores simples, puesto que el 16 se omite por ser divisor de 64, tendremos (139).

$$40 = 2^3 \times 5, \quad 64 = 2^6, \quad 35 = 5 \times 7.$$

Luego el mínimo comun multiplo será:

$$2^6 \times 5 \times 7 = 2240$$

Observacion. Si los números dados fuesen primos entre sí dos á dos, el mínimo comun múltiplo sería igual al producto de todos ellos. Así el mínimo comun múltiplo de 7, 8, 13 y 15 es $7 \times 8 \times 13 \times 15$.

CAPÍTULO II.

APLICACIONES DEL MAXIMO COMUN DIVISOR y mínimo comun múltiplo á la teoría de los quebrados ordinarios.

ARTÍCULO I.

Reduccion de quebrados á su espresioa mas sencilla.

143. *Se dice que un quebrado está convertido en su espresion mas sencilla, ó que es irreducible, cuando no puede espresarse por otro de menores términos.*

Corolario. *Un quebrado irreducible no puede ser igual á un número entero.*

Porque si lo fuese, el denominador dividiria esactamente al numerador; mas como el denominador se divide tambien asímismo, los dos términos del quebrado dado serian divisibles por un mismo número; luego el quebrado propuesto no seria irreducible; lo que es contra la hipótesis.

Aunque la regla dada (65) para simplificar un quebrado es general y bastante para convertirle en irreducible, no siempre por su medio se consigue esto con facilidad, porque no la hay en conocer cuando ambos términos son divisibles por 7, 11, 13, etc.; por esta razon vamos á esponer otra que no está sujeta á los mismos inconvenientes.

Esta regla es una consecuencia del siguiente

144. Teorema. *Un quebrado cuyos dos términos son primos entre sí es irreducible.*

Si el quebrado $\frac{8}{9}$ tiene numerador y denominador primos entre sí, no puede ser igual á otro de menores términos, por ejemplo $\frac{5}{7}$.

Porque si $\frac{8}{9}=\frac{5}{7}$, reduciendo estos quebrados á un comun denominador (59) resultaria:

$$\frac{8\times7}{9\times7}=\frac{5\times9}{9\times7}$$

Teniendo estos quebrados un comun denominador y siendo iguales, los numeradores lo serán tambien; luego

$$8\times7=5\times9.$$

Ahora 8 divide al primer miembro de esta igualdad, luego tambien dividirá al segundo; mas por hipótesis es primo con el factor 9, luego dividirá al otro factor 5 (138); pero esto es imposible, pues se supone que 5 es menor que 8; luego $\frac{8}{9}$ no puede representarse por otro quebrado de menos términos; luego es irreducible.

Corolario. *Para reducir un quebrado á su espresion mas sencilla se dividen sus dos términos por el máximo comun divisor de los mismos.*

Porque los cocientes obtenidos son primos entre sí (137, cor. 2.°), y por lo tanto el quebrado resultante es irreducible.

Ejemplo: Redúzcase el quebrado $\frac{130}{195}$ á su espresion mas sencilla.

El máximo comun divisor de 195 y 130 es 65, dividiendo por él los dos términos del quebrado propuesto resulta $\frac{2}{3}$, que es el quebrado irreducible equivalente al dado.

ARTÍCULO II.

Reduccion de quebrados al menor denominador comun posible.

Las reglas espuestas (59) para reducir quebrados á un comun denominador producen muchas veces fracciones demasiado complicadas, y por eso vamos á esponer otra por medio de la cual se obtenga el menor denominador comun posible.

Como fundamento de ella demostraremos el siguiente

145. Teorema. *Si un quebrado irreducible es equivalente á otro, el denominador de este es múltiplo del denominador de aquel.*

Si $\frac{3}{7}=\frac{39}{91}$, 91 será un múltiplo de 7.

Reduciendo estos quebrados á un comun denominador (59) resultará:

$$\frac{3\times 91}{7\times 91}=\frac{39\times 7}{91\times 7}.$$

Teniendo estos quebrados un comun denominador y siendo iguales, los numeradores lo serán tambien; luego

$$3\times 91=39\times 7.$$

Ahora 7 divide al segundo miembro de esta igualdad, luego dividirá al primero; pero es primo, por hipótesis con el factor 3, luego dividirá al otro factor 91 (138); luego 91 es un múltiplo de 7.

Observacion. Lo mismo se hubiera demostrado que el numerador 39 es múltiplo del numerador 3, y tambien que es el mismo múltiplo de 3, que 91 de 7, ó lo que es igual que *los dos términos del quebrado segundo son equimúltiplos de los dos términos del quebrado irreducible* (*).

(*) En efecto dividiendo los dos términos de la igualdad evidente $39\times 91=39\times 91$ por los de la igualdad demostrada $3\times 91=39\times 7$, resultaría:

$$\frac{39\times 91}{3\times 91}=\frac{39\times 91}{39\times 7}$$

Suprimiendo el factor 91 en los dos términos del primer quebrado y 39 en los del segundo, los quebrados no varian de valor (58—7.°) y resulta:

$$\frac{39}{3}=\frac{91}{7},$$

igualdad que demuestra la proposicion.

Corolario. *Si un quebrado irreducible es equivalente á otro tambien irreducible, los dos términos de este son respectivamente iguales á los dos términos de aquel.*

146. Propongámonos reducir los quebrados $\frac{11}{12}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{15}{20}$ y $\frac{12}{21}$ al menor denominador comun posible.

Desde luego observaremos que el segundo y cuarto de estos quebrados pueden espresarse por otros mas sencillos; puesto que los dos términos $\frac{6}{16}$ son divisibles por 2, y los de $\frac{12}{21}$ por 3; y pudiendo suceder que estos factores 2 y 3 que innecesariamente complican á dichos quebrados, compliquen tambien al denominador comun, como evidentemente sucede con el 2, los reduciremos de antemano á su mas sencilla espresion; con lo que los quebrados propuestos se convertirán en

$$\frac{11}{12}, \frac{3}{8}, \frac{13}{20}, \frac{4}{7}.$$

Ahora, los quebrados que vamos á determinar han de tener un comun denominador y deben ser además respectivamente equivalentes á los anteriores. Para que reunan esta condicion, es necesario, segun el teorema último, que el denominador comun que se obtenga sea múltiplo de todos los denominadores de dichos quebrados; luego el denominador comun no puede ser menor que el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados dados, reducidos á su mas sencilla espresion.

Hallemos, pues, el mínimo comun múltiplo de 12, 8, 20 y 7; el cual es 840 (142).

Dividiendo 840 por el denominador 12 del primer quebrado, el cociente será exacto y dará 70. Si los dos términos del primer quebrado se multiplican por 70, el quebrado resultante $\frac{770}{840}$ es equivalente al propuesto y tiene por denominador el mínimo comun múltipo.

Ejecutando iguales operaciones con los quebrados restantes se convertirán, el segundo en $\frac{315}{840}$, el tercero en $\frac{546}{840}$ y el cuarto en $\frac{480}{840}$.

Luego los quebrados $\frac{770}{840}$, $\frac{315}{840}$, $\frac{546}{840}$, y $\frac{480}{840}$, son equivalentes á los propuestos, tienen un denominador comun y este es el menor posible.

De este procedimiento se deduce la siguiente regla:

Para reducir varios quebrados al menor denominador comun posible, se reduce cada uno de ellos á su espresion mas sencilla; se halla el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados irreducibles, y este será el denominador comun. Para formar los numeradores, se multiplica el de cada quebrado irreducible por el cociente que resulta de dividir el mínimo comun múltiplo por el denominador del mismo quebrado.

Observacion. Si los denominadores de los quebrados irreducibles fuesen primos entre sí dos á dos, el mínimo comun múltiplo sería igual al producto de todos ellos (142, obs.), y la regla anterior produciria quebrados idénticos á los que resultan de la regla general del numero (59).

CAPÍTULO III.

REDUCCION DE QUEBRADOS ORDINARIOS á decimales y recíprocamente.

ARTÍCULO PRIMERO.

REDUCCION DE QUEBRADOS ORDINARIOS Á DECIMALES.

147. Ya se ha dicho (101, cor.) que *para convertir un quebrado ordinario en decimal equivalente, basta considerar á aquel como una division del númerador por el denominador, suponiendo despues del numerador una coma y á continuacion de esta los ceros que se quieran.*

Apliquemos esta regla á algunos ejemplos.

1.° Hallar la fraccion decimal equivalente á $\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 3{,}0 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Luego $\frac{3}{4}=0{,}75$.

2.° Reducir $\frac{5}{7}$ á quebrado decimal.

$$\begin{array}{r|l} 5{,}0 & 7 \\ \hline 10 & 0{,}71428571.... \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 3 & \end{array}$$

Luego $\frac{5}{7}=0{,}71428571....$

3.° Conviértase $\frac{8}{15}$ en quebrado decimal.

$$\begin{array}{r|l} 8{,}0 & 15 \\ \hline 50 & 0{,}533\ldots \\ 50 & \\ 5 & \end{array}$$

Luego $\frac{8}{15}=0{,}533\ldots$

Observacion. En el 1.er ejemplo el cociente resultó exacto; mas no ha sucedido lo mismo en el 2.° y 3.°, en los que la repeticion de los restos indica que no lo seria nunca por mucho que se prolongase la operacion.

En el caso de los dos últimos ejemplos se comprende que debiendo ser cada resto menor que el divisor, los restos deben repetirse, á lo mas, despues de ejecutar tantas divisiones parciales como unidades menos una tiene el divisor. Asi que en el ejemplo 2.° habiendo resultado los restos 1, 3, 2, 6, y 4, no podia menos de repetirse alguno de los anteriores ó el dividendo 5, como sucedió á la sesta division parcial.

Repitiéndose los restos en los cocientes inesactos, se repiten los dividendos parciales formados por ellos y por uno ó por mas ceros á la derecha; y siendo preciso que los dividendos se repitan, se repetirán tambien las cifras del cociente, formando asi *períodos* de una, dos ó mas cifras, *tantas á lo mas como unidades menos una tiene el divisor*.

De la observacion que precede se deduce la division de las fracciones decimales en exactas y periódicas.

148. *Se llama fraccion decimal* EXACTA *la que contiene un número limitado de cifras*, como 0,79.

Se llama fraccion decimal PERIÓDICA *aquella que contiene un número ilimitado de cifras, algunas de las que se repiten indefinidamente*, como 0,5333... y 0,714285714.....

El *periodo* lo forman las cifras que se repiten; en el primero de los ejemplos anteriores el periodo es 3, en el segundo 714285.

Las fracciones periódicas se subdividen en *puras ó simples y mistas. Se llama fraccion* PERIÓDICA PURA *aquella en que el periodo principia desde la coma*, como 0,4646....

Se llama fraccion periódica mista aquella en que el periodo no principia desde la coma, como 0,5333....

ARTÍCULO II.

Reduccion de quebrados decimales á ordiarios.

149. *Se llama* QUEBRADO GENERADOR Ó FRACCION GENERATRIZ *de otra fraccion decimal el quebrado ordinario de que la fraccion decimal provino, ó equivalente á esta.*

De modo que $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{8}{15}$ son respectivamente las fracciones generatrices de 0,75, 0,714285714..... y 0,533....

En la reduccion de un quebrado decimal á ordinario, ó sea en la determinacion de la fraccion generatriz de otra decimal dada, distinguiremos tres casos. 1.° *que la fraccion decimal sea exacta*, 2.° *que sea periódica pura*, 3.° *que sea periódica mista.*

150. Primer caso. *Para reducir una fraccion decimal exacta á fraccion ordinaria, se omite la coma, y el número que resulta se pone por numerador, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado* (89).

