NOCIONES

DE

ALGEBRA

POR

D. Joaquín Fenollosa Martínez

PROFESOR POR OPOSICIÓN DE LA SECCIÓN DE CIENCIAS
DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MAESTROS
DE VALENCIA

VALENCIA.-1918
IMPRENTA DE MANUEL PAU
Lepanto, 27

...ENAL, 11 Y QUINTANA, 31 y 33 — MADRID

LIBRERÍA Y CASA EDITORIAL

HERNANDO, S. A.

ARENAL, 11, Y QUINTANA, 31 y 33. — MADRID

Para uso de
Emilio Arroyo

Ex libris Emilio Arroyo

NOCIONES DE ÁLGEBRA

para uso
de
Emilio Arroyo

La Coruña

Curso 1934-35

para uso
de
Emilio Arroyo

Madrid

NOCIONES

DE

ALGEBRA

POR

D. Joaquín Fenollosa Martínez

PROFESOR POR OPOSICIÓN DE LA SECCIÓN DE CIENCIAS
DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MAESTROS
DE VALENCIA

VALENCIA.-1918
IMPRENTA DE MANUEL PAU
Lepanto, 27

Joaquín [illegible]

PRIMERA PARTE

CALCULATORIA

CAPITULO PRIMERO

PRELIMINARES

I.—Definiciones y notación simbólica

1. **Álgebra.**—*Álgebra es la ciencia que estudia las leyes generales de la cantidad.*

El objeto del Algebra es abreviar y generalizar la resolución de las cuestiones relativas á la cantidad, y se diferencia de la Aritmética en que no se propone investigar las propiedades de los números, sino enseñar los medios y procedimientos para deducir unos de otros, o determinar los que cumplan las condiciones impuestas en un problema, ya valiéndose de las operaciones, ya empleando procedimientos especiales.

2. **Notación algébrica.**—Ya se ha visto en Aritmética ~~que~~ las cantidades se representan por los números que las miden, como resultado de su comparación con la unidad elegida y de su misma naturaleza; en el Álgebra,

para dar mayor generalidad a las cuestiones que en ella se propongan y evitar la confusión que pudiera ocasionar el auxilio del lenguaje y escritura ordinarios, es preciso recurrir al empleo de símbolos y signos que expresen las operaciones y transformaciones que deban efectuarse en la resolución de aquellas cuestiones; lo que constituye la *notación algébrica.*

Las cantidades se representan por las letras de nuestro alfabeto, designándose las que son conocidas por las primeras letras, $a, b, c, d, e,$..... y las cantidades desconocidas por las últimas..... u, x, y, z.

Generalmente las letras mayúsculas expresan resultados de operaciones efectuadas.

Cuando queramos poner de manifiesto la semejanza o analogía que guardan entre sí dos o más cantidades, suelen representarse éstas por letras del mismo nombre, pero afectadas de *índices* y *subíndices,* en esta forma:

$$a' \quad a'' \quad a''' \ldots\ldots$$
$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots\ldots$$

y que se enuncian diciendo: *a prima, a segunda, a tercera... a subuno, a subdos, a subtres,* etc.

Por el contrario, cuando una cantidad se tenga que diferenciar o distinguir de una manera más saliente de las demás que intervengan en el cálculo, bien por sus propiedades notables o porque con frecuencia se tenga que hacer referencia y aplicación y también por otras circunstancias dignas de tenerse en cuenta, representamos esta cantidad por una de las letras del alfabeto griego que conviene conocer, y cuyos caracteres y equivalencia con los de nuestro alfabeto se manifiestan en el siguiente cuadro:

ALFABETO GRIEGO

FIGURA		NOMBRE	EQUIVALENCIA
Mayúscula	Minúscula		
Λ.	α.	Alfa.	A
Β.	β.	Beta.	B
Γ.	γ.	Gamma.	C
Δ.	δ.	Delta.	E breve
Ε.	ε.	Epsilón.	D
Ζ.	τ.	Dscta.	Ds
Η.	η.	Eta.	E larga
Θ.	θ.	Theta.	Th
Ι.	ι.	Iota.	I
Κ.	κ.	Kappa.	K
Λ.	λ.	Lambda.	L
Μ.	μ.	Mu.	M
Ν.	ν.	Nu.	N
Ξ.	ξ.	Xi.	X
Ο.	ο.	Omicrón.	O breve
Π.	π.	Pi.	P
Ρ.	ρ.	Rho.	R
Σ.	ς.	Sigma.	S
Τ.	ι.	Tau.	T
Υ.	υ.	Upsilón.	U
Φ.	φ.	Phi.	Ph (f)
Χ.	χ.	Ji.	Ch
Ψ.	ψ.	Psi.	Ps
Ω.	ω.	Omega.	O larga

Respecto a los signos empleados en Algebra para indicar las operaciones del cálculo y las relaciones de las cantidades entre sí, son los mismos que los usados en Aritmética, y tienen también la misma significación.

Así el signo indicador de la adición es $+$, *más*. Para indicar, pues, que d se ha de sumar a c, escribiremos $c + d$.

El signo de la sustracción es —, *menos;* de modo que si deseamos expresar que de a se ha de restar b, se escribe $a - b$.

La multiplicación se indica con el signo $\times$, *por,* o también por un punto, colocado entre los factores. Si éstos estuviesen representados por letras se omite el signo y se escriben el uno junto a los otros.

Así $a\,b\,c$ indica que el primer factor a debe multiplicarse por b, y el producto obtenido por c.

Pero si los factores de un producto son numéricos, no puede prescindirse de colocar entre ellos el signo de la multiplicación; mas si uno de los factores fuese numérico y los demás representados por letras, entonces no habría ningún inconveniente en omitir la escritura del signo de esta operación.

Así $3 \times 4 \times 6$ no podría escribirse 3 4 6; pues igualmente designaría dicho producto que el número *trescientos cuarenta y seis,* que los productos 3 por 46, o 34 por 6.

La división se indica por medio del signo : , *dividido por,* o bien empleando la forma fraccionaria.

Así, para indicar a dividido b, escribiremos $a : b$, o también $\frac{a}{b}$.

La potenciación no tiene signo propio y se indica por la disposición especial en que se colocan sus datos; se escribe en la parte superior derecha de la cantidad que se ha de tomar por factor, que recibe el nombre de *dignando,* el número que indique cuántas veces se ha de tomar éste por factor, o sea el *exponente.*

Así:

$$a^2, \quad b^m$$

indicarán, respectivamente, la *segunda potencia* de a y la *emésima potencia* de b, siendo 2 y m los exponentes respectivos.

Toda cantidad que no lleve exponente se considera su primera potencia, y que, por lo tanto, el exponente omitido es la unidad.

La radicación se indica empleando el signo radical $\sqrt{\quad}$; debajo de él se escribe el *radicando* y en el ángulo que forma a la izquierda de dicho signo el *índice.* Cuando se trate de la raíz cuadrada no se escribe el índice.

Así:

$$\sqrt{a}$$
$$\sqrt[3]{b}$$
$$\sqrt[m]{c}$$

indicarán, respectivamente, *raíz cuadrada* de a, *raíz cúbica* de b y *raíz emésima* de c.

Para designar las comparaciones de igualdad o desigualdad entre dos cantidades, empléanse los signos llamados de relación: $=$, *igual;* $>$, *mayor que,* y $<$, *menor que.*

Así:

$$a = b$$
$$c > d$$
$$e < f$$

se leen, respectivamente: a igual a b, c mayor que d y e menor que f.

3. **La notación algébrica como medio de simplificación y de generalización.**—Si en cualquier investigación matemática se empleara el lenguaje y escritura ordinarios, sería difícil y hasta penoso el retener en la memoria las relaciones que ligan las cantidades conocidas con las que se persigue averiguar, así como también expresar las operaciones y transformaciones que hayan de efectuarse con los datos; estos inconvenientes se vencen con el empleo de la notación algébrica, como se verá en la resolución del siguiente

PROBLEMA.—*Repartir 50 pesetas entre tres personas, de modo que la prinera tenga 6 pesetas más que la segunda y ésta 7 más que la tercera.*

Vamos a resolver primeramente este problema, utilizando solamente los conocimientos que nos suministra la Aritmética.

Si conociésemos la parte menor obtendríamos inmediatamente las otras dos. Busquemos, pues, esta parte menor: la segunda le excede en 7 pesetas, y como la primera parte excede a ésta en 6, se ve que excede a la menor en 7 más 6, o, lo que es igual, en 13 pesetas; luego la suma de las tres partes es tres veces la parte menor más 7, más 7, más 6; pero esta suma, según indica el enunciado, es igual a 50. Si restamos de 50 la suma de $7 + 7 + 6$, que es 20, obtendremos un resto de 30, que es tres veces la parte menor, y, por consiguiente, dividiendo 30 por 3, se obtendrá 10 de cociente, que es la tercera de las partes que se buscan en el problema propuesto.

Siendo 10 la parte menor, la segunda será 10 más 7, igual 17; la primera 17 más 6, igual 23, y sumando las tres, 50.

Utilicemos la notación algébrica para la resolución de este problema y observaremos la ventaja que nos reporta su empleo.

Designemos la parte menor por. .	x
La segunda será.	$x+7$
La primera.	$x+7+6$
La suma de todas.	$3x+14+6$

es igual a 50, luego

$$3x+14+6=50$$

o su igual

$$3x+20=50$$

Si restamos 20 de los dos miembros de esta igualdad, los resultados formarán la siguiente:

$$3x=30$$

dividiendo ahora por 3 los dos miembros, se obtendrá

$$x=\frac{30}{3}=10$$

y conocida la parte menor, lo serán también las otras dos.

Como vemos, el empleo de la notación algébrica es una escritura abreviada que nos facilita los razonamientos empleados y reporta, además, la ventaja de poder generalizar los problemas, pues de este modo dichos razonamientos pueden hacerse sobre cantidades generales, y resuelven á la vez todas las cuestiones de la misma índole.

Generalizando: podemos enunciar el problema anterior de la siguiente forma:

Repartir el número S *en tres partes, de modo que la primera exceda en* n *a la segunda y ésta en* m *a la tercera.*

Razonando análogamente a como se hizo antes, tendremos:

Sea la parte menor.	x
La segunda será..	$x + m$
La primera.	$x + m + n$
La suma de las tres. . .	$3x + 2m + n$

ha de ser igual a S, luego

$$3x + 2m + n = S$$

que restando de los dos miembros de esta igualdad $2m$ y después n nos dará

$$3x = S - 2m - n$$

y dividiendo por 3 ambos miembros

$$x = \frac{S - 2m - n}{3} \qquad [1]$$

lo que nos dice de un modo general que en un problema de esta índole, *la parte menor se obtiene restando del número dado el duplo del primer exceso, después el segundo exceso, y dividiendo el resto obtenido por tres.*

4. **Fórmula.**—La solución general [1] de una investigación matemática, se llama *fórmula,* indica las opera-

ciones que hay que efectuar para llegar a la solución numérica de un caso particular, y traducida al lenguaje ordinario, origina una *regla.*

Para hacer aplicación de dicha fórmula, en un ejemplo numérico, se substituyen en ella las letras S, n y m por los valores particulares de cada caso y se efectúan las operaciones indicadas.

Así, para resolver el primer problema, haciendo aplicación de la fórmula, tendremos:

$$x = \frac{50 - 14 - 6}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

que es el mismo resultado que se ha obtenido antes directamente.

5. **Modalidad de las cantidades.**—Hemos visto que las cantidades o los números que las miden se representan en Algebra por letras; pero la notación expuesta no llena por completo el carácter elevado y transcendental de esta rama de la Matemática, que se propone obtener resultados generales, pues no basta considerar en los símbolos adoptados el valor cuantitativo o numérico de dichas cantidades, sino que se ha de atender también a la *modalidad* o *cualidad* de las magnitudes por ellas representadas, esto es, la manera especial de *ser* o de *influir* en el resultado que se persigue en una cuestión propuesta.

En general, una misma cantidad puede existir de maneras distintas, dando lugar a interpretaciones bien diferentes, que alteran el resultado de un problema.

Esta manera de ser o de influir de las cantidades, se deriva del *propósito* que se persigue en toda investigación matemática, pues mientras que las unas tienden a favorecer tal propósito, las otras, de opuesta manera, se oponen. Se ha convenido en llamar *positivas* a las primeras y *negativas* a las segundas.

Algunos ejemplos facilitarán la comprensión de los conceptos expuestos:

1.° Si nos proponemos averiguar las *ganancias* que ha obtenido un comerciante en un cierto tiempo, observaremos que las cantidades cobradas, las que hay en caja, los créditos cobrables y el valor de las existencias en almacén, contribuyen a favorecer el propósito que se persigue en esta cuestión, serán cantidades *positivas*, y los gastos, las deudas y vencimientos pendientes que tenga dicho comerciante, serán cantidades que contrarrestarán a las primeras oponiéndose a que aquel propósito se realice, considerándolas *negativas*.

2.° Supongamos un viajero en un punto de una línea férrea que va de Norte a Sur: si desea conocer la posición de una estación de dicha línea no le bastaría saber que se halla a *tantos* kilómetros de distancia, sino que además le precisará conocer en qué dirección se halla, si hacia la izquierda o hacia la derecha, y proponiéndose el viajero marchar a dicha estación, si está situada al Norte, las distancias que recorra en este sentido serán *positivas*, y las que recorra en sentido opuesto, *negativas*.

Existen otras muchas magnitudes que son susceptibles de tomarse en sentidos opuestos, como los grados de temperatura en la escala termométrica, que pueden contarse sobre o bajo cero, el tiempo anterior o posterior de una fecha determinada, etc.

Se comprende, pues, la necesidad de que las magnitudes que se sometan al cálculo, además del símbolo que las represente vayan afectadas de un signo que indique cuál es la modalidad de cada una. Las cantidades positivas van precedidas del signo $+$ (más) o no llevan ninguno; las negativas van siempre precedidas del signo — (menos).

Como consecuencia del razonamiento anteriormente expuesto, se deduce que siempre que intervengan en el cálculo dos cantidades, una positiva y otra negativa, cuando sus valores cuantitativos sean iguales, darán un resultado nulo o cero, pero si sus valores cuantitativos fueran distintos, se obtendría por resultado la diferencia entre dichos valores, afectada del signo de la que lo tuviera mayor.

6. **Relación de magnitud entre las cantidades positivas y negativas, de éstas entre sí y con cero.**—Fundándonos en el carácter opuesto de las cantidades positivas y negativas, y en el axioma que dice: que *una cantidad es mayor que otra cuando es igual a ésta, aumentada en una tercera cantidad,* podemos demostrar ciertas relaciones de magnitud existentes entre las cantidades positivas y negativas, de éstas entre sí y con cero.

1.ª *Toda cantidad positiva es mayor que cualquiera otra negativa.*

En efecto, según el axioma expuesto:

$$-a < -a + (a + b)$$

que nos da

$$-a < -a + a + b$$

y como

$$-a + a = 0$$

luego

$$-a < +b$$

2.ª *Toda cantidad negativa es menor que cero.*

En efecto:

$$-a < -a + a$$

de donde

$$-a < 0$$

3.ª *De dos cantidades negativas es menor la de mayor valor absoluto.*

En efecto:

$$-(a + b) < -(a + b) + b$$

que nos da

$$-(a + b) < -a - b + b$$

de donde

$$-(a + b) < -a$$

7. **Serie numérica doblemente indefinida.**—Demostradas las anteriores relaciones, no hay ningún inconveniente en la admisión de un límite común entre las cantidades positivas y negativas, y este límite es el cero. Y así como en Aritmética hemos visto que la serie numérica era indefinida a partir de cero, en el sentido aumentativo de unidades, aquí podemos sentar que es *doblemente indefinida,* como se indica a continuación:

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

II.—Expresiones algebraicas

8. **Definiciones.**—*Recibe el nombre de expresión algebraica, una cantidad o conjunto de cantidades representadas por letras, o por números y letras, que están ligadas por los signos del cálculo.*

Ejemplos de expresiones algebraicas lo son:

$$a^2 b^2 \qquad 3\,a\,b \qquad 7\,a - 5\,b^2 + 3\,a^2\,b$$

Términos de una expresión algebraica son las cantidades o grupos de cantidades que la forman y que se hallan materialmente separadas por los signos + y —.

Cada término se considera unido al signo que le precede, y cuando no le precede signo escrito, el signo más está sobreentendido.

Los términos son *positivos* o *aditivos* cuando llevan delante el signo más, escrito o sobreentendido, y son *negativos* o *sustractivos* cuando van precedidos del signo menos.

Ejemplo:

La expresión

$$5\,a^2\,b - 2\,a^3 + 7\,a$$

consta de los tres términos

$$5\,a^2\,b \qquad -2\,a^3 \quad \text{y} \quad 7\,a$$

El primero y tercero son positivos y el segundo es negativo.

Coeficiente, es un factor numérico que precede a la parte literal para indicar cuántas veces se ha tomado a ésta por sumando.

Ejemplo:

En la expresión

$$3\, a^2\, b\, c^4$$

el coeficiente es 3, y atendiendo a su significación, se tendrá

$$3\, a^2\, b\, c^4 = a^2\, b\, c^4 + a^2\, b\, c^4 + a^2\, b\, c^4$$

Cuando un término de una expresión no lleve coeficiente, se sobreentiende que es la unidad.

Así,

$$a^2\, b^3$$

se considera que su coeficiente es 1.

9. **Clasificaciones de las expresiones algebraicas.**— Las expresiones algebraicas pueden ser: *racionales, irracionales, enteras* o *fraccionarias.*

Una expresión es *racional* cuando no contiene ninguna letra bajo el signo radical.

Ejemplos: son expresiones racionales

$$6\, a^2\, b \qquad 5\, a\, x^2 + 4\, a \sqrt{36} \qquad 4\, a - \frac{2\, a\, b}{c}$$

Una expresión es *irracional* cuando contiene alguna letra bajo el signo radical.

Ejemplos:

$$3\sqrt{a} \qquad 2\,a^2 - \sqrt{3\,a}$$

son expresiones irracionales.

Se dice que una expresión es *entera* cuando es racional y no tiene ningún denominador algebraico.

Ejemplos:

$$-5\,a^2 c \qquad -6\,a + \frac{2}{5} \qquad \frac{4}{7}\,a\,b^2$$

son expresiones enteras.

Una expresión es *fraccionaria* cuando contiene algún denominador literal.

Ejemplos:

$$\frac{2\,a\,b\,c}{x} \qquad 2\,a^2 + \frac{7}{a}$$

son expresiones fraccionarias.

También se clasifican las expresiones atendiendo al número de sus términos.

La expresión algebraica que consta de un solo término, recibe el nombre de *monomio*; si de dos, *binomio;* si de tres, *trinomio,* y, en general, cuando consta de varios, *polinomio.*

Ejemplos:

$3\,a^2\,b\,c$ es un monomio.

$2\,a + 5\,b\,c$ es un binomio.

$-6\,b^2 + \frac{2}{5}\,a - 7\,a^2\,b$ es un trinomio.

$-15\,a^3 + 4\,b\,c - 8\,a^2 b^2 + 9\,b$ es un polinomio.

10. **Grado de una expresión.**—*Grado* de un monomio entero con respecto a una de sus letras es el mayor exponente de esta letra.

Ejemplo:

Los monomios

$$3\,a^4\,c^2 \qquad \text{y} \qquad 7\,a^6\,b\,c^4$$

son de cuarto y sexto grado, respectivamente, con relación a la letra a, y de segundo y cuarto, respecto a la letra c.

Grado de un monomio con relación a todas sus letras es el número de sus factores literales y se obtiene tomando la suma de sus exponentes (*).

Ejemplos:

Los monomios

$$-\,5\,a^2\,b^3 \qquad \text{y} \qquad 6\,a\,b^2\,c^3$$

son de quinto y sexto grado, respectivamente.

Cuando el monomio sea fraccionario se obtiene su grado hallando la diferencia entre el grado del numerador y el del denominador, y si es irracional, su grado es el cociente de dividir el grado de la cantidad subradical por su índice.

Ejemplos:

El monomio

$$\frac{2\,a^2\,b^5}{a\,b^2}$$

(*) Téngase en cuenta que una letra si no lleva exponente escrito se entiende es la unidad.

es de primer grado con respecto a la letra *a;* de tercero, respecto a la letra *b,* y de cuarto grado, no haciendo referencia a determinada letra.

Así, por ejemplo, el monomio

$$\sqrt{a^2 b^6}$$

es de cuarto grado, puesto que cuatro es el cociente de dividir el grado del radicando por el índice 2 de la raíz.

Grado de un polinomio con respecto a una de sus letras es el mayor exponente que contenga de esta letra, y en general, grado de un polinomio, cuando no se hace referencia a una letra determinada, es el del término que lo tenga mayor.

Ejemplo:

El polinomio

$$3\,a^2\,b^2 + 5\,a^4\,b + 6\,a^3\,b^3 - 8\,a^3$$

es de grado cuarto con respecto a la letra *a,* de tercer grado con respecto a *b,* y de grado sexto, no haciendo más indicación.

11. **Polinomio homogéneo.**—Un polinomio se dice que es *homogéneo* cuando tiene todos sus términos del mismo grado.

Ejemplo:

$$3\,a^4 - 5\,a^3\,b + 2\,a^2\,b^2 - 8\,a\,b^3 + 7\,b^4$$

es un polinomio homogéneo, puesto que todos sus términos son de cuarto grado.

12. **Ordenación de polinomios.**—Ordenar un polinomio con respecto a una de sus letras, es colocar todos sus términos de modo que dicha letra, llamada *ordenatriz,* tenga sus potencias en orden ascendente o descendente.

El término que no contiene la letra ordenatriz se denomina *término independiente.*

La ordenación de polinomios se dice que es en *orden creciente,* cuando los exponentes de la letra siguen de menor a mayor, y en caso contrario lo es en *orden decreciente.*

Ejemplos:

El polinomio

$$3\,a^4 - 5\,a^3 + 6\,a^2 + 7\,a + 20$$

está ordenado con relación a las potencias decrecientes de *a,* y el polinomio

$$4 - 2\,a + 9\,a^2 - 3\,a^3 + 8\,a^4$$

lo está con relación a las potencias crecientes de la misma letra.

La ordenación de un polinomio no altera el valor de éste, puesto que únicamente se reduce a un cambio de lugar de sus términos, conservando cada uno su valor y su manera de ser; esto es, su modalidad.

Cuando el polinomio es homogéneo con respecto a dos letras y se le ordena con relación a las potencias crecientes de una de ellas, es evidente que quedará también ordenado con relación a las potencias decrecientes de la otra, ya que los exponentes de una van aumentando en el mismo número de unidades que los de la otra disminuyen, para que, sumados, den el mismo número.

Ejemplo:

El polinomio homogéneo

$$5\,a^4 - 3\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 - 7\,a\,b^3 - b^4$$

está ordenado según las potencias decrecientes de a, resultando también ordenado con relación a las potencias crecientes de b.

Si el polinomio que se quiere ordenar tuviera varios términos en los cuales la letra ordenatriz llevara igual exponente, se procede escribiendo dentro de un paréntesis dichos términos con sus signos, sin la potencia de la letra ordenatriz, y fuera del paréntesis esta potencia.

Ejemplo ilustrativo:

Ordenando el polinomio

$$2\,a^2 + 3\,a^3\,b^3 - 3\,a^4 + 6\,a\,b^2 + 8\,a + 9\,a^3\,b^2 + \\ + 14\,a^3\,b - 13\,a^2\,b^2$$

con relación a las potencias decrecientes de a, tendremos:

$$-3\,a^4 + (14\,b + 9\,b^2 + 3\,b^3)\,a^3 + (2 - 13\,b^2)\,a^2 + \\ + (8 + 6\,b^2)\,a$$

En este caso puede también disponerse la ordenación del siguiente modo: se escriben en columna todos los términos que tengan igual potencia de la letra ordenatriz, con sus signos, se traza una línea vertical y a su derecha y en el mismo renglón en que esté escrito el primer término, se pone la potencia de la letra ordenatriz común a todos los términos de la misma columna.

Ejemplo ilustrativo:

El polinomio ordenado anteriormente puede disponerse de esta forma:

$$
\begin{array}{rr|rr|rr|r}
-3\,a^4 & +14\,b & a^3 & +2 & a^2 & +8 & a \\
 & +\ 9\,b^2 & & -13\,b^2 & & +6\,b^2 & \\
 & +\ 3\,b^3 & & & & &
\end{array}
$$

13. **Polinomio completo respecto a una letra.**—Se dice que un polinomio es completo respecto a una letra ordenatriz, cuando contiene términos de todas las potencias de esta letra, desde el que la tenga con mayor exponente, hasta el término independiente de la misma. En caso de que falten algunos de los términos con potencias intermedias o falte el término independiente, el polinomio es *incompleto.*

Ejemplos:

El polinomio

$$2\,a^3 - 3\,a^2 - 6\,a + 8$$

es completo. El polinomio

$$3\,b^4 + 6\,b^2 + 9$$

es incompleto, pues le faltan los términos que contengan b^3 y b.

14. **Términos semejantes.**—*Términos semejantes* son aquellos que constan de las mismas letras afectadas de iguales exponentes, cualesquiera que sean sus coeficientes y sus signos.

Ejemplo:

$$-4\,a^3\,b\,c \qquad 12\,a^3\,b\,c \qquad -\frac{2}{7}\,a^3\,b\,c$$

son términos semejantes.

15. **Reducción de términos semejantes.**—Reducir en una expresión dos o más términos semejantes es reemplazarlos por uno sólo, semejante a ellos, sin que se modifique el valor de la expresión.

Sea el polinomio

$$3\,a^3 - 5\,a^2\,b - 3\,a\,b^2 - 3\,a^2\,b + 2\,a^3 + 7\,a\,b^2 + 4\,a^3$$

Los términos $3\,a^3$, $2\,a^3$ y $4\,a^3$ son semejantes y pueden reemplazarse por $9\,a^3$, puesto que a^3 debe ser tomado por sumando tres veces, más 2 veces, más 4 veces, es decir: $3 + 2 + 4 = 9$.

Son también semejantes los términos $7\,a\,b^2$ y $-3\,a\,b^2$, que pueden reemplazarse por $4\,a\,b^2$, ya que la cantidad $a\,b^2$ se ha de considerar como sumando 7 veces y como sustraendo 3 veces.

Por último, los términos semejantes $-5\,a^2\,b$ y $-3\,a^2\,b$, indican que la cantidad $a^2\,b$ se ha de considerar 5 veces como sustraendo y otras 3 de igual modo, esto es: 8 veces, o sea, $-8\,a^2\,b$.

Tendremos, pues:

$$3\,a^3 - 5\,a^2\,b - 3\,a\,b^2 - 3\,a^2\,b + 2\,a^3 + 7\,a\,b^2 + \\ + 4\,a^3 = 9\,a^3 + 4\,a\,b^2 - 8\,a^2\,b$$

De las consideraciones que acabamos de exponer, se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir dos o más términos semejantes del mismo signo se suman los coeficientes, y a la suma se le escribe el mismo signo y parte literal que aquéllos tengan.*

Para reducir dos términos semejantes de distinto signo se restan los coeficientes, y a la diferencia (tomada como coeficiente) se le escribe la misma parte literal, con el signo del que tenga mayor coeficiente.

Cuando sean varios los términos semejantes que quieran reducirse de distintos signos, se suman los coeficientes de los términos positivos y, separadamente, los de los negativos; réstese la suma menor de la mayor, y a la diferencia se le pone el signo de la suma mayor, la cual se hallará afectada de la misma parte literal.

16. **Valor numérico de una expresión.**—Llámase *valor numérico* de una expresión algebraica al resultado final que se obtiene al efectuar todas las operaciones indicadas, después de sustituir las letras de la expresión por los valores que ellas representan.

Ejemplos:

1.° El valor numérico de la expresión

$$C = c\,(1 + r)^t$$

para

$$c = 1500 \qquad r = 0{,}5 \qquad t = 2$$

será

$$C = 1500\,(1 + 0{,}5)^2 = 3375$$

2.º Hallar el valor numérico de la expresión

$$5\,a^2 + 7\,a^2\,b + 6\,a\,b^2$$

Haciendo

$$a = 2 \qquad \text{y} \qquad b = 3$$

tendremos:

$$5.\,4 + 7.\,4.\,3 + 6.\,2.\,9 = 212$$

17. **Expresiones equivalentes.**—Se dice que dos o más expresiones son *equivalentes,* cuando tienen igual valor numérico al sustituir las letras de igual nombre por los mismos números.

Así, por ejemplo, la expresión

$$(a + b)^2$$

y la que sigue

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

son equivalentes.

Haciendo

$$a = 2 \qquad \text{y} \qquad b = 3$$

se obtiene para la primera

$$(a + b)^2 = (2 + 3)^2 = 25$$

y para la segunda

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2 = 2^2 + 2.\,2.\,3 + 3^2 =$$
$$= 4 + 12 + 9 = 25$$

De modo que el valor numérico de las dos expresiones dadas es 25, al hacer la sustitución en las condiciones expuestas.

18. **Forma polinómica de un número entero o fraccionario decimal.**— Un número entero de varias cifras puede descomponerse en sus distintos órdenes de unidades, formando una suma de tantos sumandos como órdenes de unidades numerales intervengan en su expresión.

Así, el número

$$52378 = 50000 + 2000 + 300 + 70 + 8$$

y como

$$\begin{aligned} 50000 &= 5 \times 10000 \\ 2000 &= 2 \times 1000 \\ 300 &= 3 \times 100 \\ 70 &= 7 \times 10 \end{aligned}$$

se tendrá que

$$52378 = 5.\,10000 + 2.\,1000 + 3.\,100 + 7.\,10 + 8$$

Representemos por b la base del sistema de numeración en que esté expresado el número entero: b^2 representará la unidad numeral del orden inmediato superior, b^3 la del orden siguiente, y así las unidades de los órdenes superiores estarán representadas, respectivamente, por b^4, b^5, b^6,... etcétera.

Empleando esta notación, el número propuesto estará representado de este modo

$$52378 = 5\,b^4 + 2\,b^3 + 3\,b^2 + 7\,b + 8$$

o sea bajo la forma de un polinomio completo y ordenado con respeto a las potencias decrecientes de b, cuyos coeficientes son los valores absolutos de sus cifras y en el que su último término es independiente de la letra ordenatriz.

De donde se deduce *que todo número entero de varias cifras es el valor numérico de un polinomio completo y ordenado con respecto a una letra ordenatriz, reemplazada o sustituída ésta por la base del sistema de numeración en que esté expresado el entero y que los coeficientes de sus términos son respectivamente las cifras de dicho número.*

Si el número propuesto no tuviera unidades de algún orden determinado, resultaría un polinomio incompleto.

Así, el número 9040 nos daría el polinomio

$$9\,b^3 + 4\,b$$

que, como se ve, es incompleto.

Consideremos ahora un número fraccionario decimal, el 653'472, por ejemplo, y teniendo en cuenta que las unidades inferiores a la fundamental, o sean las unidades fraccionarias decimales, se expresan

$$0'1 = \frac{1}{10}$$

$$0'01 = \frac{1}{100}$$

$$0'001 = \frac{1}{1000}$$

etcétera, el número propuesto podrá escribirse en la siguiente forma:

$$653'472 = 6.\,100 + 5.\,10 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

y empleando la notación de

$$10 = b \qquad 100 = b^2 \qquad 1000 = b^3\text{..., etc.,}$$

se tendrá

$$653'472 = 6.\,b^2 + 5.\,b + 3 + \frac{4}{b} + \frac{7}{b^2} + \frac{2}{b^3}$$

Lo que nos dice, que *un número fraccionario decimal puede expresarse por un polinomio de términos positivos y fraccionarios, que tengan por numerador las cifras representativas de los órdenes numerales a que pertenecen, y por denominador la base del sistema de numeración, afectada de un exponente que indique el orden de dichas unidades numerales.*

EJERCICIOS

1. Expresar la suma de $x + x + x$.
2. ¿Cuál es la suma de $y + y + y + \ldots$ teniendo n sumandos?
3. ¿Cuál es el coeficiente del término $a^3\, b^2$?
4. El lado de un cuadrado tiene x metros; ¿cuántos metros tendrá su perímetro?
5. Indicar el producto de la cuarta potencia de a por la quinta potencia de b.
6. Expresar el cociente de la suma de b y c por a.
7. Escribir varias expresiones algebraicas y contar el número de términos que tenga cada una.
8. Escribir varios polinomios de cinco términos y distinguir en cada término el coeficiente y la parte literal.

9. Escribir varios monomios de cuarto grado respecto a una de sus letras.

10. Escribir varios monomios de sexto grado respecto a todas las letras que contenga cada monomio.

11. Escribir varios polinomios homogéneos de cuarto grado respecto a las letras a y b.

12. Ordenar los siguientes polinomios respecto a las potencias decrecientes de a.

1.° $4a + 3a^3 + 6a^4 - 8a^2 + 6.$

2.° $3a^3 - 12a^4 - 5a^6 + 2a^5 - 7 + 9a^2.$

3.° $-15a^6 + 12a^3 - a^2 + 3a^4 - a + 6a^3.$

4.° $-5a^2b + 3a^4b - 5a^3b^2 + 6a^5b + b^2 + a.$

5.° $7ax + 9a^2x + 3a^2x^2 + 5ax^2 + 3a^3 + 7ax^3 +$
$+ 3a^3x - 15a^2x^3 + 5a^3.$

13. Ordenar los siguientes polinomios según las potencias crecientes de a:

1.° $4a + 3a^4 + 5a^2 - 15a^3 - 18a^5.$

2.° $3a^2 - 7a^6 - 8a^4 + 9a^5 + 2a + 12.$

3.° $-15a^3 + 5a^4 - 6a^6 - 11a + 9 + 13a^5.$

4.° $-12a^2x - 13ax^2 + 6a^3x + 4a^4x^3 - x^4.$

5.° $13a^4x^2 + 14a^2x^2 + 8ax - a^2 + 6a^5x^2.$

6.° $15ax + 3a^2x^2 - 3ax^2 + 5a - 12a^2x +$
$+ 6a^3x - 5a^2x^3 + 4a^4x - 7a^2x^3 - 5a^2x^2 +$
$+ 15a^4 + 10x^3.$

7.º $6\,a^2\,b + 4\,a^3\,b^2 - 9\,a^4\,b^3 - 3\,a^2\,b^4 + 7\,a\,b -$
$- 17\,a^3\,b + 2\,a^2\,b - 9\,b^4\,a^2 + 5\,a\,b -$
$- 8\,a^2\,b^3 - a\,b^2$.

14. Escribir varios polinomios completos respecto a la letra a.

15. Expresar por escrito varios polinomios homogéneos y completos respecto a las letras a y b.

16. En el trimonio siguiente, ¿cuáles son los términos semejantes?

$$4\,a^2\,b^3 + 5\,a^3\,b^2 - 3\,a^2\,b^3$$

17. Indicar los términos semejantes de los polinomios siguientes:

1.º $2\,a^2\,x + 3\,a^3\,x^2 + 3\,a^2\,x - 15\,a^3\,x^2 - 6\,a^2\,x$.

2.º $3\,a\,b^2 + 5\,a\,b - 3\,a^2\,b + 5\,a\,b^2 - 8\,a^2\,b$.

3.º $12\,a\,b^2\,c - 8\,a^2\,b\,c + 5\,a\,b^2\,c + 4\,a\,b\,c^2 - 7\,a\,b^2\,c$.

4.º $9\,a^2\,b^3 + 4\,a^3\,b^2 - 5\,a^2\,b^3\,c + 6\,a^3\,b^2\,c + 3\,a^2\,b^3 +$
$+ 7\,a^8\,b^2\,c$.

18. Efectuar la reducción de términos semejantes en cada una de las expresiones siguientes:

1.º $14\,a^2\,b^2\,c + 7\,a^2\,b^2\,c$.

2.º $15\,a^3\,b^2 - 15\,a^3\,b^2$.

3.º $15\,a^2\,b + 3\,a^3\,b + 6\,a^2\,b - 5\,a\,b^3 + 2\,a^3\,b - 7\,a\,b^3$
$12\,a^2\,x - 7\,a^2\,x$.

4.º $2\,a^2\,x - 11\,a^2\,b^2 - 3\,a^2\,x + 5\,a^2\,x - 2\,a^2\,b^2 + 3\,a^2\,x$.

19. Hallar el valor numérico de cada uno de los monomios siguientes, suponiendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

1.° $3\,a^4$.

2.° $2\,a^5\,b$.

3.° $-17\,a^4\,b\,c$.

4.° $-2\,a^2\,b^2\,c^2$.

20. Calcular el valor numérico de las siguientes fórmulas de Geometría, haciendo

$$R = 5 \text{ y siendo } \pi = 3'1416$$

1.° $C = 2\,\pi\,R$.

2.° Area del círculo $= \pi\,R^2$.

21. Calcular el valor numérico de las expresiones siguientes, haciendo $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$.

1.° $\frac{2}{3}\,a$.

2.° $\frac{2}{4}\,a^2\,b$.

3.° $\frac{2}{5}\,a^3\,b^2\,c$.

4.° $2\,a^2 + \frac{2}{4}\,a\,b\,c^2$.

22. Calcúlese el valor numérico de las siguientes expresiones algébricas, haciendo $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ y $d = 4$.

1.º $2\,a + 3 + b + 2\,c.$

2.º $5\,a\,b + 2\,c - 5\,c - a\,b\,c.$

3.º $4\,a\,b - 5\,a\,b\,d - 6\,a\,b\,c.$

4.º $2\,a^2 + 3\,b^2 - 5\,c^2 + 4\,c^3.$

5.º $3\,a^2\,b - 7\,a^3\,b + 9\,a^2\,b^2 + 6\,a\,b^2.$

6.º $\frac{1}{2}\,a\,b + 4\,b^3 - \frac{2}{4}\,d^3.$

7.º $4\,a^2\,b + \frac{a+d}{2} + \frac{a + 2\,c + 2\,d}{b+d}$

8.º $8\,a\,b + \frac{2\,d + c^2 - b}{a^3} + \frac{c^2 + a^3 + d}{c+d} - \frac{1}{2}\,a^2\,d$

23. Averiguar si las siguientes expresiones son equivalentes cuando sean $a = 2$, $b = 5$ y $c = 4$.

$$2\,a^2 + \frac{c^2+b}{3} - a\,b = 2\,a\,b - \frac{2\,a^2\,b + b^2 + 3\,b}{2\,a^2} + b^2$$

24. Expresar en forma polinómica los siguientes números:

3'429 6'412 9'004 24'09 260'042 2'469 34'6092 42'30004 402'3005 3'460002.

CAPÍTULO II

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

I.—Adición

19. **Definición.**—*La* ADICIÓN *algebraica es una operación que tiene por objeto, dadas dos o más expresiones algebraicas, hallar otra cuyo valor numérico equivalga a la suma de los valores numéricos de las expresiones propuestas.*

Así, la suma de las expresiones $a - b$, $c - d$ y $f + g$, será una expresión que tenga por valor numérico la suma de los valores numéricos de dichas expresiones.

20. **Procedimiento operativo.**—Del concepto de la definición, se deduce la siguiente

REGLA.—*Para sumar dos o más expresiones algebraicas, se escriben a continuación unas de otras, con sus mismos signos, y se efectúa la reducción de términos semejantes, si los hay.*

Ejemplos:

1.° La suma del monomio $4\,a^2\,b$ y del $-4\,a\,b^5$ será:

$$4\,a^2\,b - 4\,a\,b^5$$

2.º Hallar la suma del polinomio $3\,a^4\,b + 5\,a^2 - 3\,a$ y del monomio $7\,a^2$; será:

$$3\,a^4\,b + 5\,a^2 - 3\,a + 7\,a^2$$

y reduciendo los términos semejantes $5\,a^2$ y $7\,a^2$, nos dará:

$$3\,a^4\,b + 12\,a^2 - 3\,a$$

3.º La suma de los polinomios $3\,a^3 + 5\,a^2\,b - 4\,a^3 - 2\,a\,b^2 + 6\,a^3$ y $-4\,a^2\,b + 8\,a\,b^2 + 9\,b^3$, será:

$$3\,a^3 + 5\,a^2\,b - 4\,a^3 - 2\,a\,b^2 + 6\,a^3 - 4\,a^2\,b + 8\,a\,b^2 + \\ + 9\,b^3$$

cuyos términos semejantes para su reducción podemos colocarlos en esta forma:

$$\begin{array}{llll} 3\,a^3 & + 5\,a^2\,b & - 2\,a\,b^2 & + 9\,b^3 \\ -4\,a^3 & - 4\,a^2\,b & + 8\,a\,b^2 & \\ +6\,a^3 & & & \\ \hline +5\,a^3 & + \,a^2\,b & + 6\,a\,b^2 & + 9\,b^3 \end{array}$$

21. **Observaciones.** — Del procedimiento operativo que acaba de següirse, se deducen las siguientes:

1.ª La adición algébrica no lleva en sí concepto aumentativo, como ocurre con esta misma operación aritmética, porque si se le añade a una cantidad cualquiera otra positiva, hay aumento, pero no puede decirse otro tanto cuando la cantidad adicionada es negativa, porque entonces hay disminución, como lo acredita el siguiente ejemplo: si a $15\,x$ le sumamos $-7\,x$ la suma será $15\,x - 7\,x = 8\,x$.

2.ª Un polinomio cualquiera se considera como la suma algébrica de todos sus términos.

3.ª Varios términos de un polinomio pueden encerrarse dentro de un paréntesis, conservando cada uno de ellos su signo y colocando delante del paréntesis el signo $+$.

