ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS

POR

D. MANUEL BURILLO DE SANTIAGO,

CATEDRÁTICO NUMERARIO

por oposicion de esta asignatura en el Instituto provincial de Córdoba;
encargado en el mismo varios cursos de la asignatura
de Topografía y Agrimensura.
Profesor que ha sido de cálculos mercantiles en el Instituto de S. Isidro
de Madrid. Ex-Director y Catedrático de Matemáticas en el de Baeza. Profesor
que fué de esta asignatura y de la de Historia natural, cinco cursos,
en el Colegio Politécnico de San Rafael de esta capital.
Antiguo alumno de la facultad de ciencias de la Universidad Central, en la
cual ha probado y cursado todos los estudios correspondientes
á los periodos del BACHILLERATO, LICENCIATURA y DOCTORADO. Perito
agrónomo, agrimensor é individuo de varias corporaciones
científicas y literarias.

TOMO II.

GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA.

Iluminada con más de **200** grabados.

Córdoba.—1880.

Imprenta, librería y litografía del DIARIO DE CÓRDOBA.

San Fernando 34 y Letrados 18.

PRÓLOGO.

De todas las ciencias que cultiva el espíritu humano, no hay ninguna de órden más rigoroso, de método más preciso, de más lógica exposicion, de enlace más íntimo entre sus diferentes partes que la GEOMETRIA.

Si fuera preciso indicar una ciencia, que como tal y por su especial construccion sirviera de norma, de regla, de modelo en fin, á todas las demás ciencias, ninguna sería mas á propósito que la GEOMETRIA.

Fundada, en un corto número de axiomas, que reconocemos únicamente como ciertos, y reduciéndose á estos, por el mas rigoroso y lógico encadenamiento todas las demás proposiciones, que son objeto de la misma, se allega al ánimo el perfecto conocimiento de la verdad; porque en esta ciencia eminentemente racional, es todo de intuicion, y debe estar, por lo tanto, al alcance de todas las inteligencias.

Sin embargo de la facilidad con que puede adaptarse á las investigaciones científicas, es generalmente poco simpática á los alumnos; y nó por ella en sí, sino por la forma bajo la cual es costumbre presentarla: la exposicion de las figuras separadas del texto; el aglomerarlas en láminas aparte; la dificultad de ser encontradas fácilmente; el escesivo número de sus líneas; la profusion de sus letras; la incomodidad de buscar estos puntos en las figuras; la necesidad, en fin, de identificar con cada demostracion su lámina respectiva: todo contribuye á dividir y subdividir el tiempo y la atencion del alumno, poco propenso generalmente á la meditacion, haciendo casi estériles sus esfuerzos.

Comprendiendo nosotros la trascendencia, la necesaria utilidad, la importante y general aplicacion de esta ciencia por escelencia, nos hemos decidido á publicar este tratado de *Geometria*, evitando el mayor número de los inconvenientes arriba indicados; procurando para la misma una impresion esmerada y detenida; sacrificando, con gusto, al logro de este propósito, así tanto nuestros esfuerzos morales, como materiales; y deseando que este Tratado, fruto de tantas vigilias, sea de manifiesta y reconocida utilidad para la preparacion de los alumnos que se deciden por las carreras especiales, y para los de los Institutos, Seminarios y Escuelas normales, para quienes mas en concreto se dedica.

El lógico encadenamiento de sus diferentes partes, el órden de las distintas teorías que cada una abraza, el íntimo enlace de todas las diversas proposiciones comprendidas en cada una de aquellas, obliga en esta ciencia á un razonado é invariable método, el cual es la mayor garantía, de su necesaria percepcion, de su precisa claridad, de su exactitud en fin, procediéndose siempre de la parte al todo, de lo simple á lo compuesto, de lo fácil á lo difícil; de tal manera que, si se tiene en cuenta la sucesion y órden lógico de sus proposiciones, numeradas correlativamente, para hacer mas espeditas las citas y para no proceder al estudio de una proposicion sin el conocimiento completo y prévio de todas las anteriores en que especialmente se funda: se grabará mas y mas la atencion del alumno, y en su ánimo, el espontáneo deseo de este estudio tan agradable, útil y necesario.