Así $0{,}37=\frac{37}{100}$, $0{,}048=\frac{48}{1000}=\frac{24}{500}=\frac{12}{250}=\frac{6}{125}$ $47{,}39=\frac{4739}{100}$

Observacion. El numerador del quebrado obtenido por la regla precedente no termina en cero, porque su última cifra es la última de la fraccion decimal, y si al fin de esta hubiese uno ó mas ceros se omitirian por inútiles antes de la reduccion (90, 1.°).

$$\text{Así } 0,570=0,57=\frac{57}{100}$$

Corolario. *Si una fraccion decimal es exacta, los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible son 2 y 5 ó uno de estos solamente, y el mayor esponente de 2 y 5 será igual al número de cifras decimales,*

El denominador de la fraccion generatriz es, segun la regla, la unidad seguida de ceros, y 10, 100, 1000, etc., no tienen mas factores simples que 2 y 5; al simplificar dicha fraccion no pueden aparecer nuevos factores, pero sí podrán desaparecer el 2 ó el 5; luego la primera parte del corolario es evidente

Los factores 2 y 5 se hallan en el denominador de la fraccion generatriz, antes de simplificarla, con un esponente igual al número de cifras decimales; por que el número de estas es igual al de ceros que acompañan á la unidad, segun la regla, y $10=2\times5$, $100=2^2\times5^2$, $1000=2^3,\times5^3$ etc. Por otra parte, no terminando el numerador en cero (obs. anter.), no es divisible por 10; luego los dos términos del quebrado solo pueden ser divisibles por uno de los factores 2 ó 5; luego el otro quedará despues de hecha la simplificacion con el mismo esponente que tenia antes de ella; esto es, con un esponente igual al número de cifras decimales.

151. *Segundo caso*. Este y el siguiente no pueden resolverse como el anterior; porque siendo la fraccion periódica indefinida, los dos términos de la fraccion ordinaria equivalente tendrian un número ilimitado de cifras.

Propongámonos, pues, hallar la fraccion generatriz de 0,454545. Tendremos *fraccion generatriz*=0,454545.

Multiplicando por 100 los dos miembros de esta igualdad, con lo que no se altera y equivale en el segundo á colocar la coma despues del primer periodo, resulta:

fraccion generatriz $\times 100 = 45,4545....$

Restando de esta igualdad la anterior; y advirtiendo que en la última la parte decimal tiene igual número de periodos que en la otra, puesto que en las dos es ilimitado, se tendrá:

fraccion generatriz $\times 99 = 45$;

De donde, partiendo por 99 los dos miembros, resulta:

fraccion generatriz $= \frac{45}{99}$,

ó $0,454545.... = \frac{45}{99} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$.

Del método empleado en este ejemplo que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la siguiente regla:

Para hallar el quebrado generador de una fraccion decimal periódica pura, ó para reducir esta á quebrado ordinario equivalente, se pone por numerador el periodo y por denominador tantos nueves como cifras tiene dicho periodo.

Así $0,142142... = \frac{142}{999}$; $0,66... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Corolario. *Si una fraccion decimal es periódica pura ninguno de los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible es* 2 *ni* 5.

Porque el denominador termina, segun la regla, en 9; luego no es divisible por 2 ni por 5 (135, obs.) antes de simplificar el quebrado resultante; y como la simplificacion no aumenta los factores de cada término del quebrado, sino que por el contrario los disminuye, tampoco lo será despues de convertido este en irreducible.

152. *Tercer caso*. Sea hallar el quebrado generador de la fraccion decimal 0,83535....

Tendremos:

fraccion generatriz =0,83535....

Multiplicando por 100 los dos términos de esta igualdad, con lo que no se altera y equivale en el segundo miembro á colocar la coma despues del primer periodo; resulta:

fraccion generatriz $\times$1000=835,35...

Multiplicando por 100 los dos miembros de la misma igualdad, con lo que tampoco se altera y equivale en el segundo á colocar la coma despues de la parte no periódica, se tiene:

fraccion generatriz $\times$100=8,3535....

Restando esta igualdad de la anterior, y advirtiendo que en la última la parte decimal tiene igual número de periodos que en la primera, puesto que en las dos es ilimitado, se tendrá:

fraccion generatriz $\times$990=835—8.

De donde, dividiendo los dos miembros por 990, resulta:

$$\textit{fraccion generatriz}=\frac{835-8}{990}$$

$$\text{ó}\quad 0{,}83535\cdots=\frac{835-8}{990}=\frac{827}{990}$$

Del procedimiento empleado en este ejemplo, que es aplicable á otro cualquiera, se deduce la regla siguiente:

Para hallar el quebrado generador de una fraccion decimal periódica mista, ó para reducir esta á quebrado ordinario equivalente, se pone por numerador la diferencia entre la parte no periódica y esta unida con el primer periodo y por denominador tantos nueves como cifras tiene el *periodo y despues de los nueves tantos ceros como cifras no periódicas haya.*

De modo que $0,533 = \frac{53-5}{90} = \frac{48}{90} = \frac{24}{45} = \frac{8}{5}$

Si en este caso ó en el anterior la fraccion decimal fuese mista, se considerará á los enteros unidos á la parte no periódica, ó formando esta, si la fraccion no la tiene, y queda el caso 3.°, advirtiendo solamente, que *despues de los nueves del denominador, no se pondrán mas ceros que los que correspondian por la parte no periódica que habia antes de unirle los enteros, ó ninguno si la fraccion era periódica pura.*

Así $5,733.... = \frac{573-57}{90}$

Porque $5,733... = 10 \times 0,5733.. = 10 \times \frac{573-57}{900} = \frac{573-57}{90}$

De igual modo $46,3535.... = \frac{4635-46}{99}$.

Porque $46,3535. = 100 \times 0,463535 = 100 \times \frac{4635-46}{9900} = \frac{4635-46}{99}$

Observacion. El numerador del quebrado propio obtenido por la regla precedente no termina en cero; porque su última cifra es la diferencia entre la última de la parte no periódica y la última del periodo, y estas dos cifras no pueden ser iguales, pues de serlo el periodo principiaria desde la última cifra inclusive de la parte no periódica. Si en la fraccion $0,3741515.... = \frac{37415-374}{99000}$, en que vemos que hay tres cifras no periódicas, se supone que las dos últimas cifras de la fraccion ordinaria equivalente son iguales, se convertirá en 0,375151.... ó en 0,374141..., donde la parte no periódica tiene solo dos cifras, contra lo supuesto.

Corolario. *Si una fraccion decimal es periódica mista, los factores simples del denominador de la fraccion generatriz irreducible son 2 y 5 ó uno de estos, y además algun otro factor distinto de ellos; y el mayor esponente de 2 y 5 es igual al número de cifras no periódicas.*

El denominador de la fraccion generatriz se compone de tantos nueves como cifras tiene el periodo, y despues de los nueves de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, luego puede descomponerse en dos factores, el primero es la unidad seguida de tantos ceros como lleva dicho número al fin, ó como cifras no periódicas hay, y el segundo formado por uno ó mas nueves. El primero de dichos factores (como $10=2\times5$,, $100=2^2\times5^2$,, $1000=2^3\times5^3$, etc.) es 2×5 elevado cada uno de estos factores simples á una potencia igual al número de cifras que tenga la parte no periódica; y no pueden tenerla mas elevada en el denominador, porque el segundo factor, en que suponemos descompuesto á aquel, formado por uno ó varios nueves, no es divisible por 2 ni por 5, y no contiene por lo tanto á ninguno de estos números primos. Ahora, como el numerador del quebrado no termina en cero (obs. anter.), no es divisible por 10; luego los dos términos del quebrado solo pueden ser divisibles por uno de los factores simples 2 ó 5; luego el otro quedará despues de hecha la simplificacion con el mismo esponente, igual al número de cifras no periódicas.

Resta solo demostrar que en el denominador hay algun otro factor distinto de 2 y 5. En efecto, si así no fuese, multiplicando el numerador de la fraccion generatriz por la unidad seguida de suficiente número de ceros, como este factor seria en tal caso múltiplo del denominador ó igual con él, la fraccion generatriz se convertiría exactamente en decimal, y por lo tanto seria el quebrado generador de una fraccion decimal exacta, contra la hipótesis.

ARTÍCULO III.

Casos en que un quebrado ordinario reducido á decimal produce fraccion exacta, periódica ó mista.

Las proposiciones recíprocas de los tres corolarios de las reglas precedentes son tambien ciertas, es decir, que

153. 1.ª *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible son 2 y 5 ó uno de estos solamente, la fraccion decimal equivalente será exacta; y el número de cifras decimales será igual al mayor esponente de 2 y 5.*

Si la fraccion decimal no fuese exacta, seria periódica pura ó mista.

Si la fraccion decimal equivalente fuese periódica pura los factores del denominador de la fraccion generatriz no serian 2 ni 5 (151, obs.) contra la hipótesis de la proposicion. Si fuese periódica mista, alguno de los factores del denominador de la fraccion generatriz seria diferente de 2 y 5 (152, cor.), lo que tambien es contra la misma hipótesis.

Luego la fraccion decimal equivalente es exacta.

Si el número de cifras decimales no fuese igual al mayor esponente de 2 y 5 seria mayor ó menor que dicho esponente.

Supongamos que el mayor esponente de 2 y 5 sea, por ejemplo, 4, y el número de cifras decimales 6; el mayor esponente de 2 y 5 del denominador de la fraccion generatriz irreducible seria en tal caso igual á 6, número de cifras decimales (150 cor.); lo que es contra la hipótesis, que acaba de hacerse. Luego el número de cifras decimales á que dá lugar un quebrado irreducible no puede ser mayor que el mayor esponente de 2 y 5, factores del denominador del mismo quebrado ordinario.

Lo mismo se demuestra que no puede ser menor; luego el número de cifras decimales tiene que ser igual al mayor esponente de 2 y 5.

154. 2.ª *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible no fueren 2 ni 5, la fraccion decimal equivalente será periódica pura; y el período tendrá tantas cifras á lo mas como unidades menos una tiene el denominador.*

La primera parte de esta proposicion se demuestra *ad absurdum* como la primera parte de la anterior: la segunda está demostrada (147, obs.).

155. 3.ª *Si los factores simples del denominador de un quebrado irreducible son 2 y 5 ó uno de estos y algun otro factor distinto de 2 y 5, la fraccion decimal equivalente será periódica mista; y el número de cifras no periódicas será igual al mayor esponente de 2 y 5.*

Esta proposicion se demuestra tambien de una manera análoga á la primera.

Ejemplos: Los quebrados $\frac{29}{50}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{18}{125}$, como son respectivamente iguales á $\frac{29}{5^2 \times 2}$, $\frac{3}{2^2}$ y $\frac{18}{5^3}$, dan fracciones males exactas; debiendo tener la primera dos cifras decidecimales, la segunda otras dos y la tercera tres.

Los quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{21}$ dan fracciones decimales periódicas puras, no pudiendo esceder el período de la primera de dos cifras y el de la segunda de veinte.

Los quebrados $\frac{8}{35}$, $\frac{17}{24}$ y $\frac{29}{150}$, como son respectivamente iguales á $\frac{8}{7 \times 5}$, $\frac{17}{2^3 \times 3}$ y $\frac{29}{2 \times 3 \times 5^2}$, dan fracciones decimales periódicas mistas; siendo el número de cifras de la parte no periódica de la primera una de la segunda tres y de la tercera dos.

CAPÍTULO IV.

ELEVACION A POTENCIAS Y ESTRACCION de raices de los números.

ARTÍCULO PRIMERO.

ELEVACION A POTENCIAS.

156. La elevacion de un número entero ó fraccionario á una potencia cualquiera se reduce segun la definicion de esta (45) á la multiplicacion del número dado por si mismo una ó mas veces. Conocidas, pues, las reglas de la multiplicacion de los números, la operacion indicada no puede ofrecer ninguna dificultad.