Ejemplo:

El polinomio $2\,a^3 + 3\,b^2 + 4\,c - 6\,a^2\,b^2$, puede escribirse bajo la forma

$$2\,a^3 + (3\,b^2 + 4\,c - 6\,a^2\,b^2)$$

22. **Prueba de la adición algébrica.**—De la definición que se ha dado de esta operación, se deduce que puede comprobarse el resultado *hallando los valores numéricos de los sumandos y de la suma, y el valor numérico de ésta ha de ser igual a la suma algébrica de los valores numéricos de aquéllos.*

Ejemplo:

Sea la adición siguiente

$$\begin{array}{r}
3\,b + 5\,b^2\,x + 4\,x^2 \\
- 3\,b^2\,x + 8\,x^2 \\
- 2\,b - 6\,b^2\,x + 5\,x^2 \\
\hline
b - 4\,b^2\,x + 17\,x^2
\end{array}$$

demos a las letras valores arbitrarios, por ejemplo: $b = 1$ y $x = 2$; obteniendo ahora los valores numéricos de las citadas expresiones algebraicas, tendremos:

Valor numérico del primer sumando. .	29
» » » segundo » . .	26
» » » tercero » . .	6
Suma de estos valores numéricos. . . .	61

que es igual al valor numérico del polinomio

$$b - 4\,b^2\,x + 17\,x^2$$

que habíamos obtenido como suma.

EJERCICIOS

1. Expresar tres enteros consecutivos siendo x el menor de los tres.
2. Un niño que tenga ahora x años, ¿cuántos tendrá dentro de 12?
3. Una persona que tiene x pesetas y le dan m pesetas, ¿cuántas tendrá?
4. Un comerciante hizo dos compras: invirtió en la primera $x + n$ pesetas y en la segunda $x + y$ pesetas. ¿Cuánto fué el total de las compras efectuadas?
5. Un automóvil recorrió $x + z$ kilómetros; después $x + y$; después $x + n$ kilómetros. ¿Cuál es el total del recorrido?
6. Exprésese la suma de m y n disminuída en x unidades.
7. Cierto campesino compró un mulo por $m + n$ pesetas y una casa por $m + n + s$ pesetas. ¿Qué capital invirtió en sus compras?
8. Un comerciante comenzó su negocio con $a + b$ pesetas; en el mes siguiente ganó $b + c$; en el siguiente ganó $c + d$ y acumuló las ganancias al capital. ¿Cuánto sería la totalidad?
9. Adicionar a $3\,a^2\,b^2\,c$ la expresión $-\,9\,a^3\,b$.
10. Súmense los monomios siguientes:

1.º $2\,a^2\,b\,c^4$ y $-\,4\,a^2\,b^3\,x$.
2.º $3\,a\,x^2$ y $6\,a^2\,x$.

3.º $12\,a\,b\,c^2\,d$ y $-\,15\,a\,b^2\,c\,x$.

4.º $5\,a^3\,b\,c\,x$ y $-\,2\,a^3\,b^2\,x$.

11. Sumar los monomios:

$$\begin{array}{r} 12\,a\,b \\ -\;\;3\,a\,b^2\,c \\ 8\,a\,b^4 \end{array}$$

12. Sumar los monomios:

$$\begin{array}{r} 3\,a^2\,b\,x \\ 16\,a\,b^2\,x^2 \\ -\;\;5\,a\,b^3\,x \\ -\;\;6\,a^2\,b\,x^3 \end{array}$$

13. Súmense los monomios:

$$\begin{array}{r} -\;\;5\,a^2\,b\,c^2\,d \\ 15\,a\,b^2\,x \\ 7\,a\,b\,x^2 \\ -\;\;2\,a\,b^4 \end{array}$$

14. Súmense los polinomios siguientes:

$$\begin{array}{l} 3\,a^3\,b + \;\;5\,a^2\,b^2 + 2\,a\,b^3 \\ 7\,a^3\,b - 12\,a^2\,b^2 - 5\,a\,b^3 \end{array}$$

15. Efectuar la adición de los siguientes polinomios:

$$12\,a^2\,x + 3\,a^3\,b^2 + 2\,a^3\,b\,x + 6\,x$$

$$-\,3\,a\,x^2 + 4\,a^3\,b^2 - 8\,a^3\,b\,x$$

$$6\,a^2\,x - 8\,a^3\,b^2 - 6\,a\,b\,x^2 - 4\,x$$

16. Verifíquese la adición de los polinomios siguientes:

$$-\ 4\,a^2\,b - 3\,a^3\,b^2 + 6\,a^4\,b + 5\,a^2\,b^2$$

$$-\ 3\,a^2\,b + 4\,a^3\,b^2 - 5\,a\,b\,x + 6\,a$$

$$15\,a^2\,b - 8\,a\,b\,x + 5\,a$$

$$-\ 12\,a\,b^3 + 4\,a\,b\,x + 3\,a^3\,b + 14$$

II.—Sustracción

23. **Definición.**—*La* SUSTRACCIÓN *es una operación inversa de la adición, que tiene por objeto, dada la suma de dos expresiones algebraicas y una de ellas, hallar la otra.*

24. **Procedimiento operativo.** — Sea una expresión cualquiera, por ejemplo, el polinomio

$$a + b - c$$

del cual se quiere restar otra expresión

$$m - n + s$$

Del concepto de la definición se deduce que para efectuar esta sustracción hemos de encontrar una expresión que sumada con la segunda, se obtenga la primera; es decir, que el resto que buscamos será:

$$a + b - c - m + n - s$$

porque si a este polinomio le añadimos

$$m - n + s$$

tendremos

$$a + b - c - m + n - s + m - n + s$$

que reduciendo los términos semejantes, nos da el propuesto

$$a + b - c$$

Podemos, pues, establecer la siguiente

REGLA.—*Para efectuar la sustracción de dos expresiones algebraicas, se escriben a continuación del minuendo, todos los términos del sustraendo, con los signos cambiados, y después se efectúa la reducción de términos semejantes, si los hay.*

Ejemplo:

De

$$9\,x^2 + 5\,b\,x + 6\,b^2\,x + 3\,b^2$$

restar

$$3\,x^2 + 2\,b^2\,x - 5\,b^2$$

Apliquemos la regla precedente y se tendrá el resultado.

$$9\,x^2 + 5\,b\,x + 6\,b^2\,x + 3\,b^2 - 3\,x^2 - 2\,\cancel{b^2\,x} + 5\,b^2$$

y reduciendo los términos semejantes resulta

$$6x^2 + 5bx + 4b^2x + 8b^2$$

25. **Cambio de signo a uno o varios términos de un polinomio.**—Como consecuencia del procedimiento operativo de la sustracción, se deduce que un polinomio cualquiera puede suponerse como la diferencia de otros dos, de tal modo compuestos que uno de ellos esté formado por un cierto número de términos con sus propios signos, y el otro formado por los restantes términos con signos cambiados.

Por ejemplo, el polinomio

$$a + b - c + d - f - g$$

puede suponerse la diferencia entre

$$a + b - c$$

y

$$-d + f + g$$

cuya diferencia indicaríamos

$$a + b - c - (-d + f + g)$$

es decir,

$$a + b - c + d - f - g = a + b - c - (-d + f + g)$$

lo cual manifiesta que *se puede cambiar el signo a uno o varios términos de un polinomio, escribiéndolos dentro de un paréntesis precedido del signo menos.*

15 − (8 − 6) = 15 − 8 + 6

26. **Prueba de la sustracción algebraica.**—También podemos hacer uso de los valores numéricos para comprobar la sustracción de expresiones algebraicas, dando valores arbitrarios a las letras que en ellas intervengan, y teniendo en cuenta que *el valor numérico del minuendo ha de ser igual a la suma de los valores numéricos de sustraendo y resto,* o, lo que es lo mismo, *que el valor numérico del resto es igual a la diferencia de los valores numéricos de minuendo y sustraendo.*

Ejemplo:

Sea la sustracción

Minuendo	$5x^3 + 2bx^2 + 4b^2x + 3b^2$
Sustraendo	$2x^3 - 4bx^2 + 2b^2x + 6b^2$
Resto	$3x^3 + 6bx^2 + 2b^2x - 3b^2$

Haciendo $b = 1$ y $x = 2$, se tendrá:

Valor numérico del minuendo	59
Valor numérico del sustraendo	10
Valor numérico del resto	49

Lo que nos dice que la operación está bien hecha.

EJERCICIOS

1. Una persona que tenga ahora x años, ¿cuántos tenía en el año 1896?

2. Un caballero que tiene m pesetas, paga n pesetas. ¿Cuántas le quedan?

3. ¿Qué debemos agregar o sumar a $-5ax$ para obtener la expresión $7a$?

4. ¿Qué debemos restar de $12\,a^2\,b$ para que se obtenga $5\,a^2\,b$?

5. En una librería hay $m + x$ libros y se venden $r + x$. ¿Cuántos libros quedan por vender?

6. Un comerciante tiene de capital $m + n + r$ pesetas, de las cuales entrega $m + 2$ pesetas para atender a una letra y $r + y$ pesetas para los restantes pagos. ¿Cuánto dinero le queda?

7. Restar de $5\,a^2\,b^3$ la expresión $-5\,a^2\,b^3$.

8. Restar de cada una de las expresiones que siguen el monomio $-4\,a^2\,b^3$.

1.° $2\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 - 3\,a^2\,b + 5\,x$.
2.° $3\,a + 5\,a^2\,b^3 - 7\,a^3\,b - 5\,a^2$.
3.° $5\,m^4 + 3\,a^2\,b^2 + 7\,m + 3\,m^2$.

9. Efectuar la sustracción de los siguientes polinomios:

Minuendo $3\,a^2 + 5\,a^3\,b^2 - 7\,a + 13$.
Sustraendo $2\,a^3\,b^2 + 4\,a + 8$.

10. Efectúense las siguientes sustracciones:

1.° $(3\,a^2 + 5\,a^4 - 2\,a^3 + 7\,a) - (-4\,a^3 - 5\,b + m)$.
2.° $(-2\,a^4 + 3\,a^2 + a\,b - 3\,x) - (3\,a^4 + 3\,a\,b + 5\,a)$.
3.° $(7\,a^4 + 9\,a\,b^4 - 3\,a^2 + 8\,b) - (3\,a - 4\,a^2 - 5\,a^2)$.
4.° $(5\,m + 3\,m^2 - 3\,m^4) - (2\,x + 7\,m^2 + 3\,m + x^2)$.
5.° $(2\,x + 7\,a\,x - 3\,a^2) - (-3\,x + 4\,a^2 - 7\,a\,x + 5)$.
6.° $(3\,a\,m + 7\,a^2 + 3\,a\,m^3) - (-4\,a^2 - 3\,a^4\,m - 3\,a\,m^3)$.

III.—Multiplicación algebraica de expresiones enteras

27. **Definición.**—*La* MULTIPLICACIÓN *algebraica es una operación que tiene por objeto, dadas dos expresiones algebraicas, hallar otra que esté formada por magnitud y signo respecto a una de ellas lo que la otra es respecto a la unidad entera y positiva.*

Las expresiones que se han de multiplicar reciben la denominación de *factores* y el resultado se llama *producto.*

28. **Signo que corresponde a un producto de dos factores.**—De la definición que acabamos de exponer se deduce, que la multiplicación de los valores absolutos de los factores se efectuará como en Aritmética, y, respecto al signo que le corresponda al producto, tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:

Cuando los dos factores sean positivos, el producto también lo será, pues teniendo ambos factores igual signo que + 1, el producto ha de tener igual signo que uno cualquiera de los factores.

Cuando los factores sean negativos, teniendo cada uno de ellos diferente signo que la unidad positiva, el producto tendrá signo contrario a cualquiera de los factores, por lo que será positivo.

Si los factores son de signo contrario, como uno de ellos tiene igual signo que la unidad positiva, el producto debe tener el mismo signo que el otro factor, o sea el negativo, luego el producto será también negativo.

Todo lo cual origina los siguientes resultados:

$(+a)(+b) = +c$	$(+2)(+6) = +12$
$(+a)(-b) = -c$	$(+2)(-6) = -12$
$(-a)(+b) = -c$	$(-2)(+6) = -12$
$(-a)(-b) = +c$	$(-2)(-6) = +12$

En virtud de lo cual podemos sentar que:

El producto de dos factores es positivo o negativo, según tengan éstos signos iguales o diferentes, lo cual puede expresarse más brevemente diciendo:

Signos iguales dan $+$, y signos desiguales $-$.

29. **Signo que corresponde a un producto de varios factores.**—Un producto de varios factores es una serie de multiplicaciones sucesivas: el primero por el segundo, el producto obtenido por el tercero, etc.; cada multiplicación por un factor negativo producirá un cambio de signo, y, por tanto, *el producto será positivo o negativo, según que el número de factores negativos sea par o impar.* Así:

$$a \times (-b) \times c \times (-d) = abcd$$

$$e \times (-f) \times g \times (-h) \times (-l) = -efghl$$

30. **Potencia de una cantidad.**—El producto de varios factores iguales recibe el nombre de *potencia.*

La cantidad que se toma como factor recibe el nombre de *dignando* y el número de veces que éste se toma como factor se denomina *exponente.*

Se llama *grado* de una potencia el número ordinal que indica cuántos factores la determinan; cuando son dos recibe el nombre de *segunda potencia* o *cuadrado;*

cuando son tres, *tercera potencia* o *cubo;* cuando son cuatro, *cuarta potencia,* y así sucesivamente.

Ejemplos:

$$a.\,a = a^2$$

o sea la segunda potencia o cuadrado de a.

$$a.\,a.\,a = a^3$$

tercera potencia o cubo de a.

31. **Signo de una potencia.**—De los principios establecidos anteriormente (28 y 29) respecto al signo que corresponde a un producto de dos y de varios factores, se deduce inmediatamente que:

La potencia de una cantidad positiva es siempre positiva; la potencia de una cantidad negativa, será positiva o negativa según que el exponente sea par o impar.

Se tendrá, pues:

$$(+4)^2 = +16 \qquad (-4)^2 = +16 \qquad (-4)^3 = -64$$

Lo cual podremos expresar de un modo general, recordando que un número par se representa por $2n$ y un número impar por $2n + 1$, del siguiente modo:

$$(+a)^{2n} = +a^{2n} \qquad (+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

32. **Producto de dos potencias de igual dignando.**—*El producto de dos potencias de una misma cantidad, es otra potencia de dicha cantidad con un exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.*

Sea

$$a^m \times a^n$$

Como

$$a^m = a.\ a.\ a.\ a... \text{ (}m\text{ factores.)}$$

$$a^n = a.\ a.\ a... \text{ (}n\text{ factores)}$$

iguales a a se tendrá que el producto $a^m \times a^n$ constará $m + n$, factores iguales a a, es decir, que

$$a^m \times a^n = a.\ a.\ a... \times a.\ a.\ a... = a^{m+n}$$

En un ejemplo numérico tendríamos:

$$a^2 \times a^3 = a.\ a \times a.\ a.\ a = a^{2+3}$$

Por lo tanto, se puede establecer la siguiente

Regla.—*Para multiplicar dos potencias de igual dignando, se forma otra potencia de dicho dignando que tenga por exponente la suma de los exponentes de los factores.*

33. **Multiplicación de dos monomios.**— Propongámonos hallar el producto de los siguientes monomios:

$$8\, a^2\, b^3\, c\, d \times 4\, a\, b^2\, c^4$$

Cada monomio es un producto indicado de varios factores, luego el producto que se busca será:

$$8 \times a^2 \times b^3 \times c \times d \times 4 \times a \times b^2 \times c^4$$

y como un producto de varios factores no se altera aunque se invierta el orden de los mismos, tendremos:

$$8 \times 4 \times a^2 \times a \times b^3 \times b^2 \times c \times c^4 \times d$$

y efectuando los productos indicados en esta forma:

$$(8 \times 4)\ (a^2 \times a)\ (b^3 \times b^2)\ (c \times c^4)\ d$$

se obtendrá:

$$32\, a^3\, b^5\, c^5\, d$$

Por tanto,

$$8\, a^2\, b^3\, c\, d \times 4\, a\, b^2\, c^4 = 32\, a^3\, b^5\, c^5\, d$$

De donde se deduce la siguiente

REGLA.—*Para multiplicar dos monomios se determina el signo del producto, se multiplican sus coeficientes y a la derecha del resultado se escribe por parte literal todas las letras contenidas en ambos factores, cada una afectada de un exponente igual a la suma de los que tengan en dichos monomios y las letras contenidas en uno sólo de éstos, con sus exponentes respectivos.*

Ejemplos:

$$-3\, a^2\, b^3\, x \times 4\, a\, b^2 = -12\, a^3\, b^5\, x$$

$$5\, a\, b^3\, c^2\, d^4 \times -6\, a\, b^2\, d^3 = -30\, a^2\, b^5\, c^2\, d^7$$

34. **Productos de varios monomios.**—El producto de varios monomios se forma multiplicando el primer mo-

nomio por el segundo, el resultado obtenido por el tercero y así sucesivamente, de lo cual resulta la siguiente

Regla.—*Para obtener el producto de varios monomios se forma otro monomio con el signo que le corresponda, atendiendo al número de factores negativos (29), que tenga por coeficiente el producto de los de todos sus factores y por parte literal todas las letras contenidas en dichos factores, cada una con un exponente igual a la suma de los que tengan las letras de igual nombre.*

Ejemplo:

$$-2a^2b \times 3a^2b^3 \times -5ab^2c^3 \times -ab^3 =$$
$$= -30a^6b^9c^3$$

35. **Producto de un polinomio por un monomio.**—Sea el polinomio

$$a + b + c - d$$

que deseamos multiplicar por m. Distinguiremos los dos casos que pueden ocurrir; que m sea positivo o que sea negativo.

Considerando m positivo, el producto

$$(a + b + c - d)\, m$$

se compone de una suma de m sumandos iguales a

$$(a + b + c - d)$$

y, por tanto,

$$(a + b + c - d)\, m = (a + b + c - d) + (a + b +$$
$$+ c - d) + (a + b + c - d) + \dots (m \text{ veces})$$

y efectuando la adición y asociación correspondientes, tendremos:

$$(a + b + c - d)\, m = (a + a + a ...) + (b + b + b ... + \\ + (c + c + c ...) + (- d - d - d ...) = a\, m + b\, m + \\ + c\, m - d\, m$$

En el segundo caso, cuando m sea negativo, según queda demostrado,

$$(a + b + c - d)\, m = a\, m + b\, m + c\, m - d\, m$$

cambiando los signos a los dos miembros de esta igualdad y teniendo en cuenta que para cambiar el signo al primer miembro basta cambiárselo a uno de los factores, m, por ejemplo, se tendrá:

$$(a + b + c - d) \times - m = - a\, m - b\, m - c\, m + d\, m$$

Todo lo expuesto nos conduce a la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio y luego se suman los productos obtenidos.*

Ejemplo:

Multiplicar el polinomio $4\, a^2\, b + 7\, a^3\, b^2 - 5\, a^4\, c$ por el monomio $6\, a^2\, b\, c$.

Para mayor claridad, dispondremos la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 4\, a^2\, b + 7\, a^3\, b^2 - 5\, a^4\, c \\ 6\, a^2\, b\, c \\ \hline 24\, a^4\, b^2\, c + 42\, a^5\, b^3\, c - 30\, a^6\, b\, c^2 \end{array}$$

siendo el producto el polinomio que aparece debajo de la raya resultado de la adición de los productos obtenidos al multiplicar cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

36. **Producto de un monomio por un polinomio.**—El producto es siempre independiente en valor y en signo del orden de los factores; por lo tanto:

El producto de un monomio por un polinomio es el mismo que el del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

$$(-3\,a^2\,b^2 + 4\,a - 6\,a^3\,c)\,3\,a^2\,b = 3\,a^2\,b\,(-3\,a^2\,b^2 + 4\,a - 6\,a^3\,c)$$

37. **Separación de factor común.**—Cuando los términos de un polinomio, o algunos de ellos, tengan un mismo factor, tanto si es numérico como si es literal, puede *separarse el factor común,* indicando el producto de este factor por la suma de los factores que lo contengan, colocándolos entre paréntesis.

Ejemplos:

$$4\,a^2\,b - 3\,a^2\,c + 6\,a^2\,b\,c = (4\,b - 3\,c + 6\,b\,c)\,a^2$$

$$13\,a\,b^2\,c + 4\,a\,c^2 - 3\,a\,b\,c^2 + 2\,a\,b^2\,d = (13\,b^2\,c + 4\,c^3 - 3\,b\,c^2 + 2\,b^2\,d)\,a$$

En el primer ejemplo el factor común es a^2, en el segundo a.

38. **Producto de un polinomio por otro.**—Sea un polinomio $a + b - c$ que se ha de multiplicar por otro $m - n + s$.

Llamemos f al valor positivo o negativo del segundo factor, y tendremos:

$$(a + b - c)(m - n + s) = (a + b - c) f$$

y según lo expuesto en la multiplicación de un polinonomio por un monomio

$$(a + b - c) f = a f + b f - c f$$

y sustituyendo en esta igualdad en vez de f su igual $m - n + s$, se tendrá:

$$\begin{aligned}(a + b - c)(m - n + s) &= a(m - n + s) + \\ + b(m - n + s) - c(m - n + s) &= a m - a n + \\ + a s + b m - b n + b s - c m + c n - c s\end{aligned}$$

cuya interpretación origina la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un polinomio por otro, se multiplican todos los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y después se suman algébricamente los productos obtenidos.*

Al efectuar la multiplicación de un polinomio por otro, es conveniente ordenarlos respecto a una misma letra, pues se facilita de este modo la reducción de los términos semejantes que resulten, disponiéndose la operación como se indica en el siguiente

Ejemplo:

$$\text{Factores}\left\{\begin{array}{l} 2a^4 - 5a^3b + 3a^2b^2 + 7ab^3 \\ a^2 - 3ab + 5b^2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\hline
2a^6 & -\ 5a^5b & +\ 3a^4b^2 & +\ 7a^3b^3 & & \\
 & -\ 6a^5b & +\ 15a^4b^2 & -\ 9a^3b^3 & -\ 21a^2b^4 & \\
 & & +\ 10a^4b^2 & -\ 25a^3b^3 & +\ 15a^2b^4 & +\ 35ab^5 \\
\hline
2a^6 & -\ 11a^5b & +\ 28a^4b^2 & -\ 27a^3b^3 & -\ 6a^2b^4 & +\ 35ab^5
\end{array}$$

39. **Consecuencias.**—Del procedimiento operativo que se ha seguido en la multiplicación de expresiones algebraicas se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª El producto de dos o más monomios es un monomio.

2.ª El producto de un polinomio por un monomio, es otro polinomio de igual número de términos que el factor polinómico.

3.ª En la multiplicación de un polinomio por otro, se verifica:

a) El primer término del producto procede sin reducción de multiplicar los dos primeros de los factores, y el último término del producto se obtiene, también sin reducción, multiplicando el último término de uno de los factores por el último término del otro factor.

b) El número de términos del producto, antes de hacer la reducción, será igual al producto del número de términos de un factor por el número de términos que tenga el otro factor.

c) El producto de dos polinomios, después de hecha la reducción, constará por lo menos de dos términos.

d) El grado de un producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de dichos polinomios.

e) Si los factores son homogéneos, el producto también lo será.

40. **Prueba de la multiplicación algebraica.**—Análogamente a lo efectuado en la adición y sustracción, para comprobar el resultado en cada una de estas operaciones, *se prueba la multiplicación hallando el producto de los valores numéricos de los factores, que ha de ser igual al valor numérico del producto.*

Al multiplicar dos polinomios homogéneos, como el producto también lo ha de ser, es fácil entonces notar si hay alguna equivocación en letras y exponentes, y respecto a los coeficientes, pueden comprobarse, dando a todas las letras el valor 1, y, en este caso, el valor numérico de cada polinomio es igual a la suma algebraica de todos sus coeficientes.

Ejemplo:

Sea la multiplicación

$$\begin{array}{r}
2a^3 + 3a^2x - 5ax^2 + 8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
4a^2 - 3ax + 6x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\\
\hline
8a^5 + 12a^4x - 20a^3x^2 + 32a^2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad\\
- 6a^4x - 9a^3x^2 + 15a^2x^3 - 24ax^4 \qquad\quad\\
12a^3x^2 + 18a^2x^3 - 30ax^4 + 48x^5\\
\hline
8a^5 + 6a^4x - 17a^3x^2 + 65a^2x^3 - 54ax^4 + 48x^5
\end{array}$$

Si hacemos $a = 1$ y $b = 1$, tendremos:

$$\begin{array}{r} \text{Valores numéricos} \\ \text{de los factores. .} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 - 5 + 8 = 8 \\ 4 - 3 + 6 \qquad = 7 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{Valor número} \\ \text{del producto.} \end{array} \Big\} \; 8 + 6 - 17 + 65 - 54 + 48 = 56$$

Prueba. . . . $8 \times 7 = 56$

41. **Multiplicaciones de la forma** $(a \pm b)\ (a \pm b)$.— Tanto en el estudio de Álgebra como en sus aplicaciones se presentan con frecuencia casos de esta forma, cuyos productos revelan propiedades notables, de aplicación ventajosa, y que son convenientes saber de memoria.

1.° $(a + b)\ (a + b)$.

$$\begin{array}{l}
a + b\\
a + b\\
\hline
a^2 + ab\\
\quad\ + ab + b^2\\
\hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}$$

Y como ya se ha dicho anteriormente,

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2$$

se tendrá:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

lo que nos dice:

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, más el duplo de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

2.° $(a - b)(a - b)$.

$$\begin{array}{lcl}
a - b & & \\
a - b & & \\
\hline
a^2 - a\,b & & \\
\quad\; - a\,b + b^2 & & \\
\hline
a^2 - 2\,a\,b + b^2 & &
\end{array}$$

y como

$$(a - b)(a - b) = (a - b)^2$$

se tendrá

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + a^2$$

que nos dice que:

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el duplo de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

3.° $(a + b)(a - b)$.

$$\begin{array}{lcl} a + b & & \\ a - b & & \\ \hline a^2 + ab & & \\ \quad - ab & - b^2 & \\ \hline a^2 & - b^2 & \end{array}$$

de modo que

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

lo cual manifiesta que:

El producto de la suma de dos cantidades por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de estas dos cantidades.

EJERCICIOS

1. Expresar el doble de a.
2. Expresar el triplo de x.
3. ¿Cuánto costarán c metros de tela a razón de x pesetas metro?
4. En un campo hay m hileras de árboles y en cada fila hay n árboles. ¿Cuántos hay en todo el campo?
5. Exprésese cuánto es $a \times a \times a$.
6. Expresar el producto de n factores iguales a b.
7. Indicar la segunda potencia de a sumada a cuatro veces la tercera potencia de b.
8. Si un móvil recorre x kilómetros por hora, ¿cuántos recorrerá en $a + b + c + d$ horas?

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

9. $(a + b)\,2$.
10. $(a + b + c)\,4$.

Efectúense las multiplicaciones indicadas que a continuación se expresan:

11. $(a + b + c + d)\,n$.
12. $(2\,a + 2\,b - c)\,m$.
13. $(3\,a - b - c + 4\,d)\,x$.
14. $(2\,x + 3\,x + 5\,x)\,x$.
15. $(4\,x - 2\,x + 6\,x - 3\,x)\,x$.
16. $(3\,a + 2\,a - 5\,a)\,2\,a$.
17. $(6\,x^2 + 5\,x^3 + 4 - 7\,x^4)\,x$.

Multiplíquese:

18. $a^2 - a\,b^2 + b^3$ por $a^2\,b^2$.
19. $a^3 - a\,b^2 + b^4\,c$ por $2\,a^2\,b$.
20. $4\,x + 5\,x^2 - 3\,x + 4$ por -1.
21. $3\,a^2\,b^2 + 4\,a^2 - 3\,a^3\,b$ por $5\,a\,b\,c$.
22. $-7\,a^4 + 2\,a^3\,b - 5\,a^2\,b^2 - 6\,a\,b^3 + b^4$ por $2\,a^2\,b$.
23. $-12\,a^3\,x + 14\,a^2\,x^2 - 6\,a\,x^3 - 2\,x^4$ por $-7\,a^2\,x^2$.

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

24. $(a + 3)\,(a + 2)$.
25. $(a + 4)\,(a - 3)$.
26. $(a - 3)\,(a + 2)$.
27. $(a - 2)\,(a - 5)$.
28. $(x + 2 + x)\,(x + 3)$.
29. $(x + x^2 + 3)\,(x - 4)$.
30. $(x^2 + x + 2\,x\,y)\,(x + 3)$.
31. $(x^2 - x + x\,y + 3)\,(x + y)$.
32. Un comerciante hace una compra de tres partidas de arroz: la primera de $a + b + c$ kilos; la segunda doble que la primera y la tercera triple que la primera. Costando el kilo $a + b$ pesetas, ¿cuántas pesetas importa lo comprado?
33. La edición de una obra consta de $a + b$ ejem-

plares, cada ejemplar tiene $c - d$ pliegos y cada pliego tiene 16 páginas. ¿Cuántas páginas hay en todos los ejemplares de dicha obra?

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

34. $(2\,a + 3\,b^2 + 4\,c)\,(3\,a + 5\,b - c)$. $= 6a^2 + 9ab^2 + 10ac + 10ab + 20bc - 3b^2c + 15b^3 - 4c^2$

35. $(-\,3\,a^2 + 4\,b - 6\,c)\,(2\,a - 6\,b - 8\,c)$.

36. $(4\,a^3 - 2\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - 5\,b^2)\,(3\,a^2 - a\,b + 5\,b^2)$.

37. $(3\,a^2\,b^3\,c + 4\,a\,b^2\,c^3 + 5\,a^4\,b + 7\,c)\,(4\,a\,b\,c^2 - 3\,a^2 + 4\,a\,b^2\,c^5)$.

38. $(3\,a\,x^2 + 4\,a^2\,x + 5\,a^3)\,(5\,a^2\,x^3 + 7\,a^3\,x^2 - 9\,a^4\,x)$.

39. $(-\,5\,a^6 + 3\,a^4\,x^2 - 8\,a^2\,x^4 + 7\,x^6)\,(-\,3\,a^2 - 4\,a\,x + 5\,x^2)$.

40. Un propietario ha comprado un campo de x^2 hanegadas y otro de $x^2 + n + z$ hanegadas. Si el precio de cada hanegada es el de $a\,x + b\,x + c$ pesetas, ¿cuánto importa todo lo comprado?

IV.—División algebraica

42.—**Definición.**—*La* DIVISIÓN *es una operación inversa de la multiplicación, que tiene por objeto, dado el producto de dos expresiones algebraicas y una de ellas, determinar la otra, atendiendo a su modalidad y magnitud.*

43. **Regla de los signos.**—La determinación del signo que corresponde al cociente, se deduce considerando que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente y que, por lo tanto (28), cuando el dividendo sea positivo, procede de la multiplicación de dos factores que tengan igual signo, mientras que si el dividen-

do es negativo, los factores que lo han producido tendrán signos desiguales. Lo cual manifiesta:

Cuando el dividendo es positivo, el cociente tendrá el mismo signo que el divisor.

$$+a : +b = +c$$
$$+a : -b = -c$$

Cuando el dividendo es negativo, el cociente lleva signo contrario al del divisor.

$$-a : +b = -c$$
$$-a : -b = +c$$

Los cuatro resultados obtenidos, expresados literal y numéricamente, serán, pues:

$+a : +b = +c$	$+20 : +5 = +4$
$+a : -b = -c$	$+15 : -3 = -5$
$-a : +b = -c$	$+21 : +7 = -3$
$-a : -b = +c$	$-36 : -9 = +6$

lo que origina la siguiente regla de los signos en la división.

Signos iguales dan cociente positivo, y signos contrarios cociente negativo.

44. **Cociente de dos potencias de igual dignando.**—*El cociente de dos potencias de una misma cantidad, es otra potencia de la misma cantidad, que tenga por exponente la diferencia de los exponentes de dividendo y divisor.*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

lo cual es cierto, porque

$$a^{m-n} \times a^{n} = a^{m-n+n} = a^{m}$$

siempre que $m > n$.

Ejemplo:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

45. **Exponente nulo.**—Si en la igualdad

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

los exponentes m y n fueran iguales, dicha igualdad tomaría la forma

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

pero como también el cociente de una cantidad por sí misma es la unidad

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

se tendrá

$$a^0 = 1$$

luego podemos aceptar que *toda cantidad afectada del exponente cero es un símbolo de la unidad.*

46. **Exponente negativo.**—Cuando en el cociente $\frac{a^m}{a^n}$ sea $m < n$, si llamamos d a la diferencia, se tendrá

$$n = m + d$$

y, por lo tanto,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+d}} = a^{m-(m+d)} = a^{m-m-d} = a^{-d}$$

pero como

$$\frac{a^m}{a^{m+d}} = \frac{a^m}{a^m \times a^d} = \frac{1}{a^d}$$

resulta que

$$a^{-d} = \frac{1}{a^d}$$

Por consiguiente,

Toda cantidad con exponente negativo es un símbolo que representa el cociente de dividir la unidad por esa misma cantidad con igual exponente positivo.

47. **División de un monomio por otro.**—El procedimiento seguido en la multiplicación de dos monomios nos conduce inmediatamente a la siguiente

Regla.—*Para dividir un monomio por otro, se halla primero el signo del cociente, se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor y a la derecha del resultado se pone por parte literal todas las letras contenidas en el dividendo, cada una afectada de un exponente igual a la* *diferencia entre el exponente que tenga en el dividendo y el que tenga en el divisor. Las letras del dividendo que no se hallen en el divisor, figurarán en el cociente del mismo modo que en el dividendo.*

Las letras que tienen igual exponente en el dividendo que en el divisor, no aparecerán en el cociente, a no ser que vayan afectadas del exponente cero.

Ejemplos:

1.º $$\frac{12\, a^3\, b^2\, c\, d^4}{4\, a^2\, c\, d^3} = 3\, a\, b^2\, d$$

2.º $$\frac{45\, a^3\, b^4\, c^6\, d}{9\, a^2\, b^2\, c^3} = 5\, a\, b^2\, c^3\, d$$

Los resultados obtenidos en estos ejemplos son los verdaderos cocientes, porque si cada uno de ellos se multiplica por el divisor respectivo, dará el dividendo correspondiente.

48. **Condiciones de divisibilidad.**—De la regla que acabamos de enunciar se deduce que para que un monomio sea divisible por otro, esto es, que la división del uno por el otro dé un cociente entero, es preciso y suficiente que concurran las condiciones siguientes:

1.ª Que el coeficiente del dividendo sea divisible por el coeficiente del divisor.

2.ª Que los exponentes de las letras contenidas en el dividendo sean iguales o mayores que los exponentes que lleven esas mismas letras en el divisor.

3.ª Que todas las letras que figuren en el divisor se hallen en el dividendo.

Si la primera condición no se cumple, el cociente tendrá un coeficiente fraccionario, pero podrá ser *algébricamente entero,* siempre que se cumplan las restantes condiciones; pero si tampoco ocurre esto, entonces la división quedará indicada en todo o en parte, a no ser que se recurra al empleo de los exponentes negativos.

49. **División de un polinomio por un monomio.**—El procedimiento operativo que se ha seguido en la multiplicación de un polinomio por un monomio, nos permite desde luego formular la siguiente

Regla.—*Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada uno de los términos del dividendo por el monomio divisor y se forma un polinomio con los cocientes obtenidos, afectados éstos de los signos que les correspondan.*

Así,

$$\frac{a+b-c+d}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}$$

el cociente obtenido multiplicado por el divisor m, nos da el dividendo

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}\right)\times m=\frac{am}{m}+\frac{bm}{m}-\frac{cm}{m}+$$
$$+\frac{dm}{m}=a+b-c+d$$

Ejemplos:

1.° $\frac{20\,a^4\,b^2+15\,a^2\,b^4-10\,a^4\,b^3}{5\,a^2\,b^2}=4\,a^2+3\,b^2-$
$-2\,a^2\,b.$

2.° $\frac{24\,a^4\,b\,c^3-32\,a^3\,b\,c+40\,a^2\,b^3\,c^2}{8\,a^2\,b\,c}=3\,a^2\,c^2-$
$-4\,a+5\,b^2\,c.$

50. **Condición de divisibilidad.**—De lo expuesto anteriormente se deduce que un polinomio será divisible por un monomio, cuando todos los términos del polinomio sean divisibles por el monomio divisor.

En el caso que no se cumpliera esta condición, cuando ninguno de los términos del dividendo fuese divisible por el único del divisor, el cociente estará formado por una suma de tantos sumandos fraccionarios como términos tenga el dividendo, pero si algunos lo fueran y otros no, el cociente sería la suma de los cocientes enteros y fraccionarios resultantes.

Ejemplos:

1.º $$\frac{32\,a^2\,b^2\,c + 4\,a^2\,b^3 - 2\,a^3\,b^4\,c^2}{2\,a\,b} = 16\,a\,b\,c + 2\,a\,b^2 - a^2\,b^3\,c^2.$$

2.º $$\frac{14\,a^2\,b - 3\,a^2\,b^3 + 5\,a^4\,b - 6\,acd^4}{4\,a^3\,b^5\,d^3} = \frac{14\,a^2\,b}{4\,a^3\,b^5\,d^3} - \frac{3\,a^2\,b^3}{4\,a^3\,b^5\,d^3} + \frac{5\,a^4\,b}{4\,a^3\,b^5\,d^3} - \frac{6\,acd^4}{4\,a^3\,b^5\,d^3}$$

3.º $$\frac{20\,a^3\,b^2\,x^3 + 12\,a\,b^2 - 15\,a^4\,b^5\,x^2}{5\,a^2\,b\,x} = 4\,a\,b\,x^2 + \frac{12\,a\,b^2}{5\,a^2\,b\,x} - 3\,a^2\,b^4\,x.$$

51. **División de un polinomio por otro.**—Sean dos polinomios ordenados, según las potencias decrecientes de una misma letra; en la división del uno por el otro, se trata de hallar un polinomio entero que, multiplicado por el divisor, reproduzca exactamente el dividendo. Consideremos que se ha encontrado el cociente y que

está también ordenado, de igual modo que los polinomios dividendo y divisor.

Hemos visto (36) en la multiplicación de dos polinomios ordenados con respecto a una misma letra, que el primer término del producto proviene directamente de multiplicar el primer término de uno de los factores por el primer término del otro factor polinómico, y, por consiguiente, el primer término del dividendo debe ser sin reducción, el producto del primer término del divisor por el primero del cociente; luego bastará dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor para obtener el primer término del cociente.

Pero el dividendo es la suma algebraica de todos los productos parciales resultantes al multiplicar cada uno de los términos de que conste el cociente por el divisor; y, por tanto, si se resta de dicho dividendo el producto obtenido al multiplicar el primer término del cociente por todo el divisor, el resto hallado será igual a la suma de los productos parciales del divisor por los términos segundo, tercero, etc., del cociente. Este resto constituye otro nuevo dividendo, y por un razonamiento análogo al que se ha hecho anteriormente, vemos que su primer término procede, sin reducción, del producto de multiplicar el segundo término del cociente por el primero del divisor, de donde se deduce que dividiendo el primer término del resto por el primero del divisor, se hallará el segundo del cociente.

Obtenido ya este segundo término del cociente, si lo multiplicamos por el divisor y restamos el producto así obtenido del nuevo dividendo, se hallará un segundo resto, suma de los productos parciales del divisor por los términos tercero, cuarto, etc., del cociente; dividiendo, pues, el primer término del nuevo resto hallado por el primero del divisor, se tendrá el tercer término del cociente.

Siguiendo el razonamiento de igual modo que hasta aquí, se hallarán los restantes términos del cociente, todo lo cual nos permite establecer la siguiente

REGLA.—*Para dividir un polinomio por otro, se ordenan con respecto a las potencias crecientes o decrecientes de una misma letra ordenatriz; se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y se obtendrá el primer término del cociente; se multiplica éste por todo el divisor y el producto se resta del dividendo; el primer término del resto se divide por el primero del divisor y se tendrá el segundo del cociente, el cual se multiplica por el divisor y el producto se resta del primer residuo, obteniendo así otro segundo resto, con el cual se hace lo mismo que con el anterior, continuando de este modo, hasta que se llegue al último término del cociente.*

La determinación del último término del cociente puede conseguirse directamente sin necesidad de hallar los términos anteriores, dividiendo el último del dividendo por el último del divisor.

A los productos sucesivos de cada uno de los términos del cociente por el divisor, se les cambia el signo a cada uno de sus términos, pues haciéndolo así, para efectuar las sustracciones correspondientes, no hay más que practicar la reducción de términos semejantes.

En la práctica es conveniente disponer la operación de la misma manera que se indica en la división aritmética.

Ejemplo:

Sea la división del polinomio

$$6\,a^5 + 17\,a^4\,b - 6\,a^3\,b^2 + 28\,a^2\,b^3$$

por el

$$2\,a^2 + 7\,a\,b$$

Dispondremos y practicaremos esta división en la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l|l}
6a^5 + 17a^4b - 6a^3b^2 + 28a^2b^3 & 2a^2 + 7ab \\ \cline{2-2}
-6a^5 - 21a^4b & 3a^3 - 2a^2b + 4ab^2 \\ \cline{1-1}
\quad -4a^4b - 6a^3b^2 & \\
\quad +4a^4b + 14a^3b^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad +8a^3b^2 + 28a^2b^3 & \\
\qquad -8a^3b^2 - 28a^2b^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

52. **Divisiones exactas e inexactas: cociente completo.** —Una división es *exacta,* cuando al restar del dividendo el producto del divisor por el cociente, se obtiene un resto e residuo cero, como ocurre en el ejemplo puesto anteriormente, de división de polinomios, y, en caso contrario, esto es, que se obtenga un resto cualquiera diferente de cero, la división es *inexacta,* y puede darse por terminada la operación cuando se llegüe a un resto en que la letra ordenatriz tenga menor exponente que en el divisor.

El cociente completo de una división inexacta es igual al cociente hallado, más una fracción que tenga por numerador el último resto y por denominador el divisor.