Agradecido á la benévola acogida dispensada á la primera parte de esta obra, publicada el año enterior, tengo un placer especial en someter de nuevo esta segunda al ilustrado juicio de mis distinguidos comprofesores, de quienes recibiria con gusto cualquier indicacion, que al ilustrarnos, pudiera redundar en beneficio de los que con tanto gusto nos dedicamos al cultivo de esta ciencia.

PRELIMINARES

Y AXIOMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRIA.

1. Llamamos *cuerpo* á todo aquello que ocupa un sitio ó lugar *finito* y perfectamente *determinado* al que se llama ESPACIO.

Este *lugar* ó *espacio* finito que constituye el *volúmen* de referido cuerpo, es esencialmente limitado, y está separado del espacio infinito que le rodea por las *superficies* del mismo.

A las mútuas intersecciones de las diferentes caras ó superficies de los cuerpos, se llaman *líneas.*

Por último, á las intersecciones de las líneas ó á los límites ó estremidades de estas, llamamos *puntos.*

Por tanto, los límites de los cuerpos, son las *superficies.*

Los límites de las superficies, son las *líneas.*

Los límites de las líneas, son los *puntos.*

No es posible, sin embargo, separar de los cuerpos sus superficies de limitacion; de las superficies, sus líneas; ni de las líneas, sus puntos; y es necesario que mediante la abstraccion y por derivaciones sucesivas consideremos aisladamente la *superficie*, la *línea* y *el punto*, toda vez que no tienen existencia real fuera de los cuerpos.

2. *El espacio*, *la superficie* y *la línea* pueden considerarse bajo dos aspectos diferentes, ya atendiendo á sus diversas formas ó *figuras*, ya á sus distintas magnitudes relativas que se llaman *estensiones.*

3. Estension *es toda parte determinada del espacio*, és, el lugar que ocupa un cuerpo, (nunca el cuerpo mismo).

Toda estension se concibe siempre como *limitada*, pe-

Algunos autores consideran la linea como una série no interrumpida de puntos; la superficie como una série de lineas; el cuerpo como una série de superficies, en número infinito é intimamente unidas entre si, *netrable* y *movible* y cada una se diferencia de las demás atendiendo á su *Figura, Posicion* y *Magnitud.*

Figura de una estension, se llama *el modo de ser*, atendiendo á su formacion, á su carácter ó estructura particular. Tambien entendemos por *figura*, al trazado de líneas auxiliares que se construyen frecuentemente para facilitar las demostraciones.

Posicion de una estension, *es el modo de estar* de la misma; su situacion ó estado respectivo.

Magnitud de una estension, *es la cantidad de espacio, necesario á su existencia*, la cual podemos considerar bajo dos aspectos diferentes, uno referido á su *cualidad*, bajo el cual se espresan como Volúmenes, como Areas, ó como Longitudes.

4. Volúmen es la magnitud relativa de un *espacio.*

Area es la magnitud relativa de una *superficie.*

Longitud es la magnitud relativa de una *línea.*

La *magnitud*, bajo el otro concepto de su *cantidad* es como todas determinada por un número ó es numerada, porque no solo fué medida de antemano, sino que fué calculado y determinado numéricamente el resultado final de su medida.

5. Las estensiones de la misma figura y magnitud *son iguales*, aun cuando tengan diferente posicion, toda vez que este carácter puede ser fácilmente adquirido sin variar aquellos.

Las estensiones de la misma figura y diferente magnitud, *son semejantes.*

Las estensiones de la misma magnitud y diferente figura, *son equivalentes.*

6. *Las dimensiones* de una estension son: su *longitud ó largo*, su *latitud ó ancho* y su *profundidad ó grueso.*

Estensiones de una sola dimension son las líneas.

Estensiones de dos dimensiones son las superficies.

Estension de tres dimensiones la tienen los cuerpos.