EJEMPLOS.

1.° $25^4 = 25 \times 25 \times 25 \times 25 = 625 \times 25 \times 25 = 15625 \times 25 \times = 390625$

2.° $130^2 = 130 \times 130 = 16900$

3.° $130^3 = 130 \times 130 \times 130 = 16900 \times 130 = 2197000$,

4.° $0,71^2 = 0,71 \times 0,71 = 0,5041$

5.° $0,71^3 = 0,71 \times 0,71 \times 0,71 = 0,5041 \times 0,71 = 0,357911$

6.° $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

7.° $\left(2\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{19}{7}\right)^3 = \frac{19^3}{7^3} = \frac{6859}{343}$

8.° $(2 \times 4 \times 5)^3 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \times 2 \cdot 4 \cdot 5 \times 2 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \times 4 \cdot 4 \cdot 4 \times 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot = 2^3 \times 4^3 \times 5^2$

De la naturaleza de la elevacion á potencias se deducen las siguientes consecuencias, comprobadas por los ejemplos precedentes.

1.ª *El cuadrado de un númeroque termina en ceros tiene duplo número de ceros que el dado: el cubo triplo número de ceros, etc.* (ejem. 2.° y 3.°)

2.ª *El cuadrado de un número decimal tiene duplo número de cifras decimales que el dado: el cubo triplo número de cifras decimales, etc.* (ejem. 4.° y 5.°)

3.ª *Para elevar un quebrado ordinario á una potencia cualquiera, se elevan numerador y denominador á la misma potencia.* (ejem. 6.°)

4.ª *Para elevar un número misto, se reduce á quebrado y y luego se eleva como este.* (ejem. 7.°)

5.ª *Las potencias de los números mayores que la unidad van siendo mayores á medida que el esponente de la potencia es mayor, y las de los números menores que la unidad van siendo menores cuando crece el esponente.* (ejem. 1.° 2.°, y 4.° 5.° 6.°

6.ª *Para elevar á una potencia un producto de varios factores, basta elevar cada factor á la misma potencia y luego multiplicar estas potencias entre si.* (*)

(*) Esta consecuencia es cierta aunque uno, varios ó todos los factores sean incomensurables; porque está fundada en la definicion de las potencias y en que *un producto no varia cualquiera que sea el órden de colocacion de sus factores*; y este teorema es cierto para los números enteros (39), para los quebrados ordinarios y números mistos (74, cor. 2.° y 3.°), para los decimales una vez que pueden reducirse esactamente á ordinarios (89), y por último para los números incomensurables, supuesto que el valor de estos se puede hallar en decimales tan aproximados como se quiera, segun se infiere de los números 167 (obs. 3.ª) y 176 (obs. 3.ª); y aun seria fácil demostrarlo con todo rigor

ARTÍCULO II.

Estraccion de raices.

PRELIMINARES

157. SE LLAMA RAIZ DE CIERTO GRADO DE UN NUMERO *otro número que elevado á una potencia de igual grado produce el propuesto.*

RAIZ SEGUNDA Ó CUADRADA *de un número es otro número que elevado á la segunda potencia ó cuadrado produce el dado.*

La raiz cuadrada de 49 es 7; porque $7^2=49$.

RAIZ CÚBICA *de un número, es otro número cuyo cubo ó tercera potencia produce el primero.*

La raiz cúbica de 27 es 3; porque $3^3=27$.

La estraccion de raices se indica con este signo $\sqrt{}$ al que se da el nombre de *radical* entre cuyas ramas se coloca un número llamado *índice* ó *esponente de la raiz*, que indica el grado de esta; esceptuando la estraccion de la raiz cuadrada que se acostumbra á indicar con solo el signo radical omitiendo el indice 2 que le corresponde.

Así $\sqrt{64}$ indica la raiz cuadrada de 64; $\sqrt[3]{27}$ la raiz cúbica de 27, etc.

158. No todos los números enteros tienen raiz exacta en números tambien enteros; por que es evidente que no todos están formados por potencias exactas de otros.

Asi que, la $\sqrt{8}$ no es exacta; porque no hay ningun número entero que elevado al cuadrado produzca 8; $\sqrt[3]{12}$ tampoco lo es por una razon análoga.

Esto supuesto, *se llama* RAIZ ENTERA DE CIERTO GRADO DE UN NUMERO ENTERO *á la raiz exacta de la mayor potencia de igual grado contenida en el mismo número.*

Asi la raiz cuadrada entera de 8 es 2; porque siendo

$2^2=4$ y $3^2=9$, el mayor cuadrado contenido en 8 es 4, cuya raiz cuadrada es 2.

Por igual razon la raiz cúbica entera de 32 es 3.

Corolario. *La raiz entera de un número se diferencia de la verdadera en menos de una unidad.* Porque concretándonos al primero de los ejemplos anteriores, 8 esta comprendido entre 4 y 9, luego su raiz cuadrada estará tambien comprendida entre las raices cuadradas de estos dos números; luego será mayor que 2 raiz cuadrada del primero y menor que 3 raiz cuadrada del segundo; luego tomando á 2 por raiz cuadrada de 8 se comete un error menor que la unidad. Lo mismo podriamos demostrar en cualquier otro ejemplo.

Se llama RESIDUO DE LA RAIZ DE UN NÚMERO *á la diferencia entre dicho número y la potencia de igual grado de su raiz entera.*

Corolario. *El residuo mas una potencia de la raiz de igual grado que esta, componen evidentemente el número de que la raiz se estrajo.*

El resíduo de $\sqrt{7}$ es 3, porque $7-2^2=3$; y $2^2+3=7$.

159. Teorema 1.° *La diferencia entre la verdadera raiz de un número y su raiz entera, no puede espresarse exactamente por un quebrado ordinario ni decimal.*

Supongamos que sea $\frac{6}{9}$ lo que falta á 2 para ser la raiz verdadera de 8; en tal caso $2\frac{6}{9}$ seria dicha raiz.

Reduciendo el misto á quebrado y convirtiendo este en irreducible, sino lo fuese, tendríamos

$$2\frac{6}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$$

Luego $\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{8^2}{3^2}=8$; pero esta igualdad es absurda, pues siendo irreducible $\frac{8}{3}$ lo es tambien $\frac{8^2}{3^2}$ (138, cor. 3.°)

y siéndolo este no puede ser igual á un número entero (143, cor.).

Si la diferencia viniese espresada por un quebrado decimal; reduciéndole á ordinario, se tendria el absurdo anterior.

Como este raciocinio puede hacerse con otros números cualesquiera y con otra raiz de grado distinto, el teorema general es cierto.

Corolario. *La raiz de un número entero que no puede espresarse exactamente por otro entero, no puede espresarse tampoco por un misto ordinario, ni decimal.*

160. Teorema 2.° *La raiz de un quebrado irreducible en que uno de sus términos no tiene raiz exacta, no puede espresarse tampoco exactamente por otro quebrado.*

Supongamos que siendo el quebrado $\frac{27}{32}$ irreducible, y no teniendo 32 raiz cúbica exacta, se tenga sin embargo $\sqrt[3]{\frac{27}{32}}$ igual al quebrado $\frac{3}{4}$ tambien irreducible; entonces $\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{32}$. Mas estos dos quebrados son irreducibles, el primero por lo dicho (138, cor. 3.°) y el segundo por hipótesis; luego $4^3=32$ (145, cor.); luego 32 tiene raiz cúbica exacta, lo que es contra la hipótesis.

161. *Se llaman* NUMEROS IRRACIONALES Ó INCOMENSURABLES *á las raices de números que no las tienen exactas*; y se les dá este nombre porque no pudiendo espresarse por enteros ni por quebrados, no tienen relacion exacta con la unidad ni con parte alicuota de esta.

$$\sqrt{8},\ \sqrt[3]{12},\ \sqrt[3]{\frac{27}{32}} \text{ son incomensurables.}$$

162. Se ha visto (156, 6.ª) que $(2\times4\times5)^3=2^3\times4^3\times5^3$; de donde se infiere (157) que $2\times4\times5=$

$\sqrt[3]{2^3\times4^3\times5^3}$; luego la raiz cubica del producto; $2^3\times4^3\times5^3$ se halla estrayendo la de cada factor y multiplicándolas entre sí; y como el mismo raciocinio puede hacerse con otro ejemplo cualquiera, resulta que

Para estraer la raiz de un grado cualquiera de un producto de varios factores basta estraer la de igual grado de cada uno de dichos factores y multiplicar luego estas raices entre sí.

Corolario. *Si un número se multiplica por una potencia cualquiera de otro; la raiz de igual grado del primero queda multiplicada por el segundo.*

Si el número 15, por ejemplo, se multiplica por 10^2 la raiz cuadrada de 15 queda multiplicada por 10.

En efecto, segun el teorema, $\sqrt{15\times10^2}=\sqrt{15}\times10$:

ARTÍCULO III.

Raiz cuadrada de los números enteros.

En esta operacion se distinguen dos casos. 1.° *Que el número no pase de* 100. 2.° *Que sea mayor que* 100.

163. *Primer caso.* Este caso se resuelve sabiendo de memoria los cuadrados de los diez primeros números, lo que se consigue por la tabla de multiplicar,

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100 (*)

La raiz cuadrada de cada número de la fila inferior es su correspondiente de la superior (156). Asi

$$\sqrt{36}=6,\quad \sqrt{81}=9, \text{ etc.}$$

(*) De la simple inspeccion de este cuadro se infiere que de los números enteros comprendido, entre 1 y 100, ambos inclusive, solo diez tienen raiz cuadrada exacta, y fácilmente se comprende que de los comprendidos entre 1 y 1000, ambos tambien inclusive, ciento solamente darán la misma raiz exacta, etc. etc.

La raiz cuadrada entera de un número comprendido entre dos de la fila inferior es la raiz entera del menor de estos (158). De modo que la $\sqrt{18}$ es 4 y el residuo 2, la $\sqrt{94}$ es 9 y el residuo 13, etc.

164. *Segundo caso.* La resolucion de este caso se funda en el siguiente

Teorema. *El cuadrado de la suma de dos números se compone del cuadrado del primero mas el duplo del primero multiplicado por el segundo mas el cuadrado del segundo,*

Es decir que, por ejemplo,

$$(8+5)^2=8^2+2\times8\cdot5+5^2$$

Sumando 8 con 5 y elevando la suma 13 al cuadrado tendriamos un resultado numéricamente igual al que queremos obtener; mas en tal caso no serviria para el objeto que nos proponemos.

Para ejecutar la elevacion sin que los dos sumandos dados formen un solo número, ó sea para demostrar el teorema, observaremos que (46),

$$(8+5)=(8+5)\times(8+5),$$

y tambien que para obtener este producto basta multiplicar el primer factor 8+5 primero por 8, despues por 5 y sumar los dos resultados.

$$(8+5)\times8=8\times8+5\times8=8^2+5\times8$$
$$(8+5)\times5=8\times5+5\times5=5\times8+5^2$$

Sumando estos dos resultados se tendrá:

$$(8+5)(8+5)=8^2+5\times8+5\times8+5^2$$

Poniendo en lugar del primer miembro de esta igualdad su equivalente $(8+5)^2$, y sustituyendo en el segundo en vez de los sumandos iguales $5\times8+5\times8$ el duplo de uno de ellos $2\times5\cdot8$ resultará:

$$(8+5)^2=8^2+2\times5\cdot8+5^2.$$

Corolario 1.° *El cuadrado de un número que contiene* *decenas y unidades* (descompuesto en estas dos partes) *consta de cuadrado de las decenas, duplo de las decenas por las unidades y cuadrado de las unidades*. Así

$$73^2=(70+3)^2=70^2+2\times70\cdot3+3^2.$$

Observacion. *El cuadrado de las decenas termina siempre en dos ceros* (156, 1.ª) y por consiguiente *es un número exacto de centenas: el duplo de decenas por unidades termina en un cero* (43, cor. 2.º) y por tanto *es un número exacto de decenas: el cuadrado de unidades es un número exacto de unidades*.

