(c) Institu[illegible]ervantes de Madrid

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$$a+b-c\ d = a+b-c+a+b-c$$
$$= ad+bd-cd$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

(c) Instituto Cervantes de Madrid

511
SAN
F.A.56

LECCIONES

DE

ARITMÉTICA

(c) Instituto Cervantes de Madrid

BIBLIOTECA

(c) Instituto Cervantes de Madrid

10-3, 2+y x. de los divisores de un nº. pg. 99, nº 90, 1º nº 89.

LECCIONES

DE

ARITMÉTICA

R-
R. 21317

POR

BERNARDINO SÁNCHEZ VIDAL

AUMENTADAS Y CORRREGIDAS

POR

ALFREDO SÁNCHEZ BENITO

Ayudante de Obras públicas.

SEXTA EDICIÓN

MADRID

LIBRERÍA DE LA VIUDA DE HERNANDO Y C.ª

calle del Arenal, núm. 11.

—

1893

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIONES

DE

ARITMÉTICA

Es propiedad de los herederos del autor; queda hecho el depósito que marca la ley.

517

Imprenta de la Viuda de Hernando y C.ª, calle de Ferraz, núm. 13.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

21517

ADVERTENCIAS

Al publicar esta nueva edición de la ARITMÉTICA, hemos procurado corregir, con detenimiento, los errores de imprenta de que adolecían las ediciones anteriores; hemos aclarado algunas demostraciones que presentaban alguna confusión á los principiantes, y añadido algunos teoremas de poca importancia, pero que se piden en algunos programas oficiales.

Con el objeto de que esta obra pueda ser útil á los que estudian en los Institutos y Colegios privados, están señalados con un asterisco los párrafos de que puede prescindir ó pasar por alto el alumno de Segunda enseñanza; quedando de este modo un Tratado de Aritmética con la extensión que ordinariamente se da á esta asignatura en los referidos Institutos y Colegios.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

(c) Instituto Cervantes de Madrid

INDICE

PRIMERA PARTE

DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Págs.

LECCIÓN PRIMERA.—INTRODUCCIÓN; página 1.—ARITMÉTICA; 3.—Formación de los números; 3.—NUMERACIÓN; 4.—Numeración oral; 4.—Numeración escrita; 5..... 1

LECCIÓN II.—Adición de números abstractos; 9.—Sustracción de los números abstractos; 11.—Complemento aritmético y resta por medio del complemento; 14.—Alteraciones que experimentan los resultados de la adición y sustracción según las que sufren sus términos; 15.—Pruebas de la adición y sustracción; 16..... 9

LECCIÓN III.—Multiplicación de números abstractos; 17.—Propiedades importantes de la multiplicación; 23..... 17

LECCIÓN IV.—División de números abstractos..... 24

LECCIÓN V.—Operaciones fundamentales con los números concretos; 31.—Aplicación de las cuatro operaciones á la resolución de problemas; 32.—Problemas; 33..... 31

SEGUNDA PARTE

PROPIEDADES GENERALES DE LOS NÚMEROS

LECCIÓN VI.—Modo de representar los números en general; 35.—Idea de los límites y generalización de las definiciones; 37.—Cálculo de los números representados por letras; 40... 35

LECCIÓN VII.—Alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicación y división, según las que sufren los datos; 48.—Abreviaciones que pueden hacerse en la multiplicación y división; 57..... 48

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Págs.

LECCIÓN VIII.—Divisibilidad; 60.—Definiciones; 60.—Principios en que se funda la divisibilidad de los números; 61..... 60

LECCIÓN IX.—Caracteres de divisibilidad de un número por 2, 5, 4, 25, 8 y 125; 66.—Caracteres de divisibilidad de un número por 3 ó 9; 67.—Caracteres de divisibilidad de un número por 11; 69..... 66

LECCIÓN X.—Método general para conocer cuándo un número es divisible por otro. Aplicación álos números 7, 13 y 37; 71.—Medio de hallar el resto de la división de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conoce, sin hacer la división; 74.—Prueba de la multiplicación por nueve; 65..... 71

LECCIÓN XI.—Máximo común divisor de dos números; 76.—Máximo común divisor de varios números; 78.—Observaciones; 80..... 76

LECCIÓN XII.—Principios relativos al máximo común divisor; 82.—Límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigación del *m. c. d.* de dos números; 84..... 82

LECCIÓN XIII.—Mínimo común múltiplo de dos números; 87.—Mínimo común múltiplo de varios números; 89.—Principios relativos al mínimo común múltiplo; 91..... 87

LECCIÓN XIV.—Números primos; 94.—Investigación de los mismos hasta un límite dado por la criba de Eratóstenes; 94.—Principios relativos á los números primos; 97..... 94

LECCIÓN XV.—Investigación de los factores simples y compuestos de un número; 102.—Investigación del máximo común divisor por la descomposición en factores primos y simplificación del método ordinario; 108.—Investigación del mínimo común múltiplo por la descomposición en factores primos; 110..... 102

TERCERA PARTE

DE LOS NÚMEROS QUEBRADOS, MIXTOS Y FRACCIONES DECIMALES

De los números quebrados y mixtos.

LECCIÓN XVI.—Origen de los quebrados; 113.—Alteraciones que experimentan los quebrados según las que sufren sus términos por vía de multiplicación ó división; 116. Simplificación de quebrados; 118.—Reducción de quebrados á un común denominador; 120..... 113

LECCIÓN XVII.—Alteraciones que sufre un quebrado cuando á sus dos términos se les agrega ó disminuye un mismo número; 122.—Sumar quebrados, un entero con un quebrado y

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Págs.

números mixtos; 125.—Restar quebrados, de un entero un quebrado y números mixtos; 127..... 122
LECCIÓN XVIII.—Multiplicación de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos; 129.—División de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos; 133..... 129
LECCIÓN XIX.—Productos de varios quebrados; 136.—Quebrados de quebrados; 138.—Reducción de quebrados á otros que tengan un denominador dado; 138.—Generalización de la teoría de quebrados; 139..... 136

De las fracciones decimales.

LECCIÓN XX.—Fracciones decimales, su numeración; 144.—Alteraciones que experimenta una decimal cuando se ponen ó quitan ceros á su derecha, y cuando se corre la coma á la derecha ó izquierda; 146.—Adición de fracciones decimales; 147.—Sustracción de fracciones decimales; 147.—Multiplicación de fracciones decimales; 148.—División de fracciones decimales; 150..... 144
LECCIÓN XXI.—Reducción de quebrados á fracciones decimales; 152..... 152
LECCIÓN XXII.—Reducción de decimales á quebrados ordinarios; 158..... 158
LECCIÓN XXII (*bis*).—Fracciones continuas; 166.—Regla para convertir una fracción ordinaria en fracción continua; 167.—Formación de las reducidas de una fracción continua; 171.. 166
LECCIÓN XXIII.—Propiedades más importantes de las reducidas; 175.—Modo de hallar una reducida cuyo valor se diferencie de la fracción continua total en menos de $\frac{1}{\delta}$; 178... 175

CUARTA PARTE

NÚMEROS COMPLEJOS Y SISTEMA MÉTRICO

Números complejos.

LECCIÓN XXIV.—Sistema antiguo de pesas y medidas más principales de España; 181.—Reducción de unidades de una especie cualquiera á otras de especie superior ó inferior; 184. 181
LECCIÓN XXV.—Reducción de quebrados á números complejos de especie inferior ó valuación de quebrados; 187.—Reducción de unidades de especie inferior á números comple-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Págs.

jos; 189.—Reducción de números complejos á incomplejos; 190.—Adición de los números complejos; 191.—Sustracción de los números complejos; 191..... 187
LECCIÓN XXVI.—Multiplicación de números complejos; 193. División de complejos; 196..... 193

Sistema métrico.

LECCIÓN XXVII.—Unidades principales del sistema métrico; sus múltiplos y divisores; 197..... 197
LECCIÓN XXVIII.—Reducción de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior; 203.—Reducción de números métricos complejos á incomplejos; 204.—Reducción de números métricos incomplejos á complejos; 205.—Cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos; 206..... 203
LECCIÓN XXIX.—Relaciones entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y las del sistema nuevo métrico decimal; 209.—Relaciones entre las unidades del nuevo sistema métrico decimal y las del antiguo sistema de pesas y medidas; 211.—Reducción de unidades del sistema antiguo de pesas y medidas á unidades métricas, y al contrario; 213. 209

QUINTA PARTE

POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS NÚMEROS

LECCIÓN XXX.—Potencias en general de los números; 215... 215
LECCIÓN XXXI.—Formación del cuadrado de los números enteros; 222.—Extracción de la raíz cuadrada de los números enteros; 224..... 222
LECCIÓN XXXII.—Extracción de la raíz cuadrada de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad; 231.—Extracción de la raíz cuadrada de una decimal; 233.—Extracción de la raíz cuadrada de un quebrado; 234..... 231
LECCIÓN XXXIII.—Formación del cubo de los números enteros; 236.—Extracción de la raíz cúbica de los números enteros; 237..... 236
LECCIÓN XXXIV.—Extracción de la raíz cúbica de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad; 243.—Extracción de la raíz cúbica de una decimal; 245.—Extracción de la raíz cúbica de un quebrado; 246..... 243

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Págs.

LECCIÓN XXXV.—De las raíces en general; 248.—Cálculo de los radicales numéricos; 251..... 248

SEXTA PARTE

NÚMEROS INCONMENSURABLES.—TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES

LECCIÓN XXXVI.—Cálculo de los números inconmensurables; 252.—TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES; 259.—Adición de números aproximados; 259.—Sustracción de números aproximados; 261..... 257
LECCIÓN XXXVII.—Multiplicación de números aproximados. 262
LECCIÓN XXXVIII.—División de números aproximados; 268. 268

SÉPTIMA PARTE

RAZONES, PROPORCIONES Y PROBLEMAS QUE DE ELLAS DEPENDEN

LECCIÓN XXXIX.—RAZONES; 273.—PROPORCIONES; 275.—Equidiferencias; 276.—Proporciones aritméticas continuas; 277.—Proporciones geométricas; 278.—Proporciones geométricas continuas; 279.—Proporciones armónicas; 279..... 273
LECCIÓN XL.—Propiedades importantes de las proporciones. 281
LECCIÓN XLI.—Serie de razones iguales; 287.—De las medianas; 289..... 287
LECCIÓN XLII.—Cantidades proporcionales; 291.—Regla de tres simple; 295.—Regla de tres compuesta; 299..... 294
LECCIÓN XLIII.—Regla de interés; 304.—Regla de descuento; 305..... 301
LECCIÓN XLIV.—Regla de sociedad; 307.—Regla de aligación; 310.—Regla conjunta; 313..... 307
LECCIÓN XLV.—Regla de falsa posición; 315..... 315

OCTAVA PARTE

PROGRESIONES Y LOGARITMOS

Progresiones.

LECCIÓN XLVI.—Progresiones por diferencia. Expresiones del término general y de la suma de los *n* primeros términos de una progresión; 320.—Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos diferenciales; 325..... 320

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Págs.

LECCIÓN XLVII.—Progresiones por cociente. Expresión del término general, del producto de los *n* primeros términos de una progresión y de su suma; 329.—Interpolar entre dos números dados cierto número de términos proporcionales; 332.—Progresiones geométricas decrecientes prolongadas indefinidamente; límite de la suma de todos sus términos; 336..... 329

Logaritmos.

LECCIÓN XLVIII.—Definición de los logaritmos; 338.—Propiedades fundamentales de los logaritmos; 344..... 338

LECCIÓN XLIX.—Módulos de los logaritmos. Diferentes sistemas de logaritmos según sus módulos. Sistema *neperiano;* 348.—Base de un sistema de logaritmos. Diferentes sistemas considerados según sus bases; 350.—Sistema de logaritmos vulgares llamados de *Briggs;* 352.—Construcción de las tablas de los logaritmos vulgares; 355..... 348

LECCIÓN L.—Disposición de las tablas de la Lalande; 357.—Dado un número cualquiera, hallar su logaritmo; 358.—Dado el logaritmo de un número, hallar este número; 361..... 357

LECCIÓN LI.—Complemento aritmético: uso que de él se hace en el cálculo logarítmico, 363.—Cálculo logarítmico; 364.—Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos; 367..... 363

APÉNDICE

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

LECCIÓN PRIMERA.—Teoría de los diferentes sistemas de numeración; 369.—Sistema duodecimal; 371.—Traducción de un número entero escrito en un sistema de base B á otro sistema de base B′; 373..... 369

LECCIÓN II.—Cálculo de los números enteros escritos en un sistema cualquiera; 375.—Fracciones en un sistema cualquiera, análogas á las decimales del sistema ordinario; 378. 375

LECCIÓN III.—Divisibilidad en un sistema cualquiera; 380.—Aplicación de la teoría de los diferentes sistemas de numeración; 382.—Comparación entre los sistemas de numeración decimal y duodecimal; 383..... 380

LECCIÓN IV.—Método abreviado de la multiplicación; 385.—Método abreviado de la división; 387.—Método abreviado de la raíz cuadrada y cúbica; 390..... 385

FIN DEL ÍNDICE

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIONES DE ARITMÉTICA

PRIMERA PARTE

DE LOS NÚMEROS ENTEROS

LECCIÓN PRIMERA

INTRODUCCIÓN.—ARITMÉTICA.—Formación de los números.—NUMERACIÓN.—Numeración hablada.—Numeración escrita.

INTRODUCCIÓN

1. Se da el nombre de MATEMÁTICAS *á la ciencia que tiene por objeto el estudio de la cantidad en general.*

2. MAGNITUD Ó CANTIDAD *es todo lo que puede sufrir aumento ó disminución.* Bajo este punto de vista, cuanto existe en el universo es cantidad; porque todo es susceptible de ser aumentado ó disminuído, ya sea físicamente, ya porque nuestra imaginación conciba la posibilidad de este aumento ó disminución.

La cantidad se divide en CONTINUA Y DISCONTINUA: *cantidad continua es aquella que puede aumentar ó disminuir por partes tan pequeñas como queramos:* el tiempo, la longitud, etc., son cantidades continuas. *Discontinua es la que no puede aumentar ó disminuir de este modo:* una reunión de hombres, una colección de libros, etcétera, son cantidades discontinuas, puesto que el aumento ó disminución tiene que ser, por lo menos, en un hombre ó en un libro.

Para formarnos una idea exacta de la cantidad, *es necesario que la comparemos con otra conocida de igual especie;* porque un objeto

(c) Instituto Cervantes de Madrid

considerado en sí mismo, no puede decirse que sea grande ó pequeño: la idea de la magnitud de una cosa no puede formarse sino con relación á otra de la misma especie que conozcamos: de este modo se comprende cómo un objeto cualquiera puede ser grande y pequeño, comparándole sucesivamente con otros dos que sean respectivamente menor y mayor que el propuesto.

Como todas las cantidades no admiten esta comparación, de aquí que no de todas podamos formarnos una idea exacta: de estas cantidades no se ocupan las Matemáticas. La condición á que debe satisfacer una cantidad para que corresponda al estudio de esta ciencia es que sea *comparable*, es decir, *medible;* y para que una cantidad se pueda medir, es necesario *que suponiendo conocida una cantidad cualquiera, podamos venir en conocimiento de otra que sea respecto de ella el doble, triple*, etc.; *mitad, tercera parte*, etc. El dolor, por ejemplo, es cantidad, puesto que es susceptible de aumento y disminución; pero no se puede comparar con otro, luego no se puede medir; por eso no corresponde su estudio á las Matemáticas.

3. De la comparación de una cantidad con otra resulta lo que en Matemáticas se llama RAZÓN Ó RELACIÓN; y esta razón ó relación toma el nombre de NÚMERO cuando se trata de averiguar las veces que la cantidad conocida que sirve de término de comparación, considerada como UNIDAD, está contenida en aquella que se compara: de aquí resulta que UNIDAD *es la cantidad que sirve de término de comparación á todas las de su especie, y* NÚMERO *el resultado de esta comparación.*

La unidad se puede elegir á nuestro arbitrio cuando corresponde á cantidades continuas, como en el tiempo, que puede ser el año, el mes, el día, etc.: y está determinada por la naturaleza, si corresponde á cantidades discontinuas, como en una colección de libros, que no podrá ser otra sino el libro.

4. Siendo el número lo que resulta de la comparación de una cantidad con su unidad (3), podrá suceder: 1.°, que la unidad esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, lo que nos da el *número entero;* 2.°, que no llegue á contener ni una vez á la unidad, en cuyo caso se apreciará esta cantidad dividiendo la unidad en un número tal de partes iguales, que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; y la relación que hay entre el número de partes en que se ha dividido la unidad y el que expresa las que de éstas contiene la cantidad, forma lo que se llama el número *quebrado ó fracción;* 3.°, que además de contener la cantidad un cierto número de veces á la unidad,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

quede una parte menor que ella, la que, apreciada del modo que hemos dicho anteriormente, nos dará un número compuesto de un entero y quebrado, que se llama *número mixto;* el número mixto toma el nombre de *fraccionario* cuando dividiendo cada unidad del entero en tantas partes como se dividió para apreciar el quebrado, y reuniendo todas estas partes, se escribe bajo la forma de quebrado; 4.°, que ni la unidad ni ninguna de las partes en que se divida, esté contenida exactamente en la cantidad que se ha de medir; en cuyo caso, dicha cantidad no se puede apreciar exactamente con aquella unidad, obteniendo lo que se llama número *inconmensurable.*

De lo dicho resulta que el número puede ser *entero, quebrado, mixto é inconmensurable.* ENTERO *es el que consta de una ó varias unidades;* QUEBRADO *es el que no llega á valer la unidad, y sólo consta de parte ó partes iguales de la misma;* MIXTO *el que se compone de entero y quebrado; é* INCONMENSURABLE *el que proviene de la comparación de una cantidad con su unidad, y ni ésta ni cualquiera de las partes iguales en que se puede dividir está contenida exactamente en aquélla.*

Si el número expresa de qué son sus unidades, se llama *concreto;* y si no lo expresa, *abstracto.* Los números concretos de una misma especie se llaman *homogéneos,* y los de especies distintas *heterogéneos.* Además toma el número otras denominaciones particulares que ya iremos dando á conocer.

ARITMÉTICA

5. La parte de las Matemáticas que trata de los números se llama ARITMÉTICA, y se ocupa: 1.°, de la formación de los mismos; 2.°, de su numeración ó modo de expresarlos; 3.°, de su cálculo; 4.°, de sus propiedades; 5.°, de la resolución de los problemas que á ellos se refieren.

Formación de los números.

6. De la definición de los números enteros (4) se deduce que si á uno cualquiera se le aumenta una unidad, se obtiene el número siguiente. De aquí que la *serie natural de los números enteros es ilimitada;* pues por muy grande que sea uno de estos números, agregándole una unidad se obtendrá otro mayor.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

NUMERACIÓN

7. *Numeración es la parte de la Aritmética que trata de expresar los números con pocas voces y pocas cifras ó guarismos.* La reunión de voces y cifras con que se expresan los números se llama *sistema de numeración*, y *base* del mismo es el número de cifras de que consta dicho sistema.

La numeración puede ser *oral* y *escrita;* oral es la que expresa los números con pocas voces, y escrita la que los representa con pocas cifras.

Numeración oral.

8. La unidad considerada como número se llama *uno;* uno y uno se expresa con la palabre *dos*, y por el aumento sucesivo de la unidad se van engendrando los números *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho*, *nueve* y *diez*.

La reunión de diez unidades se considera como una nueva unidad llamada de *segundo orden* ó *decena;* y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, diciendo: una decena, dos decenas, tres decenas, etc., las que se expresan con los números *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa* y *ciento:* donde vemos que los nombres de los diez primeros números terminados en *enta*, expresan el mismo número de unidades de segundo orden; por ejemplo: *ochenta*, que es el *ocho* terminado en la forma en que se ha dicho, nos indica ocho decenas. Se exceptúan de esta regla *diez*, *veinte* y *ciento*, que, como se ve, corresponden á una, dos y diez decenas, y que no están terminados en *enta*.

Entre cada dos colecciones de decenas hay nueve números, cuyos nombres se forman añadiendo al de la colección inferior los de los nueve primeros; así, los comprendidos entre veinte y treinta serán veinte y uno, veinte y dos, etc. Se exceptúan de esta regla los cinco primeros comprendidos entre diez y veinte, que en su lugar se dice *once*, *doce*, *trece*, *catorce* y *quince*, á partir del cual se sigue la regla general *diez* y *seis*, *diez* y *siete*, etc.

La reunión de *diez* decenas, ó sean *cien* unidades, se considera como una nueva unidad llamada de *tercer orden* ó *centena;* y se cuenta por centenas lo mismo que por unidades, diciendo: *un ciento*, *dos cientos*, etc., hasta *diez cientos,* que se expresan con la palabra *mil*. Estos nombres sufren algunas modificaciones, como *qui-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

nientos, en vez de cinco cientos, *setecientos*, en vez de siete cientos, y *novecientos*, en vez de nueve cientos. Los noventa y nueve números que hay entre cada dos colecciones de centenas se forman añadiendo á la inferior los nombres de los noventa y nueve primeros.

La reunión de *diez centenas* se considera como una nueva unidad llamada de *cuarto orden* ó *millar*, y se cuenta por *millares*, *decenas de millar* y *centenas de millar*, lo mismo que se ha contado por unidades, decenas y centenas simples; dando origen así á otros dos órdenes de unidades, que son las de *quinto* y *sexto*.

La reunión de *diez centenas de millar* compone la unidad de séptimo orden ó millón, de la cual se forman otros seis órdenes, que son *millón*, *decena de millón*, *centena de millón*, *millar de millón*, *decena de millar de millón* y *centena de millar de millón:* que corresponden á los órdenes respectivos *séptimo*, *octavo*, *noveno*, *décimo*, *undécimo* y *duodécimo*.

El conjunto de *diez centenas de millar de millón* forma el *billón* y se cuenta por *billones*, *trillones*, *cuatrillones*, etc., del mismo modo que por millones y unidades simples.

9. De aquí resultan dos clases de unidades: unas que llamaremos *principales*, que son las de *primer orden*, del *séptimo* ó *millones*, del *trece* ó *billones*, del *diez y nueve* ó *trillones*, etc., las cuales se reproducen de seis en seis; y otras *intermedias*, que son las *decenas*, *centenas*, *millares*, *decenas de millar* y *centenas de millar* de cada uno de estos órdenes principales.

Numeración escrita.

10. Escribir con un corto número de signos ó cifras todos los números imaginables es el objeto de la numeración escrita; cosa sumamente fácil, observando que sólo nueve números son los que las necesitan, pues diez de un orden cualquiera componen una unidad del orden superior, según hemos visto ya en la numeración hablada; así, pues, los números *uno*, *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho* y *nueve* se hallan representados por las cifras siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve.*

Con estas cifras se podrá escribir un número cualquiera, poniendo á cada una un *índice* que indique el orden de unidades que representa; pero como esto daría lugar á escribirle poco menos que en letra, no presentarían la ventaja de la sencillez y vendrían ex-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

presados los números en forma poco á propósito para los cálculos que después hemos de hacer con ellos. Por lo tanto, necesitamos buscar el medio de combinar entre sí estas cifras, de tal modo, que, sin necesidad de poner á cada una el índice de que hemos hablado, representen las diferentes clases de unidades de que puede componerse un número cualquiera.

Para conseguir esto, se ha convenido en que cada una de estas cifras tenga dos valores: uno *absoluto*, que es el que representa por su figura, y otro *relativo* al lugar que ocupe; conviniendo, además, en que una cifra escrita á la izquierda de otra exprese unidades del orden inmediato superior al que ésta representa; de donde resulta que el *primer* lugar será para las *unidades simples*, el *segundo* para las *decenas*, el *tercero* para las *centenas*, y así sucesivamente; de manera que si el número que se quiere escribir contiene todos los órdenes de unidades que hay desde el primero hasta el orden superior, no habrá dificultad en escribirle, pues bastará ir colocando las cifras que expresen las unidades de cada especie, unas á continuación de otras, conforme se vayan pronunciando.

Sea, por ejemplo, el número que hemos de escribir *ocho mil cuatrocientos cincuenta y siete millones trescientos sesenta y dos mil ciento noventa y siete.*

Colocando las cifras en el orden que se han pronunciado, obtendremos el número escrito en cifra:

8457362197.

Si el número no contuviese todos los órdenes comprendidos entre el primero y el último, entonces, escribiendo las cifras de los órdenes que tuviese, unas á continuación de otras, no ocuparían sus respectivos lugares, y, por consiguiente, el número no quedaría bien escrito; es necesario, pues, hacer que cada cifra ocupe su verdadero lugar para que queden representados los diferentes órdenes de unidades del número propuesto. Esto se consigue fácilmente con sólo admitir una nueva cifra que no tenga valor absoluto, y únicamente sirva para ocupar los lugares de los órdenes de unidades de que carezca el número, haciendo, por consiguiente, que las demás cifras ocupen su verdadero lugar. Esta cifra es 0, y se llama *cero*.

Sea el número *ochocientos cinco unidades*, el cual quedará escrito así:

805.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; *ochocientos,* son 8 unidades de tercer orden; *cinco unidades,* son 5 de primero; hemos dejado en claro las unidades de segundo orden ó decenas; luego colocando un cero en este lugar, tendremos el número pedido.

De modo que, teniendo cuidado de los órdenes que se dicen y de los que se pasan en silencio, representando los primeros por las cifras que les correspondan y con ceros los segundos, se tendrá el número escrito; y nombrando cada cifra según el orden que ocupe, quedará el número leído en el lenguaje ordinario.

11. Fácil es comprender por lo que llevamos dicho, cuán necesario es para poder escribir un número en cifra, y dado escrito así, leerlo en el lenguaje ordinario, saber á primera vista el lugar que corresponde á cada clase de unidades, y al contrario; pero esto es muy sencillo, atendiendo á la división que hemos hecho de las unidades en principales é intermedias (9): las principales que se reproducen de seis en seis órdenes y que son las *unidades, millones, billones, trillones, cuatrillones,* etc., tienen por lugares respectivos el *uno, siete, trece, diez y nueve, veinte y cinco,* etc., de modo, que el lugar de una cualquiera es igual al de la anterior aumentado en seis; de donde podremos concluir que el lugar de una unidad principal cualquiera es igual á tantas veces seis, como indique el orden de esta misma unidad más uno. Así, el lugar de los cuatrillones es el veinte y cinco; porque el cuatrillón es la cuarta á contar del millón: luego el seis se hallará repetido cuatro veces, lo que da veinte y cuatro, y uno que se añade, veinte y cinco.

Sabiendo de memoria los lugares de estas unidades principales, y el orden de las intermedias, será muy fácil hallar el de un orden cualquiera, pues no habrá más que agregar al orden principal el de la intermedia.

Propongámonos hallar el lugar correspondiente á las *decenas de millar de trillón,* y veremos que, siendo el lugar de los trillones el *diez y nueve,* y el de la decena de millar el *cuarto,* nos dará, reuniendo estos dos números, el lugar *veinte y tres,* que es el de las unidades dadas.

Por el contrario, dado el lugar de un orden, hallar este orden será también muy sencillo: porque ó aquel lugar es uno de los correspondientes á las unidades principales, el cual se deberá saber de memoria, ó está comprendido entre dos, en cuyo caso el inferior nos indicará el orden principal, y el exceso de éste al lugar dado, será el de la intermedia; el lugar veinte y ocho, por ejemplo, le ocupan los millares de cuatrillón, porque siendo el veinte y cinco

(c) Instituto Cervantes de Madrid

el orden de los cuatrillones, y la diferencia de veinte y cinco á veinte y ocho siendo tres, será el orden de la intermedia; y como la tercera unidad intermedia es el millar, se deduce que el lugar veinte y ocho corresponderá á los millares de cuatrillón: del mismo modo se vería que diez y siete son decenas de millar de billón.

Para concluir la numeración falta únicamente deducir las reglas prácticas que se siguen para escribir y leer los números.

Como un orden cualquiera de unidades principales no consta más que de seis órdenes diferentes, se sigue que, sabiendo escribir números de seis cifras, está resuelto el problema de escribir un número cualquiera; porque sólo quedará reducido á escribir los diferentes órdenes principales, teniendo cuidado del orden de éstos, y de que entre cada dos consecutivos haya siempre cinco intermedios. Sea el número *ochenta y tres trillones cuatro cientos siete mil novecientos millones ochocientos mil cuatrocientas siete unidades:* vemos que hay ochenta y tres *trillones*, ningún *billón*, cuatrocientos siete mil novecientos *millones*, y ochocientas mil cuatrocientas siete *unidades;* por lo tanto, el número quedará escrito así:

83.000000,407900.800407.

Si, por el contrario, se hubiera dado para leer el número

7431.030003,200407.000432,

veríamos que, reproduciéndose las principales de seis en seis órdenes, dividiendo este número en períodos de seis cifras, principiando por la derecha, cada una de estas divisiones marcará un orden principal; de modo que leyendo cada uno de estos períodos y dándoles la denominación correspondiente, quedará el número leído: así, el número propuesto será: *siete mil cuatrocientos treinta y un trillones treinta mil tres billones doscientos mil cuatrocientos siete millones cuatrocientos treinta y dos unidades.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN II

Adición de números abstractos.—Sustracción de números abstractos.—Complemento aritmético y resta por medio del complemento.—Alteraciones que experimenta la suma y resta cuando varían los datos.—Pruebas de ambas operaciones.

Adición de números abstractos.

12. *Sumar es reunir varios números en uno solo.* Los números que se dan para sumar se llaman *sumandos*, y el resultado *suma*. El signo de sumar es + que se lee *más* y se escribe entre los sumandos; el resultado se indica con el signo = que se le *igual á*.

En la suma distinguiremos tres casos: 1.°, sumar varios números dígitos, que son los que no tienen más que una cifra; 2.°, varios polidígitos ó de varias cifras, cuyas sumas parciales de sus diferentes órdenes no lleguen á diez, y 3.°, varios polidígitos cualesquiera.

PRIMER CASO. Para sumar números dígitos, basta agregar una por una las unidades de cada cifra al número que vaya resultando, lo que en la práctica se hace agregando desde luego las unidades de cada cifra; esto requiere saber de memoria la tabla de sumar, que, como sabemos, es aquella en que se hallan contenidas las sumas que dan dos cifras cualesquiera (*).

Sean los números que hemos de sumar 5, 4, 7 y 8. Se indicará la operación y resultado así:

$$5 + 4 + 7 + 8 = 24.$$

SEGUNDO CASO. Como la suma ha de ser igual al conjunto de todos los órdenes de los sumandos, si efectuamos todas estas sumas y ponemos cada una de las cifras que las representan en su lugar, tendremos el número pedido.

Sean los números que hemos de sumar 113, 231, 121 y 224; de modo que se tendrá:

$$113 + 231 + 121 + 224 = 689.$$

Cuyo número se ha obtenido sumando primero las unidades, luego las decenas, y, por último, las centenas; y siendo estas sumas respectivas 9, 8 y 6, colocando estas cifras en su lugar corres-

---

(*) No consignamos esta tabla, por ser de todos conocida.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

pondiente, hemos hallado el número 689, que se compone de todas las unidados, decenas y centenas de los sumandos.

13. En la práctica es más cómodo escribir los sumandos uno debajo de los otros de modo que se correspondan las unidades de la misma especie; porque entonces al sumar los diferentes órdenes, no tendremos que atender más que á sumar en columnas verticales; al paso que del otro modo, deberemos ir con mucho cuidado para no sumar unidades de diferentes órdenes. El ejemplo anterior se dispondrá, por lo tanto, así:

113
231
121
224

689

También debemos observar que, en este caso que nos ocupa, podemor principiar á sumar por cualquier orden de unidades, con tal que se sumen todas, y que las sumas parciales se coloquen en sus lugares respectivos.

TERCER CASO. Del mismo modo que en el anterior, se suman todos los órdenes de unidades; pero como las sumas parciales podrán pasar de 9, se necesita más de una cifra para representarlas; de manera que todas, á excepción de la primera de cada suma parcial, expresarán las unidades del orden inmediato superior, á las cuales se deben agregar: luego si sumamos todos estos órdenes de unidades principiando por las de especie inferior, y escribimos sólo la primera cifra de cada suma reservando las decenas de cada especie para agregarlas á la suma parcial siguiente, resultará el número compuesto de todos los órdenes de unidades de los sumandos, que será la suma pedida.

Propongámonos hallar la suma de los números 847, 379, 498, 839 y 235.

Por la razón expuesta en el caso anterior, se dispondrá la operación así:

847
379
498
839
235

2798

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La suma de las unidades halladas según el primer caso, es 38; las 8 unidades las hemos colocado debajo de esta especie, y las 3 decenas las hemos agregado á las decenas, lo que nos ha dado el número 29; escribimos las 9 en su lugar, y las 2 unidades del orden siguiente las sumamos con las centenas, dando por resultado 27, que escribimos en su lugar por no haber más órdenes, con lo cual queda determinada la suma total pedida, 2798.

Si hubiésemos principiado á sumar por las unidades de especie superior, hubiéramos tenido que modificar las cifras de las unidades sumadas ó que hacer otra suma. En efecto; considerando el mismo ejemplo y principiando á sumar por las centenas, obtendremos por primera suma 25, que colocamos en su lugar; la suma de

847
379
498
839
235

2568
23

2798

las decenas es 26; colocando cada una de estas cifras en sus respectivos lugares y haciendo lo mismo con las 38 unidades, observamos que para obtener el resultado final hay que hacer la segunda suma de las 2568 unidades y 23 decenas, lo cual se evita principiando á sumar por la derecha. De lo que podremos deducir la regla general siguiente:

14. *Para sumar números enteros se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya por debajo y se suman respectivamente todos los órdenes de unidades, principiando por las de especie inferior, y si de estas sumas parciales resulta alguna unidad del orden superior, se reserva para sumarla con este orden, escribiendo solamente la cifra de las unidades de cada especie.*

Sustracción de los números abstractos.

15. *La sustracción es el análisis de la adición, y tiene por objeto, dada la suma de dos sumandos y uno de éstos, hallar el otro.* La suma toma el nombre de *minuendo*, el sumando conocido el de *sustraendo*, y el que se busca se llama *resto*, *exceso* ó *diferencia*. El signo de restar es una raya — que se lee *menos*.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Como el número que vamos buscando ha de ser tal, que sumado con el sustraendo nos ha de dar el minuendo, se sigue que lo que se trata de hallar es el número que le falta al sustraendo para ser igual al minuendo; pero lo que le falta á un número para ser igual á otro es la diferencia que hay entre los dos; por eso dicen algunos que restar es hallar la diferencia que hay entre dos números; y como para hallar esta diferencia no hay más que quitar del mayor el menor, por eso también se dice que restar es quitar un número de otro. Pero como fácilmente se comprende, todas estas definiciones se deducen de la primera, puesto que no son más que aplicaciones suyas.

16. En la resta distinguiremos también tres casos, correspondientes al análisis de los tres que hemos considerado en la suma: 1.°, que el minuendo y el sustraendo sean números dígitos, ó también que sea polidígito el minuendo que no llegue á 19, y dígito el sustraendo, debiendo serlo también el resto; 2.°, que sean polidígitos, pero que cada cifra del minuendo no sea menor que su correspondiente del sustraendo; 3.°, que sean dos polidígitos cualesquiera.

PRIMER CASO. Sabiendo de memoria la suma que dan dos cifras cualesquiera, será fácil determinar una de ellas conociendo la suma de las dos y la otra cifra, para lo cual bastará quitar de la suma cada una de las unidades de la cifra conocida, ó ver las unidades que es necesario añadir á dicha cifra para hallar la suma.

Sean los números que se han de restar 7 y 3; el número que, sumado con 3 da 7, evidentemente es 4; luego $7 - 3 = 4$.

Si de 15 quisiéramos restar 6, hallaríamos 9 por resultado; porque 9 sumado con 6 nos da 15; luego $15 - 6 = 9$.

SEGUNDO CASO. Las cifras del número que vamos buscando han de ser tales que, sumadas con sus correspondientes del sustraendo, han de dar las del minuendo; luego restando de cada una de las cifras de éste la correspondiente del sustraendo, lo que siempre es posible en este caso, hallaremos las diferentes cifras del resto.

Sean los dos números que hemos de restar 8573 y 3152:

$$\begin{array}{r} 8573 \\ 3152 \\ \hline 5421 \end{array}$$

Dispuesta la operación del modo que se ve, hallaremos el re-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sultado restando de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo; así, diremos $3 - 2 = 1$; $7 - 5 = 2$; $5 - 1 = 4$; $8 - 3 = 5$.

Este caso, como hemos visto, no ofrece dificultad, y en él puede principiarse á restar por cualquier orden de unidades, con tal que se resten todas.

TERCER CASO. Lo mismo que en el anterior colocaremos el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de un mismo orden, y se restará cada cifra del sustraendo de su correspondiente del minuendo; pero como algunas de estas restas no serán posibles por ser el minuendo menor que el sustraendo, tendremos que descomponer una unidad de la cifra del orden inmediato superior en unidades de la inferior; porque el ser menor dicha cifra del minuendo, depende de que la suma de las cifras del sustraendo y resto ha producido una unidad del orden superior, la cual es la que descompondremos en esta especie para obtener la verdadera suma: buscando, pues, la cifra que, sumada con la del sustraendo nos produce la del minuendo aumentada en diez, obtendremos las unidades de esta especie del resto. Después consideraremos con una unidad menos la cifra de la cual se tomó dicha unidad.

Podrá suceder que al ir á tomar una unidad del orden inmediato superior no la haya, en cuyo caso se pasará hasta llegar á la primera cifra significativa, de la cual se tomará, y descomponiéndola en diez unidades de la especie inferior, se dejarán 9 en este lugar, agregando la restante al inmediato inferior; y así se continúa hasta llegar á la cifra de la cual no pudo restarse la correspondiente del sustraendo.

Supongamos que se han de restar los números 30416 y 15489.

$$\begin{array}{r} 30416 \\ 15489 \\ \hline 14927 \end{array}$$

Dispuesta la operación como se ve, por la razón expuesta ya (1), principiaremos por hallar la cifra que, sumada con 9, nos produce 6; y como no es posible, se deduce que dicha suma ha debido componer una decena, la cual, descompuesta en unidades, nos da 10, y 6 que tenemos en su lugar 16, que es la suma que debe producir la cifra 9 con la que vamos buscando; pero la cifra que, sumada con 9, nos produce 16, es 7; luego 7 será la cifra de las

(c) Instituto Cervantes de Madrid

unidades. La cifra 1 se ha convertido en 0; luego tomando una centena y descomponiéndola en sus diez decenas, tendremos la suma de la cifra 8, y la que se busca, que será 2. La cifra 4 se convirtió en 3, de la cual no se puede restar 4, por lo que necesitamos descomponer una unidad del orden superior; pero como no la hay, pasaremos á la siguiente, tomaremos una unidad que descompondremos en 10 de la inmediata inferior, de las cuales dejaremos 9 en su lugar, y la restante se descompondrá en otras 10 de la especie inferior, que, unidas con las 3 que teníamos, nos dará la suma 13; el número que, sumado con 4, da 13, es 9, que será la cifra de las centenas; el 0 se convirtió en 9; 9 menos 5, igual 4; y, por último, 2 menos 1, igual á 1, cifra del orden superior.

De lo dicho se deduce que debemos principiar á restar por las unidades de primer orden, para que en el caso de ser alguna cifra del minuendo menor que su correspondiente del sustraendo, se pueda tomar del orden superior la unidad que se necesita para poder efectuar dicha resta, lo cual no podría hacerse si principiásemos por las de orden superior. Por lo tanto, diremos que:

17. *Para restar un polidígito de otro, se escriben de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira una raya por debajo y se resta de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo, principiando por la derecha; y si alguna cifra del minuendo fuese menor que su correspondiente del sustraendo, se tomará una unidad del orden superior y se descompondrá en unidades de la especie que se va á restar, teniendo cuidado de considerar con una unidad menos la cifra de la cual se tomó.*

Complemento aritmético y resta por medio del complemento.

18. *Complemento aritmético de un número es lo que le falta á este número para ser igual á la unidad sequida de tantos ceros como unidades tiene.*

Así, el complemento de 3452 será 6548, diferencia entre 3452 y 10000: se deduce de aquí que, *para hallar el complemento aritmético de un número, se restan la primera cifra de 10 y todas las demás de 9.*

19. *Para restar dos números por medio del complemento aritmético, se añade al minuendo el complemento del sustraendo, y del resultado se resta la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el sustraendo.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; si queremos restar los números 228 y 142, tendremos:

$$228 - 142 = 86.$$

Si aumentamos y disminuímos la unidad seguida de tantos ceros como tiene el sustraendo, tendremos:

$228 + 1000 - 142 - 1000 = 228 +$ complemento de $142 - 1000 = 228 + 858 - 1000 = 1086 - 1000 = 86$, según quería-mos demostrar.

Como vemos, la resta de dos números por medio del complemento no tiene ventaja ninguna, porque en vez de una resta sencilla que tendríamos que hacer por el procedimiento ordinario, hemos de hacer dos restas y una suma empleando los complementos.

Si tuviésemos necesidad de verificar una serie de sumas y restas, podíamos igualmente hacer uso de los complementos sumando á los números afectados con el signo + los complementos de los que llevan el signo — y restando del resultado la suma de las unidades seguidas de tantos ceros como cifras tienen los números afectados del signo —.

Alteraciones que experimentan los resultados de la adición y sustracción, según las que sufren sus términos.

20. De lo dicho en la adición se deduce que, aumentando uno de los sumandos en una cierta cantidad, la suma vendrá aumentada en la misma cantidad; y si á cada uno de los sumandos se aumenta una cierta cantidad, la suma vendrá aumentada en la de los números que se aumentaron á los sumandos. Si, por el contrario, se disminuye á uno ó varios sumandos una ó varias cantidades, la suma vendrá disminuída en la de dichas cantidades: de donde se deduce que, si á uno ó varios sumandos se les aumenta en ciertas cantidades, y á otros se les disminuye en otras, la suma vendrá aumentada ó disminuída en la diferencia que hay entre las sumas de las cantidades que se aumentaron y disminuyeron, según que la primera sea mayor ó menor que la segunda. En el caso de ser la suma de los números que se aumentaron igual á la de los números que se disminuyeron, el resultado no sufre alteración.

21. Si una suma compuesta de dos sumandos no sufre alteración habiendo aumentado uno de ellos, el otro, por compensación, habrá disminuído en dicha cantidad. Si la suma viniese aumentada

(c) Instituto Cervantes de Madrid

en la cantidad que se agregó á un sumando, el otro debe permanecer constante. De donde se deduce que, siendo el minuendo la suma del sustraendo y resto, éste aumentará ó disminuirá en tantas unidades como aumente ó disminuya el minuendo, y disminuirá ó aumentará en el mismo número de unidades que aumente ó disminuya el sustraendo; y siempre que ambos términos aumenten ó disminuyan en una misma cantidad, el resto no sufrirá alteración.

De aquí se deduce la regla siguiente:

22. *Para restar dos números*, después de colocados de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, *se resta de cada cifra del minuendo su correspondiente del sustraendo, y si alguna de estas restas parciales no fuese posible á causa de ser la cifra del minuendo menor que la del sustraendo, se hará que lo sea añadiendo mentalmente diez unidades á la cifra del minuendo, lo cual quedará compensado aumentando en una unidad la cifra siguiente del sustraendo.*

En muchas ocasiones nos vemos obligados á restar de cada cifra de un número, otro mayor que diez, en cuyo caso se le añade mentalmente á esta cifra un número tal de decenas de aquella especie para que se pueda efectuar dicha resta; teniendo cuidado de añadir á la siguiente cifra del sustraendo tantas unidades como decenas se aumentaron á la primera.

Pruebas de la adición y sustracción.

23. *Se llama prueba de una operación, otra que, siendo más sencilla, tiene por objeto justificar la exactitud de la primera.*

La mejor prueba de la adición es repetir sus diferentes sumas parciales principiando de abajo arriba, si antes, como es natural, se hizo de arriba abajo; porque las equivocaciones en esta operación dependen generalmente del vicio que adquiere el oído, cuyo vicio desaparece cuando las palabras se pronuncian en distinto orden.

La prueba de la sustracción es sumar el sustraendo con resto, y la suma debe ser igual al minuendo, según la definición (15).

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN III

Multiplicación de números abstractos.—Propiedades importantes de la multiplicación.

Multiplicación de números abstractos.

24. *Multiplicar dos números es hallar un tercero que sea, respecto de uno de ellos, lo que el otro es respecto de la unidad.*

El número que se multiplica se llama *multiplicando,* aquel por que se multiplica *multiplicador*, y el resultado *producto*. El multiplicando y multiplicador se llaman también *factores del producto.* El signo de multiplicar es un punto ó una cruz en forma de aspa, que se pone entre los factores y se lee *multiplicado por*. Así, 23. ó 2×3, indica el producto de 2 por 3, y se lee: dos multiplicado por tres.

De la definición se deduce que si fuesen enteros los factores de un producto, se hallaría éste repitiendo uno de ellos tantas veces por sumando como unidades tiene el otro; es decir, que si uno de ellos, el que hace de multiplicador, contuviese á la unidad tres veces, ó, lo que es lo mismo, fuera 3, el producto sería igual á la suma de tres números iguales al multiplicando; más claro, sería el mismo multiplicando repetido por sumando tres veces: de donde se deduce la definición que se acostumbra dar de la multiplicación, diciendo que multiplicar dos números es repetir por sumando á uno de ellos tantas veces como unidades contiene el otro. Y como el número que así resulta es tantas veces mayor que el multiplicando como veces contiene á la unidad el multiplicador, de aquí que algunos definan también la multiplicación diciendo que multiplicar dos números es hacer tantas veces mayor á uno de ellos como unidades tiene el otro. Pero todas estas definiciones sólo son aplicables al caso de ser enteros los factores, ó por lo menos el multiplicador; por lo que no podemos admitirlas como definiciones generales, sino como casos particulares de la que dimos al principio.

25. En la multiplicación distinguiremos tres casos; 1.º, multiplicar un dígito por otro; 2.º, un polidígito por un dígito, y 3.º, dos polidígitos.

PRIMER CASO. Para multiplicar un dígito por otro, hay necesidad de saber de memoria la tabla de multiplicar, que es aquella en la cual se hallan contenidos los productos que resultan de multiplicar una cifra por otra.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Expondremos la llamada de Pitágoras, que es digna de ello por lo ingeniosa y sencilla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Consiste en un cuadro formado de nueve filas horizontales de números, que dejan formadas entre sí otras nueve filas verticales, como se ve en la tabla. La primera fila horizontal, lo mismo que la vertical, es la serie natural de los números 1, 2, 3, etc., hasta 9. Las segundas, horizontal y vertical, se obtienen sumando cada número de las primeras consigo mismo, y, por lo tanto, equivalen á los productos de los números de las primeras filas por 2. Las terceras resultan de sumar los números de la segunda con sus respectivos de la primera, de modo que cada número de la tercera fila expresa los productos de los números de la primera por 3, y así sucesivamente se forman las filas restantes; por consiguiente, formándose las líneas horizontales de la misma manera que las verticales, un número cualquiera tomado en este cuadro, nos expresará el producto de las cifras que haya en la primera fila vertical y horizontal correspondientes, puesto que este número contendrá á la cifra que hay en la fila vertical tantas veces como filas horizontales hay, ó lo que es igual, tantas veces como unidades tenga la cifra de la primera fila vertical. Del mismo modo se vería que contiene á la de la columna vertical tantas veces como unida-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

des tiene la de la fila horizontal; luego para hallar el producto de dos cifras, se busca el punto de concurso de las dos filas horizontal y vertical á que corresponden ambas cifras, y el número que allí se encuentre será el producto.

Supongamos que hemos de multiplicar 7 por 5; la operación se indicará $7 \times 5 = 7 . 5$, y hallaremos el producto 35 por medio de la tabla, viendo que 35 es el punto de concurso de la séptima fila horizontal con la quinta vertical, ó la séptima vertical con la quinta horizontal.

SEGUNDO CASO. La multiplicación de un polidígito por un dígito se reduce á multiplicar sucesivamente dos dígitos entre sí; porque según la definición, en el caso de ser el multiplicador entero, el producto se podrá hallar repitiendo por sumando al multiplicando, tantas veces como unidades tenga el multiplicador; y como para hallar esta suma tendríamos que repetir un mismo número de veces las cifras de cada uno de los órdenes de unidades del multiplicando, de aquí que se tendrá el producto pedido, haciendo la multiplicación de cada una de estas cifras por la del multiplicador, principiando por las unidades de primer orden, y escribiendo de estos productos solamente la cifra de las unidades, reservando las decenas respectivas para agregarlas al producto parcial siguiente.

Sean, por ejemplo, los números que se han de multiplicar 347 y 5.

$$\begin{array}{r} 347 \\ \times 5 \\ \hline 1735 \end{array}$$

Dispuesta la operación como se ve, queda reducido á sumar ó repetir el 347 cinco veces; lo cual se conseguirá repitiendo primero las 7 unidades, después las cuatro decenas, y, por último, las 3 centenas: lo que se consigue diciendo: $5 \times 7 = 35$ unidades, de las que escribimos 5, reservando las 3 decenas para agregarlas al producto de las decenas; $4 \times 5 = 20$; 20 y 3, son 23; escribimos las 3 unidades de segundo orden y las 2 restantes las unimos al producto de $3 \times 5 = 15$, resultando el número 17, que, escribiéndole á la izquierda, por no haber más unidades, obtenemos el número 1735, que es el producto pedido.

26. Luego para multiplicar un polidígito por un dígito *se multiplican todas y cada una de las cifras del polidígito por el dígito,*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

principiando por las de menor orden, y si algunos de estos productos parciales contiene unidades del orden superior, se reservan para unirlas al producto parcial siguiente, escribiendo tan sólo la cifra de las unidades.

TERCER CASO. Antes de considerar la multiplicación de dos polidígitos en general, conviene que hallemos el producto de un número cualquiera por la unidad seguida de ceros, y por una cifra significativa seguida tambien de ceros.

27. *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se colocan á la derecha del número tantos ceros como tiene la unidad.*

En efecto; al colocar á la derecha de un número, uno, dos ó más ceros, se le hace diez, ciento, etc. veces mayor, porque cada una de sus cifras ocupa el lugar de un orden de unidades que es diez, ciento, etc. veces mayor; y, por consiguiente, el número queda multiplicado por 10, 100, etc.

Así, $$324 \times 100 = 32400.$$

28. *Para multiplicar un número por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por dicha cifra, y al producto se añaden tantos ceros como tiene la cifra significativa.*

En efecto; si suponemos que el multiplicando se ha repetido por sumando el número de veces que nos expresa el multiplicador, que es lo que se pide, podremos agrupar estos números de tantos en tantos como nos indique la cifra significativa, y es evidente que tendremos tantos grupos como nos expresa la unidad seguida de tantos ceros como tiene el multiplicador; de modo que hallando uno de estos grupos, y después multiplicándole por la unidad seguida de tantos ceros como tiene la cifra significativa, obtendremos el resultado pedido; pero uno de estos grupos se halla multiplicando el número propuesto por la cifra significativa, y éste se multiplica por la unidad seguida de ceros, poniéndole á la derecha estos ceros; luego queda demostrado que para multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por dicha cifra, y al producto se le añaden á la derecha tantos ceros como le siguen.

Así, $$243 \times 300 = 72900.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Aplicando á este ejemplo el raciocinio anterior, veremos que, multiplicar 243 por 300 es repetirle por sumando 300 veces, y si lo suponemos hecho en una columna vertical, podremos formar 100 grupos conteniendo cada uno 3 veces al sumando, y como uno de estos grupos se halla multiplicando el número 243 por 3, lo cual da el número 729, repitiéndole 100 veces, tendremos el resultado pedido.

$$\left.\begin{matrix}243\\243\\243\end{matrix}\right\} = 729$$

$$\left.\begin{matrix}243\\243\\243\end{matrix}\right\} = 729$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots\\\ldots\\\ldots\end{matrix}\right\} = \ldots$$

De donde se deduce que el producto de un número por un cierto orden de unidades, es siempre del orden que expresan estas unidades.

Considerados estos casos particulares, podemos pasar al caso general de multiplicar un polidígito por otro.

Según la definición (24), hemos de repetir el multiplicando tantas veces como unidades contiene el multiplicador; pero descomponiendo éste en sus diferentes órdenes de unidades, se convertirá en la suma de las diferentes cifras seguidas respectivamente de ninguno, uno, dos, etc. ceros, según expresen unidades de primero, segundo, tercero, cuarto, etc. orden: de modo que repitiendo el multiplicando tantas veces como indica cada uno de estos sumandos, y reuniendo todos estos productos parciales, tendremos el producto total; y como estos productos parciales de un número por una cifra significativa seguida de ceros se hallan según el caso particular anterior, multiplicando el número por cada cifra significativa, siendo del mismo orden que la cifra porque se multiplica, se sigue que:

29. *Para multiplicar dos polidígitos, se multiplica todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador; se colocan estos productos los uno debajo de los otros de modo que se corresponda la primera cifra de cada una con su correspondiente del multiplicador; se suman, y el resultado será el producto total.*

Supongamos que se ha de multiplicar el número 37548 por 3042; dispondremos la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 37548 \\ \times 3042 \\ \hline 75096 \\ 150192 \\ 112644 \\ \hline 114221016 \end{array}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Descomponiendo el multiplicador 3042 en sus diferentes unidades, queda reducida la cuestión á repetir el multiplicando 2,40 y 3000 veces. Para repetirle 2 veces, se le multiplica por 2, y nos da el primer producto 75096 unidades; para repetirle 40 veces, se multiplica por 4, y el producto 150162 se considera como decenas, por ser también decenas el 4; de modo que se colocará debajo de las decenas, y, por último, se repetirá 3000 veces, multiplicándole por 3 y considerando este producto como millares, por ser de este orden la cifra 3, lo que nos da el producto parcial 112644 millares, el cual, colocado en su lugar y sumando los tres productos parciales, da el producto total 114221016.

Componiéndose el producto, como hemos visto, de la suma de los productos parciales que resultan de multiplicar todo el multiplicando por cada cifra significativa del multiplicador, considerados con su valor relativo, se sigue que es de todo punto indiferente principiar la multiplicación por cualquier orden de unidades, con tal que se observen las reglas predichas; sin embargo, el uso y la comodidad hacen que se principie siempre por las unidades de especie inferior, y se continúe sucesivamente hasta la superior.

30. OBSERVACIÓN.—Si consideramos todas las unidades de una especie cualquiera de un producto y sea para fijar las ideas el considerado al margen, todos los millares, por ejemplo, el número de estos millares se compondrá de dos partes: 1.ª, del producto de todo el multiplicando por todos los millares del multiplicador; 2.ª, de todas las unidades de millar que provengan de la suma de los productos parciales del multiplicando por las cifras de los órdenes inferiores del multiplicador.

	22 537
	× 2 | 537
	45 | 074
2.ª parte.....	686 | 11
1.ª parte.....	45074 |
	45795 | 184

La primera parte podrá ser cero en algunos casos, lo cual se verificará cuando en el multiplicador no existían unidades de la misma especie, es decir, millares. La segunda siempre será un número menor que el multiplicando; porque para obtener en un producto un número de millares igual al multiplicando, es menester que el multiplicador sea por lo menos igual á *mil;* y como todos los órdenes de unidades inferiores no llegan á componer un millar, de aquí que los millares que provienen de la suma de los productos parciales del multiplicando por las cifras de orden inferior del multiplicador, nunca llegan á componer un número igual al multiplicando, según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Lo mismo que se ha dicho de los millares, podría decirse de otro orden cualquiera de unidades.

Propiedades importantes de la multiplicación.

31. 1.ª *El orden de factores no altera el producto; es decir, que* $3 \times 4 = 4 \times 3$.

En efecto; cualquiera que sea el multiplicando, podemos descomponerle en la reunión de sus unidades; y repitiéndole en líneas horizontales tantas veces como contenga á la unidad el multiplicador, resultará un cuadro de unidades cuya suma, de cualquier modo que se halle, expresará el producto del multiplicando por el multiplicador. Ahora bien: sumando por líneas horizontales, dará por resultado tantos números iguales al multiplicando como unidades contiene el multiplicador; y como ambas sumas son iguales, se sigue que lo mismo es repetir el multiplicando tantas veces como unidades tiene el multiplicador, que repetir el multiplicador tantas veces como unidades tiene el multiplicando.

Sea, por ejemplo, 3×4; según el raciocinio anterior, se tendrá

$$\begin{array}{r} 3 = 1 + 1 + 1 \\ 3 = 1 + 1 + 1 \\ 3 = 1 + 1 + 1 \\ \hline 12 = 4 + 4 + 4 \end{array}$$

Sumando por líneas horizontales se tiene 3×4, ó sea el número 3 repetido 4 veces; y sumando por columnas verticales, se tiene 4×3, ó 4 repetido 3 veces; y como la suma siempre es la misma, se deduce que $3 \times 4 = 4 \times 3$, según queríamos demostrar.

2.ª *Un producto tiene tantas cifras como hay en ambos factores, ó una menos.*

Sean los números 4346 y 255: el número 255 está comprendido entre 100 y 1000; luego el producto 4346×255 estará comprendido entre los productos

$4346 \times 100 = 6$ cifras
y $4346 \times 1000 = 7$ cifras

4346

vemos que ~~436~~ $\times$ 255 no puede tener, ni menos de 6 ni más de 7, y, por lo tanto, tendrá, ó tantas como hay en ambos factores, ó una menos, según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN IV

División de números abstractos.

División de números abstractos.

32. *La división es el análisis de la multiplicación, y tiene por objeto, dado el producto de dos factores y uno de éstos, hallar el otro.* El producto toma el nombre de *dividendo*, el factor conocido el de *divisor*, y el que se busca se llama *cociente*. El dividendo y divisor se llaman *términos del cociente*. El signo de dividir es dos puntos que se escribe entre ambos términos, ó una raya horizontal sobre la que se pone el dividendo y debajo el divisor; así la división del número 12 por cuatro, se indica $12 : 4$ ó $\frac{12}{4}$ y se lee 12 *dividido* por 4.

De la definición se deduce que el divisor, multiplicado por el cociente, debe dar el dividendo, y, por tanto, éste deberá contener al divisor tantas veces como unidades tenga el cociente; luego podremos hallarle restando el divisor del dividendo todas las veces que se pueda, en cuyo caso el número de restas será el cociente buscado: pero este procedimiento no se emplea, por ser en general bastante largo.

Se observa, además, que no siempre estará el divisor contenido en el dividendo un número exacto de veces, es decir, que después de haber quitado el divisor del dividendo todas las veces que sea posible, podrá quedar un resto menor que dicho divisor, en cuyo caso la división se llama *inexacta*, ó imposible en números enteros; porque, efectivamente, no hay ningún número entero que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Con todo, podremos siempre hallar el número llamado *cociente entero*, que, multiplicado por el divisor, da el mayor producto contenido en el dividendo, siendo dicho dividendo igual al producto del divisor por el cociente entero, más el residuo.

Para conseguir esto y deducir la regla general de la división, debemos considerar tres casos correspondientes á los tres explicados en la multiplicación: 1.°, dividir un número de una ó dos cifras por un dígito, debiendo ser dígito también el cociente; 2.°, dividir un polidígito por otro, siendo el cociente de una sola cifra; y 3.°, un polidígito cualquiera por otro, siendo también polidígito el cociente.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

PRIMER CASO. Para hallar la cifra del cociente que multiplicada por el divisor nos ha de dar el dividendo, basta la tabla de multiplicar (26); porque es evidente que conociendo los dos factores y su producto, siempre que se dé éste y uno de aquéllos, el otro es conocido. Si el dividendo que se da como producto no es ninguno de los que hay contenidos en la tabla, estará comprendido entre dos, de modo que, tomando la cifra correspondiente al menor, se tendrá el cociente entero; el resto será la diferencia que hay entre el producto menor y el dividendo. Sea, por ejemplo, el número 35 que se ha de dividir por 7. Como el número 35 se halla en los productos del 7 y corresponde á la cifra 5, se sigue que ésta será el cociente; pero si el dividendo hubiera sido 38, número que no se halla en los productos del 7, podemos, sin embargo, observar que se halla comprendido entre los dos productos 35 y 42, correspondientes á las cifras 5 y 6; luego el cociente entero será 5 y el resto 3, diferencia que hay entre 35 y 38; luego $38 = 7 \times 5 + 3$.

Aunque generalmente se toma por cociente entero el número correspondiente al menor, hay ocasiones en que conviene tomar el correspondiente al mayor, lo que se hará siempre que el dividendo se halle más próximo al mayor que al menor; en cuyo caso el resto, siendo la diferencia que hay entre el dividendo y el producto en cuestión, se deberá restar de este producto para que dé el dividendo; es decir, que este dividendo será igual al producto del divisor por el cociente entero menos el residuo. Cuando se hace esto, se dice que el cociente está aproximado por *exceso* en menos de una unidad, y en el caso general por *defecto*. Lo mismo se dice en cualquiera otra división.

SEGUNDO CASO. Para dividir un número compuesto de varias cifras por otro también de varias cifras, no debiendo tener el cociente más que una, observaremos: que el producto de esta cifra del cociente por la del orden superior del divisor da un producto de este mismo orden superior; de manera que, tomando en el dividendo todas las unidades de este orden, en ellas estará contenido el producto de las dos cifras citadas, y además las unidades que del mismo orden hayan provenido de la cifra del cociente por todas las demás del divisor; luego si dividimos esta parte del dividendo por la primera cifra del divisor, hallaremos una cifra que no podrá ser menor que la buscada; lo que podrá suceder es que sea mayor, y esto se conocerá después de efectuado el producto del divisor por dicha cifra. En efecto; si este producto es mayor que el dividendo en cuestión, será señal de que la cifra obtenida por la divi-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sión parcial indicada es mayor que la verdadera, en cuyo caso se baja de unidad en unidad hasta que se halle una cifra que multiplicada por el divisor dé un producto igual ó menor que el dividendo, cuya cifra será la verdadera.

Luego para dividir un prolidígito por otro, cuyo cociente ha de tener una sola cifra, *se dividirá* (CASO 1.°) *la primera ó dos primeras del dividendo, según tenga tantas cifras como el divisor ó una más, por la primera cifra del divisor; la cifra hallada se multiplica por el divisor; y si el producto es igual ó menor que el dividendo, la cifra será buena; pero si da un producto mayor, se irán bajando unidades hasta hallar uno que se pueda restar, en cuyo caso la cifra últimamente ensayada será la verdadera del cociente.*

EJEMPLO 1.° Sean los números 764 y 243 los que se han de dividir.

$$\begin{array}{r|l} 764 & 243 \\ \cline{2-2} 35 & 3 \end{array}$$

Dispuesta la operación como se ve, diremos: 7 entre 2 á 3; para ver si el producto 3 es la verdadera cifra, la multiplicaremos por el divisor, y el producto lo restaremos del dividendo, según la regla (22), diciendo: 3 por 3 nueve, á 14 van 5, y de catorce una; 3 por 4 doce y una trece, á 16 van 3, y de diez y seis una; 2 por 3 seis y una siete, á 7 cero, que por innecesario no se pone. Luego el cociente de dividir 764 por 243 es 3, y el residuo 35; por lo tanto, $764 = 243 \times 3 + 35$.

EJEMPLO 2.° Si los números que se dan para dividir son 3458 y 387, observaremos que teniendo el dividendo una cifra más que el divisor, y aunque esta división parcial nos da un número mayor que 9, no pondremos, sin embargo, más que 9, puesto que estamos en la hipótesis de que el cociente no ha de tener más que una cifra. Además, al formar el producto de dicha cifra 9 por el divisor, resulta imposible la resta; pues 35, que es el producto de la cifra 9 por la del divisor 3, aumentado de las unidades procedentes del resto parcial anterior, no se puede restar de las 34 unidades del dividendo; pero bajando una unidad, multiplicando la cifra 8 que resulta por el divisor y restando el producto del dividendo, obtenemos el residuo 362, y, por lo tanto, la cifra 8 será el cociente.

$$\begin{array}{r|l} 3458 & 387 \\ \cline{2-2} 362 & 8 \end{array}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

TERCER CASO. Dividir un polidígito por otro, siendo polidígito el cociente.

La regla de la división de un número polidígito por otro número cualquiera, está fundada en los dos principios siguientes:

PRIMER PRINCIPIO. *Si del dividendo de una división se toman todas las unidades de un cierto orden y se dividen por el divisor, el cociente entero que se halle será igual al número de unidades del mismo orden del cociente.*

Es decir que si, por ejemplo, tomamos todos los millares del dividendo y los dividimos por el divisor, el cociente entero que hallaremos será igual al número de millares del cociente. Además, el residuo de esta división expresará los millares del dividendo que provienen de la suma de los productos parciales del divisor por todo lo que resta del cociente.

En efecto; siendo el dividendo igual al producto del divisor por el número que se busca, llamado cociente, se tendrá (30) que el número de los millares de dicho dividendo se compondrá de dos partes: primera, del producto del divisor por los millares del cociente; segunda, del número de millares que provienen del producto del divisor por todo lo que resta del cociente. De modo que si esta segunda parte fuese cero, el cociente de dividir el número de millares del dividendo por el divisor sería exactamente igual al número de millares del cociente. Si esta segunda parte no es cero, como además sabemos (30) que siempre es menor que el divisor, se sigue que al dividir todos los millares del dividendo por el divisor hallaremos por cociente entero el número de millares del cociente, y por resto la segunda parte de que hemos hablado, es decir, los millares del dividendo que provienen del producto del divisor por todo lo que queda del cociente.

SEGUNDO PRINCIPIO. *Si dividimos todas las unidades de un cierto orden del dividendo de una división por el divisor, y restamos de este dividendo parcial el producto del divisor por el cociente entero hallado, el resto que se obtenga seguido de la inmediata cifra del dividendo dividido por el mismo divisor, dará un cociente entero exactamente igual á la cifra del inmediato orden inferior del cociente.*

En efecto; si á la derecha del resto hallado ponemos las cifras que quedan en el dividendo, el número que resulte será evidentemente igual al producto del divisor por todo lo que resta después de los millares del cociente. Por tanto, si de este número tomamos todas las centenas, es decir, el número que resulta de colocar á la derecha del resto la cifra siguiente del dividendo, y las dividimos

(c) Instituto Cervantes de Madrid

por el divisor, el cociente entero que resulte será exactamente igual, según el principio anterior, á las cifras de las centenas del cociente, ó sea la cifra del mismo orden que expresa la que se coloca á la derecha del resto hallado.

Demostrados estos dos principios, pasemos á la división de un número polidígito por un número cualquiera, y sea, por ejemplo, dividir 121074646 por 34573.

Dispuesta la operación del modo siguiente,

121074,646	34573
17355 6	3502
69 146	
0	

observaremos que tomando á la izquierda del dividendo el mismo número de cifras que tiene el divisor, el número que resulta es menor que dicho divisor; tomando una cifra más, hallaremos el número 121074, que, dividido por el divisor (CASO 2.°), da el cociente entero 3 y el residuo 17355.

Ahora bien: el número 121074 expresa todos los millares del dividendo; luego según el primer principio, la cifra 3 será la de los millares del cociente, es decir, la cifra del orden superior del número que se busca. Por consiguiente, tomando á la izquierda de un dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó una más si el número que resulta es menor que dicho divisor, y efectuando la división de esta porción del dividendo por el divisor, el resultado que se obtiene es la cifra del orden superior del cociente.

Si á la derecha del residuo de esta división colocamos la cifra siguiente del dividendo, tendremos el nuevo dividendo parcial 173556, que, dividido por el divisor, da, según el principio segundo, la cifra 5 que sigue en el cociente á la del orden superior, es decir, en este caso la de las centenas: luego multiplicando la primera cifra hallada en el cociente por el divisor, restando el producto de la parte separada en el dividendo, bajando á la derecha del resto obtenido la cifra siguiente del dividendo, y dividiendo el número que resulta por el divisor, hallamos la segunda cifra del cociente.

Halladas las dos primeras cifras 3 y 5 del cociente, y habiendo restado de la parte separada del dividendo los productos del divisor por cada una de estas cifras consideradas con sus correspondientes valores relativos, el resto 691 que se obtiene, es el mismo

(c) Instituto Cervantes de Madrid

que se obtendría restando el dividendo parcial 1210746 el producto del divisor por la centena 35 del cociente.

Si á la derecha de este resto, que expresa centenas, bajamos la cifra siguiente 4 del dividendo, hallaremos el número 6914, que, dividido por el divisor, nos debe dar, según el principio segundo, la cifra del orden siguiente del cociente, es decir, las decenas; pero como 6914 es menor que el divisor, se sigue que no hay en el cociente unidades de este orden, por lo que pondremos *cero* en su lugar.

Bajando á la derecha de este nuevo resto la última cifra del cociente, y dividiendo el número que resulta por el divisor, hallaremos la cifra 2 de las unidades del cociente; finalmente, multiplicando el divisor por esta última cifra hallada, y restando el producto del dividendo parcial, nos da el resto *cero*, cuyo resultado indica que la división es exacta y que el cociente es 3502.

33. De todo lo dicho se deduce la regla general, que *para dividir un número por otro, se escribe el dividendo y á continuación el divisor subrayado, separados por dos puntos ó una raya: después se toman á la izquierda del dividendo tantas cifras como hay en el divisor ó una más si el número que resulta es menor que dicho divisor, se efectúa la división de esta porción del dividendo por el divisor según el segundo caso, y el resultado que se obtenga será la cifra del orden superior del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor, y el producto se resta de la parte separada á la izquierda del dividendo. Al lado del resto se baja la cifra siguiente, y el número resultante se divide por el divisor, lo que da la segunda cifra del cociente; se multiplica ésta por el divisor, y el producto se resta del dividendo parcial correspondiente. Al lado del resto se baja la cifra que sigue en el dividendo, y así se continúa hasta que no haya más cifras que bajar; en cuyo caso, si el último resto es cero, la división será exacta y el cociente multiplicado por el divisor dará el dividendo; si no lo es, la división es inexacta y el dividendo será igual al producto del cociente entero por el divisor, más el residuo.*

OBSERVACIONES.—1.ª Puede suceder que después de añadir á un resto cualquiera la cifra siguiente del dividendo, el número que resulte sea menor que el divisor, lo cual dará á conocer que no hay en el cociente unidades de aquella especie, y se procederá á determinar la cifra que sigue, poniendo antes cero en el lugar del orden que falta.

2.ª Cada uno de los restos obtenidos en las divisiones parciales es menor que el divisor, y, por tanto, agregándole la cifra que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sigue en el dividendo, el número que resulta es menor que diez veces dicho divisor; por cuya razón ninguna división parcial podrá dar por cociente un número entero mayor que 9.

34. Cuando el dividendo y divisor sean bastante crecidos y el cociente deba tener muchas cifras, conviene, para evitar los tanteos que en la práctica se hacen, formar de antemano los productos del divisor por cada una de las nueve primeras cifras, y no habrá más que ir restando de cada uno de los diferentes dividendos parciales el mayor producto que esté contenido de los nueve formados; teniendo cuidado de ir anotando en el cociente la cifra que corresponda á cada uno de estos productos. Por este medio la operación de dividir queda reducida á efectuar una serie de restas, lo cual es más sencillo que ejecutar la división por el método ordinario.

Propongámonos, por ejemplo, dividir el número 202693986 por 4653.

Dispondremos esta operación de la manera siguiente:

202693986	4653
18612	43562
16573	
13959	
26149	
23265	
28848	
27918	
9306	
9306	
0	

PRODUCTOS DEL DIVISOR POR LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS

1	4653
2	9306
3	13959
4	18612
5	23265
6	27918
7	32571
8	37224
9	41877

El mayor producto contenido en el primer dividendo parcial es 18612, que corresponde á la cifra 4, primera del cociente; puesto debajo y restado de dicho dividendo parcial, da la resta 1657, á la cual, agregando la cifra siguiente, da el nuevo dividendo parcial 16573, con el que se hace lo mismo; continuando de este modo llegamos á obtener el cociente 43562 y el resto *cero*, lo cual prueba que la división es exacta.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN V

Operaciones fundamentales con los números concretos.—Aplicación de las cuatro operaciones á la resolución de problemas.—Problemas.

Operaciones fundamentales con los números concretos.

35. El cálculo de las cuatro operaciones con números concretos se hace, en cuanto al valor numérico, lo mismo que con números abstractos; pero en cuanto á la especie del resultado, hay que tener en cuenta la de los datos.

36. Para sumar varios números concretos es necesario que todos sean homogéneos, se suman como si fuesen abstractos, y el resultado será de la misma especie de los sumandos.

37. Para restar números concretos es necesario que minuendo y sustraendo sean homogéneos; se restan como abstractos, y la resta será de la especie del minuendo.

38. En la multiplicación de números concretos pueden suceder dos casos: que sean de una misma especie, ó que no lo sean; si son de una misma especie, se multiplican entre sí, y el producto será de la especie de los factores, teniendo siempre cuidado de considerar á uno de ellos como abstracto que sólo expresa las veces que el otro se ha de repetir.

Hay que considerar á uno de los factores como abstracto, porque si no daría origen á errores de gran consideración. En efecto; supongamos que queremos multiplicar 2 reales por 2 reales: considerando al segundo, por ejemplo, como abstracto que nos indica las veces que hemos de repetir el primero, se tendrá por producto 4 reales; pero si no le considerásemos como abstractos, entonces, como 2 reales es igual á 17 cuartos, el producto de 17 cuartos por 17 cuartos sería también 4 reales, lo que no es verdad (*).

Cuando los factores son de distinta especie, se considera al multiplicador, que es de la especie distinta á la que debe resultar en el producto, como un número abstracto. Así, se han de multiplicar 2 reales por 3 varas, y sabemos que el producto ha de ser

---

(*) No se considera el caso de multiplicar dos números cuyo resultado debe ser un número de superficie ó volumen, en el cual no hay que hacer tal hipótesis.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

reales; el 3 varas se considerará como abstracto y será 2 reales multiplicado por 3, igual á 6 reales. Si, por el contrario, el producto ha de ser varas, entonces será 3 varas multiplicado por 2, igual á 6 varas.

37. En la división de números concretos también hay que considerar dos casos: que dividendo y divisor sean de una misma especie, ó que no lo sean; si son de una misma especie, el cociente debe considerarse como un número abstracto que expresa las veces que el divisor está contenido en el dividendo. Así, 12 reales dividido por 3 reales es igual á 4, número abstracto.

Si dividendo y divisor son de distinta especie, se efectúa la división como si ambos fuesen abstractos, y el cociente será de la misma especie del dividendo. Así, 12 reales dividido por 3 varas, da de cociente 4 reales.

Aplicación de las cuatro operaciones á la resolución de problemas.

40. Haremos uso de la adición, siempre que se tenga que reunir en un solo número los valores de varios.

41. Haremos uso de la sustracción, siempre que se trate de hallar la diferencia que hay entre dos números, ó siempre que debamos quitar ó rebajar un número de otro.

42. Emplearemos la multiplicación: 1.°, cuando se trate de repetir un número por sumando un cierto número de veces, en cuyo caso se multiplica el número dado por el que expresa las veces que se ha de repetir; 2.°, cuando, dado el valor de una unidad, se quiere hallar el de varias, para lo que se multiplica el valor de una por el número de ellas; 3.°, para reducir unidades de especie superior á inferior, lo cual se consigue multiplicando las unidades dadas por las que una de éstas tenga de la inferior. La multiplicación se usa además en otros muchos casos, que pueden reducirse á los tres anteriores.

43. Muchas aplicaciones tiene la división, pero las más principales son: 1.ª, ver las veces que un número contiene á otro, para lo cual se divide el número por aquel que ha de estar contenido; 2.ª, dado el valor de varias unidades, hallar el de una, lo que se consigue dividiendo el valor dado por el número de las unidades, y el cociente será el valor pedido; 3.ª, reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior, lo que se obtiene dividiendo las unidades dadas por las veces que una está contenida en la superior; 4.ª, hallar la mitad, tercera, cuarta, etc. parte de un nú-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mero, para lo cual no hay más que dividirle por 2, 3, 4, etc.; 5.ª, dividir un número en partes iguales, lo que se consigue dividiendo el número dado por el que expresa las partes en que se ha de dividir.

Problemas.

1. Una persona gasta anualmente 480 reales en botas, 1357 en pantalones, 2254 en levitas, 450 en chalecos, 1874 en ropa blanca, 258 en sombreros, 8575 en caballo, 16450 en casa, y 20860 en su manutención. ¿Cuánto es su gasto anual?—Solución, 52558 reales.

2. Una persona tiene varias haciendas: la primera le renta al año 12500 reales, la segunda 38550, la tercera 14758, la cuarta 24689; esta misma persona tiene de gasto anual 12575 reales por la casa en que vive, 15782 por gastos de coche, 7189 por la ropa que viste, 4390 por teatro, y 24683 por su manutención. ¿Cuánto podrá ahorrar?—S. 25923 reales.

3. Si en una caja han entrado varias sumas, cuyo total es 84575 reales, y ha pagado tres letras, la primera de 48570 reales, la segunda de 24657 y la tercera de 11348, ¿qué alteración habrá sufrido?—S. Ninguna.

4. Se quiere saber el capital que tiene una persona á quien le deben tres sujetos: el primero 2568 reales, el segundo 3497, y el tercero 8497; pero que en cambio esta persona debe á un prestamista 18475 reales.—S. No tiene capital, sino que debe 3931 reales.

5. ¿Cuál es la cantidad 37 veces mayor que 478?—S. 17686.

6. Si una vara de paño cuesta 136 reales, ¿cuánto costarán 23 varas?—S. 3128 reales.

7. ¿Cuántos reales hacen 37 napoleones, teniendo 19 reales el napoleón?—S. 703 reales.

8. Si un hombre hace en un día 374 varas de una obra, ¿cuántas harán 24 hombres?—S. 8976 varas.

9. Si un hombre hace en un día 374 varas de una obra, ¿cuántas harán 24 hombres en 36 días?—S. 323136 varas.

10. ¿Cuántas veces está contenido el número 324 en 8748?—S. 27 veces.

11. Repartiendo 768 cuartos entre 32 pobres, ¿á cómo les toca?—S. A 24 cuartos.

12. ¿Cuál es la quinta parte de 32015?—S. 6403.

13. ¿Cuántos duros hacen 1840 reales?—S. 92 duros.

14. 23 varas de tela han costado 736 reales; ¿á cómo cuesta la vara?—S. A 32 reales.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

15. Si 24 hombres hacen 1008 varas de una cierta obra en un día, ¿cuántas varas hará un hombre sólo?—S. 42 varas.

16. Se han necesitado 120 obreros para hacer una obra en un día; ¿cuántos obreros se necesitarían para hacerla en 15?—S. 8 obreros.

17. 8 hombres han hecho una cierta obra en 120 días; para hacerla en 15 días, ¿cuántos hombres se necesitarán?—S. 64 hombres.

18. 45 varas de alambre han costado 765 reales; con 612 reales, ¿cuánto alambre se comprará?—S. 36 varas.

19. Un buque que contiene 3600 hombres tiene víveres para 28 días; habiendo muerto 800 hombres, ¿para cuántos días tendrán?—S. Para 36.

20. 12 varas de tela han costado 204 reales; 37 varas ¿cuánto costarán?—S. 629 reales.

21. Si 100 reales nominales de un papel cualquiera del Estado equivalen á 25 efectivos, con un millón de reales efectivos cada mes, ¿cuánto papel podrá amortizarse en un año?—S. 48 millones.

22. Si 6 varas equivalen próximamente á 5 metros, 354 varas ¿á cuántos metros equivaldrán?—S. A 295 metros.

23. Según la misma relación, ¿á cuántas varas equivalen 375 metros?—S. A 450 varas.

24. Se llama kilográmetro una unidad de fuerza capaz de elevar en un segundo á un metro de altura un kilogramo; 75 kilográmetros equivalen á otra unidad de fuerza que se llama caballo de vapor. El agua que cae de una altura se precipita con una fuerza capaz de elevar á la misma altura un peso equivalente al del agua que cae; por tanto, ¿á cuántos caballos de vapor equivaldrá la fuerza motriz de un manantial que se precipita de una altura de 24 varas, sabiendo que en las 24 horas pasa una cantidad cuyo peso es 19.440000 kilogramos?—S. 60 caballos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

SEGUNDA PARTE

PROPIEDADES GENERALES DE LOS NÚMEROS

LECCIÓN VI

Modo de representar los números en general.—Idea de los límites y generalización de las definiciones.—Cálculo de los números representados por letras.

Modo de representar los números en general.

44. Cuando se trata de demostrar alguna propiedad de las que gozan los números, conviene representarlos de una manera general y se hace por signos que, careciendo de los valores numéricos que cada uno pueda tener, expresen los números con las condiciones que se exigen en la cuestión. Las letras del alfabeto son las adoptadas para representar los números de una manera general; y como éstas son en número limitado y cada una de ellas no puede representar en una cuestión particular nada más que uno, podría llegar el caso que faltaran signos para representar los números; pero si se conviene en que poniendo á una letra uno, dos ó más acentos, represente números distintos, queda vencida esta dificultad, puesto que con una sola podrían representarse todos los números imaginables.

Los acentos se colocan á la derecha y un poco más alto que la letra, sustituyéndoles por números romanos siempre que pasen de tres, y por una letra encerrada dentro de paréntesis (*) cuando se quiera expresar un número indeterminado de ellos. Así a, a', a'',

---

(*) Para que no se confunda con el exponente (véase *Exponente*).

(c) Instituto Cervantes de Madrid

a''', a^{IV}... $a^{(n)}$; se leen *a*, *a prima*, *a segunda*, *a tercera*, *a cuarta*..... *a con* n *acentos*.

También se acentúan las letras poniendo números llamados *subíndices* á la derecha y un poco más bajo, en esta forma: a, a_1, a_2, a_3... a_n, y se leen *a*, *a subuno*, *a subdos*, *a subtres*... *a sub*-n.

El uso de los acentos y de los subíndices es muy conveniente en más de una ocasión, como veremos en lo sucesivo, y se emplean, en general, siempre que tengamos que expresar varias cantidades que, siendo diferentes en valor numérico, tengan cierta relación, ya sea por su naturaleza ó por otra causa cualquiera.

*45. No se crea, sin embargo, que una demostración será más ó menos general, según que los números que entren en la cuestión estén ó no representados por letras. Si la demostración es buena, tan general es de una manera como de otra, porque el razonamiento que se haga sobre un número particular se aplicará igualmente á otro que se halle en las mismas condiciones. Ahora bien: si para demostrar una propiedad de las que goza un número que satisface á ciertas condiciones se elige uno de estos números, generalmente se cree por aquellos que no comprenden bien en qué consiste la demostración, que ésta sólo es aplicable al número que han elegido, al paso que representándole por una letra en la cual se hace abstracción del valor numérico, lo que de esta letra se dice queda dicho de todos los números particulares que estén representados por ella. Esto, sin embargo, no es exacto; la demostración, tan general es en uno como en otro caso; mas para comprenderlo así, es necesario prescindir del valor particular del número, y no sólo ver en él aquel que se considera, sino cualquiera otro que se halle en las mismas condiciones; y como es mucho más fácil comprender que una letra pueda representar cualquier número que cumpla con ciertas condiciones, que un número particular de éstos, de aquí la ventaja de adoptar las letras en vez de los números.

Otra de las ventajas de preferir las letras á los números en las demostraciones de principios ó verdades, es el que no siempre puede hallarse ni ser calculado con prontitud un número que cumpla con tal ó cual condición, mientras que una letra puede representarle con la condición que se quiera.

46. Los signos que se emplean para indicar las operaciones son $+$, $-$, $\times$ ó (.), (:), que, como sabemos, expresan respectivamente las cuatro operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir.

Cuando los factores de una multiplicación están representados

(c) Instituto Cervantes de Madrid

por letras ó por un número y una letra, se suprime el signo y queda indicada la operación poniendo uno al lado del otro, principiando siempre por el número, el cual toma el nombre de *coeficiente*; así $a \times b = ab$, $5 \times a = 5a$; por lo tanto, diremos que:

Coeficiente es un número que se escribe á la izquierda de una cantidad representada por letras, y que con sus unidades expresa las veces que dicha cantidad está repetida como sumando.

Exponente es el número que se escribe á la derecha y un poco más alto que la cantidad, y con sus unidades indica las veces que está repetida por factor. Así, $a^3 = a \times a \times a = aaa$. El número 3 es el exponente.

Potencia de una cantidad es el resultado de repetir dicha cantidad como factor un cierto número de veces; llamándose *segunda*, *tercera*, *cuarta*, etc., según que entre por factor *dos*, *tres*, *cuatro*, etcétera veces.

Raíz de una cantidad es otra que repetida un cierto número de veces como factor nos da la primera; llamándose *cuadrada* ó *segunda*, *cúbica*, *tercera* ó *cuarta*, etc., y en general *enésima*, según que se haya de repetir por factor *dos*, *tres*, *cuatro* ó *n* veces para que produzca la cantidad de la cual es raíz.

El signo que indica la raíz de una cantidad llamado *radical* es $\sqrt{}$; en la abertura del signo radical $\sqrt{}$ se pone el número llamado índice, que expresa el grado de la raíz, y debajo de la raya se pone la cantidad de la cual se ha de extraer dicha raiz.

Los signos de relación son $=$, $\lessgtr$, $>$, $<$, $\neq$ $\not>$, $\not<$, que se leen: *igual á*, *equivalente á*, *mayor que*, *menor que*, *no es igual á*, *no es mayor que*, *no es menor que;* y el resultado de estas relaciones se llama *igualdad*, *equivalencia* ó *desigualdad*, según que se ponga uno de los signos $=$, $\lessgtr$, ó $><$.

Cuando una cantidad se deba sumar ó restar indistintamente de otra, se pone el doble signo $\pm$ ó $\mp$ que se denominan de ambigüedad, y se lee *más menos* ó *menos más*.

Idea de los límites y generalización de las definiciones.

47. Antes de pasar al cálculo de los números representados por letras, debemos observar que careciendo éstas de valor absoluto, pueden representar un número cualquiera; y como éste puede ser de cuatro modos (4), es necesario ver si las definiciones de las operaciones fundamentales dadas hasta aquí, son aplicables á cualquier número.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

48. Siendo el número como venimos considerándolo el resultado de la comparación de una cantidad con su unidad, vemos que representa el valor de dicha cantidad, por cuya razón se suele tomar por la cantidad que representa; en cuyo caso el número se llama *concreto*.

Ahora bien; el cálculo aplicado á los números, como los representantes, digámoslo así, de las cantidades, no ofrecen dificultad en las operaciones de sumar y restar; porque siendo de una misma especie, como por su naturaleza lo exige la cuestión, se comprende fácilmente que el resultado indicará una cantidad cuyo valor numérico será igual á la suma ó diferencia de los valores numéricos de las cantidades que se sumaron ó restaron; pero en la multiplicación y división carecen en general de sentido las definiciones dadas para los números abstractos. En efecto; multiplicar, por ejemplo, 7 varas por 5 reales, dicho así simplemente no quiere decir nada, por lo cual estos casos no se deben considerar; pero como se presentan en la resolución de los problemas, tanto en matemáticas como en otras ciencias cualesquiera, lo que se hace es prescindir de la naturaleza de la cantidad y hacer las operaciones necesarias con las relaciones que hay entre estas cantidades y sus unidades, es decir, con los números abstractos, y considerar el resultado como el valor numérico de la cantidad que debe obtenerse según las condiciones del problema. Así se comprende cómo en una cuestión pueden entrar cantidades de distinta especie y pueden combinarse entre sí por medio de las operaciones del cálculo aritmético.

Visto ya que en el cálculo de las cantidades se debe prescindir de su naturaleza y verificarle con los números abstractos que indican las relaciones en que están dichas cantidades con sus unidades, siendo el resultade de la naturaleza que marque la cuestión, tenemos todavía que salvar otra dificultad, y es, que no siempre podremos hallar valores numéricos exactos de las cantidades que entran en una cuestión; y entonces ¿cómo obtener los resultados de las operaciones que deben hacerse con dichas cantidades? Las cantidades que no se pueden medir con una unidad ni parte alícuota de ella, sabemos (4-4.°) que dan origen á los *números inconmensurables;* estas cantidades, llamadas también *inconmensurables*, sólo pueden apreciarse aproximadamente, para lo cual se divide la unidad en un cierto número de partes iguales, y colocando una de ellas sobre la cantidad que se quiere medir todas las veces que se pueda, obtendremos un resto menor que una de estas partes, y un número fraccionario que expresará el valor de una cantidad que se

(c) Instituto Cervantes de Madrid

diferencia de la verdadera en el resto obtenido, y como éste disminuye á medida que es mayor el número de partes en que se dividió la unidad, se sigue que el error cometido, tomando por el valor de la cantidad inconmensurable el de la que resulta despreciando el último resto, puede ser tan pequeño como queramos, y, por lo tanto, menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea, de modo que el valor numérico de la cantidad en cuestión, ó sea el número inconmensurable, se podrá considerar como el *límite de la serie de los números fraccionarios que expresen las relaciones aproximadas de la cantidad con su unidad,* entendiendo por *límite* de una cantidad que varía *otra cantidad fija á la cual se va aproximando la primera cuanto se quiera, pero sin ser jamás rigorosamente igual á ella.* De esta definición se deduce que pudiendo ser la diferencia que hay entre la cantidad variable y la fija tan pequeña como queramos, se podrá decir que son iguales en el *límite.*

Esto supuesto, cuando esta clase de cantidades inconmensurables entren en un cálculo, consideramos los valores numéricos que sólo las representan aproximadamente, y obtendremos así resultados aproximados, que lo serán tanto más, cuanto mayor sea la aproximación de los números que entran en la cuestión.

49. Lo único que ahora nos falta probar es que así como los números inconmensurables se consideran como límites de números fraccionarios que se les aproximan cada vez más, los resultados del cálculo aritmético, hecho con estos números inconmensurables, son también los límites de los resultados de las operaciones que se efectúan con los números aproximados, á medida que éstos se aproximan á sus límites respectivos; para lo cual demostraremos los dos principios siguientes:

PRIMERO. *Una cantidad variable* A *no puede tender á la vez hacia dos límites diferentes* L *y* L′. Porque á medida que vaya aproximándose la cantidad A al límite menor L, la diferencia entre A y L′ no podrá ser tan pequeña como se quisiera, puesto que se iría aproximando á valer L′—L; luego según la definición de límite, L′ no puede serlo.

SEGUNDO. *Si dos cantidades* A *y* B *son variables y se verifica que en todos sus estados de magnitud son iguales, sus límites también lo serán.* En efecto; si fuesen los límites desiguales tales como L y L′, tendríamos, que como la primera se aproxima indefinidamente á su límite L, y la segunda al suyo L′, dejarían de ser iguales á medida que se fuesen aproximando á dichos límites, lo cual es

(c) Instituto Cervantes de Madrid

contra la hipótesis; luego los límites L y L′ tienen que ser iguales.

Ahora bien; una operación cualquiera hecha con los números aproximados da un resultado que varía á medida que lo hacen los números que entran ella, y la operación indicada es constantemente igual al resultado de la misma, cualquiera que sea el grado de aproximación; por lo tanto, según lo demostrado anteriormente, en el límite también lo serán; luego el resultado de las operaciones hechas con números inconmensurables, es el límite de los resultados que se obtienen, poniendo en vez de los inconmensurables los números que los representan.

Quedando, pues, reducido el cálculo de las cantidades al de los números que los representan en abstracto, y éste al de los números enteros ó fraccionarios, y siendo las definiciones aplicables á éstos, lo son también á todos los números considerados siempre como obstractos.

Cálculo de los números representados por letras.

50. Para sumar números representados por letras, se escriben las unas á continuación de las otras con el signo + interpuesto. Así, la suma de los números a, b, c, d, será:

$$a+b+c+d.$$

Para restar un número de otro, se escriben con el signo — intermedio. Así, $a-b$ expresa la diferencia que hay entre a y b.

La multiplicacion queda efectuada colocando los factores unos á continuación de los otros sin interposición de signos, haciendo uso del exponente en el caso de haber dos ó más factores iguales. Así, $a \times b = ab$, $a \times a \times b = a^2b$.

El cociente de dos números queda expresado poniendo uno debajo de otro con una raya íntermedia. Así. $a : b = \frac{a}{b}$

En efecto; mientras que á estas letras no se les den valores particulares, no podemos sino dejar indicadas por los signos correspondientes las operaciones que con ellos se hayan de efectuar.

51. *Cuando los términos de una operación sean sumas ó restas indicadas, es necesario encerrarlos dentro de paréntesis para reconocerles como tales términos.* Así, teniendo que indicar el producto, por ejemplo, de $a+b$ por $c-d$, se escribirá

$$(a+b)\ (c-d);$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

porque si no hiciésemos uso del paréntesis, quedaría indicada la operación de este modo: $a+b\times c-d=a+bc-d$, lo cual dice que se ha de añadir á a el producto bc, y de la suma se ha de restar el número d; operación muy distinta de la que se quería expresar.