En efecto: sea D el dividendo, d el divisor, C el cociente hallado y R el resto obtenido; se tiene, evidentemente,

$$D = dC + R$$

y dividiendo por d los dos miembros de esta igualdad

$$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

que expresa y prueba lo enunciado.

Ejemplo de división inexacta:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
24a^4 + & 4a^3b & -16a^2b^2 & +17ab^3 & 8a^2 - 4ab \\
\cline{5-5}
-24a^4 + & 12a^3b & & & 3a^2 + 2ab - b^2 \\
\cline{1-2}
 & +16a^3b & -16a^2b^2 & & \\
 & -16a^3b & +8a^2b^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -8a^2b^2 & +17ab^3 & \\
 & & +8a^2b^2 & -4ab^3 & \\
\cline{3-4}
 & & & +13ab^3 &
\end{array}
$$

El cociente completo de esta división será:

$$3a^2 + 2ab - b^2 + \frac{13ab^3}{8a^2 - 4ab}$$

53. **Condiciones de divisibilidad de polinomios.**—De lo que se ha expuesto referente a la división de un polinomio por otro, se deducen las condiciones necesarias que han de concurrir para que el primero sea divisible por el segundo, cuyas condiciones de divisibilidad son las siguientes:

1.ª Que los términos primero y último del dividendo y el primero de cada uno de los sucesivos residuos sean divisibles por el primer término del divisor.

2.ª Cuando se llegue en el cociente a un término en que la letra ordenatriz tenga un exponente igual a la diferencia de los que lleva dicha letra en los últimos términos del dividendo y divisor, debe obtenerse precisamente el mismo término que se obtendría dividiendo directamente el último del dividendo por el último del divisor.

Estas condiciones son precisas, pero no suficientes, debiendo agregar como definitiva la de que el residuo correspondiente sea cero.

54. **División de un monomio por un polinomio.**—Esta división es siempre *inexacta,* porque no hay ninguna expresión, bien sea monomia, o bien polinómica, que multiplicada por el divisor reproduzca exactamente el monomio dividendo.

Para efectuar esta división se sigue el mismo procedimiento que en la de dos polinomios, aplicándose la regla que allí se ha dado.

Ejemplos:

1.º

$$\begin{array}{l|l}
a^4 & a - b \\ \hline
-a^4 + a^3 b & a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3 \\
\quad -a^3 b + a^2 b^2 & \\
\qquad -a^2 b^2 + a b^3 & \\
\qquad\quad -a b^3 + b^4 & \\
\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &
\end{array}$$

2.º

$$\begin{array}{l|l}
b^4 & b + 1 \\ \hline
-b^4 - b^3 & b^3 - b^2 + b \\
\quad +b^3 + b^2 & \\
\qquad -b^2 - b & \\
\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &
\end{array}$$

55. **Prueba de la división.**—La misma definición que se ha dado de esta operación nos indica la manera de comprobar si está bien hecha; *multiplicando el cociente por el divisor y agregando al producto el residuo, se ha de obtener por resultado el dividendo.*

También puede hacerse aplicación de los *valores numéricos de los datos y del cociente,* de un modo análogo a lo expuesto en la adición, sustracción y multiplicación.

EJERCICIOS

Efectúense las siguientes divisiones:

1. a^4 por a^2
2. a^6 por a^8
3. a^9 por a^5
4. a^p por a^q
5. $2\ a^3$ por a^2
6. $4\ a^6$ por a^3
7. $8\ x^4$ por $2\ x^3$ $= 4x$
8. $14\ a^4\ x$ por $7\ a^3$ $= 2ax$
9. $25\ a^5\ x^2$ por $5\ a^2\ x$ $= 5a^3x$

Indíquense y hállense los cocientes de:

10. $3a^2\ b^3\ c$ por $a\ b^2$
11. $-16\ a^3\ b^2\ c^4$ por $8\ a^3\ b\ c^3$
12. $-32\ a^4\ b\ c\ x^5$ por $-16\ a^2\ x^3$
13. $45\ a^7\ b\ x^6$ por $-5\ a^3\ b\ x^2$
14. $121\ a^6\ b^3\ x^5$ por $11\ a^2\ b\ x$
15. $729\ a^4\ m^5\ n^6\ x^7$ por $9\ a^2\ n^5\ x^3$

Divídase:

16. $18\ a^3\ b^4 - 36\ a^3\ b^2 + 24\ a^6\ b^2\ x^3$ por $6\ a^3\ b^2$ $= 3b^2 + 4a^3x^3 - 6$
17. $40\ x^5\ y^2 + 12\ x^3\ y^2 - 16\ x^4\ y^4$ por $-2\ x^3\ y$
18. $72\ a^6\ b^5 + 40\ a^4\ b^6 - 32\ a^3\ b^5\ x^6$ por $8\ a^3\ b^4$
19. $-132\ a^2\ x^3 + 54\ a^4\ x^6 - 16\ a^5\ x^3 - 8\ a^6\ x^4$ por $2\ a^2\ x^3$

20. $-120\,x^3\,y\,z^4 - 186\,x^6\,y^2\,z^4$ por $6\,x^3$

21. $-120\,x^3\,y^2\,z^4 - 186\,x^6\,y^3\,z^6 - 36\,x^5\,y^4\,z^2$ por $6\,x^3\,y^2\,z^3$

Efectúense las divisiones:

22. $(a^2 + 8\,x - 105) : (a + 5)$
23. $a^2 + 8\,a + 33) : (a + 11)$
24. $a^4 - 31\,a^2 + 9) : (a^2 + 5\,a - 3)$
25. $(4\,x^4 - 12\,x^2 + 16) : (x^2 + 2\,x - 4)$
26. $x^4 : (x + 1)$
27. $a^6 : (a + b)$
28. $x^5 : (x - 1)$
29. $a^3 : (a - b)$

V.—Divisor de la forma $x - a$

56. **Leyes del cociente y del resto.**—Consideremos un polinomio.

$$A\,x^m + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q$$

que es entero y completo con respecto a la letra x, puesto que ésta no entra ni en denominador ni bajo radical, y además los exponentes de sus potencias son enteros y positivos.

Si dividimos dicho polinomio por el binomio $x - a$, obtendremos un cociente del grado $m - 1$, tal como

$$A_1\,x^{m-1} + B_1\,x^{m-2} + C_1\,x^{m-3} + \ldots + P_1$$

y un resto R del grado cero, independiente de x.

En esta división, como en todas, se verifica:

$$A\,x^m + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q =$$

$$(x - a)\,(A_1\,x^{m-1} + B_1\,x^{m-2} + C_1\,x^{m-3} + \ldots + P_1) + R$$

Cuya igualdad, después de efectuar la multiplicación indicada en el segundo miembro, se transforma en la siguiente:

$$A\,x^{m} + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q =$$
$$= A_1\,x^{m} + B_1\,x^{m-1} + C_1\,x^{m-2} + \ldots + P_1\,x -$$
$$- A_1\,a\,x^{m-1}\;B_1\,a\,x^{m-2} - C_1\,a\,x^{m-3} - \ldots - P_1\,a + R$$

y ordenando el segundo miembro de esta igualdad según las potencias decrecientes de x (12), se obtendrá la que a continuación se expresa:

$$A\,x^{m} + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q =$$
$$= A_1\,x^{m} + (B_1 - A_1\,a)\,x^{m-1} + (C_1 - B_1\,a)\,x^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + (R - P_1\,a)$$

Como esta igualdad ha de verificarse cualquiera que sea el valor de x, sus dos miembros serán idénticos, lo cual exige que los términos de la misma potencia de x tengan igual coeficiente en cada uno de aquéllos, como se expresa en las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ B_1 - A_1\,a &= B \\ C_1 - B_1\,a &= C \\ \ldots\;\ldots &\;\ldots \\ R - P_1\,a &= Q \end{aligned}$$

Si ahora sumamos a los dos miembros de cada una de estas igualdades exceptuando la primera el término negativo que figura en cada una, se obtendrán las siguientes:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A \\
B_1 &= B + A_1\, a \\
C_1 &= C + B_1\, a \\
&\cdots\cdots \\
R &= Q + P_1\, a
\end{aligned}
$$

Cuyas igualdades manifiestan:

1.° *El coeficiente del primer término del cociente es igual al del primer término del dividendo.*

2.° *El coeficiente de un término cualquiera del cociente se forma agregando al coeficiente que ocupa el mismo lugar en el dividendo el producto del coeficiente del término anterior del cociente por la cantidad* a.

3.° *El resto es igual al último término del dividendo aumentado en el producto del último término del cociente por* a.

57. **Aplicación.**—Estas leyes que acabamos de exponer nos permiten hallar el cociente y el resto de la división de un polinomio entero y completo con respecto a x, por el binomio $x - a$, sin necesidad de practicar la operación.

Ejemplo: Sea el polinomio

$$5\,x^4 + 6\,x^3 + 5\,x^2 + 8\,x + 3$$

que se ha de dividir por $x - 2$.

El cociente será un polinomio de tercer grado.

Aplicando las leyes antes expuestas, se obtendrá:

Coeficiente	del	primer término. .	$5 = 5$
»	»	segundo » . .	$= 6 + 10 = 16$
»	»	tercero » . .	$= 5 + 32 = 37$
»	»	cuarto » . .	$= 8 + 74 = 82$

Resto $= 3 + 164 = 167$

Obtenidos los coeficientes de todos los términos del cociente y siendo éste, como hemos dicho, un polinomio completo y de tercer grado, lo determinaremos seguidamente.

El cociente será, pues:

$$5\,x^3 + 16\,x^2 + 37\,x + 82$$

y el resto 167.

Practicando la división, se obtendrá:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5\,x^4 + & 6\,x^3 + & 5\,x^2 + & 8\,x + & 3 & x - 2 \\ \cline{6-6}
-5\,x^4 + & 10\,x^3 & & & & 5\,x^3 + 16x^2 + 37\,x + 82 \\ \cline{1-2}
 & 16\,x^3 + & 5\,x^2 & & & \\
 & -16\,x^3 + & 32\,x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 37\,x^2 + & 8\,x & & \\
 & & -37\,x^2 + & 74\,x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 82\,x + & 3 & \\
 & & & -82\,x + & 164 & \\ \cline{4-5}
 & \text{Resto} & & & 167 &
\end{array}$$

que, como se ve, da el mismo cociente y el mismo resto que aplicando las leyes anteriores.

58. **Determinación directa del resto.**—Hay ocasiones en que se desea investigar el resto de una división de las que estamos estudiando, sin que nos importe cuál pueda ser el cociente, y entonces conviene determinarlo directamente.

Veamos de qué modo.

Llamando C al cociente de dividir un polinomio entero y completo con respecto a x por el binomio

$x - a$ y designando el resto por R, tendremos la igualdad

$$A\,x^m + B\,x^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q =$$
$$= (x - a)\,C + R$$

si en ella damos a x un valor cualquiera, los dos miembros tomarán valores iguales. Hagamos $x = a$ y sustituyendo x por a, tendremos:

$$A\,a^m + B\,a^{m-1} + C\,a^{m-2} + \ldots + P\,a + Q =$$
$$= (a - a)\,C + R$$

y como

$$(a - a)\,C = O$$

se tendrá

$$R = A\,a^m + B\,a^{m-1} + C\,a^{m-2} + \ldots + P\,a + Q$$

Lo cual manifiesta que

El resto de la división de un polinomio entero y completo con respecto a la letra x *por el binomio* x — a, *es el resultado de substituir en dicho polinomio* x *por la cantidad* a.

59. **Cálculo rápido del resto.**—Propongámonos determinar el resto en la división de un polinomio, tal como el

$$A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$$

por el binomio $x - a$.

Según acabamos de ver, el resto en las divisiones de esta forma se halla sustituyendo en el dividendo x por a, luego

$$R = A\,a^3 + B\,a^2 + C\,a + D$$

Como los tres primeros términos del segundo miembro de esta igualdad tienen el factor común a, haciendo la separación correspondiente (37), tendremos la que sigue:

$$R = (A\,a^2 + B\,a + C)\,a + D$$

Y sacando ahora el factor común de los dos primeros términos del polinomio colocado entre paréntesis, se obtiene:

$$R = [(A\,a + B)\,a + C]\,a + D$$

que generalizando nos conduce a la siguiente

REGLA.—*Para calcular rápidamente el resto, se multiplica el coeficiente del primer término del dividendo por* a *y se suma el producto con el coeficiente del segundo término; se multiplica esta suma por* a *y el resultado se adiciona al coeficiente del tercer término; y se continúa de este modo hasta haber sumado el último término del polinomio.*

Ejemplo 1.°—Hallar el resto de la división

$$(5\,x^4 + 6\,x^3 + 5\,x^2 + 8\,x + 3) : (x - 2)$$

Las operaciones, para mayor comodidad, pueden disponerse del siguiente modo:

$$\begin{array}{lrrrr}
\text{Coeficientes: } 5 & +\ 6 & +\ 5 & +\ 8 & +\ 3 \\
 & +\ 10 & +\ 32 & +\ 74 & +\ 164 \\
\hline
 & 16 & 37 & 82 & 167
\end{array}$$

Luego el valor del resto es 167, el mismo que se ha obtenido anteriormente (57).

Ejemplo 2.º—Hallar el valor que adquiere el polinomio

$$6\,x^4 - 2\,x^3 - 5\,x^2 + 7\,x - 8$$

para $x = 3$.

$$\begin{array}{lrrrr} \text{Coeficientes: } 6 & -\;2 & -\;5 & +\;5 & -\;8 \\ & +\;18 & +\;48 & +\;129 & +\;408 \\ \hline & +\;16 & +\;43 & +\;136 & +\;400 \end{array}$$

El valor numérico pedido, que expresa a la vez el del resto de la división del polinomio propuesto por el binomio $x - 3$, es $+ 400$.

60. **Condición de divisibilidad.**—Acabamos de exponer (58), que en una división de la forma

$$(A\,x^m + Bx^{m-1} + C\,x^{m-2} + \ldots + P\,x + Q) : (x - a)$$

se obtiene el resto, sustituyendo en el dividendo x por a, es decir, que

$$R = A\,a^m + B\,a^{m-1} + C\,a^{m-2} + \ldots + P\,a + Q$$

Ahora bien, para que R se anule es condición indispensable que el segundo miembro se reduzca también a cero, lo cual expresa que

Si un polinomio entero, con respecto a la letra x, *se anula cuando a esta letra se le asigna el valor* a, *dicho polinomio es divisible por el binomio* x — a; *y no lo es en caso contrario.*

Caso en que el dividendo es un polinomio incompleto.—Hemos visto cómo se obtiene el cociente y el resto en una división cuando el dividendo es un polinomio completo; en el caso de que no lo fuera, se puede completar escribiendo los términos que le falten, pero que tengan por coeficiente cero, con lo cual el valor del polinomio no varía.

Así, el polinomio

$$A\,x^4 + C\,x^2 + D$$

que le faltan los términos en x^3 y en x, puede completarse de este modo:

$$A\,x^4 + 0\,x^3 + C\,x^2 + 0\,x + D$$

Por lo tanto, puede también obtenerse el cociente y el resto de la división de un polinomio incompleto por el divisor $x - a$, aplicando las leyes establecidas anteriormente

Ejemplo.—Para hallar el cociente de la división

$$(x^4 - a^4) : (x - a)$$

haremos el dividendo

$$x^4 + 0\,x^3 + 0\,x^2 + 0\,x + a^4$$

y calcularemos el cociente así:

Coeficiente del	1.^{er}	término		$= 1$
»	» 2.°	»	$0 + a$	$= a$
»	» 3.°	»	$0 + a.\,a$	$= a^2$
»	» 4.°	»	$0 + a^2.\,a$	$= a$

Luego

$$\text{Cociente} = x^3 + a\,x^2 + a^2\,x + a^3$$

62. **Caso en que el divisor es x + a.**—En el caso en que el divisor fuera $x + a$, teniendo en cuenta que

$$x + a = x - (- a)$$

pueden aplicarse igualmente cuantas reglas se han expuesto, con la sola diferencia de que consideremos la cantidad a como negativa.

Así, por ejemplo, en la división

$$(2\,x^4 + 5\,x^3 + 2\,x^2 + 15\,x + 6) : (x + 4)$$

calcularemos el cociente y el resto del siguiente modo:

Coeficiente	del	1.er término		$= \quad 2$
»	»	2.º	»	$5 - 8 = - 3$
»	»	3.º	»	$2 + 18 = 14$
»	»	4.º	»	$15 - 56 = - 41$
			Resto	$6 + 164 = 170$

El cociente obtenido será

$$2\,x^3 - 3\,x^2 + 14\,x - 41$$

2.º ejemplo:

Tratemos de averiguar si el polinomio

$$5\,x^3 + 4\,x^2 + 3\,x + 108$$

es divisible por el binomio $x + 3$.

Como hemos visto anteriormente, para obtener el resto de esta división bastará que hallemos el valor numérico de dicho polinomio haciendo $x = - 3$.

El citado valor numérico será:

$$-135 + 36 - 9 + 108 = 144 - 144 = 0$$

La división propuesta es exacta.

63. **Aplicaciones: divisiones de la forma** $\dfrac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$

Como aplicación de los principios que anteceden tratemos de investigar la condición de divisibilidad de $x^m \pm a^m$ por $x \pm a$.

Consideremos, pues, los cuatro casos siguientes:

1.er caso. $\dfrac{x^m + a^m}{x + a}$

Esta división, en que el divisor es $x + a$, podemos expresarla (62) bajo esta forma:

$$(x^m + a^m) : [x - (-a)]$$

en la que se obtiene el resto, haciendo en el dividendo $x = -a$, de modo que

$$R = (-a)^m + a^m$$

y recordando lo dicho en la multiplicación (31), se tendrá:

Cuando m sea par $R = a^m + a^m = 2\,a^m$
Cuando m sea impar $R = -a^m + a^m = 0$

Vemos, pues, que la división será exacta únicamente cuando m sea impar, y, en caso contrario, inexacta, siendo el resto $2\,a^m$.

2.º caso. $\dfrac{x^m + a^m}{x - a}$ Haciendo $x = a$, se tiene:

$$R = a^m + a^m = 2\,a^m$$

Esta división es siempre inexacta.

3.er caso. $\dfrac{x^m - a^m}{x + a}$ Haciendo $x = -a$, se obtiene:

$$R = (-a)^m - a^m$$

Cuando m sea par $R = \quad a^m - a^m = 0$
Cuando m sea impar $R = -a^m - a^m = -2\,a^m$

La división únicamente es exacta cuando m sea par.

4.º caso. $\dfrac{x^m - a^m}{x - a}$ Haciendo $x = a$

$$R = a^m - a^m = 0$$

La división siempre es exacta.

EJERCICIOS

1. Calcúlense de un modo directo el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

1.º $(3\,a^3 + 5\,a^2 - 6\,a) : (a - 1)$

2.º $(x^4 - 8\,x^2 - 9) : (x - 3)$

3.º $(2\,x^4 + 17\,x^3 - 68\,x - 32) : (x + \frac{1}{2})$

4.º $(2\,x^5 - 7\,x^4 + 3\,x^3 - 5\,x^2 + 6) : (x - \frac{1}{2})$

2. Encontrar los cocientes de las divisiones siguientes:

1.° $(4a^3 + 7a + 8) : (a + 3)$

2.° $(8a^4 + 3a^2 - 15) : (a - 2)$

3. Averiguar los valores que adquieren los polinomios siguientes para $x = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{3}$ y $m = 4$

1.° $2x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 13$

2.° $6x^4 - 5x^3 + 10x - 12$

3.° $6a^4 + 6a^3 + 3a^2 + 7a + 12$

4.° $7a^3 + 8a^2 + 5a + 6$

5.° $12m^4 - 10m^3 + 5m^2 - 4m + 15$

6.° $8m^3 + 14m^2 - 9m + 7$

CAPITULO III

FRACCIONES ALGÉBRICAS

I.—Propiedades y transformación

64. **Definición.**—*Fracción algébrica es el cociente indicado de dos expresiones literales.*

El dividendo se llama *numerador,* el divisor *denominador* y ambos reciben el nombre de *términos* de la fracción.

Así, las expresiones

$$\frac{a}{b} \quad \frac{x+c}{m+n} \text{ y } \frac{2\,a^2+3\,a^4}{7\,a^2\,b}$$

son fracciones algébricas, que tienen por numerador, respectivamente, a, $x+c$ y $2\,a^2+3\,a^4$, siendo los denominadores respectivos, b, $m+n$ y $7\,a^2\,b$.

65. **Concepto de fracción algébrica y signo que le corresponde.**—El concepto de fracción algébrica es más amplio y tiene una significación más general que la de fracción aritmética o quebrado numérico, pues éste es un conjunto de unidades fraccionarias, y aunque una y otra representan un cociente indicado, los términos de la fracción algébrica pueden ser enteros, fraccionarios, inconmensurables, positivos o negativos, etc. Las fracciones numéricas son, pues, casos particulares de las fracciones algébricas, cuyos dos términos son enteros.

El signo de la fracción algébrica es el que corresponde al cociente de dividir su numerador por su denominador, atendiendo a la regla de los signos estudiada en la división.

66. **Propiedades generales de las fracciones.**

I. Sea la fracción algébrica $\frac{a}{b}$ designando por q su valor, tendremos

$$\frac{a}{b} = q$$

y también

$$a = b \cdot q$$

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de esta igualdad por una cantidad, m, se tendrán, respectivamente:

$$a \cdot m = b \times q \cdot m$$
$$a : m = b \times q : m$$

de las cuales obtendremos, dividiendo los dos miembros de cada una por b, las siguientes:

$$\frac{am}{b} = q\,m \qquad \frac{a : m}{b} = q : m$$

que manifiestan:

Si el numerador de una fracción se multiplica o se divide por una cantidad, permaneciendo constante su denominador, la fracción quedará multiplicada o dividida, respectivamente, por dicha cantidad.

II. En la igualdad

$$a = b \cdot q$$

el segundo miembro es un producto de dos factores, cuyo valor no se altera si se multiplica uno de ellos y se divide el otro por la misma cantidad m; tendremos, pues,

$$a = b \cdot m \times q : m \qquad a = b : m \times q \cdot m$$

Dividiendo los dos miembros de la primera de estas igualdades por $b \cdot m$ y los de la segunda por $b : m$, se deducirán las siguientes:

$$\frac{a}{b \cdot m} = q : m \qquad \frac{a}{b : m} = q \cdot m$$

cuyas igualdades expresan que:

Si el denominador de una fracción se multiplica o divide por una cantidad, permaneciendo constante su numerador, la fracción quedará dividida o multiplicada, respectivamente, por dicha cantidad.

III. Si en la igualdad

$$a = b \cdot q$$

multiplicamos o dividimos por m sus dos miembros, se tendrán:

$$a \cdot m = (b \cdot m)\, q \qquad a : m = (b : m)\, q$$

de las cuales se deducen, respectivamente:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = q \qquad \frac{a : m}{b : m} = q$$

o sean:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{b}$$

que manifiestan que:

Si se multiplican o dividen los dos términos de una *fracción por una misma cantidad, la fracción resultante es de igual valor que la primera.*

Consecuencias.—De las proposiciones que acabamos de exponer se deducen las siguientes:

1.ª *Para multiplicar una fracción por una cantidad, se multiplica el numerador por dicha cantidad y se pone el mismo denominador o se divide el denominador por dicha cantidad, dejando el mismo numerador.*

Ejemplo:

$$\frac{2\,a^2\,b^3}{4\,a^3\,c\,x} \times 3\,a = \frac{2\,a^2\,b^3 \times 3\,a}{4\,a^3\,c\,x}$$

$$\frac{2\,a^2\,b^3}{4\,a^3\,c\,x} \times 3\,a = \frac{2\,a^2\,b^3}{4\,a^3\,c\,x : 3\,a}$$

2.ª *Para dividir una fracción por una cantidad, se multiplica por ésta el denominador y se pone el mismo numerador o se divide el numerador por dicha cantidad, dejando el mismo denominador.*

Ejemplos:

$$\frac{4\,a^2\,b\,c^2}{7\,a^3\,x} : 3\,a\,c = \frac{4\,a^2\,b\,c^2}{7\,a^3\,x \times 3\,a\,c}$$

$$\frac{4\,a^2\,b\,c^2}{7\,a^3\,x} : 3\,a\,c = \frac{4\,a^2\,b\,c^2 : 3\,a\,c}{7\,a^3\,x}$$

3.ª *Todo factor que figure en uno de los términos de una fracción, puede pasar al otro término como divisor y viceversa.*

Ejemplos:

$$\frac{a\,.\,b\,.\,c}{m} = \frac{a\,.\,b}{m : c} = \frac{a\,.\,c}{m : b}$$

$$\frac{n}{d\,.\,f\,.\,g} = \frac{n : g}{d\,.\,f} = \frac{n : f}{d\,.\,g}$$

4.ª *Se pueden cambiar los signos de modalidad a los* *dos términos de una fracción*, porque es el resultado de multiplicarlos por — 1.

Ejemplos:

$$\frac{2\,a^2\,b^3\,c^4}{7\,a^6\,b^5\,x} = \frac{-2\,a^2\,b^3\,c^4}{-7\,a^6\,b^5\,x}$$

$$\frac{-3\,a^3\,x}{-5\,a^4\,c} = \frac{3\,a^3\,x}{5\,a^4\,c}$$

$$\frac{6\,a^3\,m^2\,n}{-31\,a^5\,b^2} = \frac{-6\,a^3\,m^2\,n}{31\,a^5\,b^2}$$

67. **Simplificación de fracciones.**—Se dice que dos fracciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo valor.

Simplificar una fracción es transformarla en otra equivalente de términos más sencillos que la propuesta.

De la propiedad III, enunciada anteriormente, se deduce la siguiente

Regla.—*Para simplificar una fracción se dividen sus dos términos por los divisores comunes que tengan.*

Ejemplo 1.º Simplificar la fracción

$$\frac{7\,a^2\,b^3\,c^4}{3\,a^2\,c^2\,d}$$

Los dos términos tienen los factores comunes a^2 y c^2; se tendrá, pues:

$$\frac{7\,a^2\,b^3\,c^4}{3\,a^2\,c^2\,d} = \frac{7\,b^3\,c^2}{3\,d}$$

Ejemplo 2.º Simplificar la fracción

$$\frac{a + a\,b}{b + b^2}$$

La forma en que están escritos sus dos términos no manifiesta claramente los divisores comunes que tienen, pero recordando lo dicho anteriormente (37) sobre la separación de factor común, se tendrá:

$$a + a\,b = a\,(1 + b)$$
$$b + b^2 = b\,(1 + b)$$

y por consiguiente,

$$\frac{a + a\,b}{b + b^2} = \frac{a\,(1 + b)}{b\,(1 + b)} = \frac{a}{b}$$

68. **Condenominación de fracciones.**—*Condenominar* varias fracciones es transformarlas en otras equivalentes que tengan un mismo denominador.

De la tercera de las propiedades que hemos demostrado antes (66), se deduce la siguiente

Regla.—*Para condenominar dos o más fracciones, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.*

Ejemplo:

Condenominar las siguientes fracciones:

$$\frac{2\,a}{3\,b} \qquad \frac{5\,a}{4\,c} \qquad \frac{7\,c}{b}$$

Se tendrá:

$$\frac{2\,a}{3\,b} = \frac{2\,a \times 4\,c \times b}{3\,b \times 4\,c \times b} = \frac{8\,a\,b\,c}{12\,b^2\,c}$$

$$\frac{5\,a}{4\,c} = \frac{5\,a \times b \times 3\,b}{4\,c \times b \times 3\,b} = \frac{15\,a\,b^2}{12\,b^2\,c}$$

$$\frac{7\,c}{b} = \frac{7\,c \times 3\,b \times 4\,c}{b \times 3\,b \times 4\,b} = \frac{84\,b\,c^2}{12\,b^2\,c}$$

EJERCICIOS

1. Simplificar las fracciones siguientes:

1.° $\frac{18\,a^3\,b}{6\,a^2\,x}$ $\frac{12\,a^2\,b^3\,c^4}{6\,a\,b^2\,c^2}$ $\frac{-14\,a\,x^2}{7\,x\,z}$

2.° $\frac{35\,a^2\,b\,c^3}{-5\,a\,c^2\,d}$ $\frac{-36\,a^2\,b^3}{-12\,a\,d}$ $\frac{a\,x^3 - a^3}{4\,a\,b - 5\,a\,c}$

3.° $\frac{x + x^2}{x + x\,y}$ $\frac{a\,x + x^3}{a\,b + b\,x^2}$ $\frac{12\,x + 24\,x^3}{3\,b\,x^2 + 6\,b\,x^4}$

$\frac{a^2 + 2\,a\,b + b^2}{a + b}$ $\frac{a^2 - 2\,a\,b + b^2}{3\,b\,x^2 + 6\,b\,x^4}$

4.° $\frac{a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3}{a + b}$ $\frac{a^2 - 2\,a\,b + b^2}{a\,x - b\,x}$

5.° $\frac{6\,a\,x^2 + 6\,a\,x}{12\,a\,b\,x + 12\,a\,b}$ $\frac{(b + x)^2 - 2\,b\,x}{(b - x)^2 + 2\,b\,x}$

2. Condenominar las fracciones siguientes:

1.° $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ $\frac{e}{f}$

2.° $\frac{2}{a}$ $\frac{5\,a}{b}$ $\frac{3\,b}{c}$

3.° $\frac{2\,a}{2\,x}$ $\frac{2\,b}{c}$ $\frac{10\,x}{b}$ $\frac{7\,c}{b^2}$

+ 4.° $\frac{a+b}{a+x}$ $\frac{a+c}{a-x}$

5.° $\frac{a^2}{a-b}$ $\frac{b^2}{a+b}$

+ 6.° $\frac{a}{a+1}$ $\frac{b}{a-1}$ $\frac{c}{a^2-1}$

+ 7.° $\frac{x+1}{m+n}$ $\frac{x+2}{m+n}$ $\frac{x+3}{m}$

8.° $\frac{3\,a^2\,b}{2\,b}$ $\frac{6\,a\,b-x}{2\,a}$ $\frac{4\,a^2\,c^2}{6\,a\,b}$

9.° $\frac{a+b}{2\,a\,x}$ $\frac{a+d}{3\,b\,x}$ $\frac{a+f}{5\,d\,x}$ $\frac{a+g}{4\,f\,x}$

10. $\frac{a^2\,(a-b)}{a^2-b^2}$ $\frac{2\,a\,(a+b)}{a-b}$ $\frac{3\,a^2-3\,a\,b}{a+b}$

II.—Operaciones

69. **Adición.**—*Para sumar dos o más fracciones que tengan el mismo denominador, se suman sus numeradores y se parte esta suma por el denominador común.*

En efecto; sean las fracciones

$$\frac{a}{d} \quad \frac{b}{d} \quad \frac{c}{d}$$

si representamos por p, q y r sus valores numéricos, tendremos:

$$\frac{a}{d} = p \qquad \frac{b}{d} = q \qquad \frac{c}{d} = r$$

de cada una de éstas se deduce, respectivamente,

$$a = d\,p \qquad b = d\,q \qquad c = d\,r$$

que sumadas dan

$$a + b + c = d\,p + d\,q + d\,r = d\,(p + q + r)$$

de esta igualdad, dividiendo sus dos miembros por d, se obtiene:

$$\frac{a + b + c}{d} = p + q + r$$

y poniendo en vez de p, q y r las fracciones que representan, e invirtiendo sus dos miembros, se convierte en

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + b + c}{d}$$

lo que prueba la regla anterior.

Para sumar fracciones que no tengan el mismo denominador, se condenominan y se procede como indica la regla antes expuesta.

Ejemplo:

Sumar las fracciones

$$\frac{2\,a}{3\,b} \qquad \frac{7\,a^2}{2\,c} \qquad \frac{5\,a\,b}{7\,d}$$

efectuando la condenominación correspondiente se tendrá:

$$\frac{2a}{3b} = \frac{28\,a\,d\,c}{42\,b\,d\,c} \quad \frac{7\,a^2}{2\,c} = \frac{147\,a^2\,b\,d}{42\,b\,d\,c} \quad \frac{5\,a\,b}{7\,d} = \frac{30\,a\,b^2\,c}{42\,b\,d\,c}$$

y efectuando la adición

$$\frac{2\,a}{3\,b} + \frac{7\,a^2}{2\,c} + \frac{5\,a\,b}{7\,d} = \frac{28\,a\,d\,c + 147\,a^2\,b\,d + 30\,a\,b^2\,c}{42\,b\,d\,c}$$

70. **Sustracción.**—*Para restar dos fracciones de un mismo denominador, se restan sus numeradores y la diferencia obtenida se parte por el denominador común.*

Sean las fracciones

$$\frac{a}{d} \text{ y } \frac{b}{d}$$

Suponiendo

$$\frac{a}{d} = p \qquad \frac{b}{d} = q$$

se verificará

$$a = d\,p \qquad b = d\,q$$

y restando ordenadamente estas dos igualdades, obtendremos:

$$a - b = d\,p - d\,q = d\,(p - q)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{a - b}{d} = p - q = \frac{a}{d} - \frac{b}{d}$$

que justifica la regla dada.

Para restar fracciones que tengan distinto denominador, se condenominan y se procede como acaba de indicarse.

Ejemplo:

Efectuar la sustracción

$$\frac{7\,a^2}{3\,b\,d} - \frac{4\,b}{2\,a\,d}$$

como

$$\frac{7\,a^2}{3\,b\,d} = \frac{14\,a^3\,d}{6\,a\,b\,d^2} \qquad \frac{4\,b}{2\,a\,d} = \frac{12\,b^2\,d}{6\,a\,b\,d^2}$$

se tendrá

$$\frac{7\,a^2}{3\,b\,d} - \frac{4\,b}{2\,a\,d} = \frac{14\,a^3\,d - 12\,b^2\,d}{6\,a\,b\,d^2}$$

71. **Multiplicación.**—*Para multiplicar dos o más fracciones, se multiplican los numeradores y después los denominadores y se parte el primer producto por el segundo.*

Sean las fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f}$$

Designando por p, q, r los valores respectivos de estas fracciones, tendremos:

$$\frac{a}{b} = p \qquad \frac{c}{d} = q \qquad \frac{e}{f} = r$$

de donde

$$a = b\,p \quad c = d\,q \quad e = f\,r$$

y multiplicando ordenadamente estas igualdades, dan

$$a\,c\,e = b\,d\,f \times p\,q\,r$$

y por consiguiente,

$$\frac{a\,c\,e}{b\,d\,f} = p\,q\,r = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$$

que es lo que se pretendía demostrar.

Ejemplo:

$$\frac{a^3 + b^3}{a - b} \times \frac{a - b}{a + b} = \frac{a^4 + a\,b^3 - a^3\,b - b^4}{a^2 - b^2}$$

72. **División.**—*Para dividir una fracción algébrica por otra, se multiplica el dividendo por la fracción divisor invertida.*

Sean las fracciones

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

llamando p y q a sus valores respectivos, tendremos:

$$a = b\,p \qquad c = d\,q$$

invirtiendo los dos miembros de esta última y multiplicándola por la primera, se tendrá:

$$a\,.\,d\,q = c\,.\,b\,p$$

y dividiendo los dos miembros por $b\ c\ q$, resulta:

$$\frac{a\,d\,q}{b\,c\,q} = \frac{c\,b\,p}{b\,c\,q} \quad \text{o bien} \quad \frac{a\,d}{b\,c} = \frac{p}{q}$$

73. **Expresiones mixtas: su transformación en fracciones.**—Las expresiones que constan de un término entero y otro fraccionario, se llaman *expresiones mixtas.*

Así, las expresiones que toman la forma

$$a + \frac{b}{c} \quad \text{y} \quad a - \frac{b}{c}$$

son expresiones mixtas.

Para transformar una expresión mixta en fracción, se multiplica el término entero por el denominador y a este producto se le suma algébricamente el numerador, y al resultado se le pone por denominador el mismo que tenga el término fraccionario.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a}{1} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}$$

74. **Operaciones con expresiones mixtas.**—Para sumar, restar, multiplicar o dividir expresiones mixtas, se transforman en fracciones y se efectúan con éstas las operaciones indicadas.

EJERCICIOS

1. Efectuar las siguientes adiciones indicadas:

1.° $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2}$

2.° $\frac{2a}{5b} + \frac{6a}{5b} + \frac{8a}{5b}$

3.° $\frac{2ab}{3a^2} + \frac{5ab^2}{3a^2} + \frac{6ab}{3a^2} + \frac{4ab^2}{3a^2}$

4.° $\frac{2a}{3b} + \frac{3b}{2a} + \frac{6a}{4b}$

5.° $\frac{2x}{7a^2} + \frac{10x}{6a^2} + \frac{12ax}{5} + \frac{15a^2}{6x}$

6.° $\frac{2a^2}{4} + \frac{3a}{4x} + \frac{2b}{3a} + \frac{a}{2}$

7.° $\frac{x+5}{x+2} + \frac{x+7}{x+3} + \frac{x+6}{x+4}$

8.° $\frac{3a-x}{am} + \frac{x-5a}{bm} + \frac{3b-4x}{ab}$

9.° $\frac{a+b}{ab} + \frac{a+c}{ac} + \frac{c-b}{bc}$

2. Efectúense las sustracciones indicadas que siguen:

1.° $\frac{12ab^2}{3a^4} - \frac{2ab^2}{3a^4}$

2.° $\frac{15a^3b^2c}{9a^2x^2} - \frac{-7a^3b^2c}{4a^2x^2}$

3.° $\frac{13a^2b^4x}{-7a^2d} - \frac{12a^2b^4x}{-2a^2d}$

4.° $\frac{3ab}{a^2-b^2} - \frac{7a^4cx}{3a}$

5.° $\frac{a+b}{1+c} - \frac{a+b^2}{a-b}$

6.ª $\dfrac{3\,a + 4\,b^2}{-7\,a^2\,b^3} - \dfrac{2\,a^2 + 4\,b^2 + 6\,a\,b}{-3\,a^2}$

3. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

1.ª $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d}$

2.ª $\dfrac{2\,a}{b} \times \dfrac{c}{b}$

3.ª $\dfrac{3\,a\,b}{2\,c} \times \dfrac{-5\,a^2}{3\,b}$

4.ª $\dfrac{-2\,a^2\,b}{3\,a^4} \times \dfrac{3\,a\,x}{2\,b} \times \dfrac{2\,a\,c}{5\,c\,x}$

5.ª $\dfrac{a^2 - b^2}{c - d} \times \dfrac{a - d}{d - b}$

6.ª $\dfrac{3\,x^2\,y^3}{x^2 + 3\,a^2} \times \dfrac{x^2 + 3\,a^2}{4\,x^3\,y^2}$

7.ª $\dfrac{a + b}{m^3} \times \dfrac{1}{a + b^2} \times \dfrac{a - b}{a^2 + m}$

8.ª $\dfrac{a\,x + x^2}{a\,b^2 + b^2\,x} \times \dfrac{14\,a^2 - 7\,a\,x}{10\,a\,y - 5\,x\,y} \times \dfrac{b + b^2}{a + a\,b}$

4. Efectuar las siguientes divisiones:

1.ª $\dfrac{3\,a^2}{7\,a^4} : \dfrac{4\,a\,b}{6\,a^3\,x}$

2.ª $\dfrac{12\,a^2\,b}{8\,b\,x} : \dfrac{15\,a^3\,b}{7\,b^2\,c}$

3.ª $\dfrac{9a+3}{8\,a^2} : \dfrac{4\,a+5\,b}{2\,a+b}$

4.ª $\dfrac{2\,a\,b^2+5\,a^2\,b}{4-2\,a\,b^3} : \dfrac{2\,a^3\,b^3\,x}{-5\,a\,b^2}$

5.ª $\dfrac{35\,a^2\,b^4\,c^2}{a+3\,a^2} : \dfrac{6\,a^3-a^4}{5\,a+3\,c^2\,d}$

5. Transformar en fracciones las siguientes expresiones mixtas:

$$2\,a+\frac{3}{5\,a} \qquad 3\,a\,b+\frac{2\,a^2}{7\,a^2\,b} \qquad 4\,a^2\,x+\frac{6\,a^3\,b}{2\,a^2\,b\,c}$$

$$5\,a^3\,b\,c-\frac{2\,a^2\,b\,d}{9\,a^3\,b^4\,c} \qquad 3\,x^3-\frac{7\,x^5}{x^2+5}$$

$$4\,a^2+\frac{9\,a^2+b}{6+b^2}$$

6. Efectuar las siguientes operaciones:

1.ª $\left(3\,a^2+\dfrac{4\,a^2\,b}{3\,b}\right)+\left(5\,a^3\,x+\dfrac{9\,a\,x}{8\,a}\right)$

2.ª $\left(7\,a\,x^2+\dfrac{5\,b^2}{7\,a}\right)+\left(6\,x+\dfrac{8\,a^2\,x}{3\,b^2}\right)$

3.ª $$\left(5\,b^2+\frac{7\,a\,b\,c}{3\,b^2}\right)-\left(6\,a+\frac{5\,b^3\,c}{3\,x}\right)$$

4.ª $$\left(2\,a^2\,b^3\,c+\frac{5\,a^4\,b^2}{3\,b\,c}\right)\left(2\,a^2+\frac{5\,a^4}{b^2}\right)$$

5.ª $$\left(15\,a\,b\,x^3+\frac{a+b}{c+d}\right)\left(15\,a^2+\frac{7\,a+4}{5\,b}\right)$$

6.ª $$\left(2\,a\,x^4-\frac{3\,a^2-b^2}{5\,a\,x^2}\right)\left(3\,a^4+\frac{5\,x^2-3\,a}{7\,a^2\,b^3}\right)$$

7.ª $$\left(2+\frac{4\,a}{3}\right)\left(5\,a+\frac{9\,b}{2\,a^2}\right)\left(3\,a\,b-\frac{2\,a^2}{5\,x}\right)$$

8.ª $$\left(5\,a^2\,b+\frac{12\,x^3}{17\,a\,b}\right):\left(10\,a^2-\frac{31\,a^2\,b^3}{2\,b}\right)$$

9.ª $$\left(30\,a^2\,b^3+\frac{6\,a^3\,b^4}{a\,b}\right):\left(3\,a-\frac{6\,a^3\,b^2\,x}{5\,a^2+b}\right)$$

III.—Exponentes negativos

75. **Origen y transformación.**—Recordando la interpretación que se ha dado de las cantidades con exponente negativo al tratar de la división de una potencia por otra, las dos de igual dignando (46), tendremos:

$$a^{-d}=\frac{1}{a^d} \qquad [1]$$

Ahora bien, si dividimos la igualdad que sigue

$$1 = 1$$

por la anterior, se obtendrá:

$$1 : a^{-d} = 1 : \frac{1}{a^d} = 1 \times a^d = a^d$$

o sea

$8 \,|\, 4$
2

$$a^d = \frac{1}{a^{-d}} \qquad [2]$$

$2 = \frac{8}{4}$

Las igualdades [1] y [2] expresan:

Toda cantidad con exponente entero es igual a una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma cantidad con el signo de su exponente cambiado.