En el ejemplo anterior tendremos:

$$\begin{array}{r} 70^2=4900 \\ 2\times70\cdot3=\ 420 \\ 3^2=\quad\ 9 \\ \hline 73^2=5329 \end{array}$$

Corolario 2.º *Si un número escede á otro en una unidad, el cuadrado del mayor escede al del menor en el duplo de este mas uno*.

Sean los números 13 y 12.

$$\begin{array}{lll} & 13^2=(12+1)^2=12^2+ & 2\times12+1 \\ & 12^2=\ldots\ldots\ldots\ 12^2 & \\ \hline \text{Diferencia.....} & 13^2-12^2= & 2\times12+1 \end{array}$$

Corolario 3.º *El resíduo de la raiz cuadrada entera de un número es menor que el duplo de la misma raiz mas uno*.

Porque los dos cuadrados entre quienes se halla el número dado (puesto que sus raices se diferencian en la unidad), se diferencian en el *duplo del menor mas uno;* luego el número propuesto se diferenciará de cualquiera de ellos en menos que esta cantidad.

165. Propongámonos estraer la raiz cuadrada entera de 5461, que no tiene mas que cuatro cifras.

Siendo $10^2=100$ menor que el número dado, y $100^2=10000$ mayor que el mismo, la raiz cuadrada de 5461 será mayor que 10 y menor que 100; luego ha de constar de dos cifras; luego constará de *decenas y unidades*.

Para determinar las decenas de la raiz observaremos que siendo el número propuesto igual al cuadrado de la raiz entera mas el resíduo, podrá considerarse formado por el cuadrado de las decenas, mas el duplo de decenas por unidades, mas el cuadrado de unidades, mas el resíduo, si le hay.

Ahora: como el cuadrado de las decenas es un número exacto de centenas (164, obs.), el cuadrado de las decenas de la raiz que buscamos debe hallarse en las centenas del número dado, esto es, en 54 (que para mayor claridad separamos con un punto de este modo 54.61); mas como entre estas centenas pueden hallarse algunas resultantes del duplo de decenas por unidades, y aun el resíduo, estrayendo la raiz cuadrada de 54 se encontrará 7, que no puede ser menor que las decenas de la raiz. Tampoco puede ser mayor, pues en tal caso escedería en una unidad al menos á las decenas de la raiz del número dado y por consiguiente seria mayor que toda la raiz de este número; luego la raiz cuadrada de los millares de un número seria mayor que la raiz cuadrada de todo el número, lo que es absurdo.

Luego 7 son las verdaderas decenas de la raiz.

Luego las decenas de la raiz cuadrada de un número se determinan estrayendo la raiz cuadrada de las centenas de dicho número.

Para determinar las unidades de la raiz, recordaremos que todo el número 54.61 está formado por el cuadrado de las decenas de la raiz, duplo de decenas por unidades, cuadrado de unidades y el resíduo, si le hay; luego si de las centenas del número dado restamos el cuadrado de las decenas, nos quedarán las otras dos partes mas el resíduo. De modo que

número dado.................	54.61
cuadrado de decenas........	49
la diferencia.....................	5 61, contiene el duplo

de decenas por unidades, el cuadrado de las unidades y el resíduo.

El duplo de decenas por unidades es un número esacto de decenas (164, obs.), luego esta parte del cuadrado debe hallarse en las 56 decenas del resto total anterior (que para mayor sencillez se separan con un punto así 56.1); mas en este número de decenas pueden hallarse tambien algunas decenas del cuadrado de las unidades mas el resíduo; luego dividiendo las 56 decenas por el duplo de decenas halladas ó sea por 14 se tendrá que el cociente 4 serán las unidades de la raiz ó un número mayor que estas.

Luego para determinar la cifra de las unidades de la raiz, se dividen las decenas que quedan, despues de restar del número dado el cuadrado de las decenas por el duplo de las decenas halladas, y el cociente entero será la cifra de las unidades ó un número mayor que estas.

A fin de averiguar si la cifra 4 es ó no mayor que lo que corresponde y tambien para determinar el residuo de la operacion, formamos las otras dos partes del cuadrado de la raiz

Duplo de decenas por unidades	4×14 dec.$=$56	dec.
Cuadrado de las unidades	$4^2=$. . . . 16	uni.
	Suma. . . . 576	uni.

Como esta suma no puede restarse de la diferencia anterior 561 la cifra 4 es mayor que lo que corresponde.

Rebájesele una unidad, y formando las dos partes del cuadrado en esta hipótesis, es decir, de que la cifra de las unidades es 3, resultará:

Duplo de decenas por unidades. 3×14 decenas.=	42
Cuadrado de los unidades 3^2 =.	9
Suma.	429

Siendo esta suma menor que el resto precedente 561 se puede rebajar de este, y hallando la diferencia resultaria el número 132; luego la cifra 3 es buena, y 132 es el resíduo de la operacion.

Luego la raiz cuadrada de 5461 es 73 y quedan 132 de resíduo.

Las dos partes del cuadrado pueden formarse mas fácilmente escribiendo al lado del duplo de las decenas, que sirvió de divisor, la cifra de las unidades que se comprueba, y multiplicando el número así formado por la misma cifra que trata de comprobarse; lo que seria (refiriéndonos á la última comprobacion) $143\times 3=439$, cuyo producto comprende evidentemente dichas dos partes.

Luego para comprobar la cifra de las unidades que dá la regla anterior se escribe esta cifra á la derecha del divisor, se multiplica este número por la misma cifra y si el producto puede restarse del dividendo anterior unido con las unidades que se le separaron, la cifra que se comprueba es buena, si nó, no lo será, y se le rebaja una unidad para ensayarla de nuevo.

La operacion puede ordenarse como á continuacion se vé:

54.61	73
56.1	143×3
13 2	

Sea estraer la raiz cuadrada entera de 546138, que no escede de seis cifras.

54.61.3 8	739
5 61	143×3
1 32 3.8	1469×9
1 7	

Siendo el número dado mayor que 100 su raiz cuadrada tendrá *decenas* y *unidades*.

Para hallar, pues, las decenas, estraeremos la raiz cuadrada de las centenas del número dado, como se ha dicho en el ejemplo anterior (prescindiendo de las dos primeras cifras de la derecha que por esto se separan con un punto).

Mas como las 5461 centenas forman un número mayor que 100 y que no pasa de cuatro cifras, su raiz cuadrada se hallará como en el anterior ejemplo, de donde resulta que las decenas de la raiz son 73 quedando 132 de resíduo.

El resíduo anterior con las dos cifras ultimas del número dado á su derecha, forman 13238, que es el número que queda despues de restar del propuesto el cuadrado de las decenas, luego dividiendo las decenas de este número 1323.8 (á cuyo efecto se separan las unidades con un punto) por el duplo de las 73 decenas, ó sea por 146, el cociente entero, comprobado como se ha dicho en el ejemplo precedente, dará las unidades de la raiz.

De este modo se halla que la cifra de las unidades es 9, quedando 17 de resíduo.

Luego la raiz cuadrada de 546138 es 739 y el resíduo de la operacion 17.

Sea por ultimo estraer la raiz cuadrada de 94864

9.4 8.6 4	308
0 4.8 6.4	608×8
0 0 0 0	

La única particularidad que ofrece este ejemplo es que al dividir las decenas del numero 48 ó sea el 4 por 6, que es el duplo de la primera cifra, la division no puede dar ningun cociente entero, lo que indica que es cero la segunda cifra de la raiz; y como cero multiplicado por 60 da por producto cero, y cero restado de 48 deja por resto el mismo 48, se omiten estas operaciones, y se unen inmediatamente al 48 las dos cifras siguientes formando asi el número 4864, cuyas decenas divididas por 60 dan la tercera cifra 8 de la raiz.

Resultando que $\sqrt{94864}=308$ esactamente.

El razonamiento hecho para reducir la estraccion de la raiz cuadrada de un número de 5 ó 6 cifras á la de otro de 3 ó 4, reduce igualmente la estraccion de la raiz cuadrada de un número de 9 ó 10 cifras á la de otro 7 ú 8 y asi sucesivamente.

Reuniendo, pues, bajo un solo contexto las reglas y advertencias precedentes, y dándoles un aspecto práctico para facilitar su ejecucion, tendremos la siguiente regla general.

Para estraer la raiz cuadrada entera de un número mayor que 100 *se divide* (por medio de puntos,) *principiando por la derecha en grupos ó secciones de á dos cifras, sin que sea un obstáculo el que la última seccion tenga una cifra sola.*

El número de cifras de la raiz es igual al de grupos formados.

Se halla la raiz cuadrada entera de la primera seccion *de la izquierda, y esta será la cifra de órden superior de la raiz. El cuadrado de esta cifra se resta de dicha primera seccion; se une al resto la seccion siguiente separando del número así formado la cifra de la derecha, y dividiéndolo que queda á la izquierda por el duplo de la cifra hallada, el cociente entero será la segunda cifra de la raiz ó mayor que ella. La cifra que acaba de determinarse se comprueba escribiéndola á la derecha del divisor, y multiplicando el número resultante por la misma cifra.*

Si el producto puede restarse del número formado por el dividendo en union con la cifra que se le separó, la cifra hallada es buena; si no es grande y se le rebaja una unidad sometiendo la cifra que resulta á nueva comprobacion: esta operacion se repite tantas veces como sea necesario para hacer posible la sustraccion indicada.

Al resto de esta sustraccion se une el grupo siguiente: se separa la cifra de la derecha con un punto: se divide al que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, y el cociente entero (que es la tercera cifra de la raiz) *se somete á igual comprobacion que el anterior.*

De este modo se continúa hasta que se haya considerado el último grupo de la derecha.

Si despues de colocar á la derecha de un resto la seccion siguiente y de separar la cifra de la derecha, la parte que queda á la izquierda es menor que el duplo de la raiz hallada;, se pone cero en la raiz y al número formado por el dividendo y cifra separada se une la siguiente seccion.

Observacion 1.ª Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en la raiz una cifra menor que la verdadera, cuando el resto que en seguida se obtenga sea igual ó mayor que el duplo de la raiz hallada mas uno (164, corol. 2.º)

2.ª De la formacion de los cuadrados de los números enteros se infiere que los números que terminan en 2, 3 7, 8 ó un número impar de ceros no tienen raiz cuadrada exacta.

Ejemplo 4.° $\sqrt{81439678}$.

El número dado no tiene raiz exacta puesto que termina en 8 (obs. anterior).

Por lo demás la operacion se ejecuta sin dificultad como se vé á continuacion:

	81.43.9 6.7 8	9024 raiz entera.
	0 43 9.6	1802×2
	7 9 2 7.8	18044×4
Resíduo......	7 1 0 2	

El resíduo 7102 no indica que la operacion está mal hecha, pues es menor que el duplo de 9024 mas 1.

166. La estraccion de la raiz cuadrada se prueba elevando al cuadro la raiz hallada y sumando con esto el resíduo, si le hay; la suma debe ser igual al número dado para que la operacion esté bien hecha (158, cor.).

ARTÍCULO IV.

Raiz cuadrada de los números decimales y aproximacion de la de los enteros que no la tienen exacta.

En la estraccion de la raiz cuadrada de los decimales distinguiremos dos casos: 1.° *que el número de cifras decimales sea par*. 2.° *que sea impar*.

167. *Primer caso*. Sea estraer la raiz cuadrada de 3,56.