Si queremos sumar los números representados por $a+b+c$, $a+b+e$, y $c+b+d$, se indicará la operación del modo siguiente:

$$(a+b+c)+(a+b+e)+(c+b+d);$$

y la suma quedará efectuada poniendo los sumandos unos á continuación de otros con sus propios signos, y haciendo uso del coeficiente en el caso de haber números iguales. La suma anterior dará

$$(a+b+c)+(a+b+e)+(c+b+d)=$$
$$a+b+c+a+b+e+c+b+d=2a+3b+2c+d+e.$$

En efecto; al sumar dos números representados por dos sumas, es evidente que será necesario agregar á la primera la suma de los números de la segunda, á ésta la de los números de la tercera, y así sucesivamente; lo cual podrá hacerse agregando desde luego el primer número, después el segundo, en seguida el tercero, y así sucesivamente.

Si tuviéramos que sumar dos diferencias, al valor de la primera agregaríamos la diferencia de los números que expresa la segunda, lo cual se consigue agregando á la primera diferencia el minuendo de la segunda, y restando del resultado el sustraendo de la misma.

52. Luego *para sumar varias sumas ó diferencias indicadas se escriben los números que forman los sumandos, unos á continuación de otros con los signos que tengan, y después se hace la reducción por medio de los coeficientes.*

Ahora bien: cualquier número con el signo + tiende á aumentar el resultado en tantas unidades cuantas vale, y el que lleva el signo — tiende á disminuirle; luego la suma de varios números que llevan el signo + y el signo — será igual á la suma de los primeros, menos la suma de los segundos; por lo que á esta clase de sumas se les llama algebraicas, pues aunque son sumas, se efectúan por medio de una resta: lo mismo se dice de una diferencia.

53. *Para restar de una suma ó diferencia indicada otra suma ó*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

diferencia, se escribe el minuendo y á continuación el sustraendo con los signos cambiados.

.Así, $(a+b-c)-(e+d-f)=a+b-c-e-d+f.$

En efecto; del minuendo tal cual sea, hay que restar la suma ó diferencia de los números que constituyen el sustraendo, según que éste sea una suma ó una diferencia; pero es evidente que restando sucesivamente cada uno de los sumandos que constituyen el sustraendo, habremos restado la suma de todos éstos; y como cada una de estas restas parcialos se obtiene poniendo el número que se ha de restar á continuación de aquel que sirve de minuendo con el signo —, resulta lo que se quería demostrar.

Si el sustraendo fuese un diferencia, el resultado se obtendría restando del minuendo principal el minuendo de la diferencia sustraendo, y agregando al resultado el sus raendo de dicha diferencia.

En efecto; al restar del minuendo principal el de la diferencia sustraendo, hemos quitado tantas unidades más como tiene el sustraendo de la misma; por lo que, agregando este sustraendo, hallaremos el resto perdido.

Apliquemos este razonamiento á un ejemplo, y sea restar primero del minuendo M el sustraendo $a+b+c$. Se indicará la operación así:

$$M-(a+b+c)=M-a-b-c.$$

En efecto; de M, hemos de restar la suma de los números a, b y c; luego restando primero a, lo cual dará $M-a$; después b, lo que da $M-a-b$, y por último c, obtenemos el resultado pedido $M-a-b-c$.

Restemos, en segundo lugar. del minuendo M el sustraendo $a-b$, y se tendrá:

$$M-(a-b)=M-a+b.$$

En efecto; se nos pide restar del minuendo M la diferencia $a-b$, es decir, a menos b unidades; restando, pues, el número a, lo que da $M-a$, hemos restado b unidades más de las que se pedían, porque no eran a, sino $a-b$ las que se habían de restar; luego añadiendo al resultado $M-a$, las b unidades que hemos quitado de más, tendremos el resultado pedido.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

OBSERVACIÓN. Siempre que hallemos una cantidad dentro de un paréntesis y fuera el signo —, debemos considerarla como un sustraendo de una resta cuyo minuendo se ha reducido á cero; de modo que podremos quitar el paréntesis, cambiando los signos de la cantidad que hay dentro; así,

$$-(a+b-c)=-a-b+c;$$

y recíprocamente

$$-a+b-c=-(a-b+c).$$

54. *Para multiplicar una suma ó diferencia indicada por un número, se multiplica cada uno de los números que constituyen el multiplicando por el multiplicador, y se ponen los productos parciales los unos á continuación de los otros con los mismos signos que tienen en el mulplicando.*

En efecto; el producto es del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad; luego si demostramos que tomando números que sean respecto de cada sumando lo que el multiplicador es de la unidad, y que la suma algebraica de estos números indicada por el multiplicando nos da el producto, el principio quedará demostrado.

Sea la suma $a+b-c$, y d el número porque se ha de multiplicar, y vamos á demostrar que

$$(a+b-c)\ d=ad+bd-cd.$$

Consideremos tres casos: 1.°, que d sea un número entero; 2.°, fraccionario; y 3.°, inconmensurable.

PRIMER CASO. Siendo d un número entero, el producto será, según la definición, d veces el multiplicado; luego

$$\begin{aligned}(a+b-c)\,d&=a+b-c+a+b-c+a+b-c+\ldots\\&=ad+bd-cd.\end{aligned}$$

SEGUNDO CASO. Si d es fraccionario, expresará un número m de partes de la unidad dividida en n, que se indica así: $\frac{m}{n}$. De modo que el producto será del multiplicando lo que $\frac{m}{n}$ es de la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

unidad, es decir, m veces la *enésima* parte; luego hallando la *enésima* parte del multiplicando y repitiéndola m veces, tendremos el producto.

Pero la *enésima* parte del multiplicando es $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$, porque

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)n=\frac{a}{n}\times n+\frac{b}{n}\times n-\frac{c}{n}\times n=a+b-c;$$

luego el producto será

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)m=\frac{a}{n}\times m+\frac{b}{n}\times m-\frac{c}{n}\times m.$$

Pero se tiene que

$$\frac{a}{n}\times m+\frac{b}{n}\times m-\frac{c}{n}\times m=a\times\frac{m}{n}+b\times\frac{m}{n}-c\times\frac{m}{n};$$

porque repetir la *enésima* parte de a, por ejemplo, m veces, es lo mismo que repetir a, que es n veces mayor, un número de veces que sea ese mismo número n de veces menor; luego también en el caso de ser fraccionario se verifica que

$$(a+b-c)\,d=ad+bd-cd.$$

TERCER CASO. Siendo d un número inconmensurable, el producto de $á+b-c$ por d será (49) el límite de los productos que se obtienen reemplazando por d números fraccionarios que se le vayan aproximando cada vez más, de modo que, representando estos números por d', d'', d'''..., se tendrá, según los casos anteriores:

$$(a+b-c)\,d'=ad'+bd'-cd'.$$
$$(a+b-c)\,d''=ad''+bd''-cd''.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Los productos obtenidos se van aproximando al producto verdadero, á medida que d', d'', d'''... van aproximándose á su límite; luego se tendrá que, siendo estas dos expresiones constantemente iguales, en el límite también lo serán (49); por consiguiente, tendremos:

$$(a+b-c)\,d=ad+bd-cd.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Luego el principio queda demostrado en todos los casos.

55. *Para multiplicar una suma ó diferencia indicada por una suma, se multiplica todo el multiplicando por cada uno de los sumandos del multiplicador, y se suman los productos parciales.*

En efecto; hallando números que sean respecto del multiplicando lo que cada uno de los sumandos del multiplicador es de la unidad, y sumando estos números, obtendremos el número que será de todo el multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad (54).

Sean los factores que hemos de multiplicar $(a+b-c)$ y $(m+n)$.

El número que se busca ha de ser de $(a+b-c)$ lo que $m+n$ es de la unidad: hallando primero un número que sea del multiplicando lo que m es de la unidad, y después otro que sea del mismo multiplicando lo que n es también de la unidad, y sumando estos números, tendremos otro que será de $(a+b-c)$, lo que $m+n$ es de la unidad, y, por consiguiente, el producto; pero el primero de estos números es (54):

$$(a+b-c)\,m = am+bm-cm,$$

el segundo será

$$(a+b-c)\,n = an+bn-cn;$$

luego el producto pedido será la suma de estos dos productos parciales, y, por tanto, se tendrá:

$$(a+b-c)\,(m+n) = am+bm-cm+an+bn-cn.$$

56. *Para multiplicar una suma ó diferencia por una diferencia, se multiplica todo el multiplicando por el minuendo y sustraendo del multiplicador, y se restan los productos parciales*, cuya resta se obtendrá con sólo poner á la derecha del primer producto los términos del segundo con los signos cambiados (53).

En efecto; hallando números que sean del multiplicando lo que el minuendo y sustraendo del multiplicador son respecto de la unidad, y restando estos números, es evidente que habremos hallado el número que será del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad, y, por tanto, el producto pedido.

Consideremos el producto de $(a+b-c)$ por $(m-n)$: según la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

definición (24) hemos de hallar un número que sea respecto de $a+b-c$, lo que $m-n$ es respecto de la unidad: hallando primero un número que sea de $a+b-c$, lo que m es de la unidad, y después otro que sea del mismo multiplicando lo que n es también de la unidad, y restando estos números, tendremos otro que será de $a+b-c$, lo que $m-n$ es de la unidad, y, por consiguiente, el producto pedido; pero el primero de estos números es (54):

$$(a+b-c)\,m = am+bm-cm;$$

el segundo será:

$$(a+b-c)\,n = an+bn-cn;$$

luego la diferencia de estos dos números expresará el producto que buscamos, y, por tanto, se tendrá:

$$(a+b-c)\,(m-n) = am+bm-cm-an-bn+cn.$$

Donde vemos que el producto queda efectuado poniendo á la derecha del que resulta de multiplicar el multiplicando por el minuendo del multiplicador, el producto con los signos cambiados del mismo multiplicando por el sustraendo.

OBSERVACIONES. 1.ª De lo dicho anteriormente se deduce que el producto de dos sumas algebraicas (52) se obtiene multiplicando la primera por cada número de la segunda, poniendo estos productos unos á continuación de otros con sus mismos signos ó signos cambiados, según que los números del multiplicador lleven signo + ó —, y efectuando, por último, la suma algebraica de todos estos productos.

2.ª De la igualdad $(a+b-c)\,m = am+bm-cm$, se deduce que $am+bm-cm = (a+b-c)\,m = m\,(a+b-c)$; y como $(a+b-c)$ se obtiene dividiendo cada término de $am+bm-cm$ por el factor m, resulta que *se podrá sacar una cantidad factor común de una suma algebraica, poniendo dicha cantidad fuera de un paréntesis, y dentro lo que resulta de dividir todos los términos de la suma por el factor que se sacó.* Así,

$$am+bm-cm+d = m\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right).$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto;

$$m\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right)=\left(a+b-c+\frac{d}{m}\right)m=$$

$$am+bm-cm+\frac{d}{m}\,m=am+bm-cm+d.$$

57. *Para dividir una suma algebraica por un número, se divide cada uno de los sumandos, y la suma algebraica de los cocientes será el cociente de la suma.*

En efecto; el cociente ha de ser tal, que multiplicado por el divisor ha de dar el dividendo; pero el producto del cociente por el divisor se obtiene multiplicando cada término de aquél por dicho divisor, y resulta que, como los términos del cociente son los cocientes que han provenido de dividir los sumandos del dividendo por el divisor, al multiplicarlos por éste, volverán á dar los términos del dividendo: luego aquél será el cociente.

Así tendremos:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m},$$

lo cual no deja duda, puesto que el producto de $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ por el divisor m, es el dividendo $a+b-c$, como á continuación se ve:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}\,m+\frac{b}{m}\,m-\frac{c}{m}\,m=a+b-c.$$

Si el divisor fuese otra suma algebraica, se obtendría el cociente del mismo modo, dividiendo siempre cada término del dividendo por todo el divisor. La demostración es la misma. Así,

$$\frac{a+b-c}{f+g-h}=\frac{a}{f+g-h}+\frac{b}{f+g-h}-\frac{c}{f+g-h}.$$

OBSERVACIÓN GENERAL. Siempre que en los resultados de estas operaciones haya sumandos, sustraendos, factores ó divisores iguales, se simplificarán haciendo uso de los coeficientes y exponentes.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

OTRA. Las demostraciones que hemos dado en el cálculo de los números representados por letras, no sólo son aplicables al caso de ser los números *enteros*, sino también cuando sean *fraccionarios* é *inconmensurables*.

LECCIÓN VII

Alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicación y división, según las que sufren los datos.—Abreviaciones que pueden hacerse en ambas operaciones.

Alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicación y división, según las que sufren los datos.

El producto indicado de varios factores expresa que se ha de multiplicar el primero por el segundo, el producto de éstos por el tercero, el que resulta por el cuarto, y así sucesivamente.

58. *El producto de varios factores no varía, cualquiera que sea el orden en que se multipliquen* (*).

Sea el producto $a.\ b.\ c.\ d.\ f$, en el cual demostraremos primeramente que se puede cambiar uno de los factores con el que tiene al lado, sin que dicho producto se altere. Supongamos que los factores c y d son los que van á cambiar, dando origen á los productos $a.\ b.\ c.\ d.\ f$, y $a.\ b.\ d.\ c.\ f$, que vamos á demostrar son iguales.

En efecto; la parte de producto hasta el primer factor que se cambia, nos da:

$$a.\ b.\ c = a.\ b + a.\ b. + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces.}$$

Estas expresiones iguales, darán resultados también iguales si las multiplicamos por el mismo número d, que es el factor siguiente, lo que da:

$$a.\ b.\ c.\ d = (a.\ b + a.\ b + a.\ b + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces})\ d =$$
$$a.\ b.\ d + a.\ b.\ d + a.\ b.\ d + \ldots \text{ repetido } c \text{ veces.}$$

(*) Este principio sólo se puede demostrar ahora para el caso de ser números enteros los factores; pero siendo verdadero, ya sean quebrados ó inconmesurables, como lo demostraremos al tratar de estos números, podremos admitir desde luego como general á todos los casos, para deducir también de una manera general las consecuencias que veremos en seguida, y no tener que deducirlas ahora para los números enteros, y después para los quebrados y números inconmensurables.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Y como $a.\ b.\ d$ repetido c veces por sumando, es igual á

$$a.\ b.\ d.\ c,$$

se sigue que

$$a.\ b.\ c.\ d = a.\ b.\ d.\ c:$$

de modo que multiplicando estas dos expresiones iguales por los factores que restan, que en este caso es sólo f, se tendrá.

$$a.\ b.\ c.\ d.\ f = a.\ b.\ d.\ c.\ f,$$

que es lo que debíamos demostrar.

Ahora bien; pudiendo permutar cada factor con el que tiene al lado sin que por ello varíe el producto, podremos hacer todas las permutaciones que queramos, permaneciendo siempre el mismo producto, con lo cual queda el principio demostrado.

59. *Si á uno de los factores de un producto se le aumenta ó disminuye una cierta cantidad, el producto vendrá aumentado ó disminuído en el producto del otro factor por la cantidad que se aumentó ó disminuyó.*

Sea el producto $ab = \mathrm{P}.$

Aumentando ó disminuyendo á uno de los factores, a por ejemplo, una cierta cantidad m, se tendrá:

$$(a \pm m)\, b = ab \pm mb. = \mathrm{P} \pm bm.$$

Donde vemos que el producto P viene aumentado ó disminuído en el producto de la cantidad m por el otro factor b, que es lo que debíamos demostrar.

60. *Si se multiplica uno de los factores de un producto por un número, el producto viene multiplicado por el mismo número.*

Sea el producto $ab = \mathrm{P}.$

Multiplicando uno cualquiera de sus factores, b por ejemplo, por el número m, se tendrá

$$abm = \mathrm{P}m;$$

si, por el contrario, fuese a, se tendría también (58)

$$amb = abm = \mathrm{P}m.$$

Luego el principio queda demostrado.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

61. *Si cada factor de un producto se multiplica por un número, el producto vendrá multiplicado por el de los números por que se multiplicaron los factores.*

Sea el producto $ab = P$.

Multiplicando el factor a por m y el factor b por n, resulta (58):

$$ambn = abmn = Pmn;$$

de modo que, siendo $mn = P'$, se tendrá $ambn = PP'$.

62. La recíproca no es verdadera: es decir, que si el producto viene multiplicado por un número, no se puede asegurar la alteración que habrán sufrido los factores; porque puede provenir de haber multiplicado uno de ellos por el número que se multiplicó el producto, ó bien puede haberse multiplicado cada factor por números cuyo producto sea igual al número porque se multiplicó el producto dado.

En efecto; sea el producto $5 \times 4 = 20$.

Si el producto 20 viene multiplicado por el número 6, puede ser: ó porque uno de los factores del 20 se ha multiplicado por 6, ó porque uno se ha multiplicado por 3 y el otro por 2, cuyos dos números 2 y 3 dan el producto 6, número por el cual aparecía multiplicado el producto 20.

Sin embargo; sabiendo la alteración del producto y la que ha sufrido uno de los factores, se puede deducir la que ha experimentado el otro factor. Así, se sabe que un producto viene multiplicado por un número entero cualquiera m, y uno de los factores no ha sufrido alteración, el otro factor vendrá multiplicado por el mismo número m. Si viniendo multiplicado el producto por m, uno de los factores viene multiplicado también por el mismo número, el otro factor no habrá sufrido alteración. Y, por último, si el producto está multiplicado por m y uno de los factores aparece multiplicado por un factor n del número m, el otro factor vendrá multiplicado por el otro número, que, multiplicado por n, nos da m.

63. De lo dicho anteriormente se deduce: 1.°, que para multiplicar un producto por un número, basta multiplicar por dicho número uno de sus factores; 2.°, para multiplicar un producto por otro, no hay más que multiplicar sucesivamente el primero por cada uno de los factores del segundo.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

64. *Si uno de los factores de un producto se divide por un número, el producto viene dividido por el mismo número.*

Sea el producto $ab = P$.

Dividiendo el factor b por un número, se tendrá representando por b' el cociente de b por n, y por P' el nuevo producto:

$$ab' = P'.$$

Ahora bien: si se vuelve á multiplicar el factor b' por n, obtendremos (60):

$$ab'n = P'n;$$

ó lo que es lo mismo:

$$ab^{\backprime} = P'n;$$

pero $ab = P$, luego $P'n = P$, de donde $P' = \frac{P}{n}$, y, por consiguiente, dividiendo un factor b por n, el producto P' que resulta es el cociente de dividir el producto primitivo P por el número n; luego dividiendo un factor por un número, el producto viene dividido por el mismo número.

65. *Si se divide cada uno de los factores de un producto por un número, el producto vendrá dividido por el de los números porque se dividieron los factores.*

Sea el producto $ab = P$.

Dividiendo cada uno de los factores por los números respectivos m y n, tendremos, llamando a' y b' á los cocientes y P' al nuevo producto:

$$a'b' = P'.$$

Si ahora volvemos á multiplicar los factores a' y b' por los números respectivos m y n, se tendrá (61):

$$a'mb'n = ab = P'mn;$$

luego

$$P'mn = P;$$

de donde

$$P' = \frac{P}{mn},$$

que es lo que debíamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

66. Tampoco podemos saber las alteraciones de los factores de un producto con sólo saber que éste se ha dividido por un número: porque según lo dicho en los dos números anteriores, puede suceder que un producto se haya dividido por un número m, á causa de haber dividido á uno de ellos por m, ó bien de haber dividido uno de los factores por un número n, y el otro por un número tal que, multiplicado por n, dé el número m.

Sin embargo; cuando se conoce la alteración que experimentan el producto y uno de los factores, es muy fácil deducir la que corresponde al otro factor.

En efecto; supongamos que un producto se divide por un número m y que uno de los factores no ha sufrido alteración; el otro factor vendrá dividido evidentemente por dicho número m. Si apareciendo el producto dividido por m, uno de los factores viniese dividido por el mismo número, es claro que el otro factor no habrá sufrido alteración; y, por último, si habiendo dividido un producto por el número m y uno de los factores viniese dividido por un número n, el otro vendrá dividido por el número que, multiplicado por n, produce el número m, por el cual se dividió el producto.

67. De lo dicho resulta, que para dividir un producto por un número, basta dividir por dicho número uno de sus factores; ó dividir los factores del producto por los números que multiplicados entre sí, dan aquel por el cual se quiere dividir el producto propuesto; ó lo que es lo mismo, para dividir un producto por otro, basta dividir los factores del primero por los del segundo.

68. *Para dividir un número por un producto, se divide primero por uno de los factores; el cociente que resulta se vuelve á dividir por otro factor, el nuevo cociente se divide por un tercer factor, y así sucesivamente.*

En efecto; sea el número N el que hemos de dividir por el producto de los números a, b, c.

Si dividimos N por a y llamamos al cociente N′, tendremos:

$$N = aN' \quad [1].$$

Dividiendo N′ por b y llamando N″ al cociente, se tendrá:

$$N' = bN'' \quad [2].$$

Y, por último, dividiendo N″ por c y llamando al cociente N‴, será:

$$N'' = cN''' \quad [3].$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Continuando del mismo modo, si hubiese más factores, llegaremos á una última igualdad, la cual es en el caso presente $N'' = cN'''$, de modo que, poniendo en la anterior [2] en vez de N'' su valor, tendremos $N' = cbN'''$, y sustituyendo en [1] el valor de N', se tendrá:

$$N = cbaN'''.$$

Luego N''', último cociente hallado, es precisamente el cociente de dividir N por el producto *abc*.

69. De todo lo dicho anteriormente resulta: 1.°, que un producto queda multiplicado ó partido por un número, multiplicando ó partiendo uno de sus factores por dicho número; 2.°, que si el producto viene multiplicado ó partido por un número y uno de los factores no ha sufrido alteración, el otro debe venir multiplicado ó partido por el mismo número; 3.°, que si un producto y uno de los factores se ha multiplicado ó partido por un número, el otro factor no sufre alteración; 4.°, si un factor se multiplica ó parte por un número y el otro se multiplica ó parte también por otro número, el producto vendrá multiplicado ó partido por el producto de los dos números; 5.°, si uno de los factores se multiplica ó parte por un número y el otro se divide ó multiplica por el mismo número, el producto no sufre alteración.

70. *Si al dividendo de una división se le aumenta ó disminuye un número, el cociente viene aumentado ó disminuído en el que resulta de dividir por el divisor la suma ó diferencia del número que se aumentó ó disminuyó y del resto de la primera división, si lo había; si no lo hubiese, vendrá entonces aumentado ó disminuído en el cociente de dividir dicho número por el divisor.*

En efecto; sea A un dividendo, B un divisor, Q el cociente y R el resto, que podrá ser cero; se tiene:

$$A = BQ + R.$$

Aumentando ó disminuyendo á estas dos expresiones iguales la misma cantidad m, se tendrá:

$$A \pm m = BQ \pm m + R.$$

Dividiendo por B, tendremos:

$$\frac{A \pm m}{B} = Q \pm \frac{m \pm R}{B}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Ponemos el signo $\pm$ entre m y R porque cuando se toma m con el signo $+$ se ha de dividir la suma de m y R por B, y el cociente añadirlo á Q.

Pero cuando m lleva el signo —, entonces lo que hay que dividir es $-m+R$, y como $-m+R=-(m-R)$ (53), resulta que cuando m se toma con el signo —, ó sea cuando ha de de disminuirse, hay que restar del cociente Q, el que resulta de dividir la diferencia $m-R$ por el divisor B.

OBSERVACIÓN. Si m es tal que la suma ó la diferencia entre m y R es menor que el divisor B, el cociente no sufrirá alteración; sólo la resta R vendrá aumentada ó disminuída en dicho número m.

Si se aumenta ó disminuye el divisor en una cierta cantidad, es evidente que el cociente, para que haya compensación, vendrá disminuído ó aumentado en otra que sería fácil determinar; pero no se hace, por ser de poca importancia.

71. *Si se multiplica ó parte el dividendo de una división exacta por un número, el cociente vendrá multiplicado ó partido por el mismo número.*

En efecto; el dividendo es un producto que viene multiplicado ó dividido por un número, permaneciendo sin alteración el divisor, que es uno de los factores; luego el otro factor, que es el cociente, vendrá (69-2.°) multiplicado ó partido por el mismo número.

72. Si la división no es exacta, *al multiplicar ó partir el dividendo por un número, vendrán multiplicados ó partidos por el mismo número el cociente y resto.*

En efecto; siendo A el dividendo, B el divisor, Q el cociente y R el resto, se tiene:

$$A=BQ+R \qquad [1].$$

Y multiplicando ambas expresiones por M, será (54):

$$AM=BQM+RM \qquad [2].$$

Luego el cociente Q y el resto R vienen multiplicados por el mismo número M.

OBSERVACIÓN. Si RM es mayor que B, podrá dividirse por dicho número; de modo que llamando Q' al cociente y R' al resto, tendremos:

$$RM=BQ'+R'.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

INSTITUTO CERVANTES DE FRANCFORT — BIBLIOTECA — MADRID

De modo que, poniendo en la igualdad [2] en vez de RM su igual $BQ'+R'$, se tendrá:

$$AM=BQM+BQ'+R';$$

y sacando B factor común,

$$AM=B\,(QM+Q')+R';$$

luego cuando el producto del resto R por el número M es mayor que B, el cociente Q no sólo queda multiplicado por el número M por el cual se multiplicó el dividendo, sino que viene además aumentado en el cociente que resulta de dividir el producto del número M y resto por el divisor B.

73. Si en vez de multiplicar la igualdad [1] por el número M la hubiésemos dividido, obtendríamos (57 y 69-1.°):

$$\frac{A}{M}=B\frac{Q}{M}+\frac{R'}{M};$$

donde vemos que, dividiendo A por M, el cociente Q y resto R vienen divididos por el mismo número.

74. *Si se multiplica ó parte el divisor de una división exacta por un número, el cociente viene dividido ó multiplicado por el mismo número.*

En efecto; el dividendo es un producto que ha sufrido alteración; el divisor, que es uno de los factores, se ha multiplicado ó partido por un número; luego el cociente, que es el otro factor, vendrá dividido ó multiplicado por el mismo número (69-5.°).

75. Cuando la división es inexacta, *al multiplicar el divisor, queda dividido el cociente, permaneciendo el mismo resto; pero si se divide el divisor, el cociente, además de quedar multiplicado por el mismo número, viene aumentado en las unidades que resultan de dividir el resto por el nuevo divisor.*

Representando por las mismas letras que anteriormente al dividendo, divisor, cociente y resto, se tiene:

$$A=BQ+R \quad [1].$$

Si se multiplica el divisor B por el número M, es necesario,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

para que el producto BQ no se altere, dividir el factor Q por el mismo número M (69-5.°); de modo que se tendrá:

$$A = BM\frac{Q}{M} + R;$$

donde vemos que, multiplicando el divisor B por M, el cociente aparece dividido por el mismo número, no sufriendo alteración el resto.

Si en la igualdad [1] dividimos el divisor B por el número M, se tendrá que multiplicar el otro factor Q por el mismo número para que el producto $B \times Q$ no se altere (69-5.°); de modo que se tendrá:

$$A = \frac{B}{M} \times QM + R \quad [2];$$

pero como el divisor ha disminuído convirtiéndose en $\frac{B}{M}$, podrá suceder que esté contenido en R un cierto número de veces; de modo que, si representamos por Q′ el cociente y por R′ el resto de la división de R por $\frac{B}{Q}$, tendremos:

$$R = \frac{B}{M} \times Q' + R';$$

sustituyendo este valor de R en la igualdad [2], se tiene:

$$A = \frac{B}{M} \times QM + \frac{B}{M} \times Q' + R';$$

finalmente, sacando $\frac{B}{M}$ por factor común, será:

$$A = \frac{B}{M}(QM + Q') + R';$$

donde vemos que el cociente Q, además de venir multiplicado por M, número por el cual se dividió el divisor B, viene aumentado en el cociente que resulta de dividir el resto R por el nuevo divisor $\frac{B}{M}$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

76. De lo dicho anteriormente resulta que en toda división exacta, al cociente le pasa lo mismo que al dividendo y lo contrario que al divisor; es decir, que multiplicando ó partiendo el dividendo por un número, el cociente viene multiplicado ó partido por el mismo número; y, por el contrario, multiplicando ó partiendo el divisor, el cociente queda dividido ó multiplicado. De aquí se deduce: 1.°, que un cociente se multiplica por un número multiplicando el dividendo, ó dividiendo el divisor por dicho número: y aunque generalmente se emplea el primer método, es porque no siempre se puede dividir exactamente el divisor; 2.°, que un cociente se divide por un número dividiendo el dividendo ó multiplicando el divisor por dicho número, y por la misma razón que antes, se emplea más generalmente el segundo que el primer método; 3.°, un cociente no se altera, aunque dividendo y divisor se multipliquen ó partan por un mismo número.

77. Si la división no es exacta, *al multiplicar ó dividir el dividendo y divisor por un mismo número, el cociente no varía; pero el resto viene multiplicado ó partido por el mismo número.*

Para demostrarlo, supongamos que A sea el dividendo, B el divisor, Q el cociente, y R el resto; de modo que se tendrá:

$$A = BQ + R.$$

Si multiplicamos ó partimos esta igualdad por un número M, tendremos:

$$AM = BM \times Q + RM \qquad [54 \text{ y } 60]$$

ó

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{M} \times Q + \frac{R}{M} \qquad [57 \text{ y } 64].$$

Donde vemos que en ambos casos el cociente Q de los números A y B no ha variado, mientras que el resto R viene multiplicado ó partido por el número porque se multiplicó ó partió el dividendo y divisor.

Abreviaciones que pueden hacerse en la multiplicación y división.

78. Fundados en las diferentes alteraciones que experimentan los resultados de la multiplicación y división por las que sufren los datos, podremos deducir algunas abreviaciones que puedan hacerse al efectuar dichas operaciones.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

1.ª Para multiplicar dos números que terminan en ceros, *se multiplican los números que forman las cifras significativas, y á la derecha del producto se ponen tantos ceros como hay en ambos factores.*

Sean dos números cualesquiera, 24000 y 1200, los que se han de multiplicar: representando todo número que termina en ceros al producto de dicho número por la unidad seguida de tantos ceros como hay á la derecha de éste, tendremos:

$$24000 \times 1200 = 24.\ 1000 \times 12.\ 100;$$

y como el orden de factores no altera el producto (58), se tiene

$$24 \times 1000 \times 12 \times 100 = 24 \times 12 \times 1000 \times 100.$$

Ahora bien;

$$24 \times 12 = 288 \text{ y } 1000 \times 100 = 100000;$$

luego

$$24 \times 12 \times 1000 \times 100 = 288 \times 100000 = 28800000 \text{ (61)}.$$

Donde vemos que el producto 28800000 se forma poniendo á la derecha del que resulta de multiplicar las cifras significativas, los ceros que tienen ambos factores.

2.ª Para multiplicar un número por otro cuyas cifras sean todas nueves, *se escriben á la derecha del número tantos ceros como nueves tiene el multiplicador, y del resultado se resta una vez el multiplicando.*

Sean los números 38754 y 9999 los que se han de multiplicar. Si añadimos al multiplicador 9999 una unidad, obtendremos la unidad seguida de tantos ceros como nueves hay, es decir, 10000; si ahora multiplicamos el 38754 por 10000, encontraremos el producto 387540000, el cual contendrá al multiplicando una vez más de las que se pedían; de modo que si de dicho producto restamos el multiplicando, tendremos:

$$387540000 - 38754 = 387501246,$$

que es el producto pedido.

En la práctica no se ponen los ceros, sino que se hacen las operaciones mentalmente; así

$$38754 \times 9999 = 387501246;$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cuyo resultado se halla (16-3-er CASO); diciendo de 4 á diez 6, de 5 á nueve 4, de 7 á nueve 2, de 8 á nueve 1, de 3 á tres 0; las demás cifras se ponen en el mismo orden en que están escritas, con lo que se tiene el producto hallado.

3.ª *Siempre que el dividendo y divisor puedan dividirse por un mismo número, podrá efectuarse esta división teniendo presente que el cociente no varía, pero que el resto viene dividido por el mismo número* (77).

Por esto cuando el dividendo y divisor terminen en ceros, podrá quitarse en ambos igual número de ellos, lo cual equivale á dividir el dividendo y divisor por un mismo número; de modo que el cociente que se halle será el que buscamos, y el resto vendrá dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimieron en el dividendo.

Sea 24000: 1200 que da 20 de cociente. Quitando dos ceros á la derecha de ambos, se tiene 240: 12, que también da 20 de cociente.

Supongamos, en segundo lugar, que se ha de dividir el número 24000 por 1800. Efectuada la división, vemos que da 13 de cociente y 600 de resto; luego.

$$24000 = 1800 \times 13 + 600.$$

Si ahora quitamos dos ceros al dividende y divisor, hallaremos el mismo cociente 13; pero el resto es 6, y, por consiguiente, 100 veces menor que el verdadero: de modo que por la segunda división, que evidentemente es más fácil que la primera, podremos conocer el cociente y resto de los dos números propuestos, teniendo presente que dicho resto viene dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se separaron en el divisor.

4.ª *Cuando el divisor solamente termina en ceros, se suele abreviar esta operación suprimiendo los ceros en el divisor y separando á la derecha del dividendo tantas cifras como ceros tenía aquél, y el cociente de los dos números que resulten es igual al de los números dados. El resto verdadero de la división se obtiene poniendo á la derecha del resto hallado las cifras que se separaron á la derecha del dividendo.*

En efecto; el dividendo ha sufrido dos alteraciones: 1.ª, se ha disminuído en tantas unidades como expresa el número separado á su derecha; 2.ª, se ha dividido por la unidad seguida de tantos ceros como tiene el divisor. Por la primera, el cociente no ha varia-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

do, puesto que se ha quitado un número menor que el divisor (70 *observación*); pero el resto viene disminuído en tantas unidades como se separaron en el dividendo; por la segunda tampoco varía el cociente, porque no se ha hecho más que dividir el dividendo y divisor por un mismo número; pero en cambio el resto viene dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimieron en el dividendo (77); luego si el resto se multiplica por la unidad seguida de tantos ceros como se suprimieron en el divisor, y al producto se le añaden las unidades que se separon en el dividendo, tendremos el resto verdadero.

Sean los números que se han de dividir 84795 y 2300. Separando á la derecha del dividendo las dos cifras últimas y haciendo abstracción de los ceros en el divisor, quedará la operación reducida á dividir 847 por 23, lo que da 36 de cociente y 19 de resto; luego el cociente de los dos números propuestos será 36, y el resto $19 \times 100 + 95 = 19000 + 95 = 1995$.

LECCIÓN VIII

DIVISIBILIDAD.—Definiciones. Principios en que se funda la divisibilidad de los números.

DIVISIBILIDAD

Definiciones.

79. *Divisibilidad es la parte de la Aritmética que tiene por objeto hallar las condiciones á que debe satisfacer un número para que sea divisible por otro.*

Si un número dividido por otro da un cocienie exacto en números enteros, se dice que el primero es *divisible* por el segundo, y que el segundo *divide* al primero.

Se llama *duplo*, *triplo* y en general *múltiplo* de un número, lo que resulta de multiplicarle por dos, tres y en general por un número entero cualquiera. Y se llama *submúltiplo*, *factor* ó *divisor* de un número, el que le divide exactamente.

Se llama número *par* el que es divisible por 2, y número *impar* el que no lo es; sus expresiones son $2n$ y $2n + 1$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Principios en que se funda la divisibilidad de los números.

80. *Si un número divide á varios, divide también á su suma.*

Sean A, B, C, D... los números que son divisibles por el número n; y Q, Q′, Q″, Q‴... los cocientes enteros: se tendrá la serie de desigualdades.

$$\begin{aligned} A &= nQ \\ B &= nQ' \\ C &= nQ'' \\ D &= nQ''' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

De modo que, sumando ordenadamente y sacando n factor común, se tendrá:

$$A + B + C + D + \ldots = n\,(Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots).$$

Donde vemos que la suma $A + B + C + D + \ldots$ es divisible por n y da por cociente la suma de los cocientes de los súmandos.

CONSECUENCIA. *Si un número divide á otro, divide también á cualquier múltiplo suyo.*

Sea AP el múltiplo de A, número divisible por n.

Por ser $AP = A + A + A + \ldots$, repetido P veces, se sigue que, siendo A divisible por n, lo será la suma $A + A + A + \ldots$; pero esta suma es igual al múltiplo AP; luego el múltiplo de A también es divisible.

81. *Si un número divide á dos, divide también á su diferencia.*

Sean los dos números A y B divisibles por n, sus cocientes respectivos Q y Q′; tendremos

$$\begin{aligned} A &= nQ \\ B &= nQ'; \end{aligned}$$

restando estas dos igualdades y sacando n factor común, se tendrá

$$A - B = n\,(Q - Q').$$

Donde vemos que la diferencia $A - B$ es divisible por n y da por cociente la diferencia de los cocientes Q y Q′.

Este principio se enuncia también diciendo: si *un número divide á una suma de dos sumandos y á uno de éstos, divide necesariamente al otro.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; el segundo sumando es la diferencia que hay entre el primero y la suma; de modo, que siendo estos dos últimos números divisibles por un tercero, su diferencia, que es el otro sumando, también lo será.

CONSECUENCIA. *Si un número divide al dividendo y divisor de una división, divide necesariamente al resto de la misma.*

Sea *n* el número que divide al dividendo A y divisor B; llamando Q al cociente y R al resto, tendremos

$$A = BQ + R.$$

Por dividir *n* á B, divide á su múltiplo BQ (80 *cons.)*, y por dividir á A y BQ, divide á R.

OBSERVACIONES. 1.ª *Si un número divide al divisor y resto, divide también al dividendo.* Porque dividiendo al divisor B, divide á su múltiplo BQ, y, por lo tanto (80), al dividendo A.

2.ª Si un número divide al dividendo y resto, tendrá que dividir (81) al producto del divisor por el cociente; pero no podrá decirse que dividirá á ninguno de ellos en particular.

82. *Si un número divide á uno de dos sumandos y no divide al otro, tampoco dividirá á la suma, y el resto de la división será el mismo que dé el sumando no divisible.*

La primera parte puede demostrarse por reducción al absurdo. En efecto; siendo divisible uno de los sumandos y el otro no, la suma tampoco lo será; porque si fuera divisible, tendría que serlo también el otro sumando (81), lo cual es contra la hipótesis; luego no puede ser divisible.

En cuanto á la segunda parte, representando por A y B. los sumandos, de los cuales uno es divisible por el número *n* y el otro no, tendremos:

$$A = nQ$$
$$B = nQ' + R.$$

Sumando ordenadamente y sacando *n* por factor común en los dos primeros sumandos del segundo miembro, se tendrá

$$A + B = n\,(Q + Q') + R.$$

Donde se ve que la suma A + B de los dos números no es divisible por *n*, puesto que da un resto R, que es precisamente el mismo que daba el sumando no divisible.

83. *Si un número divide al minuendo y no divide al sustraendo,*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tampoco dividirá á la diferencia, y el resto de la división será lo que le falte al que da el sustraendo para ser igual al divisor.

En efecto; sea n un número que divide al minuendo A de una diferencia y que no divide al sustraendo B de la misma; representando por Q el cociente exacto de la división de A por n, y por Q′ y R el cociente entero y resto de la de B por n, tendremos:

$$A = nQ$$
$$B = nQ' + R.$$

Restando de la primera igualdad la segunda, y sacando n factor común en los dos primeros términos del segundo miembro, se tiene:

$$A - B = n(Q - Q') - R.$$

Debiéndose disminuir R del producto del divisor por el cociente para obtener el dividendo, según indica la igualdad anterior, es señal que la división está hecha por exceso; de modo que quitando una unidad del cociente, y añadiendo una vez el otro factor n para que haya compensación (59), quedará la división hecha por defecto, y se tendrá, llamando D á la diferencia A — B,

$$D = n(Q - Q' - 1) + n - R.$$

Donde vemos que el dividendo D, que expresa la diferencia de los números A y B, dividido por n, no da cociente exacto, con lo cual queda probada la primera parte del principio; el resto de la división es n—R, es decir, lo que le falta á R para ser igual al divisor n, que es lo segundo que debíamos demostrar.

84. *Si se tienen varios números que no son divisibles por otro, la suma lo será, siempre que lo sea la de los restos que dan los sumandos.*

Sean A, B, C, D... varios números que no son divisibles por n; Q, Q′, Q″, Q‴... los cocientes respectivos de dividir dichos números por n, y R, R′, R″, R‴... los restos. Tendremos la serie de igualdades:

$$\begin{aligned} A &= nQ + R \\ B &= nQ' + R' \\ C &= nQ' + R'' \\ D &= nQ''' + R''' \\ &\cdots\cdots\ \cdots\ \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

que, sumadas y sacando n factor común, nos dan:

$$A + B + C + D + \ldots = n\,(Q + Q' + Q'' + Q''' + \ldots) + (R + R' + R' + R'' + R''' + \ldots).$$

Donde vemos que la suma $A+B+C+D+\ldots$ de los números propuestos, está descompuesta en dos partes: una $n\,(Q+Q'+Q''+Q'''+\ldots)$, que evidentemente es divisible por n, y otra $(R+R'+R''+R'''+\ldots)$, que es la suma de los restos que dan las divisiones de los sumandos; y como por hipótesis esta suma es divisible por n, lo será también (80) $A+B+C+D+\ldots$, que es lo que debíamos demostrar.

OBSERVACIÓN. Si la suma de los restos no es divisible por un cierto número, tampoco lo será la de los números propuestos (82), y el resto de la división será el que dé la suma de los restos.

85. *Si un número no divide á otro, dividirá, sin embargo, á un múltiplo suyo, siempre que divida al mismo múltiplo del resto.*

Sea A el número que no es divisible por n, y AP el múltiplo de A.

No siendo A divisible por n, tendremos, llamando Q al cociente y R al resto:

$$A = nQ + R;$$

de donde

$$AP = nQP + RP.$$

El múltiplo AP, por lo que se ve, está descompuesto en dos sumandos: uno nQP, que es evidentemente divisible por n, y otro RP, múltiplo de R, que también lo es por hipótesis; luego AP también lo será (80).

Si el múltiplo RP no fuese divisible por el número n, tampoco lo sería AP (82), siendo el resto el que diese el mismo múltiplo RP.

86. *Si un número no divide á dos, tampoco dividirá á la diferencia, á no ser que los restos obtenidos sean iguales.*

Sean los números A y B, que no son divisibles por n y dan los restos R y R′; tendremos, llamando Q y Q′ á los cocientes:

$$A = nQ + R$$
$$B = nQ' + R'.$$

Restando y sacando n factor común, se tendrá:

$$A - B = n\,(Q - Q') + (R - R').$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Donde vemos que la diferencia A — B de los dos números dados está descompuesta en dos sumandos: uno $n(Q - Q')$, que es evidentemente divisible por n, y otro R — R′, que no lo es; porque siendo R y R′ menores que n, su diferencia R — R′ también lo será, y, por consiguiente, no puede ser divisible por n, y, según lo ya demostrado (82), A—B tampoco lo será; pero sí R=R′; entonces R — R′=0, y A — B=$n(Q - Q')$, número que evidentemente es divisible por n.

OBSERVACIÓN. Se ha supuesto tácitamente en todos los principios en que se han considerado números no divisibles, que los cocientes se han hallado por defecto, en cuyo caso los restos obtenidos hay que agregarlos á los productos del divisor por el cociente entero; pero si los cocientes se obtienen unos por exceso y otros por defecto, los principios tienen que sufrir alguna modificación en el enunciado ordinario; cuya modificación será la que resulte de considerar las sumas y restas de los residuos, no como sumas aritméticas, sino como sumas ó restas algebraicas (52).

Asi, por ejemplo, en el último principio que se ha demostrado, hemos visto que si dos números se dividen por un tercero y dan un mismo resto R, su diferencia es divisible por el mismo número; además, que si las restas no son iguales, la diferencia de los números no puede ser divisible por el número en cuestión. En la demostración hemos supuesto tácitamente al establecer las igualdades

$$A = nQ + R \quad y \quad B = nQ' + R',$$

que las divisiones están hechas por defecto, y de estas igualdades hemos deducido:

$$A - B = n(Q - Q') + R - R'.$$

Ahora bien: si la primera división la hubiéramos hecho por defecto y la segunda por exceso, ó al contrario, hubiéramos obtenido los dos pares de igualdades

$$\begin{array}{l} A = nQ + R \\ B = nQ' - R' \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} A = nQ - R \\ B = nQ' + R', \end{array}$$

que, restadas, nos hubieran dado (53):

$$A - B = n(Q - Q') + R - (-R') = n(Q - Q') + R + R',$$

ó

$$A - B = n(Q - Q') - R - R' = n(Q - Q') - (R + R');$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

donde vemos que la diferencia de los dos números A y B siempre viene expresada por la suma ó diferencia de dos cantidades, la una $n\,(Q - Q')$, que es divisible por n, y la otra que expresa la diferencia algebraica de los restos R y R′; de modo que si esta diferencia es cero ó divisible por n, la diferencia de los dos números A y B también lo será, y dejará de serlo si aquélla no es cero ó divisible por n.

LECCIÓN IX

Caracteres de divisibidad de un número por 2, 5, 4, 25, 8, y 125.—Caracteres de divisibilidad de un número por 3 y 9.—Caracteres de divisibilidad de un número por 11.

Caracteres de divisibilidad de un número por 2, 5, 4, 25, 8 y 125.

87. *Un número es divisible por* 2 *cuando su última cifra de la derecha es cero ó par.*

En efecto; si la última cifra de la derecha de un número es cero, será múltiplo de 10; y como 10 es divisible por 2, su múltiplo, y, por consiguiente, el número, también lo será.

Si la última cifra es par, descomponiendo el número, que podrá estar representado por N = ... *fedcba*, en sus decenas y unidades, tendremos:

$$N = ...fedcb \,.\, 10 + a \quad [1];$$

el primer sumando, por ser múltiplo de 10, es divisible por 2; el segundo lo es por hipótesis; luego la suma, y, por consiguiente, el número N también lo será (80).

88. *Si la última cifra de un número no es cero ni cifra par, el número no será divisible por* 2.

En efecto; en la igualdad [1] se ve, que siendo impar la cifra a de las unidades, no es divisible por 2; y como el primer sumando o es, se sigue (82) que la suma, y, por consiguiente, el número N, no puede serlo.

89. *Un número es divisible por* 5 *cuando su última cifra de la derecha es cero ó cinco.*

90. *Si la última cifra de un número no es cero ni cinco, dicho número no será divisible por* 5.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La demostración es la misma que para el 2.

91. *Un número es divisible por* 4 *cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros ó forman un número divisible por* 4.

En efecto; si las dos últimas cifras de un número son ceros, será múltiplo de 100, y como 100 es divisible por 4, su múltiplo y, por consiguiente, el número, también lo será.

Si las dos últimas cifras del número, que podrá estar representado por N = ...*fedcba*, forman un número divisible por 4, descomponiéndole en sus centenas y unidades, tendremos:

$$N = ...fedc \,.\, 100 + ba \qquad [2];$$

la primera parte, por ser múltiplo de 100, es divisible por 4; la segunda lo es también por hipótesis; luego la suma, y, por consiguiente, el número N, también lo es (80).

92. *Si las dos últimas cifras de un número no son ceros ni forman otro divisible por cuatro, el número no será divisible por* 4.

En efecto; de la igualdad [2] se deduce que, siendo la primera parte divisible por 4, por ser múltiplo de 100, y no siéndolo la segunda por hipótesis, el número N tampoco lo será (82).

93. *Un número es divisible por* 25 *cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros ó forman un número divisible por* 25.

94. *Si las dos últimas cifras de la derecha de un número no son ceros ni forman otro divisible por* 25, *el número tampoco será divisible por* 25.

La demostración es la misma que para el 4.

95. Análogamente se demostraría que si las tres últimas cifras de la derecha de un número son ceros ó forman un número divisible por 8 ó 125, el número también será divisible por 8 ó 125.

Y si no son ceros ni forman un número que sea divisible por cualquiera de estos dos, el propuesto tampoco lo será.

En general, un número N será divisible por 2^n ó 5^n cuando sus n últimas cifras sean ceros ó formen un número divisible por 2^n ó 5^n, y no lo será en el caso contrario.

Caracteres de divisibilidad de un número por 3 ó 9.

96. *Un número es divisible por* 3 *ó* 9 *cuando la suma del valor numérico de sus cifras lo sea también.*

Para demostrar este principio, conviene probar antes el siguiente

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LEMA. *Toda potencia de* 10, *disminuída en una unidad, es divisible por* 9 *y, por consiguiente, por* 3.

En efecto; una potencia cualquiera de 10, siendo el producto de tantos factores iguales á 10 como unidades tiene el exponente, será igual á la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene dicho exponente. Ahora bien: si de la unidad seguida de ceros se quita una unidad, quedará un número compuesto de tantos nueves como ceros acompañaban á dicha unidad; pero un número que sólo tenga nueves, es evidentemente divisible por 9, y, por consiguiente, por 3; luego toda potencia de 10 disminuída en una unidad, es divisible por 3 y 9.

Justificado este lema, pasemos á demostrar el principio, y sea en general N = ... *fedcba* el número propuesto.

Descomponiendo este número en sus diferentes unidades, tendremos:

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + \ldots$$

Si á las diferentes potencias de 10 que figuran en la igualdad anterior les quitamos una unidad, resultarán los números $(10-1)\,b$, $(10^2-1)\,c$, $(10^3-1)\,d$, $(10^4-1)\,e$, $(10^5-1)\,f$... que serán, según el lema anterior y el número (80, *cons.*), divisibles por 3 y 9; luego la suma también lo será (80). Pero habiendo disminuído cada factor de los diferentes productos anteriores en una unidad, éstos vendrán disminuídos en una vez el otro factor; luego agregando las cantidades que hemos disminuído al quitar la unidad á las diferentes potencias de 10, podremos poner el número N bajo la forma

$$N = \begin{cases} (10-1)\,b + (10^2-1)\,c + (10^3-1)\,d + (10^4-1)\,e + \ldots \\ a + b + c + d + e + \ldots \end{cases}$$

ó lo que es lo mismo

$$N = M + S, \qquad [1]$$

siendo M la suma de los números de la primera línea, y S la de los números de la segunda.

Ahora bien: si suponemos que la suma S del valor numérico de las cifras del número N es divisible por 3 ó por 9, como M siempre es divisible por estos dos números, según hemos visto, se sigue que la suma M + S, y, por consiguiente, N también lo será.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

97. *Si la suma del valor numérico de las cifras de un número no es divisible por* 3 *ni por* 9, *el número tampoco lo será.*

En efecto; de la igualdad [1] se deduce que, siendo M divisible por 3 y 9, si la suma S de las cifras del número no lo fuera, el número N tampoco lo sería (82).

Caracteres de divisibilidad de un número por 11.

98. *Un número es divisible por* 11 *cuando la diferencia que hay entre la suma de las cifras de lugar impar, y la de las cifras de lugar par, es cero ó divisible por* 11.

Para demostrar este principio, conviene anteponer los dos lemas siguientes:

1.° *Toda potencia par de* 10 *disminuída en una unidad, es divisible por* 11.

2.° *Toda potencia impar de* 10 *aumentada en unidad, es divisible por* 11.

1.° Toda potencia par de 10 disminuída en una unidad, es igual á un número que está compuesto de un número par de nueves, pero cada par de nueves es divisible por 11; luego todo el número lo será, con lo cual queda demostrado lo primero que se quería.

2.° Toda potencia impar de 10 aumentada en una unidad podrá representarse por $10^{2n+1}+1$; pero, según la definición de potencia, se tiene

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10.$$

Quitando una unidad al factor 10^{2n}, y aumentando al resultado el otro factor 10, que es en lo que se disminuyó el producto (59), se tendrá:

$$10^{2n+1} = (10^{2n} - 1) \times 10 + 10;$$

aumentando ahora ambas cantidades en una unidad, tendremos

$$10^{2n+1} + 1 = (10^{2n} - 1) \times 10 + 11;$$

donde vemos que el primer sumando del segundo miembro de esta igualdad, por ser un múltiplo de una potencia par de 10 disminuída en una unidad, es divisible por 11; el segundo evidentemente también lo es; luego $10^{2n+1}+1$ es divisible por 11, según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Justificados los dos lemas anteriores, pasemos á demostrar el principio, y sea N = ... *fedcba* el número propuesto, que, descompuesto en sus diferentes unidades, nos dará:

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + \ldots$$

Observando ahora que las potencias de 10 que hay en el segundo miembro son alternativamente pares é impares, podremos hacer, según los dos lemas demostrados, que estos números sean divisibles por 11, con solo disminuir y aumentar alternativamente la unidad á dichas potencias: de modo que aumentando y disminuyendo, alternativamente también, las cifras del número para compensar el error cometido (59) al aumentar ó disminuir la unidad á cada uno de los factores de los diferentes productos, tendremos que el número N podrá ponerse bajo la forma

$$N = \begin{cases} (10+1)b + (10^2-1)c + (10^3+1)d + (10^4-1)e + \ldots \\ a - b + c - d + e - \ldots \end{cases}$$

ó lo que es lo mismo

$$N = M \pm D, \qquad [2],$$

siendo M la suma de los números de la primera línea, que por ser todos divisibles por 11, dicha suma M también lo será, y D la diferencia numérica que hay entre la suma de las cifras de lugar par y de lugar impar, es decir,

$$D = a - b + c - d + e - \ldots = a + c + e + \ldots - (b + d + \ldots).$$

Ahora bien: si la suma $a+c+e+\ldots$ de las cifras de lugar impar es mayor que la suma $b+d+f+\ldots$ de las cifras de lugar par, tendremos que agregar á M dicha diferencia D, y en el caso de ser la primera suma menor que la segunda, tendremos que restar de M la diferencia D; por lo que hemos puesto en la expresión [2] del número N el signo $\pm$, según que la suma de las cifras de lugar impar sea mayor ó menor que la de las cifras de lugar par.

Esto supuesto, se ve que si la diferencia D es cero, el número N queda reducido en la igualdad [2] á M, número que, según hemos visto, es divisible por 11. Si D no es cero, y sí divisible por 11, el número N se halla descompuesto en dos partes, M y D, que son divisibles por 11; luego su suma ó su diferencia, según se tome el signo + ó −, también lo será (80 y 81).

(c) Instituto Cervantes de Madrid

99. *Si la diferencia que hay entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras del lugar par no es cero ni divisible por* 11, *el número tampoco lo será.*

En efecto; la igualdad [2] nos indica que siendo siempre M divisible por 11, y no siéndolo D, no podrá serlo ni su suma, ni su diferencia (82 y 83), y, por consiguiente, el número N no será divisible por 11.

LECCIÓN X

Método general para conocer cuándo un número es divisible por otro. Aplicación á los números 7, 13 y 37.—Resto de la división de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conoce.—Prueba de la multiplicación por nueve.

Método general para conocer cuándo un número es divisible por otro. Aplicación á los números 7, 13 y 37.

100. Vamos á exponer un método general para deducir las condiciones á que debe satisfacer un número N para que sea divisible por otro n.

Consiste este método en descomponer el número N en dos partes: una que sea exactamente divisible por n, y otra que nos exprese la condición de divisibilidad, condición que podrá ser más ó menos sencilla, y, por lo tanto, su aplicación será de mayor ó menor interés en la práctica.

Sea, como siempre,

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + 10^7h + \ldots$$

Dividiendo ambas expresiones por n, se tendrá (57)

$$\frac{N}{n} = \frac{a}{n} + \frac{10b}{n} + \frac{10^2c}{n} + \frac{10^3d}{n} + \frac{10^4e}{n} + \frac{10^5f}{n} + \ldots \quad [1]$$

Debiendo ser el primer miembro de esta igualdad un número entero, el segundo también lo será; para lo cual es necesario que sea cero ó divisible por n la suma algebraica de los restos que se obtienen en las divisiones indicadas en el segundo miembro (84). Y recíprocamente, si dicha suma algebraica es cero ó divisible por n, el segundo miembro, lo mismo que el primero, serán números

(c) Instituto Cervantes de Madrid

enteros; con lo cual queda hallada la condición necesaria y suficiente para que N sea divisible por n.

Para hallar la suma de estos restos, dividamos por n las diferentes potencias de 10 que figuran en el segundo miembro, y encontraremos un número de restos distintos, igual á lo más á $n-1$, que se repetirán periódicamente según vaya creciendo el exponente de la potencia. Con el objeto de que el número de restos diferentes sea el menor posible, conviene hacer las divisiones por defecto ó exceso, según convenga para que el resto que se obtenga no sea mayor que la mitad del divisor n, en cuyo caso el número de estos restos será á lo más igual á

$$\frac{1}{2}(n+1).$$

Suponiendo hechas estas divisiones y llamando r, r', r'', r'''... á los diferentes restos que se obtienen, ya sea por defecto, ya por exceso, al dividir por n la unidad seguida de uno, dos, tres, etc. ceros, los restos de las divisiones indicadas en el segundo miembro de la igualdad [1] serán a, rb, $r'c$, $r''d$... (72); luego la condición pedida será que la suma algebraica

$$a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm r'''e \pm \ldots$$

sea cero ó un número divisible por n.

Aplicando cuanto hemos dicho al número 7, vemos que los restos de dividir por 7 las diferentes potencias de 10, son 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3...; y tomando los cocientes por exceso en el caso de ser el resto mayor que la mitad del divisor 7, tendremos que los valores numéricos de los nuevos restos serán

1, 3, 2, 1, 3, 2, 1...

de los cuales tomaremos los primeros como sumandos, y, por lo tanto, con el signo +; y los segundos como sustraendos ó con el signo —; de modo, que si se tiene

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + 10^6g + \ldots,$$

la condición para que el número N sea divisible por 7, será que la suma

$$a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h + \ldots$$

sea cero ó divisible por 7.

$a = Bq + R$
$a = B(q+1) - R'$
$0 = B - (R + R')$

la suma de los restos por defecto y por exceso es = al divisor

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si esta condición no se verifica, el número N no es divisible por 7; luego

* 101. *Para que un número sea divisible por* 7, *es necesario y suficiente que dividiéndole en períodos de tres cifras, principiando por la derecha y multiplicando cada una de estas cifras por los números respectivos* 1, 3, 2, *la suma de los productos de los períodos de lugar impar que así resulten, menos la de los productos de los períodos del lugar par, sea cero ó divisible por* 7.

Haciendo lo mismo con el número 13, veremos que los restos de dividir por 13 las diferentes potencias de 10, son 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10... y tomando los complementarios (*) de los que pasan de la mitad de 13, tendremos los restos

$$1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, -4, -1, \text{etc.},$$

en los cuales los signos están de manifiesto: de modo que la condición de divisibilidad de un número N por 13, estará expresada por ser cero ó divisible por 13 la suma algebraica

$$a - 3b - 4c - d + 3e + 4f + g - 3h - \ldots$$

Si esta suma no es cero ni divisible por 13, el número N no será divisible por 13; luego

* 102. *Para que un número sea divisible por* 13, *es necesario y suficiente que separando la primera cifra de la derecha, dividiendo lo que queda en períodos de tres cifras, y multiplicándolas respectivamente por los numeros* 3, 4 *y* 1, *la suma de los productos de los períodos de lugar impar, contando como tal la cifra separada de las unidades, menos la suma de los productos de los períodos de lugar par, sea cero ó divisible por* 13.

Aplicando, por último, la fórmula al número 37, hallaremos por restos 1, 10, 26, 1, 10, 26, etc., los cuales se reducen, tomando los complementarios de los que son mayores que la mitad de 37, á 1, 10,—11, 1, 10,—11, etc., y la condición será que la suma algebraica

$$a + 10b - 11c + d + 10e - 11f + \ldots$$

sea cero ó divisible por 37.

(*) Entendemos por resto *complementario* el que se obtiene efectuando la división por exceso.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si esta suma no es cero ni divisible por 37, el número N no será divisible por 37; luego

* 103. *Para que un número sea divisible por* 37, *es necesario y suficiente que dividiéndole en períodos de dos y una cifra, la suma de los primeros menos la de los segundos multiplicados por* 11, *sea cero ó divisible por* 37.

Medio de hallar el resto de la división de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conoce, sin hacer la división.

104. El método que hemos seguido para hallar los caracteres de divisibilidad de un número por otro número *n*, consiste en descomponer el número dado en dos partes: una que es siempre divisible por el número en cuestión, y otra que expresa la condición de divisibilidad: de modo que si esta segunda parte es cero ó divisible por *n*, el número lo será también, y el resto de la división será por lo tanto cero; pero si dicha segunda parte no es cero ni divisible por el número de que se trata, el número propuesto tampoco será divisible, y la division dará, por lo tanto, un resto distinto de cero, que es lo que precisamente tratamos de hallar.

Ahora bien: si el valor numérico de la segunda parte de las dos en que hemos descompuesto el número se ha de agregar al de la primera, el resto de esta segunda parte será el mismo que dará el número propuesto (82). Pero si por el contrario, el valor numérico de dicha segunda parte se ha de restar de la primera para obtener el número, en este caso el resto no será el que da la segunda parte, sino lo que le falte á este resto para ser igual al número divisor (83).

Así, por ejemplo, el resto que da la división de un número por 3 ó 9 será siempre el que da la suma del valor numérico de sus cifras; porque siempre se descompone el número en un múltiplo de 9, y, por consiguiente, de 3, más la suma del valor numérico de sus cifras; luego el resto de la división de esta suma será siempre el del número.

En el caso de hallar el resto de la división de un número por 11, debemos observar que el carácter de divisibilidad se ha determinado descomponiendo el número en un múltiplo de 11 más la suma de las cifras de lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par; y, por consiguiente, cuando la primera suma es mayor que la segunda, el número está representado por la suma del múltiplo de 11 y la diferencia de ambas sumas, y, por lo tanto, el res-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

to que dé esta diferencia será el del número propuesto. Pero si la suma de las cifras de lugar impar es menor que la de las cifras de lugar par, el número estará representado por la diferencia de las dos partes anteriormente citadas; de modo que si la segunda parte, es decir, la diferencia entre las sumas de las cifras de lugar impar y par no es divisible por 11, el résto que dé no será el que da el número, sino lo que le falta á dicho resto para ser lugar á 11.

Del mismo modo se hallaría el resto de la división de un número por otro cuyo carácter de divisibilidad se conociese, sin necesidad de practicar la división.

Prueba de la multiplicación por nueve.

105. Una de las aplicaciones de poder hallar con facilidad el resto de la división de un número por otro, es la prueba de la multiplicación llamada del 9.

Sin embargo de que la mejor prueba de una operación es repetirla hasta persuadirse de su exactitud, vamos á poner la llamada del 9, la cual podría aplicarse á cualquiera de las operaciones; pero que nosotros sólo la aplicaremos á la de multiplicar, haciendo ver al mismo tiempo hasta qué punto es verdadera.

Esta prueba se enuncia diciendo: *Si se suman las cifras del multiplicando y de dicha suma se quitan los nueves que se puedan y se anota el número resultante,* lo que equivale á hallar el resto de la división por 9, *y hacemos lo mismo con el multiplicador y producto, el resto que éste dé tiene que ser, para que la operación esté bien hecha, el mismo que da el producto de los dos restos del multiplicando y multiplicador.*

En efecto; habiendo descompuesto los factores y el producto en un múltiplo de 9 más los restos; llamando A al multiplicando, B al multiplicador, P al producto y R, R′, R″ á los restos respectivos de la división por 9, tendremos:

$$\begin{aligned} A &= m9 + R \\ B &= m'9 + R', \end{aligned}$$

de donde multiplicando se hallará (55)

$$A \times B = mm'9^2 + m'R9 + mR'9 + RR',$$

y como los primeros tres números son múltiplos de 9, su suma

(c) Instituto Cervantes de Madrid

también lo será (80); luego se tendrá

$$A \times B = M9 + RR',$$

representando por M9 la suma de los tres primeros números.

Ahora bien:

$$A \times B = P = m''9 + R'';$$

luego

$$M9 + RR' = m''9 + R''.$$

De modo que siendo R'' el resto que da el número P, y el de $A \times B$ el que dé el producto RR', se sigue que el resto R'' del producto P es el mismo que da el producto RR' de los dos restos del multiplicando y multiplicador; luego cuando la operación esté bien hecha, se debe verificar que el resto de dividir por 9 el producto de los dos restos de los factores, será el mismo que dé el producto.

Sin embargo, no siempre que se verifique la prueba será cierta la operación.

En efecto; supongamos, efectuado el producto de dos números, que la operación esté bien, y que la prueba quede satisfecha: es evidente que si cambiamos de lugar las cifras del multiplicando, multiplicador ó producto, la prueba quedará todavía satisfecha; mientras que la operación estaría muy mal; es decir, que el número que se considera como producto será muy diferente del que darían los factores propuestos; luego si puede estar la prueba satisfecha, y, sin embargo, la operación estar mal efectuada, no debemos tomar la prueba como tal.

LECCIÓN XI

Máximo común divisor de dos números.—Máximo común divisor de varios números.—Observaciones.

Máximo común divisor de dos números.

106. Llámase en general *máximo común divisor* de dos ó más números, el mayor número que los divide á todos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La investigación del máximo común divisor de dos números está fundada en los dos principios siguientes:

1.° *Todo número que divide á otro es el máximo común divisor de los dos.*

Sean A y B dos números de los cuales uno de ellos, B, por ejemplo, divide al otro.

El *m. c. d.* de A y B no puede ser mayor que B, puesto que tiene que dividirle; luego si B divide al número A, como también se divide á sí mismo, B será el máximo común divisor de los dos números.

2.° *Si la división de un número por otro no es exacta, el* m. c. d. *de los dos números es igual al del menor y el resto de la división.*

Sea A el número mayor, B el menor y R el resto de la división.

Representemos por D el *m. c. d.* de A y B, por D′ el de B y R, y vamos á demostrar que D es igual á D′: dispongamos para más facilidad los datos como indicamos al margen:

Por ser D un divisor de A y B, lo es también del resto R (80 *cons.);* luego es un divisor común de B y R; pero el mayor divisor común de B y R es D′; luego D $\not<$ D′. Veamos si puede ser menor.

$$D \left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ R \end{matrix} \right\} D'$$

D′ es un divisor común de B y R; luego lo será *también de A.* (80 *obser.)*, y, por consiguiente, es factor ó divisor común de A y B: pero el mayor común divisor de A y B es D; luego D′ $\not<$ D, ó lo que es igual D $\not<$ D′.

Ahora bien: si D no puede ser mayor ó menor que D′, tendrá que ser D igual á D′, según queríamos demostrar.

107. Probados estos dos principios, pasemos á la investigación del *m. c. d.* de dos números que representaremos por A y B.

Dividamos el mayor por el menor, y si la división es exacta, el menor, que supondremos sea B, será, según el primer principio, el máximo común divisor buscado.

Si la división no es exacta, dará un cierto resto R, y el *m. c. d.* de A y B será igual, según el principio segundo, al de B y R.

Dividamos ahora B por R, y si la división es exacta, R será el *m. c. d.* buscado; pero si no lo es, dará un segundo resto R′, y se tendrá que el *m. c. d.* de B y R será el mismo que el de R y R′.

Continuando del mismo modo dividiendo R por R′, R′ por R″, R″ por R‴, etc., llegaremos necesariamente á un cierto resto que dividirá al anterior, en cuyo caso este último resto será el *m. c. d.* de los dos números dados.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Que llegaremos á un resto que divida al anterior, es indudable; porque siendo todos enteros y decrecientes, se ha de llegar necesariamente, después de un número limitado de divisiones, á una cuyo resto sea cero; pues de lo contrario habría un número infinito de números enteros menores que B y mayores que *cero*, lo cual es un absurdo.

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general que:

106. *Para hallar el máximo común divisor de dos números se divide el mayor por el menor; si el resto de esta división es cero, el menor de los dos números será el* m. c. d. *pedido. Si dicho resto no es cero, se divide el menor por este primer resto, y si el de la nueva división es cero, el anterior será el* m. c. d. *buscado. Si tampoco fuese cero, se divide el primer resto por el segundo, y se continúa del mismo modo hasta llegar á un resto cero, en cuyo caso el anterior será el* m. c. d. *buscado.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m. c. d.* de los números 5808 y 3984.

Dispondremos la operación del modo siguiente:

5808	3984	1824	336	144	48
	1	2	5	2	3
1824	336	144	48	0	

Dividamos 5808 por 3984, y hallaremos 1 por cociente y 1824 por resto; de donde deduciremos que 3984 no es el *m. c. d.* buscado, pero que lo será el de los números 3984 y 1824. Dividamos 3984 por 1824, y obtendremos el cociente 2 y el resto 336; por tanto, el *m. c. d.* buscado no es 1824, y sí lo será el de los números 1824 y 336. Dividamos, pues, 1824 por 336, y encontraremos el cociente 5 y el resto 144, de donde concluiremes que el *m. c. d.* que se busca es igual al de los números 336 y 144. Dividamos 336 por 144, y hallaremos el cociente 2 y el resto 48; dividamos, finalmente, 144 por 48, y hallaremos el cociente 3 y el resto *cero,* de donde se deducirá que 48 es el máximo común divisor de los dos números propuestos.

Máximo común divisor de varios números.

109. *Todo número que divide á otros dos, divide también á su máximo común divisor.*

En efecto; todo número *n* que divide á otros dos, divide también al resto de la división (80 *cons.*). Dividiendo *n* al número me-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

nor y al primer resto, divide, según el mismo principio, al segundo resto. Del mismo modo se vería que n divide á todos los demás restos; pero el último es el *m. c. d.*: luego éste es divisible por el número n, según queríamos demostrar.

110. *El máximo común divisor de varios números es el mismo que el del* m. c. d. *de dos cualesquiera de ellos y todos los demás.*

Sean A, B, C, D... varios números cuyo *m. c. d.* llamaremos M; sea M′ el *m. c. d.* de A y B; finalmente, sea M_1 el *m. c. d.* de M′, C, D..., y vamos á demostrar que M es igual á M_1.

En efecto; el número M, siendo el *m. c. d.* de los números propuestos, divide en particular á los números A y B, y, por tanto, á su *m. c. d.* M′, de modo que M. es un divisor común de M′, C. D...; pero el mayor común divisor de estos números es M_1; luego $M \not< M_1$. Veamos si puede ser menor.

$$M \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} M' \left\{ \begin{matrix} M' \\ C \\ D \\ \vdots \end{matrix} \right\} M_1$$

Por ser M_1 el *m. c. d.* de M′, C, D... divide en particular á M′; y, por consiguiente, á sus múltiplos A y B, de donde se deduce que M_1 es un común divisor de los números A, B, C, D...; pero el mayor común divisor de estos números es M; luego $M_1 \not< M$, ó el que es lo mismo $M \not< M_1$. Ahora bien; si M no puede ser mayor ni menor que M_1, tendrá que ser M igual á M_1, según queríamos demostrar.

La investigación del máximo común divisor de n números queda reducida, según el principio anterior, á la $n-1$ números, esta á la de $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar á la investigación del *m. c. d.* de dos números.

Así, por ejemplo, si quisiéramos hallar el *m c. d.* de los cuatro números

A, B, C, D,

principiaremos por buscar el de dos de ellos A y B, el cual supondremos sea M, y la cuestión queda reducida á determinar el *m. c. d.* de los tres números

M, C, D.

Busquemos el *m. c. d.* de M. y C, el cual supondremos sea M′; y, por tanto, el máximo común divisor de M, C, D será el mismo que el de M′ y D.

Hallando el *m. c. d.* de M′ y D, y representándole por M″, éste será el de los números propuestos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general que:

111. *Para hallar el máximo común divisor de varios números, se principia por buscar el de dos de éstos, después se determina el del número hallado y otro de los propuestos, y así se continúa hasta haber empleado todos los números. El último máximo común divisor hallado será el de los números propuestos.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m. c. d.* de los cuatro números

2860, 2730, 1365, 468.

Principiaremos por buscar el *m. c. d.* de los dos números 2860 y 2730, y hallaremos el número 130; por tanto, la cuestión queda reducida á determinar el *m. c. d.* de los tres números

130, 1365, 468.

El *m. c. d.* de 130 y 1365 es 65: por consiguiente el de los tres números anteriores es el mismo que el de los números 65 y 468. El *m. c. d.* de estos números es 13, luego 13 será el *m. c. d.* de los números propuestos.

Cuando dos ó más números no tienen más divisor común que la unidad, se dice que son *primos entre sí*; así los números 8 y 9 son primos entre sí, lo mismo que los números 6, 13 y 16. Cuando son más de dos los números que se consideran, puede suceder que un factor, sin ser común á todos, lo sea á dos ó más, por cuya razón, en vez de decir que dichos números son *primos entre sí*, se dirá que no tienen más factor co m ún que la unidad.

Observaciones.

1.ª Si al hallar el máximo común divisor de dos números se llegan á obtener dos restos consecutivos primos entre sí, no se debe continuar la serie de operaciones; porque los números propuestos son primos entre sí también, puesto que su *m. c. d.* es igual al de los dos restos consecutivos. Del mismo modo, si en el *m. c. d.* de varios números hallamos que dos, cualesquiera de los que en este procedimiento se consideran, son primos entre sí, no debemos continuar los cálculos, porque los números propuestos no tendrán más común divisor que la unidad.

2.ª Al hallar el *m. c. d.* de varios números, se debe siempre principiar por buscar el de los dos más pequeños, porque los cálculos son más breves.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

3.ª *Si un número divide á varios, divide también al* m. c. d. *de todos.*

Porque dividiendo á los dos primeros números, divide, según lo demostrado (109), á su *m. c. d.* M; dividiendo á M y al tercer número, dividirá á su *m. c. d.* M′, y así sucesivamente hasta llegar al último *m. c. d.*, que es el de todos.

4.ª El 2.° principio demostrado en el número 104 no exige que la división esté hecha por defecto: se verifica igualmente aunque lo esté por exceso, y se demuestra de la misma manera; por lo tanto, las divisiones que hay que hacer en la investigación del *m. c. d.* pueden practicarse por exceso ó defecto, con el objeto de que el resto no sea mayor que la mitad del divisor, consiguiendo de este modo que el número de estas divisiones sea el más pequeño posible.

Así, por ejemplo, si aplicásemos á los dos números 34.566 y 5838 el procedimiento ordinario del *m. c. d.*, tendríamos que hacer siete divisiones para hallar el *m. c. d.* 42; más por este método abreviado sólo tenemos que hacer cuatro, según se ve:

34566	5838	462	168	42
	5	12	2	4
5376	1218	126	0	
	294			

Para hacer esta abreviación no hay más que seguir el método ordinario, y cuando se tenga un resto que sea mayor que la mitad del divisor, se pone por divisor de la división siguiente el resto complementario. Así, la primera división de este ejemplo ha dado el resto 5376, que es mayor que la mitad del divisor, por lo que en vez de poner como divisor dicho resto, hemos puesto su complementario 462. Lo mismo se ha hecho en las demás divisiones, obteniendo de este modo el *m. c. d.* de los números dados con tres operaciones menos que por el método ordinario.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XII

Principios relativos al máximo común divisor.—Límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigación del *m. c. d.* de dos números.

Principios relativos al máximo común divisor.

112. *Si se multiplican dos ó más números por otro cualquiera, el* m. c. d. *viene multiplicado por este otro.*

Supongamos, en primer lugar, que sólo sean dos los números A y B, y que su *m. c. d.* sea D.

Si multiplicamos A y B por el número *n*, el primer resto R vendrá multiplicado por *n*, el segundo R′ también quedará multiplicado por *n*, y del mismo modo veríamos que todos los demás vienen multiplicados por el mismo número: luego el último, y, por consiguiente, el *m. c. d.* queda multiplicado por *n*.

Sean, en segundo lugar, varios números A, B, C, D..., cuyo *m. c. d.* representaremos por M_1.

Multiplicando todos estos números por *n*, quedan multiplicados en particular los números A y B, y, por tanto, su *m. c. d.* M. Multiplicados por *n* los números M y C., su *m. c. d.* M′ también queda multiplicado. Del mismo modo habiéndose multiplicado los números M′ y D por *n*, su *m. c. d.* también lo estará. Continuando del mismo modo se vería que el último *m. c. d.*, ó sea M_1, que es de los números propuestos, viene también multiplicado por *n*, según queríamos demostrar.

113. *Si se dividen dos ó más números por otro cualquiera, el* m. c. d. *vendrá dividido también por este número.*

Supongamos, en primer lugar, que sólo sean dos los números A y B, y que ambos se han dividido por uno de sus factores *n*. Habiendo dividido A y B por *n*, el resto de la división R vendrá dividido también por *n* (81, *cons.)*, habiendo dividido á B y R por *n*, el resto siguiente R′ también vendrá dividido; y del mismo modo demostraríamos que también quedarán divididos todos los restos siguientes hallados en el procedimiento del *m. c. d.*; pero el último resto es dicho *m. c. d.*; luego éste queda dividido por el número *n*, según queríamos demostrar.

Si son varios los números, A, B, C, D... tendremos que, por haber dividido por *n* á los números A y B, el *m. c. d.* M de ellos viene

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dividido, según el primer caso, por el mismo número n; por haber dividido al tercer número C y M, aparece también dividido por n el *m. c. d.* de C y M, que es M′; divididos M′ y D, queda dividido su *m. c. d.* M″, y, por consiguiente, el *m. c. d.* de A, B, C, y D, y así sucesivamente: luego dividiendo varios números A, B, C, D... por un número n, el *m. c. d.* de todos ellos queda también dividido por el mismo número.

114. Del principio anterior se deduce *que si se dividen varios números por su* m. c. d., *los cocientes que resultan no tienen más factor común que la unidad.*

En efecto; el *m. c. d.* de A, B, C, D... es M; si dividimos estos números por M, y llamamos A′, B′, C′, D′... los cocientes, tendremos que el *m. c. d.* de A, B, C, D... vendrá también dividido por M; esto, que nos dará $\frac{M}{M}=1$, y este será el *m. c. d.* de A, B, C, D... según queríamos demostrar.

RECÍPROCAMENTE: *si se dividen dos ó más números por un divisor común á todos, y los cocientes que resultan tienen por* m. c. d. *la unidad, el divisor por el cual se dividieron es el mayor que divide á los números dados.*

Sean, en efecto, A, B, C, D los números que divididos por M dan los cocientes A′, B′, C′, D′ que tienen por *m. c. d.* la unidad. Si multiplicamos dichos cocientes por M, resultarán otra vez los números propuestos, y el *m. c. d.* será el de los cocientes, que es 1, multiplicado por el número M (110), es decir, $1 \times M = M$.

115. *Todo número que divide al producto de dos factores y es primo con uno de ellos, divide necesariamente al otro.*

Sea el producto $A \times B$ y un número P que le divide, siendo primo con uno de los factores A, por ejemplo, y vamos á demostrar que tiene que dividir á B.

En efecto; por ser A y P primos entre sí, se tendrá que el *m. c. d.* de $\left.\begin{matrix}A\\P\end{matrix}\right\} = 1$; si multiplicamos dichos números por B, tendremos, según el principio anterior, que el *m. c. d.* de $\left.\begin{matrix}A\,B\\P\,B\end{matrix}\right\} = 1.B = B$.

Ahora bien; A B es divisible por hipótesis por P; P B evidentemente lo es también; luego su *m. c. d.* B también será divisible por P, según queríamos demostrar.

116. Fundado en lo dicho anteriormente (114), puede hacerse una abreviación en el método ordinario. En efecto; si los números propuestos tienen algún factor común, podremos dividirles por él,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sabiendo que el *m. c. d.* vendrá dividido por dicho factor común; luego hallando el *m. c. d.* de los cocientes, que indudablemente será más sencillo, y multiplicando dicho *m. c. d.* por el número porque se dividieron los propuestos, se tendrá el *m. c. d.* pedido.

Límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigación del m. c. d. de dos números.

*117. En la investigación del límite del número de divisiones que hay que hacer para hallar el *m. c. d.*, debemos distinguir dos casos: 1.°, que las divisiones se hagan por el método ordinario; y 2.°, que se practiquen por exceso ó defecto, según convenga, para que el resto hallado no sea mayor que la mitad del anterior.

PRIMER CASO. *Un límite del número de divisiones que hay que hacer para hallar el* m. c. d., *según el método ordinario, es igual al doble del exponente de la potencia de* 2, *inmediatamente superior al menor los dos números dados.*

Este principio está fundado en los dos lemas siguientes:

1.° *Todo dividendo mayor que el divisor, es mayor que el doble del resto de la división.*

En efecto; sea A un dividendo, B el divisor que se supone menor que A, Q el cociente, y R el resto; tendremos:

$$A = BQ + R.$$

Siendo $A > B$, el cociente Q es por lo menos la unidad: luego

$$A = \text{ó} > B + R;$$

y como $B > R$, se tendrá.

$$A > R + R = 2R.$$

2.° *Si al hallar el* m. c. d. *de dos números se ejecutan mas de* 2^n *divisiones, el menor de los dos números será mayor que* 2^n.

En efecto; llamemos R, R′, R″, R‴ ... $R^{(2n)}$ á los restos respectivos de cada una de las divisiones; se tendrá, según el lema anterior, suponiendo $B > A$,

$$B > 2R',\ R' > 2R''',\ R''' > 2R^{v} \ldots R^{(2n-3)} > 2R^{(2n-1)};$$

de modo que poniendo en vez de R′ la cantidad 2R‴ en la primera desigualdad, se tendrá con más razón:

$$B > 2 \times 2R''' = 2^2\, R'''.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si en esta desigualdad ponemos en vez de R''' la cantidad $2\,R^{v}$ menor que R''', resultará también

$$B > 2^2 \times 2R^{v} = 2^3 \times R^{v},$$

y continuando así hasta la última desigualdad, tendremos:

$$B > 2^n \times R^{(2n-1)};$$

y como por hipótesis se pueden hacer más de $2n$ divisiones, $R^{(2n-1)}$ no es el último resto; y no siendo el último resto, es mayor que la unidad: luego con más razón será

$$B > 2^n.$$

Demostrados estos dos lemas, pasemos á hallar el límite del número de divisiones.

Sean A y B los números cuyo *m. c. d.* queremos hallar; supongamos $B < A$, y que $B < 2^n$, siendo 2^n la potencia inmediata superior á B; es decir, que $2^{n-1} < B$.

Siendo $B <$ ó $= 2^n$, el número de divisiones que puede hacerse es menor que 2^n, ó á lo más igual, pero mayor nunca; porque si el número de divisiones ejecutadas fuese mayor que $2n$, según el lema anterior, B sería mayor que 2^n, lo que es contra el supuesto: luego un límite del número de divisiones que hay que ejecutar en la investigación del *m. c. d.* por el método ordinario es igual al doble del exponente de la potencia de 2, inmediatamente superior al menor de los dos números.

SEGUNDO CASO. *Un límite del número de divisiones que hay que practicar en la investigación del* m. c. d., *según el método abreviado, es igual al triplo del número de cifras que tiene el menor de los dos números dados.*

Para demostrar este principio hay que anteponer el siguiente lema:

Un resto cualquiera R *de los obtenidos por el método abreviado en la investigación del* m. c. d., *es mayor que* 10 *veces el resto* R''', *que está tres lugares después.*

En efecto; siendo, por hipótesis, el resto R mayor que el doble del siguiente R', se tendrá, si la división está efectuada por defecto,

$$R = \text{ó} > 2R' + R'';$$

porque el cociente de dividir R por R' es, por lo menos, 2.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si la división está hecha por exceso, se tendrá

$$R = \acute{o} > 3R' - R'',$$

ó bien

$$R = \acute{o} > 2R' + R' - R'';$$

pero siendo $R' > 2R''$, tendremos, poniendo en vez de R' una cantidad $2R''$ menor que R',

$$R > 2R' + 2R'' - R'' = 2R' + R'';$$

luego ya esté la división hecha por defecto ó por exceso, siempre se tiene que

$$R = \acute{o} > 2R' + R''.$$

Ahora bien; siendo $R' > 2R''$, si ponemos en vez de R' la cantidad $2\,R''$, que es menor, tendremos

$$R > 2 \times 2R'' + R'' \text{ ó } R > 5R'';$$

y como también se verifica que $R'' > 2R'''$, con mayor razón se tendrá

$$R > 10R''',$$

según queríamos demostrar.

Probado este lema, pasemos á demostrar el principio, y sean A y B los dos números cuyo máximo común divisor es d. Esto supuesto, si principiamos á contar desde el último resto que es d, el que está tres lugares después será, según el lema anterior, mayor que $10d$; luego el resto, que á contar desde el último ocupe el lugar $(1+3)$, será mayor que $10d$,
el que ocupe el lugar $(1+3+3) = (1+2\times3)$ será $> 10^2 d$,
el que ocupe el lugar $(1+2\times3+3) = (1+3\times3)$ será $> 10^3 d$,
el que ocupe el lugar $(1+3\times3+3) = (1+4\times3)$ será $> 10^4 d$,
y en general el que ocupe el lugar $(1+n\times3)$ será $> 10^n d$.

Si este resto, es decir, el que ocupa á partir del último el lugar $(1+3n)$, se toma por el primer divisor B, el número $(1+3n)$ nos indica el número de restos, y, por lo tanto, el número de divisiones efectuadas; luego para que haya un número de divisiones mayor que $3n$, es necesario que B sea mayor que $10^n d$, y con más razón mayor que 10^n, pues d es, por lo menos, igual á la unidad.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Por consiguiente, si ha de haber más de $3n$ divisiones en el procedimiento del *m. c. d.* por el método abreviado, es necesario que el menor de los dos números B tenga más de n cifras; de donde se deduce que si este número B no pasa de n cifras, el número de divisiones que hay que ejecutar no excederá á $3n$, es decir, al triplo del número de cifras que tiene el menor de los dos números dados, según queríamos demostrar.

LECCIÓN XIII

Mínimo común múltiplo de dos números.—Mínimo común múltiplo de varios números.—Principios relativos al mínimo común múltiplo.

Mínimo común múltiplo de dos números.

118. Llámase en general *mínimo común múltiplo* de dos ó más números, el menor número divisible por todos ellos.

119. *Todo común múltiplo de dos números es igual al producto que resulta de multiplicar los cocientes de dividir estos números por su* m. c. d., *el máximo común divisor y un número entero cualquiera.*

Siendo A′ y B′ los cocientes de dividir los números dados A y B por su máximo común divisor D, se tendrá

$$A = DA' \text{ y } B = DB' \qquad [1].$$

Todo común múltiplo de A y B se obtendrá multiplicando uno de ellos A por un número entero m, que cumpla con la condición de que el producto sea un múltiplo del otro número B; de modo que se deberá tener

$$Am = BQ \qquad [2],$$

siendo Q un número entero.

Poniendo en esta igualdad los valores de A y B [1], se tendrá

$$DA'm = DB'Q,$$

y dividiendo por D y luego por A′, se hallará

$$m = \frac{B'Q}{A'} \qquad [3],$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y como m es un número entero, A′, tiene que dividir á B′Q; pero A′ y B′ son primos entre sí (116); luego A′ tiene que dividir á Q, ó, lo que es lo mismo, Q tiene que ser un múltiplo de A′; de modo que haciendo $Q = nA'$ en la igualdad [3], tendremos:

$$m = \frac{B'nA'}{A'} = B'n;$$

finalmente, poniendo este valor en igualdad [2], se tendrá

$$AB'n = BQ = A'B'Dn.$$

Donde claramente se ve que el producto A′B′Dn, formado de los cocientes A′ y B′ de dividir los números dados A y B por su máximo común divisor D, de este *m. c. d.* y del número entero, pero arbitrario, n, es la expresión de los comunes múltiplos de los números A y B.

RECÍPROCAMENTE. El producto A′B′Dn es un común múltiplo de los números A y B. En efecto; como el orden de factores no altera el producto, se tiene:

$$A'B'Dn = A'D \times B'n = B'D \times A'n = A \times B'n = B \times A'n$$

Donde vomos que A′B′Dn es un múltiplo de A y de B.

De todos estos comunes múltiplos de A y B, el menor de ellos es aquel que corresponde al valor particular de $n = 1$; de modo que el mínimo común múltiplo de dos números A y B, será

$$A'B'D = AB' = BA',$$

es decir, el mínimo común múltiplo de dos números es igual al producto de su *m. c. d.* por los cocientes de dividir dichos números por este *m. c. d.*; ó si se quiere, también es igual, según manifiesta la expresión anterior, al producto de uno ellos por el cociente que resulta de dividir el otro por el *m. c. d*, de los dos.

De todo lo dicho anteriormente se deduce la regla general, que:

120. *Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números se multiplica uno de ellos por el cociente que resulta de dividir el otro por el máximo común divisor de ambos.*

Del principio anterior se deduce que:

1.° *Si dos números,* A *y* B, *son primos entre sí, su mínimo común múltiplo será igual al producto de estos números.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

2.° *Los comunes múltiplos de dos números*, A *y* B, *son múltiplos de su mínimo común múltiplo.*

EJEMPLO. Hallar el mínimo común múltiplo de los números 5952 y 3984.

El *m. c. d.* de estos números es 48; el cociente de dividir por 48 uno de los números, el primero por ejemplo, es 124; el *m. c. m.* es, por lo tanto,

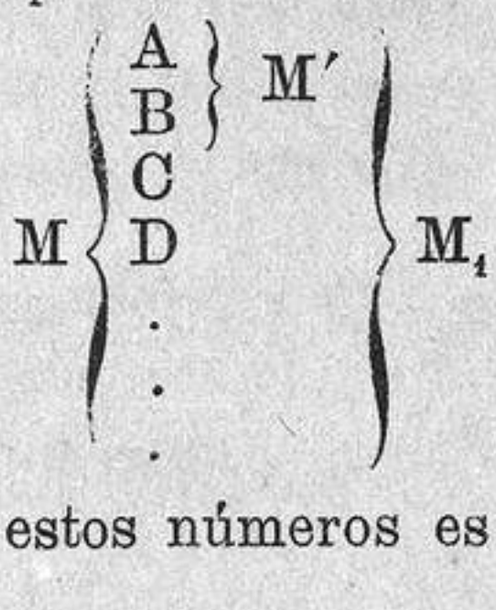
$$124 \times 3984 = 494016.$$

Mínimo común múltiplo de varios números.

121. *El mínimo común múltiplo de varios números es el mismo que el del* m. c. m. *de dos de ellos y todos los demás.*

Sean A, B, C, D... varios números cuyo *m. c. m.* llamaremos M; sea M′ el *m. c. m.* de A y B; finalmente, sea M_1 el *m. c. m.* de M′, C, D... y vamos á demostrar que M es igual á M_1.

En efecto; el número M, siendo el *m. c. m.* de los números propuestos, es un múltiplo común en particular de los números A y B, y, por tanto, según lo dicho anteriormente, será un múltiplo de su *m. c. m.* M′; de modo que M es un común múltiplo de los números M′, C, D...; pero el menor común múltiplo de estos números es M_1; luego $M \not< M_1$. Veamos si puede ser mayor.



Por ser M_1 el *m. c. m.* de M′, C, D... es un múltiplo en particular de M′, y, por tanto, de A B, que son divisores suyos, de donde se deduce que M_1 es un común múltiplo de los números A, B, C, D...; pero el menor común múltiplo de estos números es M; luego $M_1 \not< M$, ó, lo que es lo mismo, $M \not> M_1$.

Ahora bien; si M no puede ser menor ni mayor que M_1, tendrá que ser M igual á M_1, según queríamos demostrar.

La investigación de *m. c. m.* de *n* números queda reducida, según el principio anterior, á la de $n-1$ números; ésta á la de $n-2$, y así sucesivamente hasta llegar á la investigación del mínimo común múltiplo de dos números.

Por ejemplo: si quisiéramos hallar el *m. c. m.* de los cuatro números

A, B, C, D,

principiaremos por buscar el de los dos de ellos A y B, el cual su-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

pondremos sea M, y la cuestión queda reducida á determinar el *m. c. m* de los tres números

M, C, D.

Busquemos el *m. c. m.* de M y C, y suponiendo sea M′, se tendrá reducida la cuestión, finalmente, á buscar el *m. c. m.* de los dos números

M′ y D,

cuyo *m. c, m.*, que llamaremos M″, será el de los números dados.

De aquí se deducirá la regla general siguiente:

122. *Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números, se principia por buscar el de dos de éstos, después se determina el del número hallado y otro de los dados, y así se continúa hasta haber empleado todos los números; el último mínimo común múltiplo hallado será el de los números propuestos.*

Sea, por ejemplo, hallar el *m. c. m.* de los números

120, 240, 360 y 64.

Principíemos por buscar, el *m. c. m.* de los dos números 120 y 240, y hallaremos el número 240; por tanto, la cuestión queda reducida á determinr el *m. c. m.* de los tres números

240, 360 y 64.

El *m. c. m.* de 240 y 360 es 720; por consiguiente, el de los tres números anteriores es el mismo que el de los dos números 720 y 64. El *m. c. m.* de estos números es 2880; luego 2880 será el *m. c. m.* de los números propuestos.

OBSERVACIONES. 1.ª En la práctica se debe principiar por buscar el de los dos números mayores, porque á veces el de éstos suele ser el de todos.

2.ª *Los múltiplos comunes de varios números son múltiplos del mínimo común múltiplo.* Porque siendo múltiplos comunes á todos, lo son de los dos primeros, y, por consiguiente, de su *m. c. m.* M; siendo común múltiplo de M y de todos los demás, lo es de M y del tercer número, y, por tanto, de su *m. c. m.* M′: del mismo modo veríamos que era de los números M″, M‴..., y, por consiguiente, del último, que es el *m. c. m.* de todos los números.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Principios relativos al mínimo común múltiplo.