76. **Aplicaciones.**—Esta propiedad nos permite pasar los factores del numerador al denominador de una fracción y viceversa, cambiando el signo de los exponentes a dicho factores.

Ejemplos:

$$\frac{a^4\, d^5}{b^3\, c^2} = \frac{a^4}{b^3\, c^2} \times d^5 = \frac{a^4}{b^3\, c^2} \times \frac{1}{d^{-5}} = \frac{a^4}{b^3\, c^2\, d^{-5}}$$

$$\frac{a^6\, b^2}{2\, c^3\, d} = \frac{a^6\, b^2}{2\, d} \times \frac{1}{c^3} = \frac{a^6\, b^2}{2\, d} \times c^{-3} = \frac{a^6\, b^2\, c^{-3}}{2\, d}$$

77. **Operaciones con cantidades afectadas de exponente negativo.**—La introducción en el cálculo de las cantidades con exponente negativo, señala la necesidad

de establecer reglas para efectuar las operaciones, las cuales podemos estudiar en virtud de la transformación establecida anteriormente.

78. **Adición y sustracción.**—Es evidente que estas operaciones se efectuarán del mismo modo y siguiendo las mismas reglas expuestas en la adición y sustracción de las cantidades afectadas de exponente positivo, puesto que la práctica de ellas es independiente de los signos que lleven los exponentes.

79. **Multiplicación.**—Los distintos casos que pueden ocurrir son:

1.° Que los dos factores estén afectados de exponente negativo.

Tendremos:

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} =$$
$$= a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$$

2.° Que uno de los factores esté afectado de exponente positivo y el otro de exponente negativo.

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-m} \times a^n = \frac{1}{a^m} \times a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{-m+n}$$

Todo lo cual expresa que:

El producto de dos potencias de igual dignando, cualesquiera que sean los signos de sus exponentes, es otra potencia del mismo dignando que tiene por exponente la suma algébrica de los exponentes de los factores.

80. **División.**—Distinguiremos también los siguientes casos:

1.º Que dividendo y divisor estén afectados de exponente negativo.

Se tendrá:

$$a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{(-m)-(-n)}$$

2.º Que el dividendo tenga exponente positivo y el divisor negativo.

Tendremos:

$$a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$$

3.º Que el dividendo tenga exponente negativo, siendo el del divisor positivo.

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m\, a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$$

Todo esto manifiesta que:

El cociente de dos potencias de igual dignando, cualesquiera que sean los signos de los exponentes, es otra potencia del mismo dignando afectado de un exponente, diferencia entre el del dividendo y el del divisor.

81. **Otras aplicaciones.**—La introducción en el cálculo de las cantidades que venimos estudiando, tiene, además de las ya conocidas, las siguientes aplicaciones:

1.º El uso de exponentes negativos nos permite efectuar aquellas divisiones de monomios en que el dividendo contenga alguna letra con menor exponente que la del mismo nombre del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{45\, a^2\, b^3\, c^4}{9\, a^3\, b^2\, c^6} = 5\, a^{-1}\, b\, c^{-2}$$

2.ª Un polinomio fraccionario con respecto a una de sus letras, puede ordenarse según las potencias decrecientes de la misma letra, como se indica a continuación.

Ejemplo: el polinomio

$$8\,a^2\,x - 4\,x^3 - \frac{2\,a^5}{x^2} + 5\,a^3 - 2\,a\,x^2 + \frac{6\,a^4}{x}$$

ordenado según las potencias decrecientes de x, será:

$$-4\,x^3 - 2\,a\,x^2 + 8\,a^2\,x + 5\,a^3 + 6\,a^4\,x^{-1} - 2\,a^5\,x^{-2}$$

3.ª En algunas divisiones pueden utilizarse las cantidades con exponentes negativos para obtener los cocientes completos.

Ejemplo: sea la división

$$(a^5 + b^5) : (a^3 + a^2\,b)$$

Practicándola en la forma ordinaria, y continuando haciendo uso de los exponentes negativos, tendremos:

$$\begin{array}{llllll|l}
a^5 & & & & & + b^5 & a^3 + a^2\,b \\
\cline{7-7}
-a^5 & -a^4\,b & & & & & a^2 - a\,b + b^2 - a^{-1}\,b^3 + a^{-2}\,b^4 \\
\cline{1-2}
 & -a^4\,b & & & & & \\
 & +a^4\,b & +a^3\,b^2 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & +a^3\,b^2 & & & & \\
 & & -a^3\,b^2 & -a^2\,b^3 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -a^2\,b^3 & & & \\
 & & & +a^2\,b^3 & +a^4\,b & & \\
\cline{4-5}
 & & & & +a^4\,b & & \\
 & & & & -a^4\,b & -b^5 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

82. **Nueva forma polinómica de un número fraccionario decimal.**—Hemos visto en lugar oportuno (18) cómo se le podía dar forma polinómica a un número fraccionario decimal; ahora vamos a representarlo, utilizando

los exponentes negativos, por un polinomio de forma entera.

Sea un nuevo fraccionario decimal cualquiera, el 0'7285, por ejemplo; representemos por b el sistema de numeración y se tendrá según expusimos oportunamente:

$$0'7285 = \frac{7}{b} + \frac{2}{b^2} + \frac{8}{b^3} + \frac{5}{b^4}$$

Ahora bien, los términos fraccionarios de este polinomio pueden tomar forma entera utilizando los exponentes negativos (81), luego

$$0'7285 = 7\,b^{-1} + 2\,b^{-2} + 8\,b^{-3} + 5\,b^{-4}$$

lo cual manifiesta que *todo número fraccionario decimal puede expresarse por un polinomio de forma entera en el que los coeficientes de sus términos son las cifras representativas de los órdenes numerales decimales a que pertenecen, llevando por parte literal la base del sistema de numeración afectada de un exponente negativo que indique el orden de dichas unidades numerales.*

Si el número fraccionario decimal llevara parte entera, como, por ejemplo, el 482'735, le daríamos la forma polinómica siguiente:

$$482'735 = 4\,b^2 + 8\,b + 2 + 7\,b^{-1} + 3\,b^{-2} + 5\,b^{-3}$$

EJERCICIOS

1. Trasladar el factor b del numerador al denominador en cada una de las fracciones siguientes:

$$\frac{a\,b}{c} \qquad \frac{3\,a^2\,b^2}{4\,a^3\,d} \qquad \frac{2\,a^3\,b^4\,m}{5\,d\,m^3} \qquad \frac{24\,b^5\,n\,x}{3\,a\,d}$$

2. Trasladar el factor x del denominador al numerador en las fracciones siguientes:

$$\frac{a\,b\,c}{d\,x} \qquad \frac{7\,a^2\,b}{3\,a\,x^2} \qquad \frac{5\,a^2\,b\,c^2\,d}{3\,a\,d\,x} \qquad \frac{-15\,a^2\,b^3\,d}{4\,m\,n\,x^3}$$

$$\frac{12\,a\,b^3\,c^2\,x^2}{4\,a^3\,x^3}$$

3. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

1.° a^5 por a^{-3}

2.° x^{-3} por x^6

3.° a^{-4} por a^{-5}

4.° $35\,a^2\,b^3\,c^{-2}$ por $5\,a^{-3}\,b^2\,c^{-4}$

5.° $16\,a^2\,b^{-4}\,x$ por $-7\,a^{-4}\,b^{-5}\,x^2$

6.° $5\,x^2 + 3\,x^4 - 2\,a^{-2}$ por $2\,x^{-2} + a$

4. Efectuar las siguientes divisiones:

1.° a^{-4} por a^2

2.° a^3 por a^{-2}

3.° x^4 por x^{-8}

4.° x^{-5} por x^{-3}

5.° $22\,a^3\,b\,d$ por $11\,a^4\,b\,d^3$

6.° $4\,a^4\,c\,x$ por $3\,a^3\,c^2\,x^4$

7.° $15\,a^6\,d^2\,m^3$ por $5\,a^2\,d^4\,m^6$

8.° $-7\,a^2\,m^3\,n^2\,x$ por $5\,a^3\,b\,m^6\,n^5\,x^2$

5. Dar forma entera a las expresiones fraccionarias siguientes:

$$\frac{4\,a^2\,b^3}{2\,a^3\,b} \quad \frac{5\,a^4\,c\,d}{3\,a^5\,c^2\,d^3} \quad \frac{15\,x^2}{3\,x^4} \quad \frac{6\,m\,n^3}{3\,m^2\,n^4}$$

$$\frac{24\,a^3\,b^2\,x}{3\,b^4\,x^3} \quad \frac{5\,a^2\,b\,m}{7\,a^4\,b\,m^3} \quad \frac{6\,a^2\,c\,d}{-4\,c^3\,d^4} \quad \frac{12\,a^6\,b_2\,x^3}{4\,a^2\,b^5\,x^4}$$

6. Ordenar los siguientes polinomios según las potencias decrecientes de x:

1.° $8\,a^2 - \frac{16\,a^3}{x} + 15\,a\,x$

2.° $8\,x^2 - 3\,a\,x + \frac{7\,a^3}{x} + 6 - \frac{3\,a^4}{x^2}$

3.° $3\,a^5\,x + \frac{4\,a^9}{x^3} - \frac{5\,a^8}{x^2} + 2\,a^6 - 3\,a^3\,x^3 +$

$+ \frac{7\,a^7}{x}$

7. Efectuar las siguientes divisiones:

1.° $(x - 1) : (x + 1)$

2.° $(x^2 + a^2) : (x + a)$

3.° $(x^6 + a^6) : (x^2 + a\,x^2)$

8. Dar forma polinómica, utilizando los exponentes negativos, a cada uno de los decimales siguientes: 7'423, 82'503, 0'00423, 7'2004, 89'34003 y 9'47832.

IV.—Símbolos de forma fraccionaria

83. **El valor infinito.**—Con la palabra *infinito* se designa en matemáticas a un valor mayor que una cantidad cualquiera, por grande que ésta fuese.

El infinito se representa por el signo ∞.

Toda cantidad cuyo valor no sea infinito, se dice que es una cantidad finita.

84. **Símbolos de forma fraccionaria.**—Cuando se trate de hallar el valor numérico de una fracción algébrica, puede ocurrir que uno de sus términos se reduzca a cero o que se reduzcan a cero los dos términos. Estudiaremos estos casos para ver cuál es el valor de la fracción en cada uno.

1.º Sea la fracción

$$\frac{a}{b}$$

Si el numerador permanece constante y el denominador va disminuyendo, cuanto menor sea éste mayor será el valor de la fracción; luego si el denominador decrece indefinidamente hasta llegar a cero, el valor de la fracción llegará a valer más que cualquier cantidad dada; esto es, que

$$\frac{a}{0} = \infty$$

Lo cual se lee: a *sobre cero, igual a infinito.*

2.º Cuando se anule el numerador de la fracción

$$\frac{a}{b}$$

ésta tomará la forma

$$\frac{0}{b}$$

que será igual a cero, porque siendo el valor numérico de una fracción el cociente de dividir los valores que adquieren sus términos, cero es el único valor de la fracción que, multiplicado por el denominador b, reproduzca el numerador de ese símbolo.

Así, pues,

$$\frac{0}{b} = 0$$

que se lee: *cero sobre* b, *igual a cero.*

3.º Si los demás términos de la fracción se reducen a cero, la fracción tomará la forma

$$\frac{0}{0}$$

que como fracción numérica no tiene sentido, pero como cociente puede representar un número cualquiera, puesto que en una división en que dividendo y divisor ambos son cero, el cociente podrá ser cualquier cantidad finita, que multiplicada por 0 dará de producto cero.

Luego

$$\frac{0}{0} = \text{valor indeterminado}$$

De aquí se infiere que toda cantidad puede servir de valor a

$$\frac{0}{0}$$

lo que se expresa diciendo: *cero sobre cero es un símbolo de indeterminación.*

Observación.—No siempre que una fracción toma la forma de $\frac{0}{0}$ se puede afirmar que es indeterminada, pues debido a la existencia de un factor común en el numerador y denominador, se reducen a cero para ciertos valores atribuídos a sus letras, por lo cual *debe simplificarse la fracción cuanto sea posible antes de hallar su valor numérico.*

Así, por ejemplo, la fracción

$$\frac{4\,a - a^2}{32 - 8\,a}$$

se tranforma en el símbolo de indeterminación, dándole a a el valor 4.

Pero sus términos tienen un factor común, porque

$$\frac{4\,a - a^2}{32 - 8\,a} = \frac{a\,(4 - a)}{8\,(4 - a)}$$

Simplificándola, se convertirá en

$$\frac{a}{8}$$

en la que dando al numerador el mismo valor 4 que anteriormente, se hallará:

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

que no es indeterminada.

CAPITULO IV

POTENCIAS Y RAÍCES DE LAS EXPRESIONES

I.—Potenciación

85. **Definición.**—*La* POTENCIACIÓN *es una operación que tiene por objeto hallar, de un modo directo, un producto de tantos factores iguales a una cantidad dada como unidades tenga el exponente.*

Así:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$
$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \ (m \text{ factores})$$

siendo m entero y positivo.

Cuando el exponente sea entero y negativo, puede considerarse la potencia como un producto de tantos factores fraccionarios que tengan por numerador la unidad y por denominador el dignando (75), como unidades tenga el exponente.

Así:

$$a^{-4} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \ldots \ (m \text{ factores})$$

86. **Potencia de un producto.**—Tengamos el producto

$$a\,b\,c\,d$$

que deseamos potenciar por m; siendo m positivo, se tendrá:

$$(a\,b\,c\,d)^m = (a\,b\,c\,d)\,(a\,b\,c\,d)\,(a\,b\,c\,d)\ldots =$$
$$= aaa\ldots \times bbb\ldots \times ccc\ldots \times ddd\ldots =$$
$$= a^m \times b^m \times c^m \times d^m$$

En el caso que m fuera negativo, tendríamos:

$$(a\,b\,c\,d)^{-m} = \frac{1}{(a\,b\,c\,d)^m} = \frac{1}{a^m \,.\, b^m \,.\, c^m \,.\, d^m} =$$
$$= \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{b^m} \times \frac{1}{c^m} \times \frac{1}{d^m} =$$
$$= a^{-m} \times b^{-m} \times c^{-m} \times d^{-m}$$

Lo cual da lugar a la siguiente

Regla.—*Para elevar un producto a una potencia de un grado cualquiera, se forma un producto de las potencias del mismo grado de sus factores.*

87. **Potencia de un cociente.**—Llamemos c al cociente de

$$a : b$$

Como en toda división, se verificará:

$$a = b\,.\,c$$

que aplicando a esta igualdad el principio anterior (86) obtendremos:

$$a^m = b^m \cdot c^m$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por b^m, resulta:

$$c^m = a^m : b^m \qquad [1]$$

cualquiera que sea la modalidad de m.

La igualdad podemos expresarla en esta forma:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad [2]$$

Las igualdades [1] y [2] originan la siguiente

REGLA.—*Para elevar un cociente, o una fracción, a una potencia cualquiera, se elevan a dicha potencia sus dos términos.*

88. **Potencia de otra potencia.**—Sea

$$(a^m)^n$$

Si los dos exponentes son positivos, se tendrá:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots = a^{m+m+m \ldots} = a^{m \cdot n}$$

En el caso que alguno de los exponentes fuese negativo, se tendría:

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-m \cdot n}$$

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-m \cdot n}$$

En el caso de que n y m fuesen negativos:

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^{m}} = \frac{1}{a^{-n \cdot m}} = a^{n \cdot m}$$

Regla.—*Para elevar una potencia a otra potencia, se forma una potencia de la misma cantidad, que tenga por exponente el producto de los exponentes dados.*

89. **Consecuencia.**—Según la regla que acabamos de exponer

$$(a^{n})^{m} = a^{n \cdot m}$$

y como también

$$(a^{m})^{n} = a^{m \cdot n}$$

luego

$$(a^{n})^{m} = (a^{m})^{n}$$

lo que manifiesta que:

Al calcular una potencia de otra potencia, puede alterarse el orden en que se indiquen las potenciaciones.

90. **Potencia de un monomio.**—Recordando lo dicho respecto al signo que corresponde a una potencia (30) y teniendo en cuenta, además, que un monomio es un producto de varios factores, podemos aplicar los principios establecidos anteriormente (86 y 88) y sentar con toda generalidad la siguiente

Regla.—*Para elevar un monomio a una potencia de un grado cualquiera, se eleva su coeficiente a la potencia de* *igual grado, se multiplica el exponente de cada letra por el de la potencia y se afecta el resultado del signo (+), si el grado de la potencia es par, y del signo del monomio, si dicho grado es impar.*

Ejemplos:

$$(4\,a^2\,b^3\,c^4)^2 = 16\,a^4\,b^6\,c^8$$

$$(3\,a^2\,b\,m)^3 = 27\,a^6\,b^3\,m^3$$

$$(-\,5\,a\,b^3\,c^2)^2 = 25\,a^2\,b^6\,c^4$$

$$(-\,8\,a^2\,b\,m^4)^3 = -\,512\,a^6\,b^3\,m^{12}$$

91. **Cuadrado de un binomio.**—Según se ha visto en la multiplicación (41), se tiene:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$$

y escribiendo en una sola expresión estas dos, utilizando el signo $\pm$, tendremos:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2\,a\,x + a^2$$

lo que nos indica que:

El cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de sus términos, más o menos el duplo del producto de estos términos, según tengan igual signo o signos contrarios.

92. **Cubo de un binomio.**—Sea el binomio de $x+a$, que deseamos elevar al cubo, tendremos:

$$(x+a)^3 = (x+a)^2\,(x+a)$$

o sea:

$$(x+a)^3 = \begin{cases} x^2 + 2\,a\,x + a^2 \\ x + a \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2\,a\,x^2 + a^2\,x \\ \quad + a\,x^2 + 2\,a^2\,x + a^3 \\ \hline x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3 \end{array}$$

Cuyo resultado expresa que:

El cubo de x + a *es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del cuadrado del segundo por el primero, más el cubo del segundo término.*

Para el cubo $x-a$ se obtendría por resultado el mismo polinomio, pero los términos que ocupen el lugar par, segundo y cuarto, serían negativos.

De modo que:

$$(x-a)^3 = x^3 - 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x - a^3$$

y escribiendo en una sola expresión ésta y la anterior, tendremos:

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x \pm a^3$$

93. **Cuadrado de un polinomio.**—Sea un polinomio

$$a + b - c + d$$

que hemos de elevar al cuadrado, según la definición dada (85), tendremos:

$$(a+b-c+d)^2 = (a+b-c+d)\,(a+b-c+ \\ +d) = a^2+ab-ac+ad+ab+b^2-bc+ \\ +bd-ac-bc+c^2-cd+ad+bd-cd+d^2 = \\ = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad- \\ -2bc+2bd-2cd$$

y sacando el factor común 2 de los términos que lo tengan, en el último miembro de esta igualdad, se obtendrá:

$$(a+b-c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2\,(ab- \\ -ac+ad-bc+bd-cd)$$

Lo cual expresa que:

El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de todos sus términos, más el duplo de la suma algébrica de los productos de cada término por todos los que le siguen.

94. **Cubo de un polinomio.**—Propongámonos calcular el cubo del polinomio

$$a+b+c$$

Si llamamos m al valor de $a+b$, tendremos:

$$(a+b+c)^3 = (m+c)^3$$

que podemos aplicar lo dicho en el número (92) y obtendremos:

$$(m+c)^3 = m^3+3\,m^2c+3\,mc^2+c^3$$

y substituyendo en esta igualdad, en vez de m, su valor $a + b$, se tendrá:

$$(a + b + c)^3 = (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + \\ + c^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + \\ + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$$

Cuya expresión, traducida al lenguaje vulgar, manifiesta lo siguiente:

El cubo de un polinomio es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, más el triplo del cuadrado de la suma de los dos primeros por el tercero, más el triplo de esa suma por el cuadrado del tercero, más el cubo del tercero, y así sucesivamente.

95. **Potencias sucesivas del binomio** $x + a$.—Hemos visto (91 y 92) cómo se han formado el cuadrado y el cubo del binomio $x + a$, apoyándonos en la definición dada de la potenciación, o sea tomando dos o tres veces, respectivamente, a dicho binomio por factor; del mismo modo podemos obtener las potencias superiores al cubo, partiendo de éste, multiplicándolo por $x + a$, el producto obtenido por $x + a$, y así sucesivamente.

Según quedó demostrado (92),

$$(x + a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$$

multiplicando este resultado por $x + a$, obtendremos su cuarta potencia; se tendrá, pues:

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3 \\ x + a \end{array}\right\} = (x + a)^4$$

$$\begin{array}{l} x^4 + 3\,a\,x^3 + 3\,a^2\,x^2 + a^3\,x \\ \quad + a\,x^3 + 3\,a^2\,x^2 + 3\,a^3\,x + a^4 \\ \hline x^4 + 4\,a\,x^3 + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a^3\,x + a^4 \end{array}$$

Multiplicando este resultado por $x + a$, se obtendrá la quinta potencia del binomio.

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 4\,a\,x^3 + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a^3\,x + a^4 \\ x + a \end{array}\right\} = (x+a)^5$$

$$\begin{array}{r} x^5 + 4\,a\,x^4 + 6\,a^2\,x^3 + 4\,a^3\,x^2 + a^4\,x \\ + a\,x^4 + 4\,a^2\,x^3 + 6\,a^3\,x^2 + 4\,a^4\,x + a^5 \\ \hline x^5 + 5\,a\,x^4 + 10\,a^2\,x^3 + 10\,a^3\,x^2 + 5\,a^4\,x + a^5 \end{array}$$

y así sucesivamente.

Resulta, pues, que las potencias que se han formado son:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$$
$$(x + a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$$
$$(x + a)^4 = x^4 + 4\,a\,x^3 + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a^3\,x + a^4$$
$$(x + a)^5 = x^5 + 5\,a\,x^4 + 10\,a^2\,x^3 + 10\,a^3\,x^2 + 5\,a^4\,x + a^5$$

. . . .

Y de igual manera podíamos continuar las multiplicaciones y obtener las potencias 6.ª, 7.ª, 8.ª, etc.

96. **Fórmula del binomio de Newton.**—El procedimiento elemental señalado en el número anterior es largo; la fórmula llamada del *binomio de Newton* (1), tiene por objeto hallar la potencia de cualquier grado del binomio, sin cálculo previo de las potencias anteriores.

Veamos de qué modo:

En las igualdades que hemos obtenido anteriormente (95) pueden substituirse los coeficientes de sus

(1) Debida a Isaac Newton, ilustre matemático y filósofo de nacionalidad inglesa.

términos por otros del mismo valor de forma fraccionaria, como lo haremos seguidamente, obteniendo:

$$(x + a)^2 = x^2 + \frac{2}{1} a\, x + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + \frac{3}{1} a\, x^2 + \frac{3 \times 2}{1 \times 2} a^2\, x + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + \frac{4}{1} a\, x^3 + \frac{4 \times 3}{1 \times 2} a^2\, x^2 +$$

$$+ \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} a\, x^3 + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + \frac{5}{1} a\, x^4 + \frac{5 \times 4}{1 \times 2} a^2\, x^3 +$$

$$+ \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} a^3\, x^2 + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^4\, x + a^5$$

. . . .

Observemos que las potencias obtenidas de $x + a$ están sujetas a las siguientes leyes:

1.ª *Que son polinomios homogéneos y completos del mismo grado de la potencia, con respecto a las letras* a *y* x (12).

2.ª *El número de términos de cada polinomio es igual al exponente de la potencia del binomio, más uno.*

3.ª *En un término cualquiera, el exponente de* a *indica el número de términos que le preceden y el de* x *el número de términos que le siguen.*

4.ª *El coeficiente del primer término y el del último, en cada polinomio, es la unidad.*

5.ª *Que un coeficiente cualquiera de cada polinomio es una fracción que tiene por numerador el producto de tantos factores sucesivos y descendentes, a partir del exponente de la potencia, como términos preceden al que se considera, y por denominador el producto de igual número de factores sucesivos y crecientes, a partir de la unidad.*

6.ª *Los términos equidistantes de los extremos, en cada polinomio, tienen coeficientes iguales.*

En virtud, pues, de las leyes expuestas, podemos escribir la siguiente fórmula, que es la del *binomio de Newton*, que indica la potencia m^{esima} de $x + a$.

$$(x + a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} a^2 x^{m-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m$$

Aplicando esta fórmula, puede obtenerse directamente la potencia de cualquier grado del binomio, sin más que substituir x por el primer término, a por el segundo y m por el grado de dicha potencia.

97. **Factorial de un número y su aplicación a la fórmula.**—El producto de factores de la serie numérica, a partir de la unidad hasta el número n, como $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times .. \times n$, se denomina *factorial de* n y se representa bajo la forma $\underline{|n}$.

Aplicando esta notación al desarrollo, tendremos:

$$(x + a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}} a^2 x^{m-2} + .. +$$

$$+ \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{\underline{|n}} a^n x^{m-n} + \ldots + a^m$$

98. **Término general del desarrollo.**—Llamamos *término general* al que ocupa el lugar $n + 1$ del desarrollo de la *enésima* potencia del binomio, llevando por lo tanto delante de él n términos.

El valor del término general, como hemos visto, es:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}}\, a^{n} x^{m-n}$$

Consideremos que el coeficiente del término anterior

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{\underline{|n-1}}\, a^{n-1} x^{m-n+1}$$

multiplicado por el factor

$$\frac{m-n+1}{n}$$

nos da de producto el coeficiente del término general; obsérvese que el numerador de este factor es el exponente de x en el término que ocupa el lugar n, y el denominador es el exponente de a en dicho término, aumentado en una unidad; luego:

Conocido el coeficiente de un término del desarrollo, se forma el coeficiente del término que sigue, multiplicándolo por el exponente de x *y dividiendo el producto obtenido por el exponente de* a, *incrementando en una unidad.*

Así, por ejemplo, si el cuarto término del desarrollo es

$$10\, a^{3} x^{2}$$

el quinto término será:

$$\frac{10 \times 2}{3+1} = 5$$

99. **Suma de los coeficientes.**—Si en el desarrollo de $(x+a)^m$ hacemos $x=1$ y $a=1$, obtendremos como valor numérico:

$$(1+1)^m = 1^m + m \cdot 1 \cdot 1^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}} 1^2 \cdot 1^{m-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}} \cdot 1^n \cdot 1^{m-n} + \ldots + 1^m$$

o lo que es lo mismo:

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}} + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{\underline{|n}} +$$

$$+ \ldots + 1$$

lo cual manifiesta que *en el desarrollo de la potencia del binomio, la suma de los coeficientes de sus términos es igual a la* EMÉSIMA *potencia de 2,* cuya propiedad puede servir como medio de comprobación de los desarrollos.

100. **Triángulo de Pascal.**—El célebre matemático Pascal ideó un procedimiento para obtener rápidamente los coeficientes de los términos del desarrollo de la fórmula de Newton, que consiste en el siguiente triángulo:

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 85 \quad 126 \quad 126 \quad 85 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Todas las líneas de este triángulo llevan en primero y último término la unidad y cada uno de los restantes números que en ellas figuran se obtiene sumando los dos situados encima de él en la línea anterior.

En cada línea del triángulo se hallan por el mismo orden en que están escritos, los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia del binomio, cuyo grado de la potencia sea el mismo que el número ordinal obtenido al contar las líneas de arriba a bajo, hasta la que se considere inclusive.

Así, por ejemplo, en la novena línea se hallarán los coeficientes de los términos del desarrollo de $(x + a)^9$.

Así, la potencia 6.ª de $x + a$ será:

$$(x + a)^6 = x^6 + 6\, a\, x^5 + 15\, a^2\, x^4 + 20\, a^3\, x^3 + \\ + 15\, a^4\, x^2 + 6\, a^5\, x + a^6$$

101. **Observaciones.**—1.ª La fórmula que hemos expuesto (97) es aplicable al binomio $x - a$, para obtener cualquiera de sus potencias, con sólo substituir en dicha fórmula $- a$ en vez de a.

Hecha la substitución, los términos que contengan potencias impares de a habrán cambiado de signo, mientras que los demás términos conservarán el mismo. Luego la forma del desarrollo de $(x - a)^m$ es la misma que la ya dicha, con la sola diferencia de ser sus términos alternativamente positivos y negativos.

Así:

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}\, a\, x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\, a^2\, m^{-2} - \\ - \frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}\, a^3\, x^{m-2} + \ldots \pm a^m$$

2.ª Si los dos términos fuesen negativos, tomaría la forma de $-x-a$, pero

$$-x-a=-(x+a)$$

que si a este binomio lo elevamos a la potencia del grado m, tendremos (79):

$$\text{Siendo}\left\{\begin{array}{l} m \quad \text{par}\ [-x+a)\,]^m = \quad (x+a)^m\ , \\ m\ \text{impar}\ [-x+a)\,]^m = -(x+a)^m \end{array}\right.$$

es decir, que si el exponente de la potencia es par, los términos del desarrollo son positivos, y si el exponente es impar, lo son todos negativos.

102. **Aplicación de la fórmula para obtener las potencias de un polinomio.**—Para elevar a una potencia cualquiera a un polinomio, se le considera como a un binomio, tomando uno de sus términos como primera parte y los restantes como segunda, y se aplica la fórmula de Newton.

Ejemplo:

$$\begin{array}{c} (a^2+b\,c-d+f)^4=[a^2+(b\,c-d+f)\,]^4= \\ =a^8+4\,a^6\,(b\,c-d+f)+6\,a^4\,(b\,c-d+f)^2+ \\ +4\,a^2\,(b\,c-d+f)^3+(b\,c-d+f)^4= \\ =a^8+4\,a^6\,b\,c-4\,a^6\,d+4\,a^6\,f+ \\ +6\,a^4\,[b\,c^2-2\,b\,(-d+f)\,]+(-d+f)^2\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Efectuar las siguientes potenciaciones:

1.ª $(a \times b)^2$

2.ª $(a \times b \times c)^2$

3.ª $(-5 \times a \times 3)^3$

4.ª $(a \times b \times c)^m$

5.ª $\left(\frac{a}{b}\right)^2$

3.ª $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

4.ª $\left(\frac{m}{n}\right)$

5.ª $\left(\frac{7 \times 4}{2 \times 3}\right)^4$

6.ª $\left(\frac{a \times b \times c}{m \times n}\right)^3$

2. Elevar a la segunda potencia las siguientes expresiones:

1.ª $a^2 b^3$

2.ª $x^3 y^2$

3.ª $-x^2 y^4$

4.ª $-a b c d$

5.ª $-11 a^2 b^2 c^3$

6.ª $\frac{2}{4} a b c^4$

7.ª $\frac{2}{7} a^4 b^3 x^4$

8.ª $\frac{2}{3} a^4 x^3 y^3$

9.ª $-\frac{4}{9} a^4 b^2 c^5$

10. $15 a^3 \frac{b}{c}$

11. $-\frac{a}{b} c^3 m^4$

12. $\frac{5}{-4} a b^2 n^3$

3. Elevar al cubo las siguientes expresiones:

1.ª $a^2 b^3$

2.ª $3 a x^2$

3.ª $a^2 x^3 y^5$

4.ª $- a^2 b^2 c^3$

5.ª $- 4 a b^3 m$

6.ª $- 5 a x^4 y^2$

7.ª $-2\,a^2\,b\,d^3$

8.ª $\dfrac{2}{4}\,a^3\,b^2\,x^4$

9.ª $\dfrac{3}{5}\,a^3\,m\,n^4$

10. $\dfrac{5}{7}\,m^3\,n^4\,x$

11. $\dfrac{2\,a^2\,b^2\,c^3}{4\,a^4\,b^3\,c^4}$

12. $\dfrac{3\,a^2\,b^3\,c^4}{2\,m^3\,n^2\,x^4}$

4. Escribir los resultados de los siguientes ejercicios:

1.º $(a+b)^2$
2.º $(a-b)^2$
3.º $(x+1)^2$
4.º $(x-b)^3$
5.º $(x+b)^4$
6.º $(a+b-c)^2$
7.º $(a+b+c+d)^2$
8.º $(a+b+1)^3$
9.º $(3\,a+4\,b)^2$
10. $(2\,a+4)^3$
11. $(2\,a+2\,b+1)^3$
12. $(a+b+c+d)^3$

5. Formar la 7.ª y la 8.ª potencia de los siguientes binomios:

1.º $(x + a)$

2.º $(x - a)$

3.º $(-x - a)$

6. Elevar a la cuarta potencia, aplicando la fórmula de Newton, los números 17, 42, 125, 348.

II.—Radicación

103. **Definición y notación.**—*La* RADICACIÓN *es una operación inversa de la potenciación, que tiene por objeto hallar una expresión de cantidad, que elevada a la potencia que se indique, reproduzca, en magnitud y signo, otra dada.*

Los datos de esta operación son el *radicando* o *subradical* y el *índice.* El resultado se llama *raíz.*

El signo que indica esta operación es:

$$\sqrt[m]{a}$$

en el cual m es el índice que representa el grado de la raíz, a es la expresión de la que se ha de extraer la raíz (1).

El valor absoluto de las raíces se determina por las reglas establecidas en Aritmética.

104. **Signo que corresponde a una raíz.**—Prescindiendo del procedimiento que se siga para determinar

(1) Cuando el índice es dos se omite su escritura.

los valores absolutos de las raíces y fundándonos en la definición que acaba de darse y en lo dicho al ocuparnos del signo que corresponde a una potencia (31), se deduce lo siguiente:

1.° *Cuando sea impar el índice de la raíz, a ésta le corresponderá el mismo signo que lleve el radicando.*

Así, por ejemplo, representando por r el valor absoluto de $\sqrt[3]{A}$, tendríamos:

$$\sqrt[3]{A} = +r \qquad \sqrt[3]{-A} = -r$$

y de un modo general, siempre que

$$(+r)^{2n+1} = A \qquad (-r)^{2n+1} = -A$$

obtendremos respectivamente:

$$\sqrt[2n+1]{A} = +r \qquad \sqrt[2n+1]{-A} = -r$$

2.° *Cuando sea par el índice, si el radicando es positivo, a la raíz le corresponderá igualmente el signo* $+$ *que el signo* $-$. Es decir, que la raíz tiene dos *valores iguales y de signo contrario* por lo que se la afecta del doble signo $\pm$.

Así:

$$\sqrt[2n]{A} = \pm r$$

porque

$$(+r)^{2n} = (-r)^{2n} = A$$

3.° *Cuando el índice sea par, si el radicando es negativo, la raíz no será positiva ni negativa,* porque no hay cantidad alguna afectada del signo + o del signo —, que elevada a una potencia de grado par, reproduzca una cantidad negativa.

Las raíces de grado par de las cantidades negativas, reciben el nombre de *cantidades imaginarias* para distinguirlas de todas las otras que se denominan *reales*.

105. **Raíz de un producto.**—*La raíz de cualquier grado de un producto es igual al producto de las raíces del mismo grado de sus factores.*

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}$$

porque

$$\left(\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\right)^m = a \cdot b \cdot c$$

106. **Raíz de un cociente.**—*La raíz de cualquier grado de un cociente es igual al cociente de dividir la raíz del mismo grado del dividendo por la del divisor.*

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

porque

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b}$$

107. **Raíz de una potencia.**—*La raíz de cualquier grado de una potencia cuyo exponente sea entero, es otra*

potencia de igual dignando que tenga por exponente el cociente de dividir el de la potencia dada por el índice de la raíz.

En efecto:

$$\sqrt[m]{a^{m \cdot n}} = a^n$$

porque

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

que reproduce el radicando.

Observación.—Cuando el exponente de la potencia no sea divisible por el índice de la raíz, la operación quedará indicada, dando lugar a cantidades con exponente fraccionario, de las cuales nos ocuparemos más adelante.

108. **Raíz de otra raíz.**—*La raíz de una raíz es otra raíz de la misma cantidad, que tiene por índice el producto de los índices de las raíces propuestas.*

Sea

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}$$

que representaremos por r su valor y tendremos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = r$$

Elevando los dos miembros de esta igualdad a la potencia del grado m, se obtendrá:

$$\sqrt[n]{A} = r^m$$

y ahora, elevando los dos miembros a la potencia del grado n, tendremos:

$$A = r^{m \cdot n}$$

de donde

$$\sqrt[m \cdot n]{A} = r$$

y por tanto,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m \cdot n]{A}$$

109. **Aplicaciones.**—La proposición que acabamos de demostrar nos permite hacer las siguientes:

1.ª Cuando el índice de una raíz es un número compuesto, puede descomponerse en sus factores primos y obtener entonces la raíz propuesta, efectuando las radicaciones cuyos índices sean dichos factores.

Así, por ejemplo:

$$\sqrt[6]{A} = \sqrt[3 \cdot 2]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{A}}$$

2.ª Al obtener la raíz de otra raíz puede alterarse el orden indicado en las radicaciones.

Así,

$$\sqrt{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[3]{\sqrt{A}}$$

110. **Raíz de un monomio.**—Como un monomio es un producto indicado de factores numéricos y literales, los cuales son potencias, se deduce de los principios establecidos (105 y 107) la siguiente

REGLA.—*Para extraer la raíz de un cierto grado de* *un monomio, se halla primero el signo de la raíz; después se extrae la raíz del grado propuesto del coeficiente, y a continuación se escriben las letras, cada una afectada de un exponente igual al cociente de dividir su exponente por el índice de la raíz.*

Ejemplos:

$$\sqrt{16\,a^4\,b^6\,c^2} = \pm\,4\,a^2\,b^3\,c$$

$$\sqrt[3]{-27\,a^3\,b^9\,c^6} = -\,3\,a\,b^3\,c^2$$

$$\sqrt[4]{81\,a^{12}\,b^8\,c^{16}} = \pm\,3\,a^3\,b^2\,c^4$$

111. **Condiciones para que la raíz de un monomio sea exacta.**—De la regla expuesta anteriormente se desprende que para que un monomio tenga raíz exacta es necesario que su coeficiente sea potencia perfecta del grado que indique el índice de la raíz y que los exponentes de las letras del radicando sean divisibles por el índice.

EJERCICIOS

1. Extraer las siguientes raíces:

1.ª $\sqrt{25\,a^2\,b^2}$

2.ª $\sqrt{16\,a^4\,b^2}$

3.ª $\sqrt[3]{125\,a^4\,b^6}$.

4.ª $\sqrt[4]{16\,a^8\,b^4\,c^2}$

5.ª $\sqrt[3]{a^9\,(x^2+y^2)^3}$

2. Efectúense las radicaciones que a continuación se expresan:

1.ª $\sqrt[4]{a^2 (b + c)^4}$

2.ª $\sqrt[3]{- 8 a^3 b^4 c^4}$

3.ª $\sqrt[3]{512 a^6 b^3}$

3. Efectúense las radicaciones siguientes:

1.ª $\sqrt[4]{\sqrt{a.b c}}$

2.ª $\sqrt{\frac{a}{b}}$

3.ª $\sqrt{\frac{a^m}{b^m}}$

4.ª $\sqrt{\frac{(a + b)^2}{25 a^2}}$

5.ª $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + 2 a b}{49 (a + b)^2}}$

6.ª $\sqrt{\frac{(a + b) (b + a)}{x^2 + a^2 - 2 a x}}$

III.—Cantidades radicales

112. **Definiciones.**—Se da el nombre de *cantidad radical* a la raíz indicada de una cantidad cualquiera, bien sea literal o numérica.

Así,

$$\sqrt{a} \qquad \sqrt{-b}$$

son cantidades radicales y se denominan abreviadamente *radicales*.

El factor numérico que multiplica a un radical se denomina *coeficiente*.

113. **Concepto de cantidad radical.**—Una cantidad radical no indica una operación que haya de efectuarse, sino el valor o valores de la cantidad que elevada a la potencia que indica su índice reproduzca la que está bajo del radical.

Prescindiendo de los distintos valores que pueda tener una cantidad radical, sólo nos ocuparemos de su valor absoluto o numérico, considerando, por lo tanto, positivas las cantidades que estén bajo de los signos radicales, estableciendo las reglas del cálculo.

114. **Radicales homogéneas y semejantes.**—Radicales *homogéneas* son las que tienen el mismo índice.

Como:

$$\sqrt{a} \qquad \sqrt{b}$$

Radicales *semejantes* son las que tienen el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo diferenciarse solamente por sus coeficientes.

Así,

$$\sqrt{abc} \qquad 5\sqrt{abc}$$

son radicales semejantes.

115. **Transformación de los radicales.**—Las transformaciones de que son susceptibles los radicales se fundan en el principio siguiente:

Un radical no varía cuando se multiplican o se dividen por una misma cantidad su índice y el exponente del radicando.