Si convertimos este número en entero le habremos multiplicado por 100 ó sea 10^2; mas la raiz cuadrada del número resultante 356 será 10 veces mayor que la del número propuesto (162, cor.); luego partiendo por 10 ó separando con una coma la última cifra de la raiz entera de 356, tendremos la raiz pedida con menos de 0,1 de error.

Si el número fuese 0,0478, convirtiéndole en entero le habremos multiplicado por 10000 ó sea por 100^2; pero la raiz cuadrada del número resultante 478 es 100 veces mayor que la del número dado; luego dividiendo por 100 la raiz entera de 478 tendremos la raiz pedida con menos de 0,01 de error.

Del mismo modo haríamos ver que si el número propuesto tuviese 6, 8, 10, etc. cifras decimales su raiz cuadrada se determinaria con menos de 0,001, 0,0001 ó 0,00001 etc. de error, hallando la raiz cuadrada entera del número dado considerándole como entero, y separando despues á la derecha de su raiz entera 3, 4, 5 etc. cifras decimales.

Luego la raiz cuadrada de un número decimal, cuyo número de cifras decimales sea par, se halla dividiendo la raiz cuadrada entera de dicho número, considerado como entero, por la unidad seguida de un número de ceros igual á la mitad de cifras decimales que tenga el número dado.

Así $\sqrt{0,5471}=\sqrt{\frac{5471}{100}}=\frac{73}{100}=0,73.$

Observacion 1.ª La regla anterior equivale evidentemente (y á esto se reduce la práctica) *á estraer la raiz cuadrada del número decimal como si fuese entero, cuidando de escribir una coma en la raiz al considerar el primer grupo decimal de la izquierda, bien sea para agregarle á un resto ó bien para estraer de él la raiz cuadrada.*

EJEMPLOS. 1.° $\sqrt{216,59}$.

2.1 6,5 9	14,7 etc.
1 1.6	24×4
2 0 5.9	287×7
5 0	

Resultado 14,7 con menos de 0,1 de error.

2.° $\sqrt{0,0625}$

0,06.2 5	0,25
2 2.5	45×5
0 0	

Resultado 0,25 exactamente.

Observacion 2.ª Como á continuacion de una fraccion decimal se pueden suponer, sin que varíe, las secciones de á dos ceros que se quieran, resulta que *en el caso de no ser exacta la raiz cuadrada de una fraccion decimal se podrá aproximar por decimales todo lo que se quiera, para lo que basta agregar al resíduo último, ó resultante de la última seccion decimal dos ceros, lo que dará otra cifra decimal para la raiz: al resíduo que entonces se halle se añaden otros dos ceros, y así en adelante hasta obtener toda la aproximacion que se desee*: advirtiendo que si el número dado considerado como entero no da raiz exacta, no se obtendrá nunca por mas que se continúe la operacion (159, cor.)

Sea aproximar por decimales la raiz cuadrada del ejemplo 1.° de la observacion anterior.

2.1 6,59	14,716 etc.
1 1.6	24×4
2 05.9	287×7
5 00.0	2941×1
2 05 90.0	29426×6
29 34 4	
etc.	

3.ª Como á todo número entero se le puede considerar como una fraccion decimal suponiendo una coma despues de los enteros, y á continuacion de esta todas las secciones de dos ceros que se quiera (90, obs.); resulta que *si un número entero no tiene raiz cuadrada exacta se puede aproximar por decimales todo lo que se quiera, para lo que basta escribir una coma despues de la raiz entera y agregar al resíduo ultimo dos ceros, lo que dará la primera cifra decimal; al resto que entonces se obtenga se agregan otros dos ceros y así sucesivamente*; advirtiendo que no se hallará raiz exacta por mas que se alargue la operacion (159, cor.).

Ejemplo. Estráigase la raiz cuadrada de 14 con la aproximacion que se desee

14	3,741 etc.
50.0	67×7
3 10.0	744×4
12 40.0	7481×1
4 91 9	
etc.	

168. Segundo caso. *Si el número de cifras decimales es impar, se le agrega un cero, con lo que no varia* (90, 1.°) *y queda este caso reducido al anterior.*

ARTÍCULO V.

Raiz cuadrada de los quebrados ordinarios y números mistos.

En la estraccion de la raiz cuadrada de los quebrados ordinarios se distinguen tambien dos casos: 1.° *que ambos términos tengan raiz exacta*: 2.° *que los dos ó uno de ellos no la tenga.*

169. *Primer caso.* Sea $\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{3^2}{4^2}}$; como $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}$ (156, 3.ª), es evidente que $\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{3^2}{4^2}}=\frac{3}{4}$, ó sea á

la raiz cuadrada de 9 partido por la raiz cuadrada de 16.

Como igual raciocinio puede hacerse con otro quebrado de iguales condiciones, resulta que:

Para estraer la raiz cuadrada de un quebrado cuyos términos tienen raiz exacta se estrae la del numerador y la del denominador, y se parte la primera por la segunda.

170. Segundo caso. *Para estraer la raiz cundrada de un quebrado cuyos términos ó uno de ellos no tiene raiz exacta, se convierte primero en irreducible y si tampoco sus dos términos fuesen cuadrados perfectos, se reduce á fraccion decimal, obteniendo un número de cifras decimales duplo de las que ha de tener la raiz, y luego se procede como se ha dicho en el número anterior;* advirtiendo que no se hallará raiz exacta por mas que se continúe la operacion (160).

Ejemplo. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ con dos cifras decimales.

Como $\frac{3}{3}=0,75=0,7500$, será $\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{0,7500}=0,86$.

$$\begin{array}{r|l} 0,750\ 0 & 0,86 \\ \cline{2-2} 110.0 & 166\times6 \\ 10\ 4 & \end{array}$$

171. *Para estraer la raiz cuadrada de un número misto se convierte en fraccionario, y se tiene uno de los dos casos del número precedente.*

Ejemplo 1.° $\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}$. 2.° $\sqrt{7\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{23}{3}}$ $\sqrt{7,6666}=0,76$.

ARTÍCULO VI.

Raiz cùbica de los nùmeros enteros.

En esta operacion se distinguen dos casos: 1.° *que el número de que se quiere estraer la raiz cúbica no pase de* 1000: 2.° *que sea mayor que* 1000.

172. *Primer caso.* Este caso se resuelve sabiendo de memoria los cubos de los diez primeros números, que son los que á continuacion se espresan:

Números...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos......	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 (*).

Cada número de la fila superior es la raiz cúbica del correspondiente en la inferior (157).

Así $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{512}=8$, etc.

La raiz cúbica entera de un número comprendido entre dos de la fila inferior es la raiz entera del menor de estos (158). De modo que la $\sqrt[3]{18}$ es 2 y el resíduo 10, la $\sqrt[3]{194}$ es 5 y el resíduo 69, etc.

173. *Segundo caso.* La resolucion de este caso se funda en el siguiente

Teorema. *El cubo de la suma de dos números se compone del cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.*

Es decir que, por ejemplo.

$$(8+5)^3=8^3+3\times8^2\cdot5+3\times8\cdot5^2+5^3$$

Sumando el 8 con el 5 y elevando la suma 13 al cubo se tendria un resultado numéricamente igual al que nos proponemos obtener; mas en tal caso no serviria para el objeto que nos proponemos.

Para ejecutar la elevacion sin que los sumandos 8 y 5 formen un solo número, observaremos que (44 y 46).

$$(8+5)^3=(8+5)\times(8+5)\times(8+5)=(8+5)^2\times(8+5);$$

(*) De la simple inspeccion de este cuadro se infiere que de los números enteros comprendidos entre 1 y 1000, ambos inclusive, solo diez tienen raiz cúbica exacta y facilísimamente se deduce tambien que de los comprendidos entre 1 y 1.000.000 ambos igualmente inclusive, solo ciento tienen exacta la misma raiz, etc.

mas el primer factor $(8+5)^2=8^2+2\times8\cdot5+5^2(164)$; luego multiplicando este segundo miembro primero por 8 y luego por 5 y sumando los resultados, se tendrá el producto buscado.

$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)\times8=8^2\times8+2\times8.5\times8+5^2\times8=$
$8^3+2\times8^2\cdot5+5^2\times8$
$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)\times5=8^2\times5+2\times8\cdot5\times5+5^2\times5=$
$8^2\times5+2\times8\cdot5^2+5^3$

Sumando los dos resultados que se acaban de obtener se tendrá

$(8^2+2\times8\cdot5+5^2)(8+5)=8^3+2\times8^2\cdot5+5^2\times8+8^2\times$
$5+2\times8\cdot5^2+5^3$.

Sustituyendo en lugar del primer miembro de esta igualdad su equivalente $(8+5)^3$, y en el segundo en vez de $2\times8^2\cdot5+8^2\times5$ su equivalente $3\times8^2\cdot5$, y en vez de $5^2\times8+2\times8\cdot5^2$ su equivalente tambien $3\times8\cdot5^2$ se tendrá la siguente igualdad, que demuestra el teorema:

$$(8+5)^3=8^3+3\times8^2\cdot5+3\times8\cdot5^2+5^3.$$

Corolario 1.° *El cubo de un número que contiene decenas y unidades* (descompuesto en estas dos partes) *consta de cubo de las decenas, mas el triplo del cuadrado de decenas por unidades, mas el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, mas el cubo de las unidades.*

Así $84^3=(80+4)^3=8^3+3\times80^2\cdot4+3\times80\cdot4^2+4^3$.

Observacion. *El cubo de las decenas* termina siempre en tres ceros (156, 1.ª) y por consiguiente *es un número exacto de millares: el triplo del cuadrado de decenas por unidades* termina en dos ceros (156, 1.ª y 44, cor. 2.°) y por tanto *es un número exacto de centenas: el triplo de decenas por el cuadrado de unidades* termina en un cero (44, cor. 2.°) y por lo mismo *es un número exacto de decenas y el cubo de unidades es un número exacto de unidades.*

En el ejemplo anterior tendremos

$$\begin{array}{r} 80 = 512000 \\ 3\times 80^2\cdot 4 = 76800 \\ 3\times 80\cdot 4^2 = 3840 \\ 4^3 = 64 \\ \hline 84^3 = 592704 \end{array}$$

Corolario 2.° *Si un número escede á otro en una unidad el cubo del mayor escede al del menor en el triplo del cuadrado de este mas el triplo de este mismo mas uno.*

Sean los números 13 y 12.

El cubo del mayor será.	$13^3=(12+1)^3=12^3+3\times 12^2+3\times 12+1$
El del menor es.	12^3
Y la diferencia será.	$3\times 12^2+3\times 12+1$
Luego el cubo del mayor escede al del menor en. . .	$3\times 12^2+3\times 12+1$

Corolario 3.° *El resíduo de la raiz cúbica entera de un número es menor que el triplo del cuadrado de dicha raiz mas el triplo de la misma mas uno.*

Porque los dos cubos entre quienes se encuentra el número dado (puesto que sus raices se diferencian en la unidad) se diferenciarán en *el triplo del cuadrado del menor mas el triplo del menor mas uno;* luego el número propuesto se diferenciará de cualquiera de ellos en menos que esta cantidad.

174. Propongámonos estraer la raiz cúbica entera de 432487, que no tiene mas que seis cifras.

Siendo $10^3=1000$ menor que el número dado
y $100^3=1.000.000$ mayor que el mismo;
la raiz cúbica de dicho número será mayor que 10 y menor que 100; luego ha de constar de dos cifras; luego constará de *decenas* y *unidades*.

Para determinar las decenas de esta raiz, observaremos que siendo el número propuesto igual al cubo de su raiz entera mas el residuo (158, cor.), podrá considerarse formado por el cubo de las decenas, mas el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades, mas el resíduo, si le hay (173, cor. 1.°).