123. *Si dos ó más números se multiplican por otro cualquiera, el* m. c. m. *viene multiplicado por este número.*

En efecto; sean A y B los números, y $M = AB'$ su *m. c. m.:* multiplicando A y B por n, resultarán los números An y Bn; el *m. c. d.* será (112) Dn, y B′ el cociente de la división del segundo por dicho *m. c. d.;* de modo que el nuevo *m. c. m.* será:

$$A.\ n.\ B' = AB'.n = Mn;$$

donde vemos que el *m. c. m.* es el producto de M por el número n, según queríamos demostrar.

Si los números fuesen más de dos, el principio sería igualmente cierto. En efecto; al multiplicar todos los números por n, el *m. c. m.* M de los dos primeros vendrá, según lo demostrado anteriormente, multiplicado por n. El *m. c. m.* M′ de M y otro número cualquiera, vendrá también multiplicado por n, y lo mismo le sucederá á los demás números M″, M‴..., incluso el último de estos números, que es el *m. c. m.* de todos.

124. *Si se dividen dos ó más números por otro cualquiera, el* m. c. m. *vendrá dividido también por este número.*

Supongamos, en primer lugar, que sólo sean dos números, A y B; llamemos D á su *m. c. d.;* el *m. c. m.* M será:

$$A \cdot \frac{B}{D} = A \cdot B' = M.$$

Al dividir A y B por n, D vendrá dividido también por n (113), y se tendrán los números $\frac{A}{n}$, $\frac{B}{n}$ y $\frac{D}{n}$; hallando el *m. c. m.* de estos números, tendremos:

$$M' = \frac{A}{n} \cdot \frac{\frac{B}{n}}{\frac{D}{n}} = \frac{A}{n} \cdot \frac{B}{D} = \frac{AB'}{n} = \frac{M}{n},$$

luego vemos que $M' = \frac{M}{n}$,

que justifica el enunciado del principio.

Si son varios los números, A, B, C, D..., tendremos que, habien-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

do sido divididos por n los números A y B, su *m. c. m.* vendrá dividido también por n, según el primer caso; apareciendo divididos M y C por n, su *m. c. m.* M′ viene también dividido por n; lo mismo se vería que los números M″, M‴... vienen igualmente divididos por el mismo número n; pero el último de estos números es el *m. c. m.* de los propuestos; luego si se dividen varios números por otro cualquiera n, su *m. c. m.* viene también dividido por n.

125. *Si se divide el mínimo común múltiplo de varios números por cada uno de éstos, los cocientes son primos entre sí; ó, mejor dicho, no tienen más factor común que la unidad.*

Sean, en primer lugar, dos números, A y B y M, su *m. c. m.* Sabemos que llamando A′ y B′ á los cocientes de la división de A y B por su *m, c. d.* D, se tiene (120).

$$M = A'DB'.$$

Ahora bien: dividiendo M por $A = A'D$, da de cociente B′, y dividiendo por $B = B'D$, da de cociente A′; y como A′ y B′ son primos entre sí (114), el principio queda demostrado.

Sean, en segundo lugar, varios números, A, B, C, D. Si llamamos M al *m. c. m.* y A′, B′, C′ y D′, los cocientes de la división de M por cada uno de los números A, B, C y D, se tendrá:

$$M = AA',\ M = BB',\ M = CC',\ M = DD' \qquad [1].$$

Si suponemos que A′, B′, C′ y D′ tienen un factor común n distinto de la unidad, representando por A″, B″, C″ y D″ los cocientes de dividir A′, B′, C′ y D′ por n, se tendrá:

$$A' = nA'',\ B' = nB'',\ C' = nC'',\ D' = nD'';$$

y sustituyendo estos valores en las igualdades [1], tendremos:

$$M = AnA'',\ M = BnB'',\ M = CnC'',\ D = DnD'';$$

y diviendo por n, será:

$$\frac{M}{n} = AA'',\ \frac{M}{n} = BB'',\ \frac{M}{n} = CC'',\ \frac{M}{n} = DD''.$$

Siendo enteros los segundos miembros de estas igualdades, los primeros también lo serán, y, por consiguiente, $\frac{M}{n}$ expresa un nú-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mero entero, que podremos representar por M′, siendo $M' < M$, puesto que $n > 1$. De aquí se deduce que M′ es un múltiplo común de los números A, B, C y D, y menor que M, lo cual es contra la hipótesis, porque M es por el supuesto el *m. c. m.;* luego los cocientes que resultan de dividir el *m. c. m.* de varios números por cada uno de estos números, no pueden tener ningún factor común distinto de la unidad.

126. RECÍPROCAMENTE. *Si los cocientes de dividir un número cualquiera* M *por otros varios números son primos entre sí ó no tienen más divisor común que la unidad,* M *será el mínimo común múltiplo de dichos números.*

Sea M un número que dividido sucesivamente por A, B, C, y D... da los cocientes A′, B′, C′, D′, que son primos entre sí, y vamos á demostrar que M es el *m. c. m.* de los números A, B, C, D...

En efecto; por suposición se tiene la serie de igualdades

$$\frac{M}{A} = A', \quad \frac{M}{B} = B', \quad \frac{M}{C} = C', \quad \frac{M}{D} = D' \ldots \qquad [1]$$

siendo A′, B′, C′, D′... números que no tienen más factor común que la unidad.

Ahora bien: si M no es el *m. c. m.* de los números dados, será un múltiplo del *m. c. m.* (122 *observ.* 2.ª); de modo que se tendrá, llamando M′ al *m. c. m.* de los números A, B, C, D...

$$M = M' \times n,$$

siendo n un número entero.

Dividiendo ahora por n las igualdades [1], se hallará:

$$\frac{M'}{A} = \frac{A'}{n}, \quad \frac{M'}{B} = \frac{B'}{n}, \quad \frac{M'}{C} = \frac{C'}{n}, \quad \frac{M'}{D} = \frac{D'}{n} \ldots$$

y como M′ es un común múltiplo de los números A, B, C, D... los cocientes $\frac{A'}{n}, \frac{B'}{n}, \frac{C'}{n}, \frac{D'}{n}$... tienen que ser enteros, lo que prueba que n es un común divisor de los números A′, B′, C′, D′..., lo cual es contra la hipótesis; luego no puede suponerse que el mínimo común múltiplo sea M′, número menor que M, y, por tanto, siendo M un múltiplo de los números dados, y no habiendo otro menor que cumpla con esta condición, se sigue que, según queríamos demostrar, M es el mínimo común múltiplo de todos ellos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XIV

NÚMEROS PRIMOS.—Investigación de los mismos hasta un límite dado por la criba de Eratóstenes. — Principios relativos á los números primos.

NÚMEROS PRIMOS

Investigación de los mismos hasta un número dado por la criba de Eratóstenes.

127. *Se llama número primo el que no es divisible más que por sí mismo y por la unidad.*

Es necesario no confundir lo que son *números primos* con *números primos entre sí*. Pueden ser dos números primos entre sí, y, sin embargo, no ser primos; como sucede, por ejemplo, con 8 y 9, que, á pesar de no ser ninguno primos, son primos entre sí, puesto que no tienen más factor común que la unidad.

128. *Todo número primo que no divide á otro número, es primo con él.*

En efecto; el único factor común distinto de la unidad que podían tener ambos era el número primo, y éste no lo es; luego son primos entre sí.

129. *Todo número es siempre divisible por un número primo distinto de la unidad.*

Sea el número N, que podrá ser ó no primo; en el primer caso, como N es divisible por sí mismo, el principio queda demostrado.

Si N no es primo, se podrá dividir por un factor N′ menor que N y mayor que la unidad; de modo que se tendrá:

$$N = N'Q.$$

Ahora podrá suceder una de dos cosas: que N′ sea primo, ó que no lo sea; si es primo, el principio está demostrado; si no lo es, será divisible por otro número N″ menor que N′ y mayor que la unidad, lo cual dará:

$$N' = N''Q'.$$

Si N″ es número primo por dividir á N′, dividirá á su múltiplo N, y, por lo tanto, el principio queda demostrado: si N″ no es primo, será divisible por otro número N‴ menor que N″. Continuando así, llegaremos á un número primo mayor que la unidad, que le

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dividirá exactamente; porque si no llegásemos á este número primo, resultaría un número infinito de factores enteros mayores que la unidad y menores que N, lo cual es absurdo, puesto que números menores que N no hay más que N — 1; luego todo número N tiene por lo menos un factor primo distinto de la unidad.

130. Para hallar los números primos que hay desde 1 hasta un cierto límite L por el procedimiento conocido con el nombre de CRIBA ERATOSTÉNICA, se principia por escribir los números 1, 2, y la serie natural de los números impares 3, 5, 7... hasta L; en seguida se van tachando de 3 en 3, á partir del número $3 \times 3 = 9$ inclusive; después de 5 en 5, á partir del número $5 \times 5 = 25$; luego de 7 en 7, á partir de $7 \times 7 = 49$, y así sucesivamente se van tachando de 11 en 11, de 13 en 13, de 17 en 17, etc., hasta de n en n, en cuyo caso, si el número primo inmediatamente superior á n suponemos sea p, podremos asegurar que serán primos todos los números que hayan quedado por tachar hasta el número $p \times p = p^2$.

Ante todo podemos ver que no habiendo considerado más número par que el 2, la serie de números que hemos escrito no contiene los múltiplos de 2. Después podemos observar que los números que á partir de 3 ó un múltiplo suyo se hallan ocupando los lugares de 3 en 3, serán los múltiplos de 3, pues uno cualquiera se obtendrá añadiendo al anterior la suma $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$. Del mismo modo los números que á partir de 5 ó un múltiplo suyo ocupen los lugares de 5 en 5, serán múltiplos de 5, y, en general, los números que á partir de n ó de un múltiplo suyo ocupen los lugares de n en n, serán múltiplos de este número, pues uno cualquiera se obtendrá añadiendo al anterior la suma $2 + 2 + 2 + \ldots = 2 \times n$, y si el número del cual se parte es n ó un multiplo suyo, agregándole otro múltiplo, como es $2n$, el resultado también lo será.

Ahora bien: al tachar los números de 3 en 3, principiando desde el 9 inclusive, se destruyen todos los múltiplos de 3 mayores que 9, y como los menores que 9 han de ser múltiplos de 2, y éstos se han suprimido, se sigue que han desaparecido todos los múltiplos de 3. Del mismo modo, al tachar los números de 5 en 5 á partir del 25, quedan suprimidos los múltiplos de 5 mayores que 25; los menores que 25 tienen que ser múltiplos de 2 ó de 3, y como todos los múltiplos de éstos se han destruído ya, quedan, por lo tanto, suprimidos todos los múltiplos de 5. En general, tachando de n en n los números de la serie á partir del número $n \times n = n^2$, quedan suprimidos todos los múltiplos de n mayores que n^2. Cualquier múltiplo de n menor que n^2, será evidentemente de la for-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ma $n' \times n$, siendo $n' < n$, y como los múltiplos de los números primos menores que n han sido tachados, es claro que $n' \times n$ lo ha sido también, porque n' es un número primo ó un múltiplo de un número primo menor que n (129); luego han sido borrados todos los múltiplos de n.

Vamos ahora á demostrar que siendo p el número primo inmediatamente superior á n, todos los números que hayan quedado por tachar desde 1 hasta $p \times p$, son números primos.

Sea N un número de los que hayan quedado por tachar, y vamos á demostrar que tiene que ser necesariamente un número primo.

En efecto; un número cualquiera menor que $p \times p$, ó es un número primo, ó un múltiplo de un número primo menor que p; todos los múltiplos de los números primos menores que p se han tachado, por lo que hemos visto anteriormente; luego N, que no se ha tachado, no puede ser múltiplo de ningún número primo menor que p, y, por consiguiente, será primo.

131. *Para conocer si un número* N *es ó no primo, se divide por la serie de los números primos* 2, 3, 5, 7, 11, *etc., y si llegamos sin obtener cociente exacto entero á encontrar un cociente entero menor que el último divisor ensayado, podremos asegurar, sin ensayar más divisiones, que el número* N *es primo.*

En efecto; si N no fuese primo, sería (129) divisible por un número primo N, y llamando Q al cociente, se tendría:

$$N = N'Q;$$

pero N es menor que DQ′, siendo D el último divisor ensayado y Q′ el cociente hallado por exceso; de donde

$$N'Q < DQ'.$$

Siendo $N'Q < QD'$, los dos factores del primer producto, ó por lo menos uno, tiene que ser evidentemente menor que los factores del segundo; pero ningún número primo menor que D da cociente exacto; luego N′ y Q tienen que ser mayores que D; y como D es mayor que Q′, se deduce que los dos factores del primer producto tienen que ser mayores que los del segundo, lo cual es absurdo.

De otro modo: supongamos que hemos dividido N por la serie de los números 1, 2, 3, 4, y hemos llegado sin encontrar cociente exacto á dividir N por el número D, que nos da un cociente entero

(c) Instituto Cervantes de Madrid

q, menor que el divisor D; podemos asegurar, sin hacer más divisiones, que el número N es primo.

Según lo expuesto anteriormente, vemos que ningún número menor que D da el cociente exacto; D tampoco le da, y vamos á ver si puede haber algún número mayor que D que divida exactamente al número N. Si dividimos á N por la serie de los números primos D′, D″..., D_1 mayores que D, y suponemos que llegamos á uno D, que da cociente exacto, tendremos:

$$N = D_1 q_1 \qquad [1]$$

esto, que nos dice que tanto D_1 como q_1 dividen al número N; pero como á medida que aumenta el divisor disminuye el cociente, tendremos que $q_1 < q$ y como $q < D$, con mayor razón se tendrá $q_1 < D$; luego vemos que si se ha de verificar la igualdad [1], hay un número $q_1 < D$ que divide á N en contra de lo supuesto; por lo tanto, si la [1] no puede verificarse, no hay ningún número mayor que lo divida; luego N es un número primo.

Principios relativos á los números primos.

132. *La serie de los números primos es ilimitada; es decir, que dado un número primo cualquiera, podríamos demostrar que siempre hay otro número primo mayor que él.*

En efecto; sea N un número primo, y vamos á demostrar que hay un número primo mayor que N.

Sea P el producto de todos los números primos, desde 1 hasta N, de modo que

$$1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots N = P.$$

Si añadimos á P una unidad, se tendrá un número P + 1, que podrá ser ó no primo: si lo es, P + 1 es evidentemente mayor que N, y, por lo tanto, el principio queda demostrado. Si no es primo, será divisible por un número primo diferente de la unidad (129); pero siendo P el producto de todos los factores primos 1. 2. 3... hasta N, P + 1 no puede ser divisible por ningún factor primo de los que se compone N, porque cualquier factor de los de P no puede serlo de P + 1, sin ser un divisor de 1, diferencia entre P + 1 y P (81), lo que no es posible; luego si á P + 1 le divide un número primo y no es ninguno de los factores de P, tiene que ser ma-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

yor que el mayor factor de P, que es N; luego hay un número primo mayor que N, que es lo que debíamos demostrar.

133. *Todo número primo que divide al producto de varios factores, divide por lo menos á uno de ellos.*

Consideraremos dos casos: 1.°, que sean dos factores solamente; y 2.°, que sean más de dos.

PRIMER CASO. Sea P el número primo, y AB el producto de los dos factores A y B: tratamos de demostrar que divide, por lo menos, á uno de ellos, A ó B.

En efecto; si P no divide al número A, será primo con él (128); en cuyo caso, dividiendo P al producto AB y siendo primo con uno de los factores A, tiene que dividir al otro factor B (115).

SEGUNDO CASO. Si el producto tiene más de dos factores, A, B, C, D, por ejemplo, podremos descomponerle en dos, uno A y otro el producto BCD de los demás; de modo que dividiendo el número primo P al producto de A por BCD, tiene que dividir, según el primer caso, á uno de los factores A ó BCD; si no divide á A, dividirá á BCD, y como BCD se puede á su vez descomponer en el producto de B y CD, por la misma razón que antes, si no divide á B, tiene que dividir á CD; y dividiendo á CD, ha de dividir necesariamente á C ó á D; luego el principio queda demostrado.

CONSECUENCIAS. 1.ª *Todo número primo que divide á una potencia, divide á su raíz.*

En efecto; sea P el número primo que divide á la potencia A^m, y vamos á demostrar que P tiene que dividir á la raíz A.

A^m es igual á $A \times A \times A \times \ldots$ repetido *m* veces; dividiendo P al producto $A \times A \times A \times \ldots$, debe dividir á uno de los factores A (133); luego P divide á A.

2.ª *Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo son.*

Sean A y B dos números primos entre sí, y vamos á demostrar que sus potencias A^m y B^n también lo son. En efecto; si A^m y B^n no fuesen primos entre sí, tendrían un factor primo común P, y como por dividir P á A^m y B^n dividirá también, según la consecuencia anterior, á los números A y B, se sigue que P dividirá á A y B, lo que es contra la hipótesis; luego A^m y B^n son primos entre sí.

134. *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo también con el producto, y* recíprocamente, *todo número primo con un producto, lo es también con cada uno de sus factores.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea P un número primo con cada uno de los factores del producto ABCD, y vamos á demostrar que tiene que ser también primo con dicho producto. En efecto; si P no fuese primo con el producto ABCD, habría un número primo n que dividiría á P y al producto ABCD; pero dividiendo al producto ABCD, tiene que dividir á uno de los factores, A, por ejemplo; luego A y el número P tendrían el divisor común n, lo cual es contra el supuesto.

Supongamos, en segundo lugar, que P sea primo con el producto ABCD, y vamos á demostrar que es primo con cada uno de los factores A, B, C y D. En efecto; si no fuese primo con A, por ejemplo, tendrían P y A un factor común n; pero dividiendo n al número A, dividirá también al múltiplo suyo ABCD, que es el producto; luego n dividiría á P y al producto, lo cual es contra la hipótesis: por consiguiente, P es primo con cada uno de los factores A, B, C y D, según queríamos demostrar.

135. *Todo número divisible por varios números primos entre sí, dos á dos, es divisible por sus productos binarios, ternarios, etc.* (*)

Sea N un número divisible por cada uno de los números a, b, c, d, que son primos entre sí dos á dos, y vamos á demostrar que N es divisible por ab, abc y $abcd$.

En efecto; siendo N divisible por a, tendremos, llamando N′ al cociente exacto entero,

$$N = a\,N' \qquad [1]$$

El número b divide también á N, y, por tanto, á su igual aN'; pero es primo con a; luego dividirá á N′ (115), y llamando N″ al cociente, se tendrá

$$N' = bN''.$$

El número c, que también divide por hipótesis á N, dividirá á su igual aN'; pero es primo con a, luego dividirá á N′: dividiendo á N′, divide á su igual bN''; pero siendo c primo también con b, dividirá á N″, y llamando N‴ al cociente, tendremos

$$N'' = cN'''.$$

Por un raciocinio análogo se deducirá también

$$N''' = dN^{IV};$$

(*) Se llaman productos binarios, ternarios, etc., los productos que se pueden formar tomando los factores de dos en dos, de tres en tres, etc.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y así continuaríamos si hubiese más factores. Sustituyendo ahora sucesivamente en la igualdad [1] los valores de N′, N″, N‴, etc., se tendrá

$$N = aN' = abN'' = abcN''' = abcdN^{IV};$$

lo que prueba que N es divisible por *ab, abc, abcd,* según queríamos demostrar.

136. *Todo número que no es primo, se puede descomponer en el producto de números primos.*

Sea N un número no primo y que por la tanto será divisible por un número primo a (129); de modo que llamando N′ al cociente, se tendrá

$$N = aN'.$$

Si N′ no es tampoco número primo, según el mismo principio, será divisible por un número primo b, y dará

$$N' = bN'',$$

y por tanto

$$N = abN''.$$

Si N″ tampoco fuese primo, sería divisible por otro número primo c, y se tendría

$$N'' = cN''',$$

de donde

$$N = abcN''';$$

y continuando del mismo modo llegaríamos á un número primo $N^{(n)}$; porque de lo contrario la serie de operaciones sería indefinida, y, por lo tanto, el número N tendría un número infinito de factores mayores que la unidad y menores que él, lo cual es absurdo. Por consiguiente, llegaremos á un último número $N^{(n)}$, que sería primo, como hemos dicho, y tendremos que como todos los anteriormente hallados a, b, c... lo son también, el número N será igual al producto de todos ellos, y por consiguiente

$$N = abcd... N^{(n)}.$$

Donde vemos que todo número N no primo, es igual al producto de factores primos.

Podrá suceder que algunos de estos factores sean iguales, en cuyo caso se pone una sola vez con un exponente que exprese las veces que se hallan repetidos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Así, si se tiene

$$N = a^m b^n c^p d^q,$$

se dice que el número N se halla descompuesto en sus factores primos a, b, c y d, y que estos factores están elevados á las potencias respectivas m, n, p y q.

137. *Un número no se puede descomponer más que en un solo sistema de factores primos.*

Sea N el número que se ha descompuesto en un sistema de factores primos A, B, C, D... de los cuales algunos pueden ser iguales entre sí, de modo que se tiene

$$N = ABCD...$$

Supongamos que una nueva descomposición diese el sistema de factores A′, B′, C′, D′...; se tendría

$$N = A'B'C'D'...;$$

de modo que

$$ABCD... = A'B'C'D'...$$

siendo todos estos factores primos absolutos.

Si divimos los dos productos por el factor primo A′, tendremos

$$\frac{ABCD...}{A'} = B'C'D'...;$$

y siendo el segundo miembro un número entero, el primero también debe serlo; luego A′ debe dividir al producto ABCD... y, por lo tanto, dividirá á uno de sus factores (133); pero siendo estos factores números primos, no podrá ninguno ser divisible mientras no sea igual á él; luego A′ tiene que ser igual á uno de los factores, A; por ejemplo, lo que da

$$BCD... = B'C'D'...$$

Del mismo modo se demostraría que B′ tiene que ser igual á B, C = C′, D = D′, etc.; luego si todos los factores de la segunda descomposición son respectivamente iguales á los de la primera, no hay más que una sola descomposición.

~~138.~~ *Para que un número divida á otro es necesario:* 1.°, *que no contenga ningún factor que no esté contenido en el que ha de ser divisible;* 2.°, *que ninguno venga elevado á mayor potencia.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea N el número que ha de ser divisible por P, y vamos á demostrar: 1.º, que P no puede tener ningún factor que no esté contenido en N; 2.º, que ningún factor de los que tiene P puede estar elevado á mayor potencia que en el número N.

En efecto; sea P un número que divide á N, dando un cociente exacto entero N′, de modo que se tiene

$$N = P \times N'.$$

Vemos, pues, que si esta igualdad se ha de verificar, es decir, si P ha de dividir á N, es necesario: 1.º, que P no contenga factores primos distintos de los que hay en N, pues, de lo contrario, dividiendo dicha igualdad por el factor primo que pudiera contener P sin hallarse en N, se tendría que un número fraccionario sería igual á un número entero, lo cual es absurdo. Al mismo absurdo vendríamos á parar si supiéramos que en P existía algún factor primo elevado á mayor potencia que N; luego son condiciones necesarias para que P divida á N las dos que dejamos enunciadas.

Son estas condiciones, además de necesarias, suficientes; porque hallándose en N todos los factores primos de que P se compone, elevados, por lo menos, á una potencia igual á la que se halla en P, siempre podremos descomponer á N en el producto de dos números: uno que se forme de todos los factores de P elevados á las mismas potencias, es decir, que sea el mismo número P, y otro que se componga de los factores restantes de N.

LECCIÓN XV

Investigación de los factores simples y compuestos de un número.—Investigación del máximo común divisor de dos ó más números por la descomposición en factores primos y simplificación del método ordinario.—Mínimo común múltiplo de dos ó más números por la descomposición en factores.

Investigación de los factores simples y compuestos de un número.

139. *Para hallar los factores simples de un número, se divide éste y los cocientes sucesivos que resulten por el menor factor simple distinto de la unidad hasta llegar al cociente* 1, *en cuyo caso los factores hallados serán los del número.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea N el número cuyos factores simples queremos hallar. Después de tirar á la derecha del número una raya vertical, se verá cuál es el menor factor primo diferente de la unidad, que le divide exactamente. Supongamos que a sea este factor; colocándole á la derecha de la raya enfrente de N y efectuando la división, obtendremos un cociente entero que representemos por Q. En seguida veremos si Q es también divisible por a; si lo es, se efectúa la división, y así se continúa dividiendo por a los cocientes que resultan hasta llegar á uno N′ que ya no sea divisible: de modo que si suponemos que se han hecho m divisiones, el número N podrá ponerse bajo la forma

N	a
Q	a
Q′	a
⋮	⋮
N′	b
Q_1	b
Q'_1	b
⋮	⋮
N″	c
Q_2	c
Q'_2	c
⋮	⋮

$$N = a^m N' \qquad [1]$$

En efecto; de la serie de divisiones hechas se deduce que

$$N = aQ,\ Q = aQ',\ Q' = aQ'',\ Q'' = aQ''', \ldots$$

y sustituyendo los valores de Q, Q′. Q″,... tendremos

$$N = aQ = a^2Q' = a^3Q'' = a^4Q''' \ldots = a^m N'.$$

Haciendo lo mismo con N′ se tendrá llamando b al menor factor primo que divide á N′ y sus cocientes,

$$N' = b^n N''.$$

Del mismo modo se hallará

$$N'' = c^p N''',$$

y continuando así, se llegará necesariamente á un número primo que dividido por sí mismo dará la unidad: porque de lo contrario podríamos descomponer N en un número infinito de los factores mayores que la unidad y menores que N, lo cual es absurdo.

Sea para fijar las ideas

$$N''' = d^q \times 1 = d^q,$$

Sustituyendo en la igualdad [1] los valores de N′, N″ y N‴, se tendrá

$$N = a^m \times b^n \times N'' = a^m \times b^n \times c^p \times N''' = a^m \times b^n \times c^p \times d^q.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Donde vemos que N se halla descompuesto en el producto de los factores primos, a, b, c y d elevados respectivamente á las potencias cuyos exponentes son m, n, p y q.

EJEMPLO. Sea 8712 el número cuyos factores simples vamos á determinar. Dispuesta la operación como ya hemos dicho, se tendrá:

8712	2
4356	2
2178	2
1089	3
363	3
121	11
11	11
1	

El menor factor simple distinto de la unidad que divide al número propuesto es 2, el cual da de cociente 4356, que dividido también por 2, lo mismo que su cociente 2178, nos da el número 1089, el cual no es ya divisible por 2, pero sí por 3. Efectuando la división hallamos el cociente 363, que dividido por 3 nos da 121. Este número no es ya divisible por 3, pero sí por 11, y da de cociente 11, que dividido por sí mismo da la unidad; luego los factores primos de 8712 son 2, 3 y 11, y dicho número es igual al producto $2^3 \times 3^2 \times 11^2$.

140. *Para hallar los factores simples y compuestos de un número, se principia por determinar los factores simples de dicho número, y en seguida, formando todos los productos de* 2 *en* 2, *de* 3 *en* 3, *de* 4 *en* 4, *etc., de estos números, se tendrán todos los factores tanto simples como compuestos del número propuesto.*

En efecto; todos los números que obtengamos, según el procedimiento indicado, serán divisores del número propuesto; porque dichos números, ni tienen factores distintos de aquellos que contiene el número que ha de ser divisible, ni vienen elevados á mayores potencias, que son las condiciones necesarias y suficientes para que sean divisores del número propuesto (138); además, habiendo formado todos los productos de 2 en 2, de 3 en 3, etc., de los factores simples, contando á la unidad como factor de todo número, habremos hallado todos los divisores tanto simples como compuestos del número dado, que es lo que se pedía.

Ahora sólo falta ver cómo se forman todos estos productos siguiendo un orden sencillo.

Supongamos que sea N el número cuyos factores simples y compuestos queremos hallar, sean a, b, c y d sus factores simples

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y m, n, p, q los exponentes de las potencias á que se hallan elevados respectivamente estos factores, de modo que se tendrá:

$$N = a^m b^n c^p d^q.$$

Esto supuesto, pasemos á la investigación de todos los factores del número N, cuya operación se dispondrá según indica el cuadro siguiente:

(c) Instituto Cervantes de Madrid

1	a	a^2	....	a^m	.... $(m+1)$
b	ab	a^2b	....	a^mb	$(m+1)(n+1)$
.....					... $(m+1)n$
b^n	ab^n	a^2b^n	....	a^mb^n	
c	ac	a^2c	....	a^mc	$(m+1)(n+1)(p+1)$
.....					
b^nc	ab^nc	a^2b^nc	....	a^mb^nc	
c^2	ac^2	a^2c^2	....	a^mc^2	..... $(m+1)(n+1)p$
.....					
.....					
b^nc^p	ab^nc^p	$a^2b^nc^p$	....	$a^mb^nc^p$	$(m+1)(n+1)(p+1)(q+1)$
d	ad	a^2d	....	a^md	
.....					
.....					
b^nc^pd	ab^nc^pd	$a^2b^nc^pd$	....	$a^mb^nc^pd$	
d^2	ad^2	a^2d^2	....	a^md^2	
.....					
.....					..... $(m+1)(n+1)(p+1)q$
$b^nc^pd^2$	$ab^nc^pd^2$	$a^2b^nc^pd^2$	....	$a^mb^nc^pd^2$	
.....					
.....					
.....					
$b^nc^pd^q$	$ab^nc^pd^q$	$a^2b^nc^pd^q$	....	$a^mb^nc^pd^q$	

(c) Instituto Cervantes de Madrid

141. Donde vemos que, poniendo la unidad y todas las potencias del primer factor, desde la primera hasta la enésima, se obtienen todos los divisores dependientes del factor a que son $(m+1)$; multiplicando estas potencias por b, b^2, b^3 ... b^n, se hallan todos los factores dependientes de a y b, que son tantos como expresa la primera fila repetida tantas veces como potencias hay de b; es decir, $(m+1)\ n$, y agregando á éstos los de a, se tendrá $(m+1)\ (n+1)$. Multiplicando todos estos números por las potencias de c, se obtienen los factores dependientes de a, b y c, que son $(m+1)\ (n+1)\ p$, á los que agregando los ya formados nos da un número de factores igual á $(m+1)\ (n+1)\ (p+1)$; y, por último, multiplicando estos números por d, d^2, d^3 ... se tendrán todos los factores dependientes de a, b, c y d, que son $(m+1)\ (n+1)\ (p+1)\ q$. Agregando á este producto los que ya llevamos formados, se obtiene el número total de factores $(m+1)\ (n+1)\ (p+1)\ (q+1)$; y así continuaríamos si hubiese más factores simples. De aquí se deduce que *para hallar de un modo práctico los factores simples y compuestos de un número, se escribe la unidad y las potencias del primer factor desde la primera hasta la enésima, en seguida se multiplican todos estos números por las potencias del segundo factor, después se multiplican los números resultantes por las potencias del tercero, y así sucesivamente hasta haber multiplicado todos los números obtenidos por las potencias del último factor. Los números hallados de este modo serán los factores simples y compuestos del número propuesto.*

El número de factores vemos, según el cuadro anterior, que es igual al producto que resulta de multiplicar los exponentes aumentados en una unidad.

EJEMPLO. Sea 8712 el número cuyos factores simples y compuestos queremos hallar.

Siendo, como hemos visto, $8712 = 2^3 \times 3^2 \times 11^2$, según el procedimiento indicado anteriormente, se tendrá:

1	2	4	8	(3+1)	(3+1) (2+1)	(3+1) (2+1) (2+1)=4.3.3=36.
3	6	12	24	(3+1)2		
9	18	36	72			
11	22	44	88			
33	66	132	264			
99	198	396	792			
121	242	484	968			
363	726	1452	2904			
1089	2178	4356	8712	.....	(3+1) (2+1)2	

OBSERVACIÓN 1.ª Se deben considerar primero las potencias

(c) Instituto Cervantes de Madrid

del factor que se halle repetido mayor número de veces, para que el número de filas sea el menor posible.

2.ª Una vez escrito el primer número de cada línea, para obtener los siguientes no hay más que irlos duplicando, triplicando, etcétera, según que las potencias de la primera línea sean las del factor 2, 3, etc.

3.ª Los factores tomados á igual distancia del primero y último, deben dar por producto el número propuesto.

Investigación del máximo común divisor por la descomposición en factores primos, y simplificación del método ordinario.

142. *El máximo común divisor de dos ó más números es el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á todos estos números.*

Sea P el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á los números A, B, C, D..., y vamos á demostrar: 1.°, que P es un divisor común de los números dados; 2.°, que es el mayor que cumple con esta condición.

Componiéndose P de los factores primos comunes á los números dados, y estando estos factores elevados á las menores potencias que se hallan en dichos números, no habrá ninguno que no sea divisible por P (138); luego P es un divisor común de todos los números A, B, C, D...

Demostrado que P es un divisor común de los números A, B, C, D..., pasemos á probar que es el mayor número que los divide, y, por consiguiente, el *m. c. d.*

En efecto; ningún número P′ mayor que P puede ser divisor común de todos los números dados; porque para ser P′ mayor que P es necesario que contenga algún factor primo diferente de los de P ó alguno elevado á mayor potencia: en el primer caso, el factor distinto que se halle en P′ no puede ser común á todos los números A, B, C, D..., y, por consiguiente, aquel que no tenga dicho factor no podrá ser divisible; luego P′ no puede ser divisor común de todos los números dados.

En el segundo caso, si P′ contiene algún factor elevado á mayor potencia de las que contiene P, como éste se forma de las menores que se hallan en los números A, B, C, D..., se sigue que P′ también contendrá factores elevados á mayor potencia que las que contienen algunos de los números propuestos, y, por consiguiente, aquel que no tenga dicho factor elevado á una potencia menor, no

(c) Instituto Cervantes de Madrid

podrá ser divisible por P′; luego si P divide á todos los números A, B, C, D... y ninguno otro número mayor que él puede dividirles, P será el *m. c. d.*

143. Del principio anterior se deduce que *para hallar el* m. c. d. *de dos ó más números se determinan los factores primos de dichos números, y efectuando el producto de las menores potencias de los que sean comunes á todos, se tendrá el máximo común divisor pedido.*

EJEMPLO. Hallar el *m. c. d.* de los números 2880, 7920 y 9360.

Descompuestos en sus factores simples (139), se tiene

$$2880 = 2^6 \times 3^2 \times 5, \quad 7920 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11,$$
$$9360 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 13.$$

Los factores comunes á todos los números son 2, 3 y 5; el producto de sus menores potencias es

$$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720;$$

luego 720 es el *m. c. d.* pedido.

144. Componiéndose el *m. c. d.* de los factores primos comunes á los números dados, se sigue que todo factor primo que no sea común á dichos números se podrá suprimir, sin que por esto venga alterado dicho *m. c. d.*

Del mismo modo podremos también suprimir los factores comunes á los números dados, teniendo en cuenta que dichos factores deben formar parte del *m. c. d.*

EJEMPLO. Supongamos que se quiere hallar el *m. c. d.* de los números 2848 y 1412.

Desde luego podremos observar que los dos tienen el factor común 4, de modo que dividiendo por él se tendrán los números 712 y 353; siendo el primer número divisible por 8 y no teniendo el segundo el factor 2, será 8 primo con 353; de modo que podremos dividir el primero por 8, y queda reducida la cuestión á determinar el *m. c. d.* de 89 y 353; aplicando, pues, á los números 353 y 89 el procedimiento del *m. c. d.*, tendremos

$$\begin{array}{r|l} 353 & 89 \\ \hline 86 & 3 \end{array}$$

tomando el resto complementario, se halla para nuevo divisor el número 3, y como es primo con 89, se deduce que el único factor común á los números dados es 4; luego 4 será el *m. c. d.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Investigación del mínimo común múltiplo por la descomposición en factores primos.

145. *El mínimo común múltiplo de dos ó más números es el producto de las mayores potencias de todos los factores primos que hay en dichos números.*

Sea P el producto de las mayores potencias de los factores distintos que hay en los números A, B, C, D..., y vamos à demostrar: 1.°, que P es un múltiplo común de los números dados; 2.°, que es el menor común múltiplo.

Componiéndose el número P de todos los factores distintos elevados á las mayores potencias que hay en los números dados, no habrá en P ningún factor que no esté en los números A, B, C, D... y ninguno vendrá elevado á mayor potencia; luego P será divisible (138) por cada uno de los números dados; es decir, será un múltiplo común de todos ellos.

Probado que P es un múltiplo común de los números A, B, C, D..., pasemos á demostrar que es el menor.

En efecto; ningún número P′ menor que P puede ser múltiplo de todos los números dados; porque para ser P′ menor que P, se necesita que no contenga algún factor de los que hay en P, ó que alguno venga elevado á menor potencia: en el primer caso, el factor que tenga de menos P′ se hallará en alguno de los números dados, en A por ejemplo, y en ese caso vemos que P′ no puede ser común múltiplo de todos los números propuestos, puesto que no lo es de A (138).

En el segundo caso, si P′ contiene algún factor elevado á menor potencia de los que contiene P, como éste se forma de las mayores que se hallan en los núm tros dados, se sigue que P′ contendrá un factor, por lo menos, elevado á una potencia menor que la que se halla en uno de estos números, en A por ejemplo, y habiendo un factor primo que se halle en A elevado á mayor potencia que en P′, se deduce (138) que P′ no puede ser un múltiplo de A, y, por tanto, no será común múltiplo de todos los números propuestos.

Ahora bien: siendo P un múltiplo de todos los números A, B, C, D..., y no habiendo otro número P menor que cumpla con esta condición, es claro que P será el mínimo común múltiplo.

146. De lo dicho anteriormente resulta que *para hallar el* m. c. m. *de varios números, se descomponen éstos en sus factores primos; efectuando el producto de las mayores potencias de los que haya distintos en todos los números, se tendrá el mínimo común múltiplo.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

EJEMPLO. Hallar el *m. c. m.* de los números 2880, 5640 y 5220. Descompuestos en sus factores primos, se tiene

$$2880 = 2^6 \times 3^2 \times 5, \quad 5640 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 47,$$
$$5220 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 29.$$

El producto de las mayores potencias de los factores primos distintos, es

$$2^6 \times 3^2 \times 5 \times 47 \times 29 = 3925440;$$

luego 3925440 es el *m. c. m.* pedido.

NOTA. En esta segunda parte de la Aritmética hemos demostrado las *propiedades generales de los números,* con toda generalidad para cualesquiera que aquéllos sean; mas al hacerlo así, sin ninguna restricción, debemos consignar algunas observaciones, para que no se crea que principios y verdades exactas é incontestables dejan de ser ciertas por una restricción hecha sobre las operaciones que se practican, ó bien por considerar solamente números particulares. Así, cuando tratamos de demostrar las alteraciones que experimenta un cociente según las que sufren los datos, ó tenemos que circunscribirnos solamente á ciertas operaciones particulares, en cuyo caso no podremos hacer aplicación de ellas en lo sucesivo para cualquier clase de números, ó tenemos que separarnos algún tanto del modo de considerar los números que entran en una operación.

Por ejemplo: en una división exacta en que el dividendo A es igual al producto del divisor B por el cociente entero Q, se demuestra que dividiendo el dividendo A por un número n, el cociente Q viene dividido por el mismo número. Esto no ofrece dificultad cuando n es un divisor del dividendo y cociente; pero si sólo fuese divisor del dividendo A, entonces el cociente Q vendrá dividido, según hemos dicho, por n; y como la división de Q por n es inexacta, el nuevo cociente $\frac{Q}{n}$ no expresa un cociente entero exacto. Ahora bien: como en las divisiones que hasta aquí hemos efectuado no se han considerado á los cocientes, ya sean exactos ó no, sino como números enteros que nos expresan las veces que el dividendo contiene al divisor, ó el mayor número de veces que éste está contenido en aquél, al hallar el cociente $\frac{Q}{n}$, que no es entero,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

carecería de sentido la idea que tenemos del número cociente; pero prescindiendo de esta idea y no mirándole como el número que nos indica las veces que el dividendo contiene al divisor, sino como el número que multiplicado por el divisor nos da el dividendo, entonces no hay dificultad en admitir el principio con toda generalidad, pudiendo de este modo hacer aplicación de él en las infinitas ocasiones que se presentan.

Hay más: una vez bien comprendido esto, será muy fácil obtener la alteración que dicho creciente experimenta, y decir todo lo que ocurre con relación á ella. En efecto; supongamos que n no divide á Q; llamando al cociente entero Q′ y R al resto, se tendrá

$$Q = nQ' + R,$$

de donde se deduce

$$A = B(Q'n + R) = BQ'n + BR;$$

y dividiendo por n, será

$$\frac{A}{n} = BQ' + \frac{BR}{n};$$

lo cual nos prueba que si el dividendo de una divisiôn se divide por un número n y se parte el número que resulta por el divisor, esta nueva división nos da por cociente entero el que se obtiene de dividir el cociente de la primera por el número n; y por resto el cociente de dividir por el mismo número n al producto del divisor y resto de la primera división.

Del mismo modo podríamos ver que las alteraciones de que nos hemos ocupado en los números 71, 72 y 73 son ciertas, considerando al cociente entero como el número que multiplicado por el divisor nos da un producto, el cual, sumado con el resto, nos reproduce el dividendo; pudiendo por un raciocinio análogo al anterior deducir cuál es el cociente entero y resto de la nueva división que resulta de alterar el dividendo ó divisor de la primera.

Al hacer esta advertencia nos hemos propuesto probar que los principios demostrados son exactos para toda clase de números y operaciones, y que cuando se sienta un principio general, es necesario, para no faltar en nada, prescindir de los casos y convenios particulares; porque atendiendo á ellos exclusivamente, no podríamos hacer aplicación de estos principios de una manera general, teniéndonos que circunscribir á los casos particulares que se hayan explicado.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

TERCERA PARTE

DE LOS NÚMEROS QUEBRADOS, MIXTOS Y FRACCIONES DECIMALES

DE LOS NÚMEROS QUEBRADOS Y MIXTOS

LECCIÓN XVI

Origen de los quebrados.—Alteraciones que experimentan los quebrados según las que sufren sus términos por vía de multiplicación ó división.—Simplificación de quebrados.—Reducción de quebrados á un común denominador.

Origen de los quebrados.

147. Cuando se trata de apreciar cantidades menores que aquella que se toma por unidad, nos vemos en la necesidad de dividir dicha unidad en un cierto número de partes iguales, y referir la cantidad que se va á medir á una de estas partes, dando origen de este modo *á las fracciones* ó *quebrados ordinarios* si la unidad se divide en un número de partes tal, que únicamente deba satisfacer á la condición de que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir; *á las fracciones decimales* si las divisiones y subdivisiones se hacen siguiendo la ley decimal, refiriéndose siempre estas unidades á la principal, tanto en el primer caso como en el segundo; y, por último *á los números complejos* cuando dividiendo y subdividiendo la unidad principal en partes iguales, cada una de estas partes constituyan nuevas unidades á las que se refiere la cantidad que se va á medir.

Vemos, pues, que las *fracciones* ó *quebrados* tienen su origen ó resultan de la medición de una cantidad con una unidad mayor qne aquélla, lo cual se consigue dividiendo la unidad en un cierto número de partes iguales, y viendo las veces que una de estas partes

(c) Instituto Cervantes de Madrid

está contenida en la cantidad que se quiere medir. De modo que si se quiere medir con la vara la longitud de un alambre menor que la vara, y para conseguirlo hemos dividido ésta en 7 partes iguales y una de ellas está contenida 4 veces, la longitud de dicho alambre estará representada por la relación de los números 4 y 7, la cual se expresa así: $\frac{4}{7}$, y se lee *cuatro séptimos*.

De lo dicho se deduce que para escribir un quebrado se necesitan dos números: uno que expresa las partes en que se ha dividido la unidad, llamado *denominador*, y otro que se llama *numerador*, y que indica las veces que una de las partes del denominador está contenida en la cantidad que se quiere medir. En el ejemplo anterior el 7 es el *denominador*, é indica que la unidad se ha dividido en 7 partes, y, por lo tanto, *denomina* su magnitud; el 4 es el *numerador*, que nos expresa las veces que la cantidad alambre contiene á una de las partes del denominador, y que, por consiguiente, *numera* las que de éstas contiene el quebrado.

148. Para leer un quebrado se lee el numerador, y las unidades que expresa se denominan *medios*, *tercios*, *cuartos*, *quintos*, *sextos*, *séptimos*, *octavos*, *novenos* ó *décimos*, según que el denominador sea 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10; en general, cuando el denominador pasa de 10, se le hace terminar en la palabra *avos* ó se le añade dicha terminación.

Así, los quebrados

$$\frac{2}{5},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{5}{9},\quad \frac{11}{12},\quad \frac{23}{47},$$

se leerán: 2 *quintos*, 3 *séptimos*, 5 *novenos*, 11 *dozavos*, 23 *cuarenta y siete avos*.

149. No sólo la comparación de una cantidad con su unidad puede darnos el quebrado, sino que también puede provenir de una división que no se puede efectuar en números enteros, como, por ejemplo, 4 dividido entre 9. En efecto; el cociente de 4 entre 9 tiene que ser evidentemente menor que la unidad, y, por lo tanto, una fracción ó quebrado, que se determinará dividiendo cada una de las unidades del dividendo en tantas partes como unidades tiene el divisor, lo cual dará un número de partes igual al producto del divisor por el dividendo: efectuando en seguida la división del número resultante por el divisor, encontraremos por cociente exacto un número igual al dividendo, pero este cociente no expresará

(c) Instituto Cervantes de Madrid

unidades, sino partes de la unidad cuya denominación marcará el divisor. Así, el cociente que resulta de dividir 4 entre 9 será $\frac{4}{9}$, el cual se obtiene dividiendo cada unidad del dividendo 4 en 9 partes, que son las unidades que tiene el divisor, lo que da el número 36; de modo que dividiendo 36 por 9 resultará por cociente otra vez el número 4, con la diferencia de que no serán 4 unidades, sino 4 *novenas partes*, ó, lo que es lo mismo, $\frac{4}{9}$.

150. De aquí se deduce que podremos considerar al quebrado bajo dos aspectos: ó *como tal número quebrado que expresa una ó varias partes de la unidad*, ó *como la división indica del numerador por el denominador, cuyo cociente es el quebrado.*

151. Los quebrados se dividen en propios é impropios. *Quebrado propio* es aquel cuyo numerador es menor que el denominador, como $\frac{3}{5}$; y *quebrado impropio* ó *número fraccionario* es el que tiene el numerador mayor que el denominador, como $\frac{7}{5}$. Cuando el numerador es igual al denominador, el quebrado representa la unidad.

Si el numerador de un quebrado es mayor que el denominador, el quebrado contendrá enteros, los cuales se determinarán *efectuando la división indicada del numerador por el denominador;* porque cuantas veces esté contenido el denominador en el numerador, tantas unidades habrá; así

$$\frac{18}{5} = 3 + \frac{3}{5}.$$

Donde vemos que un número fraccionario es igual á un número entero ó mixto, el cual se obtiene hallando el cociente exacto de dividir el numerador por el denominador.

RECÍPROCAMENTE. *Todo número mixto se puede reducir á fraccionario multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo á este producto el numerador, y poniendo al resultado por denominador el mismo del quebrado.* Asi,

$$3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}.$$

En efecto; dividiendo cada unidad del entero en tantas partes

(c) Instituto Cervantes de Madrid

como unidades tiene el denominador del quebrado, dará un número de partes igual al producto del entero por el denominador; de modo que agregando á este número las partes que contiene el quebrado, las cuales están expresadas por el numerador, tendremos el entero y quebrado reducidos á número fraccionario.

152. El valor de un quebrado no depende, como algunos creen, del numerador ni del denominador, sino de la relación que hay entre ellos. Así, un quebrado que tenga un denominador doble del numerador, siempre expresará la mitad de la unidad, ó sea $\frac{1}{2}$; si fuese tres veces mayor expresará la tercera parte, ó $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente.

También es un error decir *que la unidad de todo quebrado es* 1 *partido por el denominador*, es decir, que en el quebrado $\frac{3}{5}$, por ejemplo, la unidad es $\frac{1}{5}$ (*).

Alteraciones que experimentan los quebrados según las que sufren sus términos por vía de multiplicación ó división.

153. *Si dos quebrados tienen un mismo denominador y distintos numeradores, el que tenga mayor numerador será mayor.*

En efecto; teniendo un mismo denominador, las partes que cada uno expresa de la unidad son iguales, y, por consiguiente, el que contenga mayor número de estas partes será mayor; pero el numerador es el que expresa el número de estas partes: luego el que tenga mayor numerador será el mayor.

(*) En efecto; si el quebrado resulta de medir una cantidad con una unidad mayor que ella (147), y nos expresa una ó varias partes de esta unidad, ¿no hay contrasentido al decir que el quebrado tenga por unidad otra diferente de aquella de la que él expresa parte ó partes? Al decir $\frac{3}{5}$, ¿no va envuelta la idea de que esos $\frac{3}{5}$ son de alguna cosa que es precisamente la unidad? Entonces, ¿á qué decir que la unidad de $\frac{3}{5}$ es $\frac{1}{5}$? Verdad es que podría decirse: *es que la unidad* $\frac{1}{5}$ *del quebrado* $\frac{3}{5}$ *la consideramos distinta de la principal, sabiendo que hay una relación entre ambas.* Entonces dejan de existir los quebrados: son números *complejos* ó *denominados* los que se obtienen.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

CONSECUENCIA. Si el numerador de un quebrado se duplica, triplica, ó, en general, se le multiplica por un número entero cualquiera, el quebrado viene multiplicado por dicho número entero. En efecto; el quebrado resultante tiene el mismo denominador que el propuesto, pero su numerador es 2, 3... n veces mayor que el de éste; luego dicho quebrado resultante será 2, 3... n veces mayor que el propuesto.

Por el contrario; si el numerador de un quebrado se divide por 2, 3..., n, siendo exacta la división, el quebrado resultante será 2, 3... n veces menor. En efecto; el número de partes que expresa el segundo es 2, 3... n veces menor que el que expresa el primero, y como las partes son iguales, puesto que el denominador no varía, se sigue que el segundo quebrado es 2, 3... n veces menor que el primero.

154. *Si dos quebrados tienen un mismo numerador y distinto denominador, el que tenga mayor denominador será menor.*

En efecto; cada uno expresa un mismo número de partes, puesto que son iguales los numeradores; pero estas partes son menores en aquel cuyo denominador es mayor, porque es evidente que á medida que aumenta el número de partes en que se divide la unidad, éstas disminuyen; luego el que tiene mayor denominador es el menor.

CONSECUENCIA. Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero n, el quebrado que resulta es n veces menor que el propuesto. Porque estos dos quebrados, el propuesto y resultante, tienen el mismo denominador; pero el denominador del segundo es n veces mayor que el del primero, y, por consiguiente, las partes del segundo son n veces más pequeñas; luego el segundo quebrado es también n veces más pequeño.

Por el contrario; si el denominador de un quebrado se divide por 2, 3... n, siendo exacta la división, el quebrado que resulta será 2, 3... n veces mayor. En efecto; á medida que el denominador disminuye, la magnitud de las partes aumenta; luego si dicho denominador se ha hecho n veces menor, aquéllas serán n veces mayor, y, por consiguiente, el quebrado se ha hecho también n veces mayor.

155. De lo dicho anteriormente se deduce: 1.°, *que para multiplicar un quebrado por un número entero se multiplica el numerador ó se divide el denominador por dicho número;* 2.°, *para dividir un quebrado por un número entero se divide el numerador ó se multiplica el denominador por dicho número;* 3.°, *el valor de un quebrado no*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

varía multiplicando ó partiendo los dos términos, ó sea el numerador y denominador por un mismo número. Porque el mismo número de veces que se hace mayor ó menor multiplicando ó partiendo el numerador por un número entero, ese mismo número de veces se hace menor ó mayor al multiplicar ó partir el denominador; luego el quebrado no ha cambiado de valor.

Simplificación de quebrados.

156. *Simplificar un quebrado es hallar otro que tenga el mismo valor, pero que sus términos sean más sencillos que los del propuesto.*

Cuando un quebrado no se puede expresar por otro de términos más sencillos, se dice que dicho quebrado es *irreducible.*

157. *Para simplificar un quebrado se dividen sus dos términos por un mismo número entero todas las veces que se pueda.*

En efecto; el quebrado que resulta de dividir el numerador y denominador de otro por un mismo número entero, tiene evidentemente sus términos más sencillos que los del propuesto, y además los dos quebrados tienen el mismo valor (155-3.°); luego el quebrado queda simplicado.

Así, para simplificar un quebrado, se principia por quitar un mismo número de ceros del numerador y denominador si ambos están terminados por esta cifra, lo que equivale á dividir los dos términos de la fracción por 10, 100, etc., según que se hayan suprimido uno, dos, etc. ceros. Después, si es posible, se dividen los dos términos del quebrado resultante por los números enteros cuyos caracteres de divisibilidad se conocen, tales como 2, 3, 5...; y, por último, si quitados los factores comunes al numerador y denominador los términos del quebrado resultante fuesen bastante crecidos, se halla el máximo común divisor de ellos, y si lo tienen, se dividen por él los dos términos de dicho quebrado, y el que resulte será el quebrado simplificado.

Sea, por ejemplo, $\frac{990}{1650}$ la fracción que queremos simplificar.

Tendremos:

$$\frac{990}{1650} = \frac{99}{165} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},$$

cuyo resultado se ha obtenido suprimiendo primero el factor 10 del numerador y denominador, en seguida dividiendo los términos de la fracción resultante por 11, y después por 3.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea, en segundo lugar, $\frac{34188}{85470}$ la fracción que se desea simplificar.

Según el procedimiento anterior, se obtiene, quitando los factores comunes 2, 3, 11 y 7, que se ven inmediatamente:

$$\frac{34188}{85470} = \frac{17094}{42735} = \frac{5698}{14245} = \frac{518}{1295} = \frac{74}{185};$$

y como todavía los términos son bastantes crecidos, les aplicamos el procedimiento del máximo común divisor, y nos da por resultado 37; de modo que dividiendo los términos de la última fracción por 37, se halla la fracción irreducible $\frac{2}{5}$.

Ocioso sería el advertir lo muy esencial y útil que es la simplificación de quebrados, porque, además de podernos formar una idea más exacta de la cantidad que representan, tienen la inmensa ventaja de simplificar los cálculos que pudieran hacerse con ellos.

Es evidente que podría principiarse desde luego por hallar el *m. c. d.* de los términos de la fracción propuesta y dividirles por él, resultando la fracción simplificada; pero en la práctica sólo se apela á este medio después de quitados los factores que á primera vista se ven.

158. *Los dos términos de un quebrado irreducible son primos entre sí.*

En efecto; si no lo fuesen tendrían un factor común, y dividiéndoles por él, el quebrado propuesto sería *equivalente* (*) á otro de términos más sencillos, lo que es contra la hipótesis: de modo que el quebrado que resulta de dividir los dos términos de otro por su *m. c. d.*, es el quebrado irreducible equivalente al primero.

159. *Todo quebrado equivalente á otro irreducible tiene sus términos equimúltiplos (**) de los de éste.*

En efecto; sea el quebrado irreducible $\frac{m}{n}$, el cual es equivalente á otro $\frac{a}{b}$, y, por lo tanto, se tendrá:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

(*) Se dice que dos expresiones son equivalentes cuando siendo diferentes en la forma tienen el mismo valor.

(**) Se llaman números equimúltiplos de otros los que resultan de multiplicar éstos por un mismo número entero.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si estos dos quebrados los multiplicamos por b, tendremos:

$$a = \frac{bm}{n} \qquad [1];$$

y como a es un número entero, el cociente de bm por n también lo será; luego n divide al producto bm. Pero el número n es primo con m, luego dividirá á b (115); y llamando b' al cociente, que es entero, se tendrá:

$$b = b'n:$$

de modo que sustituyendo en la igualdad [1] en vez de b su valor, será:

$$a = \frac{nb'm}{n} = b'm;$$

luego los términos a y b del quebrado equivalente á otro irreducible, son respectivamente ignales á mb' y nb', es decir, equimúltiplos del quebrado irreducible.

De este principio se deduce: 1.°, *que todo quebrado cuyos términos son primos entre sí, es irreducible:* porque todo quebrado equivalente á él, tendría sus términos equimúltiplos, y, por lo tanto, mayores; 2.°, *para que dos quebrados irreducibles sean equivalentes, han de ser idénticos.* En efecto; los menores equimúltiplos de dos números son ellos mismos.

Reducción de quebrados á un común denominador.

160. Se entiende por reducir varios quebrados á un común denominador *hallar otros que sean respectivamente equivalentes á los propuestos, y que en todos esté dividida la unidad en un mismo número de partes*, es decir, *que tengan un mismo denominador.*

Esta transformación está fundada en el principio (155-3.°), y se efectúa de dos modos:

PRIMERO. *Para reducir dos ó más quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás.* De este modo se hallan quebrados equivalentes á los primeros, y cada uno de ellos tiene por denominador el producto de todos; luego quedan reducidos á un común denominador.

SEGUNDO. Si los denominadores de los quebrados propuestos

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tienen factores comunes, se reducen á un común denominador *hallando el* m. c. m. *de los denominadores, el cual será el denominador común, y los numeradores se obtendrán multiplicando los de los quebrados propuestos por los cocientes que resultan de dividir el* m. c. m. *por cada denominador.*

En efecto; los quebrados resultantes serán equivalentes á los propuestos, porque sólo se ha hecho multiplicar los dos términos de cada uno por el cociente de dividir el *m. c. m.* por su denominador, y todos tendrán por denominador dicho *m. c. m.*

EJEMPLO 1.° Reducir á un común denominador los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}$.

Aplicando la primera regla, se tendrá:

$$\frac{2\times5.7}{3\times5.7}, \quad \frac{4\times3.7}{5\times3.7}, \quad \frac{1\times3.5}{7\times3.5},$$

ó lo que es igual:

$$\frac{70}{105}, \quad \frac{84}{105}, \quad \frac{15}{105}.$$

EJEMPLO 2.° Sean los quebrados que hemos de reducir á un común denominador

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{5}{8}.$$

Por la regla segunda, se tendrá:

$$\frac{1\times12}{24}, \quad \frac{3\times6}{24}, \quad \frac{7\times2}{24}, \quad \frac{5\times3}{24},$$

ó lo que es igual:

$$\frac{12}{24}, \quad \frac{18}{24}, \quad \frac{14}{24}, \quad \frac{15}{24}.$$

Siempre que los denominadores tengan factores comunes, conviene aplicar la segunda regla en vez de la primera, por ser más breve y porque los quebrados resultantes son los más sencillos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XVII

Alteraciones que sufre un quebrado cuando á sus dos términos se les agrega ó disminuye un mismo número.—Sumar quebrados, un entero con un quebrado y números mixtos.—Restar quebrados, de un entero un quebrado y números mixtos.

Alteraciones que sufre un quebrado cuando á sus dos términos se les agrega ó disminuye un mismo número.

* 160. Hemos visto ya que un quebrado no se altera multiplicando sus dos términos por un mismo número entero; y podría creerse que tampoco sufre alteración cuando á ambos términos se les añade ó quita un mismo número, lo cual no es cierto; y para probarlo, supongamos una fracción en general $\frac{a}{b}$; agreguemos á sus dos términos el mismo número m, y obtendremos la fracción $\frac{a+m}{b+m}$.

Si reducimos á un común denominador la fracción propuesta y la resultante, tendremos que dichas fracciones estarán representadas por

$$\frac{ab+am}{b(b+m)} \quad \text{y} \quad \frac{ab+bm}{b(b+m)};$$

de modo que, teniendo ambas el mismo denominador, la fracción resultante será mayor, igual ó menor que la propuesta, según que su numerador sea también mayor, igual ó menor que el de dicha fracción propuesta.

Ahora bien; los numeradores de estas fracciones tienen el sumando ab común; luego la relación en que están depende de los segundos sumandos am y bm, los cuales, como se ve, tienen el factor común m, y por lo tanto,

$$\text{Si } a < b,\ am < bm;\ \text{y } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}.$$

$$\text{Si } a = b,\ am = bm;\ \text{y } \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}.$$

$$\text{Si } a > b,\ am > bm;\ \text{y } \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}.$$

De aquí se deduce que *si á los dos términos de una fracción se les agrega un mismo número, la fracción que resulta será mayor, igual*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ó menor que la propuesta, según que ésta sea propia, igual á la unidad ó impropia.

Si en vez de aumentar á los dos términos de la fracción propuesta el número m lo hubiésemos disminuído, resultaría la fracción $\frac{a-m}{b-m}$; de modo que reduciendo estas dos fracciones á un común denominador y comparando sus numeradores, se tendrá que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a-m}{b-m}$ estarán representadas por las siguientes:

$$\frac{ab-am}{b(b-m)} \quad \text{y} \quad \frac{ab-bm}{b(b-m)}.$$

Los numeradores de estas fracciones tienen el minuendo común ab, y los sustraendos el factor común m; luego la segunda será mayor, igual ó menor que la primera, según que a sea mayor, igual ó menor que b; porque siendo a, por ejemplo, menor que b, el sustraendo am es menor que bm, y como á medida que disminuye el sustraendo aumenta la resta (21), se sigue que el primer quebrado es mayor que el segundo: lo mismo se demostrarían los demás casos; luego:

$$\text{Si } a < b, \quad \frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m},$$

$$\text{Si } a = b, \quad \frac{a}{b} = \frac{a-m}{b-m}.$$

$$\text{Si } a > b, \quad \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}.$$

Es decir, *que si se quita un mismo número* m *de los dos términos de un quebrado, el que resulta será menor, igual ó mayor que el primero, segun que éste sea propio, igual á la unidad ó impropio.*

mny. I OBSERVACIÓN. Representándose la unidad por una fracción cuyos términos son iguales, se sigue que á toda fracción propia le falta para valer la unidad otra fracción cuyo numerador es la diferencia de los términos de la primera, y cuyo denominador será el mismo de la fracción propuesta. Es decir, que á la fracción propia $\frac{a}{b}$ le falta $\frac{b-a}{b}$ para valer la unidad. Esto supuesto, si aumentamos ó disminuímos un número á los dos términos de la fracción propia $\frac{a}{b}$, se convertirá en $\frac{a+m}{b+m}$ ó en $\frac{a-m}{b-m}$, y á estas

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dos fracciones les faltará para valer la unidad, según lo dicho anteriormente, las fracciones respectivas $\frac{b-a}{b+m}$ y $\frac{b-a}{b-m}$: donde vemos que á medida que m aumente, la fracción $\frac{b-a}{b+m}$ irá disminuyendo (154); porque siendo constante el numerador, va aumentando el denominador; luego á medida que aumenta el número m que se añade á los dos términos de una fracción, la que resulta se va aproximando á valer la unidad.

La segunda fracción $\frac{b-a}{b-m}$ va aumentando á medida que m crece: en efecto; para que m se pueda restar de los dos términos de la fracción propia $\frac{a}{b}$, es necesario que sea menor ó á lo más igual al menor de ellos a; luego aumentando m hasta valer a, el denominador $b-m$ va disminuyendo hasta valer $b-a$, y, por consiguiente, $\frac{b-a}{b-m}$ tiende á ser igual á la fracción $\frac{b-a}{b-a}$, que es igual á la unidad; pero esta fracción expresa la diferencia que hay entre la unidad y la que resulta de restar de los dos términos de la fracción propia $\frac{a}{b}$ una misma cantidad m; luego si la diferencia que hay entre la unidad y $\frac{a-m}{b-m}$ tiende á ser igual á 1, la fracción que resulta de restar de los dos términos de otra propia una misma cantidad m tiende á ser cero, á medida que m se aproxima á valer a.

Si la fracción $\frac{a}{b}$ es impropia, excede á la unidad en $\frac{a-b}{b}$ y, por consiguiente, la fracción que resulta de agregar el número entero m á los dos términos de la propuesta, excederá á la unidad en $\frac{a-b}{b+m}$, y como esta fracción va disminuyendo á medida que m aumenta, la fracción resultante $\frac{a+m}{b+m}$ se va diferenciando cada vez menos de la unidad; y, por lo tanto, podremos decir que aumentando á los dos términos de una fracción propia ó impropia un número entero cualquiera, la fracción que resulta va aproximándose á valer la unidad á medida que dicho número va creciendo.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Hemos visto anteriormente que quitando de los dos términos de una fracción propia un número entero, la que resulta va aproximándose á valer cero; si la fracción dada fuera impropia, excedería á la unidad en la diferencia de sus dos términos partida por el denominador, y, por lo tanto, la que resulta de restar de sus dos términos el número m, excederá á la unidad en $\frac{a-b}{b-m}$; y como este exceso aumenta á medida que m va aumentando, la fracción $\frac{a-m}{b-m}$ irá aumentando cada vez más; de donde podremos deducir que disminuyendo de los dos términos de una fracción propia ó impropia un mismo número m, la fracción que resulta va diferenciándose cada vez más de la unidad.

Sumar quebrados, un entero con un quebrado y números mixtos.

162. *Para sumar quebrados se reducen á un común denominador si no lo tienen, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador común.*

En efecto; reduciendo los quebrados á un común denominador si no lo tienen, cada uno expresa partes iguales de la unidad, y, por lo tanto, reuniendo las que cada uno contiene, lo cual se consigue sumando los numeradores, tendremos la cantidad que equivale á la suma de los valores de los sumandos.

Sean los quebrados que hemos de sumar $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{2}{7}$.

Como tienen un común denominador 7, cada uno expresa *séptimas* partes de la unidad: luego sumando las que cada quebrado contiene, se tendrá la suma; y como estas partes están representadas por los numeradores (147), sumándoles, se tendrá el número que expresa las que contiene el resultado.

Así:

$$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+4+2}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}.$$

Supongamos que queramos sumar las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{5}{8}$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Como tienen diferentes denominadores, no expresan partes iguales de la unidad, por lo que no se pueden sumar así.

Reduciéndoles á un común denominador (160), y sumando como antes los numeradores, se tendrá

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{5}{8}=\frac{12}{24}+\frac{18}{24}+\frac{14}{24}+\frac{15}{24}=$$
$$\frac{12+18+14+15}{24}=\frac{59}{24}=2\,\frac{11}{24}.$$

163. *Para sumar un entero con un quebrado se escribe el entero y después el quebrado, y queda la suma bajo la forma de un número mixto,* el cual podrá reducirse á fraccionario (151) *multiplicando el entero por el denominador del quebrado, añadiendo á este producto el numerador, y poniendo al resultado por denominador el del quebrado.*

Así, la suma del entero 32 con el quebrado $\frac{2}{5}$ será

$$32\,\frac{2}{5}=\frac{32\times 5+2}{5}=\frac{162}{5}.$$

164. *Para sumar números mixtos, se suman primero los quebrados, y si esta suma compone algún entero, se une á la suma de los enteros.*

En efecto; el número que así resulte se compondrá de todas las unidades y partes de ella que contengan los sumandos, que es precisamente la suma.

EJEMPLO. Supongamos que se quiere sumar los números mixtos $12\,\frac{2}{3}, 18\,\frac{2}{5}, 32\,\frac{4}{9}$ y $24\,\frac{7}{10}$.

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{l} 12\,\frac{2}{3} \\ 18\,\frac{2}{5} \\ 32\,\frac{4}{9} \\ 24\,\frac{7}{10} \\ \hline 88\,\frac{19}{90} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{10}=\frac{60}{90}+\frac{36}{90}+\frac{40}{90}+\frac{63}{90}=\frac{199}{90}=2\,\frac{19}{90}.$$

También pueden sumarse los números mixtos reduciéndolos á fraccionarios, lo cual convierte este caso en el de sumar quebrados.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Restar quebrados, de un entero un quebrado y números mixtos.

165. *Para restar un quebrado de otro, se reducen á un común denominador si no le tienen, se restan los numeradores, y á la resta se le pone por denominador el denominador común.*

En efecto; estando reducidos los quebrados á un común denominador, ambos expresan partes iguales de la unidad; por lo tanto, la diferencia de los numeradores expresará el número de partes que sumado con el sustraendo nos da el minuendo, y para indicar que estas partes son iguales á las de los quebrados que se restan, se les pone por denominador el denominador común.

Así,

$$\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9},$$

y

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{28}{35} - \frac{15}{35} = \frac{13}{35}.$$

166. *Para restar de un entero un quebrado, se toma una unidad del entero y se reduce á la especie del quebrado, de ella se resta dicho quebrado, y el número entero disminuído en una unidad seguido de la fracción que resulte, será la resta pedida.*

Así,

$$3478 - \frac{23}{77} = 3477\,\frac{54}{77}.$$

Como la unidad reducida á la especie del quebrado sustraendo es igual (551) á $\frac{77}{77}$, se deduce que para hallar la diferencia entre una fracción y la unidad, se resta el numerador del denomidador, y el resultado se le pone por denominador el mismo del quebrado.

También puede reducirse la resta de un entero y quebrado á la de dos quebrados, poniendo el entero bajo la forma de fracción; pero este método es muy pesado cuando el entero y los términos del quebrado son bastante crecidos.

También puede hacerse multiplicando el entero por el denominador, restando del producto el denominador, y poniendo al resultado por denominador el mismo del quebrado.

167. *Para restar números mixtos se restan primero los quebra-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dos y después los enteros. Si el quebrado del minuendo fuese menor que el del sustraendo, *se le agrega á aquél una unidad y se efectúa la resta, teniendo cuidado de considerar con una unidad menos al entero del resto.*

Sean los números que se han de restar $37\frac{3}{5}$ y $25\frac{2}{7}$.

Dispuesta la operación como á continuación se ve, efectuaremos la resta de los quebrados, y después la de los enteros, y tendremos el número mixto que sumado con el sustraendo nos da el minuendo, y, por consiguiente, la resta.

$$\left.\begin{array}{r} 37\frac{3}{5} \\ 25\frac{2}{7} \\ \hline 12\frac{11}{35} \end{array}\right\} \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{21-10}{35} = \frac{11}{35}.$$

Supongamos en segundo lugar que de $347\frac{2}{5}$ se quiere restar $139\frac{3}{4}$.

Dispuesta la operación como anteriormente, se tiene

$$\left.\begin{array}{r} 347\frac{2}{5} \\ 139\frac{3}{4} \\ \hline 207\frac{13}{20} \end{array}\right\} \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{8}{20} - \frac{15}{20}; \quad \frac{20+8}{20} - \frac{15}{20} = \frac{13}{20}.$$

Donde vemos que después de reducidos los quebrados á un común denominador, no se puede efectuar la resta á causa de ser el primero menor que el segundo; pero tomando una unidad de los enteros, reduciéndola á quebrado y agregándola al minuendo, nos da un resultado del cual puede ya restarse el sustraendo; efectuando después la resta de los enteros, considerando al minuendo con una unidad menos, hallamos el resultado que se pide.

También puede reducirse la resta de números mixtos á la de quebrados, poniendo éstos bajo la forma de números fraccionarios, pero este método es en general más pesado.

Si se hubiera de restar un entero de un número mixto, se restarían los enteros, y agregando á la resta el quebrado del minuendo, tendríamos el resultado.

Si se quisiera restar de un entero un número mixto, tomaríamos una unidad del entero minuendo de la cual restaríamos el quebrado del sustraendo, y restando después los enteros, considerando

(c) Instituto Cervantes de Madrid

con una unidad menos al del minuendo, obtendríamos el resultado pedido.

LECCIÓN XVIII

Multiplicación de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.—División de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

Multiplicación de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

168. En la multiplicación de quebrados debemos considerar varios casos: 1.°, multiplicar un quebrado por un entero; 2.°, un entero por un quebrado; 3.°, un número quebrado por otro; 4.°, un mixto por un entero ó quebrado; 5.°, un entero ó quebrado por un número mixto; y 6.°, dos números mixtos.

PRIMER CASO. Para multiplicar un quebrado por un entero sabemos (155-1.°) que se puede seguir dos métodos: ó multiplicar el numerador del quebrado por el entero, ó dividir el denominador por dicho número entero. El primero de estos métodos constituye la regla general, porque siempre es aplicable; el segundo sólo se emplea cuando el número entero porque se quiere multiplicar el quebrado es un divisor del denominador del mismo; y debe preferirse este segundo método, siempre que se pueda, porque da un resultado más sencillo que el primero.

Sea multiplicar el quebrado $\frac{3}{5}$ por el entero 4. Se tendrá

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Multipliquemos ahora el quebrado $\frac{7}{12}$ por 3; y empleando el segundo método, por ser el denominador 12 divisible por 3, tendremos

$$\frac{7}{12} \times 3 = \frac{7}{12:3} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Efectuando esta multiplicación por el primer método, obtendríamos

$$\frac{7}{12} \times 3 = \frac{7 \times 3}{12} = \frac{21}{12} = 1\,\frac{9}{12} = 1\,\frac{3}{4}.$$

Donde vemos que para hallar el resultado final ha sido necesario hacer una simplificación, la cual se evitó empleando el segundo método.

SEGUNDO CASO. *Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador del quebrado y el producto se parte por el denominador.*

En efecto; el producto ha de ser del multiplicando lo que el multiplicador sea de la unidad; luego si hallamos la parte que es del entero multiplicando lo que una parte del quebrado es de la unidad y la repetimos tantas veces como partes tiene el quebrado, obtendremos el producto. Ahora bien: la parte que es del entero, lo que la del quebrado es de la unidad, se obtiene dividiendo el entero por el denominador del quebrado, y ésta se repite tantas veces como partes tiene dicho quebrado, multiplicándola por el numerador; y como para multiplicar por un número el cociente de otros dos basta multiplicar el dividendo por este número, se sigue que multiplicando el entero por el numerador del quebrado y partiendo el producto por el denominador, se tendrá lo que se pide.

Aplicando el raciocinio anterior al caso de multiplicar el entero 5 por el quebrado $\frac{4}{7}$, tendremos que el producto será respecto de 5 lo que $\frac{4}{7}$ es la de unidad, y como $\frac{4}{7}$ es cuatro veces la *séptima* parte de la unidad, el producto será cuatro veces la *séptima* parte de 5; la séptima parte de 5 se obtiene dividiendo 5 por 7 (43-2.ª): por tanto, dicha séptima parte será $\frac{5}{7}$; de modo que repitiendo $\frac{5}{7}$ cuatro veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándole por 4, se tendrá $\frac{5 \times 4}{7}$ que será el producto: luego

$$5 \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{7} = \frac{20}{7} = 2\,\frac{6}{7}.$$

OBSERVACIÓN. En el caso ser el entero divisible por el denominador del quebrado, conviene efectuar esta división y multipli-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

car el cociente que resulta por el numerador, lo que nos dará el producto simplificado.

Supongamos que se quiere multiplicar 12 por $\frac{3}{4}$.

Como 12 es divisible por el denominador 4, en vez de emplear el procedimiento general, dividiremos 12 por 4, el cociente 3 lo multiplicaremos por el numerador del quebrado, y obtendremos el producto 9 que se pedía.

TERCER CASO. *Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores, después los denominadores, y se parte el primer producto por el segundo.*

En efecto; el producto ha de ser del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad; luego si se hubiera de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$, el producto sería de $\frac{3}{4}$ lo que $\frac{5}{7}$ es la unidad, es decir, cinco veces la *séptima parte*. Ahora bien; la séptima parte de $\frac{3}{4}$ es (155·2.°) $\frac{3}{4\times7}$, y esta séptima parte, repetida cinco veces ó multiplicada por 5, nos da (2.° *caso*) $\frac{3\times5}{4\times7}$, que es el producto; luego

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times5}{4\times7}=\frac{15}{28}.$$

OBSERVACIÓN. Si el numerador del quebrado multiplicando es divisible por el denominador del quebrado multiplicador, se podrá efectuar dicha división; y multiplicando el quebrado que resulte por el numerador del segundo, tendremos el producto pedido.

En efecto; sean los quebrados que hemos de multiplicar $\frac{8}{11}$ y $\frac{3}{4}$. Como 8 es divisible por 4, se hallará la cuarta parte de $\frac{8}{11}$, dividiendo 8 por 4 (155-2.°), lo cual nos da $\frac{2}{11}$, y repitiendo esta cuarta parte 3 veces, obtendremos el producto pedido $\frac{6}{11}$; cuyo resultado es más sencillo que el que se obtiene por la regla general.

CUARTO CASO. *Para multiplicar un número mixto por un entero ó quebrado, se reduce el mixto á quebrado y se efectúa la multiplicación del quebrado que resulta por el entero ó quebrado multiplicador; ó bien*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

se multiplica el entero y quebrado del número mixto por el multiplicador y se suman los productos parciales (54).

Sea el producto que queremos hallar $\left(4+\frac{2}{5}\right)\times 3$.

Reduciendo el entero á la especie del quebrado y efectuando la multiplicación, se tendrá:

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\times 3=\frac{4\times 5+2}{5}\times 3=\frac{22}{5}\times 3=\frac{66}{5}=13\frac{1}{5}.$$

Sea, en segundo lugar, el producto de $\left(4+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{7}$, el cual se reducirá á multiplicar $\frac{22}{5}$ por $\frac{3}{7}$; luego se tendrá

$$\left(4+\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{7}=\frac{22}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{22\times 3}{5\times 7}=\frac{66}{35}=1\frac{31}{35}.$$

Estos mismos ejemplos, resueltos por el segundo método, nos dan.

$$\left(4+\frac{2}{5}\right).3=4.3+\frac{2}{5}.3=12+\frac{6}{5}=12+1+\frac{1}{5}=13\frac{1}{5}.$$

$$\left(4+\frac{2}{5}\right).\frac{3}{7}=4.\frac{3}{7}+\frac{2}{5}.\frac{3}{7}=\frac{12}{7}+\frac{6}{35}=$$

$$\frac{60}{35}+\frac{6}{35}=\frac{66}{35}=1\frac{31}{35}.$$

QUINTO CASO. *Para multiplicar un entero ó quebrado por un número mixto, se convierte el número mixto en fraccionario, y queda reducido á multiplicar un entero ó quebrado por un quebrado:* ó *bien se multiplica el multiplicando por el entero y quebrado del multiplicador y la suma de los dos números que resulten será el producto pedido* (55).

Supongamos que se quiere multiplicar el número 5 por el número mixto $4+\frac{2}{3}$: reduciendo el número mixto á fraccionario, y efectuando la multiplicación, se tendrá

$$5\times\left(4+\frac{2}{3}\right)=5\times\frac{14}{3}=\frac{70}{3}=23\frac{1}{3}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea el nuevo producto $\frac{3}{5} \times \left(4 + \frac{2}{3}\right)$, el cual nos dará, siguiendo el mismo método:

$$\frac{3}{5} \times \left(4 + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{14}{3} = 2\frac{42}{15} = 2\frac{12}{15} = 2\frac{4}{5}.$$

Los dos productos anteriores efectuados directamente, ó sea por el segundo método, nos dan:

1.º $\quad 5 \times \left(4 + \frac{2}{3}\right) = 20 + \frac{10}{3} = 20 + 3\frac{1}{3} = 23\frac{1}{3}.$

2º. $\quad \frac{3}{4} \times \left(4 + \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{5} + \frac{6}{15} = \frac{36}{15} + \frac{6}{15} = \frac{42}{15} = 2\frac{4}{5}.$

SEXTO CASO. *Para multiplicar un número mixto por otro, se pueden convertir ambos en números fraccionarios, y queda reducido á multiplicar dos quebrados; ó bien se efectúa la multiplicación de todo el multiplicando por el entero y quebrado del multiplicador, y sumando los productos parciales que resulten, se tiene el producto total* (55).

Sea, por ejemplo, multiplicar $4 + \frac{2}{5}$ por $3 + \frac{7}{9}$; se tendrá según el primer método

$$\left(4 + \frac{2}{5}\right) \times \left(3 + \frac{7}{9}\right) = \frac{22}{5} \times \frac{34}{9} = \frac{22 \times 34}{5 \times 9} = \frac{748}{45} = 16\frac{23}{45}.$$

Empleando el segundo método, hallaremos:

$$\left(4 + \frac{2}{5}\right)\left(3 + \frac{7}{9}\right) = 12 + \frac{6}{5} + \frac{28}{9} + \frac{14}{45} = 12 + \frac{54}{45} + \frac{140}{45} + \frac{14}{45} = 12 + \frac{208}{45} = 12 + 4\frac{28}{45} = 16\frac{28}{45}.$$

División de quebrados, de un entero por un quebrado y de números mixtos.

169. En la división de quebrados se consideran varios casos que pueden reducirse á estos cuatro: 1.º, dividir un quebrado por un entero; 2.º, un entero por un quebrado; 3.º, un quebrado por otro; y 4.º, un mixto por otro.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

PRIMER CASO. *Para dividir un quebrado por un entero, sabemos puede hacerse de dos modos: ó multiplicando el denominador por el número porque hemos de dividir el quebrado, ó dividiendo el numerador por dicho número entero.*

El primero de estos métodos constituye la regla general, porque siempre es aplicable: el segundo sólo se emplea cuando el número entero por que se quiere dividir el quebrado es un divisor del numerador del mismo; y debe preferirse este segundo método siempre que se pueda aplicar, porque da un resultado más sencillo que el primero.

Propongamos dividir el quebrado $\frac{3}{5}$ por 4: se tendrá

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{20}.$$

Supongamos ahora que se quiere dividir $\frac{3}{9}$ por 4. Como el numerador 8 es divisible por 4, empleando el segundo método, se tendrá:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{2}{9}.$$

SEGUNDO CASO. *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y el producto se parte por el numerador.*

En efecto; siendo la división el análisis de la multiplicación, y teniendo por objeto hallar uno de los factores de un producto dado éste y el otro factor, y sabiendo además que el producto es respecto de uno de los factores lo que el otro es de la unidad, tendremos que el dividendo, que es el producto, será respecto del cociente, número que vamos buscando, lo que el divisor, que es uno de los factores, es respecto de la unidad; luego dividiendo el dividendo por el número de partes que tiene el quebrado divisor ó sea por el numerador de dicho quebrado, el número que resulte expresará la parte del cociente indicada por el denominador del divisor, y repitiendo éste tantas veces como unidades tiene el denominador del quebrado divisor, obtendremos el cociente.

Apliquemos este raciocinio á un ejemplo, y sea dividir 8 por $\frac{3}{5}$.

Siendo 8 el producto de $\frac{3}{5}$ por el número que vamos buscando,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

será respecto de este número lo que $\frac{3}{5}$ es de la unidad; es decir, que el dividendo 8 será *tres veces la quinta parte del cociente;* luego 8 partido por 3, ó sea $\frac{8}{3}$, expresará una quinta parte del cociente, y repitiendo esta quinta parte 5 veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándola por 5, tendremos el número que se busca; luego

$$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3}.$$

TERCER CASO. *Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y éste producto se parte por el que resulta de multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor;* ó más sencillo, *para dividir un quebrado por otro, se multiplica el primero por el segundo, invertido.*

Sea, por ejemplo, dividir el quebrado $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{7}$.

Siendo el dividendo $\frac{3}{5}$ respecto del cociente lo que $\frac{4}{7}$ es respecto de la unidad, y, por lo tanto, 4 veces la *séptima* parte, dividiendo $\frac{3}{5}$ por 4, lo cual nos da (155-2.º) $\frac{3}{5 \times 4}$, obtendremos una séptima parte del cociente; y repitiendo esta séptima parte 7 veces, ó lo que es lo mismo, multiplicándola por 7, tendremos el cociente pedido. Así:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{21}{20} = 1\,\frac{1}{20}.$$

OBSERVACIÓN. Siendo la división el análisis de la multiplicación, y efectuándose la de los quebrados multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador, parecía natural que para dividir una fracción por otra se dividiese respectivamente los dos términos de la primera por los de la segunda; y, en efecto, ningún inconveniente habría siempre que dichos dos términos de la primera fuesen exactamente divisibles por los de la segunda; pero en el caso de no serlo, no tendría ventaja la aplicación de esta regla, porque la división de las dos fracciones propuestas quedaría reducida á la de otras dos.

CUARTO CASO. *Para dividir un número mixto por otro, se con-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

vierten ambos en fraccionarios y queda reducido á dividir un quebrado por otro.

Sea, por ejemplo, dividir $3+\frac{2}{5}$ por $4+\frac{7}{8}$; se tendrá:

$$\left(3+\frac{2}{5}\right):\left(4+\frac{7}{8}\right)=\frac{17}{5}:\frac{39}{8}=\frac{17\times 8}{5\times 39}=\frac{136}{195}.$$

LECCIÓN XIX

Producto de varios quebrados.—Quebrados de quebrados.—Reducción de quebrados á otros que tengan un denominador dado.—Generalización de la teoría de quebrados.

Producto de varios quebrados.

170. *El producto de varios quebrados se obtiene multiplicando los numeradores, después los denominadores y partiendo el primer producto por el segundo.*

Sea el producto

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}.$$

El producto de los dos primeros factores es:

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{4\times 5}.$$

El de éste por el tercer quebrado es:

$$\frac{3\times 2}{4\times 5}\times\frac{4}{9}=\frac{3\times 2\times 4}{4\times 5\times 9},$$

y efectuando el producto del último hallado por el último factor, se tiene:

$$\frac{3\times 2\times 4}{4\times 5\times 9}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 2\times 4\times 7}{4\times 5\times 9\times 8};$$

luego

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times 2\times 4\times 7}{4\times 5\times 9\times 8};$$

que es lo que se quería demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

OBSERVACIONES. 1.ª Si los factores de un producto son enteros, quebrados y mixtos, después de convertidos éstos en números fraccionarios, queda reducida la cuestión á multiplicar números enteros y quebrados; y como en la práctica se principia por multiplicar los dos primeros factores, podrá suceder una de estas combinaciones: multiplicar un entero por otro, un entero por un quebrado, un quebrado por un entero ó dos quebrados; y lo mismo sucede en el producto del primero hallado por el tercer factor y en todos los demás. Ahora bien: el producto de un entero por un quebrado ó viceversa, se obtiene multiplicando el numerador del quebrado por el entero y partiendo el producto por el denominador; luego el producto de varios números enteros y quebrados es igual á una fracción que tiene por numerador el producto de todos los enteros y numeradores, y por denominador el producto de los denominadores.

2.ª Cuando haya de efectuarse el producto de varios números enteros y quebrados ó de quebrados solamente, conviene indicar primero las operaciones, y antes de ejecutarlas quitar los factores que haya comunes á los dos términos de la fracción que expresa el producto.

Sea, por ejemplo, multiplicar

$$\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{5}{6}\times 8\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 7\times 5\times 8\times 3}{5\times 9\times 6\times 7},$$

cuyo resultado podrá simplificarse quitando primeramente los factores 7 y 5 comunes á los términos, y después los factores 2 y 3 que se hallan en el número 6 del denominador; así, tendremos:

$$\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{5}{6}\times 8\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 7\times 5\times 8\times 3}{5\times 9\times 6\times 7}=\frac{2\times 8\times 3}{9\times 6}=\frac{8}{9},$$

171. Siendo el producto de varios quebrados ó de varios enteros y quebrados otro quebrado que tiene por numerador el producto de los numeradores ó el de los enteros y numeradores, y por denominador el de los denominadores, y siendo estos productos siempre los mismos, cualquiera que sea el orden en que se multipliquen, se sigue que el producto de varios enteros y quebrados ó de quebrados solamente, no varía, cualquiera que sea el orden en que se multipliquen estos números.

OBSERVACIÓN. El principio de que el orden de factores no altera el producto que se demostró (58) para el caso de ser enteros

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dichos factores, ahora queda demostrado para el caso de ser quebrados ó enteros y quebrados; más adelante haremos ver que también es verdadero siendo los números incomensurables.

Quebrados de quebrados.

172. Hemos visto (168) que multiplicar, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{5}$ es hallar las *dos quintas partes de tres cuartos*. En esta cuestión nos vemos precisados á tomar de un quebrado una ó más partes de las que indica el denominador de otro, por lo que al resultado se le llama *quebrado de quebrado*.

También se da el nombre de *quebrado de quebrados* al resultado de multiplicar entre sí varios quebrados ó enteros y quebrados; así, los $\frac{2}{5}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{9}$ de 12 será el producto de todos estos números, es decir,

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}\times 12=\frac{2\times 3\times 5\times 12}{5\times 4\times 9}=\frac{2\times 12}{4\times 3}=2.$$

Reducción de quebrados á otros que tengan un denominador dado

173. *Para convertir un quebrado irreducible en otro que tenga un denominador* n, *se multiplica el numerador por* n, *el producto se parte por el denominador, y poniendo por denominador el número* n *al cociente entero que resulte, se tendrá el quebrado pedido.*

Sea el quebrado irreducible $\frac{a}{b}$ que se quiere convertir en otro que tenga el denominador n. Pudiéndose considerar á todo quebrado (149) como el cociente de la división del numerador por el denominador, se tendrá que dividiendo cada unidad del dividendo, no en tantas partes como unidades tiene el divisor, sino en n, el cociente obtenido podrá no ser exacto, pero será un cierto número de *enésimas* partes de la unidad que expresará el valor del quebrado propuesto con un error más pequeño que una *enésima* parte; de modo que llamando q al cociente entero de dividir an por b, el quebrado propuesto será, si la división hecha no es exacta, mayor que $\frac{q}{n}$ y menor que $\frac{q+1}{n}$; luego el error que se comete tomando

(c) Instituto Cervantes de Madrid

uno cualquiera de estos dos quebrados por el propuesto, será menor que la diferencia que hay entre ellos, ó, lo que es lo mismo, menor que $\frac{1}{n}$.

CONSECUENCIA. Dado un quebrado irreducible cuyos términos sean tan grandes que no nos podamos formar nna idea clara de su valor, se reduce á otro cuyo denominador sea un número determinado n, y de este modo podremos conocer su valor aproximado en menos de $\frac{1}{n}$.

Sea el quebrado $\frac{677}{977}$ que nos expresa 677 partes de la unidad dividida en 977: reduciendo este quebrado á otro que tenga 12 por denominador, se tendrá que el producto de 677 por 12 es 8124, y el cociente entero de dividir este producto por 977 es 8; luego el quebrado propuesto está comprendido entre $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, ó sea entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$; por consiguiente, al tomar uno de estos quebrados por el propuesto, se comete un error menor que $\frac{1}{12}$.

Generalización de la teoría de los quebrados.

134. Siendo el quebrado lo que resulta de medir una cantidad con una unidad mayor que ella, y expresando la relación que hay entre el número de partes iguales en que se divide la unidad y el que de éstas contiene la cantidad, se deduce que los dos términos que forman el quebrado son por su naturaleza números enteros. También hemos visto (149) que puede considerarse al quebrado como el cociente de la división de dos números enteros, cuando dicha división no se puede efectuar exactamente en unidades enteras, obteniéndose en este caso el quebrado, dividiendo cada unidad del dividendo en tantas partes como unidades tiene el divisor, y efectuando la división del número que resulta por dicho divisor; por consiguiente, también en este caso son enteros los dos términos del quebrado; luego, según la definición de número quebrado y modo de obtenerlo debe estar expresado por la relación de dos número enteros. Sin embargo, se acostumbra á llamar en general número quebrado ó fracción al cociente de dos números cualesquiera, ya sean enteros, quebrados, mixtos ó incomensurables, y

(c) Instituto Cervantes de Madrid

entonces no debemos considerarle como el número que expresa parte ó partes de la unidad, sino como el cociente de la división indicada de dichos dos números. Considerando, pues, á las fracciones, no como el número que expresa parte ó partes de la unidad, en cuyo caso sus dos términos son, según hemos visto, números enteros, sino como el cociente indicado de dos números cualesquiera, debemos justificar todas las reglas que se han dado hasta aquí, que sólo son aplicables cuando los términos de la fracción son números enteros.

175. Sea la fracción en general $\frac{a}{b}$, que podrá tener sus términos enteros, quebrados, mixtos ó inconmensurables, y, por lo tanto, expresar cualquiera de las siguientes:

$$\frac{3}{4} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}, \quad \frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{3}{4}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{15}{4}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Las fracciones consideradas de este modo general, no se leen de la misma manera que aquellas cuyos términos, son enteros, sino expresando la división indicada: así las fracciones anteriores, cuyos términos no son enteros, se leen *dos tercios patido por cuatro quintos, dos y dos tercios partido por tres y tres cuartos, raíz de dos partidos por raíz de tres.*

* 176. Las alteraciones que experimenta un quebrado cualquiera, según las que sufren sus términos, se deducen por las que experimenta un cociente según las que sufren dividendo y divisor; y como ya hemos visto de un modo general (LEC. VII) cuáles son estas alteraciones, podremos decir que *cuando se multiplica ó divide el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado viene multiplicado ó partido por el mismo número; cuando se multiplica ó parte el denominador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado viene partido ó multiplicado por el mismo número; cuando se multiplican ó parten los dos términos de un quebrado por un mismo número, el quebrado no se altera.*

De estas alteraciones se deducen las reglas para multiplicar ó partir un quebrado por un número cualquiera y para simplificar los quebrados y reducirlos á un común denominador, cuyas reglas están enteramente conformes con las que hemos dado en el caso de ser enteros los términos del quebrado.