En efecto: sea la cantidad

$$\sqrt[m]{a^n}$$

si llamamos r a su valor, tendremos:

$$\sqrt[m]{a^n} = r$$

que si potenciamos por m sus dos miembros, nos dará:

$$a^n = r^m$$

potenciando los dos miembros de esta igualdad por p, obtendremos:

$$a^{np} = r^{mp}$$

y extrayendo en esta igualdad la raíz del grado $m\,p$ de los dos miembros:

$$\sqrt[m\,p]{a^{n\,p}} = r$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt[m\,p]{a^{n\,p}} = \sqrt[m]{a^n}$$

lo cual prueba el enunciado.

116. **Simplificación de radicales.**—*Simplificar un radical* es transformarlo en otro equivalente, pero de índice menor.

En virtud de la proposición que acaba de demostrarse, se puede simplificar un radical cuando el exponente del radicando y el índice tienen algún factor común.

Regla.—*Para simplificar un radical se suprimen los factores comunes a su índice y al exponente del radicando.*

Ejemplo: en el radical

$$\sqrt[8]{a^4}$$

tanto el índice como el exponente del radicando tienen el factor común 2; se tendrá, pues:

$$\sqrt[8]{a^4} = \sqrt[4]{a^2}$$

que puede aún simplificarse.

Observación.—Se obtiene la mayor simplificación de un radical dividiendo el índice y el exponente del radicando por el máximo común divisor de ellos.

Así, por ejemplo:

$$\sqrt[8]{a^{12}} = \sqrt{a^{3}}$$

Aplicando la misma regla se han simplificado los radicales de los siguientes ejemplos:

$$\sqrt[9]{a^{12}} = \sqrt[3]{a^{4}}$$

$$\sqrt[8]{a^{20}} = \sqrt{a^{5}}$$

117. **Reducción de radicales a un índice común.**— *Reducir radicales a un índice común* es transformarlos en otros equivalentes que tengan el mismo índice.

Esta tranformación se funda también en el principio demostrado en el número (115).

REGLA.—*Para reducir varios radicales a un índice común, se multiplican el de cada uno y el exponente del radicando por el producto de los índices de los demás.*

Ejemplo:

Se quiere reducir a un índice común los radicales

$$\sqrt[3]{a^{2}} \qquad \sqrt[4]{a^{5}}$$

se tendrá, aplicando la regla anterior:

$$\sqrt[3]{a^{2}} = \sqrt[12]{a^{8}}$$

$$\sqrt[4]{a^{5}} = \sqrt[12]{a^{15}}$$

Observación.—Cuando los índices tengan factores comunes, se multiplican el índice y el exponente del radicando por el cociente que resulta de dividir el mínimo común múltiplo de los índices por el índice correspondiente.

Ejemplo:

Sean los radicales

$$\sqrt[12]{a^7} \qquad \sqrt[6]{a^4} \qquad \sqrt[3]{b^2}$$

en que sus índices tienen factores comunes. Su mínimo común múltiplo es 12; tendremos, pues:

$$\sqrt[12]{a^7}$$

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6.2]{a^{4.2}} = \sqrt[12]{a^8}$$

$$\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3.4]{b^{2.4}} = \sqrt[12]{b^8}$$

118. **Adición y sustracción de radicales.**—Para sumar o restar radicales se siguen las mismas reglas dadas en la adición y sustracción de las cantidades algébricas racionales y se reducen los radicales semejantes, si los hay, como los términos semejantes.

Ejemplos:

1.° $$5\,a\sqrt{b} + 26\sqrt[3]{d^2} + 7\,m\sqrt{b} - 3\,n\sqrt[3]{d^2} =$$

$$= (5\,a + 7\,m)\sqrt{b} + (26 - 3\,n)\sqrt[3]{d^2}$$

2.° $$(4\,a^2\sqrt[4]{b} + 5\,a^3\sqrt{c}) - (2\,m\sqrt[4]{b} + 3\,x\sqrt{c}) =$$

$$= 4\,a^2\sqrt[4]{b} + 5\,a^3\sqrt{c} - 2\,m\sqrt[4]{b} - 3\,x\sqrt{c} =$$

$$= (4\,a^2 - 2\,m)\sqrt[4]{b} + (5\,a^3 - 3\,x)\sqrt{c}$$

119. **Multiplicación.**—*Para multiplicar dos o más radicales, se reducen a un índice común, si lo tienen distinto, se multiplican los radicandos y el producto obtenido se escribe debajo de un radical del mismo índice.*

Esta regla es una consecuencia de la extracción de la raíz de un producto indicado (105).

Ejemplos:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a\,b\,c}$$

$$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[4]{c} = \sqrt[12]{a^6} \times \sqrt[12]{b^4} \times \sqrt[12]{c^3} =$$

$$= \sqrt[12]{a^6\, b^4\, c^3}$$

120. **División.**—*Para dividir dos radicales se reducen a un índice común, si lo tienen distinto, se dividen los radicandos y el cociente se escribe bajo de un radical del mismo índice.*

Esta regla es la consecuencia de la dada para la extracción de la raíz de un cociente (106).

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{27}{16}}$$

121. **Potenciación.**—*Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando.*

En efecto:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \ldots =$$

$$= \sqrt[n]{a\,a\,a \ldots} = \sqrt[n]{a^m}$$

que prueba la regla anterior.

Ejemplos:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2} \qquad \left(\sqrt[4]{b^3}\right)^5 = \sqrt[4]{b^{15}}$$

122. **Radicación.**—*Para extraer una raíz de un radical se multiplica el índice de la raíz por el del radical.*

Véase lo dicho en el número (108).

EJERCICIOS

1. Simplificar los siguientes radicales:

1.º $\sqrt{16\,a^2\,b^6}$

2.º $\sqrt[3]{27\,a^6}$

3.º $\sqrt[4]{a^2\,b^4\,c^6}$

4.º $\sqrt[5]{a^{10}\,b^{15}\,c^5}$

5.° $\sqrt[4]{16\, a^8\, b^6}$

6.° $\sqrt[4]{8\, x^6\, y^8}$

7.° $\sqrt[6]{4096\, a^{12}\, b^{18}}$

8.° $\sqrt[3]{81\, a^9\, (x+y)^3}$

2. Reducir a un índice común los siguientes radicales:

1.° $\sqrt{a}$ $\quad \sqrt[3]{b}$

2.° $\sqrt{a}$ $\quad \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[4]{m}$

3.° $\sqrt[4]{m}$ $\quad \sqrt[5]{n}$ $\quad \sqrt[7]{r}$

4.° $\sqrt[4]{x}$ $\quad \sqrt{y}$ $\quad \sqrt[8]{z}$

5.° $\sqrt[6]{a}$ $\quad \sqrt[12]{b}$ $\quad \sqrt[24]{c}$

6.° $\sqrt{m}$ $\quad \sqrt[6]{n}$ $\quad \sqrt[8]{r}$

7.° $\sqrt{a}$ $\quad \sqrt[6]{b}$ $\quad \sqrt[4]{c}$ $\quad \sqrt[10]{d}$

3. Efectuar las siguientes adiciones:

1.º $(2\sqrt{b} + 3\sqrt[3]{c}) + (5\sqrt{b} - \sqrt[3]{c})$

2.º $(4a\sqrt[3]{b^2} + 3c\sqrt[4]{b^3} - \sqrt{d^3}) +$

$+ (2\sqrt{d^3} + \sqrt[3]{b^3})$

3.º $(2ab\sqrt{b} + 3a^2\sqrt[3]{c} - \sqrt[4]{m}) +$

$+ (4m\sqrt[4]{m} - \sqrt[3]{c} + 3a^3\sqrt{b})$

4. Efectuar las siguientes sustracciones:

1.º $(2a\sqrt{b} + 3a^2\sqrt[4]{c}) - (3b\sqrt[4]{b} - \sqrt{b})$

2.º $(\sqrt[3]{c} + 3\sqrt{b^3} - \sqrt[4]{d}) - (2\sqrt{b^3} - 2\sqrt[4]{d} +$
$+ 3a\sqrt[3]{c})$

3.º $(2ab\sqrt{c} + \sqrt{c} - \sqrt[3]{b^2}) - (\sqrt{c} + 2a$
$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt{c} + 3ab\sqrt{c})$

5. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

1.º $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$

2.º $\sqrt[m-1]{a} \times \sqrt[m-1]{b}$

3.° $\sqrt[5]{a^3 b^2} \times \sqrt[5]{b c^3}$

4.° $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b^2}$

5.° $\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b})$

6.° $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{b^6} \times \sqrt[7]{a^4 b}$

7.° $\sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[10]{a^3 b^3} \times \sqrt[20]{a b c}$

6. Efectuar las siguientes divisiones:

1.° $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

2.° $\sqrt[4]{b^2} : \sqrt[4]{b}$

3.° $\sqrt[3]{25 a^2 b} : \sqrt[3]{5 a b}$

4.° $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[4]{\frac{m}{n}}$

5.° $\sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt{a b}$

6.° $\sqrt[6]{5 a^2 b} : \sqrt[3]{m n}$

7. Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

1. $\sqrt{\frac{a^2}{b}} \times \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

2. $\sqrt{\frac{m}{n}} \times \sqrt{\frac{r}{s}}$

3. $(\sqrt[3]{4\,a^2\,b^3\,c})^2$

4. $(\sqrt[4]{3\,a^2\,b^2\,c^3})^3$

5. $\sqrt[4]{\sqrt{3\,a^2\,b}}$

6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2\,b^3\,c^4\,m}}$

7. $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{m}{n}}$

8. $(\sqrt{(a+b)(a-b)})^2$

IV.—Exponentes fraccionarios

123. **Origen e interpretación.**—Hemos visto, al tratar de la radicación de una potencia (107), que bastaba dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz. Cuando dicho exponente sea divisible por el índice

de la raíz, la operación se podrá efectuar, pero en caso contrario no, quedando la operación indicada, dando lugar a una *cantidad con exponente fraccionario.*

Así,

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \qquad \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

Atendiendo a su origen, podemos interpretar *una cantidad con exponente fraccionario*, diciendo que *equivale a una raíz que tenga por índice el denominador de la fracción y por radicando dicha cantidad con un exponente igual al numerador.*

124. **Raíces inexactas de monomios.**—El empleo de exponentes fraccionarios nos permite expresar, bajo forma racional, las raíces inexactas de monomios como se ve en los siguientes

Ejemplos:

$$\sqrt{25\,a\,b^3\,c^4} = 5\,a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{3}{2}}\,c^2$$

$$\sqrt[5]{a^3\,b^2\,c^{10}\,d} = a^{\frac{3}{5}}\,b^{\frac{2}{5}}\,c^2\,d^{\frac{1}{5}}$$

125. **Cálculo de las cantidades con exponente fraccionario.**—*Las cantidades afectadas de exponente fraccionario se calculan por las mismas reglas que las cantidades con exponentes enteros*, como se demuestra a continuación.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.—Al tratar de estas operaciones (capítulo segundo, II y III) no se mencionaba la naturaleza de los exponentes, y, por tanto, las reglas allí establecidas son aplicables a las cantidades con exponente fraccionario.

Multiplicación.—Ya sabemos que para multiplicar a^m por a^n, cuando m y n son enteros, que (32)

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Vamos a demostrar que esta regla es aplicable cuando los exponentes son fraccionarios.

En efecto, haciendo

$$m = \frac{p}{q} \qquad n = \frac{r}{s}$$

tendremos:

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r}$$

según lo dicho en el número (123).

Pero

$$\sqrt[q]{a^p} \times \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q.s]{a^{ps}} \times \sqrt[q.s]{a^{r.q}} =$$

$$= \sqrt[q.s]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{q.s}}$$

y como

$$a^{\frac{ps+rq}{q.s}} = a^{\frac{ps}{qs} + \frac{rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

se tendrá:

$$a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

DIVISIÓN.

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r}$$

según (123).

Pero por la regla dada (120), tendremos:

$$\sqrt[q]{a^p} : \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps} : a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps-rq}} =$$
$$= a^{\frac{ps-qr}{ps}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

luego

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

POTENCIACIÓN.

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt{a^{\frac{pr}{q}}} = {}^{\frac{pr}{qs}}$$

y como

$$a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}}$$

se tendrá:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}}$$

RADICACIÓN.

$$\sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}}$$

y como

$$\sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[mq]{a^p} = a^{\frac{p}{mq}} = {}^{\frac{p}{q}:m}$$

se tendrá

$$\sqrt{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q}:m}$$

EJERCICIOS

1. Expresar con exponentes fraccionarios las siguientes expresiones:

1.ª $\sqrt{a}$

2.ª $\sqrt[m]{a+b}$

3.ª $\sqrt[3]{a\,b^2}$

4.ª $\sqrt[6]{a^3\,b^2\,c^6}$

5.ª $\sqrt[3]{15625\;a^2\,b^3\,x^4}$

6.ª $\sqrt[3]{a+c-d}$

2. Efectuar las siguientes operaciones:

1.ª $a^m \times a^{\frac{p}{q}}$

2.ª $a^{\frac{p}{q}} \times a^s$

3.ª $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{5}}$

4.ª $a^{\frac{3}{5}} \times a^7$

5.ª $7\,a^{\frac{2}{3}} \times 5\,a^4$

6.ª $a^{\frac{2}{5}} : a^{\frac{2}{3}}$

7.ª $a^{\frac{4}{3}} : a^{\frac{2}{5}}$

8.ª $a\,b^{\frac{2}{4}} \times a^5\,b^6$

9.ª $a^2\,b^3\,c \times 2\,a^{\frac{2}{3}}\,b\,c^{\frac{3}{5}}$

3. Efectuar las siguientes divisiones:

1.ª $a^m : a^{\frac{p}{q}}$

2.ª $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{r}}$

3.ª $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{2}}$

4.ª $a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{5}}$

5.ª $35\, a^3 b^2 c : 5\, a^{\frac{2}{5}} b^3 c$

6.ª $40\, a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{8}{7}} c^9 : 5\, a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^3$

4. Hallar el resultado de las siguientes operaciones:

1.ª $(a^m)^{\frac{p}{q}}$

2.ª $(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{5}}$

3.ª $(2\, a^2 b^3)^{\frac{3}{4}}$

4.ª $\sqrt[4]{a^{\frac{3}{2}}}$

5.ª $\sqrt[7]{b^{\frac{4}{5}}}$

6.ª $\sqrt[8]{c\, d^{\frac{2}{5}}}$

7.ª $(2\, a^2 + 3\, a^{\frac{2}{4}} - 5\, a^2 b^{\frac{2}{7}}) (- 6\, a^{\frac{2}{3}} b^3 + 6\, a^3 b^{\frac{4}{7}} -$
$- 6\, a^6)$

8.ª $(a b^{\frac{1}{2}} - 5 b^{\frac{3}{4}} + d a^2 b^3) (3 a^2 b^{\frac{1}{2}} + 3 a^4 b^{\frac{1}{2}} -$

$- a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{1}{2}} c)$

9.ª $(3 a^2 b^3 c^{\frac{1}{3}} + 2 a^{\frac{1}{4}} d - 6 a^3 b^{\frac{4}{3}}) (2 a^2 - 3 a^{\frac{2}{3}} c^4$

$- 8^{\frac{3}{2}} c^4)$

V.—Cantidades imaginarias de segundo grado

126. **Origen.**—Las cantidades *imaginarias*, como hemos visto en el número (104-3.°), tienen su origen en la radicación de las cantidades negativas, cuando el índice de la raíz es par.

Designando un número par por 2 n, la forma general de las cantidades imaginarias será:

$$\sqrt[2n]{-A} \qquad \sqrt[2n]{-B}$$

Entre las cantidades imaginarias las más importantes son las de segundo grado, o sean las raíces cuadradas de cantidades negativas. El estudio completo y general de las cantidades imaginarias, corresponde al Algebra superior; por lo que nosotros nos ocuparemos solamente de las imaginarias de segundo grado, cuya expresión es:

$$\sqrt{-A}$$

127. **Unidad imaginaria.**—Considerando una cantidad imaginaria, tal como

$$\sqrt{-A}$$

observamos que su radicando

$$-A = A \times -1$$

por lo que

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A \times -1} = \sqrt{A} \times \sqrt{-1}$$

y designando por a el valor aritmético de $\sqrt{A}$, tendremos:

$$\sqrt{A} = a$$

que sustituído en la igual anterior nos da:

$$\sqrt{-A} = a\sqrt{-1}$$

luego

Toda cantidad imaginaria de segundo grado es igual a la raíz cuadrada aritmética del valor absoluto del radicando multiplicada por $\sqrt{-1}$.

La expresión $\sqrt{-1}$, recibe el nombre de *unidad imaginaria* y se representa abreviadamente por i.

Tendremos, pues, según esta notación:

$$a\sqrt{-1} = a\,i$$

La cantidad real a que multiplica a la unidad imaginaria, se la denomina *coeficiente*.

128. **Clasificación de las imaginarias.**—Una imaginaria de la forma

$$a\sqrt{-1} = a\,i$$

se llama *monomia imaginaria*, formada por *el producto de una cantidad real por la unidad imaginaria.*

Imaginaria binomia o cantidad compleja es la que tiene la forma

$$a \pm b\sqrt{-1} = a \pm b\,i$$

compuesta de un término que es una cantidad real y otro término que es una imaginaria monomia.

Dos imaginarias binomias se llaman *conjugadas*, cuando se diferencian únicamente en el signo del coeficiente del término imaginario.

Así las dos imaginarias binomias siguientes:

$$a + b\,i \qquad\qquad a - b\,i$$

son conjugadas.

129. **Módulo.**—Se llama *módulo* de una imaginaria binomia

$$a + b\,i$$

a la expresión

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

formada por el valor absoluto de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados del término real y del coeficiente del término imaginario.

Así, por ejemplo, el módulo de

$$4 + 6\sqrt{-1}$$

será:

$$\sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

La manera de expresar el módulo de una imaginaria es la siguiente:

$$\text{mod. } (a + b\,i) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dos imaginarias conjugadas tienen evidentemente el mismo módulo.

Así:

$$\text{mod.}\ (a + b\,i) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{mod.}\ (a - b\,i) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

130. **Potencias sucesivas de la unidad imaginaria.**— Antes de ocuparnos de las operaciones con las imaginarias es conveniente determinar las potencias sucesivas de la unidad imaginaria.

Se tendrá:

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

Si en estas igualdades hacemos uso de la notación empleada, para representar la unidad imaginaria, tendremos:

$$i^1 = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

que nos permite obtener las potencias sucesivas de i, en la siguiente forma:

$$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = +1$$

$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = +i$$

$$i^6 = i^4 \times i^2 = +1 \times -1 = -1$$

$$i^7 = i^4 \times i^3 = +1 \times -i = -i$$

Para formar la 8.ª se multiplican las potencias 4.ª y 4.ª; para formar la 9.ª se multiplica la 5.ª potencia por la 4.ª, etcétera. Se observa, pues, que las potencias se reproducen periódicamente de cuatro en cuatro, por lo que su ley de formación podemos expresar así:

$$i^{4n} = 1 \qquad i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+3} = -i$$

131. **Cálculo de las imaginarias monomias.**—Estudiaremos las cuatro operaciones con datos que sean imaginarias monomias.

Adición y sustracción.—*La suma o diferencia de dos imaginarias monomias tiene la misma forma.*

En efecto:

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\,i$$

Multiplicación y división.—*El producto o el cociente de dos imaginarias monomias es una cantidad real.*

$$a\,i \times b\,i = a\,b \cdot i^2 = a\,b \times (-1) = -\,a\,b$$

$$a\,i : b\,i = a : b$$

132. **Cálculo de imaginarias binomias.**—Estudiaremos las siguientes operaciones con datos de esta forma:

Adición y sustracción.—*La suma o diferencia de dos binomias imaginarias, es una imaginaria de la misma forma.*

$$(a + b\,i) \pm (e + d\,i) = (a \pm c) + (b \pm d)\,i$$

Si las imaginarias son conjugadas, se tendrá:

1.° *La suma es una cantidad real, cuyo valor es el duplo de la parte real de los sumandos.*

En efecto:

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2\,a + (b - b)\,i = 2\,a$$

2.° *La diferencia es una imaginaria monomia, que tiene por coeficiente el duplo del que tengan las cantidades dadas.*

$$(a + b\,i) - (a - b\,i) = a - a + (b + b)\,i = 2\,b\,.\,i$$

Multiplicación.—*El producto de dos imaginarias binomias es una imaginaria de la misma forma.*

$$(a + b\,i)\,(c + d\,i) = a\,c + c\,b\,i + a\,d\,i + b\,d\,i^2$$

y teniendo en cuenta que el cuadrado de i es -1, se obtendrá:

$$(a + b\,i)\,(c + d\,i) = (a\,c - b\,d) + (a\,d + b\,c)\,i$$

Si las imaginarias fuesen conjugadas, su producto sería una cantidad real igual al cuadrado del módulo común.

$$(a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 + b^2 + (a\,b - a\,b)\,i = a^2 + b^2$$

División.—*El cociente de dos imaginarias binomias es una imaginaria de igual forma.*

Sea el cociente

$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i}$$

Multiplicando los dos términos por $c - d\,i$, obtendremos:

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{(a+b\,i)\,(c-d\,i)}{(c+d\,i)\,(c-d\,i)}=\frac{a\,c+c\,b\,i-a\,d\,i+b\,d\,i^2}{c^2-d^2\,i^2}$$

y teniendo en cuenta que el cuadrado de i es -1, se obtendrá:

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{ac+cbi-a\,d\,i+b\,d}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(cb-ad)i}{c^2+d^2}$$

que toma la forma de:

$$\frac{a+b\,i}{c+d\,i}=\frac{a\,c+b\,d}{c^2+d^2}+\frac{b\,c-a\,d}{c^2+d^2}\times i$$

EJERCICIOS

1. Hallar el módulo de las siguientes imaginarias:

1.ª $c+d\,i$

2.ª $a-m\,i$

3.ª $d+f\,i$

4.ª $d-f\,i$

5.ª $4+8\sqrt{-1}$

6.ª $7+2\sqrt{-1}$

7.ª $7-2\sqrt{-1}$

8.ª $9+6\sqrt{-1}$

2. Efectuar las siguientes operaciones con imaginarias monomias:

1.ª $a\,i + c\,i$

2.ª $b\,i + d\,i$

3.ª $a\,i - b\,i$

4.ª $c\,i - d\,i$

5.ª $(3\sqrt{-1}) + (2\sqrt{-1})$

6.ª $(4\sqrt{-1}) + (3\sqrt{-1})$

7.ª $(8\sqrt{1}) - (4\sqrt{-1})$

8.ª $(12\sqrt{-1}) - (6\sqrt{-1})$

9.ª $a\,i \times c\,i$

10. $m\,i \times n\,i$

11. $a\,i : b\,i$

12. $(4\sqrt{-1})\,(2\sqrt{-1})$

13. $(3\sqrt{-1})\,(3\sqrt{-1})$

14. $(15\sqrt{-1}) : (3\sqrt{-1})$

3. Efectuar las siguientes operaciones:

1.ª $(a + b\,i) + (c + m\,i)$

2.ª $(a + b\,i) + (a - b\,i)$

4. Efectúense las operaciones que siguen:

1.ª $(2+4\sqrt{-1})+(3+6\sqrt{-1})$

2.ª $(2+7\sqrt{-1})-(2+5\sqrt{-1})$

3.ª $(4+7\sqrt{-1})-(4-7\sqrt{-1})$

4.ª $(a+c\,i)\,(b-d\,i)$

5.ª $(4+8\sqrt{-1})\,(2-6\sqrt{-1})$

6.ª $(6+3\sqrt{-1})\,(6-3\sqrt{-1})$

7.ª $(a+c\,i):(d+m\,i)$

8.ª $(7+4\sqrt{-1}):(5-2)\sqrt{-1})$

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO PRIMERO

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

I.—Definiciones y preparación

133. **Igualdad, identidad y ecuación.**—*Igualdad* es la expresión de dos cantidades iguales representadas en distinta forma.

Así:

$$4 + 7 + 2 = 13 \qquad (x + a)(x - a) = x^2 - a^2$$

son igualdades.

Identidad es una igualdad evidente, cuyos miembros tienen la misma forma.

Así:

$$a = a \qquad 2b - c = 2b - c$$

son identidades.

Ecuación es la igualdad en que intervienen una o más cantidades desconocidas y que expresa la relación entre los datos e incógnitas de un problema.

Así:

$$2 + 2x = 17 \qquad 2x + 5 = x + 7$$

son ecuaciones.

134. **Carácter que distingue las ecuaciones de las igualdades.**—La diferencia esencial entre igualdad y ecuación, está en que los dos miembros de aquélla son siempre iguales, cualesquiera que sean los valores de sus elementos, mientras que en la ecuación no pueden ser iguales sus dos miembros, sino para ciertos valores de la incógnita o incógnitas que contenga. La ecuación se convierte en una igualdad cuando se reemplazan o sustituyen las incógnitas por los únicos valores, para cuya determinación se ha establecido la igualdad entre sus dos miembros.

Así, en la igualdad

$$(x + b)^2 = x^2 + 2\,b\,x + b^2$$

sus dos miembros son iguales, cualesquiera que sean los valores atribuídos a x y b.

En cambio, la ecuación

$$3\,x - 2 = 16$$

hace iguales sus dos miembros, atribuyendo a x el valor 6, y en otro caso no.

135. **Definiciones.**—Llámanse *raíces* o *soluciones* de una ecuación, a los números o valores que, puestos en vez de las incógnitas, hacen iguales los dos miembros de la ecuación, y entonces se dice que la *verifican* o *satisfacen*.

Resolver una ecuación es determinar sus raíces o soluciones.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

136. **Ecuaciones numéricas y literales.**—Las ecuaciones pueden ser *numéricas* y *literales.*

Una ecuación es *numérica* cuando todos los elementos conocidos, o datos que en ella intervienen, son números particulares. Si además de la incógnita hay otras cantidades representadas por letras, entonces se dice que la ecuación es *literal.*

Ejemplos:

La ecuación

$$8\,x + 6\,x = 21 + 9\,x + 4$$

es numérica, pues en ella no interviene más cantidad representada por letras que la incógnita x.

La ecuación

$$\mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,x = \mathrm{C}$$

es literal; contiene además de la incógnita, representada por x, las letras A, B y C, que representan las cantidades conocidas o datos.

137. **Denominación de las ecuaciones según el número de sus incógnitas.**—Atendiendo al número de incógnitas que tiene una ecuación, recibe ésta el nombre de *ecuación con una incógnita, ecuación con dos incógnitas, con tres,* etc.

Así:

$$4\,x + 2\,x = 20$$

es una ecuación con una incógnita, mientras que

$$4\,x + 3\,y = 45$$

es una ecuación con dos incógnitas: x e y.

138. **Clasificación de las ecuaciones atendiendo a su grado y al número de raíces o soluciones que tengan.**—*Grado* de una ecuación, es la mayor suma de los exponentes de todas las incógnitas en un mismo término.

Las ecuaciones se clasifican, atendiendo a su grado, en ecuaciones de *primer grado, de segundo grado, de tercer grado*, etc.

Así:

$$3\,x + 4\,x = 4 + 5\,x$$

es una ecuación de primer grado.

$$a\,x^2 + b\,x\,y = c$$

es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas, pero de primer grado con relación a y.

La ecuación

$$a\,x + b\,x^2\,y + c\,x\,y^2 = d$$

es una ecuación de tercer grado con respecto a sus dos incógnitas, aunque es de segundo grado con relación a cada una de ellas.

Además, atendiendo al número de sus raíces, se clasifican las ecuaciones en: *determinadas*, si tienen un número limitado de soluciones; *indeterminadas*, cuando tienen un número ilimitado de soluciones, y *absurdas*, si no tienen ninguna solución.

139. **Transformaciones que puede experimentar una ecuación.**—Antes de resolver una ecuación hay que verificar en ella ciertas transformaciones que permitan reemplazar de un modo sucesivo una ecuación por otra equivalente, hasta llegar a otra más sencilla en que

puedan deducirse inmediatamente sus raíces o soluciones.

Efectuar dichas transformaciones constituye lo que se llama *preparar la ecuación*, lo cual se funda en los siguientes principios:

TEOREMA I.—*Si a los dos miembros de una ecuación se les agrega o resta una misma cantidad algébrica, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.*

Sea

$$A = B \qquad [1]$$

la ecuación que suponemos no contiene más que una incógnita, y llamemos m a una cantidad cualquiera. Vamos a demostrar que

$$A \pm m = B \pm m \qquad [2]$$

es una ecuación equivalente a la primera.

En efecto: todo valor de la incógnita que satisface a la ecuación [1], satisface también la segunda [2], porque tomando m un mismo valor, cualquiera que sea el de la incógnita, haciendo $A = B$, se obtendrán para el mismo valor las cantidades iguales $A \pm m$ y $B \pm m$.

Recíprocamente, todo valor que satisface a la segunda ecuación [2], satisface a la ecuación [1]; porque si hace $A \pm m$ igual $B \pm m$, también hará que el valor que adquiera A sea igual al que adquiera B.

Luego, como todas las soluciones de una ecuación lo son también de la otra, dichas ecuaciones son equivalentes.

COROLARIO.—*En toda ecuación puede pasarse de un miembro a otro, a cualquiera de sus términos, sin más que cambiarle el signo de su modalidad.*

$$a x - c = d x + q$$

Si añadimos c a los dos miembros de esta ecuación, se convertirá en

$ax - \cancel{c} + \cancel{c} = dx + q + c$

$$ax = dx + q + c$$

en la cual el término c, que figuraba en el primer miembro con el signo menos, pasa al segundo miembro con el signo más.

De igual modo, si en la ecuación última restamos de sus dos miembros el término $d\,x$, se transformará en la equivalente

$ax - dx = \cancel{dx} + q + c - \cancel{dx}$

$$ax - dx = q + c$$

en la que aparece ahora el término $d\,x$ en el primer miembro afectado del signo menos.

Aplicando el mismo procedimiento a todos los términos del segundo miembro de una ecuación, éste se reducirá a cero.

Así, en la ecuación

$$ax + bx = cx - d$$

pasando los términos $c\,x$ y $-\,d$ al primer miembro, se convertirá en

$$ax + bx - cx + d = 0$$

La transformación que hemos expuesto, de pasar uno o varios términos de un miembro a otro en una ecuación, se denomina *transposición de términos.*

Teorema II.—*Una ecuación se transforma en otra equivalente, cuando se multiplican sus dos miembros por una misma cantidad que no se reduzca a cero ni contenga la incógnita.*

Sea la ecuación

$$A = B \qquad [1]$$

En virtud del teorema precedente podemos hacer

$$A - B = 0 \qquad [2]$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta ecuación por una cantidad, m, que cumpla las condiciones impuestas en el enunciado de este teorema, formaremos la ecuación

$$(A - B)\, m = 0 \qquad [3]$$

que vamos a demostrar que es equivalente a la ecuación [2].

En efecto; todo valor de la incógnita que verifique a la ecuación [2] verifica también la ecuación [3], porque si la cantidad $A - B$ es nula, también se anulará el producto $(A - B)\, m$.

Recíprocamente, toda solución que satisface a la ecuación [3], verifica a la ecuación [2], porque si el producto $(A - B)\, m$ es cero, y m no lo es, lo será el otro factor $A - B$.

De modo que la ecuación

$$A - B = 0$$

o bien

$$A = B$$

y la ecuación

$$(A - B)\, m = 0$$

tienen las mismas soluciones, luego son equivalentes.

Observación.—Es indispensable, para que el razonamiento anterior sea riguroso, la restricción indicada en el enunciado del teorema, esto es, que el factor por quien se multiplican los dos miembros de la ecuación, ni sea cero ni contenga la incógnita; pues de no cumplirse estas condiciones, se introducirían en la ecuación resultante soluciones extrañas.

Así, si tenemos la ecuación

$$4x + 5 = 17$$

y multiplicamos sus dos miembros por cero, se obtiene la ecuación

$$(4x + 5)\,0 = 17 \times 0$$

que se verifica para cualquiera de los valores que demos a x, de los cuales únicamente el valor 3 satisface la ecuación propuesta.

Multipliquemos los dos miembros de la ecuación que estamos estudiando por $x - 2$ y obtendremos la siguiente:

$$(4x + 5)(x - 2) = 17\,(x - 2)$$

que se verifica para los valores 3 y 2 de la incógnita, pues sustituyendo x por uno de estos valores, la ecuación se convierte en una identidad.

El valor 2 para x es una solución nueva, que no satisface a la ecuación propuesta, y que se obtiene igualando a cero el factor $x - 2$.

Por lo tanto, *la multiplicación de los dos miembros de una ecuación por un factor que contenga la incógnita introduce, en general, soluciones extrañas.*

COROLARIO I.—*Si se cambian de signo todos los términos de una ecuación, resulta otra ecuación equivalente.*

Esto es lo mismo que multiplicar los dos miembros de la ecuación por la cantidad conocida — 1.

Así, en la ecuación

$$10 - 3x = 70 - 5x$$

si cambiamos el signo a cada uno de sus términos, se convierte en la equivalente

$$3x - 10 = 5x - 70$$

COROLARIO II.—*Cuando uno o varios términos de una ecuación son fraccionarios, puede transformarse en otra equivalente, cuyos términos sean enteros, multiplicando sus dos miembros por el producto de todos los denominadores, o por su mínimo común múltiplo.*

Esta operación se conoce con el nombre de *suprimir denominadores de una ecuación.*

Así, la ecuación

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = x - 2$$

se transforma, multiplicando todos sus términos por 14, producto de los denominadores, en

$$\frac{14x}{2} + \frac{14(x+1)}{7} = 14x - 28$$

o lo que es lo mismo:

$$7x + 2(x+1) = 14x - 28$$

Teorema III.—*Una ecuación se transforma en otra equivalente, dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad, siempre que ésta no contenga la incógnita ni se reduzca a cero.*

Dividir los dos miembros de una ecuación por una cantidad m, equivale a multiplicarlos por $\frac{1}{m}$ quedando reducida esta proposición a la precedente.

La división por una cantidad que contenga la incógnita, puede hacer que desaparezcan una o varias soluciones de la ecuación.

140. **Preparación de ecuaciones.**—Sentados los principios anteriores, podemos efectuar, en el orden más conveniente, las transformaciones necesarias para *preparar* una ecuación, cuyas operaciones son:

a) *Efectuar las operaciones indicadas.*
b) *Supresión de denominadores.*
c) *Transposición de términos.*
d) *Reducción de términos semejantes.*

Ejemplo: sea la ecuación

$$(3x - 4)\frac{1}{7} + 5x\frac{1}{3} + 1 = 43 - 5x$$

la que deseamos preparar. Si efectuamos las multiplicaciones indicadas, se tendrá:

$$\frac{3x}{7} - \frac{4}{7} + \frac{5x}{3} + 1 = 43 - 5x$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 21, y multiplicando los dos miembros de la ecuación por este número obtendremos:

$$9x - 12 + 35x + 21 = 903 - 105x$$

Pasemos al segundo miembro todos los términos independientes de la incógnita, y al primero los que la contengan y se obtendrá:

$$9x + 35x + 105x = 903 + 12 - 21$$

y reduciendo términos semejantes, se tiene finalmente:

$$149x = 894$$

que es la ecuación preparada. $x = \frac{894}{149}$

Observaciones.—1.ª Si la ecuación que se prepara no contiene más que un solo denominador, se le hace desaparecer, multiplicando sus dos miembros por este denominador.

Así, por ejemplo, para hacer desaparecer el denominador de la ecuación

$$2x + \frac{4x}{3} = 3x + 2$$

multiplicando sus dos miembros por 3 se obtendrá la ecuación

$$6x + 4x = 9x + 6$$

equivalente a la propuesta y que no contiene denominador alguno.

2.ª Se puede *simplificar* la ecuación cuando sea fácil conocer los factores comunes a todos sus términos, dividiendo sus dos miembros por dichos factores.

Ejemplo: sea la ecuación

$$10\,x + 25\,x = 135\,x - 60$$

cuyos términos tienen el factor común 5; dividiendo por este número los dos miembros de la ecuación, se obtiene la equivalente

$$2\,x + 5\,x = 27\,x - 12$$

3.ª *Se cambian de signo* todos los términos de la ecuación, cuando al practicar la reducción de términos semejantes resulte la incógnita con signo menos, o cuando por alguna razón sea conveniente cambiar el signo a uno de sus términos.

EJERCICIOS

Preparar las ecuaciones siguientes:

1.ª $x\left(4 + \frac{2}{4}\right) + \frac{2}{3} = \frac{152 + x}{2} \times 52$

2.ª $\frac{7\,x}{8} - \frac{12}{16} = \frac{1}{6} + \frac{5\,x}{12}$

3.ª $\frac{4\,(1 - 2\,x)}{2 - 6\,x} + \frac{2}{12} = \frac{1 - 3\,x}{1 - 2\,x}$

4.ª $\frac{2x}{5} + \frac{12}{5} - \frac{3}{16}(x - 1) = \frac{5}{12}(4 - x) - \frac{10}{96}$

5.ª $\frac{4 + x}{6} - \frac{2 - 2\,x}{14} - (8 - x)\frac{1}{5} = \frac{x - 23}{5} + 7$

Es hallar el valor ó valores de la incógnita que sustituidos en la ecuación la satisfacen es decir la convierten en una igualdad numérica estos valores se llaman raíces de la ecuación.

L028

II.—Ecuación lineal con una incógnita

141. **Resolución de la ecuación.**—Después de haber efectuado las transformaciones ya indicadas (140), toda ecuación de primer grado con una incógnita tomará la forma

$$A x = B$$

Por lo tanto, una ecuación preparada *tiene el primer miembro un término con la incógnita, y en el segundo miembro un término conocido.*

Si dividimos los dos miembros de dicha expresión por A, obtendremos

$$x = \frac{B}{A}$$

Como las cantidades A y B son conocidas y, generalmente, A es distinta de cero, la fórmula que hemos hallado equivale a la ecuación propuesta, porque sólo quedará satisfecha para un solo valor de x, de donde resulta que una ecuación lineal con una incógnita tiene, generalmente, una solución, y sólo una, que vendrá expresada por un valor finito y determinado.

La expresada fórmula manifiesta la siguiente

Regla.—*Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se prepara la ecuación, y la incógnita es igual al cociente que resulta de dividir el término conocido por el coeficiente de la incógnita, en la ecuación preparada.*

Ejemplo:

Resolver la ecuación

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3$$

Para efectuar la supresión de los denominadores multiplicaremos sus dos miembros por el producto $4 \times 3 = 12$, de dichos denominadores, y nos dará

$$\frac{12\,x}{4} + 84 = \frac{24\,x}{3} - 36$$

o sea

$$3\,x + 84 = 8\,x - 36$$

Efectuando la transposición de términos, resulta

$$3\,x - 8\,x = -36 - 84$$

cambiando los signos a todos sus términos, se obtiene

$$8\,x - 3\,x = 36 + 84$$

de donde

$$5\,x = 120$$

y

$$x = \frac{120}{5} = 24$$

142. **Comprobación de soluciones.**—Determinado el valor de la incógnita, al resolver una ecuación, debemos *comprobar* el resultado, para lo cual, *se sustituye en la ecuación la incógnita por el valor hallado, se efectúan después las operaciones indicadas, y si entonces la ecuación se transforma en una identidad, dicho valor verifica o satisface la ecuación y en caso contrario no.*

Ejemplo:

1.° Comprobar la solución de la ecuación

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2\,x}{3} - 3$$

que se ha resuelto anteriormente.

Hemos hallado para x el valor 24; sustituyendo en dicha ecuación este valor, en vez de la incógnita se tiene la igualdad

$$\frac{24}{4}+7=\frac{2\times 24}{3}-3$$

y efectuando las operaciones indicadas, la identidad

$$13=13$$

lo que manifiesta que el valor 24 para la incógnita verifica o satisface la ecuación propuesta.

2.° Resolver y comprobar la ecuación

$$3\,x+\frac{x}{2}+5=4\,x+\frac{6\,x}{4}-3$$

Suprimiendo denominadores, se obtendrá:

$$24\,x+4\,x+40=32\,x+12\,x-24$$

y efectuando las restantes operaciones de preparación, se obtiene

$$16\,x=64$$

de donde

$$x=\frac{64}{16}=4$$

Comprobación.—Sustituyendo en la ecuación propuesta en vez de x su valor 4, se tendrá la igualdad

$$3\,.\,4+\frac{4}{2}+5=4\,.\,4+\frac{6\,.\,4}{4}-3$$

que, después de efectuar las operaciones indicadas, se transforma en la identidad

$$19 = 19$$

143. **Discusión de una ecuación.**—La discusión tiene por objeto el examen de las formas que pueden tomar los valores de las incógnitas en la resolución de las ecuaciones de primer grado, atendiendo no sólo a su valor absoluto o numérico, sino también a su modalidad.

Al hallar en la ecuación A x = B la fórmula

$$x = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$

vemos que la modalidad y el valor de x dependen únicamente de la modalidad y de los valores que tomen dichas cantidades.

Como el valor de la incógnita es el cociente de dividir A por B, este valor será positivo o negativo, según que A y B tengan signos iguales o desiguales.

Respecto al valor absoluto de x, estudiaremos los casos siguientes:

1.° Si A y B adquieren valores distintos de cero y de infinito, x tendrá un solo valor finito, que será entero o fraccionario según que B sea o no divisible por A.

2.° Si B es cero sin serlo A, el valor de x es cero (84-2.°)

3.° Si A es cero sin serlo B, el valor de x toma la forma (84-1.°)

$$\frac{\mathrm{B}}{0} = \infty$$

que denota la imposibilidad en el orden numérico, toda vez que no hay ningún número que pueda ser infinito.

4.° Si A es cero y B también lo es, el valor de x es $\frac{0}{0}$, que, como dijimos (84-3.°), es símbolo de *indeterminación*.