Ahora, el cubo de las decenas es un número exacto de millares (173, obs.); luego el cubo de las decenas de la raiz que buscamos debe hallarse en los millares del número propuesto, esto es, en 432, (que para mayor sencillez separamos con un punto de este modo 432.487); mas como entre estos millares pueden hallarse tambien algunos resultantes del triplo del cuadrado de decenas por unidades, del triplo de decenas por el cuadrado de unidades y aun del resíduo, estrayendo la raiz cúbica de dichos 432 millares, se hallará la cifra 7 que no puede ser menor que las decenas de la raiz. Tampoco puede ser mayor, pues en tal caso escederia al menos en una unidad á las decenas de la raiz del número dado, y por consiguiente seria mayor que toda la raiz de este número; luego la raiz cúbica de los millares de un número seria mayor que la raiz cúbica de todo el número, lo que es absurdo.

Luego 7 son las verdaderas decenas de la raiz.

Luego las decenas de la raiz cúbica de un número se determinan estrayendo la raiz cúbica entera de los millares de dicho número.

Para determinar las unidades recordaremos que todo el número 432487 está formado por el cubo de decenas, triplo del cuadrado de decenas por unidades, triplo de decenas por el cuadrado de unidades, cubo de unidades de la raiz y el resíduo, si le hay; luego si de los millares restamos el cubo de decenas nos quedarán las otras tres partes mas el resíduo. De modo que

432487

cubo de decenas ó $7^3=343$

La diferencia..... 89487 contiene el triplo del cuadrado de decenas por unidades, mas el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, mas el cubo de unidades, mas el resíduo.

El triplo del cuadrado de decenas por unidades es un número exacto de centenas (173, obs.); luego esta parte del cuadrado debe hallarse en las 894 centenas del resto anterior (que para mayor sencillez se suponen separadas por un punto, así 894.87); mas en este número de centenas pueden hallarse tambien algunas centenas resultantes del duplo de decenas por el cuadrado de unidades, del cubo de las unidades y aun del residuo; luego dividiendo las 883 centenas por el triplo del cuadrado de decenas, esto es por $147=3\times7^2$, el cociente entero 6 serán las unidades de la raiz ó un número mayor que estas.

Luego para hallar las unidades de la raiz cúbica de un número se dividen las centenas, que quedan despues de restar de los millares del número dado el cubo de las decenas, por el triplo del cuadrado de las decenas halladas, y el cociente entero serán las unidades ó un número mayor que estas.

A fin de averiguar si la cifra 6 que se determinó segun esta regla es ó no mayor que las unidades de la raiz formaremos las tres partes restantes del cubo de la misma raiz.

Triplo del cuadrado de decenas por unidades...	$3 \times 7^2 \cdot 6 =$	882 centenas
Triplo de decenas por el cuadrado de unidades..	$3 \times 7 \times 6^2 =$	756 decenas
Cubo de unidades.........	$6^3 =$	216 unid.
Suma...........		95976

Como esta suma es mayor que el resto total anterior 89487, que es el dividendo en union con las dos cifras siguientes, resulta que la cifra 6 es mayor que las unidades de la raiz.

Rebájesele una unidad, y formando las tres partes del cubo en la hipótesis de que la cifra de las unidades es 5, resultará:

Triplo del cuadrado de decenas por unidades...	735
Triplo de decenas por el cuadrado de las unidades.	525
Cubo de unidades......	125
Suma..........	78875

Siendo esta suma menor que el resto precedente 89489 se puede restar de él; luego 5 es la verdadera cifra de las unidades de la raiz.

Luego, para comprobar la cifra de las unidades que da la regla anterior, se forman las tres partes del cubo de la raiz, á saber: triplo del cuadrado de decenas por la cifra de las unidades que se ensaya, triplo de decenas por el cuadrado de unidades y cubo de la misma cifra de las unidades, se suman estas tres partes y si la suma no es mayor que el dividendo que la produjo en union con las dos cifras que le siguen, dicha cifra es buena; en el caso contrario se le rebaja una unidad y se comprueba de nuevo.

Restando de 89487 la suma 78875 de las tres partes del cubo de la raiz la diferencia 10612 es el resíduo de la operacion.

Luego $\sqrt[3]{432487}=75$ y quedan 10612 de resíduo.

La operacion puede ordenarse como á continuacion se vé:

432.487	75
343	
894.87	147
788 75	
106 12	

Sea estraer la raiz cúbica entera de 432487039, que no escede de nueve cifras.

432.487.039	756
343	
894.87	147
788 75	
106 120.39	16875
102 062 16	
4 058 23	

Siendo el número propuesto mayor que 1000 su raiz cúbica tendrá *decenas* y *unidades*.

Para hallar, pues, las decenas, estraeremos la raiz cúbica de los millares del número dado, como se ha dicho en el ejemplo anterior (prescindiendo de las tres primeras cifras de la derecha que por esto se separan con un punto).

Mas como los 432487 millares forman un número mayor que 1000, y como por otra parte no escede de seis cifras, su raiz cuadrada se hallará como en el ejemplo anterior; de donde resulta que las decenas de la raiz son 75 quedando 10612 de resíduo.

El resíduo anterior con las tres últimas cifras del número dado á su derecha componen 10612039, que es el número que queda despues de restar del propuesto el cubo de las decenas; luego dividiendo las centenas de este número 106120.39 (á cuyo efecto se separan las dos últimas cifras con un punto) por el triplo del cuadrado de las 75 decenas, ó sea por 16875, el cociente entero 6 comprobado como se vé á continuacion dará las unidades de la raiz.

Triplo del cuadrado de las 75 decenas por 6 unidades.	101250
Triplo de las mismas decenas por el cuadrado de las unidades.	8100
Cubo de las mismas unidades.	216
Suma.	10206216

Restando esta suma del dividendo unido con las dos cifras que estan á su continuacion, se halla que la cifra de las unidades es 6 y el resíduo 405823.

Luego $\sqrt[3]{432487039}=756$ quedando 405823 de resíduo.

Sea por último estraer la raiz cúbica de 9129329.

$$\begin{array}{r|l} 9.1\ 29.3\ 29 & 209 \\ \hline 1\ 1.29\ 3.29 & 1200 \\ 1\ 1\ 29\ 3\ 29 & \\ \hline 0\ 0\ 00\ 0\ 00 & \end{array}$$

La única particularidad que ofrece este ejemplo, consiste en que al dividir las centenas del número 1129 ó sea 11 por 12, que es el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raiz, la division no puede dar ningun cociente entero, lo que indica que es cero la segunda cifra de la raiz; y como este cero entra como factor en las partes restantes del cubo de la raiz 20, la suma de estas seria cero; y como cero restado de 1129 deja por resto el mismo número, se omiten estas operaciones y se unen inmediatamente al 1129 las tres cifras siguientes, formando así el número 11293.29, cuyas centenas divididas por 1200 dan la tercera cifra de la raiz.

Resultando que $\sqrt[3]{9129329}=209$ exactamente.

El razonamiento hecho para reducir la estraccion de la raiz cúbica entera de un número de 7, 8 ó 9 cifras á la de otro de 4, 5 ó 6, reduce igualmente la estraccion de la raiz cúbica de un número de 10, 11 ó 12 cifras á la de otro de 7, 8 ó 9, la de un número de 13, 14 ó 15 á la de otro de 10, 11 ó 12, y así sucesivamente.

Reuniendo, pues, bajo un solo contesto las reglas y advertencias precedentes y dándoles un aspecto práctico para facilitar su ejecucion tendremos la regla general que sigue:

Para estraer la raiz cúbica entera de un número mayor que 1000 *se divide* (por medio de puntos) *principiando por la derecha en grupos ó secciones de á tres cifras, sin que sea un obstáculo el que la última seccion de la izquierda tenga una ó dos cifras solamente.*

El número de cifras de la raiz es igual al de grupos formados.

Se halla la raiz cúbica entera de la primera seccion de la izquierda, y esta será la cifra de órden superior de la raiz. El cubo de esta cifra se resta de dicha primera seccion: se une al resto la seccion siguiente, separando del número así formado las dos cifras de la derecha, y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la cifra encontrada, el cociente entero será la segunda cifra de la raiz ó mayor que ella. La cifra que se acaba de determinar se comprueba formando las otras tres partes del *cubo, á saber: triplo del cuadrado de la primera cifra por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda, se suman estas tres partes* (teniendo en cuenta la especie de unidades que cada una espresa (173, obs.), *y la suma se resta del número formado por el dividendo anterior y las dos cifras separadas.*

Si la sustraccion puede verificarse la cifra hallada es buena, sino es grande y se le rebaja una unidad, sometiendo la cifra que resulte á nueva comprobacion.

Al lado del resto de esta sustraccion se pone la seccion siguiente: se separan las dos cifras de la derecha con un punto: se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada y el cociente entero (que es la tercera cifra de la raiz) *se somete á igual comprobacion que la anterior.*

De este modo se continúa hasta que se haya considerado el último grupo de la derecha.

Si despues de colocar á la derecha de un resto la seccion siguiente, y de separar las dos cifras de la derecha, la parte que queda á la izquierda es menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada; se pone cero en la raiz y al número formado por el dividendo anterior y las dos cifras separadas se une la siguiente seccion.

Observacion. Se conocerá si *por equivocacion* se ha puesto en la raiz una cifra menor que la verdadera, cuando el resto que en seguida se obtenga sea igual ó mayor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la misma raiz, mas uno (173, cor. últ.).

EJEMPLO 4.° $\sqrt{7762392000}$.

7.7 62.392.000	1980
6 7.62	3
5 8 59	
0 9 03 3.92	1083
9 03 3 92	
0 00 0 00	

Comprobacion de la cifra 9.	Comprobacion de la cifra 8.
27	8664
243	3648
729	512
5859	903392

Como el resto obtenido en la determinacion de la cifra 8 en union con las cifras de la última seccion forman cero, y cero dividido por el triplo del cuadrado de la raiz hallada 198 es tambien cero, resulta que:

$$\sqrt{7762392000}=1980 \text{ exactamente.}$$

175. La estraccion de la raiz cúbica se prueba elevando al cubo la raiz hallada y sumando con esta el residuo si le hay: la suma debe ser igual al número dado para que la operacion esté bien hecha. (158, cor.).

ARTÍCULO VII.

Raiz cúbica de los números decimales y aproximacion de la de los enteros que no la tienen exacta.

En la estraccion de la raiz cúbica de los decimales se distinguen dos casos. 1.° *que el número de cifras decimales sea múltiplo de tres*. 2.° *que no lo sea*.

176. *Primer caso*. Sea estraer la raiz cúbica de 18,726. Si convertimos este número en entero, le habremos

multiplicado por 1000, ó sea por 10^3; mas la raiz cúbica del número 18726 resultante será 10 veces mayor que la del número propuesto (162, cor.); luego partiendo por 10 la raiz entera de 18726, ó separando su última cifra con una coma tendremos la raiz pedida con menos de 0,1 de error.

Si el número fuese 0,354278, convirtiéndole en entero le habremos multiplicado por 1000000 ó sea por 100^3; pero la raiz cúbica del número resultante 354278, es 100 veces mayor que la del nùmero dado (162, cor.), luego divídiendo la raiz entera de 354278 tendremos la raiz pedida con menos de 0,01 de error.

Del mismo modo hariamos ver que si el número propuesto tuviese 9. 12, 15 etc, cifras decimales, su raiz cúbica se determinaria con menos de 0,001, 0,0001, 0,00001, etc. de error, hallando la raiz cúbica entera del número dado considerándole como entero, y separando despues á la derecha de esta raiz 3, 4, 5 etc., cifras decimales.