Las tres dimensiones ya espresadas son necesarias para la existencia de los cuerpos, pero se conciben frecuentemente estensiones de solo dos dimensiones, como la estension de un campo ó heredad; y estensiones de una sola dimension, como la distancia kilométrica entre dos puntos.

Hay, por lo tanto, estension de *tres* dimensiones, de *dos* y de *una*. El *cuerpo geométrico* que prescinde de la naturaleza de su masa, tiene una estension de *tres dimensiones.*

Las superficies de limitacion del mismo, constituyen estensiones de solo *dos* dimensiones.

Las líneas de limitacion de las superficies, constituyen estensiones de solo *una* dimension.

En el punto nó se considera ninguna dimension, por que este, és, el límite de la línea y por tanto, el término elemental de la estension.

Axiomas ó principios fundamentales de esta ciencia.

Además de los espuestos en la pág. 3 del primer tomo, son los siguientes:

7. 1.° *La línea recta es la mas corta que se puede trazar entre dos puntos.*

2.° *Por dos puntos no puede pasar mas que una sola línea recta; ó lo que es lo mismo, dos puntos determinan la posicion de una recta.*

3.° *Dos rectas no pueden cortarse mas que en un punto.*

4.° *Dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su estension.*

5.° *La línea recta, no admite variedad de especies.*

6.° *Toda recta ó superficie, puede considerarse prolongada indefinidamente.*

7.° *Dos rectas son por su naturaleza superponibles y para que esto se verifique basta que coincidan en dos de sus puntos.*

8.° *Dos líneas ó superficies que superpuestas coincidan son iguales ó simétricas.*

9.° *La línea curva admite variedad de especies.*

10. *Desde un punto á otro, se puede trazar infinito número de líneas curvas.*

11. *La interseccion de dos superficies es una línea.*

Superficie plana, que es aquella en la cual se verifica que toda recta aplicada á dos, cualquiera de sus puntos coincide en toda su estension con la misma, *tampoco admite variedad de especies.*

Las superficies curvas, que son aquellas en las cuales no coincide una recta aplicada á dos cualquiera de sus puntos, *admiten variedad de especies.*

GEOMETRIA ELEMENTAL.

8. La Geometria *ó ciencia de la estension, es aquel tratado de las* MATEMÁTICAS *que se ocupa de las propiedades de las* figuras, *y en particular de la* medida de su estension, *considerada esta, bajo los diferentes aspectos que quedan indicados.*

Su objeto, lo constituye la estension en sus varios conceptos de *figura, posicion* y *magnitud.*

Los medios de que se vale, son las demostraciones directas y recíprocas; las construcciones gráficas y el cálculo matemático.

El fin que se propone, es la determinacion de todas las cuestiones referentes á la estension, bajo sus diferentes aspectos.

9. La Geometria para su ordenado estudio se divide en elemental ó *Sintética, Analítica* y *Descriptiva.*

La Geometria elemental ó Sintética, hemos dicho que considera la cantidad como determinada en el espacio, *contínua y mensurable,* prescindiendo por completo de todas las demás propiedades físicas de los cuerpos.

La Geometria analítica *ó análisis geométrico,* representando literalmente las magnitudes de las líneas, superficies y espacios limitados que corresponden á los cuerpos, *resuelve las cuestiones de la Geometría elemental por medio del cálculo algebráico ordinario.* Esta es debida á Descártes.

La Geometría descriptiva, llamada con razon *Geometría reciente,* se halla exenta de cálculos algebráicos, hace aplicacion de las relaciones métricas de las figuras, de sus relaciones de posicion, atendiendo solo al diseño que sobre un plano horizontal ó vertical se forma sobre el conjunto de todas las proyecciones de la figura, reduciéndose así por método tan nuevo y elegante la dificultad en todas las resoluciones, concretándolas á simples cuestiones de Geometría plana. (1) Esta es debida á Monge.

10. Para proceder al estudio de esta asignatura con el órden y método debido, ponemos á continuacion el siguiente cuadro, en el que exponemos el que empleamos para el debido conocimiento de los alumnos.