Vistas ya las alteraciones que experimenta un quebrado según

(c) Instituto Cervantes de Madrid

las que sufren sus términos, pasemos al cálculo de las cuatro operaciones.

* 177. *Para sumar quebrados en general, se reducen á un común denominador, si no le tienen, se suman los numeradores y al resultado se le pone por denominador el denominador común.*

Sean las fracciones que se han de sumor $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{f}{g}$.

Reduciéndolas á un común denominador, se tendrá:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{f}{g}=\frac{adg}{bdg}+\frac{cbg}{bdg}+\frac{fbd}{bdg};$$

y como el cociente de una suma es igual á la suma de los cocientes de los sumandos (55) y recíprocamente, se tendrá:

$$\frac{adg}{bdg}+\frac{cbg}{bdg}+\frac{fbd}{bdg}=\frac{adg+cbg+fbd}{bdg},$$

que es lo que se queria demostrar.

*178. Análogamente se prueba que *para restar dos fracciones en general, se reducen á un común denominador, se restan los numeradores y á la resta se le pone por denominador el denominador común.*

Así,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}.$$

* 179. *Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y su producto se parte por el de los denominadores.*

Sean las fracciones que se han de multiplicar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Representando por q y q' los valores respectivos de cada una, se tendrá:

$$\frac{a}{b}=q,\quad \frac{c}{d}=q',$$

de donde

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=qq'.$$

De la primera igualdad se deduce $a=bq$; de la segunda $c=dq'$; y multiplicando estas dos, tenemos la igualdad:

$$ac=bq\times dq',$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

que, dividida por b y luego por d, nos da:

$$\frac{ac}{bd} = qq';$$

pero

$$qq' = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d};$$

luego

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

que es lo que se quería demostrar.

* 180. *Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la segunda invertida;* ó, lo que es lo mismo, *el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, partido por el que resulta de multiplicar el denominador del primer quebrado por el numerador del segundo, nos expresa el cociente de las dos fracciones.*

Sea la división de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$: representemos como antes por q y q' los valores respectivos de estas fracciones, y tendremos:

$$\frac{a}{b} = q\,\frac{c}{d} = q' \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{q}{q'}.$$

De las primeras igualdades se deducen las siguientes:

$$a = bq$$
$$c = dq'.$$

Multiplicando la primera por d, y la segunda por b, obtendremos:

$$ad = bdq$$
$$cb = bdq';$$

partiendo la primera de estas últimas por la segunda y simplificando, se tiene:

$$\frac{ad}{cb} = \frac{bdq}{bdq'} = \frac{q}{q'};$$

pero

$$\frac{q}{q'} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d};$$

luego

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb},$$

que es lo que se quería demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

* 181. Según las definiciones que hemos dado de múltiplo y divisor de un número, vemos que puede haber múltiplos y divisores de fracciones: así, el múltiplo de una fracción es lo que resulta de multiplicar dicha fracción por un número entero, y submúltiplo ó divisor de una fracción es el número entero ó fraccionario que divide exactamente á la fracción, dando por cociente un número entero.

La fracción $\frac{12}{13}$ es un múltiplo de $\frac{2}{13}$, puesto que resulta de multiplicar la segunda por 6. Recíprocamente, $\frac{2}{13}$ es un divisor ó submúltiplo de $\frac{12}{13}$, porque el cociente de dividir la segunda por la primera es el número entero 6.

Esto supuesto, veamos las condiciones á que debe satisfacer un quebrado irreducible $\frac{m}{n}$ para que divida exactamente, ó sea un divisor de otro también irreducible $\frac{a}{b}$.

Si el cociente de la división de la segunda por la primera fracción ha de ser entero, representándole por Q, se tendrá:

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm} = Q.$$

Siendo b primo con a, y m con n, es necesario, para que el cociente Q sea entero, que b y m sean respectivamente divisores de n y a; por consiguiente, *para que un quebrado* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *divida á otro, siendo ambos irreducibles, es necesario que su numerador* m *sea un divisor del numerador del que ha de ser divisible, y su denominador* n *un múltiplo del denominador.*

Y reciprocamente, *para que un quebrado sea múltiplo de otro es necesario que su numerador lo sea del numerador del segundo quebrado, y que su denominador sea un divisor del denominador.*

Donde vemos que un quebrado puede tener un número infinito de divisores, lo cual no se verifica en los números enteros.

Lo mismo que los números enteros, pueden tener las fracciones múltiplos y divisores comunes; de modo que se podrá proponer el problema de hallar el máximo común divisor ó el mínimo común múltiplo de dos ó más fracciones.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

DE LAS FRACCIONES DECIMALES

LECCIÓN XX

Fracciones decimales, su numeración.—Alteraciones que experimenta una decimal cuando se ponen ó quitan ceros á su derecha, y cuando se corre la coma á derecha ó izquierda.—Adición de fracciones decimales.—Sustracción de fracciones decimales.—Multiplicación de fracciones decimales.—División de fracciones decimales.

Fracciones decimales; su numeración.

182. Hemos visto (147) que cuando se trata de medir una cantidad con una unidad mayor que ella, se divide ésta en un cierto número de partes tales, que una de ellas esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, y si dicha cantidad es *conmensurable*, se obtiene un número quebrado que representa su valor. El número de partes en que se divide la unidad para obtener el quebrado no tiene que satisfacer á más condición que á la de estar contenida exactamente una de estas partes en la cantidad que se mide; pero si en vez de dividir la unidad en un número cualquiera de partes la dividiésemos en 10, 100, 1000..., entonces los quebrados que nos expresan exacta ó aproximadamente el valor de la cantidad, toman el nombre de *quebrados* ó *fracciones decimales*.

Desde luego se comprende que empleando la ley decimal en las divisiones y subdivisiones de la unidad, no siempre se podrá expresar exactamente el valor de cantidades que, apreciadas por quebrados ordinarios, podría hacerse con exactitud; pero en cambio las fracciones decimales que resultan tienen la ventaja de poderse escribir sin necesidad de denominador, y reducir su cálculo al de los números enteros.

183. Del mismo modo que se puede expresar el valor de una cantidad, por muy grande que sea, formando unidades que vayan siendo de 10 en 10 veces mayores, podremos también expresar el de otra, por muy pequeña que sea, formando también unidades que vayan siendo de 10 en 10 veces menores; de modo que estas dos series de unidades que, partiendo del mismo origen, que es la unidad, van en sentido ascendente y descendente, forman el *sistema decimal*, del cual sólo hemos explicado (LEC. I) una parte, que es la que corresponde á los múltiplos de la unidad. Para obtener la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

correspondiente á los divisores, se supone la unidad dividida en 10 partes iguales llamadas *décimas*, cada décima en otras 10 llamadas *centésimas*, cada centésima en 10 *milésimas*, y continuando de este modo se obtiene un número infinito de órdenes de unidades, que corresponden perfectamente á los considerados en el sistema ascendente, y cuyos nombres se derivan de los de éstos con sólo terminarlos en *ésimas:* así, la unidad de *quinto* orden, que es *decena de millar* ó *diez mil*, corresponde á la de *quinto* orden *decimal*, que es *diez milésima;* la unidad del orden *trece*, que es el *billón*, corresponde á la unidad del *trece decimal*, que es la *billonésima*.

Observando que cada unidad de un orden decimal se forma de 10 del inmediato inferior, podremos escribir las fracciones decimales sin necesidad de ponerles denominador, haciendo uso del valor relativo de las cifras; así, la primera que esté á la derecha de las unidades expresará *décimas*, la segunda *centésimas*, la tercera *milésimas*, y, en general, una cifra cualquiera expresará el orden que marque el número de cifras que hay desde ella hasta las unidades inclusive; por tanto, una cifra que ocupe, á contar desde las unidades, el lugar *once* á la derecha, expresará *diez mil millonésimas*.

En la escritura de decimales debemos distinguir dos casos: 1.º, que se den los enteros que contenga el número, y luego las decimales; 2.º, que enteros y decimales se den juntos.

184. *Para escribir números en los que se dan los enteros separados de las decimales, se escriben primero los enteros, y después el número que expresa la parte decimal, teniendo cuidado que la última cifra ocupe el lugar que le corresponda, y de separar con una coma los enteros de las decimales.*

EJEMPLO 1.º Escribir el número 357 *enteros*, 3874 *cien milésimas*.

Como las *cien milésimas* ocupan el sexto lugar á contar desde las unidades, el 4 deberá ocupar el sexto lugar; luego el número escrito en cifra será:

357,03874.

EJEMPLO 2.º Escribir el número 0 *enteros*, 3507 *millonésimas*.

El resultado será:

0,003507.

185. *Para escribir un número cuando el entero se da reunido con la decimal, se escribe el número dado como si fuese entero y se pone*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

después la coma, de modo que la última cifra ocupe el lugar que le corresponda por su denominación.

Sea el número 3578 *milésimas*.

Como las *milésimas* han de ocupar el *cuarto* lugar, se tendrá que poner la coma entre el 3 y el 5; de manera que el número será:

3,578.

Del mismo modo se verá que el número 8407 *diez milésimas* se escribirá así:

0,8407;

y que 327 *millonésimas* se escribirá del modo siguiente:

0,000327.

186. *Para leer un número decimal se lee primero el entero y después el número decimal como si también fuese entero, dándole la denominación que á su última cifra corresponda.*

Sea el número 34,789, el cual se leerá diciendo: 34 *enteros*, 789 *milésimas*. O, si se quiere, uniendo los enteros á las decimales, se podrá leer 34789 *milésimas*.

Alteraciones que experimenta una decimal cuando se ponen ó quitan ceros á su derecha, y cuando se corre la coma á la derecha ó izquierda.

187. Dependiendo el valor relativo de las cifras del lugar que ocupan con relación á la de las unidades, una de aquellas que ocupe el *tercer* lugar, por ejemplo, siempre expresará *centésimas*, y, por consiguiente, su valor no cambiará cualquiera que sea el número de ceros que se le ponga ó quite á su derecha; es verdad que todo el número que expresa la decimal se habrá hecho 10, 100, 1000, etcétera veces mayor ó menor poniendo ó quitando á su derecha *uno*, *dos*, *tres*, etc.; pero también es cierto que las unidades que representa el número en este caso, será el mismo número *n* de veces *menor* ó mayor que las que antes expresaba la decimal; luego *una decimal no se altera poniendo ó quitando ceros á su derecha.*

188. *Si en una decimal se corre la coma á derecha ó izquierda uno, dos, tres, etc. lugares, dicha decimal queda multiplicada ó partida por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.*

En efecto; al correr la coma á la derecha uno, dos, tres, etc. lu-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

gares, cada cifra pasa á representar un orden de unidades que es tantas veces mayor como expresa la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma, y, por el contrario, corriéndola hacia la izquierda, cada cifra expresa un orden de unidades que es tantas veces menor como indica la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió; luego el número queda multiplicado ó partido por la unidad seguida de uno, dos ó más ceros corriendo la coma á la derecha ó izquierda uno, dos ó más lugares; que es lo que se quería demostrar.

Adición de fracciones decimales.

189. Escribiéndose las fracciones decimales lo mismo que los números enteros y componiéndose cada unidad de un orden cualquiera de *diez* de la inmediata inferior, podrá efectuarse la adición de estas fracciones lo mismo que la de los números enteros. Así, diremos que

190. *Para sumar fracciones decimales se escriben los sumandos los unos debajo de los otros de modo que se correspondan las unidades de igual orden, para lo cual basta que las comas estén en línea vertical; en seguida se suman como los enteros, y se pone después la coma en el lugar correspondiente.*

Supongamos que se han de sumar los números 3,47, 12,7, 0,187 y 34,703.

$$\begin{array}{r} 3{,}470 \\ 12{,}700 \\ 0{,}187 \\ 34{,}703 \\ \hline 51{,}060 \end{array}$$

Después de colocados los sumandos unos debajo de otros de modo que se correspondan las comas, conviene, para evitar equivocaciones, igualar con ceros el número de cifras decimales, en seguida, sumando como enteros y colocando la coma en su lugar, se obtiene la suma $51{,}060 = 51{,}06$.

Sustracción de fracciones decimales.

191. *Para restar decimales se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de modo que se correspondan las comas, se iguala con ceros el*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

número de cifras decimales y se restan como enteros, poniendo la coma en su lugar.

Sea, por ejemplo, restar 37,43 de 57,3. Dispuesta la operación como se ve, se tendrá:

$$\begin{array}{r} 57{,}30 \\ 37{,}43 \\ \hline 19{,}87 \end{array}$$

Propongámonos, en segundo lugar, restar 123,47 de 347.

$$\begin{array}{r} 347{,}00 \\ 123{,}47 \\ \hline 223{,}53 \end{array}$$

Vemos que siendo el minuendo, en este ejemplo, un número entero, y el sustraendo entero y decimal, ha sido necesario poner dos ceros en el lugar de las decimales; restando después como en los números enteros, hemos obtenido el número 223,53.

Multiplicación de fracciones decimales.

192. En la multiplicación de decimales distinguiremos varios casos: 1.°, multiplicar una decimal por la unidad seguida de ceros; 2.°, multiplicar una decimal por un número entero; y 3.°, multiplicar una decimal por otra.

193. *Para multiplicar una decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la derecha tantos lugares como ceros tiene la unidad.*

En efecto; hemos visto (188) que corriendo la coma á la derecha un cierto número de lugares, queda la decimal multiplicada por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se corrió la coma.

Así,

$$3{,}468 \times 100 = 346{,}8 \quad \text{y} \quad 3{,}24 \times 1000 = 3240.$$

194. *Para multiplicar una decimal por un número entero, se prescinde de la coma y se efectúa el producto de los dos números como si fuesen enteros; después se separan á la derecha del producto tantas cifras decimales como tiene el multiplicando, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Supongamos que se trata de multiplicar 3,476 por 84: se dispondrá la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 3{,}476 \\ 84 \\ \hline 13\,904 \\ 278\,08 \\ \hline 291{,}984 \end{array}$$

Al prescindir de la coma en el multiplicando, le hemos multiplicado por la unidad seguida de tres ceros, y, por lo tanto, el producto obtenido vendrá multiplicado por el mismo número (60); pero al separar á la derecha de este producto tres cifras decimales, le hemos dividido por la unidad seguida de tres ceros (188); luego el número hallado 291,984 es el producto pedido.

Sea, en segundo lugar, el producto de 0,0032 por 8..

Efectuada la multiplicación como si ambos fuesen enteros, se tiene:

$$\begin{array}{r} 32 \\ 8 \\ \hline 256 \end{array}$$

Para obtener el verdadero producto tenemos que separar á la derecha cuatro cifras decimales; pero como no hay más que tres, será necesario poner ceros á la izquierda, lo que nos da el producto 0,0256.

195. *Para multiplicar una decimal por otra, se prescinde de las comas y se multiplican como enteros, después se separan de la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en ambos factores, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.*

Supongamos que se trata de multiplicar 3,47 por 2,5; se dispondrá la operación así:

$$\left.\begin{array}{r} 347 \\ 25 \\ \hline 1735 \\ 694 \\ \hline 8675 \end{array}\right\} \quad 3{,}47 \times 2{,}5 = 8{,}675.$$

Al suprimir la coma en ambos factores les hemos multiplicado respectivamente por la unidad seguida de *dos y un* ceros, y, por consiguiente, el producto 8675 viene multiplicado (61) por la uni-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dad seguida de tres ceros; luego separando á la derecha de este producto tres cifras decimales, tendremos (188) el producto verdadero, 8,675.

Sea, en segundo lugar, el producto de 2,032 por 0,0016.

Dispuesta la operación como anteriormente, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2032 \\ 16 \\ \hline 12192 \\ 2032 \\ \hline 32512 \end{array}\right\} \quad 2{,}032 \times 0{,}0016 = 0{,}0032512.$$

En este ejemplo vemos que debiendo separar del producto de los dos números considerados como enteros tantas cifras decimales como tienen ambos factores, y no habiendo en dicho producto bastantes cifras, ha sido necesario poner ceros á la izquierda, obteniendo el resultado 0,0032512.

196. El producto de varias fracciones decimales se obtiene, como el de los números enteros, multiplicando las dos primeras, después el producto obtenido se multiplica por la tercera, éste por la cuarta, y así sucesivamente hasta multiplicar por la última decimal; el último producto hallado será el de todas las decimales.

Desde luego se comprende que este producto se obtendrá multiplicando las decimales como si fuesen enteros, y separando después con una coma tantas cifras decimales como hay en todos los factores. De donde se deduce que el resultado final siempre será el mismo, cualquiera que sea el orden en que se hayan multiplicado dichas fracciones.

División de fracciones decimales.

197. En la división de decimales distinguiremos varios casos: 1.°, dividir una decimal por la unidad seguida de ceros; 2.°, dividir una decimal por un número entero; 3.°, dividir un entero por una decimal; y 4.°, dividir una decimal por otra.

198. *Para dividir una decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la izquierda tantos lugares como ceros tiene la unidad.*

Supongamos que se trata de dividir 345,72 por 100. Corriendo la coma á la izquierda dos lugares se tendrá el cociente (188), así:

$$345{,}72 : 100 = 3{,}4572.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

199. *Para dividir una decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el dividendo, y se divide como si fuesen enteros; después se separan á la derecha del cociente tantas cifras decimales como hay en el dividendo, poniendo ceros á la izquierda si fuese necesario.*

Sea, por ejemplo, dividir 82,35 por 5: efectuando esta división como si ambos fuesen enteros, se halla por cociente 1647; luego se tendrá

$$82{,}35 : 5 = 16{,}47.$$

Al prescindir de la coma en el dividendo le hemos multiplicado por 100, y, por consiguiente, el cociente que resulta viene multiplicado por el mismo número (71); pero al separarle á la derecha dos cifras decimales, le hemos dividido por 100; luego 16,47 es el cociente pedido.

200. *Para dividir un entero por un decimal, ó una decimal por otra, se prescinde de la coma en el divisor, se corre á la derecha la del dividendo tantos lugares como decimales tiene aquél, añadiendo ceros si fuese necesario, y queda reducida la operación á dividir una decimal por un entero, ó un entero por otro.*

En efecto; al quitar la coma en el divisor y correr la del dividendo tantos lugares como decimales tiene dicho divisor, hemos multiplicado ambos términos por un mismo número, y sabemos (76-3.°) que esto no altera el cociente.

Sea, por ejemplo, dividir 23,468 por 12,56; se tendrá:

$$23{,}468 : 12{,}56 = 2346{,}8 : 1256;$$

hecha la división se halla 1,8 de cociente y 86 enteros de resto.

201. Si las divisiones que se hacen con las decimales no son exactas, el cociente que se obtiene por las reglas dadas anteriormente se diferencia del verdadero en menos de una unidad del último orden del dividendo, después de haber corrido la coma tantos lugares como decimales tiene el divisor.

En el ejemplo anterior, el cociente 1,8 se diferencia del verdadero en menos de una décima.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXI

Reducción de quebrados á fracciones decimales.

Reducción de quebrados á fracciones decimales.

202. Hemos visto (173) que para reducir un quebrado á otro que tenga un denominador dado n, se multiplica el numerador por dicho número n, y el cociente entero de dividir este producto por el denominador, expresa exacta ó aproximadamente el valor del quebrado en *enésimas* partes de la unidad. Aplicando, pues, esta regla, podremos expresar exacta ó aproximadamente el valor de un quebrado por una decimal, haciendo n igual á la unidad seguida de un cierto número de ceros.

Sea la fracción $\frac{37}{125}$ cuyo valor queremos obtener en *milésimas*.

Multiplicando 37 por 1000 y partiendo el producto por 125, el cociente entero nos expresará el valor pedido; pero el cociente de dividir 37000 por 125 es 296; luego la fracción propuesta es exactamente igual á 296 *milésimas*, ó lo que es lo mismo, á 0,296.

Si quisiéramos expresar la fracción $\frac{3}{7}$ en *centésimas*, tendríamos que multiplicar por 100 el numerador 3, el producto 300 partirlo por 7, y el cociente sería el número de centésimas equivalente al valor de la fracción propuesta.

Hecha la división hallamos 42 de cociente y 6 de resto; luego la fracción propuesta está comprendida entre 42 y 43 *centésimas*, y, por consiguiente, tomando uno de estos números por el valor de dicha fracción, cometemos un error menor que una centésima; por lo que se dice que el valor de $\frac{3}{7}$ en menos de una centésima, es 0,42 ó 0,43.

En la práctica se reduce la regla anterior á la siguiente:

203. *Para reducir un quebrado ordinario á decimal, se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero que se halle será la parte entera de la decimal; se pone la coma en el cociente, y en seguida por cada cifra decimal que se quiera hallar se escribe un cero á la derecha del residuo anterior.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea $\frac{22}{8}$ la fracción que hemos de convertir en decimal.

Puesto que toda fracción se puede considerar como el cociente de dividir el numerador por el denominador, efectuaremos esta división en lo que sea posible, y tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 8 \\ \hline 60 & 2{,}75 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

El cociente entero de dividir 22 por 8 es 2; luego 2 es la parte entera de la decimal que separaremos con una coma: esta división da 6 de resto, de modo que reduciéndole á décimas, se tendrán 60, puesto que cada unidad tiene 10 décimas. Dividiendo 60 por 8 tendremos 7 décimas de cociente y 4 de residuo, el cual, convertido en centésimas, da 40. Efectuando la división de 40 por 8 se halla el cociente exacto 5; luego la fracción propuesta es equivalente á la decimal 2,75.

Si no hubiésemos hallado cociente exacto, podríamos haber obtenido tantas cifras decimales como quisiéramos, prolongando esta operación suficientemente.

Supongamos que se quiera convertir en decimal la fracción $\frac{3}{7}$.

Aplicando la regla anterior, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline 20 & 0{,}428571\ldots \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 3 & \end{array}$$

En este ejemplo se ve que después de haber hallado seis cifras decimales, hemos obtenido un resto igual al numerador de la fracción propuesta; de modo que si continuásemos la operación, iríamos obteniendo los mismos dividendos que anteriormente, y, por lo tanto, las mismas cifras en el cociente, dando origen á una fracción decimal de un número ilimitado de cifras, las cuales se repiten periódicamente de seis en seis.

204. El ejemplo anterior justifica lo que dijimos al principio de las fracciones decimales: que no se puede expresar siempre en de-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cimales el valor de cantidades conmensurables; y, por consiguiente, que no es siempre posible hallar en decimales el valor exacto de un quebrado ordinario. En efecto; el valor del quebrado $\frac{3}{7}$ convertido en decimal, nos da una fracción de infinito número de cifras, y como de éstas no podemos tomar sino un número limitado, de aquí que no exprese exactamente el valor del quebrado propuesto; pero á medida que se tome mayor número de cifras decimales, el error que se comete va siendo cada vez más pequeño, y puede ser menor que cualquier cantidad dada. Por tanto, el quebrado propuesto se puede considerar como el límite hacia el cual se va aproximando la fracción decimal á medida que aumenta el número de sus cifras.

205. Las fracciones decimales pueden tener, según hemos visto, un número de cifras limitado ó ilimitado: en el primer caso se llaman fracciones decimales *exactas,* y en el segundo *inexactas.*

Las fracciones inexactas, ó sean las que tienen un número ilimitado de cifras, pueden ser de dos clases: *periódicas* y *no periódicas.*

Fracción *periódica* es aquella en la cual un cierto número de cifras, llamado *período,* se repite indefinidamente. Si el período principia en las décimas, la fracción se llama *periódica pura;* y si principia en cualquier otra cifra, la fracción se llama *periódica mixta.*

Fracción ilimitada no periódica es aquella que, teniendo un número ilimitado de cifras, no se repiten periódicamente.

206. *Toda fracción irreducible cuyo denominador no contiene más factores primos que el 2 y 5, ó uno de ellos, convertida en decimal, da una fracción decimal exacta. El número de cifras decimales es igual al mayor de los exponentes de estos factores.*

Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$, cuyo denominador b sólo contiene los factores primos 2 y 5, y que, por consiguiente, será de la forma

$$b = 2^m \times 5^n.$$

Para convertir esta fracción ordinaria en una decimal que tenga un cierto número p de cifras decimales, tendremos que multiplicar (173) el numerador a por $10^p = 2^p \times 5^p$, y después hacer la división del producto $a \times 10^p$ por el denominador b y separar del

(c) Instituto Cervantes de Madrid

BIBLIOTECA — MADRID —

cociente p cifras decimales; si esta división es exacta, es claro que la fracción decimal obtenida expresará el valor exacto de la fracción propuesta $\frac{a}{b}$.

Ahora bien: como p es un número indeterminado, lo haremos igual al mayor de los exponentes del 2 ó 5, de modo que, suponiendo que m sea mayor que n, en cuyo caso será $m = n + d$, siendo d la diferencia que hay entre n y m, haremos:

$$p = m = n + d;$$

y se tendrá, indicando la división;

$$\frac{a \times 10^p}{b} = \frac{a \times 10^m}{2^m \times 5^n} = \frac{a \times 2^m \times 5^m}{2^m \times 5^n};$$

simplificando ahora esta fracción, resultará el número entero

$$\frac{a \times 10^p}{b} = a \times 5^{m-n} = a \times 5^d = \ldots onm \ \ldots ba,$$

del cual tenemos que separar m cifras decimales, esto que nos dará

$$\frac{a}{b} = \ldots on, \ m \ \ldots ba;$$

luego vemos que la fracción propuesta se ha convertido en una decimal exacta cuyo número de cifras decimales es precisamente igual al mayor de los exponentes del 2 ó 5.

Sea, por ejemplo, la fracción irreducible $\frac{37}{40}$, cuyo denominador, 40 siendo igual á $2^3 \times 5$, no contiene más factores primos que 2 y 5. El mayor de los exponentes de estos factores es 3; por tanto, según lo dicho anteriormente, la fracción propuesta se podrá convertir en una decimal exacta que tendrá *tres* cifras decimales, y cuyo valor numérico en unidades del cuarto orden decimal será $37 \times 5^2 = 925$.

En efecto; haciendo todos los cálculos (203), se hallará

$$\frac{37}{40} = 0{,}925.$$

207. *Toda fracción irreducible cuyo denominador contiene facto–*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

res primos diferentes de 2 y 5 convertida en decimal, da una fracción decimal ilimitada periódica.

Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$, cuyo denominador b contiene factores distintos de 2 y 5, y vamos á demostrar, primero, que la fracción decimal que resulte no puede ser exacta.

En efecto; habiendo en b un factor por lo menos diferente de 2 y 5 tal como 7, resulta que el producto $a \times 10^p$ nunca puede ser divisible por el número b (138), y no hallando cociente entero exacto en esta división, cualquiera que sea el valor de p, la fracción $\frac{a}{b}$ no podrá ser representada exactamente por una fracción decimal; luego dicha fracción decimal será ilimitada, ó, lo que es igual, tendrá un número infinito de cifras.

Probado que la fracción decimal que resulta se compone de un número infinito de cifras, pasemos á demostrar que dicha fracción decimal tiene que ser periódica.

Según el procedimiento que se sigue (203) para convertir un quebrado ordinario en decimal, hemos de dividir el numerador y los restos que se obtengan en las diferentes divisiones parciales seguidas de un cero, por el denominador b. Ahora bien: siendo cada cifra de la decimal el cociente entero que resulta de dividir el resto anterior seguido de un cero por el denominador b, y siendo además estas cifras un número ilimitado, el número de dividendos, y, por consiguiente, el de restos, tiene que ser ilimitado también; pero como estos restos son siempre menores que el divisor, cuando hayamos obtenido, á lo más, tantos diferentes como números hay menores que el divisor, que son b—1, el siguiente tiene que ser necesariamente uno de los ya encontrados, el cual podrá ser el primero ú otro cualquiera.

Si es el primer resto el que se repite, poniendo á su derecha un cero, dará un nuevo dividendo que será el mismo dividendo que dió la primera cifra decimal, y, por consiguiente, continuando las operaciones iremos hallando las mismas cifras decimales, las que se irán reproduciendo en el mismo orden hasta volver á encontrar otra vez el mismo primer dividendo, en cuyo caso volverá también otra vez á empezar el período, é irá repitiéndose de este modo indefinidamente, dando origen á una fracción decimal *periódica pura.*

Si no es el primer resto el que se repite y sí uno de los comprendidos entre el primero y último, tal como el *cuarto*, al escri-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

birle á su derecha un cero, para continuar la operación, obtendremos un nuevo dividendo parcial que será exactamente igual al cuarto dividendo ya hallado; de modo que efectuando esta división obtendremos el mismo cociente y resto que dió la *cuarta;* por consiguiente, las cifras halladas desde la cuarta se repetirán en el mismo orden é indefinidamente, dando origen á una fracción decimal periódica *mixta*, que es lo segundo que se debía demostrar.

CONSECUENCIA. *Todo quebrado ordinario convertido en decimal da una fracción exacta ó periódica.*

208. *Toda fracción irreducible cuyo denominador es primo con* 10, *convertida en decimal da una fracción periódica pura.*

Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$, cuyo denominador b es primo con 10. Convertida esta fracción en decimal, dará una fracción ilimitada periódica (207) que se obtendrá por la división de $\frac{a \times 10^m}{b}$, en cuya expresión m recibe los valores sucesivos 1, 2, 3...

Supongamos, puesto que la fracción que resulta es periódica, que sean r y r' dos restos iguales de esta división, y que corresponden á los valores n y $n+p$ de m; de modo que llamando q y q' los cocientes respectivos, se tendrá

$$\begin{aligned} a \times 10^n &= bq + r \\ a \times 10^{n+p} &= bq' + r'; \end{aligned}$$

de donde

$$10^n (a \times 10^p - a) = b (q' - q).$$

Donde vemos que el primer miembro de esta igualdad es divisible por b; pero b es primo con 10, y, por tanto, con 10^n; luego divide al otro factor $a \times 10^p - a$; y como no son divisibles por b ni a ni $a \times 10^p$, los restos de estas divisiones tendrán que ser iguales (86); luego el primer resto que se repite es el que da la división de a por b, es decir el 1.°, y, por consiguiente, el período empieza en las décimas y la fracción es periódica pura, según queríamos demostrar.

209. *Toda fraccion irreducible cuyo denominador contiene uno de los factores* 2 *ó* 5, *ó los dos, y además otro cualquiera diferente, reducida á decimal da una fracción periódica mixta cuya parte no periódica consta de tantas cifras decimales como unidades tiene el mayor de los exponentes de* 2 *ó* 5.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea la fracción $\frac{a}{2^m \times 5^n \times c}$; siendo c primo con 10. Sea $m > n$ y p lo que le falta á n para ser igual á m, de modo que $m = n + p$. Multiplicando los dos términos de la fracción 5^p, tendremos:

$$\frac{a}{2^m \times 5^n \times c} = \frac{a \times 5^p}{2^m \times 5^{n+p} \times c} = \frac{a \times 5^p}{10^m \times c} = \frac{1}{10^m} \times \frac{a \times 5^p}{c}.$$

La fracción irreducible $\frac{a \times 5^p}{c}$ convertida en decimal da origen á una fracción periódica pura (208) de la forma *on ml... ba, ppp...*, y dividiendo por 10^m, ó, lo que es lo mismo, corriendo la coma hacia la izquierda m lugares, tendremos la decimal *o n, ml... ba ppp...*, equivalente á la fracción propuesta, resultando así una fracción decimal periódica mixta cuya parte no periódica se compone de m cifras, que es el mayor de los exponentes que tienen los factores 2 y 5 en el denominador, según queríamos demostrar.

LECCIÓN XXII

Reducción de decimales á quebrados ordinarios.

Reducción de decimales á quebrados ordinarios.

210. Reducir una decimal á quebrado ordinario, *es hallar un quebrado que exprese exacta ó aproximadamente el valor de la decimal.*

En la reducción de decimales á quebrados consideraremos dos casos principales: que la fracción decimal tenga un número limitado ó ilimitado de cifras.

En el primer caso, podremos siempre hallar un quebrado ordinario equivalente á la fracción propuesta. En el segundo, el quebrado ordinario que se halla, sólo nos expresa el valor aproximado de la decimal que se da, si no es periódica; ó el límite hacia el cual se va aproximando dicha fracción, si es periódica, á medida que se toma mayor número de cifras ó períodos; de modo que, en rigor, sólo es equivalente el quebrado hallado á la fracción decimal, cuando se considera un número infinito de períodos. De aquí se deduce que siendo la fracción que en este último caso se halla equi-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

valente á la decimal periódica cuyo número de períodos es infinito, dicha fracción, convertida en decimal, volverá á dar la propuesta, por cuya razón se le da á aquélla el nombre de fracción *generatriz* de ésta.

211. *Para reducir una decimal exacta ó de un número limitado de cifras á fracción ordinaria, se pone por denominador al número que expresa la decimal, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene, y el quebrado que resulta, simplificado si es posible, expresa el valor exacto de la fracción propuesta.*

Sea la fracción decimal de un número limitado de cifras $n,abcd$, y x el valor del quebrado ordinario equivalente á dicha decimal; de modo que tendremos:

$$x = n,abcd.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción dada, se tendrá:

$$x \times 10000 = nabcd;$$

de donde se deduce $x = \frac{nabcd}{10000}$, que es lo que se quiere demostrar.

212. Si la fracción que se nos da tiene un número ilimitado de cifras, podrá suceder que éstas se repitan periódicamente ó no. En el primer caso podremos hallar la fracción ordinaria generatriz que, convertida en decimal, dé la propuesta: en el segundo la fracción decimal expresa el valor aproximado de una cantidad inconmensurable, cuya aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se consideren.

Por consiguiente, la fracción ordinaria equivalente á la decimal propuesta sólo expresará exactamente el valor de la cantidad que representa cuando se tome un número infinito de cifras, lo cual es imposible; luego tomando de la decimal propuesta un cierto número de cifras decimales, y hallando la fracción ordinaria equivalente (211), obtendremos el valor del número inconmensurable que representa, con un error que será tanto más pequeño cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se consideren. Así, las fracciones

$$\frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \quad \frac{31415}{10000}, \quad \frac{314159}{100000},$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

expresan valores aproximados del número inconmensurable

$$3{,}1415926535897932\ldots,$$

cuya aproximación es tanto mayor, cuanto mayor sea el número de cifras decimales que se tomen de la fracción propuesta.

213. Si la fracción decimal es periódica, tomando en ella un cierto número de cifras decimales y convirtiendo la fracción que resulta en quebrado ordinario, obtendremos, como en el caso anterior, un quebrado que expresará con tanta mayor aproximación el valor de la fracción propuesta, cuanto mayor sea el número de cifras que hayamos tomado; pero estas decimales son de tal naturaleza, que podremos expresar su valor exacto por una fracción ordinaria, que, como ya sabemos, se llama su *generatriz*.

214. P*ara convertir el valor exacto de una fracción decimal periódica pura en el de un quebrado ordinario, ó sea para hallar su fracción* GENERATRIZ, *se pone por* ~~denominador~~ numerador *á la diferencia que hay entre la parte entera*, la cual puede ser cero, *y dicha parte entera seguida de un período, tantos nueves como cifras decimales tiene el período; y el quebrado que resulte, simplificado si es posible, expresará el valor exacto de la fracción dada.*

Sea la fracción decimal periódica pura $n,abc\ abc\ldots$: representemos por x el valor de la fracción ordinaria equivalente, ó sea el valor de la fración generatriz, y tendremos

$$x = n,\ abc\ abc\ abc\ abc\ldots$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, se tendrá la siguiente:

$$1000x = nabc,\ abc\ abc\ abc\ldots,$$

de la cual, restando la primera, y observando que las partes decimales son iguales, porque ambas se componen de un número ilimitado de períodos, tendremos:

$$999x = nabc - n;$$

de donde

$$x = \frac{nabc - n}{999},$$

que es lo que se quería demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si sólo consideramos de la fracción propuesta un número limitado de períodos, el quebrado ordinario que se halla por el método anterior no expresa el valor exacto de la fración decimal, y el error cometido es tanto más pequeño cuanto mayor es también el número de períodos que se consideran; de modo que ni la fracción hallada anteriormente expresará el valor exacto de esta fracción decimal, ni la equivalente á un número limitado de períodos será igual á la decimal propuesta; pero si demostramos que la diferencia que hay entre ambas fracciones ordinarias puede ser tan pequeña como queramos, siendo el número de períodos suficientemente grande, tendremos demostrado de otro modo que la fracción ordinaria hallada anteriormente en la fracción generatriz dé la decimal propuesta.

Sea la misma fracción decimal $n,abc\ abc\ abc\ abc\ abc...$ y M el valor de la fracción ordinaria equivalente á una parte que contiene m períodos, de modo que se tendrá

$$M = n,abc\ \ abc\ ...\ abc. \qquad [1]$$

Sea M′ la fracción equivalente á la decimal que contiene un período más; es decir, $m + 1$, de manera que tendremos:

$$M' = n,abc\ \ abc\ ...\ abc\ abc.$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, y restando de la que resulte la [1], se tendrá

$$1000\,M' - M = nabc - n \qquad [2];$$

pero M′ siendo eqnivalente á la decimal que consta de $m+1$ períodos, se tiene

$$M' = n,abc\ \ abc...\ \ abc + 0,000\,000\,...\,000\,abc,$$

ó lo que es lo mismo

$$M' = M + \frac{abc}{1000^{m+1}};$$

de modo que sustituyendo este valor de M′ en la igualdad [2], se tendrá:

$$1000\,M + \frac{abc}{1000^{m}} - M = nabc - n;$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

quitando de ambos miembros la fracción $\frac{abc}{1000^m}$ y haciendo la reducción, será:

$$999\,M = nabc - n - \frac{abc}{1000^m};$$

de donde, partiendo por 999 ambos miembros, se hallará

$$M = \frac{nabc - n}{999} - \frac{abc}{1000^m \times 999}.$$

Esto nos prueba que el valor M de una fracción ordinaria equivalente á una parte que contiene m períodos de una decimal periódica pura, es igual á la fracción constante $\frac{nabc - n}{999}$ menos la fracción $\frac{abc}{1000^m \times 999}$ que va aproximándose á cero á medida que el número m de períodos aumenta; de modo que cuando consideremos un número infinito de períodos, el quebrado $\frac{abc}{1000^m \times 999}$ será cero, y, por consiguiente, el valor exacto de la decimal es la fracción hallada $\frac{nabc - n}{999}$.

Si en la decimal $n,abc\ abc\ abc...$ suponemos $n = 0$, la fracción generatriz se reducirá á $x = \frac{abc}{999}$, es decir á un quebrado que tiene por numerador el período y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene dicho período.

215. *Para convertir el valor exacto de una decimal periódica mixta en el de un quebrado ordinario, ó sea para hallar la fracción* GENERATRIZ *que reducida á decimal da una fracción periódica mixta, se forma un quebrado que tenga por numerador el entero,* que puede ser cero, *seguido de la parte no periódica y un período, menos el entero seguido de la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras decimales tiene la parte no periódica.*

Es decir, que la fracción ordinaria generatriz de la decimal $n,pqrsabc\ abc...$ será, representándola por x:

$$x = \frac{npqrsabc - npqrs}{9990000}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; siendo x el valor de la fracción ordinaria equivalente á la decimal periódica mixta $n,pqrs\ abc\ abc\ abc...$, se tendrá:

$$x = n,pqrs\ abc\ abc\ abc...$$

Multiplicando esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene la parte no periódica, tendremos:

$$10000\,x = npqrs,\ abc\ abc\ abc\ ...;$$

pero según hemos visto ya anteriormente, se tiene:

$$npqrs,\ abc\ abc\ abc\ ... = \frac{npqrsabc - npqrs}{999};$$

de modo que sustituyendo este valor en la igualdad anterior, será:

$$10000\,x = \frac{npqrsabc - npqrs}{999};$$

y dividiendo por 10000, tendremos, finalmente:

$$x = \frac{npqrsabc - npqrs}{9990000},$$

que es lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. Toda fracción decimal periódica pura cuyo período es 9, es igual al entero de la decimal aumentado en una unidad.

Sea la fracción $n,999...$, la cual se podrá poner bajo la forma

$$n,\ 999\ ... = n + 0,999... = n + \frac{9}{9} = n + 1.$$

Si la fracción es periódica mixta, se tendrá, llamando x al valor del quebrado equivalente:

$$x = n,\ pqr\ 999...;$$

multiplicando por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica, será:

$$1000\,x = npqr,\ 999... = npqr + \frac{9}{9} = npqr + 1,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de donde $x = \frac{npqr+1}{1000} = n,pqr+$ una unidad del último orden; luego toda fracción decimal periódica mixta cuyo período es 9, es igual á una decimal exacta cuya parte decimal es la parte no periódica aumentada en una unidad del último orden.

216. *El denominador del quebrado equivalente á una decimal exacta no tiene más factores primos que el* 2 *y* 5, *ó uno de éstos solamente.*

En efecto; la fracción equivalente á una decimal exacta, representándola después de simplificada por $\frac{A}{B}$, es (211):

$$\frac{nabcd}{10000} = \frac{A}{B}.$$

La fracción $\frac{nabcd}{10000}$, siendo igual al quebrado irreducible $\frac{A}{B}$, debe tener sus términos equimúltiplos de los de ésta (159); por consiguiente, B no puede tener más factores de los que hay en la unidad seguida de ceros; y como en este último número sólo existen los factores 2 y 5, en B no pueden existir más factores primos que el 2 y 5 ó uno de éstos solamente, que es lo que se quería demostrar.

217. *El denominador del quebrado ordinario equivalente á una decimal periódica pura, ó sea el denominador de la fracción generatriz de una decimal periódica pura, es primo con* 10.

En efecto; representando dicha fracción generatriz, después de simplicada, por $\frac{A'}{B'}$, se tendrá (214):

$$\frac{nabc-n}{999} = \frac{A'}{B'}.$$

Siendo los términos de la primera fracción equimúltiplos de los de la segunda, el denominador B′ no puede tener factores distintos de los que contiene el denominador de la primera; y como este número siempre está formado de nueves, no puede contener ninguno de los factores 2 y 5; luego si el denominador de la primera no contiene ninguno de los factores 2 y 5, ó es primo con 10, un divisor suyo B′ también lo será, según queríamos demostrar.

218. *El denominador del quebrado equivalente á una decimal periódica mixta, ó sea el denominador de la fracción generatriz de una*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

decimal periódica mixta, contiene los factores primos 2 *y* 5, *ó por lo menos uno de ellos elevado á una potencia cuyo exponente es igual al número de cifras que tiene la parte no periódica, y además algún otro factor distinto.*

Sea $\frac{A''}{B''}$ la fracción simplificada generatriz de una decimal periódica mixta; de modo que se tendrá (215):

$$\frac{npqrsabc - npqrs}{9990000} = \frac{A''}{B''}.$$

Ante todo debemos observar que el numerador de la primera fracción nunca puede terminar en ceros; porque si terminase, las cifras *c* y *s* serían iguales, y el período no principiaría, como se ha supuesto, en *a*, sino en *s;* luego dicho numerador no puede terminar en ceros. Si el numerador de la primera fracción no puede terminar en ceros, no contendrá á la vez á los factores 2 y 5; todo lo más contendrá á uno de ellos.

El denominador de la misma fracción se compone de un cierto número de nueves seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas hay; luego en este denominador se hallarán los factores 2 y 5 elevados á una potencia cuyo exponente es igual al número de cifras que tiene la parte no periódica.

Esto supuesto, como uno de los factores 2 ó 5 es primo con el numerador, pudiendo serlo los dos, el denominador B'' de la fracción simplicada contendrá á uno de los factores 2 ó 5 elevado á una potencia igual al número de cifras que tiene la parte no periódica, y contendrá además algún otro factor diferente del 2 y 5; porque si no, la fracción decimal equivalente sería (216) exacta, lo que es contra la hipótesis.

219. De todo lo dicho anteriormente resulta:

1.° Para que un quebrado irreducible, convertido en decimal, dé una fracción decimal exacta, es necesario y suficiente que su denominador no tenga más factores primos que el 2 y 5.

2.° Para que un quebrado irreducible, convertido en decimal, dé una fracción decimal periódica pura, es necesario y suficiente que su denominador sea primo con 10.

3.° Para que un quebrado irreducible, convertido en decimal, dé una fracción decimal periódica mixta, es necesario y suficiente que su denominador, además de contener uno de los factores 2 ó 5, ó los dos, contenga otro factor primo distinto.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXII

Fracciones continuas.—Regla para convertir una fracción ordinaria en fracción continua.—Formación de las reducidas de una fracción continua.

Fracciones continuas.

* 220. Se da el nombre de *fracción continua* á toda expresión de la forma

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.},}}}$$

que se compone de un número entero a, el cual podrá ser cero, seguido de una fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador un número entero y positivo b, seguido de otra fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es otro número entero y positivo c, seguido de otra fracción de la misma forma que las anteriores, y así sucesivamente.

Los números a, b, c, d... se llaman *cocientes incompletos* de la fracción continua; las cantidades a, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$... se llaman *fracciones integrantes*.

Las expresiones

$$a, \quad a + \frac{1}{b}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} \cdots$$

reducidas á expresiones ordinarias, ó sean las expresiones

$$a, \quad \frac{ab+1}{b}, \quad \frac{(ab+1)c+a}{bc+1}, \quad \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b} \cdots$$

se llaman *reducidas* ó *fracciones convergentes*.

* 221. El objeto de las fracciones continuas es hallar, por medio de fracciones ordinarias irreducibles y de términos sencillos, valores aproximados de cantidades conmensurables ó inconmensurables.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Regla para convertir una fracción ordinaria en fracción continua.

* 222. *Para convertir una fracción ordinaria en fracción continua se ejecutan con sus dos términos las mismas operaciones que para hallar su máximo común divisor, y los cocientes que resulten serán los cocientes incompletos de la fracción continua.*

En efecto; sea la fracción ordinaria $\frac{A}{B}$ la que queremos reducir á fración continua. Principiaremos por hallar la mayor parte entera que dicha fracción contiene, para lo cual dividiremos A por B; y llamando a al cociente entero y R al resto, tendremos:

A	B	R	R′	R″	R‴
	a	b	c	d	e
R	R′	R″	R‴	Rᴵⱽ	

que la fracción dada se podrá poner bajo la forma siguiente:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{R}{B} = a + \frac{1}{\frac{B}{R}}.$$

Hallemos la parte entera de la fracción conocida $\frac{A}{B}$ efectuando la división de B por R, que es la segunda empleada en el *m. c. d.*, de modo que llamando b al cociente entero y R′ al resto, hallaremos como anteriormente:

$$\frac{B}{R} = b + \frac{R'}{R} = b + \frac{1}{\frac{R}{R'}}.$$

Haciendo lo mismo con la fracción $\frac{R}{R'}$, tendremos:

$$\frac{R}{R'} = c + \frac{R''}{R'} = c + \frac{1}{\frac{R'}{R''}}.$$

De la misma manera hallaremos:

$$\frac{R'}{R''} = d + \frac{R'''}{R''} = d + \frac{1}{\frac{R''}{R'''}}; \quad \frac{R''}{R'''} = e + \frac{R^{IV}}{R'''} = \text{etc.}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Y continuando así esta serie de operaciones, llegaremos á una en que el resto de la división será cero, puesto que cada uno de ellos es menor que el anterior por lo menos en una unidad.

Supongamos, para fijar las ideas, que este último resto sea R^{IV}, es decir, que $R^{IV}=0$: en este caso, el valor de la fracción propuesta se podrá expresar, según las igualdades establecidas anteriormente, por la fracción continua

$$\frac{A}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}},$$

en la cual los cocientes incompletos a, b, c, d, e son los cocientes que se obtienen en las divisiones que se practican para hallar el *m. c. d.* de los números A y B, conforme hemos dicho en la regla.

EJEMPLO 1.° Sea la fracción $\frac{1384}{753}$ la que se quiere convertir en fracción continua.

Aplicando á los dos números 1384 y 753 el procedimiento del *m. c, d.*, hallaremos los cocientes incompletos de la fracción continua; así,

1384	753	631	122	21	17	4	1
631	1	1	5	5	1	4	4
	122	21	17	4	1	0	

La fracción continua equivalente á la fracción propuesta será, según la regla:

$$\frac{1384}{753}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}}.$$

EJEMPLO 2.° Sea la fracción propia $\frac{123}{478}$ la que tratamos de convertir en fracción continua.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Como la parte entera de esta fracción es cero, la fracción continua equivalente no tendrá parte entera. Así, hallaremos:

478	123	109	14	11	3	2	1
109	3	1	7	1	3	1	2
	14	11	3	2	1	0	

Luego será:

$$\frac{123}{478} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}.$$

* 223. Si es una fracción decimal la que se quisiera convertir en fracción continua, podrá suceder que esta decimal sea exacta, periódica pura, periódica mixta ó inexacta de un número infinito de cifras. En los tres primeros casos se hallará la fracción ordinaria equivalente á la fracción decimal propuesta, y esta fracción ordinaria se convertirá en fracción continua según la regla anterior. En el cuarto caso, es decir, cuando la decimal no sea exacta, y, por consiguiente, sólo nos exprese el valor aproximado de una cantidad, podremos hallar también en fracción continua este valor aproximado, según la siguiente regla:

224. *Para convertir una fracción decimal inexacta en fracción continua, aumentaremos ó disminuiremos su última cifra en una unidad, según que la decimal esté aproximada por defecto ó por exceso, obteniendo así dos límites que comprenden el verdadero valor de la cantidad propuesta; reduciremos simultáneamente á fracciones continuas ambos límites, y continuaremos la operación hasta llegar á dos cocientes distintos, en cuyo caso la fracción continua que expresa el valor aproximado de la cantidad dada será la que tenga por cocientes incompletos los cocientes que sean comunes á ambas operaciones.*

En efectó; supongamos que la cantidad X se halla comprendida entre otras dos A y B, y que, desarrollando cada una de estas tres cantidades en fracción continua, hallamos los valores siguientes:

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$$A = a + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = b + \frac{1}{\alpha'}, \quad \alpha' = c + \frac{1}{\alpha''} \ldots$$

$$B = a + \frac{1}{\beta}, \quad \beta = b + \frac{1}{\beta'}, \quad \beta' = c + \frac{1}{\beta''} \ldots$$

$$X = a' + \frac{1}{x}, \quad x = b' + \frac{1}{x'}, \quad x' = c' + \frac{1}{x''} \ldots$$

Estando el valor de X comprendido entre los de A y B, y teniendo estas dos últimas cantidades una misma parte entera a, necesariamente la cantidad X tendrá la misma parte entera, y, por lo tanto, tendremos: $a' = a$; las fracciones $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{\beta}$ comprenderán á la fracción $\frac{1}{x}$, luego el valor de x estará comprendido entre α y β. Del mismo modo deduciremos que $b' = b$, y que el valor de x' se halla comprendido entre los valores de α' y β', lo cual nos dará que $c' = c$, y que α'' y β'' comprenden á x'', y así de todos los demás; luego los cocientes incompletos que sean comunes á las dos primeras fracciones continuas, pertenecerán también á la tercera.

EJEMPLO. Sea el número, notable por el uso frecuente que de él se hace en análisis, $e = 2{,}71828\ldots$ el que se quiere convertir en fracción continua.

Estando aproximado el número e, por defecto, en menos de una unidad del quinto orden, aumentaremos á su última cifra una unidad, y obtendremos, por límite superior del número e, la decimal 2,71829, cuyos dos límites se podrán poner bajo la forma

$$\frac{271828}{100000} \text{ y } \frac{271829}{100000}.$$

Aplicando ahora á estas fracciones la regla para convertirlas en fracciones continuas, hallaremos, según el cuadro siguiente de operaciones, los cocientes incompletos comunes á las dos fracciones 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1.

271828	100000	71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212
	2	1	2	1	1	4	1	1	6
71828	28172	15484	12688	2796	1504	1292	212	20	

271829	100000	71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141
	2	1	2	1	1	4	1	1	9
71829	28171	15487	12684	2803	1472	1331	141	62	

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Luego el número vendrá expresado aproximadamente por la fracción continua

$$e = 2{,}71828\ldots = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Formación de las reducidas de una fracción continua.

* 225. Ya hemos dicho al principio de esta teoría que se llaman reducidas de una fracción continua general cada una de las expresiones a, $a + \frac{1}{b}$, $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, etc., reducida á fracción ordinaria; de donde se deduce que la primera reducida es $\frac{a}{1}$; la segunda, $\frac{ab+1}{b}$; la tercera, $\cfrac{a\left(b + \frac{1}{c}\right)+1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1} = \frac{(ab+1)c + a}{bc+1}$: en general, una reducida cualquiera se obtiene agregando al último cociente incompleto de la reducida anterior la fracción integrante que sigue; así la cuarta reducida la hallaríamos poniendo en la tercera en vez del último cociente incompleto c, la suma de éste con la fracción integrante que sigue, es decir, $c + \frac{1}{d}$.

* 226. *Para formar una reducida cualquiera, se multiplican los dos términos de la reducida anterior por el cociente incompleto correspondiente á la reducida que se quiere formar, y á estos productos se les agrega respectivamente los términos de la reducida que está dos lugares antes.*

En efecto; la primera y segunda reducida de la fracción continua general, son, como hemos visto, $\frac{a}{1}$ y $\frac{ab+1}{b}$, las cuales se

(c) Instituto Cervantes de Madrid

obtienen inmediatamente considerando el primer cociente incompleto dividido por la unidad, y reduciendo el número mixto $a+\frac{1}{b}$ á fraccionario.

La tercera vemos que, después de poner en vez del último cociente b el número mixto $b+\frac{1}{c}$ y hechas todas las operaciones, se reduce á la fracción $\frac{(ab+1)\,c+a}{bc+1}$, la cual se forma según la regla enunciada.

La cuarta reducida la obtendremos poniendo en la tercera, en vez del último cociente incompleto c, el número mixto $c+\frac{1}{d}$; así se tendrá:

$$\frac{(ab+1)\left(c+\frac{1}{d}\right)+a}{b\left(c+\frac{1}{d}\right)+1}.$$

Multiplicando los dos términos de este quebrado por d, y haciendo las reducciones, resulta:

$$\frac{(ab+1)\;(cd+1)+ad}{b\,(cd+1)\times d}=\frac{[(ab+1)\,c+a]\,d+ab+1}{(bc+1)\,d+b};$$

donde vemos que esta cuarta reducida se forma también según la regla.

Esto supuesto, si nosotros demostramos que si una reducida cualquiera se forma según la ley enunciada, la reducida siguiente se forma también según la misma, tendremos justificada la regla; pues verificándose para la cuarta reducida, como acabamos de ver, se verificará también para la quinta, y así sucesivamente.

Para esto, supongamos tres reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$, cuyos cocientes incompletos correspondientes sean p, q y r; es decir, las mismas letras por que vienen expresadas las fracciones, pero minúsculas. Admitamos además que la tercer reducida se forma según la regla, de modo que se tenga $R=Qr+P$ y $R'=Q'r+P'$, y, por tanto,

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Para formar la reducida siguiente, tenemos que poner en ésta en vez de r el número mixto $r+\frac{1}{s}$; de modo que se tendrá:

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}.$$

Multiplicando los dos términos de esta fracción por s, y haciendo todas las reducciones, se hallará:

$$\frac{S}{S'}=\frac{Qrs+Q+Ps}{Q'rs+Q'+P's}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'};$$

y poniendo en vez de $Qr+P$ y $Q'r+P'$, sus iguales R y R′, se tendrá finalmente:

$$\frac{S}{S'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'};$$

luego esta última reducida se forma según la regla, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO I. Hallar las reducidas de las fracciones continuas

$$A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}}}}.$$

$$B=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Las de A serán:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{2\cdot5+1}{1\cdot5+1}=\frac{11}{6},\ \frac{11\cdot5+2}{6\cdot5+1}=\frac{57}{31},\ \frac{57\cdot1+11}{31\cdot1+6}=\frac{68}{37},$$
$$\frac{68\cdot4+57}{37\cdot4+31}=\frac{329}{179},\ \frac{329\cdot4+68}{179\cdot4+37}=\frac{1384}{753}.$$

Del mismo modo hallaremos que las reducidas de B son:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{8}{31},\ \frac{9}{35},\ \frac{35}{136},\ \frac{44}{171},\ \frac{123}{478}.$$

EJEMPLO II. Sean las fracciones continuas ilimitadas, cuyas reducidas queremos hallar:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}}}}}$$

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\text{etc.}}}}}$$

Las de e, serán:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{87}{32},\ \frac{106}{39},\ \frac{139}{71}\cdots$$

Las de π, son:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102}\cdots$$

Las segundas, que nos dan valores aproximados de π, expresan la relación aproximada del diámetro á la circunferencia.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXIII

Propiedades más importantes de las reducidas.—Modo de hallar una reducida cuyo valor se diferencia de la fracción continua total en menos de $\frac{1}{\delta}$.

Propiedades más importantes de las reducidas.

* 227. *El numerador de la diferencia de dos reducidas consecutivas es* $+1$ *ó* -1, *según que aquella de la cual se resta sea de lugar par ó impar, considerando á cero como primera reducida si la fracción continua no tiene parte entera.*

Sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas consecutivas cualesquiera, de las cuales la tercera será (226) $\frac{R}{R'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'}$.

Restando de cada reducida la que le precede, hallaremos:

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{QP' - PQ'}{P'Q'}, \quad \frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qr+P}{Q'r+P'} - \frac{Q}{Q'} =$$

$$\frac{QQ'r + PQ' - QQ'r - QP'}{Q'(Q'r+P')} = \frac{-(QP' - PQ')}{Q'(Q'r+P')};$$

donde vemos que los numeradores de estas dos diferencias son iguales y de signo contrario; pero restando de la segunda reducida la primera, hallaremos $\frac{ab+1}{b} - \frac{a}{1} = \frac{ab+1-ab}{b} = \frac{+1}{b}$; luego el numerador de la diferencia siguiente, es decir, el de la que resulta de restar de la tercera la segunda, será -1; el de la siguiente $+1$, y así sucesivamente. Con lo cual queda justificado el teorema, y, por consiguiente, demostrada la igualdad

$$QP' - PQ' = \pm 1,$$

en la cual P y P′ son los dos términos de una reducida cualquiera, y Q y Q′ los de la reducida siguiente; debiéndose tomar el signo $+$ si $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, y el signo $-$ si fuese de lugar impar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

* 228. *Las reducidas son fracciones irreducibles.*

En efecto; si los dos términos Q y Q′ de una reducida cualquiera tuvieran un factor común α distinto de la unidad, el primer miembro de la igualdad $QP' - PQ' = \pm 1$ sería divisible por este factor; siendo el primer miembro divisible por α, el segundo miembro ± 1 también sería divisible, lo cual es imposible; luego los dos términos de la reducida $\frac{Q}{Q'}$ son primos entre sí, y, por tanto, dicha reducida es irreducible.

Consecuencias. 1.ª Si una fracción ordinaria reducible se convierte en fracción continua, y después se forman las reducidas, la última será el valor de la fracción propuesta totalmente simplificada.

2.ª La diferencia de dos reducidas consecutivas cualesquiera es ± 1, dividido por el producto de los denominadores de las mismas.

* 229. *Las reducidas de lugar impar son menores que la fracción continua total, y las de lugar par mayores. Y cuando es ilimitada la fracción continua, la última reducida es igual á dicha fracción.*

Sean $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ y $\frac{R}{R'}$ tres reducidas de la fracción continua general cuyos cocientes incompletos son $a, b, c..., p, q, r, s, t...$; según la formación de las reducidas, se tiene (226) $\frac{R}{R'} = \frac{Qr + P}{Q'r + P'}$. Si ahora representamos por y todo el resto de la fracción continua á partir del cociente incompleto r, es decir, si hacemos

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}} \qquad [1],$$

y sustituímos r por y en la reducida anterior, hallaremos la fracción $\frac{Qy + P}{Q'y + P'}$, que nos expresará el valor de la fracción continua total, la cual podremos representar por x; de modo que se tendrá:

$$x = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Si ahora restamos de x cada una de las reducidas consecutivas

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, hallaremos las dos diferencias

$$x - \frac{P}{P'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{P}{P'} = \frac{(QP' - PQ')\,y}{P'\,(Q'y + P')} = \frac{\pm y}{P'\,(Q'y + P')}$$

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{Qy + P}{Q'y + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{-\,(QP' - PQ')}{Q'\,(Q'y + P')} = \frac{\mp 1}{Q'\,(Q'y + P')} \quad [2],$$

donde vemos que si la reducida $\frac{P}{P'}$ es, para fijar las ideas, de lugar impar, en cuyo caso $\frac{Q}{Q'}$ es de lugar par, la diferencia $QP' - PQ'$ es positiva, y entonces hay que tomar los signos superiores; lo cual nos prueba que la diferencia $x - \frac{P}{P'}$ es positiva, y $x - \frac{Q}{Q'}$ negativa, y, por tanto, la reducida de lugar impar $\frac{P}{P'}$ es menor que la fracción continua x, y $\frac{Q}{Q'}$ que es de lugar par, es mayor, según se quería demostrar.

CONSECUENCIA. El valor de la fracción continua total, está comprendido entre dos reducidas consecutivas.

* 230. *Una reducida cualquiera se aproxima más á la fracción continua total que la reducida anterior.*

En efecto; de las igualdades [2] se deduce que la diferencia entre el valor de la fracción continua x y la reducida $\frac{Q}{Q'}$, es menor que la diferencia entre la misma fracción y la reducida anterior $\frac{P}{P'}$; porque prescindiendo del signo, el valor absoluto de la diferencia $x - \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{Q'\,(Q'y + P')}$, es menor que el de la diferencia $x - \frac{P}{P'} = \frac{y}{P'\,(Q'y + P')}$, por ser y numerador de la primera diferencia, mayor que 1, según indica la igualdad [1], y el denominador de la misma $P'\,(Q'y + P')$, menor que el denominador de la segunda diferencia $Q'\,(Q'y + P')$, pues teniendo ambos denominadores el factor común $Q'y + P'$, el otro factor P' es menor que Q', según se deduce de su formación (226); luego por esta doble razón la diferencia segunda es menor que la primera, y la reducida $\frac{Q}{Q'}$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

se aproxima más á la fracción continua que la reducida anterior $\frac{P}{P'}$, según queríamos demostrar.

CONSECUENCIA. Siendo la fracción continua mayor que las reducidas de lugar impar, y menor que las de lugar par, y aproximándose cada reducida á la fracción continua más que la anterior, se sigue que las reducidas de lugar impar van aumentando, y las de lugar par disminuyendo; ambas clases van, por lo tanto, convergiendo hacia el valor de la fracción continua total, por cuya razón se les llama también á las reducidas fracciones *convergentes*.

Modo de hallar una reducida cuyo valor se diferencie de la fracción continua total en menos de $\frac{1}{\delta}$.

* 231. *El error que se comete tomando una reducida cualquiera por el valor de la fracción continua total, es menor que la unidad dividida por el denominador de dicha reducida multiplicado por la suma de este denominador y el de la reducida precedente; ó menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera;* ó, por último, *menor que la unidad dividida por dicho denominador multiplicado por el de la reducida anterior.*

En efecto; el valor absoluto de la diferencia entre una reducida y la fracción continua total x es, prescindiendo del signo,

$$x - \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{Q'\,(Q'y + P')} \qquad [3];$$

pero siendo y mayor que la unidad, según se deduce de la igualdad [1], si la suprimimos en el denominador, es claro que dicho denominador habrá disminuído, y, por tanto, el quebrado $\frac{1}{Q'\,(Q' + P')}$ será mayor que $x - \frac{Q}{Q'}$; luego la diferencia que hay entre $\frac{Q}{Q'}$ y x es menor que $\frac{1}{Q'\,(Q' + P')}$, es decir, menor que la unidad dividida por el denominador Q' de la fracción dada multiplicado por la suma $Q' + P'$ de dicho denominador y el de la precedente.

Si en la igualdad [3], además de suprimir y, suprimimos la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cantidad P′, la fracción que resulta $\frac{1}{Q'Q'} = \frac{1}{Q'^2}$, será mayor que $\frac{1}{Q'\,(Q'+P')}$, y con más razón que la diferencia $x - \frac{Q}{Q'}$; luego la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considera es mayor que la diferencia entre dicha reducida y la fracción continua total, y, por consiguiente, es un límite del error que se comete tomando la una por la otra.

Por último: suprimiendo el sumando $Q'y$ del segundo factor que hay en el segundo miembro de la igualdad [3], hallaremos la fracción $\frac{1}{P'Q'}$ que será mayor que todos los anteriores $\frac{1}{Q'^2}$, $\frac{1}{Q'\,(Q'+P')}$ y $\frac{1}{Q'\,(Q'y+P')}$, y, por tanto, expresa también un límite del error que se comete al tomar la reducida $\frac{Q}{Q'}$ por el valor de la fracción continua total.

El orden de aproximación de estos límites es aquel en que los hemos enunciado; y de todos ellos el que generalmente se usa en las aplicaciones, es el segundo.

* 232. Del principio anterior se deduce *que para hallar el valor de una fracción continua en menos de una cantidad* $\frac{1}{\delta}$, *bastará llegar hasta una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que la raíz cuadrada de* δ.

Si la fracción continua es ilimitada, no sólo obtendremos reducidas que se diferencien de ella en menos de una cantidad dada, sino que podremos llegar á la última, la cual expresa el valor exacto de dicha fracción. Respecto á las fracciones continuas ilimitadas, observaremos que siempre podremos llegar á obtener una reducida cuyo denominador sea igual ó mayor que una cantidad dada δ, por muy grande que sea; pues según la formación de las reducidas van creciendo sus términos indefinidamente, á medida que crece el número de cocientes incompletos que se consideran.

Por lo tanto; siempre podremos llegar á una reducida $\frac{Q}{Q'}$ cuyo denominador Q′ sea igual ó mayor que la raíz cuadrada de δ, en cuyo caso tendremos:

$$Q' \geqq \sqrt{\delta}, \quad \text{de donde} \quad Q'^2 \geqq \delta,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y dividiendo la unidad por cada una de estas cantidades, se halla:

$$\frac{1}{Q'^2} = \frac{1}{\delta}, \quad \text{pero} \quad \frac{1}{Q'^2} > x - \frac{Q}{Q'};$$

luego

$$x - \frac{Q'}{Q} < \frac{1}{\delta}.$$

Donde vemos que la reducida $\frac{Q}{Q'}$ se diferencia de la fracción continua total x en una cantidad menor que la fracción dada $\frac{1}{\delta}$, según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

CUARTA PARTE

NÚMEROS COMPLEJOS Y SISTEMA MÉTRICO

NÚMEROS COMPLEJOS

LECCIÓN XXIV

Sistema antiguo de pesas y medidas más principales de España.—Reducción de unidades de una especie cualquiera á otras de especie superior ó inferior.

Sistema antiguo de pesas y medidas más principales de España.

233. Ya hemos dado medios generales (147) para apreciar el valor de una cantidad cualquiera por medio de números enteros y quebrados, eligiendo una cierta unidad si la cantidad que se mide ó aprecia es *continua*, ó tomando por unidad un objeto de los que componen una cantidad cuando es *discontinua* ó colectiva.

Cuando sólo se trata de establecer relaciones *matemáticas* entre cantidades, y se establecen entre los números que expresan sus valores numéricos, la elección de las unidades es completamente arbitraria, y esta arbitrariedad permite que estas relaciones, ó los cálculos hechos con dichos valores, sean más ó menos sencillos; pero si las relaciones de que hablamos son *comerciales*, y, por lo tanto, han de ser sabidas por todos los hombres, en ese caso es necesario convenir en las unidades que han de servir para apreciar las cantidades, y una vez elegidas y establecidas legalmente, se les considera como *patrones* de los que se deducen todas las demás.

Desde luego se comprende que si todas las cantidades se midiesen con las unidades elegidas como patrones, los números que nos expresaran sus valores podrían ser, ó muy grandes ó muy peque-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ños, cuyos dos extremos entorpecerían los cálculos á que dichas cantidades se sometiesen, ó no darían una idea bastante clara de la cantidad que representan; por lo cual, según que la cantidad que se vaya á medir sea muy grande ó muy pequeña con relación á la que se ha tomado por *unidad patrón*, así se elige para apreciarla otra unidad que sea un cierto múltiplo ó divisor de la primera. De este modo se forma un conjunto de unidades para medir ó apreciar convenientemente las cantidades, que es á lo que se da el nombre de *sistema de pesas y medidas;* y si este sistema está adoptado por el gobierno de una nación para que sus habitantes se rijan por él, entonces dicho sistema toma el nombre de *legal.*

234. Siete son las clases de unidades que se consideran para medir las cantidades, que son: unidades de *longitud,* de *superficie,* de *volumen,* de *capacidad,* de *peso,* de *tiempo* y de *numerario.*

235. UNIDADES DE LONGITUD. Son aquellas que sirven para medir las distancias que hay de un punto á otro, y como éstas se aprecian por la línea recta que los une, de aquí que se les dé también el nombre de *unidades lineales.*

La unidad principal ó patrón de estas medidas es la VARA, que es una longitud convencional que se halla en el archivo de Burgos. La *vara* se divide en 3 pies; el *pie* en 12 pulgadas; la *pulgada* en 12 líneas, y la *línea* en 12 puntos.

Los múltiplos de la vara, ó sea las unidades que sirven para medir grandes distancias, son: la *braza,* que tiene 2 varas; el *estadal,* que tiene 2 brazas, y la *legua* 20000 pies, ó sea 6666 $^{2}/_{3}$ vara.

La legua se divide en medias leguas y cuartos de legua. La vara se divide también en cuatro palmos; el *palmo* en 12 dedos, y el *dedo* en 9 líneas.

En marina se usan las leguas llamadas de 20 al grado, que tienen 6646 varas; la *milla,* que tiene 1108 brazas; el *cable,* que tiene 120 brazas, y el *codo* de ribera 2 pies y 9 líneas.

UNIDADES DE SUPERFICIE. Son las que sirven para medir la extensión en sus dos sentidos longitud y latitud, que es lo que constituye la superficie. Estas unidades son los diferentes *cuadrados* que tienen por lado cada una de las unidades lineales, por cuya razón se les llama también unidades *cuadradas.*

Las que generalmente se usan son la *legua cuadrada,* que sirve para medir grandes extensiones. Las llamadas *agrarias* por usarse en la medición de los campos, que son: la *fanega superficial* ó marco real, que tiene 576 estadales cuadrados, y que se divide en 12 celemines superficiales; el *celemín superficial* tiene 48 estadales

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cuadrados; la *aranzada*, que tiene 400 estadales cuadrados; el *estadal cuadrado* tiene 4 *brazas cuadradas*, ó 16 varas cuadradas. Para medir cortas extensiones se usa la *vara cuadrada*, que tiene 9 pies cuadrados; el *pie cuadrado*, que tiene 144 pulgadas cuadradas; la *pulgada cuadrada* 144 líneas cuadradas, y la *línea cuadrada*, que tiene 144 puntos cuadrados.

UNIDADES DE VOLUMEN. Son las que sirven para medir la extensión en sus tres dimensiones *longitud*, *latitud* y *profundidad*, que es lo que constituye el volumen de un cuerpo. Estas unidades son los diferentes *cubos* que tienen por lados las diferentes unidades lineales, por lo que se les llama también unidades *cúbicas*. Las más principales son la *tonelada de arqueo*, que sirve para medir el buque de una embarcación, y tiene 8 codos cúbicos de ribera; la *vara cúbica*, que tiene 27 pies cúbicos; el *pie cubico*, que tiene 1728 pulgadas cúbicas.

MEDIDAS DE CAPACIDAD. Las medidas de capacidad se dividen en dos clases, según sean para medir áridos ó líquidos. Las que sirven para áridos son: el *cahíz*, que tiene 12 fanegas; la *fanega*, 12 celemines; el *celemín*, 4 cuartillos. El patrón de esta medida es la *media fanega*, que se conserva en la ciudad de Ávila.

Las que sirven para medir líquidos son: *moyo*, que tiene 16 cántaras; la *cántara* ó *arroba* , que tiene 4 cuartillas; la *cuartilla* 2 azumbres; la *azumbre* 4 cuartillos; el *cuartillo* 4 copas.

El patrón de estas medidas es la *cántara*, y se halla en la ciudad de Toledo.

El aceite se mide por unidades de capacidad que se arreglan al peso: así la *cántara* ó arroba de aceite se divide en 25 libras, y la libra en 4 panillas.

UNIDADES DE PESO. Son las que sirven para apreciar el de los cuerpos; las más principales son: la *tonelada de peso*, que tiene 20 quintales: el *quintal* 4 arrobas; la *arroba* 25 libras; la *libra* 16 onzas; la *onza* 16 adarmes; el *adarme* 3 tomines, y el *tomín* 12 gramos.

La libra se divide también en 2 *marcos* ó medias libras, y en 4 cuarterones.

El patrón de estas medidas es el *marco*, conservado en el archivo del Consejo de Castilla.

En medicina la libra tiene 12 onzas, la *onza* se divide en 8 dracmas, la *dracma* en 3 escrúpulos, el *escrúpulo* en 24 granos.

Para pesar el oro y la plata se usa el *marco*, que tiene 8 onzas, la *onza* 8 ochavas, la *ochava* 6 tomines, y el *tomín* 12 granos.

Las piedras preciosas se aprecian por quilates; el *quilate* se divi-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de en *medios, cuartos, octavos, dieciséis avos, treinta y dos avos* y *sesenta y cuatro avos.*

UNIDADES DE TIEMPO. Son las que sirven para apreciar el que transcurre de un acontecimiento á otro. Las principales son el *siglo*, que tiene 100 años; el *lustro* tiene 5 años; el *año* 12 meses; el *mes* común 30 días; el *día* 24 horas; la *hora* 60 minutos; el *minuto* 60 segundos; el *segundo* 60 terceros.

UNIDADES DE NUMERARIO. Son las que pertenecen al dinero, las cuales están representadas por monedas de oro, plata y cobre. La unidad principal es el *real*, que se divide en 34 *maravedís;* también se usa como unidad monetaria el *duro*, que tiene 20 reales ó 680 maravedís.

Reducción de unidades de una especie cualquiera á otras de especie superior ó inferior.

236. *Para reducir un número de unidades de una especie cualquiera á otra de especie inferior ó superior, se multiplica ó parte dicho número por el que expresa las veces que una unidad de la especie dada contiene ó está contenida en aquella á que se quiere reducir.*

En efecto; este problema no es más que una de las aplicaciones de multiplicar ó partir (40 y 43). Lo que podría suceder es que no se conociese el número de veces que una unidad contiene ó está contenida en otra; pero sabiendo las veces que una unidad cualquiera contiene á la inmediata inferior, se puede saber las veces que contiene á una de especie dada; para lo que no habrá más que reducir la unidad propuesta á la especie inferior, el número que resulte reducirlo á la especie siguiente, y continuar así hasta llegar á la especie que se nos da; el último número que hallemos expresará las unidades de que esta especie contiene la primera.

Si tratásemos de averiguar las veces que una unidad está contenida en otra, no habría más que ver, según el caso anterior, cuántas veces contiene esta segunda á la primera, y éste será el número que se pide.

Así se verá que la *libra* contiene 16 veces á la onza, $16 \times 16 = 256$ al adarme, $256 \times 3 = 768$ al tomín, y $768 \times 12 = 9216$ al gramo: y que está contenida 25 veces en la arroba y 100 veces en el quintal.

En las unidades de superficie y volumen, generalmente no se da la relación que hay entre una unidad y la inmediata inferior ó superior; es necesario determinarla según las dos reglas siguientes:

(c) Instituto Cervantes de Madrid

237. *El número de veces que contiene una unidad cuadrada á otra de especie inferior, es igual á la segunda potencia ó cuadrado del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera, contiene á la unidad lineal que corresponde á la segunda.*

Supongamos un cuadrado que tenga por lado una cierta unidad lineal, la cual equivale á m unidades lineales de una especie inferior.

Si dividimos dos lados opuestos del cuadro propuesto en m partes, y unimos los puntos correspondientes, obtendremos m fajas que cada una tendrá de ancho una de las m unidades lineales; si ahora dividimos los otros dos lados opuestos en otras m partes y unimos los puntos correspondientes, resultará dividida cada una de las m fajas en m cuadrados que tendrán por lado una de las unidades lineales inferiores; por consiguiente, si hay comprendidas en el cuadrado grande m fajas y cada una contiene m cuadrados pequeños, el número de éstos que habrá contenidos en aquél estará expresado por $m \times m = m^2$: luego la unidad primera cuadrada, ó sea el cuadrado que tiene por lado la unidad primera, se compone de m^2 unidades cuadradas que tiene por lado la unidad lineal inferior; luego si una unidad lineal contiene m veces á otra unidad lineal de especie inferior, la *unidad* primera *cuadrada* contendrá á la segunda *unidad cuadrada* el cuadrado del número m, que es lo que se quería demostrar.

Así, *el marco real* ó *fanega superficial*, que es un cuadrado que tiene por lado 24 estadales, se compondrá de 24^2 igual á $24 \times 24 = 576$ estadales cuadrados. El estadal cuadrado será igual á 16 varas cuadradas, puesto que el estadal lineal tiene cuatro varas lineales y $4^2 = 4 \times 4 = 16$.

Conociendo el valor de una unidad cuadrada cualquiera en unidades cuadradas de un orden inferior, se podrá conocer el valor de un número cualquiera n, multiplicado por n el número de veces que la mayor contiene á la inferior. Así, 7 varas cuadradas equivaldrán á $7 \times 9 = 63$ pies cuadrados; porque teniendo una vara lineal 3 pies, una vara cuadrada tendrá, según lo dicho anteriormente, 9, y si una tiene 9 pies cuadrados, 7 tendrán $7 \times 9 = 63$. Sin embargo, es necesario no confundir un cierto número de unidades cuadradas con el cuadrado que tiene por lado las mismas unidades lineales; así, 4 varas cuadradas no es lo mismo que un estadal cuadrado, ó sea, el cuadrado que tiene por lado 4 varas, puesto que dicho cuadrado se compone de $4^2 = 4 \times 4 = 16$ varas cuadradas, que es el cuádruplo del número de varas cuadradas que se nos dió.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

228. *El número de veces que contiene una unidad cúbica á otra de especie inferior, es igual á la tercera potencia ó cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la unidad lineal que corresponde á la segunda.*

Supongamos un cubo que tenga por lado una unidad lineal equivalente á m unidades lineales de especie inferior. Si dividimos la altura en m partes iguales y por los puntos de división cortamos por planos al cubo dado, quedará éste dividido en m porciones que tendrán de grueso una unidad lineal de la especie inferior: si ahora dividimos el largo de cada una de estas porciones en m partes y por los puntos de división la cortamos por planos, hallaremos un nuevo número de trozos igual á $m \times m = m^2$, que tendrán de grueso y ancho una unidad lineal de la especie inferior y de largo una de las unidades dadas; y, por último, dividiendo el largo de cada uno de estos trozos en m partes y cortándoles por los puntos de división, cada uno quedará dividido en m cubos que tendrán por lado una unidad lineal de las de especie inferior, y como el número de trozos es m^2, el número de cubos será $m^2 \times m = m^3$; luego una *unidad cúbica* cualquiera contiene á otra de un orden inferior un número de veces igual á la tercera potencia ó cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal que corresponde á la segunda; que es lo que se quería demostrar.

Así, una *vara cúbica* tiene 27 pies cúbicos, un *pie cúbico* tiene 1728 pulgadas cúbicas, etc.

EJEMPLOS.—1.° Reducir 12 *arrobas* á *onzas.*

Como la arroba contiene á la libra 25 veces y á la onza $25 \times 16 = 400$, el número 12 *arrobas* contendrán $400 \times 12 = 4800$ *onzas;* luego 12 *arrobas* $=$ 4800 *onzas.*

2.° Reducir 24 *líneas* á *pies.*

Como el pie contiene á la pulgada 12 veces y á la línea $12 \times 12 = 140$, el número 24 *líneas* reducido á pies será:

$$\frac{24}{144} = \frac{12}{72} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ pies.}$$

3.° Reducir 124 *estadales cuadrados* á *pies cuadrados.*

Como el estadal cuadrado tiene 16 varas cuadradas y 16 multiplicado por $9 = 144$ pies cuadrados, el número 124 estadales cuadrados tendrá $124 \times 144 = 17856$ *pies cuadrados.*

4.° Reducir 18 *pies cúbicos* á *pulgadas cúbicas.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Como un pie cúbico tiene 1728 pulgadas cúbicas, el número 18 pies cúbicos tendrá $1728 \times 18 = 31104$ *pulgadas cúbicas*.

5.° Reducir 5184 pulgadas cuadradas á varas cuadradas.

Como la vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados y $9 \times 144 = 1296$ pulgadas cuadradas, el número 5184 pulgadas cuadradas equivaldrá á $\frac{5184}{1296} = 4$ *varas cuadradas*.

LECCIÓN XXV

Reducción de quebrados á números complejos de especie inferior ó valuación de quebrados.—Reducción de un número de unidades de especie inferior á número complejo.—Reducción de números complejos á incomplejos.—Adición de los números complejos.—Sustracción de los números complejos.

Reducción de quebrados á números complejos de especie inferior ó valuación de quebrados.

239. Al apreciar una cantidad con una de las unidades superiores de las que constituyen un sistema de pesas y medidas, puede suceder que dicha unidad no esté contenida exactamente en la cantidad que se quiere medir, en cuyo caso el resto que se obtiene se aprecia con unidades inferiores á la primera; dando origen de este modo *á un conjunto de números concretos de una misma naturaleza, pero referidos á distintas unidades, que es lo que se llama* NÚMERO COMPLEJO.

240. *Para valuar quebrados ó reducirlos á complejos, se divide el numerador por el denominador, y el cociente que se obtiene es el número de unidades de la especie á que se refiere el quebrado; después se multiplica el resto por las veces que una unidad de las dadas contiene á la inmediata inferior, el producto se divide por el divisor, y el cociente expresará las unidades de especie inmediata inferior, y así se continúa hasta llegar á un cociente exacto ó á la ínfima de las especies.*

Sea, por ejemplo, reducir á complejo el quebrado $\frac{9}{7}$ *vara*.

Pudiendo considerar este quebrado de vara como el cociente de dividir 9 varas entre siete, efectuando en lo que sea posible la división, hallaremos por cociente 1 vara, y 2 de resto, que, reducidas á pies, darán 6; luego el quebrado $\frac{2}{7}$ de vara que se obten-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dría en la primera división se reduce á $\frac{6}{7}$ de pie, y como este quebrado no llega á valer un pie, reduciéndole á quebrado de pulgada, se tendrá el nuevo quebrado $\frac{72}{7}$ de pulgada, que es igual á 10 pulgadas y $\frac{2}{7}$ de otra, y hallando el valor de este último quebrado, tenemos el resultado.

La operación se dispone del modo siguiente:

9 *var.* | 7

2 — 1 *var.*, 0 *pies*, 10 *pul.*, 3 $^{3}/_{7}$ *lín.*

× 3

6 *pies*

× 12

72 *pul.*

2

× 12

24 *lín.*

3

Luego $\frac{9}{7}$ de *vara* = 1 *vara*, 0 *pies*, 10 *pulgadas*, 3 $^{3}/_{7}$ *líneas.*

Propongámonos en segundo lugar reducir á complejo el quebrado $\frac{4}{7}$ de fanega superficial. Dispuesta la operación como arriba, se tiene:

4 *fan. sup.* | 7

× 12 — 6 *cel. sup.*, 41 *est. cuad.*, 2 *var. cuad.*, 2 $^{4}/_{7}$ *pies cuad.*

48 *celem.*

6

× 48

288 *est. cuad.*

1

× 16

16 *var. cuad.*

2

× 9

18 *pies cuad.*

Luego $\frac{4}{7}$ *de fanega superficial* equivalen á 6 *celemines superfi-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ciales, 41 *estadales cuadrados,* 2 *varas cuadradas,* 2 $^{4}/_{7}$ *pies cuadrados.*

Reducción de unidades de especie inferior á números complejos.

241. *Para reducir un número de unidades de especie inferior á complejo, se divide el número dado por el número de veces que una de las unidades que se nos dan está contenida en la especie inmediata superior; el resto será el número de las unidades de la especie dada, y el cociente el de la especie superior. Haciendo lo mismo con el cociente y continuando de este modo hasta llegar al orden superior, tendremos el número reducido á complejo.*

Supongamos se quiere reducir á complejo el número 34789 adarmes.

Dispuesta la operación del modo siguiente, se tendrá:

34789 *ads.*	16		
27	2174 *onzas.*	16	
118	57	135 *libs.*	25
69	94	10 *libs.*	5 *ar.*
5 *ads.*	14 *onzas.*		

Como la onza tiene 16 adarmes, cuantas veces el número 16 esté contenido en el propuesto, tantas onzas habrá; luego dividiendo el número propuesto por 16, el cociente expresará las onzas que contiene aquél, y el resto será el número de las unidadades de la especie dada del complejo que se busca. Haciendo lo mismo con las demás especies, hallamos que 34789 adarmes equivalen á 5 *arrobas,* 10 *libras,* 14 *onzas,* 5 *adarmes.*

Del mismo modo se verá que 3472 maravedís equivalen á 5 *duros,* 2 *reales,* 4 *maravedís.*

Sea, por último, el número 324572 pies cuadrados el que tratamos de reducir á complejo. Recordando que una vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados, que un estadal cuadrado tiene 16 varas cuadradas, que un celemín superficial tiene 48 estadales cuadrados, y que una fanega superficial tiene 12 celemines, se tendrá:

324572 *p. c.*	9			
54	36063 *v. c.*	16		
057	40	2253 *est. c.*	48	
32	86	333	46 *cel. s.*	12
5 *p. c.*	63	45 *est. c.*	10 *cel. s.*	3 *f. s.*
	15 *v. c.*			

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Luego 324572 *pies cuadrados* equivalen á 3 *fanegas superficiales*, 10 *celemines superficiales*, 45 *estadales cuadrados*, 15 *varas cuadradas y* 5 *pies cuadrados.*

Reducción de números complejos á incomplejos.

242. *Para reducir un número complejo á incomplejo se multiplican las unidades de especie superior por las veces que una contiene á la inmediata inferior, se agrega á este producto las que de esta segunda especie haya en el número dado, se hace lo mismo con el número que resulta, y así se continúa hasta llegar á la última. El último número hallado será el incomplejo que se busca.*

Si no se quiere referir el número á la menor de sus especies, *se pone por denominador al número que resulta, el número de veces que esta especie inferior está contenida en la que se quiere referir.*

Sea, por ejemplo, reducir el complejo 8 *duros*, 12 *reales* y 26 *maravedís* á incomplejo de *reales.*

Como un duro tiene 20 reales, 8 duros tendrán 8 multiplicado por 20, igual 160 reales; agregando los 12 que hay en el complejo se obtienen 172 reales, que multiplicados por 34 maravedís que tiene un real y agregando al producto que se obtenga los 26 maravedís del complejo, obtendremos el valor de dicho complejo en unidades de la ínfima especie; pero como se quiere referir á la unidad real, pondremos por denominador al número hallado los 34 maravedís que tiene un real.

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

8 *duros*, 12 *reales*, 26 *maravedís.*
× 20
160
+ 12
172 *reales.*
× 34
688
516
5848
+ 26
= 5874 *maravedís.*

Luego 8 *duros*, 12 *reales*, 26 *maravedís* $= \frac{5874}{34}$ *rs.* $= \frac{2937}{17}$ *reales* $= 172\ ^{13}/_{17}$ *reales.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Adición de los números complejos.

243. *Para sumar números complejos, se ponen unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de una misma especie, se tira una raya por debajo y se suman todos los diferentes órdenes principiando por el menor, teniendo cuidado de reservar de cada suma las unidades que resulten de especie superior para unirlas á su especie, escribiendo solamente las restantes.*

Supongamos que se quiere sumar los complejos 12 duros, 18 reales, 24 maravedís; 8 duros, 12 reales, 30 maravedís; 15 duros, 15 reales, 16 maravedís; y 18 duros, 12 reales, 20 maravedís.

Dispuesta la operación como sigue y efectuada la suma, se tendrá:

12 *duros,*	18 *reales,*	24 *mrs.*
8	12	30
15	15	16
18	12	20
55 *duros,*	19 *reales,*	22 *mrs.*

Cuyo resultado se halla diciendo: 24 y 30 son 54, que componen un real, que se marca con un punto, y sobran 20; 20 y 16 son 36 maravedís, que componen un real y sobran 2; 2 y 20 son 22, que se colocan en su lugar: contando los puntos se hallan dos que indican reales, los cuales, unidos á su especie, obtenemos del mismo modo 19 reales y 2 duros, que, sumados con su especie, dan 55. Luego la suma de los números propuestos es 55 *duros*, 19 *reales* y 22 *maravedís*.

También se puede efectuar la suma de números complejos, reduciendo éstos á incomplejos de cualquiera de sus especies, y efectuando la suma de los números concretos que resulten.

Sustracción de los números complejos.

244. *Para restar números complejos se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de modo que se correspondan las unidades de una misma especie; se tira una raya por debajo, y se resta de cada orden del minuendo su correspondiente del sustraendo, principiando por la derecha. Si de alguna especie del minuendo no se puede restar su correspondiente del sustraendo, se toma una unidad del orden superior*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y se descompone en unidades de la especie que nos hace falta, teniendo cuidado de considerar con una unidad menos aquella de la cual se tomo.

EJEMPLOS: 1.º

	13 *duros,*	15 *reales,*	24 *mrs.*
—	12	8	16
=	1 *duro,*	7 *reales,*	8 *mrs.*

2.º Restar de 12 varas, 1 pie, 2 pulgadas, el número 8 varas, 2 pies, 8 pulgadas y 10 líneas.

Se tendrá:

	12 *varas,*	1 *pie,*	2 *pulgadas*	
—	8	2	8	10 *lín.*
=	3 *varas,*	1 *pie,*	5 *pulgadas,*	2 *lín.*

3.º de 38 *arrobas*, queremos restar el número complejo 12 *arrobas*, 15 *libras*, 12 *onzas.*

Tendremos:

	38 *arrobas*		
—	12 *arrobas,*	15 *libras,*	12 *onzas.*
=	25 *arrobas,*	9 *libras,*	4 *onzas.*

En este último ejemplo, como el minuendo no contiene más que arrobas y el sustraendo tiene además libras y onzas, hemos tenido que descomponer mentalmente una arroba de las 38, en 25 libras; de las que se han dejado 24 en su lugar y la restante se ha reducido á onzas, de las cuales hemos restado 12, obteniendo 4 de resta. Restando 15 libras de las 24 que dejamos en su lugar, hallamos la resta 9; y, por último, restando 12 arrobas de las 37 que quedaron, se obtiene el resultado final 25 *arrobas*, 9 *libras* y 4 *onzas.*

También se pueden restar los números complejos reduciéndoles á incomplejos de una misma especie, y efectuando la resta de los números concretos que resulten.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXVI

Multiplicación de números complejos.—División de números complejos.

Multiplicación de números complejos.

245. La multiplicación de números complejos puede considerarse como el resultado de la resolución de un problema que generalmente tiene por objeto hallar el valor de varias unidades de una misma naturaleza, conociendo el de una de ellas. Por consiguiente, queda reducido á hallar un número que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es de la unidad cuyo valor se conoce.

La multiplicación de complejos puede efectuarse de dos modos: ó convirtiendo los complejos en incomplejos, y queda reducido á multiplicar dos números concretos (38), ó efectuando la multiplicación directamente por el método llamado de las *partes alícuotas*.

En la multiplicación de complejos distinguiremos varios casos: 1.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de la especie de unidades cuyo valor se conoce; 2.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de especie superior que aquella cuyo valór se conoce; 3.°, multiplicar un complejo por un incomplejo de especie inferior que aquella cuyo valor se conoce; 4.°, multiplicar un complejo por otro.

PRIMER CASO. *Para multiplicar un número complejo por un incomplejo de la especie cuyo valor se conoce, se multiplican todos los órdenes del complejo por el incomplejo principiando por el inferior, y si alguno de estos productos componen alguna unidad del orden superior, se agrega al de su especie.*

En efecto; el problema que generalmente se resuelve en este caso es, dado el valor de una unidad, hallar el de varias; de modo que repitiendo el valor de una tantas veces como unidades se nos dan, tendremos lo que se pide; y como para multiplicar una suma por un número se multiplican por dicho número todos los sumandos (54), se sigue que el número obtenido según la regla, será el verdadero.

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 24 *arrobas*, sabiendo que una vale 12 *duros*, 8 *reales*, 12 *maravedís*.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Dispuesta la operación como sigue, se tendrá:

12 *duros*, 8 *reales*, 12 *maravedís*.
× 24

10		8		48	
48		192		24	
24		200	20	288	34
			10	16	8

298 *duros*, 0 *reales*, 16 *maravedís*.

El producto de 12 maravedís por 24 es 288 maravedís, que componen 8 reales y 16 maravedís; éstos se escriben en su lugar, y los 8 reales se unen con el producto de 8 reales por 24, lo que da 200 reales, que componen 10 duros, los cuales, unidos al producto de 12 por 24, dan por resultado 298 duros.

SEGUNDO CASO. *Para multiplicar un complejo por un incomplejo de especie superior que aquella cuyo valor se conoce, se reduce el multiplicador á la especie de unidades cuyo valor es conocido, y se halla el producto como en el caso anterior.*

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 6 *quintales*, sabiendo que la arroba cuesta 12 *duros*, 8 *reales*, 12 *maravedís*.