Luego la raiz cúbica de un número decimal, cuyo número de cifras decimales sea múltiplo de tres, se halla dividiendo la raiz cúbica entera de dicho número, considerado como entero, por la unidad seguida de un número de ceros igual á la tercera parte de cifras decimales que tenga el número dado.

Así $\sqrt[3]{7,762392}=\sqrt[3]{\frac{7762392}{100}}=\frac{198}{100}=1,98$ exactamente.

Observaciones: 1.ª La regla anterior equivale evidentemente (y á esto se reduce en la práctica) *á estraer la raiz cúbica del número decimal como si fuera entero, cuidando de escribir una coma en la raiz al considerar el primer* *grupo decimal de la izquierda, bien sea para agregarle á un resto ó bien para estraer de él la raiz cúbica.*

Ejemplos 1.° $\sqrt[3]{15,086}$

$$
\begin{array}{r|l}
15,0\,86 & 2,4 \\ \cline{2-2}
7\,0.86 & 12 \\
5\,\,8\,24 & \\ \cline{1-1}
1\,\,2\,62 &
\end{array}
$$

Resultado 2,4 con menor de 0,1 de error.

2.° $\sqrt[3]{0,00000\,6859}$

$$
\begin{array}{r|l}
0,000{\cdot}00\,6{\cdot}8\,59 & 0,019 \\ \cline{2-2}
5\,8.69 & 3 \\
5\,8\,69 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Resultado 0,019 exactamente.

2.ª Como á continuacion de una fraccion decimal se pueden suponer sin que varíe de valor (90, 1.°) las secciones de á tres ceros que se quieran, resulta que: *en el caso de que no sea exacta la raiz cúbica de una fraccion decimal se puede aproximar por decimales todo lo que se quiera, para lo que basta agregar al residuo último ó resultante de la última seccion decimal, tres ceros, lo que dará otra cifra decimal mas para la raiz: al resíduo que entonces se obtenga se añaden otros tres ceros, y asi en adelante hasta obtener toda la aproximacion que se desee;* advirtiendo que si el número propuesto considerado como entero no da raiz exacta, no se obtendrá por mas que se continúe la operacion (159, cor.).

Sea aproximar por decimales la raiz cúbica del ejemplo primero de la observacion anterior. La operacion se ejecuta como á continuacion se vé:

1 5,0 86	2,47 etc.
7 0.86	12
5 8 24	
1 2 62 0.00	1728
1 2 45 2 23	
16 7 77	
etc.	

3.ª Como á todo número entero se le puede considerar como una fraccion decimal suponiendo una coma despues de los enteros y á continuacion de esta los grupos de á tres ceros que se quieran (90, obs.), resulta que *si un número entero no tiene raiz cúbica exacta se puede aproximar por decimales todo lo que se quiera, para lo cual basta escribir una coma despues de la raiz entera y agregar al resíduo último tres ceros, lo que dará la primera cifra decimal: al resto que en seguida se obtenga se añaden otros tres ceros, y así sucesivamente; advirtiendo que no se hallará raiz exacta por mas que se alargue la operacion* (160, cor.).

Ejemplo. Estráigase la raiz cúbica de 9 con la aproximacion que se quiera.

9	2,08 etc.
10000.00	1200
9989 12	
10 88	
etc.	

Luego $\sqrt[3]{9}=2,08$ etc.

177. Segundo caso. *Si el número de cifras decimales no es múltiplo de tres, se le agrega uno ó dos ceros al fin para que lo sea,* con lo que no varia (90, 1.º), y queda este caso convertido en el anterior.

ARTÍCULO VIII.

Raiz cúbica de los quebrados ordinarios y numeros mistos.

En la estraccion de la raiz cúbica de los quebrados ordinarios se distinguen otros dos casos. 1.° *que ámbos términos tengan raiz exacta,* 2.° *que los dos ó uno de ellos no la tengan.*

178. *Primer caso.* Sea $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}$; como $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3^3}{2^3}$ (156, 3.°), es evidente que $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{3}{2}$, ó sea á la raiz cúbica de 27 partido por la de 8.

Como el mismo raciocinio puede hacerse con otro quebrado de iguales condiciones, resulta que

Para estraer la raiz cúbica de un quebrado, cuyos términos tienen raiz exacta, se estrae la del numerador y la del denominador y se parte la primera por la segunda.

179. Segundo caso. *Para estraer la raiz cúbica de un quebrado en que ambos términos ó uno de ellos no la tiene exacta, se convierte primero en irreducible, y si tampoco fuesen sus términos cubos perfectos, se reduce á fraccion decimal, obteniendo triplo número de cifras decimales de las que ha de tener la raiz;* advirtiendo que en este caso no se hallará nunca raiz exacta (160).

Ejemplo. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ con dos cifras decimales.

Como $\frac{2}{3}=0,66\ldots$ será

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0,666.666}=0,87$$

0,66 6.6 66	0,87
51 2	
15 4 6.66	192
14 6 5 03	
8 1 63	

180. *Para estraer la raiz cúbica de un número misto se convierte en fraccionario y se tiene uno de los casos precedentes.*

EJEMPLOS. 1.° $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{4}{3}$

2.° $\sqrt[3]{5\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{43}{8}}=\sqrt[3]{5{,}375}=1{,}7$ con menos de $\frac{1}{10}$ de error.

REDUCCION DE LAS MEDIDAS MÉTRICAS

A LAS ACTUALES DE CASTILLA.

Tabla Primera (*).

Medidas longitudinales.

Métros.	Lineas.	Pulgadas.	Pies.	Varas.	Leguas.
1=	516,8=	43,07=	3,5889=	1,1963=	0,000179
2=	1033,6=	86,13=	7,1778=	2,3926=	0,000359
3=	1550,4=	129,20=	10,7668=	3,5889=	0,000538
4=	2067,2=	172,27=	14,3557=	4,7852=	0,000718
5=	2584,0=	215,34=	17,9446=	5,9815=	0,000897
6=	3100,8=	258,40=	21,5335=	7,1778=	0,001077
7=	3617,6=	301,47=	25,1225=	8,3742=	0,001256
8=	4134,4=	344,54=	28,7114=	9,5705=	0,001436
9=	4651,2=	387,60=	32,3003=	10,7668=	0,001615

Tabla II (**).

Medidas de capacidad para áridos.

Litros.	Ochavos.	Cuartillos.	Celemines.	Fanegas.	Cahices.
1=	3,46=	0,865=	0,2162=	0,018018=	0,001501
2=	6,92=	1,730=	0,4324=	0,036035=	0,003003
3=	10,38=	2,595=	0,6486=	0,054053=	0,004504
4=	13,84=	3,459=	0,8648=	0,072071=	0,006006
5=	17,30=	4,324=	1,0811=	0,090088=	0,007507
6=	20,76=	5,189=	1,2973=	0,108106=	0,009009
7=	24,22=	6,054=	1,5135=	0,126124=	0,010510
8=	27,68=	6,919=	1,7297=	0,144142=	0,012012
9=	31,14=	7,784=	1,9459=	0,162159=	9,013513

(*) Esta tabla y las 6.ª, 7.ª, 9.ª, 14 y 15 están calculadas en el supuesto de tener el metro 3,5889216 piés de Búrgos.

(**) Esta tabla y la 10 fueron calculadas bajo el supuesto de tener la fanega de áridos 55,501 litros.

Tabla III (*).

Medidas de capacidad para líquidos, escepto el aceite.

Litros.	Copas.	Cuartillos.	Cántaras.	Moyos.
1	7,9	1,98	0,0620	0,003874
2	15,9	3,97	0,1240	0,007748
3	23,8	5,95	0,1860	0,011622
4	31,7	7,93	0,2479	0,015496
5	39,7	9,92	0,3099	0,019370
6	47,6	11,90	0,3719	0,023244
7	55,5	13,88	0,4339	0,027118
8	63,5	15,87	0,4959	0,030992
9	71,4	17,85	0,5579	0,034866

Tabla IV (**).

Medidas de capacidad para el aceite.

Litros.	Panillas.	Libras.	Arrobas.
1	8,0	1,99	0,079598
2	15,9	3,98	0,159197
3	23,9	5,97	0,238795
4	31,8	7,96	0,318394
5	39,8	9,95	0,397992
6	47,8	11,94	0,477591
7	55,7	13,93	0,557189
8	63,7	15,92	0,636788
9	71,6	17,91	0,716386

(*) Esta tabla y la 11 están calculadas en el supuesto de tener la cántara de vino 16,133 litros,

(**) Esta tabla y la 12 han sido calculadas en el supuesto de tener la arroba de aceite 12,563056 litros.

Tabla V (*).

Medidas de Peso.

Kilógramos.	Adarmes.	Onzas.	Libras.	Arrobas.	Quintales.
1	556,4	34,78	2,1735	0,0869	0,021735
2	1112,8	69,55	4,3469	0,1739	0,043469
3	1669,2	104,33	6,5204	0,2608	0,065204
4	2225,6	139,10	8,6939	0,3478	0,086939
5	2782,0	173,88	10,8674	0,4347	0,108674
6	3338,5	208,65	13,0408	0,5216	0,130408
7	3894,9	243,43	15,2143	0,6086	0,152143
8	4451,3	278,20	17,3878	0,6955	0,173878
9	5007,7	312,98	19,5613	0,7825	0,195613

Tabla VI.

Medidas agrias y de superficie.

Areas.	Pulgadas cuad.	Pies cuad.	Varas cuad.	Estadales cuad.	Fanegas de tierra.
1	185477,2	1288,04	143,115	8,945	0,0155
2	370954,3	2576,07	286,230	17,889	0,0311
3	556431,5	3864,11	429,345	26,834	0,0466
4	741908,6	5152,14	572,460	35,779	0,0621
5	927385,8	6440,18	715,575	44,723	0,0776
6	1112863,0	7728,22	858,691	53,668	0,0932
7	1298340,1	9016,25	1001,806	62,613	0,1087
8	1483817,3	10304,29	1144,921	71,558	0,1242
9	1669294,4	11592,32	1288,036	80,502	0 1398

(*) Esta tabla y la 13 fueron calculadas en el supuesto de que el quintal contiene 0,460093 quintales métricos.

Tabla VII.

Medidas cúbicas ó de solidez.

Metros cúbicos.	Pulg. cúb.	Pies cúb.	Varas cúb.
1=	79879,558=	46,226596=	1,712096146
2=	159759,116=	92,453192=	3,424192292
3=	239638,673=	138,679788=	5,136288438
4=	319518,231=	184,906384=	6,848384584
5=	399397,789=	231,132980=	8,560480730
6=	479277,347=	277,359576=	10,272576876
7=	559156,905=	323,586172=	11,984673022
8=	639036,462=	369,812768=	13,696769168
9=	718916,020=	416,039363=	15,408865314

Tabla VIII.

Monedas.

Cent.	Mrs.
1 =	0,34
2 =	0,68
3 =	1,02
4 =	1,36
5 =	1,70
6 =	2,04
7 =	2,38
8 =	2,72
9 =	3,06
10 =	3,40

Aunque en las tablas que preceden solo se hallan las equivalencias de los nueve números dígitos de unidades del sistema métrico en unidades del sistema antíguo, se encuentra, sin embargo, con facilidad por medio de las mismas la equivalencia de otro número cualquiera mayor ó menor que los calculados.

Para mayor claridad distinguiremos dos casos:

1.° Rducir un número de unidades del sistema métrico, que sea diez, ciento, mil, etc., veces mayor ó menor que los que se

Toño.

hallan calculados en las tablas á unidades del sistema legal antiguo.

2.° Reducir otro número cualquiera de unidades del nuevo sistema al antiguo.