---

(1) Chasles, ojeada histórica, Bruselas 1837.

LA GEOMETRIA ó ciencia que se ocupa de la estension se divide en

- **GEOMETRIA PLANA** que trata de la estension cuyos elementos se hallan todos en un plano
  - 1.ª Parte: Líneas.
    - Libro 1.º Rectas.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Rectas angulares.
      - 2.º » perpendiculares
      - 3.º » paralelas.
      - 4.º » proporcionales.
    - Libro 2.º Circunferencias de círculo.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Rectas perpendiculares, oblícuas y paralelas en la circunferencia.
      - 2.º Medida de los ángulos.
      - 3.º Rectas proporcionales en la circunferencia.
  - 2.ª Parte: Superficies.
    - Libro 2.º Superficies poligonales
      - 1.º Triángulos.
      - 2.º Cuadrilácteros.
      - 3.º Polígonos en general.
      - 4.º Areas y comparacion y division de las areas poligonales.
    - Libro 2.º Superficies circulares.
      - 1.º Propiedades del círculo.
      - 2.º Polígonos regulares en el círculo.
      - 3.º Medida de la circunferencia.
      - 4.º Areas circulares.

y en

- **GEOMETRIA DEL ESPACIO** que trata de la estension cuyos elementos no están todos en un mismo plano.
  - 1.ª Parte: Rectas y planos y superficies curvas de revolucion.
    - Libro 1.º Rectas y planos.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Rectas, perpendiculares, oblícuas y paralelas á un plano.
      - 2.º Planos entre sí.
      - 3.º Angulos poliedros.
    - Libro 2.º Superficies curvas.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Superficies cónicas.
      - 2.º » cilíndricas.
      - 3.º » esféricas.
  - 2.ª Parte: Cuerpos poliedros y cuerpos redondos.
    - Libro 1.º Poliedros.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Pirámides.
      - 2.º Prismas.
      - 3.º Poliedros en general.
      - 4.º Areas y volúmenes de los poliedros.
    - Libro 2.º Cuerpos redondos.
      - PRELIMINARES.
      - 1.º Cono.
      - 2.º Cilindro.
      - 3.º Esfera.

GEOMETRIA PLANA.

PRIMERA PARTE.

LÍNEAS.

LIBRO PRIMERO.

Rectas.

11. *El punto matemático*, segun tenemos espresado, *carece de toda magnitud*, y por tanto *de toda figura*, teniendo solo *posicion*; para representarlo, lo hacemos por el punto comun de la escritura, ó tambien por la interseccion de dos rayitas, colocando á su lado una letra mayúscula, por medio de la cual le nombramos.

Es general en Matemáticas el empleo de las letras mayúsculas, para espresar los puntos, las líneas y los cuerpos, así como el empleo de las letras minúsculas, para espresar por medio de una sola, una línea cualquiera; ó en general figuras de magnitud inferior á las anteriores.

12. *Las líneas* pueden ser de infinitas clases, dependientes éstas de las leyes que hayan regido las variaciones del punto generador; se reconocen fácilmente por la representacion gráfica de un trazado. En las líneas hay que atender mas especialmente á su *figura* que á su posicion y magnitud. La clasificacion mas importante que se hace de la línea es considerarla dividida en *recta* y *curva*.

Fig. 1.

Línea recta es la mas corta distancia entre dos puntos.

Línea curva es aquella que no tiene parte apreciable de recta.

Línea mista es aquella que se compone de recta y curva.

Línea quebrada es aquella que se compone de varias rectas limitadas y en posiciones diferentes. Toda línea quebrada que no sea plana se llama *Gaucha ó Alaveada*.

En el primer grabado de la figura 1.ª adjunta, representamos por AB la *línea recta*; por DC la *curva;* por RQP la *mista*, y por MNTS la *quebrada.*

Algunos consideran que la línea recta y la curva es una misma, ó bien constituida la curva de rectas infinitamente pequeñas; ó bien considerando la recta por prolongada que sea, como arco ó línea curva de circunferencia, que obedece á un centro infinitamente lejano.