Como 6 *quintales* equivalen á 24 *arrobas*, queda reducido á multiplicar 12 *duros*, 8 *reales* y 12 *maravedís* por 24 *arrobas*, cuyo producto hemos visto que es 298 *duros*, 0 *reales*, 16 *maravedís*.

TERCER CASO. *Para multiplicar un complejo por un incomplejo de especie inferior que aquella cuyo valor se conoce, se descompone el multiplicador en partes alícuotas de la unidad cuyo valor es conocido, y hallando estas partes alícuotas del multiplicando, su suma será el producto.*

EJEMPLO. Si una vara cuesta 8 *duros*, 6 *reales*, 24 *maravedís*, ¿cuánto costarán 7 *pulgadas*?

Dispondremos la operación del modo siguiente:

8 *duros*, 6 *reales*, 24 *maravedís*.
× 7 *pulgadas*.

		1	1
Valor de 6 *pulgadas*.....	1 *duro*,	7 *reales*,	26 2/3 *maravedís*.
Id. de 1 *id*.....		4	21 4/9
Id. de 7 *id*.....	1 *duro*,	12 *reales*,	14 1/9 *maravedís*.

Como 7 pulgadas no es parte alícuota de la vara, que tiene 36 pulgadas, le descomponemos en 6 + 1; y como 6 pulgadas es la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sexta parte de la vara, tomando la sexta parte del multiplicando tendremos el valor de 6 *pulgadas;* tomando en seguida la sexta parte del resultado, hallaremos el valor de una pulgada, y sumando los dos números se tiene lo que se pide.

CUARTO CASO. *Para multiplicar un complejo por otro se reducen las unidades superiores que aquella cuyo valor se conoce á esta especie, y se efectúa el producto del multiplicando por el número que resulta; después se toma del multiplicando las partes alícuotas de la unidad principal que nos indiquen las demás especies del multiplicador, y la suma de todos estos productos parciales será el resultado pedido.*

Sea, por ejemplo, hallar el valor de 3 *quintales*, 2 *arrobas*, 8 *libras*, 12 *onzas*, costando la arroba 12 *duros*, 8 *reales*, 18 *maravedís.*

Reducidos los quintales á la especie arrobas, se tiene:

		12 *duros*,	8 *rs.*,	18 *mars.*
		14 *arbs.*,	8 *libs.*,	12 *onzas.*
Valor de 14 *arrobas*.....		173 *duros*,	19 *rs.*,	14 *mars.*
Id. de 8 *libs.*	5 *libs*.....	2	9	24
	3 » 1 *lib*...	0	9	32
	3 » 1 » ...	0	9	32
	3 » 1 » ...	0	9	32
Id. de 12 *onz.*	8 *onz*.....	0	4	33
	4 »	0	2	16 ½
Valor pedido.....		178 *duros*,	6 *rs.*,	13 ½ *mars.*

Aplicando á este ejemplo el método de reducción á incomplejos, se tendrá (242):

$$12\ duros,\ 8\ reales,\ 18\ maravedís = 8450\ maravedís.$$

$$3\ quintales,\ 2\ arrobas,\ 8\ libras,\ 12\ onzas = \frac{5740}{400} = \frac{574}{40} = \frac{287}{20}\ arrobas,$$

de modo que multiplicando 8450 *maravedís* por $\frac{287}{20}$ *arrobas*, tendremos:

$$8450\ mrs. \times \frac{287}{20} = \frac{8450 \times 287\ mrs.}{20} = \frac{2425150\ mrs.}{20} =$$

$$\frac{242515\ mrs.}{2} = 121257\ ½\ mrs.,$$

y reduciendo á complejo este número de maravedís, se tendrá el número 178 *duros*, 6 *reales*, 13 ½ *maravedís*, que es el producto pedido.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

División de complejos.

246. En la división de complejos distinguiremos dos casos principales: que los complejos sean de una misma naturaleza, ó de naturaleza distinta.

PRIMER CASO. *Para dividir un complejo por otro de la misma naturaleza se reducen ambos á incomplejos de una misma especie y se dividen como números abstractos.*

EJEMPLO. Si con 8 *duros*, 12 *reales* y 24 *maravedís* se compra una arroba, con 37 *duros*, 8 *reales*, 15 *maravedís*, ¿cuántas se comprarán?

Reduciendo ambos complejos é incomplejos de maravedí, se halla:

8 *duros*, 12 *reales*, 24 *maravadís* = 5872 *maravedís*.
37 » 8 » 15 » = 25447 »

Costando una *arroba* 5872 maravedís, con 25447 se podrán comprar tantas cuantas veces el valor de una esté contenido en el segundo número; luego efectuando la división y valuando el resto en complejo de arroba, se tendrá:

25447 *arrobas.* | 5872

4 *arbs.*, 8 *libs.*, 5 *onzs.*, 7 $\frac{55}{367}$ *adarm.*

1959
× 25
9795
3918
48975 *libras.*
1999
× 16
11994
1999
31984 *onzas.*
2624
× 16
15744
2624
41984 *adarmes.*
880

247. *Para dividir un complejo por otro de distinta naturaleza se reduce el primero á incomplejo de cualquiera de sus especies, y el se–*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

gundo, que es el divisor, á incomplejo de la especie de unidad cuyo valor se quiere hallar; el cociente de estos dos números expresará el valor pedido en unidades de la especie á que se redujo el dividendo.

EJEMPLO. Se quiere saber el valor de una arroba, en el supuesto de que 14 *arrobas*, 8 *libras* y 12 *onzas* han costado 178 *duros*, 6 *reales*, 13 $^1/_2$ *maravedís*.

Reduciendo el dividendo á la especie de *maravedí*, y el divisor á la especie de *arroba*, que es la unidad cuyo valor se quiere hallar, tendremos:

$$178 \textit{ duros}, 6 \textit{ reales}, 13\ ^1/_2 \textit{ mrs.} = \frac{242515}{2} \textit{ maravedís.}$$

$$14 \textit{ arrobas}, 8 \textit{ libras}, 12 \textit{ onzas} = \frac{5740}{400} = \frac{287}{20} \textit{ arrobas.}$$

Dividiendo el primer número por el segundo, tendremes el valor de una arroba expresado en maravedís; así,

$$\frac{242515}{2} : \frac{287}{20} = \frac{242515 \times 20}{2 \times 287} = \frac{2425150}{287} = 8450 \textit{ mrs.;}$$

y reduciendo el número 8450 maravedís á complejo, hallaremos (241) para valor de la arroba el número 12 *duros*, 8 *reales*, 18 *maravedís*.

También podría efectuarse directamente la división de complejos; pero los cálculos serían en general sumamente pesados, por lo que rara vez se practica de este modo.

SISTEMA MÉTRICO

LECCIÓN XXVII

Unidades principales del sistema métrico; sus múltiplos y divisores.

Unidades principales del sistema métrico; sus múltiplos y divisores.

248. SISTEMA MÉTRICO es el conjunto de unidades que, teniendo por base el *metro*, que es una longitud igual á la *diezmillonési-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ma parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por París, sirve para apreciar y medir las cantidades.

Se le llama también *decimal*, porque los múltiplos y divisores de las *unidades principales* se forman multiplicando ó partiendo éstas por la unidad seguida de uno, dos ó más ceros.

Siete son también, como en el sistema antiguo, las diferentes clases de unidades del *sistema legal métrico:*

Unidades de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *capacidad*, de *peso*, de *tiempo*, y de *numerario*.

La unidad principal en las medidas *lineales* ó de *longitud* es el METRO, que, como ya hemos dicho, es la *diezmillonésima* parte del cuarto del meridiano terrestre que pasa por París.

La unidad principal de *superficie* es el ÁREA, que es un cuadrado que tiene por lado *diez metros*. También suele tomarse por unidad principal de superficies el *metro cuadrado*, en cuyo caso sus múltiplos y divisores son los diferentes cuadrados que tienen por lado las diferentes unidades lineales de que hablaremos más adelante.

La unidad principal de *volumen* es el METRO CÚBICO.

La unidad principal de *capacidad* es el LITRO, que es una medida cúbica ó cilíndrica cuya capacidad es de un volumen igual á un cubo que tiene por lado la *décima* parte del metro.

La unidad principal de *peso* es el GRAMO, que es el peso en el vacío del agua destilada á la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado, que cabe en un vaso cúbico cuyas dimensiones interiores son la *centésima* parte de un metro.

Las unidades de tiempo son las mismas que ya hemos explicado en el sistema antiguo de pesas y medidas (235).

La unidad principal *monetaria* ó de *numerario* es la PESETA, que tiene 4 reales.

249. Los múltiplos de una unidad principal, á excepción de la peseta y unidades de tiempo, se expresan anteponiendo al nombre de la unidad principal correspondiente, cada una de las siguientes palabras griegas: DECA, HECTO, KILO, MIRIA, que equivalen respectivamente á *diez*, *ciento*, *mil*, *diez mil* unidades principales.

Los divisores se expresan anteponiendo á la unidad principal las palabras latinas DECI, CENTI, MILI, que equivalen respectivamente á la *décima*, *centésima*, *milésima* parte de la unidad principal.

UNIDADES DE LONGITUD.—Las unidades ó medidas de longitud son el METRO y sus divisores.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Los múltiplos del metro son:

El DECÁMETRO = 10 *m.*

El HECTÓMETRO = 10 *Dm.* = 100 *m.*

El KILÓMETRO = 10 *Hm.* = 100 *Dm.* = 1.000 *m.*

El MIRIÁMETRO=10 *Km.*=100 *Hm.*=1.000 *Dm.*=10.000 *m.*

Los divisores del metro son:

El DECÍMETRO = 0,1 *m.*

El CENTÍMETRO = 0,1 *dm.* = 0,01 *m.*

El MILÍMETRO = 0,1 *cm.* = 0,01 *dm.* = 0,001 *m.*

El *kilómetro* y *miriámetro* sirven para medir grandes distancias, y reemplazan á las leguas y millas del sistema antiguo; el *metro* reemplaza á la vara.

UNIDADES DE SUPERFICIE.—Las unidades ó medidas de superficie son los diferentes cuadrados que tienen por lado las diferentes unidades lineales.

La unidad fundamental es el METRO CUADRADO.

Los múltiplos del metro cuadrado son:

El DECÁMETRO CUADRADO = 100 m^2.

El HECTÓMETRO CUADRADO = 100 Dm^2. = 10.000 m^2.

El KILÓMETRO CUADRADO = 100 Hm^2. = 10.000 Dm^2.

El MIRIÁMETRO CUADRADO = 100 Km^2. = 10.000 Hm^2.

Los divisores del metro cuadrado son:

El DECÍMETRO CUADRADO = 0,01 m^2.

El CENTÍMETRO CUADRADO = 0,01 dm^2. = 0,0001 m^2.

El MILÍMETRO CUADRADO = 0,01 cm^2. = 0,0001 dm^2.

Las unidades métricas cuadradas siguen la misma relación que las del sistema antiguo: es decir, que una cualquiera contiene á otra de especie inferior un número de veces igual al *cuadrado* del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal correspondiente á la segunda.

Las medidas de superficie, llamadas *agrarias*, son las que se emplean en la medición de los campos, las cuales son el *área,* que es un *decámetro cuadrado,* ó sea un cuadrado que tiene por lado un *decámetro,* y que, por consiguiente, equivale (237) á 100 *metros cuadrados.*

Úsanse además un múltiplo y un divisor del *área*, que son la *hectárea* y la *centiárea.*

La HECTÁREA equivale á 100 *áreas*, ó sean 10.000 m^2.

Y la CENTIÁREA equivale á 0,01 de *área*, ó sea á un *metro cuadrado.*

Es necesario no confundir un *decámetro cuadrado* con *diez me-*

(ç) Instituto Cervantes de Madrid

tros cuadrados, pues un decámetro cuadrado expresa un cuadrado que tiene por lado 10 metros, y que, por consiguiente, equivale á 100 metros cuadrados, número diez veces mayor que 10 metros cuadrados. Del mismo modo no se debe confundir un *decímetro, centímetro*, etc. *cuadrados*, con un décimo, céntimo, etc. de metro cuadrado, porque son cosas muy diferentes.

UNIDADES DE VOLUMEN.—Las unidades ó medidas de volumen son los diferentes cubos que tienen por lado las diferentes unidades lineales.

La unidad fundamental es el METRO CÚBICO, que es un cubo que tiene por lado un *metro*.

Los múltiplos del metro cúbico son:

El DECÁMETRO CÚBICO = 1.000 m^3.

El HECTÓMETRO CÚBICO = 1.000 Dm^3. = 1.000.000 m^3.

El KILÓMETRO CÚBICO = 1.000 Hm^3. = 1.000.000 Dm^3.

Los divisores del metro cúbico son:

El DECIMETRO CÚBICO = 0,001 m^3.

El CENTÍMETRO CÚBICO = 0,001 dm^3. = 0,000 001 m^3.

El MILÍMETRO CÚBICO = 0,001 cm^3. = 0,000 001 dm^3.

Lo mismo que en el sistema antiguo, se verifica que una unidad cúbica cualquiera contiene á otra de especie inferior un número de veces igual al cubo del número de veces que la unidad lineal correspondiente á la primera contiene á la lineal correspondiente á la segunda (238).

Tampoco hay que confundir un *decámetro cúbico*, por ejemplo, con *diez* metros cúbicos, ni un *decímetro cúbico* con un décimo de metro cúbico, pues son cosas muy distintas.

El *metro cúbico* se suele llamar ESTERIO, y de esta unidad, como principal, se consideran un múltiplo y un divisor, que son el DECASTERIO = 10 *esterios*; y el DECISTERIO, igual á la décima parte de un *esterio*.

También se usan el *medio decasterio* y el *doble esterio*.

UNIDADES DE CAPACIDAD.—Sirven para medir los *áridos* y *líquidos*. La unidad principal es el LITRO.

Sus múltiplos son:

El DECALITRO = 10 *l*.

El HECTOLITRO = 10 *Dl*. = 100 *l*.

El KILOLITRO = 10 *Hl*. = 100 *Dl*. = 1.000 *l*.

Los divisores del litro son:

El DECILITRO = 0,1 *l*.

El CENTILITRO = 0,1 *dl*. = 0,01 *l*.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

El *litro* y *decalitro* reemplazan al *cuartillo* y *cántara*.

El *hectolitro* á la *fanega*.

Como las medidas de capacidad aprecian el volumen de la materia que contienen, hay una relación entre ellas y las unidades de volumen: así,

El *kilolitro* = 1.000 *l.* equivale á un metro cúbico.

El *hectolitro* = 100 *l.* equivale á un décimo de metro cúbico.

El *decalitro* = 10 *l.* equivale á un céntimo de metro cúbico.

El *litro* = 1 *l.* equivale á un decímetro cúbico.

El *decilitro* = 0,1 *l.* equivale á un décimo de decímetro cúbico.

El *centilitro* = 0,01 *l.* equivale á un céntimo de decímetro.

El *mililitro* = 0,001 *l.* equivale á un contímetro cúbico.

UNIDADES DE PESO.—Sirven para apreciar el de los cuerpos.

La unidad principal de peso es el GRAMO, que es lo que pesa en el vacío un *centímetro cúbico* de agua destilada á la temperatura de 4 centígrados.

Los múltiplos del gramo son:

El DECAGRAMO = 10 *g.*

El HECTOGRAMO = 10 *Dg.* = 100 *g.*

El KILOGRAMO = 10 *Hg.* = 100 *Dg.* = 1.000 *g.*

El MIRIAGRAMO = 10 *Kg.* = 100 *Hg.* = 1.000 *Dg.* = 100.000 *g.*

Los divisores del gramo son:

El DECIGRAMO = 0,1 *g.*

El CENTIGRAMO = 0,1 *dg.* = 0,01 *g.*

El MILIGRAMO = 0,1 *cg.* = 0,01 *dg.* = 0,001 *g.*

El MIRIAGRAMO rara vez se usa: se expresa siempre por *diez kilogramos*.

Hay además otros dos múltiplos, que son: el *quintal métrico* igual á 100 *Kg.*, y la *tonelada de peso* = 1000 *Kg.*

La unidad usual en el comercio es el *kilogramo*.

UNIDADES DE TIEMPO. Son las que sirven para apreciar el que transcurre de un acontecimiento á otro, y son las consideradas en el sistema antiguo (235).

UNIDADES DE NUMERARIO. Son las que pertenecen al dinero, y sirven para valorar las cosas. La unidad principal es la PESETA, que equivale á 4 reales. También se usa como unidades principales el *real* y el *duro* ó *peso fuerte*, que tiene 5 pesetas, ó sean 20 reales.

Las monedas que se acuñan desde que rige la ley de 26 de Junio de 1854, publicada en la *Gaceta* del 28 del mismo mes y año, son:

(c) Instituto Cervantes de Madrid

MONEDAS DE ORO. El doblón de Isabel, que vale 10 escudos, ó sean 100 reales. El doblón de *cuatro escudos*, que equivale á 40 reales. El doblón de *dos escudos*, ó sea de 20 reales.

MONEDAS DE PLATA. El *duro* ó *peso fuerte*, que tiene 5 pesetas, ó sean 20 reales. El *escudo,* ó medio duro, que equivale á 10 reales. La *peseta,* que equivale á 100 céntimos de peseta, ó sean 4 reales. La *media peseta,* que equivale á 50 céntimos de peseta, ó sean 2 reales. El *real,* que equivale á 25 céntimos de peseta.

MONEDAS DE BRONCE. El *medio real*, que equivale á 12 ½ céntimos de peseta. El *cuartillo,* equivalente á 6 ¼ céntimos de peseta. La *décima,* que equivale á 2 ½ céntimos de peseta. La *media décima*, que equivale á 1 ¼ céntimos de peseta. Las nuevamente acuñadas, llamadas vulgarmente perros y sentimientos, son las de *diez céntimos de peseta*, de cinco céntimos íd., de dos céntimos íd. y de un céntimo de peseta.

Además de estas monedas, hay de las acuñadas anteriormente:

DE ORO. La *onza*, que tiene 16 duros, ó sean 320 reales.

La *media onza*, que tiene 8 duros, ó sean 160 reales. El *doblón ochentín,* que equivale á 4 duros, ó sean 80 reales. El *escudo* de 2 duros, que equivale á 40 reales. El *escudito* de un duro, ó sean 20 reales. La *coronilla* de premio, que tiene 21 reales y cuartillo.

DE PLATA. El *duro mejicano,* de 21 reales y cuartillo. La *peseta columnaria* de 125 céntimos de peseta, ó sean 5 reales. La *media peseta columnaria,* que equivale á 62 ½ céntimos de peseta, ó sean 2 ½ reales. El *real columnario,* que equivale á 31 ¼ céntimos de peseta, ó séa 1 real y cuartillo.

DE COBRE. La *pieza de dos cuartos,* que equivale á 8 maravedís; el *cuarto*, á 4 maravedís; el *ochavo,* á 2 maravedís; el *maravedí*, moneda que ya no existe y equivale próximamente á 3 céntimos de real.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXVIII

Reducción de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior.—Reducción de números métricos complejos á incomplejos.—Reducción de números métricos incomplejos á complejos.—Cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos.

Reducción de unidades de una especie cualquiera á otra de especie inferior ó superior.

250. *Para reducir un número de unidades de una especie cualquiera á otras de especie inferior ó superior, se multiplica ó parte dicho número por la unidad seguida de tantos ceros como órdenes de unidades hay entre la especie á que está referido el número y aquella que se quiere referir inclusive, si el número es de unidades de longitud, capacidad ó peso, ó por la unidad seguida de tantas veces dos ó tres ceros si el número es de unidades cuadradas ó cúbicas.*

En efecto; este problema no es más que una de las aplicaciones de la multiplicación ó división (40 y 41).

EJEMPLOS. 1.° Reducir el número 387,346 *Km. á metros.*

Del kilómetro al metro inclusive hay *tres* órdenes de unidades; luego habrá que multiplicar por la unidad seguida de *tres* ceros, ó lo que es lo mismo (193) correr la coma *tres* lugares á la derecha. De modo, que:

$$387{,}346\ Km. = 387346\ metros.$$

2.° Reducir á *gramos* el número 346 *hectogramos.*

Como del *hectogramo* al *gramo* inclusive hay *dos* órdenes de unidades, se tiene que multiplicar por la unidad seguida de *dos* ceros, lo cual dará:

$$346\ Hg. = 34600\ gramos.$$

3.° Reducir á *decalitros* 385,347 *Kl.*

Multiplicando por la unidad seguida de dos ceros, se tendrá:

$$385{,}347\ Kl. = 38534{,}7\ Dl.$$

4.° Reducir á *quintales métricos* el número 3475432 *gramos.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Del gramo al quintal métrico inclusive hay *cinco* órdenes de unidades; luego tendremos que dividir el número por la unidad seguidad de *cinco* ceros, lo que da:

$$3475432\ g. = 34{,}75432\ Qm.$$

5.° Reducir á *kilómetros cuadrados* el número 34705 *metros cuadrados*.

Como los órdenes de unidades que hay entre el metro y el kilómetro son tres, tendremos que dividir el número por la unidad seguida de *seis* ceros, así:

$$34705\ m^2 = 0{,}034705\ Km^2.$$

6.° Reducir 33 *metros cúbicos* á *centímetros cúbicos*.

Se tendrá que multiplicar el número 33 por la unidad seguida de *seis* ceros, porque cada unidad cúbica del sistema métrico equivale á 1000 de la especie inferior y á 1 000 000 de la siguiente; luego:

$$33\ m^3 = 33\,000\,000\ \textit{centímetros cúbicos}.$$

Reducción de números métricos complejos á incomplejos.

251. *Para reducir números métricos complejos á incomplejos de cualquiera de sus especies, se reducen primero las unidades de especie superior á la inmediata inferior, y se agregan al número que se obtiene las unidades que haya de esta especie. Se hace lo mismo con el número que resulta, y así se continúa hasta llegar á la última especie. El último número hallado equivale al número complejo reducido á la ínfima de sus especies. Si no es á la ínfima á la que se quiere referir, se reduce el resultado á la especie que se quiera* (250).

Esta regla queda reducida en la práctica á colocar los diferentes órdenes de unidades del complejo unos á continuación de otros, teniendo cuidado que entre cada dos consecutivos haya siempre un número de cifras igual al número de órdenes que hay entre el superior y el inferior inclusive, si el número es lineal de capacidad ó peso, y un número de cifras doble ó triple del dicho anteriormente, si las unidades son cuadradas ó de volumen.

EJEMPLOS. 1.° Reducir á *kilómetros* el número complejo 38 *Mm.* 15 *Dm.* 6 *m.* 8 *cm.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Reduciendo el complejo primeramente á incomplejo de la ínfima especie, se tendrá:

38 *Mm.* 15 *Dm.* 6 *m.* 8 *cm.* = 38015608 *cm.*

Cuyo resultado se ha obtenido diciendo: 38 *miriámetros* reducidos á *decámetros* son 38 000, y 15, que tiene el complejo 38 015 *decámetros;* este número reducido á *metros,* da 380150 *metros.* Por último, reduciendo este número á *centímetros* y agregando los 8 que tenemos, se obtiene el resultado 38 015 608 *cm.*

Reduciendo este número á kilómetros se tendrá 38 015 608 *cm.* equivalente á 380,15608 *Km.*; luego

38 *Mm.* 15 *Dm.* 6 *m.* 8 *cm.* = 380,15608 *Km.*

2.º Reducir el complejo 38 Mm^2. 15 Dm^2. 6 m^2. 8 cm^2. á *kilómetros cuadrados.* Reduciendo el complejo primeramente á incomplejo de la ínfima especie, se tendrá:

38 Mm^2. 15 Dm^2. 6 m^2. 8 cm^2. = 38 000 015 060 008 cm^2.,

y reduciendo el resultado á incomplejo de *kilómetro,* se tiene:

38 000 015 060 008 cm^2. = 3800,0015060008 Km^2.

3.º Reducir á metros cúbicos 32 Dm^3. 8 m^3. 133 cm^3.

El número propuesto reducido á *centímetros cúbicos* es 32 008 000 133, y este número referido á *metros cúbicos* será 32008,000133 m^3.; luego

32 Dm^3. 8 m^3. 133 cm^3. = 32008,000133 m^3.

Reducción de números métricos incomplejos á complejos.

252. *Para reducir un número métrico incomplejo á complejo, se divide el número, á partir de las unidades principales, en períodos de una, dos ó tres cifras, según que sea de unidades de longitud, capacidad ó peso, de unidades cuadradas ó de volumen; y cada uno de estos períodos expresará los diferentes múltiplos y divisores de la unidad principal de que se compone el número.*

EJEMPLOS. 1.º Reducir á complejo el número 347,457 *Dm.*

Como los múltiplos y divisores siguen la ley decimal lo mismo

(c) Instituto Cervantes de Madrid

que las unidades de un número, las decenas, centenas, etc. de este número expresarán múltiplos del decámetro, y cada cifra de la decimal indicará los divisores de la misma unidad decámetro, así:

$$347{,}457\ Dm. = 3\ Km.\ 4\ Hm.\ 7\ Dm.\ 4\ m.\ 5\ dm.\ 7\ cm.$$

2.° Sea reducir el número 347,457 Dm^2. á número complejo.

Como cada unidad cuadrada se compone de ciento de la inmediata inferior, las centenas de un número métrico expresarán el múltiplo siguiente á la unidad á que se refiere el número, y las centésimas el inmediato divisor, de modo que se tendrá:

$$347{,}457\ Dm^2. = 3\ Hm^2.\ 47\ Dm^2.\ 45\ m^2.\ 70\ dm^2.$$

Observemos que cuando el número de cifras decimales no es par, se hace que lo sea agregando un cero á la derecha; porque después de haberse considerado el penúltimo período, el divisor siguiente lo deben formar las centésimas de aquella especie, y, por lo tanto, ha de tener dos cifras.

3.° Reducir á complejo el número 30743,8305783 Hm^3.

Dividiendo este número en períodos de tres cifras, puesto que *mil* unidades de cada especie componen *una* de la siguiente, tendremos:

$$30743{,}8305783\ Hm^3. = 30\ Km^3.\ 743\ Hm^3.\ 830\ Dm^3.\ 578\ m^3.\ 300\ dm.$$

También debemos observar que cuando el número de cifras decimales no es múltiplo de *tres,* hay que hacer que lo sea poniendo ceros á la derecha; pues el divisor siguiente al penúltimo lo ha de formar siempre las *milésimas* de éste.

Cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos.

253. Como la conversión de los números métricos complejos á incomplejos es tan fácil y se obtiene con tanta prontitud, el cálculo de las cuatro operaciones fundamentales con números métricos complejos se reduce á la de números enteros ó decimales concretos; así,

254. *Para sumar números métricos complejos ó incomplejos, se*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

reducen á incomplejos de una misma especie y se efectúa la suma de los enteros ó decimales que resulten.

EJEMPLOS. 1.º Sumar los números 32,346 *Kg.*; 426,32 *g.* 0,8357 *Qm.*; 42,15 *Dg.*

Reduciendo estos números á una misma especie, á *gramos,* por ejemplo, se tendrán los números 32346 *g.*; 426,32 *g.*; 83570 *g.*; 421,5 *g.*, que, sumados, nos dan:

32346 *g.*
426,32
83570
421,5
116763,82 *g.*

Luego la suma de los números dados es 116763,82 *g.*, que equivale á 1 *Qm.* 16 *Kg.* 76 *Dg.* 3 *g.* 82 *cg.*

2.º Sean los números que han de sumarse 12 *Kl.* 18 *Dl.* 24 *cl.*; 133 *Dl.* 18 *dl.*; 3 *Dl.* 18 *cl.*; 8 *Hl.* 12 *l.*

Reducidos á *centilitros,* se tiene:

12 *Kl.* 18 *Dl.* 24 *cl.* = 1218024 *cl.*
133 *Dl.* 18 *dl.* = 133180
3 *Dl.* 18 *cl.* = 3018
8 *Hl.* 12 *l.* = 81200
Suma pedida..... 1435422 *cl.* = 14 *Kl.* 35 *Dl.* 4 *l.* 22 *cl.*

255. *Para restar números métricos complejos ó incomplejos, se reducen á incomplejos de una misma especie y se restan los números que resulten.*

EJEMPLOS. 1.º Restar de 347,36 Dm^2.; 468,38 m^2.

Reduciendo el minuendo á *metros cuadrados,* que es á lo que está referido el sustraendo, y restando, se tendrá:

347,36 Dm^2. = 34736 m^2.
468,38 m^2. = 468,38
Resta... = 34267,62 m^2. = 342 Dm^2. 67 m^2 62 dm^2.

2.º Del número complejo 3 *Km.* 18 *Dm.* 34 *dm.* se quiere restar 18 *Hm.* 15 *m.* 32 *mm.*

Reduciendo ambos á *milímetros,* y restando, se tendrá:

3 *Km.* 18 *Dm.* 34 *dm.* = 3183400 *mm.*
18 *Hm.* 15 *m* 32 *mm.* = 1815032
Resta..... 1368368 *mm.* = 13 *Hm.* 68 *m.* 368 *mm.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

256. *Para multiplicar números métricos complejos ó incomplejos, se reduce el multiplicando, que es el de la especie que se busca en el problema, á incomplejo de una cualquiera de sus especies, y el multiplicador á incomplejo de la unidad cuyo valor se conoce, y se multiplican los números que resulten. El producto será de la misma especie que el multiplicando.*

EJEMPLOS. 1.° Un kilolitro pesa 13 *Qm.* 18 *Dg.* 39 *cg.*; ¿cuánto pesarán 27 *Dl.* 32 *dl.*?

Reduciendo el multiplicando á *centigramos*, por ejemplo, y el multiplicador á la especie cuyo peso se da, que es el kilolitro, y multiplicando, se tendrá:

13 *Qm.* 18 *Dg.* 39 *cg.* = 13001 8039 *cg.*
27 *Dl.* 32 *dl.* = 0,2732 *Kl.*

26003 6078
390054 117
9101262 73
26003607 8

Peso de 27 *Dl.* 32 *dl.*.. 35520928,2548 *cg.*,

ó lo que es le mismo, 3 *Qm.* 55 *Kg.* 209 *g.* 28,2548 *cg.*

2.° Un *metro* vale 16 *rs.* 42 *c.*; ¿cuánto costarán 3 *Dm.* 47 *cm.*?

Reduciendo el multiplicando á *reales* y el multiplicador á *metros*, que es la unidad cuyo valor se conoce, y multiplicando, se tiene:

16 *rs.* 42 *c.* = 16,42 *rs.*
3 *Dm.* 47 *cm.* = 30,47 *m.*

1 1494
6 568
492 6

Valor de 3 *Dm.* 47 *cm.* 500,3174 *rs.* = 500 *rs.* 32 *c.* próxim.

357. *Para dividir números métricos complejos ó incomplejos, se reducen á una misma especie si son de igual naturaleza, y el cociente abstracto que resulta de dividir estos números, es el que se pide. Si el dividendo y divisor son de naturaleza distinta, se reduce el dividendo á incomplejo de cualquiera de sus especies, y el divisor á la especie de unidades cuyo valor se busca; el cociente de estos dos números será el que se pide, expresado en unidades de la especie que indica el dividendo.*

EJEMPLOS. 1.° Un *decalitro* pesa 6 *Kg.* 18 *g.*; ¿cuántos *decalitros* contendrá una carga que pesa 13 *Qm.* 42 *Dg.*?

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Reduciendo á *gramos* el dividendo y el divisor, y efectuando la división, se tendrá:

```
1300420 | 6018
 9682   | 216,0884
 36640
   53200
    50560
     24160
       88
```

Luego dicha carga contendrá 216 *Dl.* 884 *ml.*

2.° El valor de 3 *Dm.* 47 *cm.* es 500 *rs.* 32 *c.*; ¿cuánto costará un *metro*?

Reduciendo el dividendo á *reales* y el divisor á *metros,* unidad cuyo valor se busca, y efectuando la división, se tiene (200):

```
50032 | 3047
19562 | 16,42
 12800
  6120
    26
```

Luego el valor de un metro es 16 *rs.* 42 *c.*, próximamente.

LECCIÓN XXIX

Relaciones entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y las del sistema nuevo métrico decimal.—Relaciones entre las unidades del nuevo sistema métrico decimal y las del antiguo sistema de pesas y medidas.—Reducción de unidades del sistema antiguo de pesas y medidas á unidades métricas, y al contrario.

Relaciones entre las unidades del sistema antiguo de pesas y medidas y las del sistema nuevo métrico decimal.

258. Las relaciones que están dadas por la comisión de pesas y medidas, y debidamente autorizadas por el gobierno, son las siguientes:

(c) Instituto Cervantes de Madrid

MEDIDAS DE LONGITUD

Una *legua* equivale á 5,572700 *Km.*=5572,70 *m.*
Un *estadal* á..... 0,334362 *Dm.* 334,362 *cm.*
Una *braza* á..... 0,167181 *Dm.*=167,181 *cm.*
Una *vara* á..... 0,835905 *m.*=835,905 *mm.*
Un *pie* á..... 0,278635 *m.*=278,635 *mm.*
Una *pulgada* á..... 0,023220 *m.*=23,220 *mm.*
Una *línea* á..... 0,001935 *m.*=1,935 *mm.*
Un *punto* á..... 0,000161 *m.*=0,161 *mm.*
Un *palmo* á..... 0,208976 *m.*=208,976 *mm.*
Un *dedo* á... ..... 0,017414 *m.*=17,414 *mm.*

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Una *legua cuadrada* equivale á 31,054985 Km^2.
Una *fanega superficial* á..... 0,64395617 *Ha.*=6439,5617 m^2.
Una *aranzada* á..... 0,447192 *Ha.*=4471,92 m^2.
Un *celemín superficial* á..... 0,05366301 *Ha.*=536,6301 *m.*
Un *cuartillo superficial* á..... 1,341575 *a.*=134,1575 m^2.
Un *estadal cuadrado* á..... 0,111798 *a.*=11,1798 m^2.
Una *vara cuadrada* á..... 0,698737 m^2.=6987,37 cm^2.
Un *pie cuadrado* á..... 0,077637 m^2.=776,37 cm^2.
Una *pulgada cuadrada* á..... 0,000539 m^2.=5,39 cm^2.
Una *línea cuadrada* á..... 0,03 cm^2.=3mm^2.

MEDIDAS DE VOLUMEN

Una *vara cúbica* equivale á 0,5840777 m^3. ó *esterios.*
Un *pie cúbico* á 0,0216325 m^3.=0,216325 *decisterios.*

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos.

Un *cahíz* equivale á 0,666012 *Kl.*=666,012 *l.*
Una *fanega* á..... 0,055501 *Kl.*=55,501 *l.*
Un *celemín* á..... 0,462508 *Dl.*=462,508 *cl.*
Un *cuartillo* á..... 0,115627 *Dl.*=115,627 *cl.*

Para líquidos, á excepción del aceite.

Un *moyo* equivale á 0,25813 *Kl.*=258,13 *l.*
Una *cántara* á..... 0,016133 *Kl.*=16,133 *l.*
Una *azumbre* á..... 0,20166 *Dl.*=2,0166 *l.*=20,166 *dl.*
Un *cuartillo* á..... 0,50414 *l.*=50414 *dl.*
Una *copa* á..... 0,126 *l.*=1,26 *dl.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Para aceite.

Una *arroba* equivale á 0,012563 *Kl.*=12,563 *l.*
Una *libra* á..... 0,50252 *l.*=5,0252 *dl.*
Una *panilla* á..... 0,12563 *l.*=1,2563 *dl.*

MEDIDAS DE PESO

Una *tonelada de peso* antigua equivale á 0,920186 *toneladas* modernas
Un *quintal* antiguo á 0,460093 *Qm.*=46,0093 *Kg.*
Una *arroba* á..... 0,115023 *Qm.*=11,5023 *Kg.*=11502,3 *g.*
Una *libra* á..... 0,460093 *Kg.*=460,093 *g.*
Una *onza* á..... 0,28756 *Hg.*=2,8756 *Dg.*=28,756 *g.*
Un *adarme* á..... 1,79724 *g.*=17,9724 *dg.*=179,724 *cg.*
Un *tomín* á..... 0,599079 *g.*=5,99079 *dg.*=59,9079 *cg.*
Un *grano* á..... 0,049923 *g.*=0,49923 *dg.*=4,9923 *cg.*
Una *libra* médica á.. 0,34507 *Kg.*=3,4507 *Hg.*=345,07 *g.*
Una *onza* á..... 0,28756 *Hg.*=2,8756 *Dg.*=28,756 *g.*
Una *dracma* á..... 3,594 *g.*=35,94 *dg.*
Un *escrúpulo* á..... 1,198159 *g.*=11,98159 *dg.*
Un *grano* á..... 0,49923 *dg.*=4,9923 *cg.*

Relaciones entre las unidades del nuevo sistema métrico decimal y los del antiguo sistema de pesas y medidas.

MEDIDAS DE LONGITUD

Un *milímetro* equivale á 0,003588924 *ps.*=0,51685 *lín.*
Un *centímetro* á..... 0,03588924 *ps.*=0,43067088 *pulg.*
Un *decímetro* á..... 0,3588924 *ps.*=4,3067088 *pulg.*
Un *metro* á..... 1,196308 *vs.*=3,588924 *ps.*
Un *decámetro* á..... 11,96308 *vs.*=430,67088 *pulg.*
Un *hectómetro* á..... 119,6308 *vs.*=4306,7088 *pulg.*
Un *kilómetro* á..... 0,1794462 *leg.*=3588,924 *ps.*
Un *miriámetro* á..... 1,794462 *leg.*=35889,24 *ps.*

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Un *milímetro cuadrado* equivale á 0,267083 *lín. cuad.*
Un *centímetro* á 0,1854749 *pulg. c.*=26,7083 *lín. c.*
Un *decímetro.* á 0,0143115 *v. c.*=18,54749 *pg. c.*
Un *metro* á.... 1,431153 *v. c.*=1854,749 *pg. c.*
Un *decámetro* á 8,9447 *est. c.*=1288,037961 *p. c.*
Un *hectómetro* á 894,47 *est. c.*=128803,7961 *p. c.*
Un *kilómetro* á 89447,08 *est. c.*=1288037961 *p. c.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Una *centiárea* á 0,000155 *f. s.*=0,08944708 *est. c.*
Una *área* á.... 0,015529 *f. s.*=8,944708 *est. c.*
Una *hectárea* á 1,5529 *f. s.*=894,4708 *est. c.*

MEDIDAS DE VOLUMEN

Un *milímetro cúbico* equivale á 0,138 *líneas cúbicas.*
Un *centímetro* á..... 0,079 *pulgadas cúbicas.*
Un *decímetro* á..... 0,046 *pies cúbicos.*
Un *metro* á..... . 1,712 *varas cúbicas.*
Un *decámetro* á..... 1712,1 *varas cúbicas.*

MEDIDAS DE CAPACIDAD

Para áridos.

Un *litro* equivale á 0,01801769 *f.*=0,864849 *cuart.*
Un *decalitro* á .... 0,1801769 *f.*=8,64849 *cuart.*
Un *hectolitro* á.... 1,801769 *f.*=86,4849 *cuart.*
Un *kilolitro* á..... 18,01769 *f.*=864,849 *cuart.*

Para líquidos, á excepción del aceite.

Un *litro* equivale á 0,061985 *ar.*=1,98351 *cuart.*
Un *decalitro* á..... 0.61985 *ar.*=19,8351 *cuart.*
Un *hectolitro* á..... 6,1985 *ar.*=198,351 *cuart.*

Para aceite.

Un *decilitro* equivale á 0,198997 *lb.*=0,795988 *panillas.*
Un *litro* á..... 1,989971 *lb.*=7,959884 *p.*
Un *decalitro* á ..... 19,89971 *lb.*=79,59884 *p.*
Un *hectolitro* á..... 7,959884 *ar.*=198,9971 *l.*
Un *kilolitro* á..... 79,59884 *ar.*=1989,971 *l.*

MEDIDAS DE PESO

Un *miligramo* equivale á 0,02 *granos.*
Un *centigramo* á..... 0,2 *granos.*
Un *decigramo* á..... 0,0556 *adarmes*=2 *granos.*
Un *gramo* á..... .. 0,035 *onzas*=0,556 *adarmes.*
Un *decagramo* á ..... 0,022 *lib.*=0,35 *onzas*=5,56 *ad.*
Un *hectogramo* á..... 0,2173 *lib.*=3,5 *onzas*=55,6 *ad.*
Un *kilogramo* á. ..... 2,173474 *libras.*
Un *quintal métrico* á.... 8,694 *arrobas*=217,3474 *libras.*
Una *tonelada* nueva á... 86,94 *arrobas*=2173,474 *libras.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Reducción de unidades del sistema antiguo de pesas y medidas á unidades métricas, y al contrario.

259. Por medio de las mutuas relaciones que anteriormente hemos escrito, y cálculos muy sencillos de multiplicar ó partir, podremos reducir un número complejo ó incomplejo de unidades del sistema antiguo á unidades del sistema nuevo métrico decimal, y al contrario.

Sea, por ejemplo, el número 3 *varas*, 2 *pies*, 7 *pulgadas*, el cual queremos reducir á unidades métricas.

Como una *vara* equivale á 0,835905 *metros*.
3 *varas* equivaldrán á..... 0,835905×3=2,507715 *metros*.
Un *pie* equivale á..... 0,278636 *m*.
2 *pies* equivaldrán á..... 0,278636×2=0,557272 *metros*.
Una *pulgada* equivale á.. 0,023220 *m*.
7 *pulgadas* equivaldrán á .. 0,023220×7=0,162540 *metros*.

Luego 3 *varas*, 2 *pies*, 7 *pulg.*, equivalen á 3,227527 *metros*, ó lo que es igual 3 *v*. 2 *p*. 7 *pg*.=3 *m*. 2 *dm*. 2 *cm*. 7,527 *mm*.

Sea, por segundo ejemplo, reducir 5 *m*. 72 *cm*. á unidades del sistema antiguo.

Un *metro* equivale á.... 3,5889 *pies*.
5 *metros* equivaldrán á.... 3,5889×5=17,9445 *pies*.
Un *centímetro* equivale á 0,035889 *pies*.
72 *centímetros* equivaldrán á 0,03589 × 72= $\left\{\begin{array}{l}0,07178\\2,5123\end{array}\right\}$ *pies*.

Luego 5 *m*. 72 *cm*. equivalen á 20,52858 *pies*,
ó, lo que es lo mismo, 5 *m*. 73 *cm*.=6 *var*., 2 *pies*, 6 *pg*., 41 *p*.

260. Cuando en un problema de números concretos se den unidades de ambos sistemas, se reducen primero á unidades de uno de ellos, y se resuelve el problema; el resultado se expresa en unidades del sistema que se pida.

EJEMPLO. 3 *var*., 2 *ps*., 7 *pulg*, han costado 86 *rs*. y 27 *c*.; ¿cuánto costarán 5 *m*. y 6 *dm*.?

Para resolver este problema, principiaremos por reducir el número 3 *vr*., 2 *ps*., 7 *pulg*. á unidades métricas, y hallaremes (257, primer EJEMPLO) 3 *vr*., 2 *ps*., 7 *pulg*.=3,227527 *m*.

El número 5 *m*. 6 *dm*. es igual á 5,6 *m*.; luego el problema queda

(c) Instituto Cervantes de Madrid

reducido á determinar el valor de 5,6 *m.* sabiendo que 3,227527 *m.* han costado 86,27 *rs.*

Dividiendo 86,27 *rs.* por 3,227527, hallaremos el valor de un *metro,* y multiplicando este valor por 5,6, tendremos el resultado pedido, el cual es 149 *rs.* 70 *c.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

QUINTA PARTE

POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS NÚMEROS

LECCIÓN XXX

Potencias en general de los números.

Potencias en general de los números.

261. Ya hemos dicho (46) que *potencia* de una cantidad es el resultado de repetir dicha cantidad como factor un cierto número de veces: denominándose *segunda* potencia ó *cuadrado* si se toma *dos* veces por factor, *tercera* ó *cubo* si *tres, cuarta* potencia si *cuatro,* y en general *enésima* potencia si se toma *n* veces por factor.

Inútil es advertir que al decir *potencia* de una *cantidad* se entiende que es del *número abstracto* que expresa la relación de dicha cantidad á su unidad, pues como ya sabemos (48), carecería de todo sentido el resultado que se obtiene de elevar una cantidad cualquiera á una potencia.

La operación que tiene por objeto hallar una potencia cualquiera de un número, toma el nombre de *elevación á potencias.*

De esta definición se deduce que todo número está elevado á su *primera potencia;* luego la *primera potencia de todo número es el mismo número.*

262. *Para elevar un número á la* SEGUNDA *potencia ó* CUADRADO, *se multiplica dicho número por sí mismo; para elevarle á la* TERCERA *potencia ó* CUBO, *se forma un producto de tres factores iguales al número dado; y en general, para elevar un número á la* ENÉSIMA *potencia, se forma un producto de* n *factores iguales al número propuesto.*

Así, 5 elevado á la segunda potencia ó cuadrado, será:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Del mismo modo se tendrá que 5 elevado á la tercera potencia ó cubo, será $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 25 \times 5 = 125$.

Donde vemos que 25 es el *cuadrado* ó *segunda* potencia de 5, y 125 el *cubo* ó *tercera* potencia del mismo número 5.

Es necesario no confundir el *duplo* de un número con su *cuadrado* ó *segunda* potencia, ni el *cubo* ó *tercera* potencia de un número con su *triplo*, pues son cosas muy distintas.

263. *Toda potencia de un número entero es también un número entero.*

En efecto; el producto de varios números enteros es siempre un número entero.

264. *El producto de dos ó más potencias de un número es igual á una potencia del mismo número, cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores.*

Sea el producto de las potencias, a^m, a^n y a^r del número a.

Tendremos, según la definición:

$a^m = aaaa$ ..... repetida m veces,
$a^n = aaaa$ ..... repetida n veces,
$a^r = aaaa$ ..... repetida r veces,

de donde se deduce:

$$a^m \times a^n \times a^r = aaaa \ldots \times aaaa \ldots \times aaaa \ldots$$

ó lo que es lo mismo

$$a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n+r},$$

que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *Para elevar una potencia de un número á otra potencia, se multiplica el exponente de la primera por el de la segunda.*

En efecto; supongamos que se quiere elevar la potencia a^m á la *enésima* potencia; se tendrá:

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \ldots \text{repetido } n \text{ veces},$$

ó lo que es lo mismo, según el principio anterior,

$$(a^m)^n = a^{m+m+m+\ldots} = a^{m \times n},$$

que es lo que se quería demostrar.

265. *El cociente de dos potencias de un número es igual á una potencia del mismo número, cuyo exponente es la diferencia de los expo-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

nentes de las potencias dadas á la unidad ó á unà fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador una potencia del número cuyo exponente es la diferencia de exponentes del dividendo y divisor, según que el exponente del dividendo sea mayor, igual ó menor que el exponente del divisor.

Sea el cociente de las dos potencias a^n y a^m del número a.

Supongamos en primer lugar $n > m$. Tendremos:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{aaaa\ldots}{aaaa\ldots} \qquad [1];$$

y dividiendo ambos términos de la segunda fracción por a todas las veces que se pueda, lo que no altera su valor (155-3.°), se tendrá por resultado una fracción que tiene por numerador una potencia de a cuyo exponente es la diferencia de los exponentes n y m, y por denominador la unidad; luego

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^{n-m}}{1} = a^{n-m},$$

que es lo primero que se quería demostrar.

Sea en segundo lugar $n = m$.

El cociente $\frac{a^n}{a^m}$ se reduce á la *unidad;* porque siendo $n = m$, el dividendo es igual al divisor; y, por consiguiente, será:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^m}{a^m} = 1,$$

que es lo segundo que se quería demostrar.

Sea, por último, $n < m$.

Simplificando la segunda fracción de la igualdad [1], que nos expresa el valor del cociente de a^n por a^m, hallaremos por resultado otra fracción que tendrá por numerador la unidad y por denominador una potencia de a cuyo exponente será la diferencia de los exponentes m y n; de modo que se tendrá, en el caso de ser $n<m$,

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}},$$

que es lo tercero que se quería demostrar.

266. *Para elevar un producto á una potencia, se elevan sus fac-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tores á esta potencia, ó, lo que es lo mismo, *la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores*.

Sea *abcd* el producto cuya *enésima* potencia queremos hallar.

Según la definición de potencia, se tiene:

$$(abcd)^n = abcd \times abcd \times abcd \ldots \text{repetido } n \text{ veces},$$

ó lo que es lo mismo, puesto que el orden de factores no altera el producto,

$$(abcd)^n = aaa \ldots bbb \ldots ccc \ldots ddd \ldots = a^n b^n c^n d^n,$$

que es lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. Si alguno de los factores fuese una cierta potencia, se hallaría la de éste (264 *cons.*) multiplicando los exponentes.

Así:

$$(ab^n c)^m = a^m b^{nm} c^m.$$

En efecto;

$$(ab^n c)^m = a^m \times (b^n)^m \times c^m = a^m b^{nm} c^m.$$

CONSECUENCIA. *Si un número entero es una potencia exacta de otro, los exponentes de los factores primos en que se puede descomponer el primero son equimúltiplos de los exponentes de los factores primos del segundo.*

Porque dichos exponentes se obtienen, según lo expuesto anteriormente, multiplicando los de los factores primos del número que se quiere elevar por el exponente de la poteneia.

De aquí se deduce que si un número entero es divisible por un número primo cualquiera, no podrá ser una potencia exacta de un cierto grado, si no es divisible también por la potencia del mismo grado de dicho número primo.

De esta consecuencia, y de la fórmula que da (141) el número de factores simples y compuestos de un número N, se deduce que si el número de estos factores es par, N no podrá ser cuadrado perfecto.

267. *Para elevar un cociente á una potencia, se elevan el dividendo y divisor á dicha potencia*, ó, lo que es lo mismo, *la potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y divisor*.

Sea $\frac{a}{b} = Q$, de donde $a = b\,Q$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Elevando á la *enésima* potencia, se tendrá (266):

$$a^n = b^n Q^n;$$

y dividiendo por b^n,

$$\frac{a^n}{b^n} = Q^n;$$

luego

$$Q^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},$$

que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *Para elevar una fracción á una potencia, se elevan sus dos términos á dicha potencia.*

Esta consecuencia puede demostrarse directamente fundándose en la definición.

En efecto; la *enésima* potencia de la fracción $\frac{a}{b}$, se hallará formando un producto de n factores iguales á dicha fracción.

Así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots = \frac{aaa\ldots}{bbb\ldots} = \frac{a^n}{b^n},$$

que es lo que se quiere demostrar.

268. *Toda potencia de una fracción irreducible, es otra fracción irreducible.*

Sea la fracción irreducible $\frac{a}{b}$; elevándola á la *enésima* potencia, se tendrá:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Como los números a y b son primos entre sí (158), sus *enésimas* potencias también lo serán (133-2.ª); y, por consiguiente, la fracción $\frac{a^n}{b^n}$ será irreducible, que es lo que se quería demostrar.

269. *Una fracción irreducible no puede ser una potencia exacta de un cierto grado, si sus dos términos no son potencias del mismo grado.*

Sea una fracción irreducible $\frac{A}{B}$ y $\frac{a^n}{b^n}$ la *enésima* potencia de otra fracción $\frac{a}{b}$, también irreducible. Siendo los dos números a y b primos entre sí, sus potencias también lo serán, y, por con-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

siguiente, la fracción $\frac{a^n}{b^n}$ es irreducible.

Ahora bien: las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{a^n}{b^n}$, siendo irreducibles, no pueden ser iguales, si no son idénticas (159); luego es necesario que se tenga $A = a^n$ y $B = b^n$, que es lo que se quería demostrar.

270. *Las potencias de un número mayor que la unidad van creciendo á medida que aumenta el exponente, y pueden ser mayores que cualquier cantidad, por grande que sea, ó lo que es lo mismo, tienen por límite infinito.*

Que las potencias de un número mayor que la unidad van aumentando á medida que aumenta el exponente, se deduce inmediatamente de la definición de multiplicar; porque si el multiplicador es mayor que la unidad, el producto será mayor que el multiplicando: luego la segunda potencia de un número mayor que la unidad será mayor que este número, el cubo será mayor que el cuadrado, la cuarta potencia será mayor que la tercera, y así sucesivamente.

Lo que falta demostrar es que la *enésima* potencia de un número mayor que la unidad puede ser, dando á n un valor suficientemente grande, mayor que una cantidad dada, por grande que sea.

Representemos por N un número mayor que la unidad, y por E el exceso de N á dicha unidad.

Se tendrá $N = 1 + E$, ó lo que es lo mismo,

$$N - 1 = E \qquad [1].$$

Multiplicando el primer miembro de esta igualdad por N, número mayor que la unidad, según la hipótesis, se tendrá evidentemente:

$$N^2 - N > E \qquad [2].$$

Del mismo modo se verá que con más razón se verifica:

$$N^3 - N^2 > E \qquad [3]$$
$$N^4 - N^3 > E \qquad [4]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N^n - N^{n-1} > E \qquad [n].$$

Sumando las relaciones [1], [2], [3]... [n], y haciendo la reducción y destrucción, se tendrá, evidentemente:

$$N^n - 1 > En \quad \text{ó} \quad Nn > E^n + 1.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Ahora bien: si representamos por C una cantidad tan grande como queramos, y hacemos

$$En+1>C, \quad \text{ó} \quad En>C-1,$$

para lo cual basta dar á n un valor mayor que $\frac{C-1}{E}$, tendremos que, siendo $N^n>En+1$, y $En+1>C$, con más razón se tendrá

$$N^n>C;$$

luego podremos dar á n un valor tal que haga que la potencia *enésima* de un número N mayor que la unidad, sea mayor que una cantidad C, por grande que esta sea, que es lo que faltaba demostrar.

* 271. *Las potencias de un número menor que la unidad van decreciendo á medida que aumenta el exponente, y pueden ser menores que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.*

De la definición de multiplicar se deduce inmediatamente que la segunda potencia de un número menor que la unidad es menor que este número, que la tercera potencia es menor que la segunda, y así sucesivamente.

Ahora nos falta probar que la *enésima* potencia de un número menor que la unidad puede ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que esta sea, dando á n un valor suficientemente grande.

Sea N un número menor que la unidad, que podrá representarse por una fracción $\frac{1}{N'}$ siendo $N'>1$, para lo cual no hay más que dividir la unidad por el número N y llamar N′ al cociente, en cuyo caso

$$NN'=1 \quad \text{ó} \quad N=\frac{1}{N'}.$$

Esto supuesto, si elevamos cualquiera de estas igualdades á la potencia n, tendremos:

$$N^nN'^n=1 \quad \text{ó} \quad N^n=\frac{1}{N'^n}.$$

Ahora bien: si hacemos $\frac{1}{N'^n}<\frac{1}{C}$, para lo cual basta que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$N'^n > C$, lo que es posible, puesto que N′ es mayor que 1, se tendrá:

$$N^n < \frac{C}{1};$$

luego podremos dar á *n* un valor tal que haga que la potencia *enésima* de un número N menor que la unidad, sea menor que una cantidad dada $\frac{1}{C}$, por pequeña que sea, que es lo que faltaba demostrar.

LECCIÓN XXXI

Formación del cuadrado de los números enteros.—Extracción de la raíz cuadrada de los números enteros.

Formación del cuadrado de los números enteros.

272. Ya hemos dicho que raíz de un número es otro que, elevado á una cierta potencia, nos reproduce el primero; y que esta raíz se denomina *segunda* ó *cuadrada, tercera* ó *cúbica, cuarta,* y en general *enésima,* según que la potencia á que haya de elevarse dicha raíz para reproducir el número propuesto sea la *segunda, tercera, cuarta* ó *enésima.* También hemos visto ya los principios más importantes de las potencias en general de los números. Ahora nos ocuparemos en particular de la formación del cuadrado de los números enteros, para deducir de ella la regla de la operación inversa que tiene por objeto, dado un número, hallar su raíz; lo que se conoce con el nombre de extracción de la raíz cuadrada de un número.

273. De la definición de potencia se deduce que, para elevar un número al cuadrado, basta multiplicarle por sí mismo; y, por consiguiente, los cuadrados de los diez primeros números son:

Números...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados..	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.

Como el cuadrado de otro número entero cualquiera se obtiene también multiplicando dicho número por sí mismo, la cifra de sus unidades será una de las en que terminan los cuadrados anteriores; por consiguiente, todo número cuya cifra de las unidades sea

(c) Instituto Cervantes de Madrid

2, 3, 7 ú 8, no podrá ser cuadrado perfecto; pero no se vaya á creer que lo será el número que termina en alguna de las cifras 1, 4, 5, 6, 9 ó 0, que son en los que terminan los cuadrados de los nueve primeros números.

Del principio (266) se deduce que todo número divisible por un factor primo no podrá ser un cuadrado perfecto si no es divisible también por el cuadrado de dicho número primo: y en general, si un número es divisible por una potencia impar de un factor primo, no podrá ser cuadrado perfecto dicho número, si no es divisible también por la potencia par inmediata superior. Así, todo número par que no sea divisible por 4, no podrá ser un cuadrado perfecto, y todo número que termine en ceros no podrá ser tampoco un cuadrado perfecto, como éstos no sean en número par: en efecto; si terminase en un número impar de ceros, los factores 2 y 5, ó uno por lo menos, vendría elevado á una potencia de grado impar, y, por consiguiente, el número no puede ser cuadrado perfecto (266 *cons.*)

274. *El cuadrado de un número descompuesto en dos sumandos se forma de la suma de tres partes: cuadrado del primer sumando, duplo del primero por el segundo, y cuadrado del segundo.*

Sea N un número descompuesto en dos sumandos a y b; de modo que se tiene $N = a + b$; y por consiguiente,

$$N^2 = (a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2,$$

ó lo que es lo mismo,

$$N^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

De aquí se deduce que todo número que termine en 5, no puede ser cuadrado perfecto si la cifra de las decenas no es 2.

En efecto; la raíz de todo número que termina en 5 debe terminar también en esta cifra; de modo que representando D por las decenas de un número cuya cifra de las unidades es 5, se tendrá que el cuadrado de dicho número es

$$(D.10+5)^2 = D^2.100 + 2.5.D.10 + 25 =$$
$$(D.10+5)^2 = D^2.100 + D.100 + 25 = (D^2 + D)\,100 + 25;$$

lo que prueba que si un número termina en 5, su cuadrado terminará en 25.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

275. *La diferencia de los cuadrados de dos números diferentes en una unidad, es el duplo del número menor más la unidad.*

En efecto; sean los números d y $d+1$ cuyos cuadrados respectivos son d^2 y $(d+1)^2$, y, por consiguiente, su diferencia será:

$$(d+1)^2 - d^2 = d^2 + 2d + 1 - d^2 = 2d + 1,$$

que es lo que se quería demostrar:

De aquí se deduce: 1.°, que los cuadrados de los números enteros consecutivos se van diferenciando cada vez más, á medida que dichos números aumentan; 2.°, que si al cuadrado de un número se le añade una cierta cantidad menor que el duplo de dicho número más la unidad, el resultado será menor que el cuadrado del número entero siguiente; y 3.°, que si se tiene el cuadrado de un número entero, se obtendrá el cuadrado del número siguiente aumentando al primero el duplo de dicho número más la unidad.

Extracción de la raíz cuadrada de los números enteros.

276. La extracción de la raíz cuadrada es el análisis de la elevación al cuadrado, y tiene por objeto, dado un número, hallar otro que elevado á la segunda potencia reproduzca el primero. El número que se da se considera como una potencia cuya raíz es el número que se busca.

La extracción de la raíz cuadrada sabemos que se indica con el signo $\sqrt{}$ llamada *radical*, bajo del cual se pone la cantidad cuya raíz queremos hallar.

Se dice que un número entero es un cuadrado perfecto, cuando hay otro número entero que, elevado á la segunda potencia, reproduce el primero.

277. *La raíz cuadrada de un número entero que no es un cuadrado perfecto, es un número inconmensurable.*

En efecto; dicha raíz no puede ser entera, porque el número no es cuadrado perfecto. Tampoco puede ser fraccionaria, porque ninguna fracción elevada al cuadrado nos puede dar un número entero (268). No pudiendo ser esta raíz un número entero ni fraccionario, será inconmensurable, según queríamos demostrar.

Raíz cuadrada entera de un número que no es cuadrado perfecto, es el mayor número entero cuyo cuadrado se puede restar del número dado.

En la extracción de la raíz cuadrada de un número entero dis-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tinguiremos dos casos: 1.°, que el número cuya raíz queremos hallar no pase de 100; y 2.°, que sea mayor que 100.

Para extraer la raíz cuadrada de un número menor que 100, conviene saber de memoria los cuadrados de los nueve primeros números (273); porque el número que se nos dé será, ó uno de estos cuadrados, en cuyo caso su raíz es conocida, ó estará comprendido entre dos, y, por lo tanto, su raíz lo estará entre las de estos números; de modo que, tomando por raíz la del cuadrado menor, se tendrá la raíz entera del número propuesto, que se diferenciará de la verdadera en menos de una unidad. Así, la raíz de 64 es 8, y la de 50 es 7, puesto que 50 está comprendido entre 49 y 64, cuyas raíces respectivas son 7 y 8; luego la raíz entera de 50 es 7.

278. La extracción de la raíz cuadrada de un número mayor que 100 está fundada en los dos principios siguientes:

PRIMERO. *La raíz cuadrada entera de las centenas de un número es exactamente igual á las decenas de la raíz de dicho número.*

Sea N un número y N′ sus centenas; representemos por d las decenas de la raíz cuadrada de N, y por u todo lo que falta á la raíz, que podrá ser un número entero ó inconmensurable, pero menor que 10, según que N sea ó no un cuadrado perfecto; de modo que se tendrá

$$N = (d \,.\, 10 + u)^2 = d^2 \,.\, 100 + 2d \,.\, 10 \,.\, u + u^2;$$

siendo N′ el número de centenas de N, será

$$N' = \text{ó} < d^2 + \frac{2d \,.\, 10 \,.\, u + u^2}{100};$$

y como u es siempre menor que 10, se tendrá:

$$\frac{2d \,.\, 10 \,.\, u + u^2}{100} < \frac{2d \,.\, 100 + 100}{100} = 2d + 1;$$

y, por consiguiente, $N' < d^2 + 2d + 1 = (d + 1)^2$.

Pero evidentemente se tiene $N' = \text{ó} > d^2$; luego siendo $N', = \text{ó} > d^2$ y $< (d + 1)^2$, su raíz cuadrada será d ó estará comprendida entre d y $d + 1$, y por lo tanto, la raíz entera de las centenas N′ del número N será igual á las decenas d de la raíz cuadrada de dicho número N, que es lo que se quería demostrar.

Este principio se suele demostrar también del modo siguiente: representando por d las decenas de la raíz del número N, se ten-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

drá evidentemente $N = ó > d^2 . 100$ y $N, < (d+1)^2 . 100$; por consiguiente, el número N′ de centenas de N es por lo menos igual á d^2 y menor que $(d+1)^2$; luego $\sqrt{N'}$ está comprendida entre d y $d+1$, y, por lo tanto, la parte entera de la raíz de N′, que son las centenas del número N, es igual á las decenas d de la raíz cuadrada de dicho número.

SEGUNDO. *Si de un número* N *se resta el cuadrado de las decenas de su raíz cuadrada y se divide el número de decenas del resto por el doble de la raíz hallada, el cociente que se obtenga será igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raíz.*

En efecto; sea N un número, d las decenas de su raíz cuadrada, y u el número que falta para completar la raíz, cuyo número podrá ser entero ó inconmensurable, según que N sea ó no un cuadrado perfecto: de modo que se tendrá:

$$N = (d . 10 + u)^2 = d^2 . 100 + 2d . 10 . u + u^2.$$

Restando de estas dos cantidades iguales el cuadrado de las decenas $d^2 . 100$, será

$$N - d^2 100 = 2d . 10 . u + u^2;$$

y representando por D las decenas de $N - d^2 . 100$, tendremos $D = ó > 2du$, según que u^2 contenga ó no decenas; luego

$$\frac{D}{2d} = ó > u,$$

que es lo que se quería demostrar.

Probados estos dos principios, pasemos á la extracción de la raíz cuadrada, exacta ó aproximada en menos de una unidad, de un número mayor que 100.

279. *Para extraer la raíz cuadrada, exacta ó aproximada por defecto en menos de una unidad de un número mayor que* 100, *se divide primero el número en secciones ó períodos de dos cifras empezando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda no tenga más que una; se halla la raíz cuadrada entera de dicho período de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raíz; se eleva dicha cifra al cuadrado, y éste se resta del primer período de la izquierda.*

Al lado de la resta se baja el siguiente período, y del número que resulta se separa con una coma la primera cifra de la derecha, se di-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

vide lo que queda á la izquierda por el duplo de la raíz hallada, y el cociente entero que se obtenga será igual ó mayor que la segunda cifra de la raíz. Para comprobar si la cifra hallada es la verdadera, se pone á la derecha del duplo de la raíz, y si el producto del número que resulta por la cifra en cuestión se puede restar del resto obtenido anteriormente, seguido del segundo período, la cifra será buena; pero si no se puede restar, es señal de que es mayor, en cuyo caso se va disminuyendo de unidad en unidad, hasta que dicho producto se pueda restar.

Al lado de la nueva resta se baja el tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, hallaremos la cifra siguiente, y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raíz, que será exacta si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.

Sea 11607649 el número cuya raiz cuadrada queremos hallar; dispondremos la operación del modo siguiente:

```
√11,60,76,49 | 3407
 9           |
 ---         |   3      64      6807
 26,0        | ×3     × 4     × 7
 25 6        | ---    ---     ---
 ------      |   9     256    47649
  47,64,9    | ---------------------
  47 64 9    | 26|6      4764 |680
  ------     | 2 |4          4  7
     0       |
```

Siendo el número propuesto mayor que 100, su raiz cuadrada es mayor que 10; por consiguiente, el número de decenas de la raíz será, según el primer principio, la parte entera de la raíz del núro 116076 que resulta de separar las dos primeras cifras de la derecha.

El número 116076 también es mayor que 100; el número de decenas de su raíz cuadrada es, según el mismo principio, la parte entera de la raíz del número 1160 que resulta de separar al anterior sus dos últimas cifras de la derecha; y, por último, el número de decenas de la raíz cuadrada de 1160 será la parte entera de la raíz de 11, que según el primer caso es 3, cuyo cuadrado 9, restado de 11 nos da de residuo 2; luego lo primero que hay que hacer para extraer la raíz cuadrada de un número, es dividirle en períodos de dos cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda no tenga más que una; se halla la raíz entera de este período de la izquierda y obtendremos así la primera cifra de la raíz; se eleva dicha cifra al cuadrado, y éste se resta del primer período.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De este modo se obtiene un resto 2 que, seguido del período siguiente 60, nos da el número 260, cuyas decenas 26 divididas por el duplo 6 de la raíz hallada, que es el número de decenas de $\sqrt{1160}$, nos da un cociente entero 4, que será, según el segundo principio, igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raíz. Será mayor si la suma de las dos partes que quedan del cuadrado, que son el duplo de las decenas 3 por las unidades 4, y el cuadrado de las unidades 4^2, no se puede restar del resto 260 que se obtuvo al quitar del número 1160 el cuadrado de las 3 decenas de la raíz, y será la cifra buena si dicha suma se puede restar; pero siendo esta suma

$$2 \times 30 \times 4 + 4^2 = 60 \times 4 + 4^2 = (60 + 4) \times 4 = 64 \times 4,$$

es decir, el producto de multiplicar el número que resulta poniendo á la derecha del duplo de las decenas la cifra de las unidades por dicha cifra, se sigue que bajando al lado del resto que se obtiene al restar del primer período de la izquierda el cuadrado de la primera cifra de la raíz, separando la primera cifra de la derecha con una coma y dividiendo lo que queda á la izquierda por el duplo de la raíz hallada, el cociente que se obtiene es igual ó mayor que la segunda cifra de la raíz: igual si el producto de multiplicar el número que resulta poniendo á la derecha del duplo de la raíz la cifra en cuestión por dicha cifra se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, y mayor en el caso de no poderse hacer dicha resta.

En el caso presente el citado producto es 256, el cual se puede restar de 260, y esto prueba que la cifra 4 es la verdadera.

Colocando al lado del resto 4 el siguiente período 76 y separando la primera cifra de la derecha, obtenemos el número 47, menor que el duplo 68 de la raíz hallada 34, lo que prueba que no hay unidades del orden siguiente en la raíz; es decir, que la citra inmediata es *cero*, y, por tanto, la parte entera de $\sqrt{116076}$ es 340, número que, según el primer principio, es igual á las decenas de la raíz del número propuesto 11607649.

Colocando á la derecha del número 476 el siguiente período 49; separando á la cifra 9 de la derecha y dividiendo el número 4764 que queda á la izquierda por el duplo 680 de la raíz hallada, obtenemos el cociente entero 7, que colocado á la derecha del duplo de la raíz y efectuando el producto del número que resulta por el mismo cociente 7, hallamos el número 47649, que restado del resto

(c) Instituto Cervantes de Madrid

anterior nos da la resta cero, lo cual prueba -que el número propuesto 11607649 es un cuadrado perfecto, y que su raíz exacta es el número hallado 3407.

Con lo cual queda justificada en todas sus partes la regla dada para extraer la raíz cuadrada de un número entero.

Del mismo modo hallaremos que la raíz entera del número 3547234 es 1883, dando un resto 1545; es decir, que se tendrá:

$$3547234 = 1883^2 + 1545.$$

He aquí los cálculos de la operación indicada:

$\sqrt{3\,54,72,34}$	1883
1	
25,4	28 × 8 = 224
22 4	
3 07,2	368 × 8 = 2944
2 94 4	
12 83,4	3763 × 3 = 11289
11 28 9	
1 54 5	

25	2	307	36	1283	376
1	12	19	8	155	3

Observaciones. 1.ª Dando el primer período de la izquierda de los que forman el número cuya raíz queremos hallar una cifra de esta raíz, y obteniendo otra por cada uno de los restantes, se sigue que el número de cifras de la raíz cuadrada de un número es igual á la mitad del número de cifras de dicho número ó la mitad más una, según que tenga el número dado un número par ó impar de cifras.

2.ª Cada uno de los restos que se obtienen en el procedimiento que se sigue en la extracción de la raíz cuadrada, es menor que el doble de la raíz hallada más la unidad; si no lo fuese, sería señal que la cifra anteriormente hallada era menor que la verdadera, lo cual probaría un error en los cálculos.

3.ª Cuando alguna de las divisiones de las que se practican para hallar las diferentes cifras de que se compone la raíz diese un cociente mayor que 9, como ha sucedido en el segundo ejemplo, se principian los ensayos por la cifra 9; pues si pudiera ser el número de unidades del orden siguiente mayor que 9, sería señal que la parte de la raíz hallada era menor que la verdadera, lo cual es imposible si se han hecho bien los cálculos.

4.ª Puede suceder, como en el primer ejemplo que hemos con-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

siderado, que alguno de los dividendos de las divisiones que se practican sea menor que el divisor, en cuyo caso la cifra que sigue en la raíz es cero, y el resto correspondiente á esta cifra es el anteriormente hallado seguido del período siguiente, de modo que se continuará la operación bajando un nuevo período y siguiendo la regla general.

* 280. *Si el último resto hallado en la extracción de la raíz cuadrada de un número es igual ó menor que la raíz obtenida por el procedimiento indicado, dicha raíz se diferenciará por defecto de la verdadera en menos de media unidad; y si es mayor, la citada raíz aumentada en una unidad expresará el valor de la verdadera aproximada por exceso en menos de media unidad.*

Sea N un número, a su raíz cuadrada entera y R el residuo final obtenido. Tendremos:

$$N = a^2 + R;$$

si $R = \text{ó} < a$,

$$N = \text{ó} < a^2 + a,$$

y, por consiguiente,

$$N < a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Pero por otra parte, se tiene $N > a^2$; luego

$$N > a^2 \quad \text{y} \quad < \left(a + \frac{1}{2}\right)^2,$$

de donde

$$\sqrt{N} > a \text{ y } < a + \frac{1}{2};$$

y, por tanto, la diferencia entre $\sqrt{N}$ y a es menor que $\frac{1}{2}$, que es lo primero que se quería demostrar.

Si $R > a$ valdrá, por lo menos, $a + 1$, puesto que R es entero, y se tendrá $N = \text{ó} > a^2 + a + 1$, y, por consiguiente,

$$N > a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Pero por otra parte se tiene $N < (a+1)^2$; luego N está com-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

prendido entre $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ y $(a+1)^2$, de donde se deduce que

$$\sqrt{\mathrm{N}} > a+\frac{1}{2} \text{ y } < a+1,$$

y, por consiguiente, $a+1$ se diferencia por exceso de $\sqrt{\mathrm{N}}$ en menos de $\frac{1}{2}$, que es lo segundo que se quería demostrar.

LECCIÓN XXXII

Extracción de la raíz cuadrada de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad —Extracción de la raíz cuadrada de una decimal.— Extracción de la raíz cuadrada de un quebrado.

Extracción de la raíz cuadrada de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad.

281. *Para extraer la raíz cuadrada de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad* $\frac{1}{\mathrm{n}}$, *se multiplica dicho número por el cuadrado del denominador* n, *se extrae del producto la raíz aproximada en menos de una unidad, y el resultado se parte por el número* n.

Sea N un número entero ó fraccionario del cual queremos extraer la raíz cuadrada aproximada en menos de la cantidad $\frac{1}{n}$.

Representemos por $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ dos números que comprendan á la raíz cuadrada de N; es decir, que se tenga:

$$\frac{x}{n} < \sqrt{\mathrm{N}} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{n} > \sqrt{\mathrm{N}}.$$

Elevando al cuadrado, se tendrá:

$$\frac{x^2}{n^2} < \mathrm{N} \quad \text{y} \quad \frac{(x+1)^2}{n^2} > \mathrm{N};$$

de donde

$$x^2 < \mathrm{N}n^2 \quad \text{y} \quad (x+1)^2 > \mathrm{N}n^2,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y extrayendo la raíz cuadrada en menos de una unidad,

$$x < \sqrt{Nn^2} \quad \text{y} \quad x+1 > \sqrt{Nn^2};$$

lo que prueba que x es la raíz entera del producto del número propuesto N por el cuadrado del denominador n; y como $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ son dos números que se diferencian en $\frac{1}{n}$ y que comprenden á la raíz de N, la diferencia que hay entre uno de ellos y dicha raíz es menor que $\frac{1}{n}$; luego $\frac{x}{n}$ expresa el valor de $\sqrt{N}$ con la aproximación pedida, lo cual está conforme con el enunciado de la regla.

DE OTRO MODO. Siendo como antes N el número cuya raíz cuadrada queremos hallar en menos de $\frac{1}{n}$, tendremos evidentemente:

$$N = \frac{Nn^2}{n^2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada aproximada en menos de una unidad del numerador Nn^2 y representándola por r, se tendrá:

$$r^2 < Nn^2 \quad \text{y} \quad (r+1)^2 > Nn^2;$$

de donde

$$\frac{r^2}{n^2} < N \quad \text{y} \quad \frac{(r+1)^2}{n^2} > N;$$

y como $\frac{r^2}{n^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{n^2}$ son los cuadrados respectivos de $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$, se tendrá:

$$\frac{r}{n} < \sqrt{N} \quad \text{y} \quad \frac{r+1}{n} > \sqrt{N};$$

donde vemos que la raíz de N está comprendida entre las fracciones $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ diferentes en $\frac{1}{n}$; luego tomando el valor de una de ellas por el de dicha raíz, el error que se comete es menor que $\frac{1}{n}$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cuadrada en menos de $\frac{1}{25}$ del número 37.

El cuadrado del denominador 25 es 625; el producto de 37 por el cuadrado del denominador es 23125; la raíz cuadrada entera de dicho producto es 152; luego la raíz aproximada en menos de $\frac{1}{25}$ del número 37, es $\frac{152}{25} = 6\frac{2}{25}$.

El cuadrado de la unidad seguida de un cierto número de ceros siendo igual á la unidad seguida de un número doble de ceros, y obteniéndose el producto de un número entero cualquiera por la unidad seguida de ceros, colocando dichos ceros á la derecha del número, se sigue que *para extraer la raíz cuadrada de un entero en menos de una unidad de un cierto orden decimal, se escriben á la derecha del número tantas veces dos ceros como expresa el orden decimal de la aproximación, se extrae la raíz cuadrada del número que resulta, y se separan en la raíz tantas cifras decimales como pares de ceros se escribieron.*

Así la raíz cuadrada de 3 aproximada en menos de una milésima, se obtendrá extrayendo la raíz cuadrada de 300 00 00 y separando en dicha raíz tres cifras decimales.

La raíz de 3 00 00 00 es 1732; luego la raíz de 3 aproximada en menos de una milésima es 1,732.

Extracción de la raíz cuadrada de una decimal.

282. *Para extraer la raíz cuadrada de una decimal, se hace que el número de cifras decimales sea par y doble del que ha de tener la raíz, para lo cual se escribirán ceros á la derecha si fuese necesario, se extrae la raíz cuadrada del número que resulta prescindiendo de la coma, y del resultado se separa un número de cifras decimales, mitad del que tiene el número del cual se ha extraído la raíz.*

Sea el número 3,235, cuya raíz queremos hallar aproximada en menos de una centésima.

Multiplicando el número por el cuadrado de 100, queda reducido á extraer la raíz cuadrada de 32350, la cual es 179, y, por consiguiente, separando de dicha raíz dos cifras decimales, tendremos la del número propuesto: luego la raíz de 3,235 aproximada en menos de una centésima es 1,79.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Extracción de la raíz cuadrada de un quebrado.

283. En la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados distinguiremos tres casos: 1.°, que los dos términos del quebrado cuya raíz se quiere extraer sean cuadrados perfectos; 2.°, que sólo sea cuadrado el denominador; y 3.°, que ninguno de los dos términos sea cuadrado perfecto.

PRIMER CASO. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyos dos términos son cuadrados perfectos, se extraen las raíces cuadradas de dichos términos.*

Así, la raíz de $\frac{a^2}{b^2}$ es $\frac{a}{b}$; porque $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Del mismo modo se hallará la raíz del quebrado siguiente:

$$\sqrt{\frac{121}{144}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}} = \frac{11}{12}.$$

SEGUNDO CASO. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyo denominador es un cuadrado perfecto, se extrae la raíz entera del numerador, y ésta se parte por la exacta del denominador.*

Sea $\frac{a}{b^2}$ la fracción cuya raíz queremos hallar. Representando por r la raíz entera del numerador a, éste estará comprendido entre r^2 y $(r+1)^2$; por consiguiente, el quebrado lo estará entre $\frac{r^2}{b^2}$ y $\frac{(r+1)^2}{b^2}$, y la raíz de dicho quebrado se hallará comprendida entre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; de modo que $\frac{r}{b}$ nos expresa el valor de la raíz de $\frac{a}{b^2}$ aproximada en menos de $\frac{1}{b}$.

Así, la raíz del quebrado $\frac{133}{144}$ es $\frac{11}{12}$ con un error menor que $\frac{1}{12}$.

Si se quisiese mayor grado de aproximación, se hallaría como se ha dicho ya (281).

TERCER CASO. *Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado cuyos términos no son cuadrados perfectos, se hace que lo sea el denominador multiplicando ambos por dicho denominador, y se extrae la raíz cuadrada como en el caso anterior.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Así, la raíz cuadrada del quebrado $\frac{a}{b}$ cuyos términos no son cuadrados perfectos, se reduce á la de la fracción equivalente $\frac{ab}{b^2}$; de modo que representando por r la raíz del numerador ab, tendremos que la raíz del quebrado propuesto será la del segundo, es decir, $\frac{r}{b}$.

OBSERVACIONES. 1.ª Si el denominador b está compuesto de factores de los cuales unos son cuadrados perfectos y otros no, se podrá transformar la fracción propuesta en otra cuyo denominador sea un cuadrado perfecto, multiplicando ambos términos por el producto de los factores que no sean cuadrados.

2.ª Si la raíz del numerador se extrae con un cierto grado de aproximación $\frac{1}{n}$, la raíz del quebrado vendrá aproximada en menos de $\frac{1}{bn}$. En efecto; siendo $\frac{r}{n}$ la raíz aproximada del numerador ab, dicho numerador estará comprendido entre $\left(\frac{r}{n}\right)^2$ y $\left(\frac{r+1}{n}\right)^2$; por consiguiente, el quebrado lo estará entre $\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^2}{b^2}$ y $\frac{\left(\frac{r+1}{n}\right)}{b^2}$; y su raíz se hallará comprendida entre $\frac{\frac{r}{n}}{b}$ y $\frac{\frac{r+1}{n}}{b}$, ó lo que es lo mismo, entre $\frac{r}{nb}$ y $\frac{r+1}{nb}$; luego $\frac{r}{nb}$ se diferencia de la raíz verdadera en menos de $\frac{1}{nb}$, que es lo que se quería demostrar.

Si quisiéramos obtener la raíz de un quebrado con una cierta aproximación decimal, se principiaría por convertirle en fracción decimal, determinando un número de cifras decimales doble del que ha de tener la raíz, la cual se extrae como ya se ha dicho (282).

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXXIII

Formación del cubo de los números enteros.—Extracción de la raíz cúbica de los números enteros.

Formación del cubo de los números enteros.

284. De la definición de potencia se deduce que para elevar un número al cubo, basta repetirle tres veces por factor, y, por consiguiente, los cubos de los diez primeros números son:

Números...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos.....	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

Como el cubo de otro número entero cualquiera se obtendría también repitiéndole tres veces por factor, la cifra de sus unidades será una de las en que terminan los cubos anteriores. Así, los cubos de los números que terminan en las cifras 1, 4, 5, 6, 9 ó 0, son terminados también en las mismas cifras; y si los números enteros terminan en una de las cifras 2, 3, 7 ú 8, sus cubos terminarán en 8, 7, 3 ó 2.

Del principio (266) se deduce que todo número divisible por un factor primo no podrá ser un cubo perfecto si no es divisible también por el cubo de dicho número primo; y, en general, si un número es divisible por una potencia de un factor primo, no podrá ser cubo perfecto dicho número, si no es el exponente de la potencia citada un múltiplo de 3. Así, todo número par que no sea divisible por 8, no podrá ser un cubo perfecto; y todo número que termine en ceros, no podrá serlo tampoco como éstos no sean en un múltiplo de 3. En efecto; si no terminase en un número de ceros múltiplo de 3, los factores 2 y 5, ó uno de ellos por lo menos, vendría elevado á una potencia cuyo exponente no sería múltiplo de 3, y, por consiguiente, el número no podría ser cubo perfecto, según se ha dicho ya (266 *cons.*)

285. *El cubo de un número descompuesto en dos sumandos, se forma de la suma de cuatro partes: cubo del primer sumando, triplo del cuadrado del primero por el segundo, triplo del primero por el cuadrado del segundo, y cubo del segundo.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea N un número descompuesto en dos sumandos a y b; de modo que se tiene $N=a+b$; y, por consiguiente,

$$N^3=(a+b)^3=(a+b)\ (a+b)\ (a+b)=(a+b)^2\ (a+b)=$$
$$(a^2+2ab+b^2)\ (a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+$$
$$b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

ó lo que es lo mismo,

$$N^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

que es lo que se quería demostrar.

286. *La diferencia de los cubos de dos números enteros diferentes en una unidad, es el triplo del cuadrado del número menor, más el triplo de dicho número menor, más la unidad.*

En efecto; sean los números d y $d+1$ cuyos cubos respectivos son d^3 y $(d+1)^3$, y, por consiguiente, su diferencia será:

$$(d+1)^3-d^3=d^3+3d^2+3d+1-d^3=3d^2+3d+1,$$

que es lo que se quería demostrar.

De aquí se deduce: 1.°, que los cubos de los números enteros consecutivos se van diferenciando cada vez más á medida que dichos números aumentan; 2.°, que si al cubo de un número se le añade una cierta cantidad menor que el triplo del cuadrado de dicho número, más el triplo del mismo número más la unidad, el resultado será menor que el cubo del número entero siguiente; y 3.°, que si se tiene el cubo de un número entero, se obtendrá el cubo del número siguiente, aumentando al primero el triplo del cuadradrado de dicho número, más el triplo del mismo número, más la unidad.

Extracción de la raíz cúbica de los números enteros.

287. La extracción de la raíz cúbica es el análisis de la elevación al cubo, y tiene por objeto, dado un número, hallar otro que elevado á la tercera potencia reproduzca el primero. El número que se da se considera como una potencia cuya raíz es el número que se busca.

La extracción de la raíz cúbica se indica con el signo radical $\sqrt{}$, bajo del cual se pone la cantidad cuya raíz queremos ha-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

llar, y el índice que expresa que la raíz es cúbica, se escribe en la abertura del signo.

Se dice que un número entero es cubo perfecto cuando hay otro número entero que, elevado á la tercera potencia, nos reproduce el primero.

288. *La raíz cúbica de un número entero que no es un cubo perfecto, es un número inconmensurable.*

La demostración la misma que se dió en la raíz cuadrada (277).

Raíz cúbica entera de un número que no es cubo perfecto, es el mayor número entero cuyo cubo se puede restar del número dado.

En la extracción de la raíz cúbica de un número, distinguiremos dos casos: 1.°, que el número cuya raíz cúbica queremos hallar no pase de 1000; y 2.°, que sea mayor que 1000.

Para extraer la raíz cúbica de un número menor que 1000 conviene saber de memoria los cubos de los nueve primeros números (264): porque el número que se dé, ó será uno de estos cubos, en cuyo caso su raíz es conocida, ó estará comprendido entre dos, y, por lo tanto, su raíz lo estará entre las de estos números; de modo que tomando por raíz la del cubo menor, se tendrá la raíz entera del número propuesto, que se diferenciará de la verdadera en menos de una unidad. Así, la raíz cúbica de 512 es 8, y la de 458 es 7, puesto que 458 está comprendido entre 343 y 512, cuyas raíces respectivas son 7 y 8; luego la raíz entera de 458 es 7.

289. La extracción de la raíz cúbica de un número mayor que 1000, está fundada en los dos principios siguientes:

PRIMERO. *La raíz cúbica entera de los millares de un número, es exactamente igual á las decenas de la raíz de dicho número.*

Sea N un número y N′ sus millares; representemos por d las decenas de la raíz cúbica de N, y por u todo lo que le falta á la raíz, que podrá ser un número entero ó inconmensurable, pero siempre menor que 10; de modo que se tendrá:

$$N = (d \,.\, 10 + u)^3 = d^3 \,.\, 1000 + 3d^2 \,.\, 100 \,.\, u + 3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3;$$

siendo N′ el número de millares de N, será

$$N' = \text{ó} < d^3 + \frac{3d^2 \,.\, 100 \,.\, u + 3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3}{1000};$$

y como u es siempre menor que 10, se tendrá

$$\frac{3d^2 \,.\, 100 \,.\, u + 3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3}{1000} < \frac{3d^2 \,.\, 1000 + 3d \,.\, 1000 + 1000}{1000} =$$

$$3d^2 + 3d + 1,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y por consiguiente,

$$N' < d^3 + 3d^2 + 3d + 1 = (d+1)^3.$$

Pero evidentemente se tiene

$$N' = \text{ó} > d^3;$$

luego siendo N=ó>d^3 y <$(d+1)^3$, su raíz cúbica será d ó estará comprendida entre d y $d+1$, y, por tanto, la raíz entera de los millares N′ del número N será igual á las decenas da la raíz cúbica de dicho número N, que es lo que se quería demostrar.

También se demuestra este principio del modo siguiente: representando por d las decenas de la raíz del número N, se tendrá evidentemente.

$$N = \text{ó} > d^3 . 1000 \quad \text{y} \quad N < (d+1)^3 . 1000;$$

por consiguiente, el número N′ de millares de N es por lo menos d^3 y menor que $(d+1)^3$; luego la raíz cúbica de N′ es por lo menos d, y no llega á valer $d+1$, y, por tanto, la parte entera de dicha raíz es el número d de decenas de la raíz cúbica del número N, que es lo que se quería demostrar.

SEGUNDO. *Si de un número se resta el cubo de las decenas de su raíz cúbica y se divide el número de centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, el cociente que se obtenga es igual ó mayor que la cifra de las unidades de dicha raíz.*

En efecto; sea N un número, d las decenas de su raíz cúbica y u el número que falta para completar la raíz, el cual podrá ser entero ó inconmensurable, según que N sea ó no un cubo perfecto; de modo que se tendrá:

$$N = (d . 10 + u)^3 = d^3 . 1000 + 3d^2 . 100 . u + 3d . 10 . u^2 + u^3.$$

Restando de estas dos cantidades iguales el cubo de las decenas d^3. 1000, será:

$$N - d^3 . 1000 = 3d^2 . 100 . u + 3d . 10 . u^2 + u^3,$$

y representando por C las centenas de N—d^3. 1000, se tendrá:

$$C = \text{ó} > 3d^2 u,$$

según que las dos partes restantes $3d$. 10. u^2+u^3 contengan ó no

(c) Instituto Cervantes de Madrid

centenas; luego $\frac{C}{3d^2} = \text{ó} > u$, que es lo que se quería demostrar.

Probados estos dos principios, pasemos á la extracción de la raíz cúbica exacta ó aproximada en menos de una unidad de un número mayor que 1000.

290. *Para extraer la raíz cúbica exacta ó aproximada en menos de una unidad de un número mayor que 1000, se divide primero el número en secciones ó períodos de tres cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último de la izquierda tenga solamente uno ó dos; se extrae la raíz cúbica del primer período de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raíz; se eleva al cubo dicha cifra, y éste se resta del primer período de la izquierda.*

Al lado de la resta se baja el siguiente período, y del número que resulta se separan con una coma las dos cifras de la derecha, se divide lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, y el cociente entero que se obtenga será igual ó mayor que la segunda cifra de la raíz. Para comprobar si la cifra hallada es la verdadera, se suman el triplo del cuadrado de las decenas por la cifra hallada, el triplo de las decenas por el cuadrado de dicha cifra y el cubo de la misma, y si esta suma se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, la cifra será buena; pero si no se puede restar, es señal de que es mayor, y entonces se le disminuye de unidad en unidad, hasta que dicha suma se pueda restar.

Al lado de la nueva resta se baja el tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, hallaremos la cifra siguiente; y así se continúa hasta encontrar la última cifra de la raíz, que será exacta si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.

Sea 41421736 el número cuya raíz cúbica queremos hallar; dispondremos la operación del modo siguiente:

$\sqrt[3]{}$ 41,421,736	346
27	3 3 34 34
14 4,21	3 3 34 3
10 8	9 9 136 102
1 44	3 16 102 36
64	27 144 1156 612
2 117 7,36	4 3 306
2 080 0	108 3468 3672
36 7 2	6
7 16	20808
0 000 0 00	

144	27	21077	3468
9	5	269	6

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Siendo el número propuesto mayor que 1000, su raíz cúbica es mayor que 10; por consiguiente, el número de decenas de la raíz será, según el primer principio, la parte entera de la raíz del número 41421 que resulta de separar las tres primeras cifras de la derecha.

El número 41421 también es mayor que 1000; el número de decenas de su raíz cúbica es, según el mismo principio, la parte entera de la raíz de 41, la cual es, según el primer caso, 3, cuyo cubo 27 restado de 41 nos da de residuo 14; luego lo primero que hay que hacer para extraer la raíz cúbica de un número es dividirle en secciones ó períodos de tres cifras principiando por la derecha, siendo indiferente que el último no contenga más que una ó dos, se halla la raíz entera de este período de la izquierda, y obtendremos así la primera cifra de la raíz; se eleva dicha cifra al cubo, y éste se resta del primer período.

De este modo se obtiene un resto 14 que seguido del período siguiente 421 nos da el número 14421, cuyas centenas 144, divididas por 27, triplo del cuadrado de la raíz hallada, que es el número de decenas de la raíz cúbica de 14421, da un conciente entero 5, que será, según el segundo principio, igual ó mayor que la cifra de las unidades de la raíz cúbica de 14421; será mayor (*) si la suma de las tres partes que quedan del cubo, á saber: el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de las unidades, no se puede restar del resto anteriormente obtenido seguido de un período, y será la cifra buena si dicha suma se puede restar; luego bajando á la derecha del resto que se obtiene al restar del primer período de la izquierda el cubo de la primera cifra de la raíz, separando las dos primeras cifras de la derecha con una coma y dividiendo lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raíz, el cociente que se obtiene es igual ó mayor que la segunda cifra de la raíz; igual si la suma del triplo del cuadrado de la raíz hallada por la cifra en cuestión, más el triplo de la raíz por el cuadrado de dicha cifra, más el cubo de la misma, se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido de un período, y mayor si dicha resta no puede efectuarse.