EJERCICIOS

1. Hallar el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones de los ejercicios anteriores (página 174).

2. Resolver y comprobar las raíces de las ecuaciones siguientes:

1.ª $x + 125 = 3x + 117$

2.ª $43 - 18x = 6x - 17$

3.ª $5x + 13 = 7x + 5$

4.ª $3x + 24 = 17 + 4x$

5.ª $2x - 10 = 14(x - 2) + 3x + 3$

6.ª $6(23 - x) - 3x = 12x + 81$

7.ª $\frac{x+4}{5} - \frac{4-x}{7} = \frac{x+1}{3}$

8.ª $\frac{5x}{2} - 3x = \frac{2x+7}{3} - 14$

9.ª $\frac{3x}{5} + 4 + \frac{9x}{3} = 6x + \frac{2}{4} + 23$

10. $\frac{27}{2} - \frac{x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x}{10} - \frac{54}{10}$

11. $\frac{x}{5} + \frac{3x}{4} - 89 = \frac{7x}{8} - \frac{2x}{3}$

12. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} - 86 = \frac{11x}{12} + \frac{3x}{5}$

13. $4(x+2) + \frac{2x}{3} = 125 + \frac{x}{4} + 8x$

III.—Problemas de primer grado con una incógnita

144. **Definiciones.**—*Problema* es una proposición en virtud de la cual nos proponemos investigar una o varias cantidades desconocidas llamadas *incógnitas*, por sus relaciones con otras conocidas, que reciben el nombre de *datos*.

Estas relaciones están expresadas como condiciones en el enunciado del problema, y se denominan *algébricas* cuando pueden interpretarse por los signos del cálculo, y *físicas* si se refieren a la naturaleza especial de las incógnitas y no son susceptibles de interpretación matemática.

Los valores de las incógnitas deben satisfacer las condiciones impuestas en el enunciado del problema.

145. **Problemas particulares y generales.**—Un problema se denomina *particular* cuando los datos están expresados por números, y se llama *general* cuando todos los datos, o algunos, están expresados por letras.

La manera de generalizar un problema particular consiste en reemplazar o sustituir por letras los números particulares que figuren en el enunciado del problema. En el número (3) se ha visto un problema particular y un problema general.

También se ha visto (4) como de un problema general, cuya resolución ha originado una fórmula, se puede hacer aplicación para resolver los problemas particulares comprendidos en él, dando valores numéricos a sus datos literales.

146. **Resolución de un problema.**—*Resolver* un problema es determinar la incógnita o incógnitas que contenga y que cumplan las condiciones del enunciado.

Solución de un problema es el resultado obtenido al resolverlo.

Los problemas se clasifican por el número de sus soluciones en: *determinados*, si tienen un número limitado de soluciones; *indeterminados*, cuando tienen un número ilimitado de soluciones, e *imposibles*, cuando no tienen solución.

La resolución de un problema abraza dos partes distintas: 1.ª el *planteo*, o sea *poner el problema en ecuación*, y 2.ª *resolver* la ecuación o ecuaciones a que haya dado lugar el planteo, o sea determinar el valor de cada incógnita.

La primera parte no está sujeta a reglas fijas y determinadas, pues establecer en un problema las relaciones que ligan las incógnitas con los datos, depende del conocimiento y práctica del calculador, concretándose el Algebra a prestar la notación simbólica.

Sin embargo, puede darse como guía general la siguiente regla:

Examinar atentamente las condiciones del enunciado *para fijar cuáles son las cantidades cuya determinación conduciría al conocimiento de las que se buscan en el problema, y éstas serán las incógnitas, que las representaremos por letras diferentes; después se indican las operaciones que sería necesario efectuar con los datos y las incógnitas, si se conocieran los valores de éstas, expresando por este modo una o varias ecuaciones las condiciones del problema.*

La segunda parte, o sea la resolución de la ecuación o de las ecuaciones planteadas, se efectúa mediante la regla establecida anteriormente (141) y las que se estudiarán más adelante.

147. **Comprobación y discusión.**—*Comprobar* las soluciones de un problema, es ver si además de verificar la ecuación o ecuaciones a que ha dado lugar el planteo, cumple las condiciones físicas que contenga el enunciado.

Discutir un problema general, es estudiar si la fórmula hallada como solución conviene a cuantas hipótesis puedan hacerse con los datos del problema propuesto.

148. **Grado de un problema.**—Se llama *grado* de un problema, al de la ecuación o ecuaciones que lo resuelve.

Así, un problema es de *primer grado* o de *segundo grado,* cuando la ecuación o ecuaciones que después de planteado resultan, son respectivamente de primero o segundo grado.

149. **Problemas particulares de primer grado con una incógnita.**

PROBLEMA 1.º—*La suma de dos números es 128, y el mayor de ellos es tres veces el menor. ¿Cuáles son estos números?*

Llamando x al número menor, el mayor será $3x$, pero la suma de los dos es igual a 128; expresando esta igualdad tendremos:

$$x + 3x = 128$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene: $x = 32$.

Comprobación.—Si la incógnita es 32, su triplo es 96; sumados estos números nos dan 128, conforme con la condición que impone el problema.

PROBLEMA 2.º—*La diferencia entre dos números es 36 y uno de ellos es triplo del otro. ¿Cuáles son esos números?*

Llamando x al número menor, el número mayor será $3x$, pero como su diferencia es 36, tendremos:

$$3x - x = 36$$

que nos da $x = 18$.

Comprobación.—El triplo de 18 es 54; si de 54 restamos 18, obtendremos de resto 36.

PROBLEMA 3.º—*La suma de tres números es 110, pero el segundo es cuatro veces mayor que el primero, y el tercero cinco veces mayor que el primero. ¿Cuáles son estos tres números?*

Llamando x al menor de los tres números, el segundo será $4x$ y el tercero será $5x$, y como la suma de los tres es 110, se tendrá:

$$x + 4x + 5x = 110$$

de donde se obtiene: $x = 11$.

Comprobación.—Si el número menor es 11, el segundo, que es cuatro veces el primero, será $4 \times 11 = 44$, y el tercero será $5 \times 11 = 55$. La suma de 11, de 44 y de 55 es 110.

PROBLEMA 4.º—*Dividir el número 115 en dos partes de tal modo que la segunda tenga 9 unidades más que la primera.*

Llamemos a la parte menor x, la parte mayor será $x + 9$, y como la suma ha de ser igual a 115, se tendrá la ecuación

$$x + x + 9 = 115$$

que resulta nos da: $x = 53$.

Comprobación.—Si a 53 le agregamos 9 unidades, obtenemos 62, que es la parte mayor; las dos partes sumadas dan 115.

PROBLEMA 5.º—*¿Cuál es el número que aumentado en 18 unidades es igual a 7 veces el mismo número?*

Llamando x al número que buscamos, la ecuación será:

$$x + 18 = 7\,x$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 3$.

Comprobación.—7 veces el 3 es 21. Como 3 más 18 nos da también 21, la solución es la verdadera.

PROBLEMA 6.º—*Dividir el número 184 en dos partes, de tal modo que una de ellas sea igual a un séptimo de la otra.*

Representemos por x la parte mayor; la menor será $\frac{x}{7}$ y como

$$x + \frac{x}{7} = 184$$

si efectuamos la supresión de denominadores, tendremos:

$$7\,x + x = 1288$$

de donde $x = 161$ y la parte menor $161 : 7 = 23$.

Comprobación.—La suma de 161 y de 23 es 184.

PROBLEMA 7.º—*La suma de los cocientes que resultan de dividir un mismo número por 3 y por 5, es 24. ¿Cuál será ese número?*

Sea el número que buscamos x; tendremos:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 24$$

quitando denominadores

$$5\,x + 3\,x = 360$$

y, por tanto, $x = 45$.

Comprobación.—El tercio de 45 es 15; el quinto de 45 es 9; la suma de 15 y 9 es 24.

PROBLEMA 8.º—*Si a un número le aumentamos su cuarta parte y su tercio, se obtiene el número 513. ¿Cuál es el número propuesto?*

Llamemos a la incógnita x; tendremos:

$$x + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 513$$

haciendo desaparecer los denominadores:

$$12\,x + 3\,x + 4\,x = 6156$$

de donde se obtiene: $x = 324$.

Comprobación.—La cuarta parte de 324 es 81; el tercio de 324 es 108; la suma de 324, de 81 y de 108 es 513, conforme con el enunciado.

Problema 9.°—*Se conoce la suma de dos números que es igual a 60 y se sabe que uno de ellos es dos tercios del otro. ¿Cuáles son esos números?*

Representando por x a la incógnita, tendremos:

$$x + \frac{2}{3} x = 60$$

que después de preparada, nos da:

$$5 x = 180$$

de donde

$$x = 36$$

Comprobación.—Los dos tercios de 36 son 24, que sumándolo a 36 da 60.

Problema 10.—*Un padre de 30 años tiene un hijo de 2. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?*

Designemos por x el número de años que tienen que transcurrir para que se cumpla la condición. Una vez transcurridos los x años, el padre tendría $30 + x$ y el hijo $2 + x$; pero según el enunciado, la edad del primero será triple que la del segundo; luego

$$30 + x = 3 (2 + x)$$

de donde

$$x = 12$$

Comprobación.—Transcurridos 12 años el padre tendría 42 y el hijo 14, conforme con el enunciado del problema.

Problema 11.—*¿Cuál sería la longitud de una pieza de tela que después de haberse vendido su tercera parte y sus dos cuartas partes quedaran aún 12 metros?*

Designando por x el número de metros que tuviera la pieza de tela, formaríamos la ecuación

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{4} + 12 = x$$

de donde se obtendría, quitando denominadores,

$$4x + 6x + 144 = 12x$$

y efectuando las restantes operaciones de preparación

$$2x = 144$$

y para x el valor 72.

Comprobación.—El tercio de 72 es 24; los dos cuartos de 72, 36; la suma de 24, de 36 y de 12 es 72.

Problema 12.—*Un mecánico gasta la mitad de lo que gana, en su manutención,* $^1/_4$ *de su jornal en los demás gastos que se le originan, y economiza 39 pesetas cada 26 días. ¿Cuál es su jornal diario?*

Si designamos por x lo que gana diariamente, los gastos estarán representados por

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$$

lo que economiza diariamente será:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right) = x - \frac{6x}{8} = \frac{2x}{8}$$

y por tanto, en 26 días economizará

$$\frac{2x \times 26}{8} = \frac{52x}{8}$$

pero según el enunciado del problema

$$\frac{52x}{8} = 39$$

de donde

$$x = 6$$

El mecánico gana diariamente 6 pesetas.

Comprobación.—Si gasta diariamente 3 pesetas en manutención y 1'50 en los demás gastos, economizará cada día 1'50, que al cabo de 26 días asciende a 39 pesetas.

PROBLEMA.—*¿Qué número hay que sumar a los dos términos del quebrado* $\frac{45}{51}$ *para que su valor sea entonces igual a* $\frac{19}{21}$?

Llamando x al número que se ha de sumar a los dos términos del quebrado $\frac{45}{51}$, se tendrá:

$$\frac{45 + x}{51 + x} = \frac{19}{21}$$

de la cual, después de efectuadas las operaciones de preparación, se obtiene para x el valor 12.

Comprobación.—Agregando a los dos términos de la fracción $\frac{45}{51}$ el número 12, se obtendrá $\frac{57}{63}$, que, simplificada, da $\frac{19}{21}$, o sea la condición impuesta por el enunciado del problema.

Problema 14.—*Una persona que posee en metálico 41.495 pesetas, adquiere una finca; la tercera parte de la cantidad sobrante la presta al 5 % y los otros dos tercios que restan al 4 %. Sabiendo que dichos préstamos le reditúan 1.560 pesetas, se desea conocer el coste de la finca adquirida.*

Llamando x al valor de la finca comprada, las cantidades prestadas serán, respectivamente:

$$\frac{41495 - x}{3} \qquad \frac{(41495 - x)\,2}{3}$$

prestada la primera al 5 % y la segunda al 4 %, se obtendrá de renta para cada una

$$\frac{(41495 - x)\,5}{3 \times 100} \qquad \frac{(41495 - x)\,2 \times 4}{3 \times 100}$$

y como según el enunciado

$$\frac{(41495 - x)\,5}{3 \times 100} + \frac{(41495 - x)\,2 \times 4}{3 \times 100} = 1.560$$

que nos da planteada la ecuación, y para x el valor 5.495, una vez resuelta. Ahora bien; si la finca costó 5.495 pesetas, las cantidades prestadas serán:

$$\frac{41495 - 5495}{3} = 12000 \text{ pesetas}$$

$$\frac{(41495 - 5495)\ 2}{3} = 24000 \text{ pesetas}$$

150. **Problemas generales.**—1.° *¿Qué cantidad hay que agregar a los dos términos del quebrado* $\frac{m}{n}$ *para que su valor sea igual a la fracción* $\frac{r}{s}$?

Si designamos por x la cantidad que se ha de agregar a los dos términos del quebrado propuesto, se formará la fracción

$$\frac{m+x}{n+x}$$

que según el enunciado

$$\frac{m+x}{n+x}=\frac{r}{s}$$

Efectuando la supresión de los denominadores y la transposición de términos, se obtiene

$$r\,x-s\,x=s\,m-r\,n$$

y sacando el factor común x de los dos términos del primer miembro, se obtiene

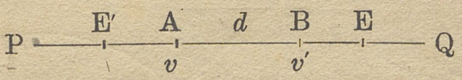
$$(r-s)\,x=s\,m-r\,n$$

de donde

$$x=\frac{s\,m-r\,n}{r-s}$$

Atribuyendo valores particulares a las cantidades que figuran en el segundo miembro de esta expresión, se obtendrá la solución del problema particular cuyos datos sean dichos valores.

Problema 2.º—*Dos móviles recorren con movimiento uniforme, y en la misma dirección, la línea* P Q; *parten a la vez, el uno del punto* A *y el otro del* B, *distantes* d *metros. Si sus velocidades respectivas son* v *y* v′ *metros por segundo, ¿a qué distancia del punto* A *se encontrarán?*



Supongamos que los móviles hacen el recorrido hacia la derecha, en el sentido P Q, y que se encuentran en el punto E. Si representamos por x la distancia A E, la distancia B E estará expresada por

$$x - AB = x - d$$

Observemos que en el movimiento uniforme los espacios son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos, lo que manifiesta que *el tiempo que tarda un móvil en recorrer con movimiento uniforme una distancia determinada, es el cociente que resulta de dividir esta distancia por la velocidad empleada en recorrerla.*

De modo que el tiempo t que tarda el móvil que parte de A en recorrer la distancia A E $= x$, siendo su velocidad v, será:

$$t = \frac{x}{v}$$

y el tiempo t' que emplea el móvil que parte de B, con la velocidad v', en recorrer la distancia B E $= x - d$, será:

$$t' = \frac{x - d}{v'}$$

Y como, según el enunciado, el tiempo que tarda uno de los dos móviles en recorrer la distancia A E debe ser el mismo que lo que tarda el otro en recorrer la distancia B E, tendremos:

$$\frac{x}{v} = \frac{x - d}{v'}$$

que es la ecuación que resuelve el problema, obteniendo el valor de la incógnita:

$$x = \frac{d\,v}{v - v'} = d\,\frac{v}{v - v'}$$

Esta fórmula resuelve, además, todos los problemas particulares que estén comprendidos en el problema general expuesto, dando a las letras d, v y v' valores numéricos.

Ejemplo:

Suponiendo que dos trenes correos salgan al mismo tiempo para Barcelona, de las estaciones de Valencia y Castellón, distantes 70 kilómetros, con movimiento uniforme; si las velocidades respectivas de los móviles fueran 50 y 40 kilómetros por hora, ¿a qué distancia de la estación de Valenaia se encontrarían los correos?

Aplicando la fórmula obtenida anteriormente, se tendrá:

$$x = 70 \times \frac{50}{50 - 40} = 350$$

Los trenes correos se encontrarían a 350 kilómetros de la estación de Valencia; la misma solución que se hallaría resolviendo el problema directamente.

Discusión.—Veamos la interpretación de los resultados que corresponden a x en la fórmula general, para los valores particulares de d, v y v', distinguiendo los casos siguientes:

	Casos	Siendo
Cuando d no es cero	1.°	$v > v'$
	2.°	$v = v'$
	3.°	$v < v'$
Cuando d es cero	4.°	v diferente de v'
	5.°	$v = v'$

Primer caso.—Si $v > v'$, la fórmula general da para x un valor positivo y mayor que d; luego el punto de encuentro de los móviles se hallará a la derecha de A, como no podía menos de ocurrir, siendo así que el móvil que parte de A lleva mayor velocidad que el que parte de B.

Segundo caso.—Si $v = v'$, la fórmula vendrá expresada:

$$x = d\frac{v}{0} = \infty$$

símbolo general de imposibilidad numérica, lo que indica que los móviles no se encontrarán, lo cual debe suceder necesariamente, porque llevando la misma velocidad estarán constantemente separados por la misma distancia.

Tercer caso.—Si $v < v'$, el denominador de la fracción $\frac{v}{v-v'}$ será negativo, y como el numerador es positivo, el producto $d\frac{v}{v-v'}$ o sea el valor que toma x, será negativo, lo que indica (1) que el punto de encuentro

(1) Recuérdese lo dicho respecto a la modalidad negativa de las magnitudes.

de los móviles debe contarse en el sentido B A; pero como este resultado no está conforme con las condiciones del problema, por suponerse que los móviles marchan en la dirección A B, la pregunta del enunciado del problema debe ser: *¿en qué punto de la línea se encontrarán?*

Cuarto caso.—Si al mismo tiempo que d es cero, las velocidades v y v' son diferentes, el valor que se obtiene para x es cero, que manifiesta que el punto de encuentro es el de partida, conforme con las condiciones del problema, pues si los puntos A y B están juntos, al pasar los móviles en el mismo momento por dichos puntos, se encontrarán.

Quinto caso.—Si al mismo tiempo que d es cero, $v = v'$ la fórmula da para x el valor $\frac{0}{0}$ que es el símbolo de indeterminación, lo cual manifiesta que los dos móviles se encuentran en todos los puntos de la línea, que está conforme con las condiciones del problema, puesto que llevando los dos móviles igual velocidad, partiendo del mismo sitio y en la misma dirección, irán siempre juntos.

IV.—Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita

151. **Forma de la ecuación preparada.**—Hemos visto que una ecuación de primer grado con una incógnita ya preparada tiene la forma:

$$A\,x = B$$

Las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas después de quitar denominadores, efectuar las operaciones indicadas y efectuar la transposición y reducción, tienen en el primer miembro tantos términos como incógnitas, y en el segundo miembro un término conocido.

La forma de una ecuación de primer grado con varias incógnitas, será:

$$a x + b y = c$$

si tiene dos incógnitas;

$$a x + b y + c z = d$$

. . . .

si tiene tres incógnitas.

152. **Resolución.**—*Despejar* una incógnita en una ecuación que tenga varias, es hallar otra ecuación equivalente a la propuesta, que figure dicha incógnita sola en un miembro.

Así, en la ecuación

$$a x + b y = c$$

despejando la incógnita x, se tendrá:

$$a x = c - b y$$

de donde

$$x = \frac{c - b y}{a}$$

En la ecuación

$$a x + b y + c z = d.$$

si despejamos la incógnita x, obtendremos:

$$x = \frac{d - b\,y - c\,z}{a}$$

Todo lo cual manifiesta que:

Para resolver una ecuación con dos o más incógnitas, se despeja una de ellas, considerando a las demás como si fueran conocidas, y en la expresión que resulte se atribuyen a éstas valores arbitrarios. Estos valores y el correspondiente a la incógnita despejada, formarán una solución de la ecuación.

Y como los valores arbitrarios que se han dado a las incógnitas no despejadas pueden ser en número ilimitado, resulta que:

Una ecuación de primer grado con varias incógnitas tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplo 1.º

Resolver la ecuación

$$2\,x - 3\,y = 40$$

Despejando la incógnita x, tendremos:

$$x = \frac{40 + 3\,y}{2}$$

que si a la incógnita y le damos los valores

1, 2, 3, 4, 5...

se obtiene para x, respectivamente,

$$\frac{43}{2},\ 23,\ \frac{49}{2},\ 24,\ \frac{55}{2},...$$

Los números 1 y $\frac{43}{2}$; 2 y 23..., etc., forman las soluciones de dicha ecuación.

Ejemplo 2.º

Sea una ecuación con tres incógnitas:

$$2x + 3y - 4z = 12$$

Despejando la incógnita x, se obtendrá:

$$x = \frac{12 - 3y + 4z}{2}$$

en cuya expresión, dando valores arbitrarios a las incógnitas y, z, tendremos las que correspondan a x.

Si despejamos otra incógnita, y, dando valores a las demás, x y z, deduciríamos los que a ella le correspondieran.

Todas las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas son *indeterminadas;* sus incógnitas toman el nombre de *variables,* y la incógnita cuyo valor depende de los valores dados a los demás, se dice que está en *función* de ellas.

En general, se llama *función* de una o varias cantidades variables, a toda cantidad cuyo valor depende de las que tomen las variables. Así, por ejemplo, el valor de una sustancia es función de la cantidad que de ella consideremos; la ganancia que produce un capital es función de éste, del tiempo y del tanto por ciento.

CAPITULO II

SISTEMAS DE ECUACIONES

I.—Definiciones y principios fundamentales

153. **Definiciones.**—Se dice que dos o más ecuaciones son *simultáneas,* cuando todas sus soluciones son comunes.

Así, las ecuaciones

$$2x + 3y = 13$$

$$3x - 5y = -9$$

son simultáneas, porque los valores 2 y 3, que satisfacen a la primera ecuación, satisfacen también a la otra, y recíprocamente.

Sistema de ecuaciones es la reunión de dos o más ecuaciones simultáneas.

Solución de un sistema es el conjunto de valores, uno para cada incógnita, que satisfacen las ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones se llama *determinado* cuando tiene un número limitado de soluciones; *indeterminado* cuando tiene un número ilimitado de soluciones, e *imposible* cuando no tiene ninguna solución.

Dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes,* cuando todos los valores de las incógnitas que satisfacen a uno de los sistemas, satisfacen también al otro, y recíprocamente.

154. Propiedades fundamentales de los sistemas de ecuaciones.—En un sistema de ecuaciones simultáneas, se hallan las incógnitas ligadas de tal modo, que es necesario efectuar ciertas transformaciones que permitan reemplazar un sistema por otro equivalente, en el que se encuentren las incógnitas en función de cantidades conocidas.

Estas transformaciones se fundan en los principios siguientes:

TEOREMA I.—*Si en una ecuación de un sistema se despeja una incógnita y se sustituye este valor en las demás ecuaciones, las que resulten y la incógnita despejada forman un sistema equivalente.*

Sean las ecuaciones

$$A = A' \qquad B = B' \qquad C = C'$$

Despejando una de las incógnitas que contenga la ecuación primera, x, por ejemplo, obtendremos un cierto valor v. Sustituyamos x por v en las dos ecuaciones últimas, y representando los resultados por $B_1 = B_1'$ y $C_1 = C_1'$, respectivamente, se obtendrá el sistema

$$x = v \qquad B_1 = B_1' \qquad C_1 = C_1'$$

que es equivalente al propuesto.

En efecto; toda solución que haga idéntica a las ecuaciones del primer sistema, convertirá en identidades las ecuaciones del segundo sistema, que sólo se diferencia en que en vez de x se ha puesto su valor v.

TEOREMA II.—*En un sistema de ecuaciones se puede sustituir una de ellas con la que resulte de sumarla o restarla miembro a miembro con otra cualquiera del sistema.*

Sean las ecuaciones simultáneas

$$A = A' \qquad B = B' \qquad C = C'$$

vamos a demostrar que este sistema es equivalente al sistema

$$A \pm B = A' \pm B' \qquad B = B' \qquad C = C'$$

En efecto, toda solución del sistema que haga idénticos los miembros A y A', siéndolo B y B' también, convertirán las ecuaciones $A \pm B = A' \pm B'$, y como las demás ecuaciones son comunes, vemos que toda solución del primer sistema lo es del segundo.

Recíprocamente: toda solución del segundo sistema que haga idénticos los miembros de la ecuación $A \pm B = A' \pm B'$, y que lo sean B y B' hará que A y A' lo sean también y, por tanto, quede la ecuación $A = A'$ verificada. Las demás ecuaciones son comunes a los dos sistemas.

Teniendo, pues, los dos sistemas las mismas soluciones, son equivalentes.

II.—Resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.

155. **Eliminación.**—Eliminar *una incógnita en un sistema de ecuaciones, es reemplazar el sistema por otro que no la contenga y en el cual las restantes incógnitas tengan los mismos valores que en el sistema propuesto.*

Los métodos de eliminación más empleados son los conocidos por los nombres de *sustitución, igualación* y *reducción.*

156. Caso de dos ecuaciones con dos incógnitas.— Ya hemos dicho la forma que toma una ecuación de primer grado con varias incógnitas ya preparada; por lo tanto, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, será:

$$a x + b y = c$$
$$a' x + b' y = c'$$

Tratemos ahora de resolver este sistema empleando los métodos de eliminación que hemos apuntado anteriormente.

157. Método de sustitución.—*Consiste este método en despejar la incógnita que se desee eliminar en una de las ecuaciones del sistema y sustituir el valor hallado en la otra ecuación.*

Sea el sistema citado

$$2x + y = 25$$
$$3x - 2y = 6$$
$$x = \frac{25-y}{2}$$

$$a x + b y = c$$
$$a' x + b' y = c'$$

$$3\left(\frac{25-y}{2}\right) - 2y = 6$$

Despejando la incógnita x en la primera ecuación (152), resulta:

$$x = \frac{c - b y}{a} \qquad [1]$$

cuyo valor, sustituído en la segunda ecuación, nos dará:

$$a' \frac{c - b y}{a} + b' y = c' \qquad [2]$$

ecuación de primer grado que contiene solamente una incógnita y que forma con la anterior [1] un sistema equivalente al propuesto. (138.—Teorema I.)

La ecuación [2] puede prepararse y resolverse como se dijo en los números (140 y 141), respectivamente. Si efectuamos en esta ecuación las operaciones que hay indicadas, obtendremos:

$$\frac{a'c - a'by}{a} + b'y = c'$$

Suprimiendo denominadores, nos dará:

$$a'c - a'by + ab'y = ac'$$

y efectuando la transposición:

$$ab'y - a'by = a'c - a'c$$

de donde, sacando el factor común y, se obtiene:

$$(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c$$

cuya ecuación nos da:

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que acabamos de señalar, despejando la incógnita y, se obtendría:

$$x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$$

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 32 \\ 7x - 3y &= 17 \end{aligned}$$

Despejando la incógnita x en la primera ecuación, se obtiene:

$$x = \frac{32 - 2y}{4} \qquad [1]$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación del sistema, obtendremos:

$$7\,\frac{32 - 2y}{4} - 3y = 17$$

cuya ecuación, preparada y resuelta conforme al procedimiento ordinario (141), nos da para y el valor 6.

Sustituyendo este valor en la expresión [1], se halla: $x = 5$.

Los valores de las dos incógnitas x e y del sistema, son, respectivamente, 5 y 6.

158. **Método de igualación.**—*Consiste este método en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar sus dos valores, con lo que se obtiene una ecuación que nos dará el valor de la otra incógnita no despejada:*

Sea el mismo sistema de antes:

$$a x + b y = c$$
$$a' x + b' y = c'$$

Despejando la incógnita x en ambas ecuaciones del sistema, tendremos:

$$x = \frac{c - b y}{a} \qquad x = \frac{c' - b' y}{a'}$$

y, por tanto:

x = x (1)

$$\frac{c - b\,y}{a} = \frac{c' - b'\,y}{a'}$$

cuya ecuación, que contiene una sola incógnita, nos dará el valor de y.

Suprimiendo denominadores, se tendrá:

$$a'\,c - a'\,b\,y = a\,c' - a\,b'\,y$$

y efectuando la transposición:

$$a\,b'\,y - a'\,b\,y = a\,c' - a'\,c$$

de donde, sacando el factor común y, se consigue:

$$(a\,b' - a'\,b)\,y = a\,c' - a'\,c$$

de la que se obtiene:

$$y = \frac{a\,c' - a'\,c}{a\,b' - a'\,b}$$

Ejemplo:

Sea el sistema:

(a) ..... $6\,x + 7\,y = 33$

(b) ..... $9\,x - 2\,y = 12$

Despejando la incógnita x en las dos ecuaciones, se obtendrán:

$$x = \frac{33 - 7\,y}{6} \qquad x = \frac{12 + 2\,y}{9}$$

(a) (b)

(1) dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí

que igualando estos dos valores, se obtiene:

$$x = x$$

$$\frac{33 - 7\,y}{6} = \frac{12 + 2\,y}{9}$$

ecuación con una sola incógnita, que resuelta nos da para y el valor 3.

Sustituído este valor en cualquiera de los dos que se han obtenido anteriormente para x, se tiene: $x = 2$.

159. **Método de reducción.**—*Consiste este método*, que también se llama de sumas y restas, *en hacer que la incógnita que se quiera eliminar tenga igual coeficiente en las dos ecuaciones del sistema, para lo cual se multiplica cada una de éstas por el coeficiente que tenga dicha incógnita en la otra ecuación, y después las ecuaciones que así resulten se restan o suman, según que los términos que contengan la incógnita que se ha de eliminar, sean del mismo signo o de signo contrario.*

Refiriéndonos al mismo sistema:

$$a\,x + b\,y = c$$

$$a'\,x + b'\,y = c'$$

que venimos estudiando, podremos hacer que los términos que contengan la misma incógnita x lleven igual coeficiente en las dos ecuaciones, multiplicando la primera de éstas por a' y la segunda por a.

Procediendo así obtendríamos:

$$a'(a\,x) + a'(b\,y) = a'\,c$$

$$a(a'\,x) + a(b'\,y) = a\,c'$$

Como los términos que contiene la incógnita x están afectados del mismo signo, si de la segunda restamos la primera, se tendrá:

$$a b' y - a' b y = a c' - a' c$$

de donde, sacando el factor común y, se consigue:

$$(a b' - a' b)\, y = a c' - a' c$$

cuya ecuación, con una de las dos del sistema propuesto, forma otro sistema equivalente a él. (154.—Teorema II.)

Resolviendo la última ecuación, se obtiene:

$$y = \frac{a c' - a' c}{a b' - a' b}$$

y siguiendo el mismo procedimiento, si elimináramos la incógnita y en el sistema dado, se obtendría:

$$x = \frac{b c' - b' c}{a' b - a b'}$$

160. **Reducción al mínimo coeficiente.**—Cuando los coeficientes de la incógnita que se quiera eliminar contengan factores comunes, puede obtenerse la reducción al mismo coeficiente de manera que éste sea el menor número posible, lo que se consigue de este modo:

Se halla el mínimo común múltiplo de los coeficientes de la incógnita en las dos ecuaciones propuestas y se multiplica cada una de éstas por el cociente de dividir el mínimo común múltiplo hallado por el coeficiente que en ella tenga la referida incógnita.

Así, en el sistema:

$$12\,x + 15\,y = 78$$

$$18\,x - \ \ 5\,y = 62$$

Como los coeficientes 12 y 18 de la incógnita x, que deseamos eliminar, tienen factores comunes, hallaremos el mínimo común múltiplo de dichos coeficientes, que es 36. Multiplicando la ecuación primera por el cociente $36 : 12 = 3$ y la segunda por el cociente $36 : 18 = 2$, se obtendrá:

$$36\,x + 45\,y = 234$$

$$36\,x - 10\,y = 124$$

Restemos miembro a miembro estas ecuaciones y se conseguirá:

$$45\,y + 10\,y = 234 - 124$$

de cuya ecuación se deduce:

$$55\,y = 110$$

o bien:

$$y = \frac{110}{55} = 2$$

Eliminemos la incógnita y en el sistema propuesto, y como quiera que el mínimo común múltiplo de los coeficientes 15 y 5 es el primero de estos números, bastará para efectuar dicha eliminación que multipliquemos la ecuación segunda por el cociente $15 : 5 = 3$, y nos dará el sistema:

$$12x + 15y = 78$$

$$54x - 15y = 186$$

Sumando estas ecuaciones, se obtiene:

$$12x + 54x = 78 + 186$$

de la cual:

$$66x = 264$$

que nos da:

$$x = \frac{264}{66} = 4$$

La solución del sistema propuesto es $x = 4$, $y = 2$.

161. **Comprobación de las soluciones.**—Resuelto ya un sistema de ecuaciones, debemos comprobar los resultados que se hayan obtenido, para tener la certeza de que son los verdaderos, lo cual *se consigue sustituyendo en todas las ecuaciones del sistema cada incógnita por su valor hallado, y efectuando después las operaciones indicadas, las ecuaciones se reducirán a identidades.*

Ejemplo:

Tengamos el sistema:

$$4x - 3y = 11$$

$$6x + 2y = 36$$

Si resolvemos este sistema, se obtiene para x el valor 5 y para y el valor 3. Sustituyendo en las dos ecuaciones propuestas cada incógnita por el valor obtenido para la misma, se tendrá:

$$4 . 5 - 3 . 3 = 11$$

$$6 . 5 + 2 . 3 = 36$$

que, efectuando las operaciones indicadas, las convierten en las identidades

$$11 = 11$$

$$36 = 36$$

La solución $x = 5$ e $y = 3$ verifica el sistema propuesto.

162. **Sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas.**—Todo sistema de n ecuaciones con otras tantas incógnitas, puede transformarse en otro equivalente que tenga una ecuación menos y una incógnita menos, lo cual se consigue eliminando una misma incógnita entre la ecuación más sencilla y cada una de las otras.

Obtenido así un sistema equivalente al propuesto, que estará formado por $n - 1$ ecuaciones y $n - 1$ incógnitas, se aplica el mismo procedimiento y se obtendrá otro sistema equivalente de $n - 2$ ecuaciones con $n - 2$ incógnitas.

14

Continuando del modo expuesto, se llegará a una *ecuación final* con una incógnita.

Resolviendo esta ecuación se obtendrá el valor de la única incógnita que contiene, cuyo valor se sustituye en una ecuación del sistema anterior, que tiene dos incógnitas, y resolviendo esta ecuación se tiene el valor de la otra incógnita.

Los valores hallados para las dos incógnitas se sustituyen en una de las tres ecuaciones con tres incógnitas del sistema anterior, cuya ecuación dará el valor de otra incógnita, y así sucesivamente, hasta obtener los de todas.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$2x + 3y + 4z = 28$$

$$3x + 2y + 5z = 33$$

$$6x - 4y + 3z = 22$$

Eliminando la x entre la primera ecuación y la segunda y después entre la primera y la tercera, se obtiene el sistema:

$$5y + 2z = 18$$

$$26y + 18z = 124$$

Eliminemos ahora la incógnita y en este sistema y se obtiene la ecuación:

$$90z - 52z = 620 - 468$$

o sea:

$$38z = 152$$

de donde

$$z = 4$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema anterior, nos da:

$$5y + 8 = 18$$

de donde

$$y = \frac{10}{5} = 2$$

Y sustituyendo los dos valores hallados, en la primera ecuación del sistema propuesto, se tiene:

$$2x + 6 + 16 = 28$$

de la cual se obtiene:

$$x = 3$$

La solución del sistema que hemos resuelto, es:

$$x = 3 \qquad y = 2 \qquad z = 4$$

163. **Procedimientos especiales.**—En algunos casos no es lo más conveniente emplear los métodos de eliminación que se han expuesto anteriormente, pues la práctica en la resolución de ecuaciones señala procedimientos especiales que facilitan el cálculo, abreviándolo; pero estos procedimientos no están sujetos a reglas determinadas, porque su aplicación depende de la naturaleza de las ecuaciones del sistema y su conocimiento se adquiere con la práctica.

Sea, por ejemplo, el sistema

$$x + y = a$$

$$y + z = b$$

$$z + x = c$$

el que tengamos que resolver.

Si sumamos las dos primeras ecuaciones y de la suma restamos la tercera, se obtendrá:

$$2y = a + b - c$$

de donde

$$y = \frac{a + b - c}{2}$$

Sumando la primera ecuación a la tercera y restando la segunda, se tiene:

$$2x = a + c - b$$

de la que

$$x = \frac{a + c - b}{2}$$

Y, finalmente, si sumamos las ecuaciones segunda y tercera y del resultado restamos la primera, se consigue:

$$2z = b + c - a$$

que da:

$$z = \frac{b + c - a}{2}$$

EJERCICIOS

Resolver los sistemas de ecuaciones:

1.º $\begin{cases} 5x + 2y = 47 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

2.º $\begin{cases} 4x - y = 26 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$

3.º $\begin{cases} 2x - y = 12 \\ 7x - 3y = 41 \end{cases}$

4.º $\begin{cases} 3x - 12y = -3 \\ 5x - 8y = 7 \end{cases}$

5.º $\begin{cases} 3y + 4z = 12 \\ 5y - 6z = 1 \end{cases}$

6.º $\begin{cases} 12y - 5z = 131 \\ 3y + 3z = 46 \end{cases}$

7.º $\begin{cases} 2x + 5y = 105 \\ 25x - 5y = 29 \end{cases}$

8.º $\begin{cases} 7y - 3z = -54 \\ 2y + 2z = 96 \end{cases}$

9.º $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 5z = 29 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x - 4y - 3z = 17 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x + y + z = 33 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ 5x - 2y - 2z = -15 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 3y + 30z = 18 \\ y - x - z = -17 \\ 4x - y + z = 35 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 12 \\ 7x - 2y + 4z = 4 \\ 6x + 3y - 2z = 10 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 22x - 3y - z = 12 \\ 20x + y + z = 10 \\ 3y - 25x - 2z = 45 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x - 8y - 6z = 10 \\ 3y - 2x + z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 21 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3u + 3x - 2y + z = 12 \\ 3u + 2x + 4y - 2z = 18 \\ 4u - 5x + 3y + z = 10 \\ 5u + 2x - 5y + 3z = 11 \end{cases}$

III.—Sistemas con diferente número de incógnitas que de ecuaciones

164. **Sistemas con más incógnitas que ecuaciones.**—Para resolver un sistema de m ecuaciones de primer grado con $m + n$ incógnitas, se procede del mismo

modo que se ha indicado (162) en un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas, pero la ecuación final que se obtenga tendrá más de una incógnita y cada una de sus soluciones (152), al ser sustituída en una ecuación del sistema anterior, y los valores obtenidos al sustituirlos en otra del sistema que le precede, y así sucecivamente, nos dará una solución del sistema que se trata de resolver. Ahora bien; la ecuación final tiene infinitas soluciones y, por tanto, las m ecuaciones del sistema admiten infinitos sistemas de valores para sus $m+n$ incógnitas, y, por consiguiente, el sistema propuesto será indeterminado.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$3u+3x-2y+z=12$$

$$3u+2x+4y-2z=18$$

$$4u-5x+3y+z=10$$

Eliminando la incógnita u, se tendrá:

$$-x+6y-3z=6$$

$$27x-17y+z=18$$

de cuyo sistema, eliminando x, obtendremos la ecuación

$$145y-80z=180$$

de donde

$$y=\frac{180+80z}{145}$$

Demos a la incógnita z un valor arbitrario, por ejemplo, el 5, y obtendremos:

$$y = 4$$

Sustituyendo estos dos valores de z y de y, en la primera ecuación del sistema anterior, tendremos:

$$-x + 6 . 4 - 3 . 5 = 6$$

de la que se obtiene:

$$x = 3$$

Sustituyendo los tres valores obtenidos en la primera ecuación del sistema propuesto, nos dará:

$$3u + 3 . 3 - 2 . 4 + 5 = 12$$

que resuelta, da:

$$u = 2$$

Hemos obtenido, dando a z el valor arbitrario 5, una solución al sistema; pero a cada nuevo valor que diéramos a dicha incógnita, procediendo como queda indicado, obtendríamos una nueva solución del sistema.

165. **Sistemas con más ecuaciones que incógnitas.**— Para resolver un sistema de $m + n$ ecuaciones con m incógnitas, se despejan éstas en igual número de ecuaciones; se sustituyen los valores obtenidos para las incógnitas en las n ecuaciones restantes, y el sistema propuesto será *determinado* o *imposible*, según que estas ecuaciones se verifiquen o no para dichos valores.

Esas ecuaciones que no se utilizan para determinar los valores de las incógnitas y sí sólo para ver si estos valores las verifican, se denominan ecuaciones de *condición.*

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$2x + y = 12$$

$$3x - 3y = 9$$

$$4x + 2y = 24$$

Resolviendo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

$$6x + 3x = 36 + 9$$

de la cual:

$$x = 5$$

y después obtendríamos:

$$y = 2$$

Sustituyendo estos valores en la última ecuación, se transforma en:

$$4 . 5 + 2 . 2 = 24$$

Y como esta ecuación se verifica, la solución hallada lo es del sistema propuesto.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.º $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y + 4z = 29 \\ 4x + 4y + 3z = 26 \end{array} \right.$

2.º $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 32 \\ 3x + 2y + 5z = 59 \end{cases}$

3.º $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 37 \\ 4x + 7y - z = 46 \end{cases}$

4.º $\begin{cases} 7x - 4y + 5z + 2u = 58 \\ 3x + 5y + 3z - 4u = 40 \\ 4x - 3y + 2z + 3u = 38 \end{cases}$

5.º $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \\ x + 19y = 48 \end{cases}$

6.º $\begin{cases} x + 2y = 23 \\ 3x + y = 14 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

7.º $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ 7x - 2y = 11 \\ 9x + y = 32 \end{cases}$

IV. — Inecuaciones y limitaciones de primer grado

166. **Desigualdad.**—Se llama *desigualdad* la expresión de dos cantidades, tales que la una sea mayor que la otra.

Así, las expresiones:

$$a + 3 > a + 1 \qquad\qquad m - 5 < m$$

son desigualdades.