13. *Las superficies* pueden ser de infinitas clases, dependientes estas de las leyes que hubiesen regido las variaciones de figura, posicion y magnitud de las líneas generadoras, como las líneas, se diferencian mas especialmente por *su figura:* se representan por medio de las líneas que circundan su superficie.

Las superficies se consideran divididas en *planas* y *curvas.*

Superficie plana, es aquella á la cual se adapta una regla en cualquier posicion.

Superficie curva, es la que no tiene parte alguna apreciable de superficie plana.

De entrambas superficies plana y curva se forma la *superficie mista.*

Y de varias superficies planas en posiciones diferentes é interseccionadas entre sí, se forma *la superficie quebrada.*

Entre las superficies planas no hay variedad de especies, solo puede haber variedad de magnitudes.

Entre las superficies curvas, no solo puede haber variedad de magnitudes sino tambien de especies ó de figuras.

14. *Los cuerpos* pueden ser tambien de infinitas clases, dependientes estas de las leyes que hubiesen regido las variaciones de las superficies generadoras; se distinguen por sus superficies de limitacion, es decir, por su *figura*, desatendiendo su *magnitud* y *posicion.*

15. Representándose el punto por la interseccion de dos rectas y pudiendo hallarse estas en cualquier direccion, resultará que *por un punto pueden pasar un número infinito de líneas rectas.*

Toda línea recta debemos considerarla como esencialmente *ilimitada*, pues siendo siempre una misma la direccion de todos sus puntos no admite límite finito, ni puede nunca llegar á cerrarse.

La representacion de la línea recta la hacemos por medio de un trazo contínuo y lo mas delgado posible, haciendo aplicacion de una regla, ó hilo tirante. *La Magnitud* relativa de una recta se determina por su mayor ó menor longitud; si esta se prolonga ó disminuye, la magnitud de aquella aumenta ó decrece.

El valor numérico de una recta, fácilmente se determina con aplicacion de una magnitud constante que se toma de término de comparacion, la cual siendo con la anterior homogénea por su naturaleza, se superpone en aquella las veces que sea posible, las que numeradas nos determinarán el valor pedido: gráficamente, para este objeto es constante el empleo y uso del *compás* y de las llamadas *Escalas métricas*; haciendo aplicacion de las mismas se resuelven numerosos problemas de frecuente uso en la práctica.

16. *Para sumar, por ejemplo, varias estensiones lineales* sobre una recta indefinida y á partir de un punto de la misma, se coloca la primera recta é inmediatamente á continuacion la segunda, despues la tercera, etc. y la línea que esprese el conjunto de todas ellas, será la estension lineal pedida.

Para hallar una *recta, múltipla, dúpla, tripla, cuádrupla*, etc. de otra dada, basta trazar una recta indefinida, y á partir de un punto de la misma, repetir sobre ella la estension lineal de la recta dada, dos, tres ó cuatro veces etc.

Para hallar la estension lineal equivalente á la diferencia de dos rectas dadas, se pone la menor sobre la mayor y el esceso de esta determinará la longitud pedida.

Para hallar una parte alícuota de una línea recta podremos hacerlo gráficamente con aplicacion del tanteo, con el compás; aunque mas adelante veremos, al tratar de las rectas proporcionales, como la Geometría nos dá medios hábiles para poder resolverlo fácilmente.