(*) También se puede comprobar la cifra de las unidades de la raíz de un número, elevando al cubo toda la raíz hallada; y si este cubo se puede restar del número propuesto, la cifra será buena, y no lo será si no se puede restar, en cuyo caso se rebaja la raíz de unidad en unidad hasta que dicha resta pueda efectuarse.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En el caso presente, esta suma no puede restarse, por lo que se rebaja una unidad al 5, y comprobado el 4 hallamos las tres partes 108 centenas, 144 decenas y 64 unidades, cuya suma, restada del resto anterior seguido del segundo período, es decir, de 14421, obtenemos el nuevo resto 2117; lo cual prueba que la cifra 4 es buena.

Colocando al lado del resto 2117 el siguiente período 736, separando las dos cifras de la derecha y dividiendo por el triplo del cuadrado 3468 de la raíz hallada, obtenemos el cociente entero 6, el cual, comprobado, nos da la suma de las tres partes 20808 centenas, 3672 decenas y 216 unidades, cuya suma, restada del resto anterior seguido del último período, es decir, de 2117736, nos da el resto cero, lo cual prueba que el número propuesto 41421736 es un cubo perfecto, y que su raíz exacta es 346.

Con lo cual queda justificada en todas sus partes la regla dada para extraer la raíz cúbica de un número entero.

Del mismo modo se verá que la raíz cúbica entera del número 84570327 es 438, dando un resto 542655, es decir, que

$$84570327 = 438^3 + 542655.$$

He aquí los cálculos de la operación indicada:

$\sqrt[3]{}$ 84,570,327	438			
64	4	4	43	43
	4	3	43	3
205,70	16	12	129	129
144	3	9	172	64
108	48	108	1849	516
27	3		3	774
50633,27	144		5547	8256
44376			8	
8256			44376	
512				
542655				

205	48	50633	5547
13	4	710	9

OBSERVACIONES. 1.ª Dando el primer período de la izquierda de los que forman el número cuya raíz queremos hallar una cifra de esta raíz, y obteniendo otra por cada uno de los restantes, se sigue que el número de cifras de la raíz cúbica de un número es igual al número de períodos de tres cifras en que se descompone, pudiendo tener el último una ó dos solamente.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

2.ª Cada uno de los restos que se obtienen en el procedimiento de la raíz cúbica es menor que el triplo del cuadrado de la raíz hallada, más el triplo de dicha raíz, más la unidad; si no lo fuese sería señal que la cifra hallada anteriormente era menor que la verdadera, lo cual probaría un error en los cálculos.

3.ª Cuando alguna de las divisiones de las que se practican para hallar las diferentes cifras de que se compone la raíz diese un cociente entero mayor que 9, se principiarán los ensayos por la cifra 9; porque si pudiera ser el número de unidades del orden siguiente mayor que 9, sería señal que la parte de la raíz hallada era menor que la verdadera, lo cual es imposible, si se han hecho bien los cálculos.

4.ª Puede suceder que alguno de los dividendos de las divisiones que se practican sea menor que el divisor correspondiente, en cuyo caso la cifra que sigue en la raíz es cero, y el resto correspondiente á esta cifra es el anteriormente hallado seguido del período siguiente, de modo que se continuará la operación bajando un nuevo período y siguiendo la regla general.

LECCIÓN XXXIV

Extracción de la raiz cúbica de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad.—Extracción de la raíz cúbica de una decimal.—Extracción de la raiz cúbica de un quebrado.

Extracción de la raíz cúbica de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad.

291. *Para extraer la raíz cúbica de un número entero ó fraccionario en menos de una cierta cantidad* $\frac{1}{n}$, *se multiplica dicho número por el cubo del denominador* n, *se extrae del producto la raíz cúbica entera, y el resultado se parte por el número* n.

Sea N un número entero ó fraccionario del cual queremos extraer la raíz cúbica aproximada en menos de la cantidad $\frac{1}{n}$.

Representemos por $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ dos números que comprendan

(c) Instituto Cervantes de Madrid

á la raíz cúbica de N, es decir, que se tenga

$$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{\text{N}} \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{n} > \sqrt[3]{\text{N}};$$

elevando al cubo, será

$$\frac{x^3}{n^3} < \text{N} \quad \text{y} \quad \frac{(x+1)^3}{n^3} > \text{N};$$

de donde

$$x^3 < \text{N}n^3 \quad \text{y} \quad (x+1)^3 > \text{N}n^3;$$

y extrayendo la raíz cúbica en menos de una unidad,

$$x < \sqrt[3]{\text{N}n^3} \quad \text{y} \quad x+1 > \sqrt[3]{\text{N}n^3};$$

lo que prueba que x es la raíz cúbica entera del producto del número propuesto N por el cubo del denominador n; y como $\frac{x}{n}$ y $\frac{x+1}{n}$ son dos números que se diferencian en $\frac{1}{n}$ y comprenden á la raíz cúbica de N, la diferencia que hay entre uno de ellos y dicha raíz es menor que $\frac{1}{n}$; luego $\frac{x}{n}$ expresa el valor de la raíz cúbica de N con la aproximación pedida, lo cual está conforme con el enunciado de la regla.

De otro modo. Siendo como antes N el número cuya raíz cúbica queremos hallar en menos de $\frac{1}{n}$, tendremos evidentemente

$$\text{N} = \frac{\text{N}n^3}{n^3};$$

extrayendo la raíz cúbica aproximada en menos de una unidad del numerador $\text{N}n^3$ y representándola por r, se tendrá

$$r^3 < \text{N}n^3 \quad \text{y} \quad (r+1)^3 > \text{N}n^3;$$

de donde

$$\frac{r^3}{n^3} < \text{N} \quad \text{y} \quad \frac{(r+1)^3}{n^3} > \text{N};$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y como $\frac{r^3}{n^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{n^3}$ son los cubos respectivos de $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$, se tendrá:

$$\frac{r}{n} < \sqrt[3]{N} \quad \text{y} \quad \frac{r+1}{n} > \sqrt[3]{N};$$

donde vemos que la raíz cúbica del número N está comprendida entre las fracciones $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ diferentes en $\frac{1}{n}$; luego tomando el valor de una de ellas por el de dicha raíz, el error que se comete es menor que $\frac{1}{n}$.

Sea, por ejemplo, extraer la raíz cúbica en menos de $\frac{1}{25}$ del número 2.

El cubo del denominador 25 es 15625; el producto de 2 por el cubo del denominador es 31250; la raíz cúbica entera de dicho producto es 31: luego la raíz cúbica aproximada en menos de $\frac{1}{25}$ del número 2, es $\frac{31}{25} = 1\frac{6}{25}$.

Siendo el cubo de la unidad seguida de un cierto número de ceros igual á la unidad seguida de un número triplo de ceros, y obteniéndose el producto de un número entero cualquiera por la unidad seguida de ceros, colocando dichos ceros á la derecha del número se sigue que, *para extraer la raíz cúbica de un entero en menos de una unidad de un cierto orden decimal, se escriben á la derecha del número tantas veces tres ceros como expresa el orden decimal de la aproximación, se extrae la raíz cúbica del número que resulta y se separan en la raíz tantas cifras decimales como grupos de tres ceros se escribieron.*

Así la raíz cúbica de 3 aproximada en menos de una centésima, se obtendrá extrayendo la raíz cúbica entera de 3 000 000 y separando en dicha raíz dos cifras decimales.

La raíz cúbica entera de 3 000 000 es 154; luego la raíz de 3 aproximada en menos de una centésima es 1,54.

Extracción de la raíz cúbica de una decimal.

292. *Para extraer la raíz cúbica de una decimal, se hace que el número de cifras decimales sea múltiplo de 3 y triplo del que ha de te-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ner la raíz, para lo cual se escribirán ceros á la derecha si fuese necesario, se extrae la raíz cúbica entera del número que se obtiene prescindiendo de la coma, y del resultado se separa un número de cifras decimales igual al tercio del que tiene el número del cual se ha extraído la raíz.

Sea el número 3,2 cuya raíz queremos hallar aproximada en menos de una céntesima.

Multiplicando el número por el cubo de 100, queda reducido á extraer la raíz cúbica entera de 3 200 000, la cual es 147, y, por consiguiente, separando de dicha raíz dos cifras decimales, tendremos la del número propuesto: luego la raíz cúbica 3,2 aproximada en menos de una centésima, es 1,47.

Extracción de la raíz cúbica de un quebrado.

293. En la extracción de la raíz cúbica de los quebrados distinguiremos tres casos: 1.°, que los dos términos del quebrado cuya raíz se quiere extraer sean cubos perfectos; 2.°, que sólo sea cubo perfecto el denominador; y 3.°, que ninguno de los dos términos lo sean.

PRIMER CASO. *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyos dos términos son cubos perfectos, se extraen las raíces cúbicas de dichos términos.*

Así, la raíz cúbica de $\frac{a^3}{b^3}$ es $\frac{a}{b}$; porque $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$.

Del mismo modo se verá que

$$\sqrt[3]{\frac{1331}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{11}{12}.$$

SEGUNDO CASO. *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyo denominador es un cubo perfecto, se extrae la raíz entera del numerador, y ésta se parte por la exacta del denominador.*

Saa $\frac{a}{b^3}$ la fracción cuya raíz queremos hallar. Representando por r la raíz entera del numerador a, éste estará comprendido entre r^3 y $(r+1)^3$; por consiguiente, el quebrado lo estará entre $\frac{r^3}{b^3}$ y $\frac{(r+1)^3}{b^3}$, y la raíz de dicho quebrado se hallará comprendida en-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tre $\frac{r}{b}$ y $\frac{r+1}{b}$; de modo que $\frac{r}{b}$ nos expresa el valor de la raíz de $\frac{a}{b^3}$ aproximada en menos de $\frac{1}{b}$.

Así, la raíz cúbica del quebrado $\frac{1457}{1728}$ es $\frac{11}{12}$, con un error menor que $\frac{1}{12}$.

Si se quisiera mayor grado de aproximación, se hallaría como se ha dicho ya anteriormente (291).

TERCER CASO. *Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuyos términos no son cubos perfectos, se hace que lo sea el denominador multiplicando ambos por el cuadrado de dicho denominador, y se extrae la raíz cúbica como en el caso anterior.*

Así, la raíz cúbica del quebrado $\frac{a}{b}$ cuyos términos no son cubos perfectos, se reduce á la de la fracción equivalente $\frac{ab^2}{b^3}$; de modo que representando por r la raíz del numerador ab^2, tendremos que la raíz del quebrado propuesto será la del segundo, es decir, $\frac{r}{b}$.

OBSERVACIÓN. Si el denominador b está compuesto de factores de los cuales unos son cubos perfectos y otros no, se podrá transformar la fracción propuesta en otra cuyo denominador sea un cubo perfecto, multiplicando ambos términos por la primera potencia de los factores que en b se hallen elevados al cuadrado, y por el cuadrado de aquellos que lo estén á la primera.

Sea, por ejemplo, la fracción $\frac{37}{504}$ cuya raíz cúbica queremos hallar. Según la regla general, se reducirá la operación á extraer la raíz cúbica de la fracción $\frac{9398592}{(504)^3}$; pero según esta observación, será más sencillo multiplicar los dos términos de la fracción propuesta por los factores 3 y 7^2, quedando la cuestión reducida á extraer la raíz cúbica de $\frac{5437}{(42)^3}$.

Si la raíz del numerador se extrae con un cierto grado de aproximación $\frac{1}{n}$, la raíz del quebrado vendrá aproximada en menos

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de $\frac{1}{bn}$. En efecto; siendo $\frac{r}{n}$ la raíz aproximada del numerador ab^2, dicho numerador estará comprendido entre $\left(\frac{r}{n}\right)^3$ y $\left(\frac{r+1}{n}\right)^3$; por consiguiente, el quebrado estará comprendido entre $\frac{\left(\frac{r}{n}\right)^3}{b^3}$ y $\frac{\left(\frac{r+1}{n}\right)^3}{b^3}$ y su raíz se hallará comprendida entre $\frac{\frac{r}{n}}{b}$ y $\frac{\frac{r+1}{n}}{b}$; ó lo que es lo mismo, entre $\frac{r}{nb}$ y $\frac{r+1}{nb}$; luego $\frac{r}{nb}$ se diferencia de la raíz verdadera en menos de $\frac{1}{nb}$, que es lo que se quería demostrar.

Si quisiéramos obtener la raíz de un quebrado con una cierta aproximación decimal, se principiará por convertirla en la fracción decimal y determinar un número de cifras decimales triplo del que ha de tener la raíz, la cual se extrae como ya se ha dicho (292).

LECCIÓN XXXV

De las raíces en general.—Cálculo de radicales numéricos.

De las raíces en general.

294. Ya hemos visto que una raíz de un número se denomina segunda ó cuadrada, tercera ó cúbica, cuarta y en general *enésima*, según que haya de elevarse al cuadrado, cubo, cuarta y en general *enésima* potencia para que reproduzca dicho número.

Para indicar la raíz *enésima* de un número se usa el signo radical $\sqrt[n]{\ }$, en cuya apertura se coloca el número n que se llama índice ó grado de la raíz.

Cuando el índice es 2, se suprime, y al decir ó expresar solamente la raíz de un número se sobrentiende es la cuadrada.

Si un número entero no tiene raíz enésima exacta en números enteros, tampoco la tiene fraccionaria; dicha raíz es inconmensu-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

rable. Lo mismo sucede si el número es fraccionario; que si no tiene raíz enésima exacta fraccionaria, tiene que ser inconmensurable. Se demuestra del mismo modo que para la raíz cuadrada (277).

295. *La raíz enésima de un producto es igual al producto de las raíces enésimas de los factores.*

Sea la raíz enésima del producto *abc*, y vamos á demostrar que

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c} \qquad [1].$$

En efecto; según el principio (266), se tiene

$$\left(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}\right)^n = abc;$$

luego $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$ es la raíz enésima del producto *abc*, que es lo que se quería demostrar.

296. *La raíz enésima de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas del dividendo y divisor.*

Sea $\frac{a}{b} = Q$, de donde $a = b\,Q$.

Según el principio anterior, se tiene

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{Q},$$

y dividiendo por $\sqrt[n]{b}$, será:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{Q},$$

que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *La raíz enésima de una fracción, es igual al cociente de las raíces enésimas de sus dos términos.*

297. *La emésima potencia de la raíz enésima de un número es la raíz enésima de la misma potencia de dicho número.*

Sea $\sqrt[n]{a}$ la raíz enésima de *a* cuya *emésima* potencia queremos hallar. Se tendrá $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$... repetido *m* veces, ó lo que es lo mismo.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{aaa\ldots} = \sqrt[n]{a^m},$$

que es lo que se quería demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

298. *La raíz emésima de la raíz enésima de un número, es igual á la raíz cuyo índice es el producto de los índices.*

Es decir que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad [1].$$

En efecto; elevado el primer miembro de la igualdad [1] á la potencia m y luego á la potencia n, lo que equivale á elevarle á la potencia mn (264 *cons.*), se tendrá:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a,$$

lo cual prueba que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ es la raíz mn de a, según queríamos demostrar.

CONSECUENCIA. *La raíz de un número cuyo índice es el producto de varios factores, es igual á las raíces sucesivas cuyos índices sean cada uno de los diferentes factores.*

En efecto; según el principio anterior, se tiene:

$$\sqrt[mnp]{a} = \sqrt[np]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}.$$

299. De esta consecuencia y por medio de las reglas dadas para extraer la raíz cuadrada y cúbica de un número, se deduce el modo de extraer la raíz cuyo índice no contenga más factores primos que 2 y 3.

En efecto; según la consecuencia anterior, el problema queda reducido á extraer raíces cuadradas y cúbicas.

Así, la raíz *cuarta* de un número se halla extrayendo la raíz cuadrada de dicho número y después la raíz cuadrada del resultado; la última hallada es la raíz cuarta del número propuesto.

La raíz *octava* de un número se halla extrayendo la raíz cuadrada de dicho número y después la raíz cuarta del resultado, lo que equivale á extraer tres raíces cuadradas sucesivas del número.

Y del mismo modo se obtendrá por una serie de raíces cuadra-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

das la raíz cuyo índice sea una cierta potencia de 2, de un número cualquiera.

Si se fijase el grado de aproximación que había de tener la raíz *cuarta, octava,* etc., se vería fácilmente con qué grado de aproximación se había de obtener cada una de las raíces sucesivas que hay que extraer.

Así, si queremos obtener en menos de una *centésima* la raíz *cuarta* de un número N, hallaremos la raíz cuadrada de N con cuatro cifras decimales, es decir, en menos de una *diezmilésima*, y de ese modo tendremos la raíz de la raíz cuadrada de N, ó sea la raíz cuarta de dicho número con dos cifras decimales, ó lo que es lo mismo, aproximada en menos de una *céntésima*.

Del mismo modo se verá que las raíces cuyos índices son una potencia cualquiera de 3, se obtienen por una serie de raíces cúbicas. Así, la raíz *novena* de un número, se hallará extrayendo la raíz cúbica de dicho número y después la raíz cúbica del resultado.

Fácilmente se vería también el grado de aproximación con que se deben obtener estas raíces sucesivas, para que la final tenga una aproximación dada.

300. La raíz cuyo índice no tiene más factores primos que 2 y 3, se obtiene hallando una serie de raíces cuadradas y otra de raíces cúbicas.

Así, la raíz *sexta* de un número se obtiene hallando primero la raíz cuadrada de dicho número y después la raíz cúbica del resultado.

La raíz cuyo índice es 12 se obtiene hallando la raíz cuarta, la cual se halla por dos raíces sucesivas cuadradas, y después determinando la raíz cúbica del resultado.

Cálculos de los radicales numéricos.

301. Se da el nombre de *radical* á la raíz indicada de un grado cualquiera de un número, llamándose radicales de *segundo, tercero, cuarto,* y en general *enésimo* grado, según que la raíz que indica sea la segunda, tercera, cuarta y en general enésima.

De la definición de radical se deduce que todos los principios demostrados anteriormente en las raíces en general de los números son aplicables á los radicales.

302. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES. *Si la cantidad subradical* (*) *se puede descomponer en dos factores de los cuales el uno sea*

(*) Llámase así la cantidad que hay debajo del signo radical.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

una potencia del mismo grado que expresa el índice, se podrá simplificar dicho radical sacando fuera como factor la raíz del que es potencia exacta.

En efecto; sea el radical $\sqrt[n]{A}$, y supongamos que A se puede descomponer en el producto de los factores a^n y A′, es decir, que $A = a^n A'$; se tendrá (295):

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n A'} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{A'} = a\sqrt[n]{A'} \qquad [1]$$

que es lo que se quería demostrar.

Recíprocamente, *todo factor de un radical puede ponerse bajo del mismo, multiplicando la cantidad subradical por una potencia de dicho factor cuyo exponente sea el índice.*

En efecto; la igualdad [1] nos da:

$$a\sqrt[n]{A'} = \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{A'} = \sqrt[n]{a^n A'},$$

que es lo que se quería demostrar.

Llámanse *radicales semejantes* aquellos que, siendo de un mismo grado, tienen la misma cantidad subradical después de sacar fuera todo lo que es posible.

Así,

$$\sqrt{2},\ 3\sqrt{2} \text{ y } \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

son radicales semejantes.

301. *Un radical no varía si se dividen el índice y exponente de la cantidad subradical por un mismo número entero.*

Es decir, que

$$\sqrt[nm]{A^{pn}} = \sqrt[m]{A^p}.$$

En efecto; según los números (198 CONS. y 297), se tiene:

$$\sqrt[nm]{A^{np}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{A^{pn}}} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{A^p}\right)^n} = \sqrt[m]{A^p},$$

que es lo que se quería demostrar.

De este principio se deduce que cuando el exponente de la cantidad subradical y el índice tengan un factor común, podrá simpli-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ficarse el radical dividiendo por dicho factor común el índice y el exponente de la cantidad que hay debajo.

Así:

$$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}.$$

304. *Un radical no varía multiplicando el índice y el exponente de la cantidad subradical por un mismo número entero.*

Es decir, que

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[nm]{A^n}.$$

En efecto;

$$\sqrt[m]{A} = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}}\right)^n = \left(\sqrt[nm]{A}\right)^n = \sqrt[nm]{A^n},$$

que es lo que se quería demostrar.

305. REDUCCIÓN DE RADICALES Á UN MISMO ÍNDICE. *Para reducir varios radicales á un mismo índice se multiplica el de cada uno y el exponente de la cantidad subradical por el producto de los índices de los demás; y si dichos índices tienen factores comunes, por el cociente que resulta de dividr el* m. c. m. *por cada uno de ellos.*

En efecto; se entiende por reducir varios radicales á un mismo índice, hallar otros equivalentes á los primeros y que tengan todos un índice común. Esto supuesto, si se quiere reducir á un mismo índice los radicales $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$, se tendrá que éstos no variarán multiplicando el exponente de la cantidad subradical é índice por un mismo número (304), de modo que se podrán transformar en $\sqrt[6]{2^3}$ y $\sqrt[6]{5^2}$, ó lo que es igual en $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[6]{25}$.

Sean los radicales que hemos de reducir á un común índice $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[6]{8}$. El mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12; luego dichos radicales se transformarán en $\sqrt[12]{3^3}$ y $\sqrt[12]{8^2}$, ó lo que es lo mismo, en $\sqrt[12]{27}$ y $\sqrt[12]{64}$.

306. SUMA Y RESTA DE RADICALES. *Para sumar radicales, se escriben unos á continuación de otros y se hace la reducción de los que sean semejantes.*

Sean los radicales que hemos de sumar $2\sqrt{2,3}$ $\sqrt[3]{5}$, $4\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Según el número 49, tendremos:

$$2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{5}+4\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}=6\sqrt{2}+4\sqrt[3]{5}.$$

307. *Para restar radicales, se escribe el minuendo y á continuación el sustraendo con signos mudados, y se hace la reducción y destrucción de los que sean semejantes.*

Si se quiere restar de $3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, se tendrá (51):

$$3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}-(4\sqrt{2}+\sqrt[3]{5})=$$
$$3\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}-2\sqrt{2}.$$

308. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES. *Para multiplicar varios radicales, se reducen á un mismo índice si no le tienen, y se efectúa el producto de las cantidades subradicales.*

Sean los radicales que hemos de multiplicar $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt[4]{2}$; reduciéndolos á un mismo índice, se convertirán en $\sqrt[12]{65}$, $\sqrt[12]{81}$ y $\sqrt[12]{8}$, de donde se tendrá, según el principio (295),

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{64}\times\sqrt[12]{81}\times\sqrt[12]{8}=\sqrt[12]{64\times81\times8}.$$

309. *Para dividir dos radicales, se reducen á un mismo índice si no lo tienen, y se dividen las cantidades subradicales.*

Sean los radicales que hemos de dividir $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{5}$; reduciéndoles á un mismo índice, se convertirán en $\sqrt[6]{27}$ y $\sqrt[6]{25}$, de donde se deducirá, según el número (296),

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[6]{25}}=\sqrt[6]{\frac{27}{25}}.$$

310. POTENCIAS Y RAÍCES DE LOS RADICALES. *Para elevar un radical á una potencia, se eleva á dicha potencia la cantidad subradical.*

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$, el cual queremos elevar á la potencia m.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

BIBLIOTECA — MADRID —

Se tendrá (297):

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

que es lo que se quería demostrar.

Si m fuese un divisor de n, en vez de elevar la cantidad subradical á la potencia m, se dividiría el índice n por el exponente m.

Así, si $n = n'm$, se tendrá (303):

$$\left(\sqrt[n'm]{a}\right)^m = \sqrt[n'm]{a^m} = \sqrt[n']{a}.$$

Sí m no fuese un divisor de n, pero ambos tuviesen un factor común, se dividiría el índice por dicho factor común, y la cantidad subradical se elevaría á una potencia cuyo exponente fuese el otro factor de m.

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$ el cual queremos elevar á la potencia m, y supongamos que $n = pn'$ y $m = pm'$; se tendrá:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[pn']{a}\right)^{pm'} = \sqrt[pn']{a^{pm'}} = \sqrt[n']{a^{m'}},$$

que es lo que se quería demostrar.

311. *Para extraer una raíz de un radical, se multiplican los índices.*

Sea el radical $\sqrt[n]{a}$ cuya raíz emésima queremos hallar.

Tendremos (298):

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

que es lo que se quería demostrar.

Concluiremos esta importante teoría demostrando el siguiente principio, del cual hemos de hacer uso más adelante.

312. *La raíz del grado* n *de una cantidad cualquiera* a, *tiene por límite* 1 *á medida que* n *crece indefinidamente.*

Este principio quedará demostrado, probando que la diferencia entre la unidad y $\sqrt[n]{a}$ puede ser menor que una cantidad dada δ, por pequeña que sea; para ello tenemos (271):

$$(1 - \delta)^n < a,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de donde deduciremos, extrayendo la raíz *enésima:*

$$1-\delta<\sqrt[n]{a},$$

y agregando á los dos miembros la cantidad $\delta-\sqrt[n]{a}$, hallaremos:

$$1-\sqrt[n]{a}<\delta;$$

luego pudiendo ser la diferencia numérica entre 1 y $\sqrt[n]{a}$ menor que una cantidad δ por pequeña que sea, es claro que el límite de $\sqrt[n]{a}$, cuando n crece indefinidamente, será la unidad, según queríamos demostrar.

Exponente fraccionario

(c) Instituto Cervantes de Madrid

SEXTA PARTE

NÚMEROS INCONMENSURABLES

TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES

LECCION XXXVI

Cálculo de los números inconmensurables.—TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES.—Adición de números aproximados.—Sustracción de números aproximados.

Cálculo de los números inconmensurables.

* 311. Se ha dicho ya que número inconmensurable es aquel que proviene de la comparación de una cantidad con su unidad, y ni ésta ni ninguna de las partes iguales en que puede dividirse está contenida exactamente en aquélla.

No sólo la comparación de una cantidad con su unidad puede darnos el número inconmensurable; también pnede provenir de la extracción de raíces. Así, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ nos expresa números inconmensurables, según hemos visto (277).

Los números inconmensurables, cualquiera que sea su origen, pueden siempre expresarse aproximadamente por números conmensurables que se obtienen por medio de reglas fijas, y que el grado de aproximación de éstos puede ser tal que el error cometido sea menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea; por lo que se consideran á los números inconmensurables como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente.

Considerando á los números inconmensurables como límites de números conmensurables que se les aproximan indefinidamente, el resultado de cualquier operación hecha con números inconmensurables será (47) el límite de los resultados de la misma hecha con los números aproximados, y el error que se comete será tanto me-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

nor, cuanto mayor sea la aproximación de dichos números á los inconmensurables que cada uno representa.

Por consiguiente, *para efectuar cualquier operación con números inconmensurables, se sustituyen éstos por números conmensurables que se le vayan aproximando cada vez más, y el resultado de la operación hecha con estos números expresará, con un cierto error, el valor del resultado de la misma hecha con los números inconmensurables, error que será tanto menor cuanto mayor sea el grado de aproximación de los números que sustituyen á los primeros.*

Cuando hay que hacer algún cálculo con números inconmensurables que provienen de la extracción de raíces, conviene efectuarlo directamente, según se ha dicho en el cálculo de radicales, y expresar el resultado en decimales con la aproximación que se quiera.

Así, el producto de $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$ se hallará efectuando directamente el de los dos radicales

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}:$$

de modo que, hallando el valor $\sqrt{6}$ con la aproximación que se quiera, tendremos el del producto de los dos números inconmensurables $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

De todos los principios relativos á los números y operaciones hechas con los mismos, sólo tenemos que justificar en los números inconmensurables el siguiente principio:

* 314. *El producto de varios factores inconmensurables no varía, cualquiera que sea el orden en que se multipliquen.*

Sea el producto de varios factores inconmensurables *abcd*. Este producto es, según hemos dicho ya, el límite de los que se obtienen sustituyendo en vez de los números inconmensurables valores conmensurables que se les vayan aproximando cada vez más.

Ahora bien; estos productos de números aproximados no varía cualquiera que sea el orden en que se les multiplique (58 y 171); luego su límite, que es el producto *abcd* de los números inconmensurables, tampoco variará cualquiera que sea el orden en que se efectúe la multiplicación.

Queda, pues, demostrado este principio, como dijimos (58) (*), para cualquier clase de números; y, por lo tanto, todos los que de él dependen son también verdaderos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

TEORÍA DE LAS APROXIMACIONES DECIMALES

* 315. Cuando hay que efectuar una operación cualquiera con cierta clase de números, ya sean conmensurables ó inconmensurables, y se efectúa con otros números que expresan el valor aproximado de aquéllos, es evidente que se cometerá un cierto error que será tanto menor cuanto mayor sea la aproximación de dichos números á los que cada uno sustituye.

Esta sustitución de números, muy frecuente en los decimales, é indispensable en el cálculo de números inconmensurables, ha dado origen á los dos problemas siguientes, que constituyen la teoría de las aproximaciones:

1.° *Dados varios números aproximados en menos de una cierta cantidad, hallar la aproximación del resultado de una operación cualquiera hecha con ellos.*

2.° *Dada la aproximación que ha de tener el resultado de una operación hecha con números aproximados, hallar la que debe tener cada uno de éstos.*

* 316. Todo número conmensurable ó inconmensurable se puede siempre expresar exacta ó aproximadamente por un decimal, y si de ésta sólo se toma un número limitado de cifras, 7 por ejemplo, menor que el de toda la decimal, se dice que aquel número está aproximado por defecto con siete cifras decimales; es decir, que el error que se comete es por defecto menor que media unidad del orden séptimo decimal si la siguiente cifra es menor que 5; y esa misma decimal aumentada en una unidad del último orden, en el caso de ser dicha siguiente cifra mayor que 5, nos expresa el valor del mismo número aproximado por exceso en menos de una unidad del séptimo orden decimal.

Así, el valor del número inconmensurable 3,1415926435... aproximado con cinco cifras decimales, será 3,14159, el cual se diferencia por defecto en menos de media unidad del quinto orden.

Adición de números aproximados.

* 317. *Si se suman varios números decimales aproximados por exceso ó defecto, siendo el grado de la aproximación distinta en cada uno de ellos, la suma vendrá aproximada en menos de media unidad del penúltimo orden del que tenga menor grado de aproximación, si el número de sumandos aproximados no pasa de* 10; *en menos de media*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

unidad del orden superior al penúltimo, si pasa de 10 *y no llega á* 100, *y así sucesivamente.*

En efecto; el caso más desfavorable que podemos considerar es aquel en que todos los sumandos estén aproximados por defecto ó por exceso, y cuyo grado de aproximación en todos ellos sea igual al que tiene el menos aproximado. En este caso el error que en cada uno se comete será menor que media unidad del último orden; es decir, que si todos están aproximados por defecto en menos de media milésima, el error que en cada uno se cometerá es menor que 5 diezmilésimas, y este error repetido 9 veces á lo más, en el primer caso producirá un error en la suma menor que 45 diezmilésimas, y, por tanto, la suma vendrá aproximada en menos de media unidad del orden superior á las milésimas, ó sea en menos de media unidad del penúltimo orden decimal.

Si el número de sumandos pasa de 10 y no llega á 100, el caso más desventajoso es que haya 99 sumandos todos aproximados en un mismo sentido y con una aproximación igual á la que tenga el menos aproximado; en ese caso, siendo como antes el error que se comete en cada uno de ellos menor que 5 diezmilésimas, en la suma se cometerá un error menor que 5 diezmilésimas multiplicadas por 99, que son 495 diezmilésimas, número menor que media décima, que es la unidad del orden superior al penúltimo que se considera.

Es evidente que el error que en general se comete en la suma de números aproximados será bastante menor que el límite que hemos marcado, pues no siempre estarán los sumandos aproximados ni en el mismo grado ni en el mismo sentido; y cuando unos están aproximados por defecto y otros por exceso, hay una cierta compensación en los errores.

Del principio anterior se deduce la regla general siguiente:

* 318. Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal la suma de varios sumandos cuyo grado de aproximación es indeterminado, es necesario calcular unos por defecto y otros por exceso en menos de media unidad de un orden que sea 10, 100, etc. veces menor que aquel que expresa el grado de aproximación de la suma, según que el número de sumandos aproximados no llegue á 10 ó pase y no llegue á 100, etc.; se efectúa la suma de estos sumandos, y despreciando, según el caso que se considera, la primera, dos primeras, etc. cifras, teniendo cuidado de aumentar á la última en una unidad, si la siguiente pasa de 5, obtendremos la suma con la aproximación pedida.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sustracción de números aproximados.

*319. *Si se restan dos números decimales aproximados ambos por exceso ó defecto en menos de una unidad de un cierto orden, el error que se comete en la diferencia es menor que una unidad de dicho orden.*

En efecto; sean los números que se han de restar a y b, los cuales se reemplazan por los números aproximados a' y b', que se diferencian de los anteriores en menos de e y e'.

Si e y e' expresaran el valor exacto de las diferencias entre a' y a, b' y b, se tendría:

$$a = a' + e \quad \text{y} \quad b = b' + e',$$

de donde, según que e sea mayor ó menor que e', se tendrá:

$$a - b = a' - b' + e - e' \quad \text{ó} \quad a - b = a' - b' - (e' - e);$$

de modo que siendo los errores que se cometen en los números a' y b' menores respectivamente que e y e', el que se comete en la resta despreciando la cantidad $e - e'$ ó $e' - e$, que es lo que hay que aumentar ó disminuir $a' - b'$ para obtener la resta verdadera $a - b$, es menor que $e - e'$ ó $e' - e$, es decir, menor que la diferencia de los errores; luego si estos errores e y e' son, por ejemplo, menores que una milésima, su diferencia lo será también con más razón: por consiguiente, si dos números decimales están aproximados por exceso ó defecto en menos de una unidad de un cierto orden, su diferencia vendrá aproximada en menos de una unidad de este orden.

Del principio anterior se deduce la regla general que:

*320. Para obtener en menos de una unidad de un cierto orden decimal la diferencia de dos números aproximados, es necesario calcular éstos por exceso ó defecto en menos de una unidad del orden á que ha de estar aproximada la diferencia, y la de estos números será la que se pide.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXXII

Multiplicación de números aproximados.

Multiplicación de números aproximados.

* 321. *Si se multiplica un número aproximado en menos de media unidad de su último orden decimal por un número exacto, el error que se cometerá es menor que el cociente de dividir la mitad de dicho número exacto por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número aproximado.*

En efecto; sea A un número cuyo valor aproximado por defecto en menos de media unidad del orden n decimal; supondremos sea a, de modo que se tendrá:

$$A > a \quad y \quad A < a + \frac{1}{2 . 10^n}.$$

Multiplicando estas cantidades por el número exacto B, ya sea entero ó fraccionario, tendremos

$$AB > aB \quad y \quad AB < aB + \frac{B}{2 . 10^n},$$

de donde se deduce evidentemente que el error cometido tomando por el valor del producto AB el número aB, es menor que la mitad del número B partido por 10^n, ó llamando E á este error,

$$E < \frac{1}{2} B : 10^n,$$

que es lo que queríamos demostrar.

* 322. *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el producto de un número aproximado por otro número exacto, se calcula el primero con un error menor que media unidad del orden que marque el número de cifras de la parte entera del número exacto, seguido de tantos ceros como indica el orden de la aproximación del producto.*

Es decir que si el producto ha de estar aproximado en menos de una milésima ó ha de tener tres cifras decimales exactas y el factor exacto tiene cinco cifras en su parte entera, es necesario

(c) Instituto Cervantes de Madrid

calcular el número aproximado con nueve cifras decimales por lo menos.

En efecto; sea a el valor aproximado en menos de media unidad de un cierto orden indeterminado x decimal de un número A, y tratamos de determinar x con la condición de que el producto aB se diferencie del verdadero AB en menos de media unidad de un cierto orden decimal m.

Según el principio anterior, se tendrá:

$$E > \frac{B}{2 \times 10^x},$$

de modo que si el error que se comete ha de ser menor que $\frac{1}{2 \times 10^m}$, se deberá tener evidentemente:

$$\frac{B}{2 \,.\, 10^x} < \frac{1}{2 \,.\, 10^m}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{1}{10^x} < \frac{1}{B \,.\, 10^m}.$$

De modo que haciendo $10^x > B.\ 10^m$, se tendrá lo que se pide. Mas para ello basta hacer x igual al número de cifras que tiene la parte entera del producto $B.10^m$; luego calculando el número aproximado con tantas cifras como tiene la parte entera del número exacto, seguido de tantos ceros como decimales ha de tener el producto, quedará el problema resuelto.

* 323. *Si se multiplican dos números aproximados cada uno de ellos en menos de media unidad de un cierto orden decimal, el error que se comete es menor que la mitad del multiplicando dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el multiplicador, más la mitad del multiplicador dividido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el multiplicando.*

Sean A y B dos números cuyos valores aproximados por defecto en menos de media unidad decimal de los órdenes respectivos m y n son a y b; de modo que se tendrá:

$$A > a \quad \text{y} \quad A < a + \frac{1}{2 \,.\, 10^m}$$

$$B > b \quad \text{y} \quad B < b + \frac{1}{2 \,.\, 10^n}.$$

Multiplicando ordenadamente estas desigualdades, hallaremos

$$AB > ab \quad \text{y} \quad AB < ab + \frac{a}{2 \,.\, 10^n} + \frac{b}{2 \,.\, 10^m} + \frac{1}{4 \,.\, 10^m \,.\, 10^n}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De aquí se deduce que el valor del producto AB se halla comprendido entre las dos cantidades que forman los segundos miembros de estas desigualdades; y por tanto, el error que se comete será menor que la diferencia que hay entre dichas cantidades. De modo que llamando E á este error, y despreciando la fracción $\frac{1}{4.10^m.10^n}$ por ser muy pequeña con relación á las demás, se tendrá

$$E < \frac{a}{2.10^n} + \frac{b}{2.10^m} \qquad [1],$$

según queríamos demostrar.

Sea, por ejemplo, multiplicar los dos números 3,14159 y 0,352, aproximados ambos por defecto en menos de media unidad de su último orden respectivo.

Según lo dicho anteriormente, un límite del error será

$$\frac{3,14159}{2\times10^3} + \frac{0,352}{2\times10^5} = \frac{1,57079}{1000} + \frac{0,176}{100000},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{1,57079}{1000} = \frac{157079}{100000000} = 0,00157079$$

$$\frac{0,176}{100000} = \frac{176}{100000000} = 0,00000176$$

$$\text{Límite del error...} \quad 0,00157255.$$

Luego el error principia en la tercera cifra decimal del producto, por lo que no se deberán considerar más que las dos primeras.

* 324. Si hubiese más factores, se hallaría, según el número anterior, la aproximación del producto de dos de ellos; después se determinaría la aproximación del que resulta de multiplicar este producto por un tercer factor; luego la de éste por un cuarto factor, y así sucesivamente: la aproximación del último producto es la del producto de todos los factores.

* 325. El error que se comete en una potencia cualquiera de un número decimal aproximado en menos de media unidad de su último orden, se determinará según la regla anterior; pues la potencia de un número no es otra cosa que el producto de tantos factores iguales á este número, como indica el exponente.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Así, la segunda potencia de un número aproximado en menos de media unidad de un cierto orden decimal, estará aproximada en menos de dicho número partido por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene.

* 326. *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el producto de dos números aproximados, es necesario calcular éstos en menos de media unidad del orden decimal que marque el número de cifras de la parte entera de la suma de los dos números dados, seguida de tantos ceros como decimales ha de tener el producto.*

Es decir, que si el producto ha de estar aproximado en menos de media unidad del sexto orden decimal, ó lo que es igual, ha de tener seis cifras decimales, y la suma de los dos números aproximados dan una parte entera que tiene tres cifras, será necesario calcular cada factor con un error menor que media unidad del orden noveno, ó sea con nueve cifras decimales.

En efecto; sean a y b los valores aproximados en menos de media unidad decimal del orden indeterminado x, el cual queremos calcular con la condición de que el producto ab se diferencie del verdadero AB en menos de media unidad del orden n decimal. Según la relación [1] del número 323, se tendrá:

$$E < \frac{a}{2 \,.\, 10^x} + \frac{b}{2 \,.\, 10^x} = \frac{a+b}{2 \,.\, 10^x}.$$

Ahora bien; el error que se ha de cometer en el producto aproximado, ha de ser menor que $\frac{1}{2.10^n}$; luego el valor de x que verifique á la relación

$$\frac{a+b}{2 \,.\, 10^x} < \frac{1}{2 \,.\, 10^n} \qquad [2],$$

será evidentemente el grado de aproximación que deberá darse á los factores. Pero de la relación [2] se deduce

$$\frac{1}{10^x} < \frac{1}{(a+b) \times 10^n},$$

de donde $10^x > (a+b) \times 10^n$;

luego x tiene que ser, por lo menos, igual al número de cifras que tiene la parte entera de la suma $a+b$, más el número n de cifras

(c) Instituto Cervantes de Madrid

decimales que ha de tener el producto, lo cual queríamos demostrar.

* 327. *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el producto de tres factores aproximados, es necesario calcular éstos en menos de media unidad del orden decimal que marque el número de cifras de la parte entera de la suma de los productos binarios que se forman con los tres factores, seguida de tantos ceros como cifras decimales ha de tener el producto.*

En efecto; supongamos se quiere hallar en menos de $\frac{1}{10^n}$ el producto de los tres números aproximados a, b y c. Llamemos $\frac{1}{2 . 10^x}$ un límite del error que se ha de cometer en cada uno de ellos, y se tendrá, según el caso anterior, que un límite del producto de dos factores A y B será:

$$AB + \frac{1}{2 . 10^x}(A + B) + \frac{1}{2 . 10^{2x}};$$

de modo que multiplicando este límite por el del tercer factor, que es $C + \frac{1}{2 . 10^x}$, se tendrá:

$$\left(AB + \frac{1}{2 . 10^x}(A + B) + \frac{1}{2 . 10^{2x}}\right) \cdot \left(C + \frac{1}{2 . 10^x}\right) =$$

$$ABC + \frac{1}{2 . 10^x}(AC + BC) + \frac{C}{2 . 10^{2x}} + \frac{1}{2 . 10^x} AB +$$

$$\frac{1}{2 . 10^{2x}}(A + B) + \frac{1}{2 . 10^{3x}} = ABC + \frac{1}{2 . 10^x}(AB + AC + BC) +$$

$$\frac{1}{2 . 10^{2x}}(A + B + C) + \frac{1}{2 . 10^{3x}}.$$

Donde vemos que un límite del error que se comete en el producto de los tres factores A, B y C es, despreciando los dos últimos sumandos por ser su suma muy pequeña con relación al primero,

$$\frac{1}{2 . 10^x}(AB + AC + BC);$$

y haciendo que este límite sea menor que el que se nos da para el producto, hallaremos el grado con que se deben calcular los factores.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Por consiguiente, x deberá satisfacer á la condición

$$\frac{1}{2 \cdot 10^x}(AB + AC + BC) < \frac{1}{2 \cdot 10^n};$$

de donde

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^n(AB + AC + BC)},$$

para lo cual basta que se tenga

$$10^x < 10^n(AB + AC + BC);$$

luego x ha de ser igual, por lo menos, al número de cifras que tiene la parte entera de la suma de los productos binarios

$$AB + AC + BC,$$

más el número de cifras decimales que ha de tener el producto, que es lo que se quería demostrar.

* 328. Continuando del mismo modo llegaríamos á demostrar que si fuesen m los factores aproximados y hubiéramos de tener el producto de un error menor que $\frac{1}{2 \cdot 10^n}$, era necesario calcular cada uno de los factores con tantas cifras decimales como tiene la parte entera de la suma de los productos de $m-1$ en $m-1$ de los números dados, más el número n de cifras decimales que ha de tener el producto.

* 329. De este principio general se deduce que si se quisiera en menos de $\frac{1}{10^n}$ la potencia m de un número aproximado A, sería necesario calcular éste con un número de cifras decimales igual al número de cifras que tiene la parte entera de mA^{m-1}, más el número n de cifras decimales que ha de tener la potencia.

En efecto; no hay más que suponer que los m factores son iguales á A, en cuyo caso los productos tomados de $m-1$ en $m-1$ se reducen á A^{m-1}, los cuales se hallarán repetidos m veces.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XXXVIII

División de números aproximados.

División de números aproximados.

* 330. En la división de números aproximados distinguiremos tres casos: 1.°, que el dividendo sea aproximado y el divisor exacto; 2.°, que sea exacto el dividendo y aproximado el divisor; 3.°, que dividendo y divisor sean aproximados.

PRIMER CASO. Si se divide un número aproximado en menos de media unidad decimal del orden n por un número exacto B, el error que se cometerá en el producto será menor que

$$\frac{1}{2 \,.\, B \,.\, 10^n}.$$

En efecto; sea a el dividendo aproximado al dividendo verdadero A en menos de media unidad del orden n decimal; de modo que tendremos:

$$A > a \quad y \quad < a + \frac{1}{2 \,.\, 10^n}.$$

Dividiendo por B, se tendrá:

$$\frac{A}{B} > \frac{a}{B} \quad y \quad \frac{A}{B} < \frac{a}{B} + \frac{1}{2 \,.\, B \,.\, 10^n}.$$

De estas desigualdades se deduce que tomando por el verdadero el cociente aproximado, se comete un error menor que la fracción $\frac{1}{2 \,.\, B \,.\, 10^n}$, según queríamos demostrar.

El orden que marque la primera cifra significativa hallada en la conversión de esta fracción ordinaria en decimal, indicará la primera que se debe despreciar en el cociente.

* 331. *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el cociente de dividir un número aproximado por un exacto, es necesario calcular el primero en menos de media unidad decimal marcada por el número de cifras que tiene la parte entera de* $\frac{10^m}{B}$, *siendo* m *el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; sea a el dividendo aproximado en menos de un cierto orden indeterminado x el cual tratamos de hallar; sea B el divisor exacto, y m el número de cifras decimales que ha de tener el cociente. Se tendrá, según el caso anterior, por un límite del error $\frac{1}{2.\mathrm{B}.10^x}$; y como éste ha de ser menor que $\frac{1}{2.10^m}$, se deberá verificar la relación

$$\frac{1}{2\,.\,10^x\,.\,\mathrm{B}} < \frac{1}{2\,.\,10^m},$$

para lo cual es necesario que

$$10^x\,.\,\mathrm{B} > 10^m, \quad \text{de donde} \quad 10^x > \frac{10^m}{\mathrm{B}};$$

luego x, que es el número de cifras decimales del cociente, ha de ser, por lo menos, igual al número de cifras que tiene la parte entera de $\frac{10^m}{\mathrm{B}}$, que es lo que se quería demostrar.

*332. SEGUNDO CASO. *Si se divide un número exacto por un número aproximado en menos de media unidad decimal del orden* n, *el cociente vendrá aproximado en menos del que resulta de dividir el dividendo por el doble del cuadrado del divisor, seguido de tantos ceros como decimales hay en dicho divisor.*

En efecto; sea A el dividendo exacto, y B el divisor cuyo valor aproximado en menos de media unidad del orden n decimal es b.

Tendremos, por lo tanto:

$$\mathrm{B} > b \quad \text{y} \quad \mathrm{B} < b + \frac{1}{2\,.\,10^n},$$

y dividiendo A por estas cantidades, se hallará:

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} > \frac{\mathrm{A}}{b} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} < \frac{\mathrm{A}}{b + \frac{1}{2\,.\,10^n}} = \frac{2\mathrm{A}\,.\,10^n}{2b\,.\,10^n + 1}.$$

Donde vemos que el cociente $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ se halla comprendido entre $\frac{\mathrm{A}}{b}$ y $\frac{2\mathrm{A}.\,10^n}{2b.\,10^n + 1}$; luego el error que se comete será menor que

$$\frac{\mathrm{A}}{b} - \frac{2\mathrm{A}\,.\,10^n}{2b\,.\,10^n + 1} = \frac{\mathrm{A}}{2b^2.\,10^n + b},$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y con más razón se tendrá, llamando E á este error,

$$E < \frac{A}{2b^2 \cdot 10^n},$$

según queríamos demostrar.

*333 *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el cociente de dividir un número exacto por otro aproximado, es necesario calcular éste en menos de media unidad de un orden decimal marcado por el número de cifras decimales que ha de tener el cociente, más las que tiene la parte entera del que resulta de dividir el dividendo por el cuadrado del divisor.*

Sea A un dividendo exacto, b un divisor aproximado en menos de media unidad del orden indeterminado x, el cual queremos hallar, y n el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.

Se tendrá que un límite del error cometido será, según el número anterior, $\frac{A}{2.\ b^2.\ 10^x}$; de modo que x deberá satisfacer á la condición de ser este límite menor que el marcado para el cociente; es decir, que se deberá tener:

$$\frac{A}{2 \cdot b^2 \cdot 10^x} < \frac{1}{2 \cdot 10^n},$$

de donde

$$10^x > \frac{A}{b^2} \times 10^n;$$

para lo cual basta que x sea igual ó mayor que el número de cifras que tiene la parte entera de $\frac{A}{b^2}$, mas n, que es lo que se quería demostrar.

334. TERCER CASO. *Si se dividen entre sí dos números* a *y* b *aproximados en menos de media unidad del orden* n *decimal, se cometerá un error menor que* $\frac{a+b}{2b^2.\ 10^n}$.

Sean A y B dos números, y a y b sus valores aproximados en menos de media unidad del orden n decimal. Supongamos además el caso más desventajoso de estar aproximado por exceso el dividendo A, y por defecto el divisor B.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De modo que se tendrá:

$$A > a - \frac{1}{2 \cdot 10^n} \quad y \quad A < a,$$

$$B < b + \frac{1}{2 \cdot 10^n} \quad y \quad B > b;$$

de aquí deduciremos:

$$\frac{A}{B} > \frac{a - \frac{1}{2 \cdot 10^n}}{b + \frac{1}{2 \cdot 10^n}} \quad y \quad \frac{A}{B} < \frac{a}{b};$$

hallándose el cociente verdadero comprendido entre las dos cantidades que forman los segundos miembros, el error que se comete será menor que su diferencia

$$\frac{a}{b} - \frac{a - \frac{1}{2 \cdot 10^n}}{b + \frac{1}{2 \cdot 10^n}} = \frac{a}{b} - \frac{2a \cdot 10^n - 1}{2b \cdot 10^n + 1} = \frac{a + b}{2b^2 \cdot 10^n + b};$$

y con más razón se tendrá, llamando E á este error,

$$E < \frac{a + b}{2b^2 \cdot 10^n},$$

según queríamos demostrar.

* 335. *Para obtener en menos de media unidad de un cierto orden decimal el cociente de dividir dos números aproximados, es necesario calcular éstos en menos de una unidad de un orden decimal marcado por el número de cifras que tiene la parte entera del cociente de dividir por el cuadrado del divisor la suma de los dos números multiplicada por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales ha de tener el cociente.*

En efecto; sean a y b los números aproximados en menos de una unidad de un cierto orden decimal indeterminado x el cual queremos hallar, y n el número de cifras decimales que ha de tener el cociente.

Siendo x el orden de la aproximación del dividendo y divisor, el error que se cometerá en el cociente será menor, según el número anterior, que $\frac{a+b}{2b^2\,10^n}$, pues haciendo que este límite sea menor

(c) Instituto Cervantes de Madrid

que el error del cociente, se tendrá:

$$\frac{a+b}{2b^2\,10^x} < \frac{1}{2\,.\,10^n};$$

de donde se deduce

$$\frac{10^n\,(a+b)}{b^2} < 10^x.$$

Para que esta relación se verifique es necesario que x sea igual ó mayor que el número de cifras que tiene la parte entera del cociente de dividir por el cuadrado del divisor el producto de la suma de los dos números dados por 10^n, que es lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN. Como la aproximación de un número se obtiene generalmente por decimales, hemos desarrollado esta teoría tomando por límites de los errores en cada caso especial media unidad de un cierto orden decimal; pero de la misma manera se hubieran hallado los que nos hemos propuesto determinar, si los límites de los datos en cada cuestión hubieran sido otros cualesquiera.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

SÉPTIMA PARTE

RAZONES, PROPORCIONES Y PROBLEMAS QUE DE ELLAS DEPENDEN

LECCION XXXIX

Razones.—Proporciones.—Equidiferencias. — Proporciones aritméticas continuas.—Proporciones geométricas.—Proporciones geométricas continuas. —Proporciones armónicas.

RAZONES

336. El resultado de la comparación de dos números se llama *razón* ó *relación* de estos números.

Las *razones* ó *relaciones* pueden ser de dos modos: razones por diferencia ó *aritméticas*, y razones por cociente ó *geométricas*.

337. *Razón por diferencia* ó *aritmética* es el resultado de la comparación de dos números con el objeto de ver en cuánto uno excede ó es excedido del otro; de modo que la razón aritmética de dos números es la diferencia que hay entre ellos: así, la razón aritmética de 6 á 4 es 2, diferencia que hay entre 4 y 6.

338. *Razón por cociente* ó *geométrica* es el resultado de la comparación de dos números con el objeto de ver cuántas veces el uno contiene ó está contenido en el otro; de modo que la razón geométrica de dos números es el cociente que resulta de dividir el uno por el otro: así, la razón geométrica de 12 á 4 es 3, cociente que resulta de dividir 12 por 4; la de 3 á 4 será $\frac{3}{4}$.

En una razón se llama *antecedente* el número que se compara, y *consecuente* aquel con el cual se compara; ambos se llaman términos de la razón.

Las razones se escriben generalmente poniendo el antecedente, después el consecuente, y entre ellos uno ó dos puntos, según que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

la razón sea aritmética ó geométrica. Así, 6.4 es una razón por diferencia ó aritmética, y se lee 6 es á 4. Del mismo modo 12 : 3 expresa una razón geométrica, la cual se lee del mismo modo, 12 es á 3; ambas expresiones pueden ser reemplazadas respectivamente por $6-4$ y $\frac{12}{3}$.

Se dice que una razón geométrica es *inversa* de otra cuando el antecedente de la primera es el consecuente de la segunda, y recíprocamente: así $\frac{12}{4}$ y $\frac{4}{12}$ son dos razones inversas.

El producto de dos razones inversas es igual á la unidad.

339. *La razón geométrica de dos cantidades conmensurables de una misma naturaleza, es la misma que la de los números que expresan las veces que cada una contiene á la medida común.*

Sean dos cantidades A y B de una misma naturaleza y conmensurables, es decir, que tienen una medida común que podremos representar por M; supongamos que esta medida común está contenida p veces en A, y q veces en B; de modo que se tendrá:

$$A = pM \quad y \quad B = qM;$$

y la razón de las dos cantidades A y B será

$$\frac{A}{B} = \frac{pM}{qM},$$

y como M, cualquiera que sea la unidad que se elija, siempre expresa un número que se multiplica á los dos términos de la fracción $\frac{p}{q}$, se podrá simplificar dividiendo por M, lo que nos da

$$\frac{A}{B} = \frac{p}{q},$$

según queríamos demostrar

340. *La razón geométrica de dos cantidades inconmensurables de una misma naturaleza es el límite de las relaciones sucesivas que se obtienen, reemplazando estas cantidades por otras conmensurables que se les aproximan indefiinidamente.*

Sean A y B dos cantidades inconmensurables de una misma naturaleza; supongamos una cantidad M de la misma especie que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

las anteriores, la cual podremos suponer tan pequeña como queramos; consideremos á M como una medida de A y B, y supongamos que está contenida respectivamente en cada una de ellas p y q veces, dando los restos a y b; de modo que se tendrá:

$$A = pM + a \quad y \quad B = qM + b,$$

de donde se deduce

$$A - a = pM \quad y \quad B - b = qM;$$

y dividiendo ordenadamente, se tendrá:

$$\frac{A - a}{B - b} = \frac{pM}{qM} = \frac{p}{q}.$$

Ahora bien; las cantidades a y b son tanto más pequeñas cuanto menor sea M; y como M puede ser tan poco diferente de cero como queramos, los límites de a y b son *cero*; por consiguiente, la relación $\frac{A - a}{B - b}$ tiende hacia un cierto límite, á medida que a y b se aproximan al suyo; pero a y b tienen por límite, como ya hemos dicho, *cero*; luego el límite de la relación $\frac{A - a}{B - b}$ es $\frac{A}{B}$: queda, pues, demostrado que la relación de las dos cantidades inconmensurables A y B es el límite de las relaciones sucesivas de cantidades conmensurables $A - a$ y $B - b$, las cuales se aproximan indefinidamente á las primeras.

PROPORCIONES

341. Proporción es la igualdad de dos razones de una misma especie.

Las proporciones pueden ser *aritméticas* ó *geométricas*, según que las razones que las forman sean también aritméticas ó geométricas. Las proporciones aritméticas se llaman generalmente *equidiferencias*. Cuando sólo se dice una proporción, se sobrentiende es geométrica.

Las proporciones se escriben ordinariamente poniendo una razón á continuacion de la otra, separadas por dos ó cuatro puntos,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

según que la proporción sea aritmética ó geométrica: así, 6. 4 : 10. 8 es una proporción aritmética que se lee: 6 es á 4 como 10 es á 8; y 12 : 3 :: 20 : 5 es una proporción geométrica, la cual se lee del mismo modo, 12 es 3 como 20 es á 5. Las proporciones se escriben también, y es lo más propio, expresando la igualdad de sus razones. Así, las proporciones anteriores se escribirán $6-4=10-8$, y $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$.

En toda proporción hay cuatro términos: los dos primeros forman la primera razón, los dos segundos la segunda; el primero y tercero se llaman *antecedentes* de la proporción, y el segundo y cuarto *consecuentes*. Se llaman *extremos* de una proporción el primero y cuarto número, y *medios* el segundo y tercero.

Equidiferencias.

442. *En toda equidiferencia la suma de extremos es igual á la suma de medios*, y recíprocamente, *si la suma de dos números es igual á la de otros dos, los cuatro números forman una equidiferencia cuyos extremos son los dos sumandos de una suma, y cuyos medios son los otros dos.*

Sean cuatro números a, b, c y d que están en proporción aritmética, es decir, que se tiene

$$a-b=c-d.$$

Agregando á los dos miembros de la igualdad anterior la suma de los consecuentes $b+d$, se tendrá:

$$a-b+b+d=c-d+b+d;$$

y simplificando, será:

$$a+d=b+c,$$

que es lo primero que se quería demostrar.

Sean, en segundo lugar, cuatro números a, b, c y d que cumplen con la condición de ser $a+d=b+c$; quitando de ambos miembros la suma de los términos b y d, se tendrá:

$$a+d-(b+d)=b+c-(b+d),$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

ó lo que es lo mismo, efectuando la resta indicada, se hallará:

$$a + d - b - d = b + c - b - d;$$

y simplificando,

$$a - b = c - d,$$

que es lo segundo que se quería demostrar.

343. *Un extremo de una equidiferencia es igual á la suma de los medios menos el otro extremo; y un medio cualquiera es igual á la suma de los extremos menos el otro medio.*

Sea la equidiferencia $a - b = c - d$; según la propiedad demostrada en el número anterior, se tiene:

$$a + d = b + c,$$

de donde se deduce fácilmente

$$d = b + c - a \quad \text{ó} \quad c = a + d - b,$$

que es lo que se quería demostrar.

Proporciones aritméticas continuas.

344. Se llama *proporción aritmética continua* aquella cuyos términos medios son iguales. Así, la proporción

$$a \,.\, b : b \,.\, c \quad \text{ó} \quad a - b = b - c$$

es una proporción continua.

En la proporción continua el término medio se llama *medio diferencial*, y cualquiera de los extremos, *tercero diferencial.*

La propiedad fundamental en las proporciones aritméticas continuas es que la suma de extremos es igual al duplo del término medio, y *recíprocamente*, si tres números son tales que la suma de dos de ellos es igual al duplo del tercero, dichos tres números formarán una proporción aritmética continua.

De esta propiedad se deduce que un tercero diferencial á dos números es igual al duplo del término medio menos el otro extremo; y un medio diferencial es igual á la mitad de la suma de los otros dos.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Proporciones geométricas.

345. *En toda proporción geométrica el producto de extremos es igual al de medios,* y reciprocamente, *si el producto de dos números es igual al de otros dos, los cuatro formarán una proporción cuyos medios serán los dos factores de un producto y cuyos extremos serán los del otro.*

Será la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

multiplicando esta igualdad por el producto bd de los consecuentes, se tendrá:

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}, \text{ ó lo que es lo mismo } ad = cb,$$

que es lo primero que se quería demostrar.

Sean en segundo lugar, a, b, c y d cuatro números que cumplen con la condición

$$ad = bc,$$

y, por tanto, vamos á demostrar que dichos cuatro números forman una proporción.

Dividiendo la igualdad anterior por el producto de los dos números b y d que han de ser los consecuentes, se tendrá:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}, \text{ y simplificando, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

que es lo segundo que se quería demostrar.

346. *En toda proporción geométrica un extremo cualquiera es igual al cociente de dividir el producto de los medios por el otro extremo, y un medio igual al producto de los extremos partido por el otro medio.*

En efecto; sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Según el número anterior, se tiene:

$$ad = bc,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de donde se saca fácilmente

$$d = \frac{bc}{a} \quad \text{ó} \quad c = \frac{ad}{b}.$$

Proporciones geométricas continuas.

347. Llámase *proporción geométrica continua* aquella cuyos medios son iguales. Así, la proporción

$$a : b :: b : c \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

es una proporción continua.

En la proporción continua el término medio se llama *medio proporcional,* y cualquiera de los extremos *tercero proporcional.*

La propiedad fundamental de las proporciones geométricas continuas, es que el producto de estremos es igual al cuadrado del término medio, *y recíprocamente,* si tres números son tales que el producto de dos de ellos es igual al cuadrado del tercero, dichos tres números forman una proporción geométrica continua.

De esta propiedad se deduce que un tercero proporcional á dos números es igual al cuadrado del término medio partido por el otro extremo; y un medio proporcional entre dos números es igual á la raíz cuadrada del producto de dichos números.

Proporciones armónicas.

*348. Se dice que cuatro números están en *proporción armónica,* ó forman una proporción armónica, cuando la diferencia de los dos primeros es á la de los dos últimos, como el primero es al último.

Los números 12, 8, 20 y 18 forman una proporción armónica, pues se tiene, según la definición:

$$\frac{12-8}{20-15} \quad \text{ó} \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15}.$$

En general, cuatro números a, b, c y d estarán en proporción armónica siempre que entre ellos se verifique la relación

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Se llama proporción *enarmónica* la que resulta de invertir una de las razones que forman la proporción armónica. Así, los cuatro números a, b, c y d formarán una proporción enarmónica si entre ellos se verifica la relación

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{d}{a}.$$

Cuando los dos términos medios de una proporción armónica son iguales, se dice que los tres diferentes que resultan forman una *proporción armónica continua*. Así, los tres números a, b y c formarán una proporción armónica continua, siempre que se verifique la relación.

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c};$$

cuya relación es la misma que se obtendría de suponer los cuatro números a, b y c, de los cuales, como se ve, son iguales los dos términos medios.

* 349. De la definición de proporción armónica se deduce el modo de hallar un término de una proporción de esta especie, conociendo los otros tres.

En efecto; sea, por ejemplo, hallar el cuarto término de la proporción armónica cuyos tres primeros son a, b, y c.

Según le definición, se tendrá:

$$\frac{a-b}{c-x}=\frac{a}{x},$$

de donde se deduce sucesivamente

$$(a-b)\,x=ac-ax$$
$$(2a-b)\,x=ac$$
$$x=\frac{ac}{2a-b}.$$

Si se tratase de hallar un medio armónico, se tendría:

$$\frac{a-b}{x-d}=\frac{a}{d},\ \text{de donde}\ x=\frac{d\,(2a-b)}{a}.$$

Si se quisiera hallar un medio proporcional armónico, se tendría

$$\frac{a-x}{x-c}=\frac{a}{c},\ \text{de donde}\ x=\frac{2ac}{a+c}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si fuese un tercero proporcional armónico el que quisiéramos buscar, tendríamos:

$$\frac{a-b}{b-x}=\frac{a}{x},\ \text{de donde}\ x=\frac{ab}{2a-b}.$$

Cada una de las anteriores fórmulas puede traducirse en regla práctica para hallar el término que representa, lo cual, por ser muy sencillo, lo dejamos al cuidado de los alumnos.

LECCIÓN XL

Propiedades importantes de las proporciones.

Propiedades importantes de las proporciones.

350. *Alternar* una proporción es comparar antecedente con antecedente y consecuente con consecuente; é *invertir* es comparar consecuente con antecedente en ambas razones.

351. *Toda proporción se puede alternar sin que deje de subsistir.*

Es decir, que si se tiene $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

se tendrá también $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

En efecto; de la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce que

$$ad=bc;$$

y partiendo por el producto cd, se tendrá:

$$\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{bd},\ \text{ó simplificado},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

que es lo que se quería demostrar.

352. *Se puede invertir una proporción sin que deje de subsistir.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; según la propiedad fundamental, se

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tiene $ad = bc$ ó $bc = ad$, de donde se deduce fácilmente, dividiendo por el producto ac y simplificando:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

que es lo que se quería demostrar.

353. De los dos principios anteriores se deduce que toda proporción se puede escribir de ocho modos diferentes sin que deje por ello de subsistir.

En efecto; alternando é invirtiendo sucesivamente la proporción $a:b::c:d$, se tendrán los ocho modos de escribir una proporción según se ve á continuación:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$
$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Si se invirtiese la última, obtendríamos otra vez la primera.

354. *En toda proporción la suma de los dos primeros términos es á la suma de los segundos como el segundo es al cuarto, ó como el primero es al tercero.*

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Aumentando á las dos fracciones una unidad, se tendrá:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1;$$

de donde reduciendo el entero á la especie del quebrado, será

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}.$$

Del mismo modo se tendrá en la proporción:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{que} \quad \frac{b+a}{c+d} = \frac{a}{c};$$

luego $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporción la suma de antecedentes es á la suma de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; alternando, se tendrá $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, en la cual se verificarà, como ya se ha demostrado, que

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b},$$

que es lo que se quería demostrar.

355. *En toda proporción la diferencia de los dos primeros términos es á la de los dos últimos como el segundo es al cuarto, ó como el primero es al tercero.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; supongamos que ambas fracciones son mayores que la unidad, y se tendrá:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{ó} \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

de donde $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$; pero de la proporción propuesta se deduce $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; luego poniendo en vez de la razón $\frac{b}{d}$ su igual $\frac{a}{c}$, se tendrá $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$.

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no fuesen mayores que la unidad, invirtiendo la proporción dada $a:b::c:d$, se tendrá $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y aplicando á esta proporción los mismos razonamientos que arriba, puesto que las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{d}{c}$ son mayores que la unidad, será:

$$\frac{b-a}{d-c}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c},$$

que es lo que faltaba demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporción la diferencia de los antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Alternando se hallará $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, y aplicando á esta proporción el principio que acabamos de de-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mostrar, tendremos, según que a sea $>$ ó $<b$,

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad \frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

356. *En toda proporción la suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es á la suya.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

De lo ya demostrado (354 y 355) se deduce, si $a>b$,

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d},$$

de donde

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

y si $a<b$, se tendrá del mismo modo

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{d+c}{d-c},$$

que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *En toda proporción, la suma de antecedentes es á su diferencia como la suma de consecuentes es á la suya.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Alternando y aplicando á esta proporción lo dicho anteriormente, se tendrá, según sea $a>$ ó $<b$,

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d} \quad \text{ó} \quad \frac{a+c}{c-a}=\frac{b+d}{d-b}.$$

357. *En toda proporción se pueden multiplicar ó partir por un mismo número los dos términos de una razón, lo mismo que los antecedentes ó consecuentes, sin que varíe la proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Si se multiplican ó parten los dos términos de la fracción $\frac{a}{b}$ ó $\frac{c}{d}$ por un mismo número, dicha fracción no se altera (155-3.°); luego

(c) Instituto Cervantes de Madrid

la proporción no deja de subsistir multiplicando ó dividiendo por un mismo número los dos términos de una razón.

Si se multiplican ó parten los dos antecendes por un mismo número, lo cual equivale á multiplicar ó partir las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ por dicho número, las razones que resulten también serán iguales; luego la proporción no varía multiplicando ó partiendo los antecedentes por un mismo número.

Del mismo modo se demostraría que se pueden multiplicar ó partir por un mismo número los consecuentes de una proporción sin que por ello varíe.

358. *Las potencias de un mismo grado de los cuatro términos de una proporción están también en proporción.*

Sean los cuatro números a, b, c y d que forman la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Elevando las dos razones que son iguales á la potencia m, se tendrá

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{c}{d}\right)^m \quad \text{ó bien} \quad \frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m},$$

lo cual queríamos demostrar.

359. *Las raíces del mismo índice de los cuatro términos de una proporción forman también proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Extrayendo la raíz m de ambos miembros, se tendrá:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\sqrt[m]{\frac{c}{d}} \quad \text{ó bien} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}},$$

que es lo que se quería demostrar.

360. *Si dos proporciones tienen una razón común, con las otras dos podemos formar proporción.*

Sean las dos proporciones que tienen una razón común

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, se

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tiene evidentemente

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

que es lo que se quería demostrar.

CONSECUENCIA. *Si dos proporciones tienen los antecedentes ó los consecuentes respectivamente iguales, con los consecuentes ó antecedentes se podrá formar una nueva proporción.*

Sean las dos proporciones que tienen los antecedentes iguales

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}, \quad \frac{m}{c} = \frac{n}{d}.$$

Alternando se tiene

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}, \quad \frac{m}{n} = \frac{c}{d},$$

de donde, según el principio anterior, se tendrá:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Del mismo modo se deduciría de las proporciones

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n}, \quad \frac{c}{m} = \frac{d}{n}$$

la nueva proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, según queríamos demostrar.

361. *Los productos de multiplicar término á término dos ó más proporciones, están en proporción.*

Sean las proporciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''};$$

multiplicando, se tendrá:

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'} + \frac{c''}{d''} \quad \text{ó} \quad \frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''},$$

según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Las razones de la nueva proporción es el producto de las razones de las proporciones dadas.

362. *Los cocientes de dividir término á término dos proporciones, están en proporción.*

Sean las dos proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'}$, en las cuales se verifica

$$ad=bc \quad \text{y} \quad a'd'=b'c';$$

dividiendo miembro á miembro, será:

$$\frac{ad}{a'd'}=\frac{bc}{b'c'},$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{a}{a'}\times\frac{d}{d'}=\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'},$$

de donde se deduce

$$\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}:\frac{d}{d'},$$

que es lo que se quería demostrar.

La razón de la nueva proporción es igual al cociente de las razones de las proporciones dadas.

LECCIÓN XLI

Serie de razones iguales.—De las medianas.

Serie de razones iguales.

363. Se dice que varios pares de números forman una serie de razones iguales, cuando la razón que forma cada par es constante.

Así, los pares de números 2 y 3, 4 y 6, 12 y 18, 60 y 90, etc., forman una serie de razones iguales, porque

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{12}{18}=\frac{60}{90}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La razón común evidentemente es $\frac{2}{3}$.

364. *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \ldots = \frac{l}{l'} \quad [1].$$

Llamemos q á la razón común, y se tendrá:

$$a = a'q, \quad b = b'q, \quad c = c'q \ldots l = l'q \quad [2].$$

Sumando ordenadamente y sacando el factor común q del segundo miembro, se hallará:

$$a + b + c + \ldots + l = (a' + b' + c' + \ldots l')\, q.$$

Dividiendo ahora por el factor que multiplica á la razón q y poniendo en vez de esta letra una de las razones iguales que representa, tendremos, según queríamos demostrar,

$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} = q = \frac{a}{a'}.$$

CONSECUENCIA. En toda serie de razones iguales la suma de un cierto número de antecedentes es á la de los consecuentes correspondientes, como la suma de otro cierto número de antecedentes es á la de sus correspondientes consecuentes.

365. *En toda serie de razones iguales, el producto de* m *antecedentes es al producto de los consecuentes correspondientes como la* emésima *potencia de un antecedente es á la* emésima *potencia de su consecuente.*

Multiplicando las igualdades [2] deducidas de la serie de razones iguales [1], se tendrá, suponiendo que sean en número *m:*

$$a \times b \times c \times \ldots \times l = a'q \times b'q \times c'q \times \ldots \times l'q = a' \times b' \times c' \times \ldots \times l' \times q^m.$$

De donde se deduce:

$$\frac{a \times b \times c \times \ldots \times l}{a' \times b' \times c' \times \ldots \times l'} = q^m = \left(\frac{a}{a'}\right)^m = \frac{a^m}{a'^m}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

* 366. *En toda serie de razones iguales, la raíz* emésima *de la suma de las potencias* emésimas *de los antecedentes es á la raíz* emésima *de la suma de las* emésimas *potencias de los consecuentes, como la suma de antecedentes es á la de consecuentes.*

Elevando la serie de razones iguales [1] á la *emésima* potencia, se tendrá esta otra serie:

$$\frac{a^m}{a'^m} = \frac{b^m}{b'^m} = \frac{c^m}{c'^m} = \ldots = \frac{l^m}{l'^m}.$$

de donde se deducirá (364)

$$\frac{a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m}{a'^m + b'^m + c'^m + \ldots + l'^m} = \frac{a^m}{a'^m}.$$

Extrayendo la raíz *emésima* de ambos miembros, se hallará

$$\frac{\sqrt[m]{a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m}}{\sqrt[m]{a'^m + b'^m + c'^m + \ldots + l'^m}} = \frac{a}{a'};$$

pero se tiene

$$\frac{a}{a'} = \frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'};$$

luego

$$\frac{\sqrt[m]{a^m + b^m + \ldots + l^m}}{\sqrt[m]{a'^m + b'^m + \ldots + l'^m}} = \frac{a + b + \ldots + l}{a' + b' + \ldots + l'}.$$

CONSECUENCIA. La raíz *emésima* de la suma de las *emésimas* potencias de los antecedentes de una serie de razones iguales, es á la raíz *emésima* de la suma de las potencias *emésimas* de los consecuentes, como la raíz *enésima* de la suma de las potencias *enésimas* de los antecedentes es á la raíz *enésima* de la suma de las *enésimas* potencias de los consecuentes.

De las medianas.

* 367. Se llama en general *mediana* de varias cantidades una cantidad mayor que la menor, y menor que la mayor.

Entre el infinito número de medianas que entre varias cantidades podemos considerar, dos son las más principales, y se distin-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

guen con los nombres de *medianas diferenciales ó aritméticas* y *medianas proporcionales ó geométricas.*

Se llama *mediana diferencial ó aritmética* aquella que se obtiene dividiendo la suma de varias cantidades por el número de ellas.

Mediana proporcional ó geométrica es la que resulta extrayendo del producto de varias cantidades la raíz cuyo índice sea igual al número de ellas.

Que las cantidades obtenidas según las definiciones anteriores son medianas tales como en general se han definido, es muy sencillo probar.

Sean en primer lugar dos cantidades a y b de las cuales se tenga $a > b$. Si sumamos sucesivamente á los dos miembros de esta desigualdad las cantidades a y b, hallaremos:

$$a + a = 2a > a + b, \quad \text{de donde} \quad a > \frac{a+b}{2}$$

$$a + b > b + b = 2b, \quad \text{de donde} \quad b < \frac{a+b}{2}.$$

Vemos, pues, que $\frac{a+b}{2}$ es una cantidad que se halla comprendida entre a y b, es decir, que es mayor que la menor b y menor que la mayor a; luego es una mediana tal como en general se ha definido.

Esta mediana diferencial tiene la propiedad, como inmediatamente se ve, de diferenciarse de a y b en una misma cantidad $\frac{a-b}{2}$.

Sean, en segundo lugar, varias cantidades

$$a > b > c > d \ldots > l;$$

con las cuales podemos establecer las relaciones

$$a = a,\ a > b,\ a > c,\ a > d \ldots a > l;$$

que sumadas ordenadamente y suponiendo que sean en número p, tendremos:

$$ap > a + b + c + \ldots + l, \quad \text{ó} \quad a > \frac{a+b+c+\ldots+l}{p}.$$

De la misma manera tendremos

$$l < a,\ l < b,\ l < c \ldots\ l = l,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de donde

$$pl < a+b+c+...+l, \quad \text{ó} \quad l < \frac{a+b+c+...+l}{p}.$$

* 368. Pasemos á demostrar que las medianas proporcionales ó geométricas son realmente medianas tal como en general se han definido; es decir, que se hallan comprendidas entre la mayor y menor de las cantidades de que son medianas.

Sean en primer lugar dos cantidades, y supongamos que $a > b$. Multiplicando sucesivamente por a y por b, tendremos:

$$a^2 > ab \quad \text{y} \quad ab > b^2, \quad \text{de donde} \quad a > \sqrt{ab} \quad \text{y} \quad \sqrt{ab} > b.$$

Luego $\sqrt{ab}$, ó sea la mediana proporcional entre a y b, se halla comprendida entre estas cantidades.

Sean, en segundo lugar, varias cantidades en número n $a > b > c... > l$, con las cuales podremos establecer las relaciones

$$a = a, \; a > b, \; a > c ..., \; l = l,$$

que multiplicadas, nos dan:

$$a^n > abc...l \quad \text{ó bien} \quad a > \sqrt[n]{abc...l}.$$

Del mismo modo tendremos:

$$l < a, \; l < b, \; l < c ... \; l = l,$$

de donde

$$l^n < abc...l, \; \text{ó bien} \quad l < \sqrt[n]{abc...l}.$$

Luego la mediana proporcional ó geométrica, ó sea la raíz del producto de varias cantidades cuyo índice sea el número de éstas, es una mediana según la hemos definido en general.

* 369. *La fracción que resulta de sumar término á término varios quebrados desiguales, es una mediana entre estos quebrados.*

Sean los quebrados

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'} > ... > \frac{l}{l'}.$$

Llamando q al valor de la mayor de estas fracciones, tendre-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mos sucesivamente:

$$a = a'q < b'q.\ c < c'q \ldots l < l'q$$
$$a + b + c + \ldots + l < (a' + b' + c' + \ldots + l')\ q$$
$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} < q = \frac{a}{a'}.$$

Del mismo modo llamando q' al valor del menor quebrado, tendremos:

$$a > a'q',\ b > b'q',\ c > c'q' \ldots l = l'q'$$
$$a + b + c + \ldots + l > (a'\ b' + c' + \ldots + l')\ q'$$
$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} > q' = \frac{l}{l'}.$$

Luego la fracción que resulta de sumar término á término varios quebrados desiguales se halla comprendida entre el mayor y menor de estos quebrados, y, por tanto, es una mediana, según queríamos demostrar.

OBSERVACIÓN. Si hacemos $a' = b' = c' = \ldots = l' = 1$, se convertiría la mediana anterior en la mediana diferencial.

* 470. *La mediana aritmética de dos cantidades es mayor que la mediana geométrica.*

Sea $a > b$; representemos por d la diferencia que hay entre estas cantidades, y tendremos que el valor de la mediana aritmética será:

$$\frac{a + b}{2} = \frac{b + d + b}{2} = b + \frac{d}{2}.$$

La mediana geométrica será:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(b + d)\ b} = \sqrt{b^2 + bd}.$$

Como en general $\sqrt{ab}$ es un número inconmensurable, no podremos compararle directamente con la mediana aritmética; pero si los valores de ambas medianas los elevamos al cuadrado, tendremos:

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = b^2 + bd + \frac{d^2}{4}$$
$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = b^2 + bd.$$

El primer cuadrado excede al segundo en la cantidad $\frac{d^2}{4}$; lue-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

go si el cuadrado de la mediana aritmética es mayor que el de la geométrica, es claro que aquélla será mayor que éste, según queríamos demostrar.

OBSERVACIÓN. A medida que la diferencia d vaya creciendo, la mediana aritmética se diferenciará más de la geométrica, y, por el contrario, disminuyendo la diferencia d, las dos medianas tienden á ser iguales, y, por tanto, podrá en algunos casos sustituirse la una por la otra; mas para ello conviene expresar el error que se comete haciendo esta sustitución.

Si representamos por M la mediana aritmética y por m la geométrica, tendremos, según hemos visto anteriormente:

$$M^2 - m^2 = \frac{d^2}{4};$$

y como la diferencia de cuadrados es igual á la suma por la diferencia de las raíces, se tiene:

$$(M + m)\ (M - m) = \frac{d^2}{4};$$

de donde

$$M - m = \frac{d^2}{4(M + m)},$$

cuya fórmula nos expresa el error que se comete sustituyendo una de las medianas por la otra.

* 371. *En toda serie de razones iguales la mediana geométrica entre la suma de los antecedentes y la de los consecuentes, es igual á la suma de las medianas geométricas de los dos términos de cada razón.*

Sea la serie de razones iguales

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{l}{l'} = q.$$

Según lo demostrado ya (364), se deducirá:

$$\frac{a + b + c + \ldots + l}{a' + b' + c' + \ldots + l'} = q,$$

de donde

$$a + b + c + \ldots + l = q\,(a' + b' + c' + \ldots + l').$$

Multiplicando ahora ambos miembros por la suma

$$a' + b' + c' + \ldots + l',$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

se tendrá:

$$(a+b+c+...+l)(a'+b'+c'+...+l') = (a'+b'+c'+...+l')^2 q.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros, se hallará:

$$\sqrt{(a+b+c+...+l)(a'+b'+c'+...+l')} = (a'+b'+e'+...+l')\sqrt{q}.$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro, introduciendo debajo de los radicales las cantidades a', b', c', etc., y haciendo la reducción después de poner sucesivamente en vez de q su valor $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, etc., se tendrá finalmente, según queríamos demostrar:

$$\sqrt{(a+b+c+...+l)(a'+b'+c'+...+l')} = \sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+...+\sqrt{ll'}.$$

LECCIÓN XLII

Cantidades proporcionales.—Regla de tres simple.—Regla de tres compuesta.

Cantidades proporcionales.

372. Si dos cantidades están ligadas entre sí de tal modo que, variando una de ellas, la otra varía forzosamente también y recíprocamente, se dice que la una depende de la otra; por lo que las distinguiremos con los nombres de *causas* y *efectos*.

373. Dos efectos de una misma naturaleza son directamente proporcionales á sus causas; y recíprocamente, dos causas de una misma naturaleza son directamente proporcionales á sus efectos respectivos; cuando suponiendo que una de estas causas es un cierto número de veces mayor ó menor que la otra, su efecto correspondiente es el mismo número de veces mayor ó menor que el otro, y recíprocamente.

Así, por ejemplo, se dice que los espacios que recorre un cuerpo con una velocidad constante, son directamente proporcionales á los tiempos que emplea en recorrerlos, y recíprocamente. En

(c) Instituto Cervantes de Madrid

efecto; si un cuerpo recorre en un cierto tiempo un espacio determinado, en un tiempo doble, triple, etc. recorrerá, según se sabe por la Física, un espacio doble, triple, etc. que el primero; y, por el contrario, si un cuerpo recorre un espacio en un cierto tiempo, para recorrer otro que sea doble, triple, etc., necesita también un tiempo doble, triple, etc. que el primero.

374. Dos efectos de una misma naturaleza son inversamente proporcionales á sus causas; y recíprocamente, dos causas son inversamente proporcionales á sus efectos respectivos; cuando suponiendo que una de estas causas se hace un cierto número de veces mayor ó menor, su efecto correspondiente se hace este mismo número de veces menor ó mayor que el otro, y recíprocamente.

Así, por ejemplo, se dice que los tiempos que tarda un cuerpo para recorrer un espacio son inversamente proporcionales á las velocidades que lleva; y recíprocamente, las velocidades que lleva un cuerpo para recorrer un espacio, son inversamente proporcionales á los tiempos en que ha de recorrerlo. En efecto; por la Física se sabe que si un cuerpo con una cierta velocidad recorre un cierto espacio en una cantidad de tiempo, llevando doble, triple, etcétera velocidad recorrerá el mismo espacio en la mitad, tercera, etc. parte de tiempo que la primera vez.

La proporcionalidad de las cantidades, unas veces se admite como verdades evidentes, otras como convenios, y otras, finalmente, como verdades cuya exactitud se demuestra en las ciencias á que pertenecen.

Regla de tres simple.

375. Habiendo convenido en distinguir con el nombre de *causas* y *efectos* las cantidades que estando íntimamente ligadas entre sí sean directa ó inversamente proporcionales, diremos que *regla de tres simple es aquella por medio de la cual se resuelve el problema de dadas dos causas, que son directa ó inversamente proporcionales á sus efectos, y uno de estos efectos, hallar el otro: ó dados dos efectos que son directa ó inversamente proporcionales á sus causas, y una de estas causas es hallar la otra.*

La regla de tres se dice que es *directa* cuando los efectos son directamente proporcionales á las causas, é *inversa* cuando lo son inversamente.

Como los efectos son directamente proporcionales á las causas, cuando aumentando ó disminuyendo éstas aumentan ó disminu-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

yen aquéllos en la misma proporción, se dice que según las causas vayan de mayor á mayor ó de menor á menor, los efectos van también en la regla de tres *directa* de mayor á mayor ó de menor á menor; es decir, que á mayor ó menor causa corresponde mayor ó menor efecto, y al contrario.

Si los efectos son inversamente proporcionales á las causas, aumentando ó disminuyendo éstas disminuyen ó aumentan en la misma proporción aquéllos; por lo que se dice en las reglas de tres *inversas* que si las causas van de mayor á menor, ó de menor á mayor, los efectos van de menor á mayor ó de mayor á menor; es decir, que á mayor causa corresponde menor efecto, y al contrario.

De modo que la regla de tres simple será directa cuando á mayor ó menor causa corresponda mayor ó menor efecto, ó como se dice abreviadamente, *cuando vaya de mayor á mayor ó menor á menor*. Y será inversa cuando á mayor ó menor causa corresponda á menor ó mayor efecto, ó *cuando vaya de mayor á menor, ó de menor á mayor*.

376. Como el problema que se resuelve por una regla de tres simple directa ó inversa queda reducido en último resultado á encontrar el cuarto término de una proporción, toda la dificultad consiste en plantearla de modo que su cuarto término sea el que se busca, para lo, cual después de bien examinado el problema y visto si el resultado debe aumentar ó disminuir á medida que su causa aumente ó disminuya, ó si, por el contrario, debe aumentar ó disminuir á medida que aquélla disminuya ó aumente, sabremos si la proporción va de mayor á mayor, ó de menor á menor, de mayor á menor ó de menor á mayor; visto lo cual, se colocarán los dos términos conocidos de igual naturaleza del modo que indica el cuadro siguiente:

Si la proporción va { de mayor á mayor / ó / de menor á mayor } el mayor á la derecha.

Y si la proporción va { de menor á menor / ó / de mayor á menor } el menor á la derecha

Después se colocan los otros dos, de modo que el cuarto sea siempre el que se busca.

EJEMPLOS. 1.° Si 8 *hombres* hacen 38 *varas* de una cierta obra en un dia, 12 *hombres* ¿cuántas harán?

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Los datos se escriben así:

8 *hombres* hacen..... 38 *varas*.
12 » cuánto harán? *x* »

Como 12 hombres harán más que 8, x será mayor que 38; por consiguiente, la proporción va de *mayor* á *mayor;* por lo que se planteará poniendo á la derecha el mayor número de hombres, así:

$$8 : 12 :: 38 : x.$$

Dividiendo por 4 los dos términos de la primera razón y luego por 2 los antecedentes, lo cual no altera la proporción (357), se tendrá:

$$1 : 3 :: 19 : x; \quad \text{de donde} \quad x = 19 \times 3 = 57$$

varas que harán los 12 hombres.

2.º 12 *hombres* hacen..... 57 *varas* de una obra.
8 » ¿cuánto harán? *x* »

Debiendo hacer 8 hombres menos que 12, la proporción va de *menor* á *menor*, y se tendrá:

$$12 : 8 :: 57 : x.$$

Dividiendo por 4 los dos términos de la primera razón y por 3 los antecedentes, será:

$$1 : 2 :: 19 : x; \quad \text{de donde} \quad x = 19 \times 2 = 38$$

varas que harán los 8 hombres.

3.º 8 *hombres* hacen una obra en..... 36 *días*.
12 » ¿en cuántos la harán? En *x* »

Como á más hombres se necesita menos tiempo para hacer una cierta obra, la proporción va de *mayor* á *menor,* y, por consiguiente, se tendrá:

$$12 : 8 :: 36 : x;$$

y simplificando, será:

$$1 : 8 :: 3 : x;$$

de donde

$$x = 3 \times 8 = 24$$

días que necesitan emplear los 12 hombres.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

4.º 12 *homores* necesitan..... 24 *días* para hacer una obra.
8 » ¿cuántos necesitan? x »

Como 8 hombres necesitan más días de los que han necesitado 12 hombres para hacer una obra, la proporción irá de *menor* á *mayor*; de modo que se tendrá:

$$8 : 12 :: 24 : x;$$

simplificando, será:

$$1 : 12 :: 3 : x;$$

de donde

$$x = 3 \times 12 = 36$$

días que necesitan los 8 hombres para hacer la obra.

NOTA. Los dos primeros ejemplos son de regla de tres directa, y los dos últimos de regla de tres inversa.

377. Estos ejemplos, lo mismo que todos los que se resuelven por proporciones, pueden también resolverse por el método llamado de *reducción á la unidad*, cuyo método consiste en hacer una aplicación directa en el problema de que se trata, de los usos que de las cuatro operaciones fundamentales hemos explicado al principio de la ARITMÉTICA.

Resolvamos por el método de reducción á la unidad estos cuatro ejemplos:

EJEMPLOS. 1.º Si 8 *hombres* hacen 38 *varas* de una obra en un día, 12 *hombres* ¿cuántas harán?

RESOLUCIÓN. Si 8 hombres hacen 38 varas, un hombre solo hará $\frac{38}{8}$; y 12 harán $\frac{38}{8} \times 12 = \frac{38 \times 12}{8} = 19 \times 3 = 57$ varas.

2.º RESOLUCIÓN. 12 hombres hacen 57 varas; por tanto, un hombre solo hará $\frac{57}{12}$, y 8 hombres harán $\frac{57}{12} \times 8 = 19 \times 3 = 38$ varas.

3.º RESOLUCIÓN. 8 hombres hacen una obra en 36 días; por consiguiente, un hombre solo la haría en 36×8, y 12 hombres la harán en $\frac{36 \times 8}{12} = 3 \times 8 = 24$.

4.º RESOLUCIÓN. Si 12 hombres necesitan para hacer una

(c) Instituto Cervantes de Madrid

obra 24 días, un hombre solo necesitará 12×24, y 8 hombres la harán en $\frac{12 \times 24}{8} = 12 \times 3 = 36$ días.

Cuyos cuatro resultados están conformes con los hallados anteriormente por el método de las proporciones.

Regla de tres compuesta.

378. *Regla de tres compuesta* es aquella por medio de la cual se resuelven los problemas que dependen de dos ó más proporciones.

Para plantear una regla de tres compuesta, no hay más que ir estableciendo las proporciones á que dan origen las diferentes reglas de tres simples que se obtienen suponiendo sucesivamente comunes todas las condiciones menos una en el problema que se resuelve. La cantidad desconocida de la última proporción será la incógnita de la cuestión, la cual se hallará multiplicando ordenadamente todas las proporciones, y determinando el cuarto término de la que resulta después de simplificada.

EJEMPLO. Si 8 *hombres* en 12 *días* han hecho una zanja de 120 *varas* de larga, 18 *varas* de profunda y 3 de ancha, 12 *hombres* en 8 *días* ¿cuántas varas harán de otra zanja de 12 *varas* de profunda y 4 de ancha?

Los datos se escriben así:

8 *homb.* en 12 *días* hacen.... 120 *v.* l. 18 *v.* p. 3 *v.* a.
12 » en 8 » ¿cuántas? x » de 12 » y 4 »

Para plantear este problema se establecerán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 8 : 12 :: 120 : x' \\ 2.^{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12 : 8 :: x' : x'' \\ 3.^{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12 : 18 :: x'' : x''' \\ 4.^{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4 : 3 :: x''' : x \end{array}\right\} \quad [1],$$

las cuales se han obtenido diciendo: si 8 hombres en 12 días hacen una zanja de 120 varas de larga, 18 de profunda y 3 de ancha, 12 hombres en el mismo tiempo, ¿cuántas varas harán de otra que tenga la misma profundidad y anchura? Representando por x' el resultado, se hallará la proporción 1.ª

Si 12 hombres en 12 días hacen una zanja de x' varas de larga,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

18 de profunda y 3 de ancha, ¿cuánto harán en 8 días de otra que tenga la misma profundidad y anchura? Representando por x'' el resultado, se obtiene la proporción 2.ª

Si 12 hombres en 8 días hacen una zanja de x'' varas de larga, 18 varas de profunda y 3 de ancha, ¿cuántas varas harán de otra que tenga 12 varas de profunda y la misma anchura? Representando por x''' el resultado, se obtiene la proporción 3.ª

Y, por último, si 12 hombres en 8 días hacen una zanja de x''' varas de larga, 12 de profunda y 3 de ancha, ¿cuánto harán de otra que, teniendo la misma profundidad, su anchura sea 4 varas? Representando por x el resultado, se hallará la 4.ª y última proporción.

De modo que la última incógnita x nos expresará las varas que harán 12 hombres en 8 días de una zanja de 12 varas de profunda y 4 de ancha, en el supuesto de que 8 hombres en 12 días hacen 120 varas de otra que tiene 18 de profunda y 3 de ancha.