167 **Transformaciones que puede experimentar una desigualdad.**—La proposición evidente que dice: *siempre que* $A > B$, *se verificará* $A - B > 0$, nos sirve de fundamento para demostrar las siguientes propiedades:

1.ª *Una desigualdad subsiste si a sus dos miembros se les adiciona o resta una misma cantidad.*

En efecto; sea la desigualdad:

$$A > B$$

En virtud del principio citado,

$$A - B > 0$$

y de aquí tendremos:

$$(A \pm m) - (B \pm m) > 0$$

o bien:

$$A \pm m > B \pm m$$

Aplicación.—En una desigualdad se puede pasar un término de un miembro a otro, sin más que cambiarle el signo a dicho término. Esta transformación equivale a sumar o restar a los dos miembros una misma cantidad.

Ejemplo:

Sea la desigualdad

$$4 + 7 - 2 > 8$$

Si le adicionamos el número 2 a los dos miembros de esta desigualdad, se convierte en

$$4 + 7 > 8 + 2$$

Si a la primera desigualdad le restamos a sus dos miembros el número 7, nos dará:

$$4 - 2 > 8 - 7$$

2.ª *Una desigualdad subsiste si se multiplican o dividen sus dos miembros por una misma cantidad positiva.*

En efecto: sea la desigualdad

$$A > B$$

se tendrá:

$$A - B > 0$$

de donde:

$$A\,m - B\,m > 0$$

o bien:

$$A\,m > B\,m$$

Como dividir una cantidad por m equivale a multiplicarla por $\frac{1}{m}$, si

$$A > B$$

tendremos:

$$A\,\frac{1}{m} > B\,\frac{1}{m}$$

o bien:

$$\frac{A}{m} > \frac{B}{m}$$

Si la cantidad por que se multiplican o dividen los dos miembros de la desigualdad fuese negativa, la desigualdad cambia de signo.

Así, en la desigualdad

$$A > B$$

si multiplicamos o dividimos sus dos miembros por $-m$, se tendrá:

$$-Am < -Bm \qquad -\frac{A}{m} < -\frac{B}{m}$$

Aplicaciones.—Esta propiedad que acabamos de demostrar nos permite efectuar las dos transformaciones siguientes:

1.ª Cuando algunos de los términos de una desigualdad sean fraccionarios se puede hacer desaparecer los denominadores, multiplicando los términos de la desigualdad por el producto de todos los denominadores o por el mínimo común múltiplo de éstos.

Ejemplo:

Sea la desigualdad

$$5 + \frac{5}{9} > 4 - \frac{2}{3}$$

multiplicando todos los términos de la desigualdad por 9, mínimo común múltiplo de 9 y 3, obtendremos la desigualdad

$$45 + 5 > 36 - 6$$

que no tiene términos fraccionarios.

2.ª Se pueden cambiar los signos a todos los términos de una desigualdad, cambiando también el signo de la misma. Esto equivale a multiplicar los dos miembros por -1.

Ejemplo:

$$-3+\frac{4}{9}>2-7+\frac{3}{5}$$

se transforma en

$$3-\frac{4}{9}<7-2-\frac{3}{5}$$

168. **Inecuación.**—Una desigualdad en la que intervienen una o más cantidades desconocidas o incógnitas, recibe el nombre de *inecuación.*

Resolver una inecuación es hallar los límites de los valores de las incógnitas.

169. **Preparación de inecuaciones.**—Es evidente que en una inecuación con una o más incógnitas, se pueden efectuar las mismas transformaciones que acabamos de indicar para las desigualdades, lo cual nos permite sentar *que las inecuaciones se preparan lo mismo que las ecuaciones,* mediante las operaciones ya indicadas (140).

Ejemplo:

Preparar la inecuación

$$4x+\frac{2}{3}>\frac{4}{7}+2x$$

Quitando denominadores, se obtendrá:

$$84x+14>12x+42$$

Haciendo pasar los términos que contengan incógnitas al primer miembro y las conocidas al segundo, se tiene

$$84\,x - 12\,x > 42 - 14$$

y efectuando la reducción de términos semejantes, se obtiene la inecuación

$$72\,x > 28$$

ya preparada.

170. **Resolución.**—Después de haber efectuado las operaciones de preparación que hemos mencionado, una inecuación tomará una de estas formas:

$$A\,x > B \qquad A\,x < B$$

y en virtud de la propiedad demostrada anteriormente (167-2.ª), podremos dejar sola la incógnita en un miembro, dividiendo los dos de la inecuación por el coeficiente de x, cuya transformación nos dará, respectivamente:

$$x > \frac{B}{A} \qquad x < \frac{B}{A}$$

Luego todo valor de la incógnita, mayor o menor que un cierto límite, verificará la inecuación.

Ejemplo:

Resolver la inecuación

$$5\,x - \frac{x}{2} > 42 + 3\,x$$

Multiplicando todos los términos por 2, nos dará:

$$10\,x - x > 84 + 6\,x$$

y transponiendo términos:

$$10x - x - 6x > 84$$

o bien:

$$3x > 84$$

de donde

$$x > 28$$

Lo cual nos dice que cualquier número mayor que 28 verificará la inecuación que hemos resuelto.

171. **Limitación.**—El conjunto de dos inecuaciones que se verifican en sentido contrario y que tienen los dos primeros miembros, o los segundos, comunes, recibe el nombre de *limitación*.

Así, las inecuaciones

$$3x + 4 > 13$$
$$3x + 4 < 22$$

forman una limitación, que podremos escribir en la siguiente forma:

$$22 > 3x + 4 > 13$$

172. **Resolución.**—Una limitación se resuelve operando con cada una de las inecuaciones que la forman, que, resueltas, nos dan para la incógnita dos límites, uno superior y otro inferior.

Así, al resolver la limitación del ejemplo anterior, obtendremos:

$$x > 3 \qquad x < 6$$

Problema.—*Determinar un número entero, de tal suerte, que su quíntuplo sea mayor que su triplo más 4, y menor que su cuádruplo más 6.*

La limitación que plantea el problema es:

$$4x + 6 > 5x > 3x + 4$$

y resolviendo las dos inecuaciones que comprende

$$5x > 3x + 4$$

$$5x < 4x + 6$$

se obtiene, respectivamente:

$$x > 2 \qquad x < 6$$

La condición que impone el problema es, que el número que se busca sea entero; luego la solución será: $x = 5$, $x = 4$, $x = 3$.

EJERCICIOS

1. Resolver las inecuaciones siguientes:

1.ª $4x + 2 > \frac{2}{3} + 7$

2.ª $3x + \frac{4}{7} > 2x + \frac{6}{8}$

3.ª $\frac{7x}{6} - \frac{4}{3} > \frac{1}{6} + \frac{3x}{12}$

4.ª $2x + \frac{4x}{3} > 3x + \frac{4}{8}$

2. Resolver las siguientes limitaciones:

1.ª $4x + 4 > 36 > 2x + 8$

2.ª $5x + \frac{x}{3} > 25 > 4 + 3$

3.ª $4x + 12 < 5x < 4x + 2$

4.ª $12 + \frac{x}{8} < x < 2x - 20$

5.ª $4 + \frac{x}{12} + x < 3x < 2x + \frac{x}{3} + 19$

CAPITULO III

ECUACIONES CUADRÁTICA Y BICUADRADA

I.—Ecuaciones de segundo grado

173. **Ecuaciones completas e incompletas y sus formas generales.**—Ya se ha dicho (138) que una ecuación es de *segundo grado* cuando es 2 el mayor exponente de la incógnita.

Una ecuación de segundo grado con una incógnita, después de preparada, según la regla expuesta anteriormente (140), no puede contener más de tres términos: uno con x^2, otro con x y otro conocido, independiente de la incógnita.

Llamando a al coeficiente de x^2, b al de x y c al término independiente de la incógnita, la ecuación tomará la forma general:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

en la que a, b y c pueden representar cantidades enteras cualesquiera, pudiendo ser b y c positivas o negativas. Respecto al signo de a, siendo conveniente que ésta sea siempre positiva, cuando no lo fuera, podría conseguirse fácilmente cambiando los signos a todos los términos de la ecuación, lo que equivale a multiplicar sus dos miembros por — 1.

Cuando la ecuación consta de los tres términos expresados, no faltando ninguno de ellos, se dice que la ecuación es *completa*, y en caso contrario, que es *incompleta*.

Las formas generales de las ecuaciones incompletas son:

(1) $$a x^2 + c = 0 \qquad\qquad a x^2 + b x = 0$$ (2)

174. **Resolución de la ecuación completa.**—Sea la ecuación:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Pasando c al segundo miembro, se tendrá:

$$a x^2 + b x = - c$$

Multiplicando sus dos miembros por $4 a$, tendremos:

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x = - 4 a c$$

pero observemos que el primer miembro de la ecuación se compone de los dos primeros términos del trinomio

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + b^2 = (2 a x + b)^2$$

luego agregando b^2 a los dos miembros de la ecuación, el primero se convertirá en un cuadrado perfecto, y la ecuación en

$$4 a^2 x^2 + 4 a b x + b^2 = b^2 - 4 a c$$

(1) $ax^2 = -c$

$x^2 = \frac{-c}{a}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

$x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

(2) $ax^2 = -bx$

$x^2 = \frac{-bx}{a}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-bx}{a}}$

$x = \sqrt{\frac{-bx}{a}}$

o lo que es igual:

$$(2\,a\,x + b)^2 = b^2 - 4\,a\,c$$

y extrayendo de ambos miembros la raíz cuadrada:

$$2\,a\,x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

de la cual

$$2\,a\,x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

y, por consiguiente,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

fórmula que da para x dos *raíces* o *soluciones*, que si separamos sus valores y los representamos por x' y por x'', se tendrá:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

que verifican la ecuación.

La interpretación de la fórmula obtenida conduce a la siguiente

Regla.—*Para resolver una ecuación de segundo grado con una sola incógnita, se prepara reduciéndolo a la forma* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, *y entonces se halla el valor de dicha incógnita, formando una fracción que tenga por numerador el coeficiente del segundo término con signo cambiado, aumentado o disminuído en la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo* *producto de los coeficientes de los términos extremos, y por denominador, el duplo del coeficiente del primer término.*

Ejemplo ilustrativo:

Sea la ecuación:

$$5\,x + 13 = \frac{6}{x}$$

que preparada se reduce a $5x^2 + 13x = 6$ y después

$$5\,x^2 + 13\,x - 6 = 0$$

y aplicando la regla anterior:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 + (4\,.\,5\,.\,6)}}{2\,.\,5}$$

de la cual obtendremos las dos raíces:

$$x' = \frac{-13 + \sqrt{169 + 120}}{10} = \frac{-13 + \sqrt{289}}{10} =$$

$$= \frac{-13 + 17}{10} = \frac{4}{10}$$

$$x'' = \frac{-13 - 17}{10} = \frac{-30}{10} = -3$$

Cuyos dos valores verifican la ecuación propuesta.

175. **Casos particulares de la fórmula.**—En algunos casos la fórmula general puede simplificarse, como ocurre en los que exponemos a continuación:

1.° *Cuando el coeficiente* b *del segundo término es par.*

Sea la ecuación:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

Si el coeficiente del segundo término contiene el factor 2, hagamos:

$$b = 2 b'$$

y la ecuación toma la forma:

$$a x^2 + 2 b' x + c = 0$$

Aplíquese la fórmula general, y dará:

$$x = \frac{-2 b' \pm \sqrt{4 b'^2 - 4 a c}}{2 a}$$

y sacando el factor común 4 de los dos términos que se hallan debajo del radical:

$$x = \frac{-2 b' \pm \sqrt{4 (b'^2 - a c)}}{2 a} = \frac{-2 b' \pm 2\sqrt{b'^2 - a c}}{2 a}$$

y dividiendo los dos términos de la fracción por el codivisor 2:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - a c}}{a}$$

cuya fórmula es de aplicación más ventajosa que la dada anteriormente (174), al mismo tiempo que por su parecido con ella facilita su recordación.

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$2x + \frac{6}{x} = -8$$

quitando denominadores se convierte en:

$$2x^2 + 6 = -8x$$

y verificando la transposición del término $-8x$, nos da:

$$2x^2 + 8x + 6 = 0$$

ecuación ya preparada.

Aplicando la fórmula obtenida últimamente, tendremos los dos valores:

$$x' = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x'' = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 12}}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Los valores -1 y -3 verificarán la ecuación propuesta.

2.° *Cuando el coeficiente del primer término es la unidad.*

Sea la ecuación:

$$x^2 + bx + c = 0$$

en la que el coeficiente del primer término es la unidad.

Aplicando la fórmula general (174), obtendremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}} =$$

$$= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{4c}{4}} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Ejemplo:
Resolver la ecuación:

$$x + \frac{9}{x} = -6$$

Quitando denominadores, se obtiene:

$$x^2 + 9 = -6x$$

de donde:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

y aplicando la fórmula que acabamos de obtener, nos dará los valores de la incógnita

$$x' = -\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = -3 + \sqrt{9 - 9} = -3$$

$$x'' = -\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{36}{4} - 9}\ 9 = -3$$

La solución será:

$$x' = x'' = -3$$

que satisface la ecuación propuesta.

176. **Resolución de las ecuaciones incompletas.**—Hemos visto que las ecuaciones incompletas de segundo grado podían tomar una de estas dos formas:

$$a\,x^2 + c = 0 \qquad a\,x^2 + b\,x = 0$$

De la primera de estas ecuaciones se deduce:

$$a\,x^2 = -c$$

de donde

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

que nos da:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esta expresión de x comprende las dos raíces

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

y cuyas soluciones se hubieran obtenido igualmente aplicando a la primera de las ecuaciones propuestas la fórmula general (174).

De la ecuación

$$a\,x^2 + b\,x = 0$$

se obtiene, separando el factor común x, la ecuación

$$x\,(a\,x + b) = 0$$

cuyo primer miembro puede reducirse a cero de dos modos: por ser

$$x = 0$$

y también por ser

$$a x + b = 0$$

de la cual se deduce:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Estos dos valores obtenidos para x satisfacen la ecuación, y se hubieran podido obtener aplicando a dicha ecuación la fórmula general.

177. **Relaciones sobre los coeficientes y las raíces.**— Si sumamos los dos valores de x contenidos en la fórmula general (174):

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} =$$

$$= \frac{-b}{a}$$

cuya interpretación manifiesta que:

La suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término con signo cambiado, dividido por el coeficiente del primero.

Si multiplicamos valores de x' y x'':

$$x' \times x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\ (-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a \times 2a}$$

y como el producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos números (41):

$$(-b+\sqrt{b^2-4ac})\ (-b-\sqrt{b^2-4ac}) =$$

$$= +\ b^2 - (\sqrt{b^2-4ac})^2 = +\ b^2 - (b^2-4ac)$$

Se tendrá, pues, que:

$$\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\ (-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Lo que nos dice que $x' \times x'' = \frac{c}{a}$, que traducido al lenguaje ordinario, dice:

El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente de la incógnita, dividido por el coeficiente del primero.

En el caso de que el coeficiente del primer término sea la unidad

$$x' + x'' = \frac{-b}{1} = -b \qquad x' \times x'' = \frac{c}{1} = c$$

178. **Aplicaciones prácticas.**—De las relaciones que hemos establecido entre las raíces y los coeficientes, se deduce que siempre que se conozcan la suma y el producto de dos cantidades, pueden hallarse éstas resolviendo una ecuación de segundo grado en la que el coeficiente del primer término sea la unidad, el del segundo término la suma conocida con signo contrario, y el término independieute el producto dado.

Ejemplo ilustrativo:

¿Cuáles son los números que sumados dan 23 y que multiplicando el uno por el otro dan de producto 112?

La ecuación será:

$$x^2 - 23\,x + 112 = 0$$

y las dos raíces de la ecuación:

$$x' = \frac{23 + \sqrt{529 - 448}}{2} = \frac{23 + \sqrt{81}}{2} = \frac{23 + 9}{2} =$$

$$= \frac{32}{2} = 16$$

$$x'' = \frac{23 - \sqrt{81}}{2} = \frac{23 - 9}{2} = 7$$

Los números pedidos son 16 y 7.

EJERCICIOS

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \qquad x^2 - 26x + 168 = 0$$

$$x^2 - 11 + 28 = 0 \qquad x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$12x^2 + 20 = 0 \qquad 7x^2 - 4x = 0$$

$$4x^2 + 10x = 0 \qquad x(x + ax) = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0 \qquad x^2 + 7x = -3$$

$$nx^2 - \frac{r}{s} = mx^2 \qquad 4 + \frac{3}{x} = x + 12$$

2. Indicar de qué clase son y qué signo les corresponde a las raíces de las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 12x + 14 = 0 \qquad x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 6 = 0 \qquad 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \qquad 6x^2 + 3x + 7 = 0$$

II.—Ecuación bicuadrada

179. **Forma general.**—Una ecuación se llama *bicuadrada* cuando después de verificar las operaciones de preparación, toma la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

La ecuación bicuadrada es, pues, de cuarto grado y contiene solamente los términos de grado par.

180. **Resolución.**—Si en la ecuación

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

hacemos $x^2 = y$, se verificará $x^4 = y^2$, y entonces la ecuación tomará la forma:

$$a\,y^2 + b\,y + c = 0$$

o sea la de una ecuación de segundo grado.

Al resolver esta ecuación (174), se obtiene:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

que, como sabemos, comprende dos raíces.

Ahora bien; siendo:

$$x^2 = y$$

se verificará que

$$x = \pm \sqrt{y}$$

en cuya igualdad, si sustituímos el valor que hemos obtenido anteriormente para y, se tendrá:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

cuya fórmula comprende cuatro valores para x, que separados son:

$$x = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Por lo tanto, la ecuación bicuadrada admite cuatro raíces iguales dos a dos y de signos contrarios.

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

Haciendo $x^2 = y$, la ecuación propuesta toma la forma:

$$4y^2 - 17y + 4 = 0$$

que resolveremos como se dijo al tratar de las ecuaciones de segundo grado (174), obteniendo:

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

que nos da para y las soluciones 4 y $\frac{1}{4}$; luego las raíces de la ecuación propuesta serán las cuatro siguientes:

$$x = 2 \qquad x = -2$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad x = -\frac{1}{2}$$

EJERCICIOS

1. Resolver las ecuaciones que a continuación se expresan:

$$x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$$

$$x^4 - 20\,x^2 + 54 = 0$$

$$x^4 - 29\,x^2 + 100 = 0$$

$$x^4 - 17\,x^2 = -16$$

$$x^4 + 8\,x^2 = 20$$

PARTE COMPLEMENTARIA

PROGRESIONES Y LOGARITMOS

CAPÍTULO PRIMERO

PROGRESIONES

I.—Progresiones aritméticas

181. **Definiciones.**—PROGRESIÓN *aritmética o por diferencia es una serie de cantidades tales, que la diferencia entre dos consecutivas es constante.* Esta diferencia recibe el nombre de *razón* de la progresión.

Términos de una progresión son las diversas cantidades que la forman.

182. **Progresiones crecientes y decrecientes.**—Una progresión es *creciente* cuando cada uno de sus términos es algébricamente mayor que el que le precede; en este caso la razón es positiva.

Así, la serie de números 5, 9, 13, 17, 21..., es una progresión aritmética creciente y la razón es 4.

Una progresión es *decreciente* cuando cada uno de sus términos es algébricamente menor que el que le precede.

Así, la serie de números 13, 9, 5, 1, — 3, — 7..., es una progresión aritmética decreciente cuya razón es — 4.

Las progresiones considéranse generalmente limitadas por dos términos que reciben el nombre de *términos extremos,* primero y último; pero no obsta para que otras veces se consideren *ilimitadas,* a partir de un término, el primero, o doblemente indefinidas.

Así, por ejemplo, la serie numérica 1 . 2 . 3 . 4 . 5..., es una progresión ilimitada.

183. **Notación.**—Indícase que varias cantidades forman progresión aritmética, colocando antes de la primera el signo ÷, que se lee *como,* y entre cada dos de ellas un punto ortográfico, que se lee *es.*

Así, las dos progresiones que hemos mencionado anteriormente, las indicaremos de este modo:

÷ 5 . 9 . 13 . 17 . 21..., creciente, y la razón 4.

÷ 13 . 9 . 5 . 1 . — 3 . — 7..., decreciente, y la razón — 4.

Se leen diciendo: *como 5 es a 9, es a 13, es a 17,* etcétera, la primera; *como 13 es a 9, es a 5, es a 1, es a — 3,* etcétera, la segunda progresión.

Cuando quiera indicarse de una manera general una progresión, represéntense sus términos por una misma letra, afectándola de subíndices, de manera que cada uno indique el lugar que el término ocupa en la progresión.

Así:

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \dots a_n$$

en la que el tercer término va afectado del subíndice 3 y la cantidad a_n indica que es el término *enésimo* de la progresión.

184. **Término general.**—*En toda progresión aritmética un término cualquiera es igual al primero, más tantas veces la razón como términos le preceden.*

Sea la progresión:

$$\div\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,.\, a_5 \dots a_n$$

y llamemos r a la razón.

Según la definición de progresión (181), el segundo término se formará adicionando al primero la razón, y así:

$$a_2 = a_1 + r$$

El tercero es igual al segundo, más la razón:

$$a_3 = a_2 + r$$

y sustituyendo en esta igualdad el valor de a_2 obtenido en la primera:

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2\,r$$

El cuarto término de la progresión es igual al tercero, más la razón:

$$a_4 = a_3 + r$$

y sustituyendo en esta igualdad el valor de a_3 ya obtenido en la anterior, se tendrá:

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + r + r + r = a_1 + 3\,r$$

En general, el término a_n que ocupa el *enésimo* lugar de la progresión tiene, antes que él, $n-1$ términos, y por lo tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r \qquad [1]$$

Problema.—Hallar el noveno término de una progresión por diferencia, sabiendo que el primero es 3 y la razón es 4.

Aplicando la fórmula anterior, nos dará:

$$a_9 = 3 + (9-1)\,4 = 35$$

185. **Consecuencias.**—1.ª En virtud de la fórmula [1], podremos expresar la progresión

$$\div\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,...\, a_n$$

bajo la siguiente forma:

$$\div\, a_1 \quad . \quad a_1 + r \quad . \quad a_2 + r \,......\, a_1 + (n-1)\,r$$

2.ª Por medio de la fórmula [1] podemos determinar una cualquiera de las cantidades a_1, a_n y r, cuando se conocen las otras dos. En efecto, si en la expresión

$$a_n = a_1 + (n-1)\,r$$

pasamos $(n-1)\,r$ al primer miembro, tendremos:

$$a_n - (n-1)\,r = a_1$$

lo que nos dice que *el primer término de una progresión creciente es igual al último menos tantas veces la razón como términos menos uno tenga.*

Problema.—¿Cuál será el primer término de una progresión que consta de 7 términos, sabiendo que el último es 27 y que la razón es 2?

Aplicando la fórmula anterior se tiene:

$$a_1 = 27 - (7 - 1)\,2 = 15$$

3.ª Si en la indicada fórmula [1] pasamos a_1 al primer miembro y luego dividimos los dos por $n - 1$, se obtendrá:

$$\frac{a_n - a_1}{n - 1} = r$$

cuya interpretación es la siguiente: *la razón de una progresión aritmética es igual al cociente de dividir la diferencia de los términos extremos por el número de sus términos menos uno.*

Problema.—Hallar la razón de una progresión aritmética que consta de 5 términos, siendo el primero 8 y el último 26.

$$r = \frac{26 - 8}{5 - 1} = \frac{9}{2} = 4{'}5$$

La progresión será.

$$\div\, 8\,.\, 12{'}5\,.\, 17\,.\, 21{'}5\,.\, 26$$

4.ª También puede obtenerse de la repetida fórmula [1] el valor de n en función a_1, a_n y r.

Pasando a_1 al primer miembro, se tiene:

$$a_n - a_1 = (n - 1)\,r$$

de donde:

$$\frac{a_n - a_1}{r} = n - 1$$

y de ésta se obtiene:

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

lo cual manifiesta que *el número de términos de una progresión aritmética limitada es igual al cociente que resulta al dividir la diferencia de los términos extremos por la razón, aumentado en una unidad.*

Problema.—¿De cuántos términos constará una progresión por diferencia que empieza por 3, termina por 35 y cuya razón es 4?

Según la fórmula que acabamos de deducir:

$$n = \frac{35 - 3}{4} + 1 = 8 + 1 = 9$$

186. Suma de dos términos equidistantes de los extremos.—*La suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de éstos.*

Sea la progresión:

$$\div\, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

y considerando el segundo y el penúltimo, equidistantes de los extremos, como lo son también el tercero y el antepenúltimo, por lo ya expuesto, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{r} a_2 = a_1 + r \\ a_{n-1} = a_n - r \end{array}\right\} \text{sumandos} \left\{\begin{array}{l} a_3 = a_1 + 2\,r \\ a_{n-2} = a_n - 2\,r \end{array}\right.$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \;\Big\}\; \text{sumas} \;\Big\{\; a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

Observación.—Cuando la progresión contiene un número impar de términos, hay uno en el centro que es equidistante de los dos extremos.

Así, en la progresión

$$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5$$

que consta de cinco términos, el a_3 equidista del a_1 y del a_5, y en ella se verifica:

$$a_3 + a_3 = a_1 + a_5$$

o sea

$$2 a_3 = a_1 + a_5$$

de donde

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2}$$

cuya expresión manifiesta: *que dicho término es igual a la semisuma de los extremos*, lo que equivale a decir (Aritmética n.os 213 y 215)), *que es el medio diferencial entre el primero y último términos de la progresión o entre dos equidistantes de éstos.*

Así, en la progresión

$$\div 5 . 7 . 9 . 11 . 13$$

los términos 5 y 13, 7 y 11 sumados dan 18, que es el duplo del término medio 9, el cual es el medio diferencial entre ellos.

187. **Suma de los términos de una progresión.**—*La suma de los términos de una progresión aritmética es igual a la mitad del producto que se obtiene multiplicando la suma de los extremos por el número de términos de la progresión.*

En efecto; sea la progresión:

$$\div\, a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

de n términos; llamando S a la suma de todos ellos,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

y por la ley conmutativa de la adición, se tendrá:

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades y aplicando las leyes asociativa y conmutativa de la adición:

$$2\,S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

en la que la suma de cada uno de los binomios encerrados entre paréntesis es constante e igual a la suma de los extremos $a_1 + a_n$. El número, pues, de binomios iguales a $a_1 + a_n$ es n, el mismo que el de términos de la progresión; luego:

$$2\,S = (a_1 + a_n)\,n$$

de donde:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

Problemas:

1.º Hallar la suma de los 30 primeros números enteros.

Según la fórmula que antecede:

$$S = \frac{(1 + 30)\,30}{2} = \frac{31 \times 30}{2} = 465$$

2.° Hallar la suma de los 20 primeros múltiplos de 5.

Se tendrá:

$$a_1 = 5 \qquad r = 5 \qquad n = 20$$

luego el último término de la progresión será:

$$a_n = 5 + (20 - 1)\,5 = 100$$

y aplicando la fórmula del valor de S, nos dará:

$$S = \frac{(5 + 100)\,20}{2} = 1050$$

188. **Aplicaciones.**—Además de los problemas que han sido resueltos fundándose en las proposiciones demostradas anteriormente, las igualdades,

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r$$

$$2\,S = (a_1 + a_n)\,n$$

tomadas como ecuaciones, permiten resolver otros problemas diferentes, pues de ellas pueden deducirse dos cualesquiera de las cinco cantidades que en las mismas intervienen, a_1, a_n, n, r y S, siempre que se den conocidas las otras tres.

Como ejemplo de lo expuesto, resolveremos el siguiente

Problema.—Determínense los términos extremos de una progresión por diferencia que consta de 7 términos sabiendo que 63 es la suma de éstos y que 2 es la razón.

Haciendo aplicación de las ecuaciones dichas, tendremos:

$$a_n = a_1 + (7 - 1)\,2$$

$$2 \times 63 = (a_1 + a_n)\,7$$

y resolviendo este sistema por cualquiera de los métodos conocidos (155), se obtendrá:

$$a_1 = 3 \qquad a_n = 15$$

189. **Interpolación diferencial.**—*Interpolar entre dos cantidades dadas un cierto número de medios diferenciales, es formar una progresión aritmética, cuyos extremos sean las cantidades dadas.*

La cuestión queda reducida a encontrar la razón de la progresión, lo cual es sencillo, valiéndose de las relaciones establecidas anteriormente.

Si nos proponemos interpolar n medios diferenciales entre dos cantidades dadas, a y b, observemos que la progresión constará de $n + 2$ términos, y que siendo b el último de éstos ha de ser igual al primero a más tantas veces la razón como términos le precedan (184), que son $n + 1$; luego:

$$b = a + (n + 1)\,r$$

pasando a de un miembro a otro y dividiendo los dos de la ecuación por $n + 1$ se tendrá:

$$r = \frac{b - a}{n + 1}$$

es decir, *que la razón de la progresión que forman varios medios diferenciales interpolados entre dos cantidades dadas, es igual al cociente de dividir la diferencia entre las cantidades dadas por el número de medios que se interpolan, más uno.*

Nota.—Dicha diferencia hay que tomarla en el sentido conveniente, pues siendo $a > b$, la razón es positiva, pero si $a < b$, la razón será negativa. La razón puede ser también un número fraccionario.

Problemas:

1.° Interpolar 5 medios diferenciales entre 6 y 30.

Se hallará la razón:

$$r = \frac{30 - 6}{5 + 1} = 4$$

y se formará la progresión:

$$\div 6 . 10 . 14 . 18 . 22 . 26 . 30$$

2.° Interpolar entre 18 y 3 cuatro medios diferenciales.

$$r = \frac{3 - 18}{4 + 1} = \frac{-15}{5} = -3$$

La progresión será:

$$\div 18 . 15 . 12 . 9 . 6 . 3$$

3.° Interpolar 3 medios diferenciales entre 4 y 6.

$$r = \frac{6 - 4}{3 + 1} = \frac{2}{4} = 0'5$$

y formaremos la progresión

$$\div 4 \,.\, 4'5 \,.\, 5 \,.\, 5'5 \,.\, 6$$

EJERCICIOS

1.º Escribir el término que ocupa el octavo lugar en la progresión $\div 2 \,.\, 8 \,.\, 14 \ldots$

2.º Escribir el término que hace el número 40 de una progresión que empieza por 5 y cuya razón sea 9.

3.º ¿Cuál es el décimo término de una progresión aritmética cuya razón es 5 y el primer término — 7?

4.º Calcular el séptimo término de la progresión $\div 12 \,.\, 20 \,.\, 28 \ldots$

5.º Escribir una progresión por diferencia que tenga 20 términos, siendo el último 85 y cuya razón sea 14.

6.º Calcular la razón de una progresión aritmética que consta de 25 términos, sabiendo que el primero es 12 y el segundo 496.

7.º Determinar la suma de los cien primeros números.

8.º Calcular la suma de los cien primeros números pares.

9.º Interpolar 7 medios diferenciales entre 9 y 18.

10. Interpolar 18 medios diferenciales entre 2 y 3.

II.—Progresiones por cociente

190. **Definición.**—*Progresión por cociente o geométrica, es una serie de cantidades tales, que dividiendo cada una de ellas por la que le precede, da el mismo cociente,* llamado *razón* de la progresión.

Términos de una progresión son las diversas cantidades que la forman.

191. **Notación.**—Para indicar que varias cantidades forman progresión geométrica, se coloca delante de la primera el signo $\div\div$, que se lee *como*, y entre ellas el signo de la división (:) que, como sabemos ya, se lee *es*.

Así, por ejemplo, una progresión que empieza por el número 4 y cuya razón es 2, se indicará:

$$\div\div\, 4 : 8 : 16 : 32 : 64...$$

y leeremos: *como 4 es a 8, es a 16, es a 32...*, etc.

Para representar una progresión de una manera general, se designan sus términos por una misma letra afectada de subíndices, y cada uno de éstos indica el orden en que están colocados en la progresión cada uno de aquéllos.

Así, por ejemplo, en la progresión:

$$\div\div\, a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n$$

el término a_3, que lleva el subíndice 3, indica que dicho término ocupa el tercer lugar, y a_n ocupará el lugar *enésimo*.

192. **Progresiones crecientes, decrecientes y alternas.**—Una progresión geométrica es *creciente* cuando la *razón* es mayor que la unidad, pues entonces los términos van creciendo, por ser cada uno igual al producto del que antecede por una cantidad mayor que la unidad.

Una progresión es *decreciente* cuando la razón es menor que la unidad, y es *alterna* cuando la razón es una cantidad negativa.

Ejemplos de progresiones por cociente:

$$\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : 48$$

es una progresión geométrica *creciente.* La razón es 2.

$$\div\, 24 : 6 : \frac{3}{2} : \frac{3}{8} : \frac{3}{32}$$

es una progresión geométrica *decreciente.* La razón es $\frac{1}{4}$

$$\div\, 2 : -4 : 8 : -16 : 32$$

es una progresión geométrica *alterna.* La razón es — 2.

Las progresiones considéranse generalmente *limitadas* por dos términos, llamados *extremos,* pudiendo también considerarse *ilimitadas* en uno o en los dos sentidos.

193. **Expresión del término general.**—*En una progresión por cociente un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razón potenciada por el número de términos que le preceden.*

Sea la progresión:

$$\div\, a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_n$$

de n términos y llamemos q a la razón.

Según lo dicho al definir las progresiones por cociente, el segundo término es igual al primero, multiplicado por la razón

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

El tercero es igual al segundo multiplicado por la razón, y, por tanto:

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

El cuarto término es igual al tercero multiplicado por la razón

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

y, en general, el último a_n que ocupa el enésimo lugar, nos da:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \qquad [1]$$

Problema.—Hallar el séptimo término de una progresión geométrica que comienza por 4 y cuya razón es 3.

Aplicando la fórmula [1], se tendrá:

$$a_7 = 4 \times 3^{7-1} = 4 \times 3^6 = 2916$$

La progresión será:

$$\div\!\div\ 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : 2916$$

194. **Consecuencias.**—1.ª En virtud de la fórmula [1] que hemos hallado anteriormente, la progresión

$$\div\!\div\ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n$$

puede expresarse en la siguiente forma:

$$\div\!\div\ a_1 : a_1 q : a_1 q^2 : a_1 q^3 : \ldots : a_1 q^{n-1}$$

2.ª Si dividimos los dos miembros de la igualdad [1] por q^{n-1}, se tendrá:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}.$$

lo que manifiesta que *el primer término de una progresión geométrica es igual al cociente de dividir el último por la potencia* n — 1 *de la razón.*

Problema.—¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica, sabiendo que el cuarto término es 625 y que la razón es 5?

Según la forma que hemos obtenido últimamente, tendremos:

$$a_1 = \frac{625}{5^3} = \frac{625}{125} = 5$$

195. **Producto de dos términos equidistantes de los extremos.**—*En toda progresión por cociente, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual al producto de estos extremos.*

En efecto:

Sea la progresión geométrica:

$$\div\; a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n$$

limitada por los términos a_1 y a_n, que son los extremos, y según lo expuesto anteriormente (192), tendremos:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1\, q \\ a_{n-1} &= \frac{a_n}{q} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a_3 &= a_1\, q^2 \\ a_{n-2} &= \frac{a_n}{q^2} \end{aligned}\right\}.$$

Multiplicando ordenadamente las igualdades comprendidas en cada llave, se obtendrán, respectivamente, los productos

$$a_2 \times a_{n-1} = a_1 \times a_n \qquad a_3 \times a_{n-2} = a_1 \times a_n$$

que demuestran la proposición enunciada.

Observación. — Cuando la progresión contiene un número impar de términos, como ocurre en

$$\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5$$

el término a_3 es equidistante de los extremos a_1 y a_5 y según se acaba de demostrar,

$$a_3 \times a_3 = a_1 \times a_5$$

esto es:

$$a_3^2 = a_1 \times a_5$$

de donde:

$$a_3 = \sqrt{a_1 \times a_5}$$

lo que manifiesta *que dicho término es igual a la raíz cuadrada del producto de los términos extremos de la progresión,* o lo que es lo mismo, *el medio factorial o proporcional entre éstos.*

Así, en la progresión por cociente numérica:

$$\div\, 2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

se verifica:

$$8^2 = 2 \times 32 \qquad 8 = \sqrt{2 \times 32}$$

o sea el medio factorial o proporcional entre 2 y 32.

196. Producto de los términos de una progresión geométrica.—*El producto de los términos de una progresión por cociente es igual a la raíz cuadrada de una potencia cuyo exponente sea el número de términos de la progresión y cuyo dignando es el producto de los términos extremos.*

Sea

$$\div\!\div\ a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-2} : a_{n-1} : a_n$$

una progresión por cociente de n términos; llamemos F al producto de todos ellos, y se tendrá:

$$F = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

y también:

$$F = a_n \times a_{n-1} \times a_{n-2} \times \dots \times a_3 \times a_2 \times a_1$$

multiplicando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos:

$$F^2 = (a_1 \times a_n)\ (a_2 \times a_{n-1})\ (a_3 \times a_{n-2})\dots$$
$$\dots(a_{n-2} \times a_3)\ (a_{n-1} \times a_2)\ (a_n \times a_1)$$

Cada uno de los productos de dos factores encerrados entre paréntesis es igual a $a_1 \times a_n$ (195), y hay tantos como términos tiene la progresión; luego

$$F^2 = (a_1 \times a_n)^n$$

de donde

$$F = \sqrt{(a_1 \times a_n)^n}$$

Problema.—Hallar el producto de los 5 términos de una progresión geométrica que empieza por 1, siendo la razón 2.

Si el primer término es 1, el quinto término será:

$$a_5 = 1 \times 2^4 = 16$$

Aplicando la fórmula que hemos obtenido antes, hallaremos para el producto de los cinco términos:

$$F = \sqrt{(1 \times 16)^5} = 1025$$

197. **Suma de los términos de una progresión.**—*La suma de los términos de una progresión por cociente limitada, se obtiene restando el primer término del producto del último término por la razón, y dividiendo después la diferencia hallada por la razón disminuída en una unidad.*

Sea la progresión de n términos:

$$\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots : a_n$$

que podemos poner bajo la forma:

$$\div\, a_1 : a_1\, q : a_1\, q^2 : a_1\, q^3 : \ldots : a_1\, q^{n-1}$$

Llamando S a la suma de todos sus términos, tendremos:

$$S = a_1 + a_1\, q + a_1\, q^2 + a_1\, q^3 + \ldots + a_1\, q^{n-1}$$

multiplicando los dos miembros por la razón q nos dará:

$$S\, q = a_1\, q + a_1\, q^2 + a_1\, q^3 + \ldots + a_1\, q^n$$

y si se resta de esta igualdad la anterior, en los segundos miembros se destruyen todos los términos, exceptuando el último $a_1 q^n$ y el primero a_1. La sustracción efectuada será:

$$S q - S = a_1 q^n - a_1$$

la cual nos da, sacando en el primer miembro el factor común S:

$$S (q - 1) = a_1 q^n - a_1$$

de donde:

$$S = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$$

o también:

$$S = \frac{a^n q - a_1}{q - 1}$$

Problema.—Hallar la suma de los seis primeros términos de una progresión por cociente que comienza con el 9 y que la razón es 3.

Veamos primeramente cuál es el último término de la progresión propuesta en el enunciado, que según ya sabemos:

$$a_6 = 9 \times 3^5 = 9 \times 253 = 2187$$

Aplicando ahora la fórmula para obtener el valor de S, tendremos:

$$S = \frac{(2187 \times 3) - 9}{2} = \frac{6552}{2} = 3276$$

Caso de la progresión decreciente.—La fórmula anterior de la suma de los términos de una progresión por cociente, es únicamente aplicable a las crecientes; en el caso de que la progresión fuera decreciente, se cambian en la fórmula los signos de los términos de la fracción, que da:

$$S = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q}$$

198. **Interpolación proporcional.**—*Interpolar un cierto número de medios proporcionales entre dos cantidades dadas, es formar una progresión por cociente, cuyos extremos sean las cantidades dadas.*

La interpolación proporcional se reduce a encontrar la razón de la progresión, después de lo cual, por lo expuesto anteriormente (193), se forman fácilmente los términos de ella.

Propongámonos interpolar n medios proporcionales entre las cantidades a y b; la progresión constará de $n + 2$ términos, y siendo b el último, será igual al primero multiplicado por la razón elevada a un exponente que indique el número de términos que le preceden, esto es, $n + 1$; luego:

$$b = a + q^{n+1}$$

Dividiendo por a ambos miembros, se tendrá:

$$\frac{b}{a} = q^{n+1}$$

y radicando los dos miembros por $n + 1$, dará:

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

lo que manifiesta que en la interpolación de cierto número de medios proporcionales entre dos cantidades, *se obtiene la razón extrayendo del cociente de las cantidades dadas la raíz cuyo índice indique el número de medios que se han de interpolar, más una unidad.*

Problema: Interpolar entre 64 y 512 dos medios proporcionales.

Haciendo en la fórmula que antecede $a = 64$, $b = 512$ y $n = 2$, tendremos:

$$q = \sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \frac{8}{4} = 2$$

Siendo la razón de la nueva progresión 2, se tendrá:

$$\div\, 64 : 128 : 256 : 512$$

EJERCICIOS

1.° Hallar el octavo término de una progresión geométrica cuya razón es 4 y el primer término 23.

2.° Calcular el séptimo término de una progresión geométrica, cuya razón es $\frac{1}{3}$ y el primer término 2.

3.° ¿Cuál sería el décimo término de una progresión que empieza — 7 y cuya razón fuese 5?

4.° Determinar la suma de los términos de una progresión geométrica que comienza por 7, cuya razón es 3 y que consta de 8 términos.