Primer caso. Para resolver el primero de estos problemas observaremos, que en las tablas, al frente de cada uno de los números dígitos, que espresan las unidades del sistema métrico, se encuentran sus equivalencias en unidades del sistema antiguo, espresadas por un número decimal, y que estos números se hacen *diez, cien, mil*....veces mayores ó menores corriendo la coma uno, dos, tres...lugares á la derecha ó á la izquierda. Si quisiéramos averiguar, por ejmplo, cuántas varas contienen 3 kilómetros, ó sean 3000 metros, veríamos por la primera tabla que 3 metros valen 3,5889 varas; luego multiplicando este número por 1000, ó lo que es igual, corriendo la coma tres lugares hacia la derecha, se tendrán 3588,9 varas que serán la equivalencia de los tres kilómetros.

Si estos se hubiesen querido reducir á otra especie de unidades, por ejemplo, á pies, veriamos en la misma tabla, que tres metros equivalen á 10,7668 pies, y por consiguiente que 3 kilómetros equivalen á 10766,8 pies.

Si se desease reducir 8 centímetros á líneas, se verá en la misma tabla 1.ª que 8 metros valen 4134,4 líneas; y como 8 centímetros es un número cien veces menor que 8 metros, resulta que 8 centímetros equivalen á 41,344 líneas.

De la misma manera se verá que 90 hectólitros ó sean 9000 litros (tabla 2.ª) equivalen á 162,159 fanegas ó á 13,513 cahices.—Que 600 áreas (tabla 6.ª) equivalen á 5366,8 estadales cuadrados.—Que un decímetro cuadrado equivale á 18,54772 pulgadas cuadradas, puesto que el decímetro cuadrado es la diez milésima parte del área.—Y por último que 7 centímetros cúbicos valen 0,559156905 pulgadas cúbicas puesto que 7 metros cúbicos (tabla 7.ª) equivalen á 559156,905 pulgadas cúbicas, y que un centímetro cúbico es la millonésima parte del metro cúbico.

Segundo caso. Para resolver el 2.° problema, se descompone el número dado en otros que sean los calculados en las tablas ó diez, ciento, mil....veces mayores ó menores que ellos, y la resolucion del problema queda reducido á una suma de números decimales.

Si se preguntase, cuántas arrobas componen 327,56 kilógramos observaremos desde luego que el número dado se puede descomponer en 300 kilógramos mas 20 kilógramos mas 7 kilógramos mas 5 hectógramos mas 6 decágramos y como el primero de estos números equivale (tabla 5.ª) á 26,08 arrobas, el segundo á 1,739 idem, el tercero á 0,6086 idem, el cuarto á 0,04347 idem y el quinto á 0,005216 idem, sumando estos cinco números decimales se tendrá el resultado pedido.

Para mayor claridad se ordena la operacion de este modo, bastando apreciar en cada sumando tantas cifras como hay en el que tiene menos; agregando, sin embargo, las unidades que se lleven de la suma de la columna de sumandos que está á la derecha de aquella por donde principia á sumarse.

300 k. g.	26,08
20 id.	1,739
7 id.	0,6086
5 h. g.	0,04347
6 decág.	0,00522
Resultado	28,47 arrobas.

REDUCCION DE LAS MEDIDAS ACTUALES DE CASTILLA
A LAS MÉTRICAS.

Tabla IX.

Medidas longitudinales.

Líneas.	Metros.
1=	0,002
2=	0,004
3=	0,006
4=	0,008
5=	0,010
6=	0,012
7=	0,014
8=	0,016
9=	0,017

Pulgadas.	Metros.
1=	0,023
2=	0,046
3=	0,070
4=	0,093
5=	0,116
6=	0,139
7=	0,163
8=	0,186
9=	0,209

Pies.	Metros.
1=	0,278635
2=	0,557270
3=	0,835906
4=	1,114541
5=	1,393176
6=	1,671811
7=	1,950447
8=	2,229082
9=	2,507717

Varas.	Metros.
1=	0,835906
2=	1,671811
3=	......2,5077[illegible]7
4=	3,343623
5=	4,179528
6=	5,015434
7=	5,851340
8=	6,687246
9=	7,523151

Leguas.	Kilómetros.
$\frac{1}{4}$=	1,393176
$\frac{1}{2}$=	2,786352
$\frac{3}{4}$=	4,179528
1=	 5,572705
2=	11,145409
3=	16,718114
4=	22,290819
5=	27,863523
6=	33,436228
7=	39,008932
8=	44,581637
9=	50,154342

Tabla X.

Medidas de capacidad para áridos.

Ochavos.	Litros.
1=	0,289
2=	0,578
3=	0,867

Cuartillos.	Litros.
1=	1,156
2=	2,312
3=	3,468

Celemines	Litros.
1=	 4,625
2=	 9,250
3=	.....1.3,875
4=	18,500
5=	23,125
6=	27,750
7=	32,375
8=	37,000
9=	41,625

Fanegas.	Litros.
1=	...... 55,5[illegible]1
2=	......111 002
3=	166,503
4=	222,004
5=	277,505
6=	333,006
7=	388,507
8=	444,008
9=	499,509

Cahices.	Litros.
1=	 666,012
2=	1332,024
3=	1998,036
4=	2664,048
5=	..... .3330,060
6=	4996,072
7=	3662,084
8=	5328,096
9=	 5994,109

Tabla XI.

Medidas de capacidad para líquidos, escepto el aceite.

Copas.	Litros.
1=......	0,126
2=......	0,252
3=......	0,378

Cuartillos.	Litros.
1=......	0,504
2=......	1,008
3=......	1,512

Azumbres.	Litros.
1=......	2,017
2=......	4,033
3=......	6,050
4=......	8,068
5=......	10,083
6=......	12,100
7=......	14,116

Cántaras.	Litros.
1=......	16,133
2=......	32,266
3=......	48,399
4=......	64,532
5=......	80,665
6=......	96,798
7=......	112,931
8=......	129,064
9=......	145,197

Moyos.	Litros.
1=......	258,128
2=......	516,256
3=......	774,384
4=......	1032,512
5=......	1290,640
6=......	1548,768
7=......	1806,896
8=......	2065,024
9=......	2323,152

Tabla XII.

Medidas de capacidad para el aceite.

Panillas.	Litros
1=......	0,126
2=......	0,251
3=......	0,377

Libras.	Litros
1=......	0,503
2=......	1,005
3=......	1,508
4=......	2,010
5=......	2,513
6=......	3,015
7=......	3,518
8=......	4,020
9=......	4,523

Arrobas.	Litros.
1=......	12,563
2=......	25,126
3=......	37,689
4=......	50,252
5=......	62,815
6=......	75,378
7=......	87,941
8=......	100,504
9=......	113,068

—

Tabla XIII.

Medidas de peso.

Adarmes.	Kilógramos.
1=......	0,002
2=......	0,004
3=......	0,005
4=......	0,007
5=......	0,009
6=......	0,011
7=......	0,013
8=......	0,014
9=......	0,016

Onzas.	Kilógramos.
1=......	0,029
2=......	0,058
3=......	0,086
4=......	0,115
5=......	0,144
6=......	0,173
7=......	0,201
8=......	0,230
9=......	0,259

Libras.	Kilógramos.
1=......	0,460
2=......	0,920
3=......	1,380
4=......	1,840
5=......	2,300
6=......	2,761
7=......	3,221
8=......	3,681
9=......	4,141

Arrobas.	Kilógramos.
1=......	11,502
2=......	23,005
3=......	34,507
4=......	46,009
5=......	57,512
6=......	69,014
7=......	80,516
8=......	92,019
9=......	103,521

Quintales.	Kilógramos.
1=......	46,009
2=......	92,019
3=......	138,028
4=......	184,037
5=......	230,047
6=......	276,056
7=......	322,065
8=......	368,074
9=......	414,084

Tabla XIV.

Medidas de superficie y agrarias.

Pulgadas cuad.	Metros cuad.
1=	0,000539
2=	0,001078
3=	0,001617
4=	0,002157
5=	0,002696
6=	0,003235
7=	0,003774
8=	0,004313
9=	0,004852

Pies cuad.	Metros cuad.
1=	0,077638
2=	0,155275
3=	0,232913
4=	0,310550
5=	0,388188
6=	0,465826
7=	0,543463
8=	0,621101
9=	0,698738

Varas cuad.	Metros cuad.
1=	0,698738
2=	1,397477
3=	2,096215
4=	2,794953
5=	3,493692
6=	4,192430
7=	4,891168
8=	5,589907
9=	6,288645

Estadales cuad.	Areas.
1=	0,111798
2=	0,223596
3=	0,335394
4=	0,447193
5=	0,558991
6=	0,670789
7=	0,782587
8=	0,894385
9=	1,006183

Cuartillos de tierra.	Areas.
1=	1,341578
2=	2,683155
3=	4,024733

Celemines de tierra.	Areas.
1=	5,366310
2=	10,732621
3=	16,098931
4=	21,465241
5=	26,831552
6=	32,197862
7=	37,564173
8=	42,930483
9=	48,296793

Fanegas de tierra.	Areas.
1=	64,395724
2=	128,791449
3=	193,187173
4=	257,582898
5=	321,978622
6=	386,374346
7=	450,770071
8=	515,165795
9=	579,561520

Tabla XV.

Medidas cúbicas.

Pulgadas cúbicas.	Metros cúbicos.
1=	0,000013
2=	0,000025
3=	0,000038
4=	0,000050
5=	0,000063
6=	0,000075
7=	0,000088
8=	0,000100
9=	0,000113

Pies cúbicos	Metros cúbicos.
1=	0,021633
2=	0,043265
3=	0,064898
4=	0,086530
5=	0,108163
6=	0,129795
7=	0,151428
8=	0,173061
9=	0,194693

Varas cúbicas.	Metros cúbicos.
1=	0,584079
2=	1,168159
3=	1,752238
4=	2,336317
5=	2,920397
6=	3,504476
7=	4,088555
8=	4,672635
9=	5,256714

Tabla XVI.

Monedas.

Mrs.	Céntimos.	Mrs.	Céntimos.	Mrs.	Céntimos.
1=	 2,94	13=	38,24	25=	 73,57
2=	 5,88	14=	41,18	26=	 76,43
3=	 8,82	15=	44,12	27=	 79,41
4=	11,76	16=	47,06	28=	 82,35
5=	14,71	17=	50,00	29=	 85,29
6=	17,65	18=	52,94	30=	 88,24
7=	20,59	19=	55,88	31=	 91,18
8=	23,53	20=	,....58,81	32=	 94,12
9=	26,47	21=	61,77	33=	 97,06
10=	29,41	22=	64,71	34=	100,00
11=	32,35	23=	67,65		
12=	35,29	24=	70,59		

Con el ausilio de las tablas desde la 9.ª hasta la 15.ª se reduce un número cualquiera de unidades del sistema actual al métrico.

En esta reduccion pueden distinguirse dos casos.

1.° Reducir un número incomplejo, por ejemplo *pies* á unidades del nuevo sistema.

2.° Reducir un número complejo, por ejemplo quintales, arrobas, libras y onzas, á unidades del sistema métrico.

Primer caso: Para resolver el primero de estos casos, se procede de una manera análoga á la empleada en el caso 2.° de la página 210.

Ejemplo. 3587 varas ¿cuántos metros componen?

3000 varas (tabla 9.ª)....	2507,717
500........................	417,9528
80.........................	66,87246
7..........................	5,851340
Resultado................	2998,393 metros.

Segundo caso. Para resolver el 2.° problema de los propuestos se halla el valor de cada especie de unidades como se verifica en la resolucion del primero, y la suma de estos valores es el resultado que se pide.

Ejemplo. 325 arrobas, 7 libras y 3 onzas ¿cuántos kilógramos componen?

300 arrobas (tabla 13.ª)....	3450,7
20....................................	230,05
5......................................	57,512
7 libras............................	3,221
3 onzas............................	0,086
Resultado..........................	3741,5 kilógramos.