El valor de dicha incógnita x se podría obtener hallando primero el valor de x' en la primera proporción, sustituyendo su valor en la segunda y hallando el de x'', poniendo este valor en la tercera y hallando el de x''', y, por último, sustituyendo este valor en la cuarta y hallando el de x; pero es más sencillo determinar dicho valor multiplicando las proporciones [1], por cuyo medio desaparecen las incógnitas auxiliares x' x'' x'''. Así, efectuando dicha multiplicación, se tiene la proporción compuesta

$$8 \times 12 \times 12 \times 4 : 12 \times 8 \times 18 \times 3 :: 120 : x;$$

la cual se reduce quitando los factores comunes de los dos términos de la primera razón y de los antecedentes, á

$$1 : 9 :: 15 : x;$$

de donde

$$x = 15 \times 9 = 135$$

varas que harán de la zanja en cuestión los 12 hombres en 8 dias.

379. En la práctica se disponen los cálculos abreviadamente, así:

$$\left.\begin{matrix} 8 : 12 \\ 12 : 8 \\ 12 : 18 \\ 4 : 3 \end{matrix}\right\} :: 120 : x.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En donde se sobrentiende que los términos de la primera razón son el producto de las razones comprendidas en la llave, las cuales se forman directamente, como se ha dicho en la regla de tres simple, prescindiendo sucesivamente de todas las condiciones menos una.

Por consiguiente, quitando factores de los términos de la primera razón, se tiene

$$\left.\begin{matrix} 1 : 1 \\ 1 : 1 \\ 2 : 3 \\ 4 : 3 \end{matrix}\right\} :: 120 : x;$$

ó, lo que es lo mismo,

$$8 : 9 :: 120 : x,$$

y dividiendo por 8 los antecedentes, será

$$1 : 9 :: 15 : x; \quad \text{de donde} \quad x = 15 \times 9 = 135,$$

que es el número de varas hallado anteriormente.

LECCIÓN XLIII

Regla de interés.—Regla de descuento.

Regla de interés.

380. Se llama *interés* de un capital lo que éste produce durante un cierto tiempo, prestado con la condición de que cada 100 unidades de dinero reporten al prestador una cierta cantidad anual, la cual se llama *tanto por ciento.*

El interés puede ser *simple* y *compuesto;* se dice que el interés es simple cuando las ganancias que produce un capital cada año no forman parte del mismo capital, y, por consiguiente, no producen nada. El interés se llama compuesto cuando los producidos en cada año por el capital, se agregan al mismo para que á su vez ganen lo que les corresponda en lo sucesivo.

381. *Regla de interés* es aquella por medio de la cual se determina la ganancia de un capital prestado á un tanto por 100 anual, ya sea á interés simple ó compuesto.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En la regla de interés hay que considerar el *capital* que se impone ó presta, el *tanto* por 100 á que se presta, el *tiempo* que dura el préstamo y la *ganancia* que reporta.

382. INTERÉS SIMPLE. La regla de interés simple está fundada en los dos principios siguientes:

1.° *Las ganancias de un capital son proporcionales á los tiempos que está prestado.*

2.° *Las ganancias de dos capitales prestados por un mismo tiempo son proporcionales á dichos capitales.*

383. *El producto del capital por el interés y por el tiempo es igual á cien veces la ganancia.*

En efecto; sea C el capital, t el tiempo, i el tanto por 100 y G la ganancia; según los dos principios fundamentales de la regla de interés, queda el problema reducido á la siguiente regla de tres compuesta:

Ganando 100 *reales* en 1 año i *reales*,
el capital C en t años, ¿cuánto ganará? G.

Llamando x á la ganancia del capital C en un año, se tendrán las proporciones

$$\begin{aligned} 100 &: C :: i : x \\ 1 &: t :: x : G, \end{aligned}$$

las cuales, multiplicadas ordenadamente, nos dan, después de quitar el factor x de los dos términos de la segunda razón,

$$100 : Ct :: i : G;$$

de donde se deduce

$$Cit = 100\,G,$$

que es lo que se quería demostrar.

384. De la relación anterior se deduce que conociendo tres de las cuatro cantidades que entran en la regla de interés, se puede determinar la cuarta; por cuyo medio se obtienen cuatro expresiones ó fórmulas, con las cuales se resuelven todos los problemas relativos al interés simple.

Así, la expresión ó fórmula que da el valor de la *ganancia*, conociendo el *capital*, *interés* y *tiempo*, es

$$G = \frac{Cit}{100} \qquad [1].$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La fórmula que da el *capital* en valores de la *ganancia*, *interés* y *tiempo*, es:

$$C = \frac{100\ G}{it} \qquad [2].$$

La que da el *interés*, cuando se conoce el *capital*, *tiempo* y *ganancia*, es:

$$i = \frac{100\ G}{Ct} \qquad [3].$$

Y, por último, la que da el *tiempo* en valores del *capital*, *interés* y *ganancia*, es:

$$t = \frac{100\ G}{Ci} \qquad [4].$$

Con estas cuatro fórmulas se pueden resolver todos los problemas relativos al interés simple.

EJEMPLO. 1.° *¿Qué ganancia producirá en* 4 *años el capital* 8000 *duros, al* 6 *p.* % *anual?* (*)

Aplicando la fórmula [1], se tendrá:

$$G = \frac{8000 \times 6 \times 4}{100} = 80 \times 6 \times 4 = 1920\ \textit{duros}.$$

2.° *¿Qué capital se deberá poner al* 6 *p.* % *anual para que en* 4 *años produzca* 1920 *duros?*

Por la fórmula [2] se tiene:

$$C = \frac{100 \times 1920}{6 \times 4} = \frac{19200}{24} = 8000\ \textit{duros}.$$

3.° *¿A qué interes se deberá prestar el capital* 8.000 *duros para que en* 4 *años produzca* 1920 *duros?*

De la fórmula [3] se deduce que

$$i = \frac{100 \times 1920}{8000 \times 4} = \frac{192000}{32000} = \frac{192}{32} = 6.$$

(*) El signo p. %, que se lee *por ciento*, sirve para expresar el tanto por 100 á que se presta ó impone un capital.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

4.° *¿Cuánto tiempo se deberá tener prestado al* 6 *p.* % *el capital* 8.000 *duros, para que dé* 1920 *duros de ganancia?*

Según la fórmula [4], se tiene:

$$t = \frac{100 \times 1920}{8000 \times 6} = \frac{192000}{48000} = \frac{192}{48} = 4 \text{ años.}$$

385. INTERÉS COMPUESTO. El objeto principal de la regla de interés compuesto es hallar en lo que se convierte un capital al cabo de un cierto tiempo prestado á interés compuesto á un tanto por ciento anual.

En las cuestiones de interés compuesto se conviene en que al final de cada unidad de tiempo se incorpore al capital los intereses devengados en aquella unidad, para que estos ganen en lo sucesivo sus intereses correspondientes.

Esto supuesto, por medio de varias reglas de interés simple podremos hallar en lo que se convierte un capital prestado á interés compuesto.

En efecto; suponiendo que la unidad de tiempo á que está impuesto un capital sea el año, es decir, que el tanto por ciento de ganancia sea anual, podremos hallar lo que dicho capital produce en el primer año, y uniendo ganancias y capital obtendremos el del segundo año; cuya ganancia podremos también determinar, la cual, agregada al capital del segundo año, tendremos el del tercero, y así sucesivamente. El último capital hallado expresará en lo que se convierte el capital propuesto al cabo de un cierto tiempo, prestado á interés compuesto, y la diferencia entre estos dos capitales será la ganancia que dicho capital ha producido.

Por este medio se determina la fórmula que liga las cuatro cantidades que entran en las cuestiones de interés compuesto.

Para lo cual supondremos que sea c el capital actual, t el tiempo, r el interés que produce un real en un año, y C el capital unido con los intereses al fin de los t años.

Puesto que un real produce r al cabo de un año, el capital c producirá cr; por lo tanto, al fin del primer año el capital c se habrá convertido

$$c + cr = c\,(1 + r).$$

Este capital se convertirá al final del segundo año en

$$c\,(1 + r)\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Del mismo modo se verá que al final del tercer año se tendrá por capital:

$$c(1+r)^3;$$

y en general al cabo de t años se tendrá:

$$C = c(1+r)^t.$$

Esta fórmula liga las cuatro cantidades C, c, r y t, de la cual se deducirá el valor de una de ellas, conociendo el de las otras tres.

Cuando t no es un número exacto de años, sino que expresa un cierto número de años, más un cierto número de meses ó días, se determina por la fórmula en lo que se reduce el capital al cabo de los años que hay en t, y al resultado se le añaden los intereses del mismo, correspondientes á los meses ó días que contiene además el tiempo t.

Regla de descuento.

386. La regla de *descuento* tiene por objeto determinar la cantidad que debe descontarse de una letra que debiéndose pagar al cabo de cierto tiempo, se cobra con un tanto por ciento de descuento anual antes de finalizar el plazo.

Si una persona tiene una *letra* ó *pagaré* que debe cobrar al cabo de un cierto tiempo, y quiere verificarlo antes de finalizar el plazo, es justo que si halla quien tome dicha letra ó pagaré, convenga en que el tomador no dé en la actualidad el valor total de la letra que se llama *nominal*, sino que debe descontar los intereses que produciría la cantidad que anticipa, llamada *valor actual;* por lo tanto, el problema que se ha de resolver es hallar qué cantidad debe pagar en la actualidad para que, suponiendo que deba ganar un tanto por ciento anual, las ganancias en el tiempo que hay hasta el vencimiento, unidas á la cantidad que adelanta, den una suma igual al valor nominal de la letra.

Sin embargo que lo dicho anteriormente es lo que está más en armonía con la justicia, no es lo que más se usa en el descuento de los pagarés, sino que el tomador de la letra, ó sea el que anticipa el dinero, no sólo cobra ó descuenta los intereses de la cantidad que adelanta, ó sea del valor actual de la letra, sino que también descuenta los intereses del descuento; y, por consiguiente, este método no es tan justo como el anterior, puesto que el toma-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dor de la letra cobra intereses de una cantidad que no presta, cual es la diferencia que hay entre el valor actual de la letra y el valor nominal.

Por consiguiente, distinguiremos dos clases de descuentos: el que se hace del valor actual de la letra, y el del valor nominal de la misma.

387. DESCUENTO DEL VALOR ACTUAL DE LA LETRA. Siendo V el valor nominal de la letra V′ el valor actual, i el tanto por ciento del descuento, t el tiempo á que dicha letra es pagadera, y D el descuento que hay que hacer, se tendrá que D debiendo ser la ganancia del capital V′ en el tiempo t, será (385):

$$D = \frac{V'it}{100} \quad \text{ó} \quad 100\,D = V'it \qquad [1].$$

Por otra parte, se tiene que el valor nominal de una letra es igual al valor actual, más el descuento; luego

$$V = V' + D \qquad [2],$$

de donde

$$V' = V - D.$$

Poniendo el valor de V′ en la igualdad [1], se tiene:

$$100\,D = (V - D)\,it = Vit - Dit.$$

Agregando á los dos miembros el producto Dit, y sacando D factor común, se tendrá:

$$D\,(100 + it) = Vit;$$

de donde dividiendo por $100 + it$, se tiene:

$$D = \frac{Vit}{100 + it}.$$

Por esta fórmula se halla el descuento del valor actual de una letra cuyo valor nominal es V, t el tiempo á que es pagadera, é i el tanto por ciento.

388. Si en vez de hallar en la igualdad [2] el valor de V′ hallásemos el del descuento D, y lo sustituyéramos en igualdad [1], se tendría:

$$100\,(V - V') = V'it \quad \text{ó} \quad 100\,V - 100\,V' = V'it.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Agregando á los dos miembros 100 V′, y sacando V′ factor común, se tendrá:

$$100\,V = V'\,(100 + it),$$

de donde dividiendo por $100 + it$, se tiene el valor actual de la letra

$$V' = \frac{100\,V}{100 + it}.$$

389. DESCUENTO DEL VALOR NOMINAL DE LA LETRA. Como el descuento no es más que la ganancia que produce el capital del cual se descuenta, impuesto por el tiempo t al i p. %, se tendrá, representando dicho descuento por D′:

$$D' = \frac{Vit}{100}.$$

Por cuya fórmula se halla el valor del descuento que generalmente hacen los comerciantes, ó sea el descuento del valor nominal de la letra.

Comparando este descuento con el hallado anteriormente, se ve que es mayor, como en realidad debía ser, y la diferencia que hay entre ellos no es más que los intereses al i p. % del verdadero descuento, correspondientes al tiempo t.

En efecto; dicha diferencia es

$$D' - D = \frac{Vit}{100} - \frac{Vit}{100 + it} = \frac{Vi^2t^2}{100\,(100 + it)};$$

y los intereses del descuento D son también:

$$\frac{\dfrac{Vit}{100 + it} \times it}{100} = \frac{Vi^2t^2}{100\,(100 + it)}.$$

LECCIÓN XLIV

Regla de sociedad.—Regla de aligación.—Regla conjunta.

Regla de sociedad.

390. La regla de sociedad tiene por objeto hallar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios asociados, conociendo los capitales de éstos, los tiempos que los tuvieron impues-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tos y la ganancia ó pérdida correspondientes al capital de todos, llamado capital social.

La regla de sociedad está fundada en los tres principios siguientes:

1.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están impuestos un mismo tiempo en una sociedad, son proporcionales á dichos capitales.*

2.° *Las ganancias ó pérdidas de un capital son proporcionales á los tiempos que dicho capital está impuesto en la sociedad.*

3.° *Las ganancias ó pérdidas de dos capitales que están impuestos diferentes tiempos en una sociedad, son proporcionales á los productos de los tiempos por los capitales.*

De estos tres principios, los dos primeros se admiten como evidentes, aunque el segundo no es completamente exacto; el tercero se deduce de los dos primeros.

En efecto; sean C y C′ dos capitales que están impuestos en una sociedad durante los tiempos T y T′; sean G y G′ las ganancias correspondientes. Representemos por G″ la ganancia del capital C impuesto durante el tiempo T′, y tendremos, según el segundo principio, que las ganancias G y G″ serán proporcionales á los tiempos que el capital C ha estado impuesto; es decir, que se tendrá:

$$\frac{G}{G''} = \frac{T}{T'}.$$

Las ganancias G″ y G′ correspondientes á los capitales C y C′ impuestos por el tiempo T′, serán, según el primer principio, proporcionales á dichos capitales; esto es:

$$\frac{G''}{G'} = \frac{C}{C'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y quitando el factor común G″ de los dos términos de la primera razón, se tiene:

$$\frac{G}{G'} = \frac{C \times T}{C' \times T'},$$

que es lo que se quería demostrar.

391. Quedando, pues, reducida la regla de sociedad á dividir entre varios socios un cierto capital, proporcionalmente á los capi-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tales que impusieron, si el tiempo es el mismo; á los tiempos, si los capitales son iguales, y á los productos de los tiempos por los capitales cuando tiempos y capitales son distintos, veamos cómo, en general, se resuelve el problema de *dividir un cierto número en partes proporcionales á atros números dados.*

Sea N el número que hay que dividir en partes proporcionales á los números a, a', a'', a'''... Representemos por x, x', x'', x'''... las partes en que N queda dividido, y según las condiciones del problema, se tendrá:

$$\frac{a}{x} = \frac{a'}{x'} = \frac{a''}{x''} = \ldots$$

Como en toda serie de razones iguales la suma de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente (364), y observando que la suma de los consecuentes $x+x'+x''+x'''+\ldots$ es igual al número propuesto N, se tendrá, representando por S la suma de los antecedentes, $a+a'+a''+a'''\ldots$

$$\frac{S}{N} = \frac{a}{x} = \frac{a'}{x'} = \frac{a''}{x''} = \ldots$$

De donde podemos deducir los valores de x, x', x''..., los cuales se hallan *dividiendo el número propuesto por la suma de los números á que han de ser proporcionales las partes, y multiplicando el cociente por cada uno de estos números.*

EJEMPLO 1.º

Tres hicieron compañía, y pusieron..... { el 1.º 15000 *rs.*; el 2.º 20000 »; el 3.º 5000 » } *Ganaron* 5000 *rs.*

Se quiere saber cuánto corresponde á cada uno.

El capital *social* es evidentemente 40 000 rs.; la ganancia, ó sea el número que hay que dividir, es 5 000 rs., y los números á que han de ser proporcionales las partes son 15 000, 20 000 y 5 000.

Luego la parte de cada uno será, según la regla anterior:

la del 1.º..... $\frac{5000 \times 15000}{40000} = \frac{75000000}{40000} = \frac{7500}{4} = 1875$ *rs.*

la del 2.º..... $\frac{5000 \times 20000}{40000} = \frac{100000000}{40000} = \frac{10000}{4} = 2500$ *rs.*

la del 3.º..... $\frac{5000 \times 5000}{40000} = \frac{25000000}{40000} = \frac{2500}{4} = 625$ *rs.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La suma de las partes es, como debe ser, igual á la ganancia, 5000 rs.

EJEMPLO 2.º

Tres hicieron compañía, y pusieron... { el 1.º 3000 *rs.* por 8 *meses.* / el 2.º 2500 » por 6 » / el 3.º 4000 » por 9 » } *Ganaron* 10000 *rs.*

Se quiere saber lo que corresponde á cada uno.

El número que hay que dividir es 10 000; los números á que han de ser proporcionales las partes de cada uno son, según el tercer principio, 24 000, 15 000 y 26 000, productos de los capitales por los tiempos, y la suma de estos números es 75 000; de modo que la parte de cada uno será, según la regla dada:

$$\text{la del 1.º} \ldots\ldots \frac{240000000}{75000} = \frac{240000}{75} = 3200\ rs.$$

$$\text{la del 2.º} \ldots\ldots \frac{150000000}{75000} = \frac{150000}{75} = 2000\ rs.$$

$$\text{la del 3.º} \ldots\ldots \frac{360000000}{75000} = \frac{360000}{75} = 4800\ rs.$$

Regla de aligación.

392. La regla de aligación tiene por objeto determinar el precio medio á que se debe vender la unidad de una mezcla de varias substancias, cuyos precios son distintos; ó determinar las unidades de cada especie que se deben mezclar para poder vender la unidad de la mezcla á un precio medio determinado.

393. El precio medio á que debe venderse la unidad de una mezcla de varias substancias de distinto precio, sabiendo las unidades mezcladas y el precio de cada una, se determina *multiplicando el valor de cada unidad por el número de las que se mezclan, sumando estos productos, y después dividiendo la suma por el número de unidades mezcladas.*

En efecto; sean a, b, c, d... las unidades que se mezclan, cuyos precios respectivos son p, p', p'', p'''...; el precio de estas unidades será evidentemente $ap + bp' + cp'' + dp''' + \ldots$

De modo que dividiendo el valor de la mezcla por el número de unidades que hay mezcladas, se tendrá el precio medio de la unidad de la mezcla; esto es:

$$\text{Precio medio} = \frac{ap + bp' + cp'' + dp''' + \ldots}{a + b + c + d + \ldots}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

EJEMPLO. Mezclando 24 *fanegas de trigo* de 60 *rs.* con 15 *fanegas* de á 50 *rs.*, y con 30 *fanegas* de á 46 *rs.*, *¿á cómo se debe dar la fanega de la mezcla?*

Se dispone la operación del modo siguiente:

Precio de 24 *fs.* á 60 *rs* ..... $60 \times 24 = 1440$ *rs.*
Id. de 15 » á 50 » ..... $50 \times 15 = 750$ »
Id. de 30 » á 46 » ..... $46 \times 30 = 1380$ »
Id. de 69 fanegas mezcladas. ..... 3570 *rs.*

Id. de la fanega de la mezcla $\frac{3570}{69} = \frac{1190}{23} = 51$ *rs.* y 74 céntimos próximamente.

394. En la resolución del segundo problema, ó sea hallar el número de unidades de distinto precio que se han de mezclar para que la unidad de la mezcla sea de un precio medio determinado, hay que considerar dos casos: 1.°, que sólo sean dos las especies que se han de mezclar; 2.°, que sean más de dos.

Desde luego se comprende que este segundo problema es indeterminado, en el caso de ser el precio medio mayor que el precio menor, y menor que el mayor; é imposible cuando el precio de la unidad de la mezcla haya de ser mayor que el mayor precio de las especies mezcladas, ó menor que el menor de dichas especies. En efecto; en el primar caso, una vez determinada una solución, se tendrán todas las que se quieran multiplicando los números de dicha solución por un mismo número entero ó fraccionario. En el segundo es imposible; porque si el precio máximo de las unidades que se han de mezclar es 100 reales, por ejemplo, la unidad de la mezcla nunca puede valer más de 100 reales; luego si se exige que ha de valer más, se exige un imposible.

Sin embargo; la unidad de una mezcla puede venderse á un precio mayor que el máximo de las especies mezcladas; pero entonces dicho precio no es *medio* entre los precios intrínsecos de las unidades que se mezclan, sino que el autor de la mezcla pone el precio que quiere, atendiendo á sus intereses particulares, ó al trabajo que emplea en la confección de dicha mezcla.

Prescindiendo de estos casos especiales, pasemos á resolver los dos que comprenden el segundo problema.

PRIMER CASO. Siendo dos las especies que se han de mezclar cuyos precios respectivos son p y p', m el precio medio comprendido entre p y p' y x é y las unidades que de cada especie se han de mezclar, se tendrá que por cada unidad de la especie superior

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cuyo precio supongamos sea p, que se venda al precio medio m, habrá una pérdida igual á la diferencia de ambos precios; es decir, de $p—m$ unidades de dinero. Al contrario, por cada unidad de la especie inferior cuyo precio es p' que se venda al precio m, se tendrá una ganancia marcada por la diferencia $m—p'$ de dichos precios; por consiguiente, en x unidades de la primera especie habrá una pérdida de $x\ (p—m)$, y en y de la segunda, una ganancia representada por $y\ (m—p')$; y como entre estas dos cantidades ha de haber compensación, se deberá tener

$$x\,(p-m) = y\,(m-p');$$

de donde se deduce

$$x = \frac{y\,(m-p')}{p-m}.$$

De esta fórmula se saca el valor de x correspondiente á cada valor particular que se le dé á y; de modo que dando á y el valor $p—m$ ó haciendo $y=p—m$, resulta para x el valor $m—p'$; luego tomando un número de unidades de la especie superior igual á la diferencia que hay entre el precio medio y el inferior, y un número de esta especie inferior igual al exceso que hay del precio superior al precio medio, se tendrá una primera solución. Si se quisieran otras, no habría más que multiplicar por un mismo número los hallados en esta primera solución.

EJEMPLO. *¿Cuántas fanegas de trigo de á* 60 *rs. y de á* 47 *se deben mezclar para que resulte el trigo á* 54 *rs.?*

Se dispondrá la operación del modo siguiente:

PRECIO DE UNIDADES MEZCLADAS	PRECIO MEDIO	UNIDADES QUE SE DEBEN MEZCLAR
60 *rs.*	54 *rs.*	54 — 47 = 7 *fs.* de á 60 *rs.*
47 »		60 — 54 = 6 » de á 47 »

Comprobación.

7 *fs.* á 60 *rs.* importan...		420 *rs.*
6 » á 47 »		282 »
Fanegas mezcladas.....	13	Valor de todas....	702 *rs.*
Valor de la unidad de la mezcla...		702 : 13 = 54 *rs.*	

SEGUNDO CASO. Cuando son más de dos las especies que se han de mezclar, se van combinando de dos en dos cuyos precios

(c) Instituto Cervantes de Madrid

comprendan el precio medio, y se obtendrán así las diferentes soluciones á que puede dar lugar este problema.

EJEMPLO. *¿Cuántas fanegas de trigo de* 60 *rs., de* 48, *de* 54 *y de* 46 *se deben mezclar para obtener trigo de* 50 *rs.?*

Se dispondrá la operación así:

PRECIO DE UNIDADES MEZCLADAS	PRECIO MEDIO	UNIDADES QUE SE DEBEN MEZCLAR
60 *rs.*	50 *rs.*	50 — 48 = 2 *fs.* de á 60 *rs.*
54 »		50 — 46 = 4 » de á 54 »
48 »		60 — 50 = 10 » de á 48 »
46 »		54 — 50 = 4 » de á 46 »

Comprobación.

2 *fs.*	á 60 *rs.*	importan..	120 *rs.*
4 »	á 54 »	.....	216 »
10 »	á 48 »	.....	480 »
4 »	á 46 »	.....	184 »
Fanegas mezcladas....	20	Valor de todas....	1000 *rs.*

Valor de la unidad de la mezcla... 1000 : 20 = 50 *rs.*

Se pueden hallar otras soluciones combinando las especies dadas de otro modo, ó multiplicando por un mismo número los de la solución ya hallada.

Regla conjunta.

395. La regla conjunta ó de cambio, tiene por objeto determinar la equivalencia que hay entre las monedas de dos países, por las relaciones conocidas de estas monedas con las de otros países diferentes.

La regla conjunta está fundada en que *los productos de varias equivalencias, en la que la especie del primer miembro de cada una es la misma que la del segundo de la anterior, son también equivalentes; siendo el primer producto de la primera especie y el segundo de la última.*

Es decir, que si se tienen, por ejemplo, las equivalencias

$$\begin{aligned} 8^a &<> 5^b \text{ (*)} \\ 3^b &<> 7^c \\ 9^c &<> 4^d, \end{aligned}$$

(*) El signo <> que se lee *equivalente á,* expresa que lo que hay antes de él llamado primer miembro, es equivalente á lo que hay después; en el caso presente indica que 8 unidades de la especie a equivalen á 5 de la especie b.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

se tendrá

$$8 \times 3 \times 9^a <> 5 \times 7 \times 4^d.$$

En efecto; multiplicando la primera equivalencia por el número abstracto 3 y la segunda por 5, se tiene:

$$\begin{aligned} 8 \times 3^a &<> 5 \times 3^b \\ 3 \times 5^b &<> 7 \times 5^e, \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$8 \times 3^a <> 7 \times 5^c.$$

Multiplicando esta última por 9 y la tercera de las propuestas por 7×5, será:

$$\begin{aligned} 8 \times 3 \times 9^a &<> 7 \times 5 \times 9^c \\ 9 \times 7 \times 5^c &<> 5 \times 7 \times 4^d, \end{aligned}$$

de donde

$$8 \times 3 \times 9^a <> 5 \times 7 \times 4^d;$$

y así sucesivamente se continuaría si hubiese más, por cuyo medio llegaríamos á demostrar lo que se quería.

Esto supuesto, para plantear y resolver un problema de regla conjunta, se representa por x el número de monedas que se busca, y después se establecen las relaciones conocidas, de modo que la primera especie de cada una sea de la misma que la segunda de la relación anterior, hasta llegar á aquella cuya última especie sea de la misma que la primera escrita; se multiplican entre sí estas equivalencias, se quitan los factores comunes que haya, y se halla el valor de la incógnita x, que expresará el resultado pedido.

EJEMPLO. Suponiendo que una *libra esterlina* equivale á 25 *francos*, 5 *francos* á 19 *reales* y 20 *reales* á un *duro*, ¿cuántos duros tendrán 347 *libras esterlinas?*

Se establecerán las relaciones del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x\ ds. &<> 347\ lib. \\ 1\ lib. &<> 25\ fr. \\ 5\ fr. &<> 19\ rs. \\ 20\ rs. &<> 1\ ds; \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$x \times 1 \times 5 \times 20 <> 347 \times 25 \times 19 \times 1\ duros,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y dividiendo por lo que multiplica á x, se tendrá:

$$x <> \frac{347 \times 25 \times 19}{5 \times 20} = \frac{347 \times 19}{4} = \frac{6593}{4} = 1648\ ^1/_4\ \textit{duros},$$

ó lo que es igual, 347 *libras esterlinas* equivalen á 1648 *duros* y 5 *reales*.

LECCIÓN XLV

Regla de falsa posición.

Regla de falsa posición.

* 396. *La regla de falsa posición* se define diciendo que es aquella en que, tomando un número arbitrario, pero conocido, por el valor de la cantidad que se busca, y haciendo con él las operaciones indicadas en el enunciado de un problema, llegamos á obtener exacta ó aproximadamente dicha cantidad, por medio de correcciones convenientes.

La regla de falsa posición se divide en *simple* y *doble*, según que sean uno ó dos los números supuestos.

Se llama número supuesto aquel que se considera como el número que se busca, y el cual se somete á todas las condiciones del problema. El resultado que se obtiene no es en general el que se debía obtener; porque si lo fuese, el número que se había supuesto sería precisamente el número que se buscaba. No siendo, como decimos, el resultado que se obtiene igual al que se debía obtener, habrá una diferencia, y á esta diferencia se le llama *error* de aquel supuesto.

Se da el nombre de *corrección* correspondiente á un supuesto dado, al número que, agregado ó sustraído de dicho supuesto, nos da el número que se busca.

En todo problema se trata en general de hallar un número que cumpla con ciertas condiciones, las cuales vienen expresadas por las operaciones de la Aritmética, de tal modo que el resultado de efectuar estas operaciones los números conocidos y la incógnita de la ecuación debe ser siempre un cierto número determinado, dando origen así á una igualdad de la forma

$$f(x) = \mathrm{K} \qquad [1],$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

en la cual $f(x)$, que se lee función de x representa la serie de operaciones á que en último resultado debe someterse el número que se busca x, y el segundo miembro K es un número conocido que expresa el resultado de las operaciones efectuadas en el primer miembro.

Según esto, cuando en vez de x pongamos un número conocido a, y hagamos con él todas las operaciones que haríamos con el número x, si fuera conocido, llegaremos á un cierto resultado K′ que será distinto de K, de modo que se tendrá:

$$f(a) = K',$$

de donde

$$f(x) - f(a) = K - K'.$$

La diferencia K — K′ expresará precisamente el *error* correspondiente al número supuesto a.

La regla de falsa posición se funda en que *los resultados obtenidos al poner números particulares en vez de* x *en el primer miembro de la igualdad* [1], *son proporcionales á estos números.*

Este principio, exacto cuando la incógnita x sólo viene elevada á la primera potencia y ligada con los datos de la cuestión por vía de suma, resta, multiplicación ó división, deja de serlo cuando viene elevada á una potencia cualquiera distinta de la unidad, ó ligada con los datos por medio de una extracción de raíces.

* 397. Admitiendo como cierto en todos casos este principio, podremos deducir las dos reglas siguientes:

1.ª *En la regla de falsa posición simple, el número que se busca es igual al cuarto término de la proporción cuyos tres primeros son* (f (a) = K′), K *y el número supuesto* a.

2.ª *En la regla de falsa posición doble, el número que se busca es igual á la diferencia algebraica de los productos de cada supuesto por el error del otro, dividida por la diferencia algebraica de los errores correspondientes.*

La primera regla es exacta cuando se trata de problemas en los que la incógnita, según hemos dicho anteriormente, sólo viene elevada á la primera potencia. En efecto; si al expresar todas las condiciones de un problema por medio de las operaciones aritméticas sólo aparece la incógnita que representaremos por x, elevada á la primera potencia, podremos reunir todos los términos que contengan esta potencia en uno sólo de la forma Ax, en el cual A expresa un número cualquiera, y si representamos por K el resulta-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

do que se debe obtener cuándo en vez de x se sustituya el número que se busca, obtendremos la igualdad

$$Ax = K.$$

Si ahora ponemos en vez de x dos números cualesquiera a y a' y representamos por k y k' los resultados, se tendrá:

$$Aa = k \quad y \quad Aa' = k',$$

de donde se deduce, dividiendo ordenadamente,

$$\frac{a}{a'} = \frac{k}{k'},$$

cuya igualdad justifica el enunciado del principio.

Pasemos á la demostración de la segunda regla, y para ello representemos por x el número que se busca, por a y b los dos números supuestos, y por α y β los errores correspondientes; de modo que se tendrá:

$$f(a) - K = \alpha, \; f(b) - K = \beta.$$

Según la hipótesis, se tiene:

$$\frac{f(a)}{f(x)} = \frac{f(a)}{K} = \frac{a}{x} \quad y \quad \frac{f(b)}{f(x)} = \frac{f(b)}{K} = \frac{b}{x},$$

y en virtud de una propiedad de las proporciones (353), se tendrá:

$$\frac{f(a) - K}{K} = \frac{\alpha}{K} = \frac{a - x}{x} \quad y \quad \frac{f(b) - K}{K} = \frac{\beta}{K} = \frac{b - x}{x}.$$

De estas dos relaciones, se deduce:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a - x}{b - x};$$

y de ésta se saca sucesivamente

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{a - x}{a - b},$$

$$\frac{a\alpha - b\alpha}{\alpha - \beta} = a - x,$$

$$x = a - \frac{a\alpha - b\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{a\alpha - a\beta - a\alpha + b\alpha}{\alpha - \beta},$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y, finalmente, $x = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha - \beta}$, según queríamos demostrar.

De estas dos reglas nosotros sólo aplicaremos la primera en esta parte de la ARITMÉTICA, y para su completa comprensión propongamos algunos ejemplos:

PROBLEMA I. *Una persona tiene impuesta la mitad de su capital al* 3 *por* 100, *la tercera parte al* 5, *y el resto al* 8; *gana en todo* 21600 *reales al año. Se quiere saber qué capital tiene.*

Supongamos que sea el capital un número que tenga mitad y tercera parte entera, tal como 3000 rs. Impuesta la mitad al 3 p. %, produce 45; la tercera parte al 5, da 50 rs. de ganancia; y el resto, que es 3000—(1500 + 1000 rs.)=500, impuesto al 8, produce 40 reales. Ganancia total 45 + 50 + 40 = 135; luego según la primera regla, se tendrá:

$$\frac{x}{3000} = \frac{21600}{135};$$

de donde

$$x = \frac{21600 \times 3000}{135} = 480000 \text{ reales.}$$

Comprobación.

La mitad del capital, ó sea 240000 reales, impuesto al 3 p. %, da.....	7200
La tercera parte, 160000, al 5, dará.....	8000
El resto, 80000, al 8, producirá.....	6400
Ganancia total.....	21600

Resultado conforme al problema.

PROBLEMA II. *Un padre de* 48 *años tenía dos hijos: el uno de* 16 *años y el otro de* 8; *entre los tres hay que repartir proporcionalmente á la edad* 108 *naranjas; se desea saber cuántas le corresponden á cada uno.*

Si á cada uno damos tantas naranjas como años tiene, resultarán repartidas 8 + 16 + 48 = 72 naranjas, lo que prueba que corresponden á cada uno más naranjas. También es cierto que sabiendo lo que hay que dar á uno de ellos, al del medio por ejemplo, se sabría las que corresponden á los otros, pues el hermano menor tendría la mitad y el padre el triplo, puesto que las edades se hallan en esta relación. Ahora bien: si suponiendo que la parte del hijo mayor es 16, el número de naranjas es 72; para que el número de estas naranjas sea 108, ¿qué parte ha de ser la del hijo

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mayor? Según el principio primero, será:

$$\frac{x}{16} = \frac{108}{72}, \text{ de donde } x = \frac{108 \times 16}{72} = 24.$$

Comprobación.

Parte del hijo mayor.....	24
Id. del menor.....	12
Id. del padre.....	72
Número total de naranjas.....	108

Resultado conforme con el enunciado del problema.

PROBLEMA III. *Un platero tiene un riel de oro cuyo peso es de* 12 *onzas, y cuya ley es de* 0,924 *de fino; ¿qué cantidad de cobre debe aumentarle para que resulte á una ley de* 0,800 *de fino?*

Ante todo debemos observar que el peso del oro no varía y que siempre es igual á $12 \times 0{,}924 = 11{,}088$ onzas.

Si la ley del riel fuera de 0,800, se hallaría para la cantidad de fino que contiene el riel $12 \times 0{,}800 = 9{,}600$, cuya cantidad se diferencia de la verdadera en

$$11{,}088 - 9{,}600 = 1{,}488 \textit{ onzas}.$$

Si ahora aumentamos una onza de cobre, resultará:

$$13 \times 0{,}800 = 10{,}400 \textit{ onzas},$$

cuyo número se diferencia del anterior en

$$10{,}400 - 9{,}600 = 0{,}800;$$

luego según el principio en que se funda la regla de falsa posición, se tendrá:

$$\frac{x}{1} = \frac{1{,}488}{0{,}800} = 1{,}86 \textit{ onzas}.$$

Comprobación. Siendo $x = 1{,}86$ el número de onzas de cobre que se debe agregar para que resulte de la ley de 0,800 de fino, se tendrá que el peso del nuevo riel será de

$$12 + 1{,}86 = 13{,}86 \textit{ onzas}.$$

Multiplicando este número por 0,800 para hallar el oro fino que contiene, tendremos:

$$13{,}86 \times 0{,}800 = 11{,}088,$$

cantidad exactamente igual que la que hallamos al principio.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

OCTAVA PARTE

PROGRESIONES Y LOGARITMOS

PROGRESIONES

LECCIÓN XLVI

Progresiones por diferencia. Expresión del término general y de la suma de los n primeros términos de una progresión.—Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos diferenciales.

Progresiones por diferencia. Expresiones del término general y de la suma de los n primeros términos de una progresión.

398. *Se llama* PROGRESIÓN ARITMÉTICA *ó* PROGRESIÓN POR DIFERENCIA, *una serie de números tales que cada uno excede ó es excedido del anterior en una cantidad constante que se llama* RAZÓN *de la progresión. Cada uno de los números de la progresión se llama* TÉRMINO *de la misma.*

Se dice que la progresión es *creciente*, cuando sus términos van aumentando; y *decreciente*, cuando van disminuyendo.

Las progresiones por diferencia se expresan escribiendo sus términos unos á continuación de otros con un punto intermedio, precedidos de este signo ÷ que se lee *como*. Así, se expresará que los números 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 están en progresión por diferencia escribiéndolos de esta manera:

$$\div 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20;$$

la cual, como se ve, es creciente, y su razón es 3.

Esta misma progresión, escrita en un orden inverso, dará la progresión decreciente

$$\div 20 \,.\, 17 \,.\, 14 \,.\, 11 \,.\, 8 \,.\, 5 \,.\, 2,$$

cuya razón es—3.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De modo que si convenimos en llamar *progresión* á una serie de números que cada uno se obtiene agregando al anterior una cantidad constante llamada *razón*, la cual puede ser positiva ó negativa, tendremos, que si la razón es positiva, los términos irán creciendo, y, por tanto, la progresión será creciente; y si es negativa, dichos términos irán decreciendo, y la progresión será decreciente.

399. Las progresiones por diferencia pueden ser *limitadas* ó *ilimitadas*, según que el número de sus términos sea limitado ó ilimitado.

Los términos de una progresión limitada se representan generalmente por las letras $a, b, c, \ldots h, k, l$; la razón por r, el número de términos por n, y la suma de los mismos por S.

400. *Un término cualquiera de una progresión por diferencia limitada es igual al primero más tantas veces la razón como términos tiene antes de sí; ó igual al último menos tantas veces la razón como términos tiene antes de sí; ó igual al último menos tantas veces la razón como términos hay después de él.*

Sea la progresión $\div a \,.\, b \,.\, c. \ldots t_{m-1} \,.\, t_m \,.\, t_{m\,1+} \ldots h.\, k.\, l$, cuya razón positiva ó negativa es r, cuyo número de términos es n, y en la cual el término t_m suponemos que tiene $m-1$ antes de sí, y, por consiguiente, después de sí tendrá un número de términos igual á la diferencia que hay entre el número total n de términos de la progresión y el número m que hay desde el primero hasta él inclusives; es decir, $n - m$.

Esto supuesto, según la definición, tendremos:

$$\left.\begin{array}{c} b = a + r,\ c = b + r,\ \ldots t_m = t_{m-1} + r \\ t_{m+1} = t_m + r,\ \ldots k = h + r,\ l = k + r, \end{array}\right\} \text{[1]}.$$

$$\text{ó} \left\{\begin{array}{c} b = a + r,\ c = a + 2r,\ \ldots t_m = a + (m-1)\,r. \\ t_{m+1} = a + mr,\ \ldots k = a + (n-2)\,r,\ l = a + (n-1)\,r \end{array}\right.$$

Donde vemos, que cada término es igual al primero más tantas veces la razón como número de términos le anteceden; por consiguiente, la expresión del término general es:

$$t_m = a + (m-1)\,r \qquad \text{[2]}.$$

De las igualdades [1] se deducen estas otras:

$$\left.\begin{array}{c} k = l - r,\ h = k - r,\ \ldots\ t_m = t_{m-1} - r \\ t_{m-1} = t_m - r,\ \ldots b = c - r,\ \ a = b - r, \end{array}\right\}$$

$$\text{ó} \left\{\begin{array}{c} k = l - r,\ h = l - 2r,\ \ldots t_m = l - (n-m)\,r \\ t_{m-1} = l - (n-m+1)\,r,\ \ldots b = l - (n-2)\,r,\ a = l - (n-1)\,r, \end{array}\right.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de las cuales se saca la expresión

$$t_m = l - (n - m)r \qquad [3],$$

que justifica lo segundo que se quería demostrar; es decir, que un término cualquiera de una progresión por diferencia es igual al último menos tantas veces la razón como número de términos hay después de él.

401. Las locuciones *más tantas veces menos tantas veces la razón como terminos*, etc., deben entenderse algebraicamente; pues habiendo convenido en que la razón r puede ser positiva ó negativa, no lleva la primera envuelta la idea de aumento y la segunda de disminución, como podía creerse, sino que al decir *más tantas veces la razón*, se tendrá presente que, según ésta sea positiva ó negativa, así la progresión será creciente ó decreciente; ó lo que es lo mismo, la razón se deberá aumentar ó disminuir *aritméticamente* al término anterior el número de veces que se indica.

Para poner de manifiesto el resultado de la operación aritmética que se practica, es menester poner también de manifiesto el signo que la razón r tenga en las expresiones del término general. Así, dichas expresiones se convertirán en

$$t_m = a \pm (m - 1)r \quad \text{y} \quad t_m = l \mp (n - m)r \qquad [4],$$

las cuales se consideran con los signos superiores, si la progresión es creciente; y con los inferiores, si es decreciente.

402. *En toda progresión por diferencia limitada, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual á la suma de estos extremos.*

Sea la progresión limitada

$$\div a \,.\, b \,.\, c \ldots t_m \ldots t'_m \ldots h \,.\, k \,.\, l,$$

cuya razón es r. Sean además, t_m y t'_m dos términos de la progresión, que tienen el uno m términos antes de sí, y el otro el mismo número m de términos después de sí, y, por consiguiente, ambos equidistantes de los extremos a y l.

Según las expresiones [4], se tienen las igualdades

$$t_m = a \pm mr \quad \text{y} \quad t'_m = l \mp mr,$$

que, sumadas, nos dan la siguiente:

$$t_m + t'_m = a + l,$$

que prueba lo que se quería demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

403. *La suma de los* n *términos de una progresión por diferencia, es igual á la mitad de la suma de los extremos multiplicada por el número de términos.*

Sea la progresión $\div a.\ b.\ c...\ h.\ k.\ l$, cuyo número de términos representaremos, como ya se ha dicho, por n, y la suma por S, de modo que se tendrá:

$$S = a + b + c ... + h + k + l;$$

escribiendo los sumandos en un orden inverso, lo cual no altera la suma, se obtiene

$$S = l + k + h + ... + c + b + a;$$

y sumando estas igualdades término á término, tendremos:

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + ... + (k + b) + (l + a).$$

Cada uno de los n paréntesis que hay en el segundo miembro, indica la suma de los extremos ó de dos términos equidistantes de los extremos; y como todas estas sumas son iguales (402), se tendrá:

$$2S = (a + l)\, n,$$

de donde

$$S = \frac{(a + l)\, n}{2} \qquad [5],$$

que es lo que se quería demostrar.

404. En las progresiones por diferencia, la expresión del término general que se considera no es la de un término cualquiera [2], sino la del último, que generalmente se representa por l; así, las expresiones del término general y de la suma de los n términos de una progresión limitada, son:

$$l = a + (n - 1)r \quad [6] \quad \text{y} \quad S = \frac{(a + l)\, n}{2} \qquad [7].$$

EJEMPLO I. *Hallar el término del luqar 32 en la progresión cuyo primer término es 4, y cuya razón es 7.*

Aplicando la fórmula [6], se halla

$$l = t_{32} = 4 + 31 \times 7 = 4 + 217 = 221.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

EJEMPLO II. *Hallar el término del lugar* 8 *en una progresión cuyo último término es* 124, *el número total de términos es* 20, *y la razón* 5.

Puesto que el número de términos que tiene la progresión es 20, y el que vamos buscando ocupa el lugar 8, el número de términos que tendrá después de sí serán $20 - 8 = 12$; y por tanto, según la fórmula [4], se hallará:

$$t_3 = 124 - 12 \times 5 = 124 - 60 = 64.$$

EJEMPLO III. *Hallar la suma de los términos de la progresión cuyo primer término es* 8, *el número de términos* 20, *y la razón* 4.

Por la fórmula [6] hallaremos el último término, que será $l = 8 + 19 \times 4 = 84$, y por la [7] deduciremos el valor de la suma

$$S = \frac{(8 + 84)\,20}{2} = 92 \times 10 = 920.$$

EJEMPLO IV. *Hallar la suma de los* n *primeros números enteros* 1, 2, 3..., n.

Esta es la de los términos de una progresión por diferencia, cuyo primer término es 1, la razón 1, el número de términos n, y el último n también; de modo que se tendrá:

$$S = \frac{(1 + n)\,n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

EJEMPLO V. *Hallar la suma de los* n *primeros números impares y de los primeros números pares á partir del* 2.

Para la primera fórmula hallaremos

$$S = \frac{2n \times n}{2} = n^2;$$

y para la segunda,

$$S = \frac{(2 + 2n)\,n}{2} = n^2 + n.$$

405. La primera fórmula nos demuestra la notable propiedad que la suma de un número n de números impares consecutivos es igual al cuadrado del mismo número n. De esta propiedad se deduce el medio de resolver el problema de *hallar dos cuadrados cuya suma sea también un cuadrado.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En efecto; si en la serie natural de los números impares nos detenemos en uno que sea un cuadrado perfecto, este número y la suma de todos los números impares que le preceden, que será también por lo dicho anteriormente un cuadrado perfecto, nos dará una suma igual á la de todos los números impares considerados, que será otro cuadrado. Así, considerando la serie de los números impares

$$1, 3, 5, 7, 9 \ldots 2n-3, 2n-1 \ldots$$

y suponiendo que el término $2n-1$, que ocupa el lugar n, sea un cuadrado perfecto, se tendrá $2n-1=a^2$; la suma de los $n-1$ términos anteriores será igual, según lo dicho arriba, á $(a-1)^2$, y la suma de los n números impares vendrá dada por la expresión

$$n^2=(2n-1=a^2)+(n-1)^2;$$

luego la suma de los dos cuadrados a^2 y $(n-1)^2$ forman otro cuadrado n^2, según queríamos demostrar.

Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos diferenciales.

406. Interpolar entre dos números dados a y l un cierto número m de términos diferenciales es formar una progresión por diferencia cuyo primer término sea a, el último l, y el número total de términos $m+2$, de los cuales m intermedios se llaman *medios diferenciales.*

Como en esta progresión se conoce el primer término a, el último l y el número de términos $n=m+2$, podremos deducir de la fórmula [6] el valor de la razón r, que será

$$r=\frac{l-a}{m+1},$$

cuya fórmula nos prueba *que la razón de la progresión que tratamos de formar es igual á la diferencia de dos números dados dividida por el número de medios que se quieren interpolar más uno.*

Conocida la razón r, la progresión pedida será:

$$\div a.a+r.a+2r \ldots a+mr.l.$$

EJEMPLO. *Interpolar* 12 *medios diferenciales entre los dos números* 1 *y* 40.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Según la fórmula anterior, hallaremos:

$$r = \frac{40 - 1}{12 + 1} = \frac{39}{13} = 3;$$

luego la progresión pedida será:

$$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.25.28.31.34.37.40.$$

407. *Si se interpolan entre los términos de una progresión por diferencia un mismo número de medios diferenciales, se obtiene una sola progresión, cuya razón es igual al cociente de dividir la razón primitiva por el número de medios más uno que se interpolan entre cada dos.*

Sea la progresión $\div a.\ b.\ c.\ d.\ e...\ k.\ l$, cuya razón es

$$b - a = c - b = d - c = e - d ... = l - k = r.$$

Las razones de las diversas progresiones parciales que se obtienen interpolando entre los términos a y b, b y c, c y d, etc. un mismo número m de medios diferenciales, son (406):

$$\frac{b-a}{m+1},\ \frac{c-b}{m+1},\ \frac{d-c}{m+1},\ \frac{e-d}{m+1}...$$

las cuales son todas iguales á $\frac{r}{m+1}$, puesto que todas tienen un mismo denominador, y los numeradores son iguales á r. Además, como el último término de cada una es el primero de la siguiente, se sigue que podremos considerar á todas ellas como una sola progresión, cuya razón es $\frac{r}{m+1}$.

408. *Para interpolar entre dos números dados un número de medios diferenciales igual á* pp′ p″...—1, *se interpolan primero* p—1 *medios diferenciales entre los dos números dados; luego* p′—1 *entre cada dos términos de la progresión que resulte; después* p″—1, *y así sucesivamente.*

Para demostrar esta regla, consideraremos dos casos: primero, que el número de medios diferenciales que queremos interpolar entre los dos números a y l, sea $pp' = 1$; y segundo, que sea igual á $pp'\ p''... - 1$; es decir, que sólo contenga la primera parte dos factores, ó que contenga más de dos.

Primer caso. Sea $pp' - 1$ el número de medios que queremos interpolar entre los dos números a y l.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La razón de la progresión que resulta de interpolar $pp' - 1$ medios diferentes entre los dos números a y l, es (406):

$$r = \frac{l - a}{pp'};$$

pero si hacemos $r' = \frac{l-a}{p}$, el valor de r se convierte en

$$r = \frac{r'}{p'}.$$

Ahora bién: r' es la razón de la progresión que resulta de interpolar $p-1$ medios diferenciales entre a y l, y r es la razón de la segunda progresión que resulta de interpolar $p'-1$ medios entre cada dos términos de la primera; luego la razón r, que es lo que se necesita conocer para interpolar entre los dos números a y l un número $pp' - 1$ de términos diferenciales, se puede hallar, según la regla, interpolando primero $p-1$ medios entre a y l, y luego $p'-1$ medios entre cada dos términos de la progresión que resulte.

SEGUNDO CASO. Sea $pp'p''p'''... - 1$ el número de medios diferenciales que se quiere interpolar entre los dos números a y l. Si representamos por P_1 el producto $p'p''p'''...$, se tendrá para número de medios que se han de interpolar la expresión $pP_1 - 1$, y según el primer caso, la razón de la progresión que resulte se hallará interpolando primero $p-1$ medios entre a y l, y luego $P_1 - 1$ entre cada dos términos de la progresión que resulte. Mas para interpolar $P_1 - 1$ medios entre cada dos términos de esta progresión, según el mismo primer caso, y haciendo $P_2 = p''p'''...$, tendremos que interpolar primero $p'-1$ medios, y luego $P_2 - 1$ entre cada dos términos de la nueva progresión que resulte, y así sucesivamente, lo cual viene á justificar la regla dada.

409. Como caso particular del anterior, consideraremos aquel en el que el número de medios diferenciales que entre dos números a y l se quieren interpolar, sea la forma $p^n - 1$, lo cual se conseguirá interpolando $p-1$ medios entre los dos números dados, y entre cada dos términos de las progresiones que sucesivamente se van obteniendo.

Así, para interpolar entre a y l un número de medios diferenciales igual á $2^n - 1$, se interpolará entre a y l un medio diferencial; luego un medio diferencial entre cada dos términos de la progresión hallada; después otro medio diferencial entre cada dos tér-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

minos de la nueva progresión, y así sucesivamente, hasta haber repetido esta operación n veces.

410. Recíprocamente, *si entre dos números se interpolan primero* p—1 *medios diferenciales; luego* p′—1 *entre cada dos términos de la progresión que resulta; después* p″—1 *entre cada dos términos de la progresión que nuevamente se obtiene, y así sucesivamente, equivale á haber interpolado de una vez entre los dos números dados un número* pp′ p″ p‴...—1 *de términos diferenciales.*

En efecto; sean r, r', r'', r'''... las razones que sucesivamente se van obteniendo en cada una de las progresiones que se tienen; la última, que podremos representar por r_1, vamos á demostrar que es la misma que se hallaría si desde luego hubiéramos interpolado entre los dos números dados un número de medios diferenciales igual á $pp'\ p''\ p'''$...—1.

Según lo demostrado ya (406), se tiene, llamando a y l á los números dados,

$$r=\frac{l-a}{p},\quad r'=\frac{r}{p'},\quad r''=\frac{r'}{p''},\quad r'''=\frac{r''}{p'''}\ldots;$$

ó lo que es lo mismo

$$r=\frac{l-a}{p},\quad r'=\frac{l-a}{p}:\ p'=\frac{l-a}{pp'},\quad r''=\frac{l-a}{pp'}:\ p''=\frac{l-a}{pp'p''}\ldots;$$

luego la expresión de la última razón, será $r_1=\dfrac{l-a}{pp'\ p''\ p'''\ldots}$; pero si interpolamos entre los dos números dados a y l, un número de medios igual á $pp'\ p''\ p'''$...—1, se halla para valor de la razón R de la progresión que resulta, la expresión $\mathrm{R}=\dfrac{l-a}{p'\ p''\ p'''\ldots}$.

Luego vemos que las dos razones R y r_1 son iguales y, por tanto, las progresiones obtenidas por ambos medios son iguales también, según queríamos demostrar.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN XLVII

Progresiones por cociente. Expresiones del término general, del producto de los n primeros términos de una progresión y de su suma.—Interpolar entre dos números dados un cierto número de términos proporcionales.—Progresiones geométricas decrecientes prolongadas indefinidamente; límite de la suma de todos sus términos.

Progresiones por cociente. Expresión del término general, del producto de los n primeros términos de una progresión y de su suma.

411. *Se llama* PROGRESIÓN GEOMÉTRICA *ó* POR COCIENTE, *una serie de números tales que cada uno es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada* RAZÓN *de la progresión.*

Si la razón es mayor que la unidad, los términos de la progresión irán aumentando, por cuya razón se dice que dicha progresión es *creciente;* si la razón es menor que la unidad, los términos van decreciendo y la progresión será *decreciente.*

Las progresiones por cociente se expresan escribiendo sus términos unos á continuación de otros con dos puntos intermedios precedidos de este signo ∺ que se lee *como.* Así, se expresará que los números 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128, están en progresión por cociente, escribiéndolos de esta manera:

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128,$$

la cual, como se ve, es creciente y su razón es 2.

Esta misma progresión escrita en un orden inverso, daría una progresión decreciente cuya razón sería $\frac{1}{2}$.

412. Las progresiones por cociente pueden ser *limitadas* ó *ilimitadas*, según que el número de sus términos sea limitado ó ilimitado.

Los términos de una progresión geométrica limitada se representan generalmente por las letras a, b, c... h, k, l; la razón por q; el número de términos por n, y la suma por S.

413. *Un término cualquiera de una progresión por cociente limitada es igual al primero multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es igual al número de términos que le anteceden, ó igual al último dividido por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que le siguen.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea la progresión $\div\div a : b : c : \ldots : t_{m-1} : t_m : t_{m+1} : \ldots : h : k : l$, cuya razón, mayor ó menor que la unidad, representaremos por q; el número de términos por n, y en la cual el término t_m suponemos que tiene $m-1$ términos antes de sí, y, por consiguiente, el de los términos que le siguen será $n-m$.

Esto supuesto, tendremos, según la definición:

$$\left.\begin{array}{l} b = a \times q, \quad c = b \times q \ldots t_m = t_{m-1} \times q, \\ t_{m+1} = t_m \times q \ldots k = h \times q, \quad l = k \times q, \end{array}\right\} \quad [1];$$

$$\text{ó} \quad \left.\begin{array}{l} b = a \times q, \quad c = a \times q^2 \ldots t_m = a \times q^{m-1}, \\ t_{m+1} = a \times q^m \ldots k = a \times q^{n-2}, \quad l = a \times q^{n-1} \end{array}\right\}$$

donde vemos que cada término es igual al primero multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es igual al número de términos que le preceden. Por consiguiente, la expresión del término general es:

$$t_m = a \times q^{m-1} \qquad [2].$$

De las igualdades [1], se deducen estas otras:

$$k = \frac{l}{q}, \quad h = \frac{k}{q} \ldots t_m = \frac{t_{m+1}}{q},$$

$$t_{m-1} = \frac{t_m}{q} \ldots b = \frac{c}{q}, \quad a = \frac{b}{q},$$

$$\text{ó} \quad \left\{\begin{array}{l} k = \dfrac{l}{q}, \quad h = \dfrac{l}{q^2} \ldots t_m = \dfrac{l}{q^{n-m}}, \\ t_{m-1} = \dfrac{l}{q^{n-m+1}} \ldots b = \dfrac{l}{q^{n-2}}, \quad a = \dfrac{l}{q^{n-1}}, \end{array}\right.$$

de donde

$$t_m = \frac{l}{q^{n-m}} \qquad [3],$$

expresión que justifica lo segundo que se quería demostrar.

414. *En toda progresión por cociente limitada, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual al producto de estos extremos.*

Sea la progresión $\div\div a : b : c : \ldots : t_m : \ldots : t'_m : \ldots : h : k : l$, cuya razón es q. Sean, además, t_m y t'_m dos términos de la progresión que tienen, el uno m términos antes de sí, y el otro mismo número de términos después de sí, y, por consiguiente, están equidistantes de los extremos a y l.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Según las expresiones [2] y [3], se tienen las igualdades

$$t_m = a \times q^m \quad \text{y} \quad t'_m = \frac{l}{q^m},$$

que multiplicadas miembro á miembro, nos dan:

$$t_m \times t'_m = a \times q^m \times \frac{l}{q^m} = a \times l,$$

que prueba lo que se quería demostrar.

415. *El producto de los* n *términos de una progresión por cociente es igual á la raíz cuadrada de la enésima potencia del producto de los extremos.*

Sea la progresión $\div\div a : b : c : \ldots : h : k : l$.

Representemos por P el producto de sus términos y se tendrá $P = a \times b \times c \times \ldots \times h \times k \times l$ ó $P = l \times k \times h \times \ldots \times c \times b \times a$, de donde deduciremos $P^2 = al \times bk \times ch \times \ldots \times hc \times kb \times la$, y como cada uno de los n factores del segundo miembro es el producto de dos términos equidistantes de los extremos, se tendrá (412) $P^2 = al \times al \times al \ldots = (al)^n$, y extrayendo la raíz cuadrada hallaremos, según queríamos demostrar:

$$P = \sqrt{(a \times l)^n} \qquad [4].$$

416. *La suma de los* n *términos de una progresión por cociente, es igual á la diferencia entre el primer término y el último multiplicado por la razón, partida por la diferencia que hay entre la unidad y la razón.*

Sea la progresión por cociente $\div\div a : b : c : \ldots : h : k : l$; representemos por S la suma de sus n términos, y se tendrá:

$$S = a + b + c + \ldots + h + k + l,$$

que, multiplicada por la razón q, y observando que cada término multiplicado por la razón nos da el siguiente, tendremos:

$$Sq = b + c + \ldots + h + k + l + lq.$$

Restando ahora de la primera la segunda si $q < 1$, ó de la segunda la primera si $q > 1$, hallaremos

$$S - Sq = a - lq, \quad \text{de donde} \quad S = \frac{a - lq}{1 - q} \qquad [5],$$

$$Sq - S = lq - a, \quad \text{de donde} \quad S = \frac{lq - a}{q - 1} \qquad [6].$$

$= S(1-q) = a - lq \div S = \dfrac{a - lq}{1-q}$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

La expresión de la suma se convierte en

$$[7] \quad S = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad \text{ó} \quad S = \frac{aq^n - a}{q - 1} \quad [8];$$

poniendo en las expresiones [5] y [6] en vez del último término l, su igual aq^{n-1}.

Estas expresiones toman la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando $q = 1$; pero se puede hallar el verdadero valor de la suma, que en este caso es an, dividiendo sus dos términos por el factor común $1 - q$, ó $q - 1$, y haciendo después $q = 1$.

417. La expresión del término general que en las progresiones por cociente se considera, no es la de un término cualquiera, sino la del último; así tendremos:

$$l = a \times q^{n-1} \quad [9].$$

Interpolar entre dos números dados cierto número de términos proporcionales.

418. Interpolar entre dos números dados a y l un cierto número m de términos proporcionales, es formar una progresión por cociente cuyo primer término sea a, el último l, y el número total de términos $m + 2$, de los cuales los m intermedios se llaman *medios proporcionales.*

Como en esta progresión conocemos el primer término a, el último l, y el número de términos $n = m + 2$, podremos deducir de la fórmula [9] el valor de la razón q, que será:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}} \quad [10],$$

lo cual nos prueba que la razón de la progresión que tratamos de formar *es igual á la raíz cuyo índice es el número de medios que se quiere interpolar más uno, del cociente que resulta de dividir el último término por el primero.*

Conocida la razón q, la progresión pedida será:

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots aq^m : l.$$

419. *Si se interpolan entre los dos términos de una progresión por cociente un mismo número de medios proporcionales, se obtiene una*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

sola progresión cuya razón es igual á la raíz de la razón primitiva, cuyo índice es el número de medios que se interpolan más uno.

Sea la progresión $\div\div a : b : c : d : e : \ldots : k : l$, cuya razón es $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \ldots = q.$

Las razones de las diversas progresiones que se obtienen interpolando entre los términos a y b, b y c, etc., un mismo número m de medios proporcionales, son [10]:

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \sqrt[m+1]{\frac{e}{d}} \ldots,$$

las cuales son todas iguales á $\sqrt[m+1]{q}$.

Además, como el último término de cada una es el primero de la siguiente, se sigue que podremos considerar á todas ellas como una sola progresión cuya razón es $\sqrt[m+1]{q}$.

420. *Se puede interpolar entre cada dos términos de una progresión geométrica un número de medios proporcionales tal, que la diferencia de dos términos consecutivos de la progresión resultante sea tan pequeña como se quiera.*

En efecto; sea q la razón de la progresión dada, y $n-1$ el número de términos que se interpolan. La razón de la nueva progresión será $\sqrt[n]{q}$; por consiguiente, dos términos consecutivos de esta nueva progresión serán $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m$ y $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^{m+1}$, y su diferencia será:

$$a\left(\sqrt[n]{q}\right)^{m+1} - a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m = a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m\left(\sqrt[n]{q} - 1\right).$$

Pero hemos visto (312), que siendo n suficientemente grande, $\sqrt[n]{q} - 1$ puede ser menor que cualquiera cantidad δ, por pequeña que sea; luego este factor tiende hacia cero á medida que n aumenta. El otro factor $a\left(\sqrt[n]{q}\right)^m$ tiende á valer a; luego el producto que expresa la diferencia entre dos términos consecutivos puede ser tan pequeño como queramos, que es lo que se trataba de demostrar.

421. *Para interpolar entre dos números dados un número de me-*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dios proporcionales igual á pp′ p″...—1, *se interpolan primero* p—1 *medios proporcionales entre los dos números dados; luego* p′—1 *entre cada dos términos de la progresión que resulte, después* p″—1 *entre cada dos de esta última, y así sucesivamente.*

Para demostrar esta regla, consideraremos dos casos: primero, que el número de medios proporcionales que se se quería interpolar entre dos números dados *a* y *l* sea $pp' - 1$; y segundo, que dicho número de medios sea igual á $pp'\ p''...-1$; es decir, que sólo contenga la primera parte dos factores, ó que contenga más de dos.

PRIMER CASO. Sea $pp'-1$ el número de medios proporcionales que queremos interpolar entre los dos números *a* y *l*.

La razón de la progresión que resulta de interpolar $pp'-1$ medios proporcionales entre *a* y *l*, es (418)

$$q = \sqrt[pp']{\frac{l}{a}};$$

pero si hacemos $q' = \sqrt[p]{\frac{l}{a}}$, el valor de *q* se convierte en

$$q = \sqrt[p]{q'}.$$

Ahora bien: q' es la razón de la progresión que resulta de interpolar $p-1$ medios proporcionales entre *a* y *l*, y *q* es la razón de la segunda progresión que resulta de interpolar $p'-1$ medios entre cada dos términos de la primera; luego la razón *q*, que es la que se necesita conocer para interpolar entre los dos números *a* y *l* un número $pp'-1$ de términos proporcionales, se puede hallar, según la regla, interpolando primero $p-1$ medios entre *a* y *l*, y luego $p'-1$ entre cada dos términos de la progresión que resulta.

SEGUNDO CASO. Sea $pp'\ p''\ p'''...-1$ el número de medios proporcionales que queremos interpolar entre los dos números *a* y *l*. Si representamos por P_1 el producto de $p'\ p''\ p'''...$, se tendrá para número de medios que se han de interpolar, la expresión $p\,P_1-1$, y según el primer caso, la razón de la progresión que resulte se hallará interpolando primero $p-1$ medios entre *a* y *l* y luego P_1-1 entre cada dos términos de la progresión que resulte. Mas para interpolar P_1-1 medios entre cada dos términos de la progresión, según el primer caso, y haciendo $P_2 = p''\ p'''...$, tendremos que interpolar primero $p'-1$ medios y luego P_2-1 entre cada dos tér-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

minos de la nueva progresión que se obtiene, y así sucesivamente, lo cual justifica la regla dada.

422. Como caso particular del anterior, consideraremos aquel en el cual el número de medios proporcionales que entre dos números a y l queramos interpolar sea de la forma p^n-1, lo cual se consigue interpolando $p-1$ medios entre los números dados, y entre cada dos términos de las progresiones que sucesivamente se vayan obteniendo. Así, para interpolar entre a y l un número de medios proporcionales igual á 2^n-1, se interpolará primero un medio proporcional entre a y l, luego otro entre cada dos de los términos que resulten, después otro medio entre cada dos términos de la progresión última, y así sucesivamente hasta haber repetido esta operación n veces.

423. Recíprocamente, *si entre cada dos números se interpolan primero* p—1 *medios proporcionales, luego* p′—1 *entre cada dos términos de la progresión que resulta, después* p″—1 *entre cada dos términos de la progresión que nuevamente se obtiene, y así sucesivamente, equivale á haber interpolado de una vez entre los dos números dados un número* pp′p″ p‴...—1 *de términos proporcionales.*

En efecto; sean q, q', q'', q'''... las razones que sucesivamente se van obteniendo en cada una de las progresiones que resultan, la última, que podremos representar por q_1; vamos á demostrar que es la misma que se hallaría si desde luego hubiéramos interpolado entre los dos números dados un número de medios proporcionales igual á $pp'\ p''\ p'''...-1$.

Según lo demostrado anteriormente, se tiene, llamando a y l á á los dos números dados,

$$q=\sqrt[p]{\frac{l}{a}},\ q'=\sqrt[p']{q},\ q''=\sqrt[p'']{q'}\ ...,$$

ó lo que es lo mismo, llamando Q al cociente l por a,

$$q=\sqrt[p]{Q},\ q'=\sqrt[p']{\sqrt[p]{Q}}=\sqrt[pp']{Q},$$

$$q''=\sqrt[p'']{\sqrt[p']{\sqrt[p]{Q}}}=\sqrt[pp'p'']{Q}...;$$

luego la expresión de la última razón será $Q_1=\sqrt[p'pp''...]{\frac{l}{a}}$; pero interpolando entre los dos números dados a y l un número de me-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

dios proporcionales igual á $pp'\ p''...-1$, se halla para valor de la razón Q'_1 de la progresión que resulta,

$$Q'_1 = \sqrt[pp''p'...]{\frac{l}{a}};$$

luego vemos que las dos razones Q_1 y Q'_1 son iguales, y, por tanto, las progresiones obtenidas finalmente por ambos medios son iguales también, según queríamos demostrar.

Progresiones geométricas decrecientes prolongadas indefinidamente; límite de la suma de todos sus términos.

424. Las progresiones geométricas decrecientes prolongadas al infinito son aquellas cuya razón q es menor que la unidad, y el número n de sus términos crece indefinidamente.

La fórmula [7], que nos da el valor de la suma de los términos de una progresión decreciente en función del primer término, la razón y el número de términos, se puede poner bajo la forma

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \times q^n.$$

Si ahora suponemos que n aumenta indefinidamente, el minuendo $\frac{a}{1-q}$ no varía, por ser independiente de n; pero el sustraendo $\frac{a}{1-q} \times q^n$ decrece indefinidamente, por componerse de un factor constante $\frac{a}{1-q}$, y de otro q^n que puede ser menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea (271). Por lo tanto, la diferencia de estas dos expresiones tiende á valer $\frac{a}{1-q}$ á medida que n aumenta; luego la suma de los términos de la progresión que equivale á esta diferencia tiende á valer $\frac{a}{1-q}$ cuando n aumenta, y puede diferenciarse de esta cantidad en tan poco como se quiera; luego si representamos S' el límite de la suma de los términos de la progresión, se tendrá:

$$S' = \frac{a}{1-q} \quad [11].$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si tomamos por el valor de la suma de todos los términos de una progresión decreciente la de sus n términos primeros, siendo n un número finito, el error, que podremos representar por E, vendrá expresado por la fórmula

$$E = \frac{a}{1-q} \times q^n \quad [12],$$

el cual será tanto más pequeño cuanto mayor sea n.

425. PROBLEMA. *Determinar la condición para que tres números* a, b, c *sean términos de una progresión.*

Si suponemos que la progresión principia en el término a, que de a á b hay m términos, que del término a al término c hay n, y que la razón sea q, tendremos:

$$b = aq^m, \quad c = aq^n;$$

de donde

$$q = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}, \; q = \sqrt[n]{\frac{c}{a}};$$

y, por tanto,

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{\frac{c}{a}} \text{ ó } \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Si a, b, c son conmensurables, reduciendo las fracciones $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ á su más simple expresión, y representando por $\frac{h}{h'}$ y $\frac{k}{k'}$ las fracciones irreducibles equivalentes, tendremos:

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^n = \left(\frac{k}{k'}\right)^m \text{ ó } \frac{h^n}{h'^n} = \frac{k^m}{k'^m}.$$

Siendo irreducibles estas dos fracciones, se deberá tener:

$$h^n = k^m \text{ y } h'^n = k'^m;$$

lo que exige que h y k se formen de los mismos factores primos, y éstos elevados á potencias cuyos exponentes estén en una relación constante $\frac{m}{n}$; lo mismo respecto de h' y k'.

Ahora bien: siendo la relación $\frac{m}{n}$ indeterminada, los números a, b, c pueden formar parte de una infinidad de progresiones.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

426. Una fracción decimal periódica puede considerarse como una progresión geométrica prolongada indefinidamente; y, por tanto, para hallar la fracción ordinaria generatriz, que no es otra cosa que el límite de la suma de todos sus términos, podrá aplicarse la fórmula [11].

Sea la fracción decimal periódica 0,636363..., la cual se puede poner bajo la forma

$$\frac{63}{100}+\frac{63}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{63}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^2+\ldots,$$

que no es otra cosa que la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente y prolongada al infinito, cuyo primer término es $\frac{63}{100}$, y la razón $\frac{1}{100}$; por tanto, la expresión de la suma será, según la fórmula [11],

$$S'=\frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{63}{100-1}=\frac{63}{99},$$

lo cual está conforme con lo dicho en la lección XXII, número 212.

LOGARITMOS

LECCIÓN XLVIII

Definición de los logaritmos.—Propiedades fundamentales de los logaritmos.

Definición de los logaritmos.

427. Si consideramos dos progresiones, la una por cociente, cuyo primer término es la unidad; la otra por diferencia, que tiene cero por primer término, y que se correspondan mutuamente término á término, se dice que los términos de la segunda son los *logaritmos* de los números que forman los términos correspondientes de la primera.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sean las progresiones

$$\left.\begin{array}{l} \div\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div 0.\ r.\ 2r.\ 3r.\ \ldots.\ nr.\ \ldots \end{array}\right\} \qquad [1];$$

un término cualquiera nr de la segunda progresión será el logaritmo del término q^n correspondiente en la primera.

428. De esta definición de logaritmos se deduce que un sistema cualquiera de números puede corresponder á una infinidad de sistemas de logaritmos, ó, lo que es lo mismo, que un mismo número puede tener una infinidad de logaritmos, ó que un logaritmo puede corresponder á una infinidad de números.

En efecto; como las dos progresiones que se consideran siendo los términos de la una los logaritmos de los términos correspondientes de la otra no tienen que satisfacer á más condición que á la de principiar la una por *cero* y la otra por la *unidad*, una vez escrita una de ellas, la primera por ejemplo,

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots,$$

podremos escribir de la segunda especie cuantas queramos, y cada uno de los términos de éstas serán los logaritmos del término correspondiente de la primera. Así, si consideramos varias progresiones por diferencia

$$\begin{array}{l} \div 0\ .\ r\ .\ 2r\ .\ 3r\ .\ \ldots.\ nr\ .\ \ldots, \\ \div 0\ .\ r'\ .\ 2r'\ .\ 3r'\ .\ \ldots.\ nr'\ .\ \ldots, \\ \div 0\ .\ r''\ .\ 2r''\ .\ 3r''\ .\ \ldots.\ nr''\ .\ \ldots, \end{array}$$

que principien por cero, hallaremos que el número q^n tiene por logaritmo nr, nr', nr'' ...

Si, por el contrario, hubiéramos considerado una progresión por diferencia que principiase por *cero* y varias progresiones por cociente cuyos primeros términos fuesen la *unidad*, cada uno de los términos de la primera hubiera sido el logaritmo de los términos correspondientes en las demás progresiones.

Por esta razón cuando se habla del logaritmo de un número es menester fijar el sistema de progresiones que se considera, lo cual viene á determinar por sí lo que se llama *un sistema de logaritmos*.

Cualquiera que sea el sistema de logaritmos, el logaritmo de la *unidad* es siempre *cero*.

429. De la definición anterior de los logaritmos se deduce tam-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

bién, que una vez elegidas las dos progresiones que constituyen un sistema, sólo tienen logaritmos los números mayores que la unidad, si las progresiones, como generalmente se eligen, son crecientes, y de éstas sólo aquellos números que forman los términos de la progresión por cociente. Si las progresiones son decrecientes, entonces sólo parece tener logaritmos los números menores que la unidad que forman los términos de la progresión por cociente; ya veremos cómo esta definición se hace extensible á cualquier número positivo, ora sea mayor ó menor que la unidad, ora sea ó no uno de los términos de la progresión por cociente.

430. En primer lugar, si nosotros consideramos el sistema [1] de las dos progresiones que suponemos ser crecientes, y las dos progresiones decrecientes

$$\left.\begin{array}{l} \div\div 1 : \dfrac{1}{q} : \dfrac{1}{q^2} : \dfrac{1}{q^3} : \ldots : \dfrac{1}{q^n} : \ldots \\ : 0 \,.\, (-r) \,.\, (-2r) \,.\, (-3r) \,.\, \ldots \,.\, (-nr) \,.\, \ldots \end{array}\right\} \quad [2],$$

obtendremos por el primer sistema los logaritmos de los números $1, q, q^2, q^3 \ldots q^n \ldots$ mayores que la unidad, pues se supone $q > 1$; y por el segundo sistema los logaritmos de los números $1, \dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q^2}$ $\dfrac{1}{q^3} \ldots \dfrac{1}{q^n} \ldots$ menores que la unidad; pero estas dos últimas progresiones invertidas, pueden considerarse como la prolongación en sentido descendente de las dos primeras; de modo que, reuniéndolas, tendremos el sistema de dos progresiones

$$\left.\begin{array}{l} \div\div \ldots : \dfrac{1}{q^n} : \ldots : \dfrac{1}{q^2} : \dfrac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^n : \ldots \\ \div \ldots \,.\, (-nr) \,.\, \ldots \,.\, (-2r) \,.\, (-r) \,.\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots \end{array}\right\} \quad [3],$$

prolongadas indefinidamente en ambos sentidos ascendente y descendente, el cual nos da los logaritmos de los números de la primera progresión, que pueden ser mayores ó menores que la unidad.

En este sistema de progresiones prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, sólo hay que atender á que el término 1 de la primera corresponda al término 0 de la segunda, lo que equivale á decir que el $\log 1 = 0$.

Siendo $q > 1$ y $r > 0$, los términos de ambas progresiones á la derecha de 1 y 0 van creciendo, y podrán llegar á ser mayores que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cualquiera cantidad dada, siendo n, número de términos, suficientemente grande; los que están á la izquierda en la progresión geométrica serán siempre, positivos, menores que la unidad, é irán decreciendo indefinidamente, y los de la progresión aritmética siempre serán negativos, pero cada vez mayores en valor numérico; los unos tienen 0 por límite, los otros $-\infty$; de modo que podremos concluir diciendo que el logaritmo $\infty = \infty$, y $\log 0 = -\infty$. Además, si un número q^n ocupa en la progresión geométrica un cierto lugar á la derecha á partir de la *unidad,* el que se halle á la izquierda á la misma distancia será $\frac{1}{q^n}$; el primero tendrá por logaritmo rn, el segundo $(-rn)$; lo cual nos prueba que si llamamos log N al logaritmo de un cierto número N, el logaritmo del número reciproco $\frac{1}{N}$ será el mismo logaritmo de N, pero negativo; es decir, $\log \frac{1}{N} = -\log N$.

431. Una vez obtenidas las dos progresiones que determinan el sistema de logaritmos, y suponiendo que sean (teniendo sólo en cuenta la parte ascendente, pues lo que de ésta se diga quedará dicho de la descendente) las dos progresiones

$$\begin{aligned} &\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n : \ldots \\ &\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots; \end{aligned}$$

si interpolamos entre cada dos términos de la progresión geométrica un cierto número m de medios proporcionales, y entre cada dos de la progresión aritmética el mismo número m de medios diferenciales, las dos progresiones nuevas que resulten determinarán el mismo sistema de logaritmos; es decir, que los términos de la nueva progresión por diferencia serán los logaritmos de los términos de la progresión geométrica, considerados en el mismo sistema.

En efecto; los términos 0, r, $2r$, $3r$ ... que ocupan los lugares primero, segundo, tercero, etc., en la progresión propuesta, y que son los logaritmos de los números 1, q, q^2, q^3, etc., que ocupan respectivamente los mismos lugares en la progresión por cociente, son términos de la nueva progresión por diferencia que ocupan los lugares 1, $m+2$, $2m+3$, $3m+4$ ..., y que corresponden á los mismos números 1, q, q^2, q^3, ..., que en la nueva progresión ocupan los mismos lugares 1, $m+2$, $2m+3$, $3m+4$ ..., puesto que habiendo interpolado entre cada par de términos m medios, el que antes ocu

(c) Instituto Cervantes de Madrid

paba el segundo lugar en ambas progresiones, ahora ocupa el $m+2$; los que ocupaban el tercero, ahora ocupan el $2m+3$, y así sucesivamente. Por consiguiente, los números que antes formaban la progresión por cociente, tienen en la nueva los mismos logaritmos.

Respecto de los medios que se interpolan en la progresión por cociente, tienen también por logaritmos los números correspondientes que se han interpolado en la progresión por diferencia. Esto quedará demostrado probando que si uno de estos medios que forman ahora parte de la nueva progresión se obtiene interpolando dos números diferentes de medios entre cada dos términos de la progresión dada, en los dos casos se hallará para este número el mismo logaritmo.

Supongamos que primero se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas $p-1$ medios; la razón de la progresión por cociente que resulte será (418) $\sqrt[p]{q}$, y la razón de la progresión aritmética será (406) $\frac{r}{p}$. De modo que un término que ocupa en la primera el lugar $m+1$, será $\left(\sqrt[p]{q}\right)^m$, y el que ocupe el mismo lugar en la segunda será $m \times \frac{r}{p}$.

Supongamos ahora que en vez de $p-1$ se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas $p'-1$ medios; el término que ahora ocupa el lugar $m+1$ será $\sqrt[p]{q}$, y el término correspondiente en la progresión aritmética será $m' \times \frac{r}{p}$.

Esto supuesto, tratemos de probar que si se tiene la igualdad

$$\left(\sqrt[p]{q}\right)^m = \left(\sqrt[p']{q}\right)^m$$

se tendrá también:

$$m \times \frac{r}{p} = m' \times \frac{r}{p'} \quad \text{ó} \quad \frac{m}{p} = \frac{m'}{p'};$$

es decir, que si los números que en las dos progresiones obtenidas sucesivamente ocupan los lugares $m+1$ y $m'+1$ son iguales, sus logaritmos también lo son.

En efecto; si se tiene la igualdad $\left(\sqrt[p]{q}\right)^m = \left(\sqrt[p']{q}\right)^{m'}$, ele-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

vándola á la potencia pp', tendremos:

$$q^{mp'} = q^{pm'}, \quad \text{de donde} \quad mp' = pm', \quad \text{ó} \quad \frac{m}{p} = \frac{m'}{p'},$$

según queríamos demostrar.

Luego *si se hace que un cierto número* n *sea uno de los términos de una progresión geométrica, interpolando entre cada dos términos de una progresión dada, ya sea un número* p — 1 *medios, ya un número distinto* p′ — 1, *de las dos maneras hallaremos siempre un mismo logaritmo.*

432. *Si para hallar uno ó más logaritmos se interpolan entre cada dos términos de las progresiones dadas un cierto número* p — 1 *medios, y después para calcular otros se interpolan* p′ — 1 *medios entre cada dos términos de la nueva progresión, todos los logaritmos hallados así forman parte de un solo y mismo sistema.*

En efecto; interpolar primero entre dos términos de una progresión p — 1 medios, y luego p' — 1 entre cada dos de la progresión que resulte, equivale á interpolar desde luego (410) pp' — 1 medios entre cada dos de la primera; pero los números de la progresión por cociente que así resulten tienen por logaritmos los números correspondientes de la progresión por diferencia, según lo demostrado anteriormente, y corresponden al sistema propuesto; luego, etc.

433. Desde luego se comprende que por muy poco diferente que sea de la unidad la razón de la progresión geométrica, y por muy pequeña que sea, por consiguiente, la diferencia que hay entre cada dos términos, habrá números que no formarán parte de esta progresión, pero que se hallarán comprendidos entre cada dos consecutivos; sus logaritmos se hallarán comprendidos entre los logaritmos de aquellos términos que le comprenden, y como la diferencia entre éstos puede ser tan pequeña como se quiera (420), podremos tomar por logaritmos de estos números que no se hallan en la progresión los de los números que les comprenden, y el error que se comete será menor que la diferencia de dichos logaritmos.

Así, podremos decir que el logaritmo de un número que no se halle entre los términos de una progresión, cualquiera que sea el número de medios que se interpolen, pero que se halle comprendido entre dos términos consecutivos, es el *límite de los logaritmos de los números que le comprenden, y que se le pueden aproximar cuanto se quiera.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Propiedades fundamentales de los logaritmos.

434. Al comparar dos progresiones, una geométrica y otra aritmética, se ve desde luego la mutua relación que hay entre sus propiedades generales, si bien es cierto que éstas corresponden á un orden distinto de operaciones. Así se observa inmediatamente que cuatro números tomados convenientemente en la primera, forman una proporción geométrica; y sus correspondientes en la segunda, forman una proporción aritmética; y como en aquélla se verifica que el producto de los extremos es igual al de medios, y en ésta que la suma de extremos es igual á la de medios, se comprende á primera vista la posibilidad de reemplazar la operación de multiplicar por la de sumar, la de dividir por la de restar, la de elevar á potencias por una simple multiplicación, y la extracción de raíces por una división. Este sin duda fué el objeto que le indujo al escocés NEPER á desarrollar su teoría de logaritmos, tan útil hoy por sus inmensas ventajas y aplicaciones.

435. Si nosotros consideramos dos progresiones cualesquiera, una por cociente y otra por diferencia, que mutuamente se correspondan,

$$\begin{array}{l} \div\div a : b : c : d : e : f : g : h : k : l : \ldots \\ \div\ a' . b' . c' . d' . e' . f' , g' . h' . k' . l' . \ldots \end{array}$$

y tomamos en la primera dos términos cualesquiera d y g, y luego el primero a y otro l, que se halle á partir del segundo g á igual distancia que el término d se halle del primero a de la progresión, se podrán considerar á los términos a y l como los extremos de una proporción, y á los números d y g como dos términos equidistantes de estos extremos, y, por consiguiente, se tendrá:

$$a \times l = d \times g, \quad \text{de donde} \quad l = \frac{d \times g}{a}.$$

Tomando los términos correspondientes en la progresión por diferencia, hallaremos que se verificará entre ellos (402) la relación

$$a' + l' = d' + g', \quad \text{de donde} \quad l' = d' + g' - a',$$

donde vemos que un término cualquiera l de la progresión por cociente es igual al producto de otros dos d y g partido por el pri-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mer término a; y que el término correspondiente l' de la progresión por diferencia, es igual á la suma de los términos d' y g' correspondientes á los que se multiplicaron en la geométrica, menos el primer término a' de la progresión por diferencia.

Por consiguiente, si nosotros, para mayor sencillez en la determinación de un término cualquiera en ambas progresiones, suponemos que el primero de la primara sea la *unidad*, y el primero de la segunda sea *cero*, lo cual es siempre posible, por ser arbitrarias ambas progresiones, tendremos que las relaciones anteriores se convierten en

$$1 \times l = d \times g \quad \text{ó} \quad l = d \times g,$$
$$0 + l' = d' + g' \quad \text{ó} \quad l' = d' + g',$$

cuyas igualdades nos prueban que, si como al principio hemos supuesto, las progresiones que constituyen un sistema principia la una por 1 y la otra por 0, el producto de dos términos cualesquiera de la primera será otro término de la misma progresión; y la suma de los dos términos correspondientes en la progresión por diferencia será otro término de la misma correspondiente al de la pregresión geométrica. De aquí la condición necesaria de principiar la progresión geométrica por la *unidad*, y la aritmética por *cero;* porque de ello se deduce la gran ventaja de poder reemplazar la operación de multiplicar dos números por la de sumar sus logaritmos, pues esta suma nos dará á conocer el logaritmo del producto, el cual será el término correspondiente á este logaritmo en la progresión geométrica. Esto constituye la primera propiedad de los logaritmos, que podremos considerar como la fundamental, y que se enuncia así:

436. *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Sean las progresiones que constituyen el sistema de logaritmos

$$\div \ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^n : \ldots : q^m : \ldots : q^s \ldots$$
$$\div \ldots . (-nr) . \ldots . (-2r) . (-r) . 0 . r . 2r . \ldots . nr . \ldots . mr . \ldots . rs \ldots$$

y supongamos en primer lugar dos números a y b, tomados en la parte ascendente de las progresiones, y sean, por ejemplo, $a = q^n$ y $b = q^m$; se tendrá:

$$a \times b = q^n \times q^m = q^{n+m}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

En la segunda progresión, los logaritmos de a y b son $\log a = nr$, y $\log b = mr$; luego $\log a + \log b = nr + mr = (n+m)\,r$; pero $(n+m)\,r$ es el logaritmo de q^{n+m}; luego

$$\log (a \times b) = \log. a + \log. b.$$

Supongamos, en segundo lugar que a corresponde á la parte descendente, y b á la ascendente, pero más distante del primer término 1 que a; tendremos $a = \frac{1}{q^n}$, $b = q^m$, de donde

$$a \times b = \frac{1}{q^n} \times q^m = q^{m-n}.$$

Pero en la segunda progresión se tiene, $\log a = -nr$, $\log b = mr$; luego $\log a + \log b = -nr + mr = (m-n)\,r$; y como $(m-n)r$ es evidentemente el logaritmo de q^{m-n}, se tendrá también, como anteriormente, $\log (a \times b) = \log a + \log b$.

Si $m < n$ ó $m = n$, la igualdad anterior se hubiera verificado igualmente, pues en el primer caso se tendría $a \times b = q^{n-m} = q^{-(n-m} = \frac{1}{q^{n-m}}$, y $\log a + \log b = -nr + mr = -(n-m)\,r$; siendo $-(n-m)r$ el logaritmo de $\frac{1}{q^{n-m}}$, la igualdad anterior se verifica. En el segundo caso se tiene $\log (a \times b) = 0$, como debe suceder; pues siendo $a = \frac{1}{q^n}$ y $b = q^m$, el producto $a \times b$ se reduce á la unidad, cuyo logaritmo es 0.

Sean, por último, a y b dos números tomados en la parte descendente, de modo que $a = \frac{1}{q^n}$ y $b = \frac{1}{q^m}$, de donde se deduce $a \times b = \frac{1}{q^{n+m}}$; pero $\log a = -nr$, y $\log b = -mr$; luego $\log a \times \log b = -nr - mr = -(n+m)r$; y como $-(n+m)\,r$ es el logaritmo de $\frac{1}{q^{n+m}}$, se sigue que también se verifica la igualdad

$$\log (a \times b) = \log a + \log b.$$

Si el número de factores fuese mayor que dos, se hallaría que $\log (a \times b \times c \times d \times \ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots$

Para ello descompondríamos el producto dado en otro com-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

puesto del primer factor, y el producto de todos los demás; as tendremos:

$$\log (a \times bc \ldots) = \log a + \log (bc \ldots);$$

pero $$\log (bc \ldots) = \log (b \times c \ldots) = \log b + \log c \ldots;$$

luego $$\log (abc \ldots) = \log a + \log b + \log c + \ldots,$$

según queríamos demostrar.

437. El logaritmo del producto de dos ó más números que no se hallen formando parte de la progresión geométrica, es el límite de la suma de los logaritmos de los números que, formando parte de la progresión, comprenden á los números dados y se les pueden aproximar cuanto se quiera. Asi, si nosotros consideramos varios números N, N′, N″, N‴..., que no se hallan en la progresión geométrica, podremos interpolar un cierto número de medios proporcionales tal, que la diferencia entre dos consecutivos sea tan pequeña como queramos; y si suponemos que n, n', n'', n'''... sean los términos inmediatos inferiores á los números N, N′, N″, N‴... pudiendo aproximarse á ellos cuanto se quiera, tendremos:

$$\log (n \times n' \times n'' \times n''' \ldots) = \log n + \log n' + \log n'' + \ldots;$$

pero el primer miembro se puede aproximar cuanto queramos á $\log (N \times N' \times N'' \times N''' \ldots)$, y el segundo á $\log N + \log N' + \log N'' + \log N''' + \ldots$; y como constantemente se verifica la igualdad anterior, cualquiera que sea el grado de aproximación, en el límite también se verificará; con lo cual queda justificado el principio con toda generalidad.

438. *El logaritmo de una potencia entera y positiva de un número, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.*

Sea una potencia a^n, cuyo exponente n es entero y positivo. Según la definición de potencia, se tendrá:

$$\log a^n = \log (a \times a \times a \times a \times \ldots),$$
$$= \log a + \log a + \log a + \ldots = n \log a.$$

439. *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el logaritmo del divisor.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea un cociente $\frac{a}{b}$, que llamaremos q, y se tendrá:

$$a = b \times q, \quad \text{y por tanto,} \quad \log a = \log b + \log q;$$

de donde

$$\log q = \log a - \log b, \quad \text{ó} \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

440. *El logaritmo de una raíz de un número cuyo índice es entero y positivo, es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz.*

Sea la raiz $\sqrt[m]{a}$, la cual llamaremos r, y tendremos $a = r^m$; de donde (438) $\log a = m \log r$, y, por consiguiente,

$$\log r = \frac{\log a}{m}, \quad \text{ó} \quad \log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

LECCIÓN XLIX

Módulo de los logaritmos. Diferentes sistemas de logaritmos según sus módulos. Sistema *neperiano*.—Base de un sistema de logaritmos. Diferentes sistemas considerados según sus bases. Sistema de logaritmos vulgares, llamados de Briggs.—Construcción de las tablas de los logaritmos vulgares.

Módulos de los logaritmos. Diferentes sistemas de los logaritmos según sus módulos. Sistema *neperiano*.

441. Si nosotros queremos tener unas tablas de logaritmos en donde se halle la serie natural de los números 1, 2, 3,... hasta un cierto límite l, y enfrente la serie de logaritmos correspondiente á un cierto sistema, es necesario suponer que se tiene una progresión geométrica cuya razón, siendo mayor que la unidad, se diferencia de ella en tan poco como se quiera, de modo que los términos de esta progresión crecerán por grados tan pequeños como queramos, á partir del primer término 1; de este modo cada uno de los números de la serie natural 1, 2, 3,... es un término de esta progresión, ó está comprendido entre dos, de manera que podremos tomar el menor de ellos por dicho número, cometiendo un error tan pequeño como se quiera. Para obtener sus logaritmos es necesario suponer que se tiene además otra progresión por diferencia cuyo

(c) Instituto Cervantes de Madrid

primer término es *cero*, y cuya razón r puede ser también tan pequeña como queramos; de este modo los logaritmos crecerán, á partir de *cero*, por grados insensibles. Es necesario admitir que la razón de la progresión por diferencia es sumamente pequeña; porque de lo contrario, números finitos podrían tener por logaritmos números infinitos.