5.° Calcular la suma de los términos de las siguientes progresiones:

1.° $\div\, 2 : 4 : 8 : \ldots$ (7 términos)

2.º $\div 4 : 12 : 36 : \ldots$ (9 términos)

3.º $\div 5 : 20 : 80 : \ldots$ (8 términos)

4.º $\div 2 : 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \ldots$ (7 términos)

5.º $\div 3 : \frac{3}{4} : \frac{3}{16} : \ldots$ (6 términos)

6.º Interpolar entre 4 y 36 dos medios proporcionales.

7.º Interpolar entre 12 y $\frac{3}{16}$ dos medios proporcionales.

8.º Interpolar 3 medios proporcionales entre 7 y 448.

9.º Colocar entre los términos 8 y 24 los términos que formen progresión geométrica.

CAPÍTULO II

LOGARITMOS

I.—Definiciones y propiedades

199. **Logaritmación.**—Al estudiar la calculatoria en la primera parte del Algebra, hemos visto que a la adición le corresponde la operación inversa denominada sustracción, así como también la multiplicación tiene por su inversa la división; pero si nos fijamos en la potenciación, observaremos que a ésta le corresponden dos inversas: una, la radicación que ya hemos estudiado, y otra que *tiene por objeto determinar el exponente a que debe elevarse un número dado para que produzca un número también dado*, y que recibe el nombre de LOGARITMACIÓN.

200. **Definiciones de logaritmo.**—*Se denomina logaritmo de un número dado el exponente a que debe elevarse una cantidad positiva y diferente de la unidad, llamada base, para que la potencia sea igual al número propuesto.*

De modo que si $b > o$ y distinta de la unidad y se tiene:

$$n = b^l \qquad [1]$$

l será el logaritmo de n, siendo b la base.

Si en la ecuación [1] damos a l los valores 0, 1, 2, 3, 4..., etc., en progresión aritmética, se obtendrán para n, respectivamente, los valores 1, b, b^2, b^3, b^4..., etcétera, que forman una progresión geométrica.

Las dos progresiones serán:

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots$$

$$\div\!\!\div 1 : b : b^2 : b^3 : b^4 \ldots$$

y los términos de la primera progresión serán los logaritmos de los términos correspondientes de la segunda progresión, lo cual nos permite dar otra definición, diciendo:

Logaritmo de un número considerado como término de una progresión geométrica que empieza por la unidad, es el término correspondiente en una progresión aritmética que comienza por cero.

201. **Sistema de logaritmos.**—Se llama *sistema* el conjunto de logaritmos correspondientes a todos los números cuando la base tiene un valor determinado, de donde resulta que pudiendo tomar la base infinidad de valores positivos y distintos de la unidad, podían idearse infinidad de sistemas de logaritmos, correspondiendo a cada número, en cada sistema, un logaritmo distinto.

Así, por ejemplo, si tenemos:

$$64 = b^l$$

para $b = 8$ se tendrá $l = 2$

» $b = 4$ » $l = 3$

y si la base b fuese otro número, le correspondería a otro valor.

Entre los diferentes sistemas de logaritmos, los que más se emplean son dos, llamados el *natural o neperiano*, y el *decimal, usual o de Briggs.*

Sistema de logaritmos neperianos es aquel en que la razón de la progresión geométrica es igual a la unidad más la razón de la progresión aritmética.

Sistema usual, o de Briggs, es aquel que tiene por base 10.

202. **Notación.**—Para designar el logaritmo de un número n, se le antepone el vocablo *log.*, con que se abrevia la palabra logaritmo, de este modo:

$$\log. n = l$$

cuya expresión indica que l es el logaritmo de n. Ahora bien, como hay una infinidad de sistemas, para distinguir unos de otros, se le pone a la palabra *log.* un subíndice que indique la base a que pertenece el logaritmo.

Así, por ejemplo:

$$\log_b. n = l$$

$$\log_3. 81 = 4$$

que se leen: logaritmo sub b de n igual l, la primera, y logaritmo sub 3 de 81 igual 4. Dichas expresiones manifiestan que en el sistema de base b el logaritmo de n es l y en el de base 3 el logaritmo de 81 es 4.

203. **Consecuencias.**—Consideremos las progresiones que nos han servido para obtener una de las definiciones de logaritmo:

$$\div\div \ldots \frac{1}{b^4} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{b} : 1 : b : b^2 : b^3 \ldots$$

$$\div \ldots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -b \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots$$

que podremos escribir de la siguiente forma:

$$\div \ldots b^{-4} : b^{-3} : b^{-2} : b^{-1} : 1 : b : b^2 : b^3 \ldots$$

$$\div \ldots -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots$$

y que forman el sistema de base b.

De las definiciones dadas anteriormente y del examen de estas progresiones, se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *El logaritmo de la unidad es cero y el logaritmo de la base es la unidad.*

2.ª Como la base es positiva y diferente de la unidad, serán positivos todos los términos de la progresión geométrica, de modo que en ella no tienen cabida *los números negativos*, y, por tanto, éstos *no tienen logaritmo.*

3.ª *Cuando la base del sistema es mayor que la unidad, los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo y los menores que 1 los tienen negativos; a mayor número corresponde mayor logaritmo, y el logaritmo de* ∞ *es* ∞ *y el de cero es* $-\infty$.

4.ª *Cuando la base es menor que 1, los números menores que la unidad, tienen logaritmos positivos, y los mayores que 1 son negativos; el logaritmo de* ∞ *es* $-\infty$ *y el de cero es* ∞.

204. **Propiedades fundamentales de los logaritmos.**— Además de las propiedades que acabamos de exponer como consecuencia de las definiciones referentes a logaritmos, estudiaremos las consignadas en las proposiciones siguientes, que sirven de fundamento al cálculo logarítmico:

1.ª *El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.*

Llamemos n, n', n'', a varios números, y l, l', l'', a sus correspondientes logaritmos, referidos a una misma base, b; según la definición de logaritmo (200), tendremos:

$$n = b^l \qquad n' = b^{l'} \qquad n'' = b^{l''}$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, obtendremos:

$$n \times n' \times n'' = b^{l + l' + l''}$$

en cuya igualdad $l + l' + l''$ es, según la definición, el logaritmo de base b del producto $n \times n' \times n''$; luego se tendrá:

$$log.\ (n \times n' \times n'') = log.\ n + log.\ n' + log.\ n''$$

2.ª *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor.*

Tengamos las igualdades:

$$n = b^l \qquad n' = b^{l'}$$

Dividiéndolas ordenadamente, se tendrá:

$$n : n' = b_l : b^{l'} = b^{l - l'}$$

luego:

$$log.\ (n : n') = l - l' = log.\ n - log.\ n'$$

3.ª *El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del dignando.*

Si en la igualdad

$$n = b^{l}$$

potenciamos sus dos miembros por m, obtendremos:

$$n^{m} = b^{ml}$$

luego:

$$log.\ n^{m} = m\, l = m \times log.\ n$$

4.ª *El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo de este número, dividido por el índice de la raíz.*

En efecto; designemos por r la raíz m.ésima de n, y tendremos:

$$\sqrt[m]{n} = r$$

de donde:

$$n = r^{m}$$

luego:

$$m \times log.\ r = log.\ n$$

o también:

$$log.\ r = \frac{log.\ n}{m}$$

en cuya expresión, al sustituir r por su igual, se obtiene:

$$log.\ \sqrt[m]{n} = \frac{log.\ n}{m}$$

II. — Logaritmos decimales

205. **Progresiones que forman el sistema de logaritmos decimales.**— Estos logaritmos, qne reportan más ventajas para el cálculo, pues pertenecen al sistema que tienen por base la del sistema de numeración, vienen expresados por la igualdad:

$$n = 10$$

en la que sustituyendo l por los valores:

$$\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$$

se obtienen para n los valores:

$$\ldots\ 10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 1\ 10,\ 10^{2},\ 10^{3},\ 10^{4}\ \ldots$$

y forman el sistema:

$$\div \ldots 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^{2} : 10^{3} \ldots$$

$$\div \ldots -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots$$

206. **Propiedades de los logaritmos decimales.**—De la comparación de los términos de estas progresiones, deducimos las siguients propiedades:

1.ª *El logaritmo vulgar de una potencia de 10, es igual a su exponente positivo o negativo.*

2.ª *Los únicos números que tienen logaritmos enteros son las potencias enteras de 10.*

207. **Característica y mantisa.**—Cuando un número dado no sea una potencia entera de 10, su logaritmo estará comprendido entre dos enteros consecutivos y se expresará en decimales, constando de dos partes: una

entera y otra decimal; la parte entera se denomina *característica*, y la parte decimal, *mantisa*.

Del examen que hemos hecho del sistema anterior, se deduce:

1.° *La característica del logaritmo de un número mayor que la unidad, consta de tantas unidades positivas como cifras, menos una, tiene el número propuesto.*

2.° *La característica del logaritmo de un número menor que la unidad, consta de tantas unidades negativas como cero, más uno, haya entre la coma y la primera cifra decimal significativa.*

208. **Transformación de un logaritmo negativo en otro de mantisa positiva.**—Los logaritmos de los números menores que la unidad, como hemos visto anteriormente, son negativos; pero en la práctica, para facilitar el cálculo, conviene transformarlos en otros iguales de mantisa positiva. Veamos de qué modo.

Sea, por ejemplo, el logaritmo negativo:

$$-3{'}748188$$

y se tiene:

$$-3{'}748188 = (-3) + (-0{'}748188)$$

y si en el segundo miembro agregamos al primer sumando una unidad negativa y al otro sumando una unidad positiva, se obtendrá:

$$-3{'}748188 = (-3-1) + (1-0{'}748188)$$

pero el último sumando del segundo miembro de esta igualdad, es el complemento aritmético de la mantisa del logaritmo propuesto; luego:

$$-3{'}748188 = -4 + 0{'}251812 = \overline{4}{'}251812$$

$$\frac{12a^3b^2cd^4 :}{4a^2cd^3} = 9ab^2d$$

$$\frac{45a^3b^4c^6d}{9a^2b^3c^3} = \underline{5abc^3d}$$

$$20a^4b^2 + 15a^2b^4 - 10a^4b^3 \;\Big|\; \frac{5a^2b^2}{4a^2b + 3ab^2 - 2a^2b}$$

$$24a^4bc^3 - 32a^3bc + 40a^2b^0c^2 \;\Big|\; \frac{8a^2bc}{3a^2c^2 - 4a + 5b^2c}$$

$$32a^2b^2c + 4a^2b^3 - 2a^3b^4c^2 \;\Big|\; \frac{2ab}{16abc + 2ab^3 - a^2b^3}$$

~~$14a^2b - 3a^2b^0 + 5a^4b - 6acd$~~

Logaritmos.

En la potenciación intervienen como datos, dos números llamados base y exponente: Al resultado lo hemos llamado potencia. Si la base es a el exponente b y la potencia N se expresa la relación entre ellos así: $N = a^b$

Cuando se conoce el número N y el exponente se obtiene la base, "a", por medio de una operación llamada radicación cuyo logaritmo es: $a = \sqrt{N}$; en la cual N, b y a son respectivamente el radicando, el índice y la raíz. Además de esta operación inversa de la elevación a potencias existe otra también inversa, que consiste en hallar el exponente de una potencia conociendo ésta y la base. Si en la igualdad $N = a^b$, son conocidos N y a, y se desea conocer b, este número b se llama logaritmo del número N con relación a la base "a" y se expresa por el algoritmo $b = \log_a N$ que se lee así: b igual a log. en base a del número N.

Logaritmo de un número con respecto a una base, es pues el exponente de la potencia a que hay necesidad de elevar dicha base para reproducir el número dado.

lo cual nos conduce a la siguiente

REGLA.—*Para transformar un logaritmo negativo en otro igual que tenga la mantisa positiva, se aumenta en una unidad el valor absoluto de su característica, se escribe el signo decimal y a continuación el complemento aritmético de su mantisa.*

210. **Logaritmos de igual mantisa.**—*La mantisa del logaritmo de un número no se altera multiplicando o dividiendo éste por cualquier potencia de 10.*

En efecto; sea n el número propuesto y 10^m la potencia, tendremos las igualdades:

$$\log.\ (n \times 10^m) = \log.\ n + \log.\ 10^m = \log.\ n + m$$

$$\log.\ (n : 10^m) = \log.\ n - \log.\ 10^m = \log.\ n - m$$

que demuestran que el logaritmo no sufre otra alteración más que el número de las unidades enteras de que consta el exponente de la potencia de 10.

Consecuencia.—Dos números formados por las mismas cifras, dispuestas en el mismo orden, que no se diferencien más que en la colocación de la coma, sus logaritmos tienen igual mantisa.

211. **Tablas de logaritmos.**—Se llaman así a unos cuadros en los que están, convenientemente dispuestas, las mantisas de los logaritmos correspondientes a los números enteros, desde 1 hasta un límite fijado.

Las más sencillas llevan los números colocados en columna, siguiendo el orden de su magnitud, y a su derecha las mantisas de sus logaritmos, y se llaman de *simple entrada.*

Las tablas de *doble entrada* están dispuestas de un modo artificioso, porque al buscar en ellas un número, hay que atender a la primera columna, que es donde están sus decenas y en la primera fila sus unidades.

Utilizando las tablas se resuelven los dos problemas siguientes:

Dado un número, determinar su logaritmo.

Dado un logaritmo, hallar el número correspondiente a este logaritmo.

Como en todas las tablas de logaritmos se explica perfectamente su disposición especial y su manejo, creemos innecesario ocuparnos aquí de ello.

212. **Operaciones con logaritmos.**—Las operaciones con logaritmos se efectúan como con números decimales, teniendo en cuenta la modalidad de aquéllos, y que en la división, cuando la característica del dividendo es negativa, es preciso añadir a la característica y a la mantisa las unidades necesarias, a fin de que dicha característica sea divisible por el divisor.

III.—Operaciones por medio de los logaritmos

213. **Utilidad de los logaritmos en los cálculos numéricos.**—En virtud de las proposiciones demostradas anteriormente (204), el empleo de los logaritmos como elemento de cálculo nos proporciona un medio poderoso de simplificación, pues no sólo se rebajan en una categoría las operaciones que comprende la calculatoria, dentro de la clasificación adoptada de operaciones directas e inversas, de tal suerte que

la multiplicación se convierte en adición
» división » » » sustracción
» potenciación » » » multiplicación
» radicación » » » división

sino que además nos permite practicar la potenciación de una cantidad por un número cualquiera y facilita el único procedimiento para la obtención de una raíz cuando su índice es mayor que 3.

Veamos ahora como utilizando los logaritmos en el cálculo numérico, se efectuarán las operaciones siguientes:

Multiplicación.—Según la primera de las propiedades (204) fundamentales de todo sistema de logaritmos, se tiene que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores, y por consiguiente, *para multiplicar dos o más números, se hallan en las tablas sus logaritmos, se suman éstos y el número correspondiente a la suma es el producto que se busca.*

Ejemplo:

Hallar por medio de logaritmos el siguiente producto:

$$63456 \times 432$$

se tendrá:

$$\begin{array}{lrl} \log. & 63456 = & 4'802473 \\ \log. & 432 = & 2'635484 \\ \hline & \text{suma} & 7'437957 \end{array}$$

y como el número correspondiente al logaritmo de 7'437957 es 27412992, resulta:

$$63456 \times 432 = 27412992$$

División.—La segunda de las propiedades ya repetidas manifiesta que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor; luego *para dividir un número por otro se* *hallarán en las tablas sus logaritmos, y del logaritmo del dividendo se resta el logaritmo del divisor; hallando el número correspondiente a la resta, se tendrá el cociente.*

Ejemplo:

Hallar, aplicando logaritmos, el siguiente cociente:

$$3404 : 23$$

se tendrá:

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 3404 = & 3'531606 \\ \text{log. } 23 = & 1'361727 \\ \hline \text{diferencia} & 2'169879 \end{array}$$

y como el número correspondiente a esta diferencia tomada como logaritmo es 148, resulta que

$$3404 : 23 = 148$$

Potenciación.—Como se ha demostrado que el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del dignando, *para potenciar un número por otro, se multiplica por éste el logaritmo del primero, y hallando en las tablas el número que corresponde a este producto se obtendrá la potencia.*

Ejemplo:

Hallar la tercera potencia de 324

Se tendrá:

$$\begin{array}{rr} \text{log. } 324 = & 2'510545 \\ & \times 3 \\ \hline \text{producto} & 7'531635 \end{array}$$

y el número correspondiente a este producto es 35012224; este número será el cubo de 324 que se buscaba.

Radicación.—La última de las propiedades a que nos venimos refiriendo (204) manifiesta que el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz; por lo tanto, para hallar la *raíz de un número se halla el logaritmo de este número, se le divide por el índice de la raíz y se busca en las tablas el número que corresponda a este cociente y será la raíz que se desea.*

Ejemplo:

Hallar la raíz cúbica del número 949, aproximándola hasta las milésimas.

Se tendrá:

$$\log.\ 949 = 2'977226$$
$$2'9772226 : 3 = 0'9924075$$

y como el número correspondiente a este logaritmo es 9'827, resulta:

$$\sqrt[3]{949} = 9'827$$

214. **Cálculo logarítmico de una fórmula.**—Sea una fórmula cualquiera:

$$x = \sqrt[m]{\frac{a \,.\, b^2}{c}}$$

aplicando logaritmos, tendremos:

$$\log.\ x = \log.\left(\sqrt[m]{\frac{a\,.\,b^2}{c}}\right) = \left(\log.\frac{a\,b^2}{c}\right) : m =$$
$$= \frac{\left(\log.\ a + (2 \times \log.\ b)\right) - \log.\ c}{m}$$

IV.—Aplicaciones de los logaritmos

215. **Ecuación exponencial.**—Una ecuación se llama *exponencial,* cuando la incógnita o incógnitas que contienen entran como exponentes. Así, la expresión:

$$a^x = b$$

es una ecuación exponencial.

Aplicando logaritmos podemos hallar el valor de x, pues obtendríamos:

$$x \times \log. a = \log. b$$

que se resuelve fácilmento, dividiendo sus dos miembros por log. a:

$$x = \frac{\log. b}{\log. a}$$

216. **Interés compuesto.**—Sabemos, por Aritmética, que la fórmula que liga entre sí las diversas cantidades que intervienen en la regla de interés compuesto es:

$$C = c\,(1 \times r)^t$$

Con ella se puede determinar una de las cuatro cantidades c, r, t, C, cuando se conozcan las otras tres.

Aplicando logaritmos, tendremos:

$$\log. C = \log. c + t \times \log. (1 + r)$$

Si la incógnita es c, se transforma en:

$$\log. c = \log. C - t \times \log. (1 + r)$$

Si la incógnita es t, resulta:

$$t = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1 + r)}$$

Si la incógnita es r, se tiene:

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. C - \log. c}{t}$$

de donde, obtenido el valor de $1 + r$, se obtiene fácilmente el de r.

217. **Anualidades.**—Se llama *anualidad* la cantidad constante que debe pagarse cada año, durante cierto tiempo, para constituir un capital o extinguir una deuda contraída.

Llamemos a a la anualidad, r al tanto por 1, y t el número de años. La primera anualidad a producirá intereses durante t años y se convierte (216) en:

$$a (1 + r)^t$$

La segunda anualidad, que estará colocada en $t - 1$ años, se convertirá:

$$a (1 + r)^{t-1}$$

y así sucesivamente, hasta la última, que sólo estará para que produzca interés un año, será:

$$a (1 + r)$$

Sumando todos estos valores y llamando S a la suma, se tendrá:

$$S = a (1 + r)^t + a (1 + r)^{t-1} + a (1 + r)^{t-2} + \dots$$
$$\dots + a (1 + r)$$

que sacando el factor común a e invirtiendo sus términos, se obtiene:

$$S = a\,[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \ldots + (1+r)^t]$$

y como en el segundo miembro de esta igualdad, tenemos la suma de los términos de una progresión por cociente en que el primer término es $1+r$, el último término es $(1+r)^t$ y la razón $1+r$, aplicando la fórmula correspondiente (197), se obtendrá:

$$S = \frac{a\,(1+r)^t\,(1+r) - (1+r)}{(1+r) - 1}$$

que simplificándola, nos da:

$$S = \frac{a\,(1+r)\,[(1+r)^t - 1]}{r}$$

Cuya fórmula determina una cualquiera de las cantidades S, a, r y t, siempre que se conozcan las otras tres.

Para calcular por logaritmos el valor de S, determinemos previamente el de $(1+r)^t - 1$, que podemos llamar p, y tendremos:

$$log.\ S = log.\ a + log.\ (1+r) + log.\ p - log.\ r$$

En el caso que se tenga que amortizar una deuda en t años, al r por 1 de interés anual, por anualidades iguales a a, al fin del primer año el prestador recibe la anualidad, que se convierte en los $t-1$ años restantes en:

$$a\,(1+r)^{t-1}$$

La anualidad que se da al fin del segundo año, valdrá al final del último:

$$a\,(1+r)^{t-2}$$

La anualidad entregada al final del tercer año, valdrá:

$$a\,(1+r)^{t-3}$$

y así sucesivamente hasta la última anualidad, que satisfecha el día del vencimiento, valdrá *a*.

Luego todo lo que ha recibido el prestador al cumplirse el plazo de amortización, será:

$$a\,(1+r)^{t-1}+a\,(1+r)^{t-2}+a\,(1+r)^{t-3}+\ldots+a=$$
$$=\frac{a\,(1+r)^{t-1}\,(1+r)-1}{r}=\frac{a\,[(1+r)^{t}-1]}{r}$$

y como el capital que ha entregado el prestador se convierte al mismo tiempo en:

$$c\,(1+r)^{t}$$

ha de verificarse la igualdad:

$$a\,(1+r)^{t}=\frac{a\,[(1+r)^{t}-1]}{r}$$

de donde

$$a=\frac{c\,r\,(1+r)^{t}}{(1+r)^{t}-1}$$

Si en esta forma determinamos el valor de $(1+r)^t$, que llamaremos p, y aplicamos logaritmos, se transforma en:

$$\log.\,a=\log.\,c+\log.\,r+\log.\,p-\log.\,(p-1)$$

APENDICE

I.—Coordinatoria

COORDINACIONES.—*Reciben el nombre de coordinaciones, los diferentes grupos que pueden formarse con varios objetos, constando de igual número de éstos, y diferenciándose un grupo de otro en algún objeto o por el orden en que estén colocados.*

Así, por ejemplo:

$$a\,b\,c \qquad 3\,2\,5\,6 \qquad b\,3\,a\,9$$

son tres grupos que representan otras tantas coordinaciones.

Cada uno de los objetos, letras o números que entran en una coordinación, se le llama *elemento*.

Las coordinaciones se denominan *binarias, ternarias*, etc., según sean dos, tres, etc., los elementos que entran en su formación.

Así, por ejemplo, tratándose de las cuatro letras

$$a\,b\,c\,d$$

una coordinación binaria sería la $a\,b$, distinta de la $a\,c$, porque tienen una letra diferente; una coordinación ternaria sería la $a\,b\,c$, distinta de la $a\,c\,b$, porque es otro el orden en que están colocados sus elementos.

Grado de una coordinación es el número de elementos de que consta. Los grupos de uno, dos, tres, etc., elementos se dice que son de primer grado, de segundo, etc.

Formación y número de las coordinaciones.—La definición que se ha dado nos indica el medio de obtener todas las coordinaciones del grado n que pueden formarse con m elementos, que es como a continuación se manifiesta:

Sean en número m las letras

$$a, b, c, d. \; . \; . \; . \; .$$

las coordinaciones de primer grado que podrán formarse con ellas serán estas mismas letras, es decir, su mismo número, m.

Para formar las coordinaciones de segundo grado, se colocan a continuación de cada letra cada una de las restantes, como sigue:

$$\begin{array}{llll}
a\,b & a\,c & a\,d & a\,e\ldots\ldots \\
b\,a & b\,c & b\,d & b\,e\ldots\ldots \\
c\,a & c\,b & c\,d & c\,e\ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

de modo que cada fila contiene $m - 1$ coordinaciones binarias que comienzan por una misma letra, y hay m filas, luego el número de coordinaciones binarias que se pueden formar será $m\,(m - 1)$.

Formaremos las coordinaciones de tercer grado, escribiendo a la derecha de cada binaria cada una de las $m - 2$ letras que no contenga; así:

$$\begin{array}{lll} abc & abd & abe\ldots\ldots \\ acb & acd & ace\ldots\ldots \\ adb & adc & ade\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

luego cada una de las coordinaciones binarias nos dará $m - 2$ ternarias y el total de éstas será:

$$m(m-1) \text{ binarias} \times (m-2) = m(m-1)(m-2)$$

Siguiendo de igual modo el razonamiento, veríamos que el número de coordinaciones cuaternarias es

$$m(m-1)(m-2)(m-3)$$

y continuando de este modo se observará que por cada nuevo elemento que entre en las coordinaciones la expresión del número de éstas constará de un factor más: su anterior disminuído en una unidad. Luego el número de coordinaciones del grado n que se pueden formar, será un producto de n factores desde m el primero hasta el último

$$m - (n-1) = m - n + 1$$

de modo que su número total estará representado así:

$$m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)$$

lo que manifiesta que *el número de coordinaciones de* m *elementos tomados de* n *a* n *es igual al producto de* n *factores consecutivos y decrecientes de la serie numérica, empezando por* m.

Permutaciones.—*Se llaman permutaciones de* m *objetos, los diversos grupos que se pueden formar con todos* *ellos, los cuales se diferencian solamente en el orden en que están colocados.*

Así, por ejemplo, tratándose de los objetos

$$a, b, c, d$$

las permutaciones distintas serían los grupos

$$a\,b\,c\,d \qquad c\,d\,a\,b$$

Formación y número de las permutaciones.—Con una letra solamente puede formarse una permutación.

Con dos letras, a y b, pueden formarse la $a\,b$ y la $b\,a$, es decir, $1 \times 2 = 2$.

Con tres letras, a, b, c, pueden formarse las permutaciones escribiendo a continuación de cada letra las permutaciones de las otras dos, o sean las siguientes:

$$\begin{array}{ll} a\,b\,c & a\,c\,b \\ b\,a\,c & b\,c\,a \\ c\,a\,b & c\,b\,a \end{array}$$

de modo que siendo 1×2 el número de permutaciones posibles con dos elementos, el número de las que se podrán formar con 3 de éstos será $1 \times 2 \times 3 = 6$.

Con cuatro letras $a\,b\,c\,d$ se forman las permutaciones escribiendo detrás de cada letra cada una de las permutaciones de las otras tres, y como el número de permutaciones con 3 elementos es $1 \times 2 \times 3$, con cuatro elementos se formarán $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

En general, con n elementos podríamos formar

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots \times n$$

permutaciones.

Observación.—Como se desprende de la definición que se ha dado de las permutaciones, resulta que éstas no son otra cosa sino coordinaciones con todos los objetos, lo que nos permite obtener el número de permutaciones por la fórmula de las coordinaciones, siempre que en ella hagamos $m = n$, que nos dará por resultado:

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots 1$$

e invirtiendo los factores, se tendrá:

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n$$

Combinaciones.—*Llámanse combinaciones de* m *objetos, los diversos grupos que pueden formarse, tomándolos dos a dos, tres a tres, etc., y que se diferencian en uno o más objetos.*

Así, por ejemplo, las combinaciones de las letras

$$a \quad b \quad c \quad d$$

formando los grupos

$$abc \quad abd \quad acd\ldots\ldots etc.$$

lo son formadas tomados tres a tres sus elementos.

Formación y número de las combinaciones.—Para formar las combinaciones binarias posibles con las letras

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e$$

se escriben a continuación de cada letra cada una de las que le siguen, de este modo:

ab	ac	ad	ac
	bc	bd	$be\ldots$
		cd	$ce\ldots\ldots$
			$de\ldots\ldots$

Para formar las combinaciones ternarias, se escribe a continuación de la primera letra las combinaciones binarias de las letras que la siguen *b, c, d, e;* a continuación de la letra *b,* las combinaciones binarias de las letras *c, d, e...,* y así sucesivamente, resultando las

a b c	*a b d*	*a b c*
	a c d	*a c e*
		a d e
	b c d	*b c e*
		b d e
		c d e

De la misma manera se formarían las combinaciones cuaternarias, escribiendo al lado de cada letra las combinaciones ternarias de las letras siguientes.

Para calcular el número de combinaciones observemos que todas las permutaciones que se pueden formar con determinado número de elementos forman una sola combinación, y en su consecuencia, las coordinaciones de m letras tomadas de n a n, contienen a cada combinación de n elementos tantas veces como permutaciones se puedan formar con las n letras de la misma combinación; luego *el número de combinaciones que pueden formarse con* m *elementos tomados* n *a* n, *es el cociente que resulta de dividir el número de coordinaciones de igual grado por el de permutaciones de* n *elementos.*

Así, el número estará expresado por

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times .\,.\,.\,.\,.\,\times n}$$

El número de combinaciones binarias será

$$\frac{m\,(m-1)}{1 \times 2}$$

el de las combinaciones ternarias

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

I.—Fórmula del binomio de Newton

Leyes del producto $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)$. . . . . —Si multiplicamos el binomio $(x+a)$ por el binomio $(x+b)$, tendremos:

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ +b \end{matrix}\right| x + a\,b$$

Si multiplicamos los tres factores binomios $(x+a)$ $(x+b)\,(x+c)$, se obtiene:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + \left.\begin{matrix} a \\ +b \\ +c \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a\,b \\ +a\,c \\ +b\,c \end{matrix}\right| x + a\,b\,c$$

Si multiplicamos los cuatro factores binomios $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$, se obtendrá el siguiente producto:

$$x^4 + \left.\begin{matrix} a \\ +b \\ +c \\ +d \\ \\ \\ \end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix} a\,b \\ +a\,c \\ +a\,d \\ +b\,c \\ +b\,d \\ +c\,d \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a\,b\,c \\ +a\,b\,d \\ +a\,c\,d \\ +b\,c\,d \\ \\ \\ \end{matrix}\right| x + a\,b\,c\,d$$

Examinando los productos obtenidos, vemos que los polinomios están ordenados con respecto a la letra x, que es el término común de los factores binomios, y sujetos a las siguientes leyes:

Cada producto consta de un término más que factores binomios lo han producido.

El exponente de x *en el primer término de cada producto es el número de factores binomios y que disminuye en una unidad en cada término de los sucesivos, hasta que se reduce a cero en el último.*

El coeficiente del primer término es la unidad; el del segundo, la suma de los segundos términos de los binomios; el del tercero, la suma de sus productos binarios; el del cuarto, es la suma de los productos ternarios de dichos términos, y así sucesivamente hasta el último término, que en cada polinomio es el producto de todos los segundos términos de los factores binomios.

Vamos ahora a demostrar que estas leyes son generales, cualquiera que sea el número de factores binomios de la forma

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) \ldots\ldots (x + q)$$

y para ello admitamos que las leyes enunciadas se verifican, siendo m el número de factores, y probaremos que igualmente se verificarán cuando sean $m + 1$ los factores.

Representemos el producto de los m factores binomios anteriormente citados por el polinomio

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} + \ldots + Q$$

en el que

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + \ldots \\ B &= ab + ac + bc + \ldots \\ C &= abc + abd + acd \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q &= abcd\ldots \end{aligned}$$

Si multiplicamos dicho polinomio por un nuevo binomio $x + t$, se tendrá la operación indicada:

$$(x^{m} + A\, x^{m-1} + B\, x^{m-2} + C\, x^{m-3} + \dots + Q)\,(x + t)$$

y el producto será:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^{m-1} + A & x^{m} + B & x^{m-1} + C & x^{m-2} + \dots \\ \phantom{x^{m-1}} + t & \phantom{x^{m}} + t\,A & \phantom{x^{m-1}} + t\,C & \phantom{x^{m-2}} + \dots + t\,Q \end{array}$$

en el que se observan las mismas leyes establecidas, pues consta de $m + 2$ términos; el exponente de x en el primer término es $x + 1$, esto es, el número de factores binomios y que va disminuyendo una unidad en los términos sucesivos, hasta llegar al último, que es término independiente de x.

El coeficiente del primer término también es la unidad, como en los productos que se obtuvieron antes.

El coeficiente del segundo término es $A + t$, y como A expresa la suma de los segundos términos de los m binomios, $A + t$ expresará la suma de los segundos términos de los $m + 1$ binomios.

El coeficiente del tercer término es $B + t\,A$, y como B es la suma de los productos binarios de los últimos términos de los m factores y $t\,A$ es la suma de estos términos por t, resulta, pues, que $B + t\,A$ es la suma de todos los productos binarios que se pueden formar con los segundos términos de los $m + 1$ factores binomios.

El coeficiente del cuarto término es $C + t\,B$, y teniendo en cuenta que B es la suma de los productos ternarios formados con los segundos términos de los m factores y además $t\,B$ es la suma de los productos binarios de dichos términos por t, resulta de aquí que

C + t B es la suma de los productos ternarios de los segundos términos de los $m + 1$ binomios.

Y continuando el razonamiento que hemos seguido, veríamos seguían las leyes expuestas en los términos sucesivos, hasta llegar al último t Q, que es el producto de los segundos términos de los $m + 1$ binomios.

Ha quedado, pues, demostrado que las leyes expuestas son igualmente aplicables al producto de dos, de tres ... de m, de $m + 1$ factores de la forma $(x + a)$ $(x + b)$ $(x + c)$ ... $(x + q)$.

Fórmula del binomio.—Como las cantidades a, b, c, d, ... q, segundos términos de los factores binomios de los productos que venimos estudiando, pueden tomar valores cualesquiera, si suponemos que son iguales entre sí, el producto de los m factores.

$$(x + a)(x + b)(x + c) \dots (x + q) = (x + a)(x + a) \dots =$$
$$= (x + a)^m$$

Veamos ahora cuál será el producto efectuado.

El primer término es x^m.

El coeficiente del segundo término será:

$$A = a + a + a + \dots = m\,a$$

El coeficiente del tercer término

$$B = a^2 + a^2 + a^2 + \dots$$

entrando a^2 tantas veces como combinaciones binarias se pueden formar con m letras, se tendrá:

$$B = \frac{m\,(m - 1)}{1 + 2}\,a^2$$

El coeficiente del cuarto término

$$C = a^3 + a^3 + a^3 + \dots + a^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1+2+3} a^3$$

y del mismo modo se hallarían los coeficientes de los demás términos, siendo el último

$$Q = a\,a\,a \dots = a^m$$

De modo que según queda expuesto, la igualdad

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+q) = x^m + A\,x^{m-1} + \\ + B\,x^{m-2} + C\,x^{m-3} + \dots + Q$$

se transforma haciendo los segundos términos iguales a a en

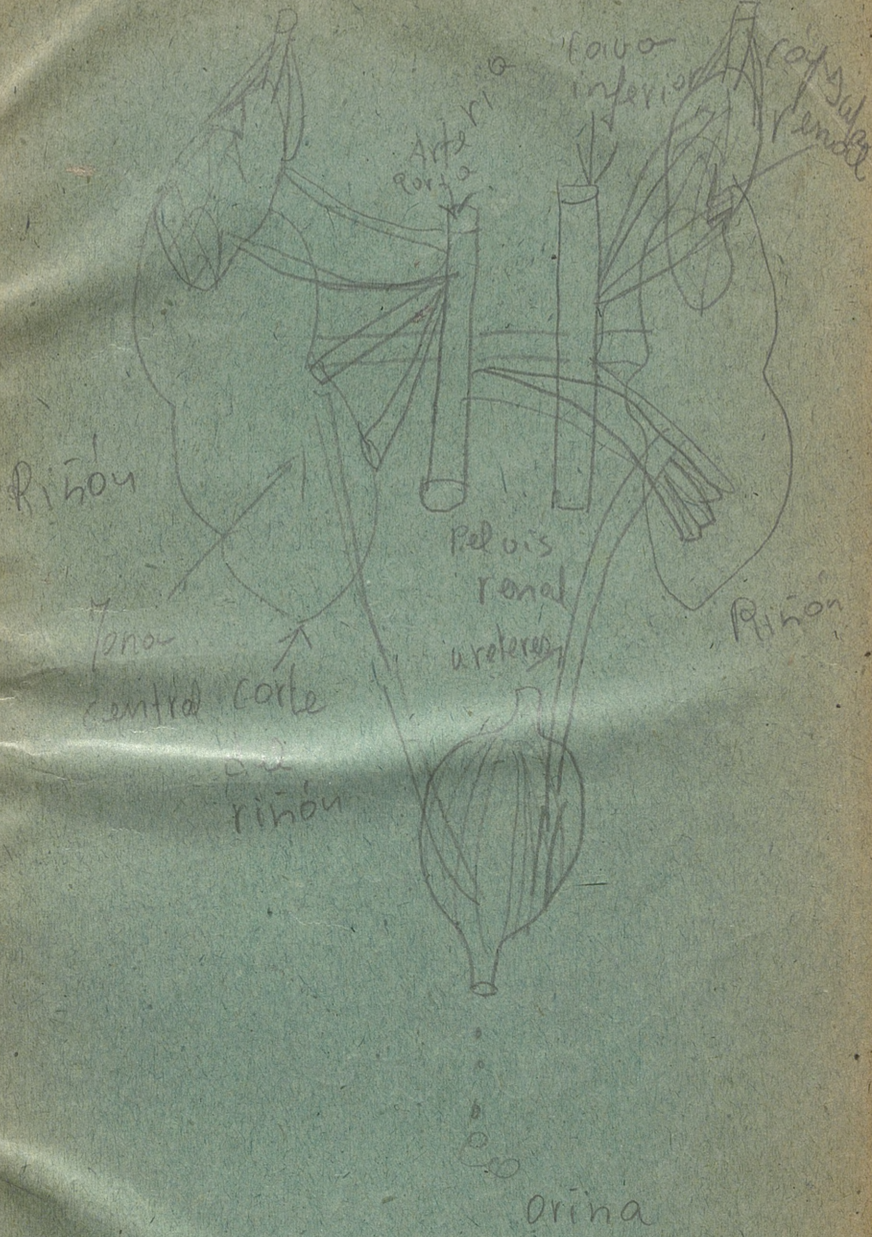
$$(x+a)^m = x^m + m\,a\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \dots + \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^n + m - n + a^m$$

la misma fórmula que obtuvimos en otro lugar (96) de esta obra.

839

Erratas que se han advertido

PÁG.	LÍNEA	DICE	DEBE DECIR
36	13	$-3\ ab^2$	$-2\ a\ b^2$
48	6	$a^m \times^n$	$a^m \times a^n$
104	7	$\left\{\begin{matrix} 4\ x^3 \\ -5\ a^3 \end{matrix}\right.$	$\begin{matrix} -4\ x^3 \\ +5\ a^3 \end{matrix}$
261	12	a^n	a_n
262	20	$\frac{(2187 \times 3)\ 9}{2}$	$\frac{(2187 \times 3) - 9}{2}$



Arteria aorta
Cava inferior
capsula renal
Riñon
Pelvis renal
ureteres
Riñon
Zona central
corte del riñon
orina

1º Grupo

huesos de la cabeza

Craneo y cara

Función del encéfalo

Esquema del corazón

Esquema de aparato urinario.

~~Respiración interna~~

etc

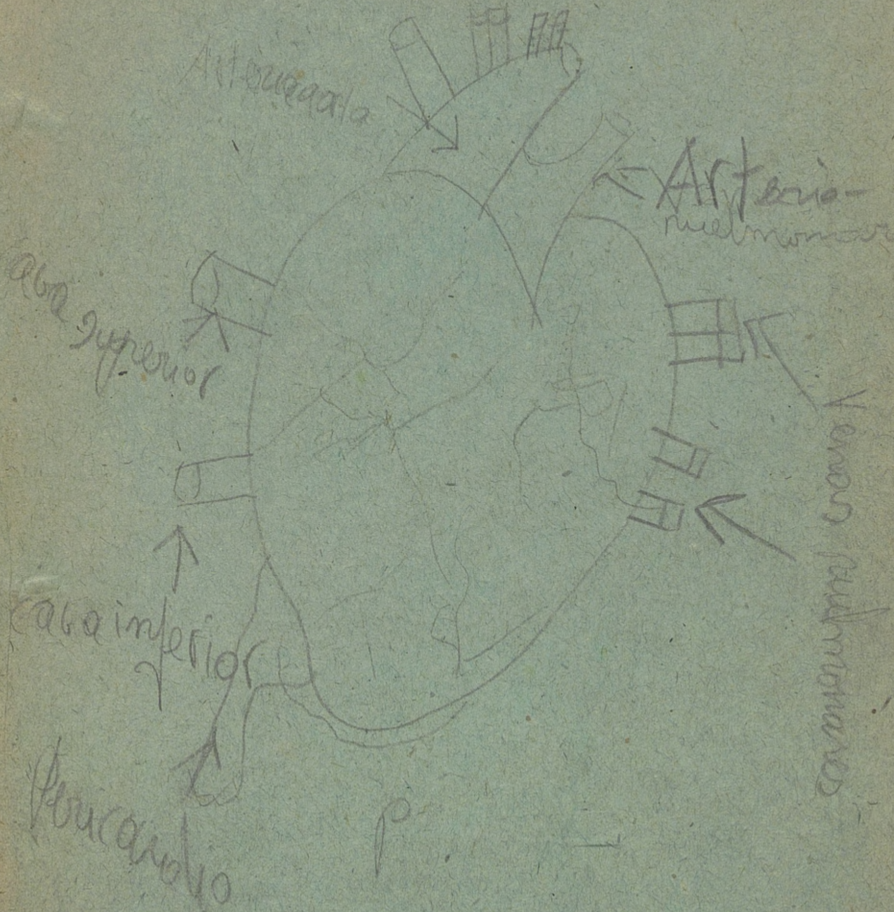
Esquema del ojo

Circulación mayor y menor Esquema

Huesos del cuerpo

la médula funciones

funciones del aparato digestivo



Arteria
caba superior
caba inferior
Pericardio