442. Como la diferencia entre la razón de la progresión por cociente y la unidad, y la razón de la progresión por diferencia, pueden ser tan pequeñas como queramos, pero arbitrarias, es claro que podrán variar cuanto se quiera, habiendo siempre entre ellas una cierta relación. Así, llamando q á la razón de la progresión geométrica, y r á la de la progresión aritmética, podemos hacer que $q-1$ sea tan pequeña como queramos, y que r sea el doble, triple, etc., ó la mitad, tercera parte, etc.; de modo que se tendrá, llamando M á esta relación,

$$\frac{r}{q-1} = \mathrm{M} \quad \text{ó} \quad r = \mathrm{M}(q-1).$$

La relación M que existe entre la diferencia de la razón por cociente y la unidad, y la razón de la progresión aritmética, se llama *módulo* de los logaritmos. El módulo de los logaritmos varía, por consiguiente, según sea la relación que hay entre $q-1$ y r.

443. Si consideramos una progresión geométrica cuyos términos se diferencien entre sí en tan poco como queramos y diferentes progresiones aritméticas,

$$\begin{aligned}
&\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n : \ldots \\
&\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, \ldots \,.\, nr \,.\, \ldots \\
&\div 0 \,.\, r \,.\, 2r' \,.\, 3r' \,.\, 4r' \,.\, \ldots \,.\, nr' \,.\, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

cada uno de los términos de estas últimas serán los diferentes logaritmos de los términos de la primera; y si llamamos M, M′, etc., los módulos de estos logaritmos, se tendrá:

$$\frac{r}{q-1} = \mathrm{M}, \quad \frac{r'}{q-1} = \mathrm{M}', \text{ etc.},$$

ó $$r = \mathrm{M}(q-1), \quad r' = \mathrm{M}'(q-1,) \text{ etc.},$$

y las progresiones por diferencia se convertirían en

$$\begin{aligned}
&\div 0 \,.\, \mathrm{M}(q-1) \,.\, 2\mathrm{M}(q-1) \,.\, 3\mathrm{M}(q-1) \,.\, \ldots \,.\, n\mathrm{M}(q-1) \,.\, \ldots \\
&\div 0 \,.\, \mathrm{M}'(q-1) \,.\, 2\mathrm{M}'(q-1) \,.\, 3\mathrm{M}'(q-1) \,.\, \ldots \,.\, n\mathrm{M}'(q-1) \,.\, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

las cuales nos prueban que los logaritmos de dos sistemas correspondientes á los mismos números están en una relación constante é igual á la que hay entre los módulos; de modo que si llamamos R á esta relación, log N y log′ N á los dos logaritmos de un número cualquiera N, tomados en dos sistemas distintos, se tendrá:

$$\frac{\log N}{\log' N} = R, \quad \text{de donde} \quad \log N = R \log' N,$$

siendo R la relación entre los módulos M y M′ de ambos sistemas.

Por esta fórmula se puede hallar el logaritmo de un número en un sistema cualquiera, conociendo el logaritmo del mismo número en otro sistema y la relación de los módulos.

El sistema que tiene la unidad por módulo se llama *neperiano*, por ser éste el que NEPER, inventor de los logaritmos, consideró. Se define en general, diciendo que sistema neperiano *es aquel en el cual la razón de la progresión por diferencia es igual á la diferencia extremadamente pequeña que hay entre la razón de la progresión geométrica y la unidad*. Por razones que no son de este lugar se le llama también al sistema neperiano sistema de logaritmos *hiperbólicos*; y se diferencia de los ordinarios representando éstos por las letras *log*, y los neperianos por la sola letra *l*.

444. Siendo el módulo del sistema neperiano la unidad, la relación que hay entre los módulos de este sistema y otro cualquiera es el módulo de este otro sistema; de modo que *para pasar del sistema de logaritmos neperianos á otro cualquiera, no hay más que multiplicar aquéllos por el módulo de este sistema.*

Base de un sistema de logaritmos. Diferentes sistemas considerados según sus bases.

445. Ya hemos visto que se pueden unir á una progresión geométrica cuyos términos varían insensiblemente á partir de 1, varias progresiones aritméticas cuyos términos varían también de un modo insensible á partir de 0, obteniendo de este modo varios sistemas de logaritmos; y que estos sistemas quedan determinados conociendo los módulos, ó sea la relación de los incrementos de los primeros términos 0 y 1 de ambas progresiones para obtener los segundos *r* y *q*.

También pueden determinarse, y es lo más general, cuando se conoce el número que corresponde á un cierto logaritmo. Así, si

(c) Instituto Cervantes de Madrid

conociésemos el número que tiene por logaritmo la unidad, el sistema quedaría determinado; pues conociendo dos términos de cada progresión, se podría determinar la razón, y, por consiguiente, todos los demás términos.

Él número que tiene por logaritmo la unidad, se le llama *base* del sistema (*).

Entre todos los sistemas de logaritmos, el que ofrece más ventajas en los cálculos es aquel que tiene por base el número 10, del cual nos ocuparemos especialmente.

446. Cuando los sistemas de logaritmos están determinados por sus bases, es muy fácil la reducción de los de un sistema en los de otro.

En efecto; ya hemos visto (443) que llamando R á la relación constante que hay entre los logaritmos de un mismo número en dos distintos sistemas, conociendo el logaritmo de un número cualquiera en un sistema, el de este mismo número en el otro sistema se halla multiplicado por R el logaritmo conocido. Esto supuesto, si nosotros suponemos conocidas las bases a y a' de dos sistemas y el logaritmo de una de ellas a' en el otro sistema, como el logaritmo de la misma en su sistema es la unidad, se tendrá conocida la relación R, pues será $R = \frac{1}{\log a'}$; luego multiplicando los logaritmos del primer sistema por la cantidad constante $\frac{1}{\log a'}$, que es la unidad partida por el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema conocido, se hallarán los logaritmos del segundo sistema.

La cantidad $\frac{1}{\log a'}$, se suele llamar también *módulo relativo* de los logaritmos.

(*) Se podría proponer como ejercicio calcular la base del sistema neperiano dado por su definición; mas para ello, si suponemos que $n + 1$ sea el lugar que ocupa la *unidad* en la progresión aritmética, se tendrá $1 = nr$, de donde $n = \frac{1}{r}$. El término correspondiente de la progresión geométrica será $(1 + r)^n$, que por la igualdad anterior se convierte en $(1 + r)^{\frac{1}{r}}$ de modo que se hallará la base pedida determinando el límite hacia el cual tiende esta expresión cuando r tiende hacia *cero*. Este límite se halla poniendo r en función de n, lo que nos convertirá la expresión anterior en $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, y hallando el límite de ésta cuando $n = \infty$.

Este límite es el número $e = 2{,}7182818$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sistema de logaritmos vulgares llamados de *Briggs*.

447. El sistema de logaritmos que ordinariamente se usa en los cálculos numéricos es aquel cuya *base* es *diez*, y está determinado por las progresiones

$$\div\div 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots : 10^n : \ldots$$
$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\ldots.\, n \,.\ldots$$

Por la doble razón de ser este sistema el que comúnmente se usa, y de haber sido BRIGGS el primero que construyó las primeras tablas á principios del siglo XVII, se le llama sistema de *logaritmos vulgares* ó de *Briggs*.

En este sistema, *el logaritmo de una potencia de diez es igual al exponente de esta potencia*. Así, el logaritmo de 10 es 1; el de $100 = 10^2$, es 2; el de $1000 = 10^3$, es 3; y en general, el logaritmo de 10^n es n. Porque siendo 10 la base, su logaritmo será (445) 1; y el logaritmo de una potencia, siendo igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la raíz, se tendrá

$$\log 10^n = n \log 10 = n.$$

448. *Los logaritmos de los números que no sean potencias de* 10, *ya sean enteros ó fraccionarios, son inconmensurables.*

En efecto; sea un número cualquiera $\frac{p}{q}$, que no sea potencia de 10, y vamos á demostrar que este número no puede ser un término de la progresión $\div\div 1 : 10 : 100 : \ldots$, cualquiera que ser número de medios que se interpolen; y, por consiguiente, su logaritmo no puede ser ninguno de los números correspondientes de la progresión aritmética, y, por tanto, tiene que ser inconmensurable.

La condición que hemos hallado (425) para que tres números a, b, c sean términos de una progresión, se reduce en este caso, puesto que $a = 1$, $b = \frac{p}{q}$ y $c = 10$, á

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n 1 = 0^m,$$

siendo n y m dos números enteros.

Ahora bien; siendo el segundo miembro un número entero, el

(c) Instituto Cervantes de Madrid

primero también deberá serlo; y como $\frac{d}{q}$ es una fracción irreducible, $\frac{p^n}{q^n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n$ también lo será, y, por tanto, se deberá tener $q = 1$; de donde se saca $p^n = 10^m$; mas para que esta igualdad se verifique, es necesario que p no contenga más factores primos que los que hay en 10; es decir, que se debe tener $p = 2^r \times 5^s$, lo que hace que la igualdad anterior se convierta en $2^{rn} \times 5^{sn}, = 2^m \times 5^m$; de donde deduciremos, $rn = m = sn$ ó $r = \frac{m}{n} = s$; lo cual nos prueba que los exponentes de los factores 2 y 5 deben ser iguales; por consiguiente, p debe ser una potencia exacta de 10.

Luego sólo las potencias de 10 son los únicos números conmensurables que pueden formar parte de la progresión geométrica de la cual 1 y 10 forman parte; por consiguiente, cualquier otro número entero ó fraccionario, no formando parte de la progresión geométrica del sistema vulgar, sea cualquiera el número de medios que se interpole, no puede tener término correspondiente en la progresión aritmética del mismo sistema, y su logaritmo es, por lo tanto, inconmensurable, según queríamos demostrar.

449. Los logaritmos de los números están calculados en decimales, y se acostumbra llamar *característica* á la parte entera del logaritmo, y *mantisa* á la parte decimal del mismo.

450. La característica *del logaritmo de un número es igual á tantas unidades menos una como cifras tiene la parte entera de dicho número.*

En efecto; todo número comprendido entre 1 y 10 no tiene su parte entera más que una cifra; su logaritmo está comprendido entre 0 y 1; luego tendrá por característica 0. Todo número comprendido entre 10 y 100, tiene dos cifras su parte entera; su logaritmo, hallándose comprendido entre 1 y 2, tendrá 1 por parte entera ó característica. En general, todo número comprendido entre 10^n y 10^{n+1}, tiene $n + 1$ cifras en su parte entera; su logaritmo, hallándose comprendido entre n y $n + 1$, tiene por característica n, número igual al de cifras menos una que tiene la parte entera de dicho número.

451. *El logaritmo de un número multiplicado ó partido por una potencia entera de 10, es igual al logaritmo del mismo número aumentado ó disminuído en el exponente de dicha potencia.*

En efecto; sea N un número y log N su logaritmo. El logarit-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mo de este número multiplicado ó partido por una potencia entera de 10, será (436, 439 y 447):

$$\log (N \times 10^n) = \log N + \log 10^n = \log N + n,$$

y

$$\log \left(\frac{N}{10^n}\right) = \log N - \log 10^n = \log N - n,$$

cuyas igualdades justifican el enunciado del teorema.

CONSECUENCIA. Cuando dos números desiguales no difieren más que por la colocación de la coma, sus logaritmos no se diferencian más que en la característica.

452. *El logaritmo de una fracción es igual al logaritmo de la fracción inversa tomada con signo contrario.*

Sea la fracción $\frac{a}{b}$ y su inversa $\frac{b}{a}$; de la igualdad evidente $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, se deduce $\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{a} = \log 1 = 0$, de donde $\log \frac{a}{b} = -\log \frac{b}{a}$, según queríamos demostrar.

CONSECUENCIA. Los logaritmos de las fracciones decimales 0,1; 0,01; 0,001... tienen por logaritmos respectivos $-1 - 2 - 3...$, y en general $\log \frac{1}{N} = -\log N$.

453. Recíprocamente, *el número correspondiente á un logaritmo negativo es de la forma* $\frac{1}{N}$, *siendo* N *el número correspondiente al logaritmo dado tomado positivamente.*

En efecto; todo logaritmo negativo puede ser considerado como la diferencia entre el logaritmo de un número correspondiente al logaritmo dado considerado positivamente, y el logaritmo de la unidad que siempre es *cero*. Así,

$$-\log N = \log 1 - \log N = \log \frac{1}{N}.$$

OBSERVACIÓN. De lo dicho anteriormente se deduce que en el sistema de logaritmos vulgares, los de los números mayores que la unidad son positivos y crecen indefinidamente con el número; los logaritmos de los números menores que la unidad son negativos y

(c) Instituto Cervantes de Madrid

INSTITUTO DE ENSEÑANZA — BIBLIOTECA — MADRID — ESPAÑA

tanto mayores en el valor numérico cuanto menor es el número á que pertenecen. Así se dice que

$$\log 0 = -\infty, \quad \log \frac{1}{N} = -\log N, \quad \log \frac{1}{\text{la base}} = -1,$$

$$\log 1 = 0, \quad \log (\text{de la base}) = 1, \quad \log \infty = \infty.$$

Construcción de las tablas de los logaritmos vulgares.

454. Se llaman *tablas de logaritmos vulgares*, aquellas en que se halla la serie natural de los números desde 1 hasta un cierto límite L, y enfrente de cada número su logaritmo correspondiente al sistema vulgar.

No es necesario consignar en las tablas más que los logaritmos de los números enteros mayores que la unidad, porque el cálculo de cualquier clase de números siempre se reduce al de los enteros.

455. La construcción de unas tablas de logaritmos por los medios que la Aritmética suministra, es sumamente penosa; en nuestras *Lecciones de Álgebra Superior* exponemos medios sencillos y breves para calcular unas tablas de logaritmos.

Ahora tan sólo indicaremos el método que tendríamos que seguir para este cálculo, manifestando las modificaciones que podrían emplearse para lograr más fácilmente nuestro objeto.

456. Si nosotros tratamos de calcular los logaritmos vulgares desde 1 hasta 100 000 por ejemplo, y queremos que sean exactos en menos de una unidad del séptimo orden decimal, ó sea en menos de una diezmillonésima, es necesario que los términos de la progresión aritmética del sistema se diferencien á lo más en una *diezmillonésima;* y para esto es menester que haya, por lo menos, antes del término 10 de la progresión geométrica, diez millones de términos; por consiguiente, para obtener la razón de esta progresión, es necesario extraer del número 10 una raíz cuyo índice sea 10 *millones* ó $10^7 = 2^7\, 5^7$, cuya operación, aunque puede hacerse por raíces cuadradas y raíces quintas sucesivas, es, sin embargo, en extremo pesada.

La interpolación del mismo número de términos diferenciales en la progresión aritmética no ofrece dificultad, pues la razón se hallará dividiendo la unidad, razón de la progresión dada, por 10 *millones*, número de términos que ha de haber antes del término 1, en dicha progresión.

457. Para evitar la extracción de las raíces quintas de que anteriormente hemos hablado, se interpolará entre los dos términos

(c) Instituto Cervantes de Madrid

1 y 10 de la progresión geométrica dada un número mayor que 10 millones, pero que venga expresado por la fórmula $2^r - 1$, y entonces la raíz de la progresión resultante se hallará por una serie de raíces cuadradas sucesivas (422). Así, elevando 2 á sus diferentes potencias, hallaremos $2^{23} = 8388608$ y $2^{24} = 16777216$; por consiguiente, 16777216 será el grado de la raíz que es necesario extraer de 10, razón de la progresión geométrica dada, cuya raíz se hallará por medio de 24 raíces cuadradas sucesivas; y, por tanto, el número de medios que tendremos que interpolar entre 1 y 10 será $2^{24} - 1 = 16777215$.

De este modo tomaremos en la progresión geométrica los términos que más se aproximen á la serie natural de los números desde 1 hasta el límite marcado, y colocando enfrente los términos correspondientes de la progresión aritmética, tendremos las tablas de logaritmos calculadas con siete cifras decimales.

En efecto; sea N un número cualquiera menor que el límite que se ha considerado, el cual, si no es un término de la progresión geométrica por no ser una potencia exacta de 10 (448), se hallará comprendido entre dos términos q^n y q^{n+1} de dicha progresión. Sean nr y $(n+1)\,r$ los dos términos correspondientes en la progresión aritmética, y tendremos, que hallándose el número N comprendido entre q^n y q^{n+1}, el logaritmo de N se hallará comprendido entre nr y $(n+1)\,r$; luego si tomamos por el logaritmo de N cualquiera de los números nr ó $(n+1)\,r$, el error que se cometerá será menor que la diferencia de estos números, que es r; y como r es menor, ó á lo más igual, á una *diezmillonésima*, es claro que el error cometido será menor que una *diezmillonésima*, según se pedía.

Basta haber indicado el método anterior para comprender que es impracticable por su excesiva pesadez.

458. Aunque no tan pesado como el método anterior, no por eso deja de serlo en alto grado también el ir calculando el logaritmo de cada número por separado, interpolando entre cada dos términos de las progresiones geométrica y aritmética medios proporcionales y diferenciales que comprendan al número cuyo logaritmo se quiere calcular.

Sea N un número cuyo logaritmo queremos calcular, y supongamos que N se halla comprendido entre 10^n y 10^{n+1}; su logaritmo se hallará entre n y $n+1$. Interpolemos entre 10^n y 10^{n+1} un medio proporcional cuya razón se obtendrá extrayendo la raíz cuadrada de 10; interpolemos entre n y $n+1$ un medio diferen-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cial; llamemos A al primero y *a* al segundo, y supongamos que N se halla comprendido entre 10^n y A. El logaritmo de N se hallará comprendido entre *n* y *a;* determinemos un medio geométrico entre 10^n y A, y un medio aritmético entre *n* y *a;* sea el primero B y el segundo *b*, y supongamos que N se halla comprendido entre B y A; el logaritmo de N estará entonces comprendido entre *b* y *a;* continuando así hasta hallar dos números en la progresión geométrica que comprendan á N, y que los dos números correspondientes en la progresión aritmética se diferencien por lo menos en una *diezmillonésima;* en ese caso, tomando uno de estos por el logaritmo de N, el error que se cometerá será menor que una unidad del séptimo orden decimal, según queríamos.

459. Por este medio no tenemos necesidad de calcular nada más que los logaritmos de los números primos menores que el límite dado, pues los compuestos se obtendrán (436) sumando los logaritmos de los factores primos que le forman.

Mas para que todos los logaritmos vengan aproximados en menos de una *diezmillonésima*, es necesario ver con qué error se deben calcular los logaritmos de los números primos, para que al sumarlos y obtener los logaritmos de los compuestos vengan éstos con la aproximación deseada.

Sea 100 000 el mayor número de las tablas; el menor número primo que hay que calcular es 2, y $2^{17} = 131072$; luego aunque el número superior de las tablas fuese 130 000, cualquier número menor que éste no podría componerse de más de 17 factores; luego si calculamos los logaritmos de los números primos con 9 cifras decimales, el *máximo* error que se podrá cometer es de 17 unidades del orden *noveno* decimal, cantidad menor que 2 unidades del orden *octavo;* por consiguiente, estamos seguros de tener todos los logaritmos aproximados en menos de una unidad del orden *séptimo* decimal, que es el que se pide.

LECCIÓN L

Disposición de las tablas de Lalande.—Dado un número cualquiera, hallar su logaritmo.—Dado el logaritmo de un número, hallar este número.

Disposición de las tablas de Lalande.

460. Las tablas de logaritmos que con más frecuencia se usan son las de *Lalande* y de *Callet;* la disposición y uso de las primeras es el objeto de la presente lección.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Las tablas de Lalande contienen los logaritmos de todos los números enteros desde 1 hasta 10 000. Los logaritmos de los 990 primeros números se hallan calculados con *ocho* cifras decimales, y los restantes con siete.

Se hallan dispuestas estas tablas en tres columnas: la primera, señalada con la palabra NOMB., inicial de *nombre* (número), contiene los números enteros desde 0 hasta 10 000. La segunda, marcada LOGARITH., inicial de *logarithmes* (logaritmos), contiene los logaritmos correspondientes á estos números, calculados, según hemos dicho, con *ocho* cifras decimales hasta el número 990, y con *siete* desde este número en adelante. La tercera principia á figurar á partir del número 990, y se halla marcada con la palabra DIFF., inicial de *différence* (diferencia); en ella se encuentran consignadas las diferencias entre dos logaritmos consecutivos. Estas diferencias vienen expresadas en unidades del último orden decimal, y se las conoce con el nombre de *diferencias tabulares*.

Dado un número cualquiera, hallar su logaritmo.

461. PRIMER CASO. *Que el número dado para hallar su logaritmo sea entero y no pase de* 10 000. Cuando el número cumpla con estas condiciones, se busca en las columnas marcadas con NOMB., y su logaritmo se halla colocado enfrente de la columna señalada con LOGARITH.

Así, se hallará que el logaritmo del número 6593 es 3,8190831.

462. SEGUNDO CASO. *Que el número dado sea entero y mayor que el límite de las tablas* 10 000. Para hallar el logaritmo de un número que se halle en este caso, se principia por separar á la derecha con una coma tantas cifras cuantas sean necesario para que el número que quede á la izquierda se halle comprendido en el primer caso, y según él se determinará la mantisa del logaritmo correspondiente. Después se calculará la parte correspondiente á las cifras separadas á la derecha, multiplicando esta parte por la diferencia tabular, separando de la derecha del producto tantas decimales como cifras tenga la parte separada, y en lo que resulte á la izquierda se agrega á la mantisa hallada; el resultado será la mantisa del logaritmo del número propuesto. Finalmente, poniendo á esta mantisa la característica correspondiente (450) al número de cifras que tenga el número dado, se tendrá el logaritmo pedido.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo del número 447358.

Separemos las dos últimas cifras de la derecha, y hallaremos el número 4473,58, cuyo logaritmo tendrá la misma mantisa que el número propuesto (451); pero la mantisa del logaritmo de este número se compondrá de la mantisa del logaritmo de la parte entera 4473, más la parte correspondiente á las cifras separadas á la derecha consideradas como decimales. La mantisa del logaritmo de la parte entera es, según el caso anterior, 6505989; la parte decimal correspondiente á las cifras separadas á la derecha se halla por la siguiente proporción:

$$1 : \textit{dif. de log.} :: \textit{dif. de núm.} : x,$$

ó representando por d la diferencia de los números y por Δ la de los logaritmos, se tendrá:

$$1 : d :: \Delta : x, \quad \text{de donde} \quad x = d \times \Delta.$$

En el ejemplo presente se tiene $d = 0{,}58, \Delta = 971$, y, por tanto, la proporción anterior se convertirá en

$$1 : 0{,}58 :: 971 : x, \quad \text{de donde} \quad x = 971 \times 0{,}58 = 563{,}18;$$

por consiguiente, agregando á la mantisa hallada 6505989 el número 563, que resulta de multiplicar las cifras separadas 58 por la diferencia de las tablas 971, y separando de la derecha de este producto el mismo número de cifras que separamos en el propuesto, hallaremos la mantisa 6506552 del logaritmo del número 4473,58, que es la misma que la del logaritmo del número propuesto. Poniendo por característica á esta mantisa tantas unidades como cifras menos una tiene el número dado, se hallará el logaritmo pedido. Luego se tendrá:

$$\log 447358 = 5{,}6506552.$$

El cálculo del logaritmo de un número entero mayor que el límite de las tablas, se dispone como en el ejemplo siguiente:

Sea hallar el logaritmo del número 8346875.

	Logaritmo	$8346{,}000 = 3{,}9214784$	$d = 875$
	parte correspondiente á	$0{,}875 = \quad 455$	$\Delta = 520$
	logaritmo	$8346{,}875 = 3{,}9215239$	17500
luego	logaritmo	$8346875 = 6{,}9215239$	4375
			455000.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

463. TERCER CASO. *Que el número cuyo logaritmo queremos hallar sea una fracción decimal, ó contenga cifras decimales.*

Si el número propuesto es una fracción decimal, ó tiene cifras decimales, se corre la coma á la derecha ó izquierda, según convenga, para que el número de cifras que resulte á la izquierda de la coma se halle comprendido en los límites de las tablas, se busca el logaritmo de todo el número considerado como entero, según los casos anteriores y, por último, se le disminuyen ó aumentan á la característica tantas unidades como lugares se corrió la coma á la derecha ó izquierda.

Según esto, y teniendo presente que

$$\log 8346875 = 6{,}9215239,$$

se tendrá que

$$\begin{aligned}
\log \quad 834{,}6875 &= 2{,}9215239 \\
\log \quad 8{,}346875 &= \overline{0}{,}9215239 \\
\log \quad 0{,}8346875 &= \overline{1}{,}9215239 \\
\log\, 0{,}008346875 &= \overline{3}{,}9215239.
\end{aligned}$$

464. El método que acabamos de exponer para hallar el logaritmo de un número decimal, da origen á logaritmo cuya característica es negativa, siendo positiva la mantisa; lo que se expresa poniendo el signo — encima de dicha característica.

Si en vez de restar de la característica del logaritmo el número de unidades de que anteriormente hemos hablado, lo restásemos de todo el logaritmo, obtendríamos un resultado completamente negativo, lo cual da origen á las dos formas que puede tener el logaritmo de una decimal, según que sea negativo todo el logaritmo, ó solamente la característica. Así, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\log 0{,}008346875 &= \quad \overline{3}{,}9215239 \\
\log 0{,}008346875 &= -2{,}0784761.
\end{aligned}$$

465. CUARTO CASO. *Que el número dado sea una fracción ordinaria.* Para determinar el logaritmo de una fracción ordinaria, se pueden seguir dos métodos: 1.°, restar del logaritmo del numerador el logaritmo del denominador; 2.°, convertir la fracción ordinaria en decimal, y queda reducida la cuestión á buscar el logaritmo de una decimal. El primer método es preferible al segundo, por ser más breve y porque no siempre es posible convertir exactamente la fracción propuesta en decimal.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si la fracción dada es impropia, el logaritmo del numerador será mayor que el logaritmo del denominador, y, por tanto, no habrá dificultad en efectuar la resta de que anteriormente hemos hablado; si el numerador y denominador son iguales, sus logaritmos también lo serán, su diferencia será *cero*, como debe ser, pues entonces el quebrado es igual á la unidad, y el logaritmo de 1 es *cero*. Finalmente, si la fracción es propia, no se podrá restar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador, lo que nos prueba que el logaritmo deberá ser negativo; deberá, por lo tanto, ir precedido del signo —, y su valor numérico se hallará restando del logaritmo mayor el menor.

Dado el logaritmo de un número, hallar este número.

466. PRIMER CASO. *Que el logaritmo dado, siendo positivo, tenga* 3 *de característica.* Si el logaritmo es positivo, pertenece á un número mayor que la unidad, y su característica, aumentada en una unidad, indica el número de cifras de que se compone la parte entera de dicho número.

Si el logaritmo dado tiene 3 de característica, según hemos dicho, el número á que pertenece se hallará comprendido entre 1000 y 10.000. Para hallar este número, se busca el logaritmo dado en la columna señalada con LOGARITH., y aquí puede suceder uno de dos casos:

1.° *Que la mantisa se halle en las tablas.* En este caso, el número buscado se halla colocado á la izquierda en la columna marcada con NOMB.

Así tenemos que los logaritmos 3,8433574 y 3,0507663, corresponden á los números 6972 y 1124.

2.° *Que la mantisa de un logaritmo cuya característica es* 3, *no se halle exactamente en las tablas.* Si la mantisa del logaritmo dado no se halla contenida exactamente en las tablas, se hallará comprendida entre dos consecutivas correspondientes á los logaritmos de dos números de cuatro cifras y diferentes en una unidad. El menor de estos dos números expresa la parte entera del que nosotros buscamos.

La parte decimal que se determina partiendo la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el más próximo inferior, por la diferencia tabular. Es decir, que si llamamos D á la diferencia que hay entre el logaritmo dado y el más próximo inferior, y por Δ la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

diferencia tabular, se tendrá, llamando x á la parte decimal, que falta al número inferior para representar el número buscado

$$x = \frac{D}{\Delta} \qquad [1],$$

cuya expresión se deduce de la proporción admitida de que las diferencias de los logaritmos son proporcionales á las de los números; es decir, de la proporción

$$\Delta : D :: 1 : x, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{D}{\Delta}.$$

El valor de x debe calcularse á lo más con tres cifras decimales.

Sea, por ejemplo, hallar el número correspondiente al logaritmo 3,9215239.

Este logaritmo no se halla en las tablas, sino que está comprendido entre los logaritmos 3,9214784 y 4,9215304 correspondientes á los números 8346 y 8347; por tanto, la parte entera del número que vamos buscando será 8346; la parte decimal se hallará por la expresión [1], haciendo $D = 455$, y $\Delta = 520$, de modo que se tendrá $x = 0{,}875$. Luego el número buscado será igual á 8346,875.

Los cálculos se disponen del modo siguiente:

$$\begin{array}{rl} \log\ N & = 3{,}9215239 \\ \log\ 8346 & = 3{,}9214784 \\ \hline D = 455 & \mid\ 520 = \Delta \\ 390 & \mid\ 0{,}875 \\ 260 & \mid \\ 00 & \mid \end{array}.$$

Luego log. 8346,875 = 3,9215239; el número buscado es, por o tanto, igual á 8346,875.

467. SEGUNDO CASO. *Que el logaritmo dado, siendo positivo, no tenga* 3 *de característica.* Si el logaritmo no tiene la característica 3, se le aumenta ó disminuye el número de unidades suficiente para que resulte la característica 3; se halla el número correspondiente á este logaritmo, según el caso anterior, con tres cifras decimales, y en seguida se corre la coma á derecha ó izquierda tantos lugares como unidades se le quitaron ó aumentaron á la característica.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Conviene hacer siempre que la característica sea 3, porque de ese modo se halla por las tablas el mayor número de cifras decimales.

Sea, por ejemplo, hallar el número correspondiente al logaritmo 5,5321784. Quitando 2 unidades á la característica, obtendremos el logaritmo 3,5321784, que corresponde, según el caso anterior, al número 3405,480; luego el logaritmo propuesto corresponderá al número 340548, que se obtiene corriendo la coma á la derecha dos lugares, por ser dos las unidades que se disminuyeron á la característica 5 para que se redujese á 3.

Del mismo modo se hallará que el número correspondiente al logaritmo 0,5321784 es 3,40548.

468. TERCER CASO. *Que el logaritmo tenga negativa la característica.* Si el logaritmo dado tiene la característica negativa, se le añaden tantas unidades cuantas sean necesario para hacer que dicha característica sea positiva é igual á 3; se halla el número correspondiente según el caso anterior, con tres cifras decimales, y, por último, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como unidades se le agregó á la característica.

469. CUARTO CASO. *Que todo el logaritmo sea negativo.* Puede este caso reducirse al tercero agregando un cierto número de unidades para que el logaritmo resulte positivo y con una característica igual á 3; se halla el número correspondiente, y después se corre la coma tantos lugares como unidades se agregaron.

También se puede hallar directamente el número como si fuera positivo el logaritmo dado, y después, partiendo la unidad por el número hallado, se tendrá el número pedido (453).

LECCION LI

Complemento aritmético: uso que de él se hace en el cálculo logarítmico.—Cálculo logarítmico.—Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos.

Complemento aritmético: uso que de él se hace en el cálculo logarítmico.

470. *Se llama* COMPLEMENTO *de un número, lo que le falta á éste para ser igual á la unidad del orden inmediato superior al mayor que el número contiene.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Así, el complemento del número 3748 es 6252, número que le falta al primero para valer 10.000, unidad del orden inmediato superior al mayor del número que son millares.

Para hallar el complemento de un número, se resta la primera cifra 10 y todas las demás de 9; el número que resulte será el complemento. El complemento del número 2,7325 será 7,2675.

El uso de los complementos es de una grande utilidad, sobre todo en el cálculo logarítmico. Sucede con mucha frecuencia en las aplicaciones de los logaritmos, que el resultado de una operación se obtiene por medio de adiciones y sustracciones hechas con logaritmos, las cuales vienen á sustituirse por una suma, haciendo uso de los complementos.

Supongamos que para obtener un cierto resultado N, se tiene que ejecutar con los logaritmos l, l_1, l_2, l_3 l_4,... la serie de operaciones:

$$N = l + l_1 - l_2 - l_3 + l_4 - l_5 + l_6.$$

Si reemplazamos por los logaritmos que se han de restar, que son l_2, l_3, l_5, las cantidades $10 - l_2$, $10 - l_3$ $10 - l_5$, que son los complementos, habremos aumentado el resultado en tantas decenas como complementos se consideran; es decir, como números habíamos de restar; de modo que quitando del resultado el mismo número de decenas, obtendremos el resultado final pedido.

Así, representando por c, c', c'' los complementos de los números anteriores, hallaremos para valor de N la expresión

$$N = l + l_1 + c + c' + l_4 + c'' + l_6 - 30,$$

lo cual nos prueba que para obtener un resultado compuesto de varios logaritmos que han de ser sumados, y otros que se deban restar, se suman con los primeros los complementos de los segundos y del resultado se quitan tantas decenas como complementos hay.

Cálculo logarítmico.

471. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN. Se trata de hallar el valor de la expresión $x = \frac{347}{1193} \times \frac{1065}{272} \times \frac{128}{397}$.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Según las propiedades de los logaritmos, se tendrá (436 y 439), haciendo uso de los complementos:

$$\log x = \log 347 - \log 1193 + \log 1065 - \log 272 + \log 128 - \log 397$$

$$\begin{array}{rl} \log\ 347 = & 2{,}5403295 \\ \text{comp.}\log 1193 = & 6{,}9233596 \\ \log 1065 = & 3{,}0273496 \\ \text{comp.}\log\ 272 = & 7{,}5654311 \\ \log\ 128 = & 2{,}1072099 \\ \text{comp.}\log\ 397 = & 7{,}4012095 \\ \hline & 29{,}5648892 \end{array}$$

luego $\log x = 1{,}5648892$

$\log x \times 10^4 = 3{,}5648892$
$\log\ 3671 = 3{,}5647844$

D = 10480	1183 = Δ
10160	0,885
6960	
1055	

$\log 3671{,}885 = 3{,}5648892$
$x \times 10^4 = 3\,671{,}885$
$x = 0{,}3671885$

Efectuando este cálculo directamente sin hacer uso de los complementos, hallaremos

$$\begin{array}{rl} \log\ 347 = & 2{,}5403295 \\ \log\ 1065 = & 3{,}0273496 \\ \log\ 128 = & 2{,}1072099 \\ \hline & 7{,}6748890 \\ & 8{,}1099998 \\ \hline \log x = & -0{,}4351108 \\ \log x \,.\, 10^4 = & 3{,}5648892 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 1193 = & 3{,}0766404 \\ \log\ 272 = & 2{,}4345689 \\ \log\ 128 = & 2{,}5987905 \\ \hline & 8{,}1099998 \end{array}$$

de donde se deduce, como anteriormente, $x = 0{,}3671885$.

472. FORMACIÓN DE POTENCIAS. Sea, por ejemplo, hallar la *octava* potencia del número 23. Según el número 438, se tendrá llamando x al resultado, $\log x = \log (23)^8 = 8 \times \log 23$.

$$\begin{array}{rl} \text{Log } 23 = & 1{,}36172784 \\ 8 \times \log\ 23 = & 10{,}8938227 \\ \log \dfrac{x}{10^7} = & 3{,}8938227 \\ \log\ 7831 = & 3{,}8938172 \end{array}$$

D = 5500	555 = Δ
5050	0,099
55	

$$\log 7831{,}099 = 3{,}8938227;$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

luego $$\frac{x}{10^7} = 7831{,}099,$$

de donde $$x = 78310990000 = (23)^8.$$

473. EXTRACCIÓN DE RAÍCES. Hallar la raíz séptima del número 3785. Según el número 438 se tendrá, llamando x al resultado, $\log x = \log \sqrt[7]{3785} = \frac{1}{7} \log 3785.$

$$\begin{array}{rrl} \text{Log} & 3785 & = 3{,}5780659 \\ \frac{1}{7}\log & 3785 & = 0{,}5111522 \\ \log x \times & 10^3 & = 3{,}5111522 \\ \log & 3244 & = 3{,}5110808 \end{array}$$

D = 7140	1339 = Δ
4450	0,533
4330	
313	

$$\log 3244{,}533 = 3{,}5111522;$$

luego $$x \times 10^3 = 3244{,}533;$$

de donde $$x = 3{,}244533 = \sqrt[7]{3785}\,.$$

474. Apliquemos, por último, y como recopilación de todo lo dicho, el cálculo logarítmico á la determinación del valor de una expresión numérica, y sea, por ejemplo, hallar el valor de

$$x = \sqrt[\frac{1}{0{,}6}]{\frac{832 \times \sqrt[3]{479} \times (2{,}5)^5}{(34)^3 \times \sqrt[5]{71\,\frac{2}{3}}}}.$$

En primer lugar, tomando logaritmos, tendremos

$$\log x = 0{,}6\left(\log\left(832 \times \sqrt[3]{479} \times (2{,}5)^5\right) - \log\left((34)^3 \times \sqrt[5]{71\,\tfrac{2}{3}}\right)\right)$$

$$\log x = 0{,}6\left(\log 832 + \tfrac{1}{3}\log 479 + 5.\log 2{,}5 - \left(3\log 34 + \tfrac{1}{5}\log 215 - \tfrac{1}{5}\log 3\right)\right)$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$$\begin{array}{rrl}
\log & 832 & = 2{,}92012333 \\
\frac{1}{3}\log & 479 & = 0{,}89344517 \\
5.\log & 2{,}5 & = 1{,}98970005 \\
\frac{1}{5}\log & 3 & = 0{,}09542425 \\
\hline
 & & 5{,}89869280 \\
 & & 5{,}06092445 \\
\hline
 & & 0{,}83776835 \\
 & & \times\ 0{,}6 \\
\hline
\log x & = & 0{,}5026610 \\
\log x.10^3 & = & 3{,}5026610 \\
\log 3181 & = & 3{,}5025637
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrl}
3.\log & 34 & = 4{,}59443676 \\
\frac{1}{5}\log & 215 & = 0{,}46648769 \\
\hline
 & & 5{,}06092445
\end{array}$$

D = 9730	1365 = Δ
1750	0,712
3850	
1120	

$$\log 3181\ .\ 712 = 3{,}5026610;$$

luego $$x\ .\ 10^3 = 3181{,}712,$$

de donde $$x = 3{,}181712.$$

Observaciones respecto á los incrementos de los logaritmos.

475. Si examinamos en las tablas de logaritmos la columna de las diferencias, observaremos que estas diferencias van constantemente disminuyendo; así, los logaritmos de los números 1837 y 1838 se diferencian en 2363 unidades del séptimo orden decimal, mientras que la diferencia de los números 9375 y 9376 es 463 unidades del mismo orden.

La razón es bien sencilla: en efecto, sean a y $a+1$ dos números enteros consecutivos, y se tendrá

$$\log(a+1) - \log a = \log\left(\frac{a+1}{a}\right) = \log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

pero á medida que a aumenta, $1+\frac{1}{a}$ tiende hacia la unidad; luego la diferencia tabular tiende á valer $\log 1 = 0$.

Si los números reciben un incremento constante, h, los logaritmos se diferenciarán en

$$\log(a+h) - \log a = \log\left(\frac{a+h}{a}\right) = \log\left(1+\frac{h}{a}\right),$$

cuya diferencia será tanto menor cuanto mayor sea el número a.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si la relación del número al incremento fuera constante, es decir, si $\frac{h}{a}$ fuese una cantidad constante k, la diferencia de los logaritmos sería también constante é igual á $\log(1+k)$.

476. Hemos supuesto, al hallar el logaritmo de un número mayor que el mayor de las tablas (463), que los incrementos de los logaritmos son proporcionales á los de los números, lo cual evidentemente no es exacto. En efecto; si al número a se le da un incremento d, su logaritmo recibirá otro Δ; si damos ahora al número $a+d$ el mismo incremento d, el logaritmo recibirá también un nuevo incremento algo menor que el primero, según lo dicho anteriormente; así, cuando el incremento del número se ha hecho doble, el del logaritmo es un poco menor que el doble; y al contrario, cuando el incremento de un número se ha hecho mitad, el del logaritmo es un poco mayor que la mitad. De donde se deduce que al hacer uso de esta proporción en el primer problema, se hallan resultados menores que los verdaderos; y al pasar de los logaritmos á los números, los resultados son mayores.

Para calcular el límite del error que se comete por el empleo de esta proporción, se necesita el conocimiento de las series, de las cuales nos ocupamos en el *Algebra Superior*.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

APÉNDICE

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

LECCIÓN PRIMERA

Teoría de los diferentes sistemas de numeración.—Sistema duodecimal.—Traducción de un número entero escrito en un sistema de base B, á otro sistema de base B.'

Teoría de los diferentes sistemas de numeración.

1. El artificio de que nos valemos para expresar, ya sea verbalmente, ya por escrito, un número entero en el sistema ordinario ó decimal, puede ser aplicado á otro sistema cualquiera cuya base sea distinta de 10. Así, pues, conviniendo, como se hace en el sistema ordinario, en que un número entero cualquiera se divida en general en unidades de distinto orden, y que cada una se forme de tantas del inmediato inferior como unidades tiene la base; y además, admitiendo que cada cifra colocada á la izquierda de otra represente unidades de un orden superior al que ésta indica, podremos sin dificultad alguna expresar, ya sea de palabra ó por escrito, cualquier número entero en un sistema de base cualquiera.

Varios son los que se han ocupado de la teoría de los diferentes sistemas de numeración, con el objeto de ver si debía ó no adoptarse un nuevo sistema que pudiera reemplazar con ventaja al decimal; pero todos han convenido en que si bien el sistema *duodecimal* pudiera ser más conveniente que el actual, serían tales los perjuicios y las dificultades materiales que ócasionaría el inmenso trastorno de todo lo existente, que de ningún modo se debe imaginar siquiera el verificar semejante cambio.

La teoría de los diferentes sistemas de numeración sólo puede tener en la actualidad un interés científico de más ó menos consideración, y nosotros ni aún le daríamos la extensión que en este *Apéndice* le damos, si programas oficiales de algunas de nuestras escuelas no lo exigieran así.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

2. Si tratásemos de plantear un sistema cualquiera de numeración, principiaríamos por dar nombres sencillos á los números formados, según sabemos, por el aumento sucesivo de la unidad desde *uno* hasta aquel que precede al número de la *base*, al cual llamaremos siempre *diez*, constituyendo al mismo tiempo la unidad de segundo orden. La reunión de otras tantas unidades de segundo orden formarían la de tercero, que llamaríamos *ciento*, y así sucesivamente iríamos obteniendo las unidades de cuarto, quinto, etc. orden, que nombraríamos con las palabras *mil*, *diez mil*, etc.

De esta primera regla se deduce, que si la base del sistema que tratamos de formar es menor que la base 10 del actual, no hay necesidad de inventar cifras ni palabras que expresen ó representen los números que hay entre *uno* y la *base*, pues pueden servir las que tenemos, quedando inútiles las que hay después de esta *base* hasta el número *nueve*. Así, siendo la base del sistema 7, por ejemplo, las palabras y cifras necesarias para los números arriba citados serían:

1	2	3	4	5	6
uno,	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis.*

El siguiente, que es la base, sería *diez;* de modo que en el nuevo sistema los números ordinarios siete, ocho, nueve, diez, once doce, trece y catorce, sean *diez; diez y uno,* ú once; *diez y dos,* ó doce; *diez y tres,* ó trece; *diez y cuatro,* ó catorce; *diez y cinco,* ó quince; *diez y seis,* y *veinte.* El número cuarenta y nueve sería el *ciento* en el nuevo sistema, y así de los demás.

Si la base fuera mayor que *diez,* tal como *quince,* habría que inventar cinco cifras con sus cinco nombres para representar los números *diez, once, doce, trece y catorce;* el *quince* sería el *diez* del nuevo sistema, el *diez y seis* sería el *diez y uno,* ú once, y así sucesivamente.

Como cada número de los que hay entre el *uno* y la base se representa por una sola cifra, la cual tiene su nombre correspondiente, y además se usa de la cifra *cero* con el objeto indicado en el sistema de numeración ordinario, de aquí que el número de cifras que se debe considerar en cualquier sistema es siempre igual al número que indica la *base:* así en el sistema decimal, cuya base es *diez*, se necesitan 10 cifras; en el sistema ternal ó ternario, solo se necesitarán 3; en el sistema duodecimal ó de base *doce*, se necesitarán 12 cifras.

Con el objeto de comprender bien esta teoría general, explica-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

remos un sistema distinto del ordinario, tal como el duodecimal, y todo cuanto de él digamos podrá aplicarse á otro sistema cualquiera.

Sistema duodecimal.

3. NUMERACIÓN HABLADA. Siguiendo una marcha análoga á la expuesta en el sistema de numeración decimal, se hallará que partiendo del número *uno*, se obtendrán por el aumento sucesivo de la unidad los números *dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, dice, trice,* (*) y *diez.*

La reunión de diez *(doce)* unidades se considera como una nueva unidad llamada de *segundo orden* ó *decena*, y se cuenta por decenas lo mismo que por unidades, diciendo: una decena, dos decenas, tres decenas, etc., las que se expresan con los nombres *diez, veinte, treinta... noventa, dicenta, tricenta*, y diez decenas ó *ciento.* Donde vemos que los nombres de los diez *(doce)* primeros números terminados en *enta* nos expresan el mismo número de unidades de segundo orden; por ejemplo, *ochenta,* que es el *ocho* terminado en *enta,* nos indica ocho decenas; *tricenta,* que es el *trice* terminado en *enta,* nos indica *trice (once)* decenas. Se exceptúan de esta regla *diez, veinte* y *ciento*, que, como se ve, corresponden á una, dos y diez *(doce)* decenas, y que no están terminados en *enta.*

Entre cada dos colecciones de decenas *(docenas)* hay *trice* (once) números cuyos nombres se forman añadiendo al de la colección inferior los de los trice (*once*) primeros; así los comprendidos entre *dicenta* y *tricenta*, serán dicenta y uno, dicenta y dos, etc., hasta dicenta y trice (*ciento treinta y uno*).

La reunión de diez (*doce*) decenas, ó sean *cien* (*ciento cuarenta y cuatro* unidades, se considera como una nueva unidad llamada de *tercer orden* ó *centena*, y se cuenta por *centenas* lo mismo que por unidades, diciendo: *un ciento, dos cientos..., dicientos, tricientos...*, y *diez cientos,* que se expresan con la palabra *mil.*

La reunión de diez (*doce*) centenas se considera como una nueva unidad llamada de *cuarto orden* ó *millar*, y se cuenta por *millares, decenas de millar* y *centenas de millar* lo mismo que se ha contado por unidades, decenas y centenas simples; dando origen así á otros dos órdenes de unidades, que son las de *quinto* y *sexto.*

La reunión de *diez* (doce) *centenas de millar* componen la unidad

---

(*) Las palabras *dice* y *trice* las adoptamos para los números que en el sistema decimal se llama *diez* y *once.*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

de *séptimo orden* ó *millón*, de la cual se forman otros seis órdenes, que son *millón, decena de millón,* etc., y que corresponden á los órdenes respectivos *séptimo, octavo, noveno, dizavo* (décimo), *trizavo* (undécimo) y *décimo* (dozavo).

El conjunto de *diez* (doce) *centenas de millar de millón* forman el *billón,* y se cuenta por *billones, trillones*, etc., del mismo modo que por millones y unidades simples.

4. De aquí resultan dos clases de unidades: unas que llamaremos *principales,* que son las de *primer orden,* del *séptimo* ó *millones,* del *undécimo* (décimo tercio) ó billones, del *diez* y *siete* (diez y nueve) ó trillones, etc., las cuales se reproducen de seis en seis; y otras intermedias que son las *decenas, centenas, millares, decenas de millar* y *centenas de millar* de cada uno de estos órdenes principales.

5. NUMERACIÓN ESCRITA. Hemos visto ya que en un sistema cualquiera se necesitan, contando con el *cero,* tantas cifras como unidades tiene la *base* del sistema: así en el sistema duodecimal se necesitarán *diez* (doce), y como en el sistema ordinario no tenemos más que diez, tendremos necesidad de adoptar dos más correspondientes á los números *dice* (diez), y *trice* (once); de modo que conviniendo en que estas cifras sean las primeras letras del alfabeto griego, se tendrá que las cifras empleadas en el sistema *duodecimal,* son:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
cero,	*uno,*	*dos,*	*tres,*	*cuatro,*	*cinco,*	*seis,*	*siete,*	*ocho,*	*nueve,*	*dice*	y *trice.*

Conviniendo, como en el sistema ordinario, en que cada una de estas cifras tenga dos valores, uno *absoluto,* que es el que representa por su figura, y otro *relativo* al lugar que ocupe; conviniendo además en que *una cifra escrita á la izquierda de otra exprese unidades del orden inmediato superior al que ésta representa,* podremos escribir en este sistema un número entero cualquiera.

Según el convenio anterior, se deduce que si un número se compone de varias cifras, la primera de la derecha expresará unidades simples; la segunda *decenas* ó unidades de *segundo* orden; la tercera *centenas* ó unidades de *tercer orden,* y así sucesivamente. De modo que si el número que se quiere escribir contiene todos los órdenes de unidades que hay desde el primero hasta el superior, no habrá dificultad en hacerlo, pues bastará *ir colocando las cifras que*

(c) Instituto Cervantes de Madrid

expresen las unidades de cada especie unas á continuación de otras, conforme se vayan pronunciando.

Sea, por ejemplo, escribir el número *ocho mil cuatro cientos tricenta millones quinientos veinte y dice mil tricientos sesenta y cuatro unidades.*

Colocando las cifras en el orden que se han pronunciado, obtendremos el númeso escrito en cifra

$$84\beta52\alpha\beta64.$$

Ocupando con ceros los órdenes de unidades que falten en un número y con las cifras significativas correspondientes á los que se nombren, se tendrá escrito un número cualquiera.

Sea, por ejemplo, escribir el número *ochocientos dicenta y trice billones seiscientos tres mil quinientos tricenta millones sesenta y trice mil ochenta y dice.*

Colocando cada cifra en su correspondiente lugar, ocupando con ceros los órdenes que faltan, se tendrá:

$$8\alpha\beta6035\beta006\beta08\alpha.$$

Del mismo modo que en el sistema decimal veríamos que el número

$$35,407.\alpha00,7\beta0.3\alpha0,0\alpha7$$

se lee en el lenguaje ordinario del modo siguiente:

Treinta y cinco mil cuatrocientos siete billones dicientos mil setecientos tricenta millones trescientos dicenta mil dicenta y siete.

Traducción de un número entero escrito en un sistema de base B, á otro sistema de base B′.

6. *Para expresar en un sistema cualquiera un número escrito en el sistema decimal, se divide por la base del número propuesto y los cocientes sucesivos, hasta llegar á uno que sea menor que dicha base; los restos que se obtengan serán las cifras respectivas de los diferentes órdenes de unidades del número escrito en el sistema propuesto.*

En efecto; sea N el número escrito en el sistema decimal, y B la base del sistema á que se quiere referir. Como en el sistema cuya base es B, cada unidad de segundo orden se compone de B unidades de primero, cuantas veces el número B esté contenido en

(c) Instituto Cervantes de Madrid

el número N, tantas unidades de segundo habrá; luego dividiendo N por B, el cociente Q será unidades de segundo orden: el resto de la división, siendo menor que B, tendrá una cifra que lo represente, la cual será la de las unidades de primer orden del número.

Dividiendo el cociente Q por B, el nuevo cociente entero Q′ que hallemos expresará las unidades de tercer orden; el resto será las unidades de segundo, y así sucesivamente.

EJEMPLO. Escribir en el sistema *duodecimal* el número 1798.

La operación se dispondrá así:

1798	12		
59	149	12	
118	29	12	12
10	5	0	1

Por consiguiente, el número 1798 escrito en el sistema duodecimal, es 105α.

7. *Para expresar en el sistema decimal un número escrito en cualquier sistema, se multiplica por la base la cifra del orden superior; al producto se agrega la cifra siguiente; el resultado se vuelve á multiplicar por la base; se agrega la cifra siguiente, y así se continúa hasta haber agregado la cifra de las unidades de primer orden.*

Sea un número *dcba* escrito en un sistema cuya base es B: cada unidad de un orden cualquiera se forma de B unidades del inmediato inferior; luego d unidades de cuarto orden se formarán de dB de tercero, de modo que se tendrán $d\text{B} + c$ unidades de tercer orden: multiplicando este resultado por B, y añadiendo la cifra b, tendremos las unidades de segundo orden de que consta el número, y, por último, multiplicando el resultado que se obtiene por la misma base B y añadiendo la cifra a de las unidades, tendremos el número escrito en el sistema decimal.

EJEMPLO. Expresar en el sistema *decimal* el número 105α escrito en el duodecimal.

Efectuando los cálculos indicados anteriormente, se tiene:

$$[(1 \times 12 + 0) \times 12 + 5] \times 12 + 10 = (12 \times 12 + 5) \times 12 + 10 =$$
$$149 \times 12 + 10 = 1798.$$

Luego el número 105α escrito en el sistema duodecimal, equivale á 1798 escrito en el decimal.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

8. *Para expresar en el sistema cuya base es* B *un número escrito en el sistema* B′, *se escribe primero el número en el sistema decimal, y después se pasa del decimal al sistema cuya base es* B.

9. En general, si representamos por a, b, c, d, e, f... las cifras de un número escrito en el sistema cuya base es B, dicho número tendrá por expresión en el sistema de base B, puesto que B = 10,

$$N = ...fedcba = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5f + ...$$

Este mismo número tendrá por expresión el sistema ordinario ó decimal,

$$N = a + Bb + B^2c + B^3d + B^4e + B^5f + ...$$

Las reglas para pasar de uno á otro sistema son las expuestas anteriormente.

LECCIÓN II

Cálculo de los números enteros escritos en un sistema cualquiera.—Fracciones en un sistema cualquiera análogas á las decimales del sistema ordinario.

Cálculo de los números enteros escritos en un sistema cualquiera.

10. El cálculo de los números enteros escritos en un sistema cuya base es B, se hace como en el sistema ordinario, teniendo presente que cada unidad de un orden cualquiera equivale á B de la especie inmediata inferior.

Veamos cómo se verifica el cálculo en un sistema cualquiera, en el *duodecimal,* por ejemplo, y del mismo modo se haría en otro cualquiera.

Para mayor facilidad deberíamos anteponer á cada operación la tabla correspondiente, como se hace en el sistema decimal cuando por primera vez se estudia; pero nosotros sólo expondremos la más necesaria, cual es la de multiplicar.

11. ADICIÓN. Sea, por ejemplo, efectuar la suma de los números enteros que figuran al margen, escritos en el sistema de *doce* cifras.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

5α7
β83
67β
29α
7β6
2β01

Como la suma se practica lo mismo que en el sistema ordinario ó decimal, y sólo tenemos que atender á la circunstancia especial de que cada unidad se compone de *doce* de la especie inferior, hallaremos el resultado del modo siguiente: 7 y 3, α (diez); α y β, 19 (veintiuno); 19 y α, 27 (treinta y uno); 27 y 6, 31 (treinta y siete); cuyo número compone 1 unidad de primer orden, que escribimos en su lugar, y 3 de segundo que se reserva para sumarlas con las de su especie, diciendo: 3 y α, 11 (trece); 11 y 8, 19 (veintiuno); 19 y 7, 24 (veintiocho); 24 y 9, 31 (treinta y siete); 31 y β, 40 (cuarenta y ocho). Del número 40 escribimos el cero en su lugar, y las 4 unidades de tercer orden se reservan para sumarlas con las de su especie, lo cual nos da: 4 y 5, 9; 9 y β, 18 (veinte); 18 y 6, 22 (veintiséis); 22 y 2, 24 (veintiocho); 24 y 7, 2β (treinta y cinco), cuyo número escrito en su lugar nos da la suma 2β01, que se lee *dos mil tricientos uno.*

12. SUSTRACCIÓN Sea restar 37α9β8 de 9860α3 en el sistema de *doce* cifras.

9860α3
37α9β8
6072α7

Dispuesta la operación como al margen se ve, diremos: 3 menos 8, no puede ser; tomaremos una unidad del orden siguiente, que descompuesta en unidades simples de 10 (doce), y diremos: 13 (quince) menos 8, 7; el α (diez) se convirtió en 9, del cual no se puede restar β; descomponiendo una unidad de cuarto orden, por no haberla de tercero, dejaremos β (once) en el tercer lugar, y la restante la descompondremos en 10 (doce) unidades de segundo, que agregadas á las 9 que hay, resultará el número 19 (veintiuno); restando de 19 la cifra β, hallaremos la resta α, que colocamos en su lugar. El 0 se convirtió en β, de cuyo número, restando 9, hallamos la cifra 2, que colocamos en su lugar; continuando del mismo modo llegaremos á concluir la resta, cuyo resultado es 6072α7, que se lee, según lo convenido, del modo siguiente: *seiscientos siete mil doscientos diecinueve.*

13. MULTIPLICACIÓN. Para poder efectuar con facilidad la multiplicación de números escritos en un sistema cualquiera, conviene tener presente la tabla de multiplicar correspondiente; así, principiaremos, puesto que venimos ejecutando los cálculos en el sistema duodecimal, estableciendo la tabla pitagórica correspondiente á este sistema.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
2	4	6	8	α	10	12	14	16	18	1α
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	α	13	18	21	26	2β	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2β	36	41	48	53	5α	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
α	18	26	34	42	50	5α	68	76	84	92
β	1α	29	38	47	56	65	74	83	92	α1

Sea ahora, por ejemplo, multiplicar dos números cualesquiera 3α2β y 5α8. Dispuesta la operación como en el sistema ordinario y empleando la misma regla que allí se expuso, hallaremos $8 \times \beta =$ 74; escribimos 4, y las siete unidades las reservamos para sumarlas al producto parcial siguiente: $2 \times 8 =$ 14, 14 y 7 son 1β; β y va una; $\alpha \times 8 = 68$ y 1 son 69; escribimos el 9 y quedan 6; $3 \times 8 = 20$, 20 y 6 son 26, que escribimos en su lugar, obteniendo así el producto parcial del multiplicando por la primera cifra del multiplicador.

```
  3α2β
  5α8
-------
 269β4
 32652
 17327
-------
1α83α14
```

Del mismo modo hallaremos los dos productos parciales 32652 y 17327 correspondientes á las cifras α y 5 del multiplicador. Sumando los tres productos parciales, hallamos el producto total 1α83α14.

14. División. La división es el analísis de la multiplicación; la regla es la misma que en el sistema ordinario y se deduce del mismo modo.

Sea, por ejemplo, dividir 1α83α14 por 3α2β, en el sistema duodecimal.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Dispuesta la operación del modo siguiente:

1α83α,1,4	3α2β
17327	5α8
35131	
32652	
269β4	
269β4	
0	

hallaremos, siguiendo las reglas establecidas en el sistema decimal, el cociente 5α8.

15. ELEVACIÓN Á POTENCIAS. Siendo la elevación á potencias un caso particular de la multiplicación, no necesitamos poner ejemplos que ejecutar, pues se haría como hemos visto en la multiplicación.

16. EXTRACCIÓN DE RAÍCES. Las reglas para la extracción de las raíces cuadrada y cúbica en un sistema cualquiera, son las mismas que las expuestas en el sistema decimal, y por ellas se encontraría que la raíz cuadrada de 2α6230, es 5α6; y la cúbica de 11βαβ42β, es 24β, números escritos todos en el sistema duodecimal.

17. Sabiendo ejecutar las operaciones fundamentales de la aritmética en un sistema cualquiera, podrá resolverse directamente el problema de traducir un número de un sistema de base B, á otro de base B′, por la regla siguiente:

Para traducir un número entero cualquiera del sistema cuya base es B, *á otro de base* B′, *se divide el número y los cocientes sucesivos por la base del nuevo sistema expresada en el antiguo, y los restos sucesivos que encontremos serán las cifras del número pedido, el cual se obtendrá poniendo estas cifras de izquierda á derecha en un orden contrario al que se han hallado.*

Fracciones en un sistema cualquiera análogas á las decimales del sistema ordinario.

18. Las fracciones *decimales* de un sistema cualquiera, que bien podremos llamarlas así después de haber convenido en llamar siempre *diez* á la base del sistema, se obtienen absolutamente de la misma manera que en el sistema ordinario, y siguen las mismas reglas en su escritura, lectura y cálculo.

La conversión de fracciones ordinarias en fracciones deci-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

males se hace del mismo modo, y como en el sistema ordinario, se verifica que cuando el denominador de la fracción ordinaria no contiene más factores primos que los de la base B, se puede reducir exactamente en fracción continua; y siempre que el denominador contenga factores extraños á los de la base, la fracción decimal equivalente será ilimitada, periódica pura si dicho denominador es primo con B, y periódica mixta si además de contener factores de la base, contiene algún extraño.

La fracción ordinaria $\frac{7}{18}$ escrita en el sistema de 12 citras, será $\frac{7}{16}$, y ésta convertida en fracción decimal correspondiente, será:

70	16
60	0,48
100	
100	
0	

donde vemos que la fracción ordinaria propuesta es equivalente en la fracción decimal del sistema cuya base es *doce*, 0,48.

Del mismo modo veremos que la fracción ordinaria $\frac{3}{5}$ cuyo denominador es primo con la base 10 (doce) del sistema, convertida en *decimal,* da origen á la fracción periódica 0,72497249..., y la fracción ordinaria $\frac{7}{10}$, que en el sistema de *doce* cifras se escribe $\frac{7}{\alpha}$ y cuyo denominador α contiene el factor primo 2 de la base y el 5 diferente convertida en fracción decimal periódica mixta igual á 0,849724972...

Las reglas para convertir fracciones decimales de un sistema cualquiera á fracciones ordinarias, son las mismas que las dadas en el sistema ordinario. Así, las fracciones decimales anteriores tendrán por generatrices respectivas $0{,}48 = \frac{48}{100} = \frac{24}{60} = \frac{12}{30} = \frac{7}{16}$, que equivale á $\frac{7}{18}$ en el sistema decimal

$$0{,}72497249\ldots = \frac{7249}{\beta\beta\beta\beta} = \frac{3}{5},$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

cuya simplificación se ha hecho buscando el máximo común divisor 2497 de los números 7249 y ββββ escritos en el sistema de doce cifras, y dividiendo por él.

Por último, se tiene que

$$0{,}849724972\ldots = \frac{84972-8}{\beta\beta\beta\beta 0} = \frac{84966}{\beta\beta\beta\beta 0} = \frac{7}{\alpha},$$

equivalente esta última fracción á la ordinaria $\frac{7}{10}$ del sistema actual.

LECCIÓN III

Divisibilidad en un sistema cualquiera.—Aplicación de la teoría de los diferentes sistemas de numeración.—Comparación entre los sistemas de numeración decimal y duodecimal.

Divisibilidad en un sistema cualquiera.

19. Los caracteres de divisibilidad de un número por otro en un sistema cualquiera, se deducen de la misma manera que lo hemos hecho en el sistema ordinario, si bien es cierto que estos caracteres varían de un sistema á otro al mismo tiempo que varía la base.

Así, pues, prescindiendo de las demostraciones, porque serían idénticas á las dadas al ocuparnos de esta teoría en nuestro sistema ordinario, diremos que:

1.° Para que un número sea divisible por un factor de la base, es necesario que su última cifra de la derecha lo sea también.

2.° Para que un número sea divisible por la enésima potencia de un factor de la base, es necesario que el número formado por las n últimas cifras de la derecha lo sea también.

3.° Para que un número sea divisible por B—1 ó por un factor primo de B—1, siendo B la base del sistema, es necesario que la suma del valor numérico de sus cifras sea divisible también por B—1 ó por el factor primo de B—1 cuyo carácter de divisibilidad buscamos.

4.° Para que un número sea divisible por B + 1, ó por un factor primo de B + 1, siendo B la base del sistema, es necesario que la suma de las cifras de lugar par, menos la suma de las de lugar

(c) Instituto Cervantes de Madrid

impar, sea cero, ó divisible por B + 1, ó por el factor de B + 1 cuyo carácter de divisibilidad buscamos.

20. En general, si representamos por *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, etc. las cifras de un número entero N, escrito en un sistema de base B, y por 1, r, r', r'', r''', etc. los diferentes restos que se obtienen de dividir por *n* las potencias sucesivas de la base B, principiando por 1, se tendrá que *el número* N *será divisible por* n *siempre que la suma algebraica*

$$a \pm rb \pm r'c \pm r''d \pm r'''e \pm \ldots$$

sea cero ó divisible por el número n.

La demostración es la misma que se dió en el sistema ordinario, LECCIÓN X.

Según esto, diremos que en el sistema de *doce* cifras, un número será divisible por 2, 3, 4 ó 6, siempre que la cifra de las unidades sea *cero* ó divisible por estos números.

Será divisible por 9, 14 (diez y seis), 30 (treinta y seis), siempre que sus dos últimas cifras sean *ceros* ó formen un número divisible por 9, 14 ó 30.

Un número será divisible por β (once) siempre que la suma de las cifras de lugar impar, menos la suma de las de lugar par, sea *cero* ó divisible por 11.

Aplicando la fórmula general anterior para saber cuándo un número entero es divisible por otro número cualquiera, hallaremos que un número entero escrito en el sistema de *doce* cifras será divisible por 7, cuando separando la cifra de las unidades y dividiendo lo que queda en períodos de tres cifras, y multiplicando éstas respectivamente por los números 2, 3, 1, la suma de los productos de los períodos de lugar impar (contando como tal la cifra separada de las unidades), menos la suma de los productos de los períodos de lugar par, sea cero ó divisible por 7.

En efecto; las diferentes restas que se obtienen al dividir por 7 las potencias sucesivas de la base, son

1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, etc.;

tomando los complementarios de aquellos que pasan de la mitad de 7, se tendrá la nueva serie de restos

1, −2, −3, −1, 2, 3, 1, −2, −3, −1, etc.;

luego si representamos por *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, etc. las cifras de un nú-

(c) Instituto Cervantes de Madrid

mero N escrito en el sistema de *doce*, se hallará para condición de divisibilidad de N por 7, que la suma algebraica

$$a - 2b - 3c - d + 2e + 3f + g - 2h - \text{etc.}$$

ha de ser *cero* ó divisible por 7; lo cual está conforme con la regla.

Aplicación de la teoría de los diferentes sistemas de numeración.

21. Por medio de la teoría de los diferentes sistemas de numeración pueden demostrarse algunas propiedades de los números.

En efecto; de poderse escribir un número cualquiera en el sistema *binario* ó sea de dos cifras, se deduce que *todo número par es una suma de potencias de* 2; *y todo número impar una suma de potencias de* 2, *más la unidad.*

Efectivamente; todo número N cuyas cifras son a, b, c, d... escrito en un sistema cuya base es B, se puede escribir así:

$$N = a + Bb + B^2c \times B^3d + B^4e + \ldots;$$

de modo que el número N escrito en el sistema binario, será:

$$N = a + 2b + 2^2c + 2^3d + 2^4e + \ldots;$$

y como en este sistema las cifras no pueden ser más que 0 y 1, la expresión de N quedará reducida á la suma de potencias de 2, si a es cero; y á la suma de potencias de 2, más la unidad, en el caso de no serlo, lo cual se verifica siempre que N es impar.

22. Análogamente que en el número 96, demostraríamos en un sistema de base B, que una potencia cualquiera de B disminuída en una unidad es divisible por B—1; y que toda potencia B^m de la base B aumentada ó disminuída de una unidad, según que m sea par ó impar, es divisible por B + 1; de donde se podrá deducir:

1.° *Que* $B^m - 1$ *es siempre divisible por* B — 1 *cualquiera que sea el número* B.

2.° *Que* $B^m - 1$ *ó* $B^m + 1$ *es divisible por* B + 1, *según que* m *sea par ó impar.*

23. Si observamos que

$$1000 - 1 = 999 = 37 \times 27 = 37 \times 3^3,$$

y que

$$1000 + 1 = 1001 = 7 \times 11 \times 13,$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y además que todo número del sistema ordinario puede considerarse como escrito en el sistema de base *mil* cuyas cifras serían los números que resultan de dividirle en secciones ó períodos de tres cifras, principiando por la derecha, podremos deducir:

1.° Que un número cualquiera N escrito en el sistema decimal, será divisible por 999, 37, 27, 9 ó 3, siempre que lo sea la suma de los períodos que resultan de dividir el número de tres en tres cifras.

2.° Que un número cualquiera N escrito en el sistema decimal será divisible por 1001, 11 ó 7 siempre que dividido en períodos de tres cifras, principiando por la derecha, la suma de los de lugar impar menos la de los períodos de lugar par sea cero ó divisible por cualquiera de estos números.

Comparación entre los sistemas de numeración decimal y duodecimal.

24. Terminaremos esta teoría haciendo una ligera comparación entre los sistemas de *diez* y *doce* cifras.

Pudiendo ser, como en efecto lo es, arbitraria la elección de la base de un sistema de numeración, parecía natural que los hombres, al elegir la base de un sistema, se hubieran decidido por aquella que más ventajas reportara; sin embargo, al adoptar universalmente la base *diez*, no han debido tener esto en cuenta. La costumbre observada por todos los hombres en general de contar por los dedos de la mano, y siendo estos en número *diez*, ha sido, sin duda, la causa de adoptar esta base; de aquí el origen de los números dígitos, de *digitus* (dedo), y que se cuenten algunas cosas por *manos*, entendiéndose por una mano la reunión de *cinco* unidades, número igual al de dedos que tiene la mano.

Todos cuantos se han ocupado de la teoría de los diferentes sistemas de numeración convienen en que, á pesar de ser arbitraria la elección de la base, ésta no debe ser ni muy grande ni muy pequeña, sino que debe hallarse comprendida entre ciertos límites. La elección de una base muy pequeña tendría el inconveniente de venir los números escritos con muchas cifras, y no se podrían someter á los cálculos con la sencillez y prontitud que se necesita. Por el contrario, la elección de una base demasiado grande permitiría escribir grandes números con pocas cifras; pero tendría el inconveniente de ser muchos los nombres y cifras que habría que aprender, siendo, por consiguiente, muy pesadas las tablas de que nos valemos para efectuar los cálculos. Así, la de multiplicar, que

(c) Instituto Cervantes de Madrid

tanto trabajo cuesta aprender á los niños, costaría muchísimo más y aun sería casi imposible si en vez de ser *diez* la base, fuera, por ejemplo, *ciento*. La primera exige aprender de memoria 40 productos distintos: la segunda exigiría 4900. No debiendo pasar la base de ciertos límites, evidentemente el 12 es el que por la propiedad de tener más divisores que ningún otro, es indudablemente el que debe preferirse.

Aunque las propiedades generales de los números no cambian con la base, sin embargo, de la elección de ésta puede depender que la cantidad pueda expresarse con más ó menos exactitud, con más ó menos sencillez, y en este concepto el sistema *duodecimal* lleva ventaja al *decimal;* pues por el primero es indudable que se pueden expresar con exactitud más cantidades que por el segundo.

Así, entre las fracciones que tienen la unidad por numerador y la serie natural de los números desde 2 hasta 99 por denominador, 13 se pueden convertir exactamente en decimales, mientras que en fracciones *duodecimales* se pueden convertir 19. Por tanto, la medida de las cantidades se hace más fácilmente por el sistema duodecimal, habiendo más probabilidades de obtener por este sistema un número que exprese el valor de la cantidad con más sencillez y exactitud.

La ventaja del sistema duodecimal sobre el decimal se ha comprendido desde hace mucho tiempo, como lo prueban las divisiones y subdivisiones de las unidades antiguas, y la predilección que este número ha tenido y tiene sobre los demás. Rara vez se cuenta en la vida comercial por decenas, mientras que es muy frecuente hacerlo por *docenas* y *gruesas*, cuya unidad es una docena de docenas. El año se ha dividido en 12 meses; 12 son los signos del Zodíaco; 12 los dígitos ó partes en que se divide el diámetro de sol y luna. El día tiene dos veces 12 horas. La circunferencia se divide en 360 grados, que equivale á treinta veces 12, y los grados, minutos, segundos, etc., se dividen y subdividen en 60 partes, que equivale á cinco veces 12. Por último, hay quien, apasionado con frenesí por el sistema duodecimal, alega la razón de que debe adoptarse el número 12 por base, no sólo por las ventajas materiales que pueda reportar, sino por ser este número, á juicio del autor á que me refiero, *el número predilecto de Dios*, como lo prueba el que fuesen 12 las tribus de Israel, 12 los profetas mayores, 12 los apóstoles, 12 los tonos mayores y 12 los tonos menores de la música con que se cantan las alabanzas al Santísimo, etc. etc.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

LECCIÓN IV

Método abreviado de la multiplicación.—Método abreviado de la división. Método abreviado de la extracción de la raíz cuadrada y cúbica.

Método abreviado de la multiplicación.

25. En la multiplicación de decimales ocurre con frecuencia tener que hallar un producto con un grado de aproximación menor que se obtendría empleando el método ordinario de la multiplicación; por ejemplo, si el multiplicando tiene *siete* cifras decimales y el multiplicador *seis*, el producto obtenido por el método ordinario vendría aproximado con *trece* cifras decimales; pero si sólo quisiéramos tener aproximado dicho producto en menos de una unidad del *sexto* orden decimal, en vez de emplear el procedimiento ordinario, seguiremos el siguiente método abreviado:

26. *Para obtener en menos de una unidad decimal de un orden dado el producto de los números, se escribe el multiplicando, después se coloca la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la cifra del multiplicando que expresa unidades cien veces menores que aquellas que indica el grado de aproximacion del producto, y las demás cifras del multiplicador se escriben en un orden inverso.*

Después se multiplica cada cifra del multiplicador por la parte superior del multiplicando á partir de la cifra que tiene encima aquella por la cual se multiplica. Se escriben todos los productos parciales unos debajo de otros de modo que se correspondan las primeras cifras de la derecha, y se efectúa la adición de todos ellos. De la derecha de la suma se separan tantas cifras decimales, más dos, como ha de tener el resultado. Se suprimen las dos últimas, y se agrega una unidad á la primera cifra que queda en el producto. El resultado que así se obtiene, es el que se pide.

Sea, por ejemplo, hallar en menos de une *milésima*, el producto de los números 3,1495273 y 23,425134.

Dispondremos la operación del modo siguiente:

Multiplicando..... 3,1495273
Multiplicador invertido. 43 152432

6 299054
944856
125980
6298
1570
31
9

73,77798

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Luego el producto de los dos números dados, aproximado en menos de una milésima, es 73,778.

En efecto; al colocar la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la que en el multiplicando expresa unidades cien veces menores que la que indica el grado de aproximación, hacemos que el producto de dicha cifra por la parte superior del multiplicando, á partir de la cifra que tiene encima, exprese unidades cien veces más pequeñas que la que indica el grado de aproximación; y como las demás cifras del multiplicador están escritas en un orden inverso, conseguimos que cada uno de los productos parciales sea también del mismo orden que el anterior; es decir, de unidades cien veces menores que las que indican la aproximación pedida; porque si bien es cierto que cada cifra del multiplicando expresa unidades diez veces menores que la anterior á ella, también cada una del multiplicador expresa unidades diez veces mayores que la cifra que le antecede; por consiguiente, el producto de cada cifra del multiplicando por la parte superior del multiplicador, á partir de la que tiene encima, expresa unidades cien veces menores que las que indican la aproximación.

En cada producto parcial se comete un error menor que tantas centésimas del orden de la aproximación como unidades tiene la cifra por la cual se multiplica; luego el error que se cometerá en el producto, será menor que tantas centésimas del orden de la aproximación como unidades tiene la suma de las cifras empleadas en el multiplicador; y como esta suma, en general, no llega á valer *ciento* (*), el error cometido es menor que cien centésimas del orden de la aproximación, es decir, menor que una unidad de este orden.

Despreciando las dos últimas cifras halladas, se comete también un error menor que una unidad del orden indicado; luego aumentando una unidad á la última cifra que queda en el producto, el error que se comete por exceso ó defecto es menor que una unidad del último orden.

En el ejemplo presente, la suma de las cifras empleadas es

$$3+1+5+2+4+3+2=20;$$

(*) Si pasase dicha suma de *ciento*, en vez de colocar la cifra de las unidades del multiplicador debajo de la que en el multiplicando expresa unidades *cien* veces menores que aquella que indica la aproximación, se colocará debajo de la inmediata inferior.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

las centésimas despreciadas del orden de la aproximación son 98; luego el error cometido es $98+20=118$ centésimas del último orden; pero habiendo añadido á la primera cifra que queda en el producto una unidad, obtendremos el producto 73,778 que se diferencia del verdadero en menos de 18 centésimas del último orden, y, por lo tanto, en menos de media milésima.

Método abreviado de la división.

27. *Para obtener por un método abreviado en menos de una unidad el cociente de dos números dados* (*), *se marcan á la izquierda del divisor con una raya horizontal las cifras necesarias para que el número que representan sea por lo menos igual al doble de cifras que ha de tener el cociente multiplicado por 0,9; se cuentan á continuación otras tantas como ha de tener el cociente menos una, y se prescinde de todas las restantes.*

En seguida se suprimen de la derecha del dividendo tantas cifras cuantas tenía el divisor menos las marcadas; se divide por el método ordinario lo que queda á la izquierda del dividendo por el nuevo divisor, teniendo en cuenta en las multiplicaciones del cociente por el nuevo divisor las unidades que provienen de la multiplicación del cociente por la primera de las cifras que se borran.

Se divide el resto que se obtiene por el divisor que resulta de borrar á su derecha una nueva cifra, el cociente hallado se multiplica por este divisor, y el producto se resta del dividendo correspondiente; se vuelve á borrar otra cifra, y así se continúa hasta emplear por divisor la parte marcada á la izquierda del propuesto; y si esta última división parcial da un cociente mayor que 9, se modifica convenientemente la cifra anterior. El resultado obtenido es el cociente aproximado por exceso ó defecto, en menos de una unidad.

Sea, por ejemplo, dividir el número 35478324376 por 8543276, cuya operación dispondremos del modo siguiente:

35478 324376	$\dot{\bar{8}}\dot{5}\dot{4}\dot{3}$ 276
1306	4153
452	
25	
0	

(*) Este método abreviado es debido á *M. Guy*.

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Como el número de cifras que ha de tener el cociente es cuatro, sólo tendremos que marcar á la izquierda del divisor la primera cifra 8, pues $4\times2\times0{,}9$ es menor que dicha primera cifra; en seguida contamos tres cifras más, número igual á las que ha de tener el cociente menos una, y se desprecian las tres restantes 2, 7 y 6.

Separadas de la derecha del dividendo las seis últimas cifras, número igual al que tiene el divisor menos la primera, que es la marcada, y hecha la división, hallamos la cifra 4 del cociente, que multiplicada por el nuevo divisor y restado su producto del dividendo, obtenemos la resta 1306; ésta se divide por 854, número que resulta despreciando la última cifra 3, por lo cual se la marca con un punto y nos da la segunda cifra 1 del cociente, que multiplicada por su divisor y restado el producto del dividendo correspondiente, nos da la segunda resta 452. Dividiendo 452 por el nuevo divisor que resulta de borrar la siguiente cifra 4, obtenemos la cifra 5 del cociente; multiplicando esta cifra por el divisor, añadiendo á este producto las 2 unidades que provienen de 5 por 4, cifra ya borrada, y restando el resultado del dividendo, hallamos la resta 25, la cual, dividida por el último divisor, nos da la última cifra 3 del cociente.

El último resto es cero, que seguido de las cifras separadas en el dividendo da un número menor que el divisor; luego el número hallado 4153 es el cociente entero aproximado en menos de una unidad.

Demostración. Sea A un dividendo, B un divisor, Q el cociente obtenido por la regla, y R el último resto seguido por las cifras separadas.

Como al restar de cada dividendo parcial el producto de la cifra del cociente por el divisor que le corresponde restamos un producto menor que el verdadero, puesto que despreciamos una parte del divisor, en cada una de estas restas cometeremos un cierto error; de modo que si representamos por E la suma de los errores que se cometen, cuya suma debió restarse del dividendo total, se tendrá

$$A = BQ + R - E;$$

y dividiendo por B, será:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} - \frac{E}{B}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

De modo que si demostramos que $\frac{R}{B} - \frac{E}{B}$ es menor que la unidad, quedará demostrado que el número Q hallado según la regla, es el cociente aproximado en menos de una unidad por exceso ó defecto, según que R sea $<$ ó $>$ E.

Para demostrar que $\frac{R}{B} - \frac{E}{B}$ es menor que la unidad, observaremos que *cada resto es menor que el divisor correspondiente.*

En efecto; el cociente de la primera división es *a*, por ejemplo, y el producto de *a* por el divisor abreviado aumentado de las unidades que provienen de la primer cifra borrada, si la hay, se ha de poder restar del dividendo correspondiente para que dicha cifra *a* sea exacta; ahora bien: si la resta que se obtiene fuese mayor que el divisor, sería señal que la cifra hallada por el método ordinario sería por lo menos $a + 1$, y no *a*, como habíamos supuesto; por consiguiente, dicha primer resta es menor que el divisor correspondiente.

En cada una de las siguientes se comete un error á lo más igual á una unidad del último orden, que sólo influye, por lo tanto, en la primera ó dos primeras cifras de la derecha; por consiguiente, todas serán menores que sus divisores correspondientes; de modo que la penúltima podrá contener al último divisor una vez más, y dar, en el caso más desfavorable, un cociente igual á 10, lo que haría modificar la cifra última hallada; pero el último resto sería entonces menor que el último divisor, que es lo que necesítamos; y este último resto seguido de las cifras separadas en el dividendo, sería, por consiguiente, menor que todo el divisor; luego el resto R es menor que B.

El número E *también es menor que el divisor.* En efecto; los errores de los productos parciales se principian á cometer cuando se principian á borrar las cifras en el divisor; de modo que el caso más desventajoso será cuando se principie con un divisor abreviado; en ese caso el error principiará en la primera cifra del cociente, que llamaremos *a*.

En el producto de *a* por el divisor abreviado se desprecian las unidades que provienen del producto de dicha cifra *a* por la primera de las borradas cuyo número es á lo más 9; por consiguiente, el error que provienc de esta operación es menor que 9 unidades del orden que marca la unidad seguida de $n-1+m-1$ ceros, siendo *n* el número de cifras del cociente y *m* el de las separadas á la

(c) Instituto Cervantes de Madrid

derecha del divisor; es decir, que el error citado será menor que $9 \times 10^{n+m-2} = 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$.

Además, despreciando el producto de la misma cifra a por lo restante del divisor, se comete un error menor que $10^{m-1} \times a \times 10^{n-1}$; y como a es á lo más 9, dicho error será menor que $10^{m-1} \times 9 \times 10^{n-1} = 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$; por lo tanto, el error que se comete en la primera cifra del cociente es menor que $2 \times 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$.

Del mismo modo se demostraría que en cada una de las restantes cifras se comete un error menor que la misma cantidad $2 \times 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$; luego siendo n el número de cifras del cociente, el error total que se cometerá, ó sea E, es menor que $2n \times 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$.

Ahora bien: la parte marcada á la izquierda del divisor es mayor ó por lo menos igual á $2n \times 0{,}9$ unidades del orden marcado por las cifras separadas en el divisor, más las del cociente menos una; ó lo que es lo mismo, la parte marcada á la izquierda del divisor es, por lo menos, igual á $2n \times 0{,}9 \times 10^{n+m-1}$; por consiguiente, el error E es menor que la parte marcada á la izquierda del divisor seguida de tantos ceros como cifras tiene dicha parte á su derecha, y con más razón será menor que todo el divisor, que es lo que se quería demostrar.

Siendo R y E menores que el divisor, $\frac{R}{B}$ y $\frac{E}{B}$ son menores que la unidad, y, por consiguiente, su diferencia lo es con más razón; luego el cociente Q, hallado según la regla, está aproximado por exceso ó defecto en menos de una unidad.

NOTA. La división de decimales se reduce á la de enteros igualando el número de cifras decimales, y se obtiene el cociente en menos de una unidad, según la regla anterior. Si se quisiera obtener el cociente en menos de una unidad del orden decimal n, se haría que el dividendo tuviese n cifras decimales; siendo entero el divisor, se efectuaría la división como se ha dicho, y separando en el cociente n cifras decimales, tendríamos el cociente con la aproximación pedida.

Método abreviado de la raíz cuadrada y cúbica.

28. RAÍZ CUADRADA. El método abreviado de la raíz cuadrada está fundado en el principio siguiente:

Si se hallan más de la mitad de las cifras de la raíz de un número

(c) Instituto Cervantes de Madrid

entero y se resta de dicho número el cuadrado de la raíz hallada, el cociente entero de dividir la diferencia que se obtenga por el duplo de dicha raíz, será lo que le falta á la raíz entera del número propuesto.

Sea N el número entero cuya raíz cuadrada entera tiene $2n+1$ cifras; supongamos que por el método ordinario se han hallado las $n+1$ primeras cifras de la raíz, y que sólo falta calcular las n restantes. Llamemos a al valor absoluto de la parte hallada de la raíz compuesta, según sabemos, de $n+1$ cifras; su valor relativo será evidentemente $a \times 10^n$. Representemos, finalmente, por x el valor exacto del completo de la raíz de N, y tendremos

$$N = (a \cdot 10^n + x)^2 = a^2 \cdot 10^{2n} + 2ax \cdot 10^n + x^2.$$

Restando de ambos miembros la cantidad $a^2 \cdot 10^{2n}$, y dividiendo por $2a \cdot 10^n$, hallaremos, representado por R la diferencia $N - a^2 \cdot 10^n$,

$$\frac{R}{2a \cdot 10^n} = x + \frac{x^2}{2a \cdot 10^n}.$$

Si ahora llamamos q al cociente de dividir R por $2a \cdot 10^n$ y R al resto, se tendrá

$$\left.\frac{R}{2a \cdot 10^n} = q + \frac{R'}{2a \cdot 10^n}.\right\}$$

de donde

$$\left.x + \frac{x^2}{2a \cdot 10^n} = q + \frac{R'}{2a \cdot 10^n},\right\}$$

ó bien

$$\left.x - q = \frac{R'}{2a \cdot 10^n} - \frac{x^2}{2a \cdot 10^n}.\right\}$$

Probando ahora que el segundo miembro de la igualdad anterior es menor que la unidad, tendremos demostrado que el cociente hallado q de la división de R por $2a \cdot 10^n$, se diferencia del verdadero en menos de una unidad, y, por tanto, la parte entera de la raíz será $2a \cdot 10^n + q$.

Que el segundo miembro de la anterior igualdad es menor que la unidad es evidente, puesto que la fracción $\frac{R'}{2a \cdot 10^n}$ es menor que la unidad, por ser R′ el resto de dividir $N - a^2 \cdot 10^{2n}$ por $2a \cdot 10^n$; la segunda fracción también es menor que la unidad,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

puesto que x sólo contiene n cifras, y, por tanto, es menor que 10^n; también se tiene evidentemente $x<a$, y con más razón $x<2a$; luego

$$x^2 < 2a \,.\, 10^n, \text{ ó } \frac{x^2}{2a \,.\, 10^n} < 1,$$

y siendo las dos fracciones que forman el segundo miembro menores que la unidad, su diferencia lo será con más razón.

La raíz entera de N es, por consiguiente, $a \,.\, 10^n + q$, la cual estará aproximada por defecto ó exceso en menos de una unidad, según que R′ sea mayor ó menor que x; en el caso de ser $R' = x$, la expresión $a \,.\, 10^n + q$, será la raíz exacta.

29. Demostrado este principio, diremos que para extraer la raíz cuadrada de un número entero por un método abreviado, se hallarán por el método ordinario las tres primeras cifras de la raíz; el resto obtenido seguido de los dos siguientes períodos, dividido por el duplo de la raíz hallada, nos dará las dos cifras siguientes de la raíz; se hallará el resto correspondiente á estas dos cifras, y bajando á su derecha los cuatro períodos siguientes y dividiendo el resultado por el duplo de la raíz hallada, obtendremos cuatro cifras más; conociendo ya nueve cifras, por igual procedimiento se hallarán otras ocho, y así sucesivamente.

Por este método se halla con suma facilidad que la raíz de 2 aproximada en menos de una cienmillonésima, es 1,41421356.

30. Raíz cúbica. El método abreviado de la raíz cúbica se funda en el siguiente principio:

Cuando se conocen las (n + 2) *primeras cifras de la parte entera de la raíz de un número* N, *se pueden obtener las* n *siguientes dividiendo el resto por el triplo del cuadrado del valor relativo de la parte hallada en la raíz.*

Representemos por a el valor absoluto de la raíz hallada compuesta de $n+2$ cifras; su valor relativo será $a \,.\, 10^n$. Sea x el valor exacto del completo de la raíz, y se tendrá

$$N = (a \,.\, 10^n + x)^3 = a^3 \,.\, 10^{3n} + 3a^2 x \,.\, 10^{2n} + 3ax^2 \,.\, 10^n + x^3.$$

Restando de ambos miembros la cantidad $a^3 . 10^{3n}$, representando la diferencia de N y $a^3 . 10^{3n}$ por R, y dividiendo por $3a^2 . 10^{2n}$, tendremos

$$\frac{R}{3a^2 \,.\, 10^{2n}} = x + \frac{3ax^2 \,.\, 10^n + x^3}{3a^2 \,.\, 10^n}.$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

Si llamamos q al cociente entero indicado en el primer miembro, y R′ al resto, tendremos evidentemente

$$x + \frac{3ax^2 \,.\, 10^n + x^3}{3a^2 \,.\, 10^{2n}} = q + \frac{R'}{3a^2 \,.\, 10^{2n}},$$

ó bien

$$x - q = \frac{R'}{3a^2 \,.\, 10^{2n}} - \frac{3ax^2 \,.\, 10^n + x^3}{3a^2 \,.\, 10^{2n}} \qquad [1].$$

Probemos ahora que el segundo miembro de igualdad anterior es menor que la unidad, y quedará demostrado que la parte entera restante de la raíz es q.

Para demostrar esto observaremos que siendo R′ el resto de dividir R por $3a^2 . 10^{2n}$, la primera fracción es menor que la unidad.

La segunda fracción puede ponerse bajo la forma

$$\frac{3ax^2 \,.\, 10^n + x^3}{3a^2 \,.\, 10^{2n}} = \frac{x^2}{a \,.\, 10^{n-1}} \times \frac{3a \,.\, 10^n + x}{3a \,.\, 10^n \times 10}.$$

Ahora bien: x se compone de n cifras; luego x^2 tendrá á lo más $2n$. El factor a del denominador tiene, por lo menos, $n+2$ cifras; por consiguiente, el denominador tiene, por lo menos, $2n+1$; de donde se deduce que la fracción $\frac{x^2}{a \,.\, 10^{n-1}}$ es menor que la unidad.

La fracción $\frac{3a \,.\, 10^n \times x}{3a \,.\, 10^n + 10}$ también lo es; porque el numerador $3a \,.\, 10^n + x$ y el factor $3a \,.\, 10^n$ del denominador tiene el mismo número de cifras, con la sola diferencia de ser ceros las n últimas de este factor, y en el numerador dichas cifras son las n de que se compone la parte entera x; luego el denominador $3a \,.\, 10^n + x$, y por tanto, la segunda fracción también es menor que la unidad.

Luego el producto de ambas fracciones ó sea su igual $\frac{3ax^2 \,.\, 10^n + x^3}{3a^2 \,.\, 10^{2n}}$ es menor que la unidad, según queríamos demostrar.

Siendo menores que la unidad de las dos fracciones que forman el segundo miembro de la igualdad [1], su diferencia será menor que 1, y, por tanto, la raíz cúbica entera de N será $a \,.\, 10^n + q$.

La raíz hallada por este método abreviado será exacta si $R' = x$,

(c) Instituto Cervantes de Madrid

y vendrá aproximada por el defecto ó exceso en menos de una unidad, según que R′ sea mayor ó menor que x.

31. Demostrado este principio, diremos que para extraer la raíz cúbica de un número entero por un método abreviado, se hallarán por el método ordinario las cuatro primeras cifras de la raíz; el resto obtenido seguido de los dos períodos siguientes, dividido por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, nos dará las dos cifras siguientes de la raíz; se hallará el resto correspondiente á estas dos cifras, y bajando á su derecha los cuatro períodos siguientes y dividiendo el resultado por el triplo del cuadrado de la raíz hallada, obtendremos cuatro cifras más. Conociendo ya diez cifras, por igual procedimiento se hallarán otras ocho, y así sucesivamente.

FIN

(c) Instituto Cervantes de Madrid

(c) Instituto Cervantes de Madrid

(c) Instituto Cervantes de Madrid

$$\mathcal{D} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$\mathcal{D} = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} + \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} + \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} =$$

$$= \alpha\beta\gamma \left(1 + a + a^2 + \dots a^{\alpha}\right)\left(1 + b + b^2 + \dots + b^{\beta}\right)$$

$$\left(1 + c + c^2 + \dots c^{\gamma}\right) =$$

$$= 1 + a^1 + a^2 + a^3 \dots + a^{\alpha} + b + ab + b^2 \dots b^{\beta} +$$

$$+ c + c^2 + \dots + c^{\gamma} + ab + a^2b + \dots$$

$$a^{\beta} \cdot b^{\gamma} + c^1 + \dots a^{\alpha} b^{\beta} + c^{\gamma}$$

(c) Instituto Cervantes de Madrid

SÀNCHEZ VIDAL

ARITMETICA