17. *Para hallar la razon comun de dos rectas dadas*, tales como AB y MN de la figura 2.ª, colocaré la menor MN sobre la mayor AB las veces que sea posible y tendré que

$$AB = 3MN + AD.$$

Este resto AD lo colocaré sobre la menor MN las veces que sea posible y tendré

$$MN = 2AD + MP.$$

Este nuevo resto MP lo colocaré sobre el anterior AD las veces que sea posible y tendré que

$$AD = 2MP.$$

Ahora bien, sustituyendo este valor en la igualdad anterior, tendremos:

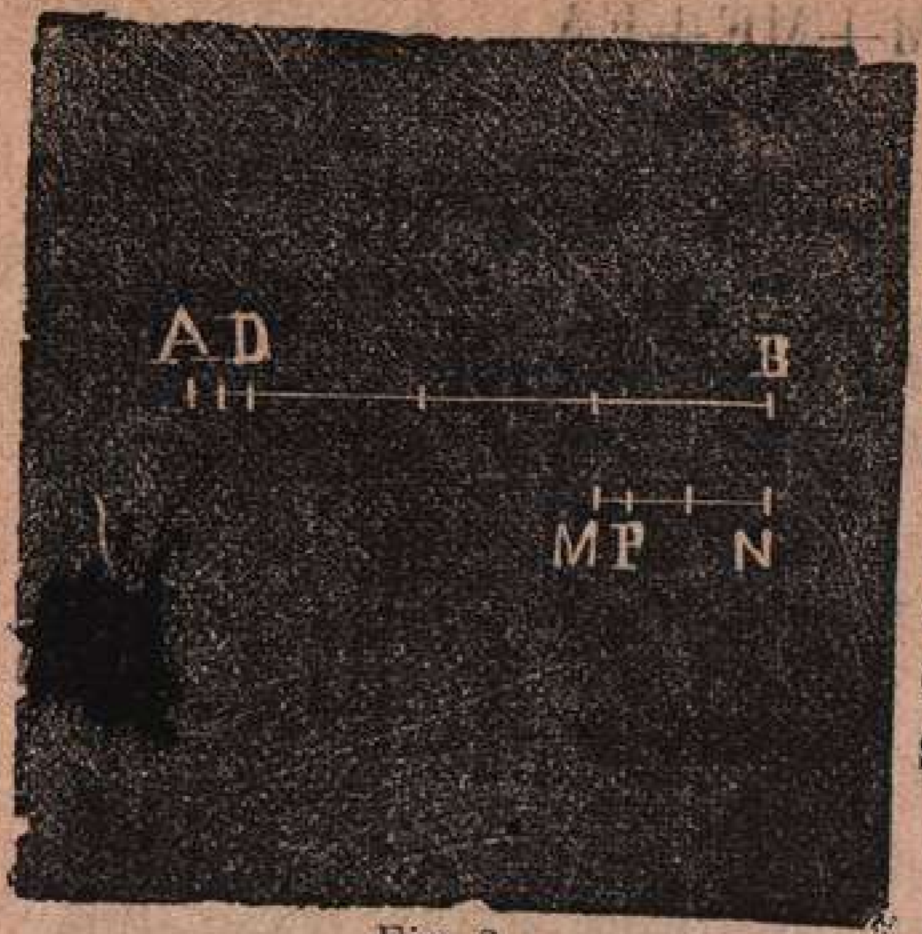


Fig. 2.

$$MN = 2(2MP) + MP = 5MP.$$

Sustituyendo este valor en la igualdad primera, tendremos que:

$$AB = 3(5MP) + 2MP = 17MP.$$

Luego la medida comun de estas rectas es MP y la relacion que entre ellas existe será

$$\frac{AB}{MN} = \frac{17MP}{5MP} = \frac{17}{5}.$$

Se llaman rectas *conmensurables* las que como las anteriores tienen una medida comun, y las que no la tienen son llamadas *inconmensurables*.

Se puede proceder para hallar la razon aproximada entre dos rectas inconmensurables de la misma manera como en el caso anterior, si bien despreciando aquel último resíduo menor, cuando sea suficientemente pequeño, para la aproximacion que se desea obtener.

Este procedimiento geométrico es el mismo que hemos empleado en la Aritmética para hallar el máximo comun divisor entre varias cantidades.

18. En uno de los axiomas hemos dicho que «*la línea recta es la mas corta distancia entre dos puntos.*»

Vamos á demostrar ahora que *de diferentes líneas quebradas que unen dos puntos, es mayor la que mas se separe de la línea recta.*

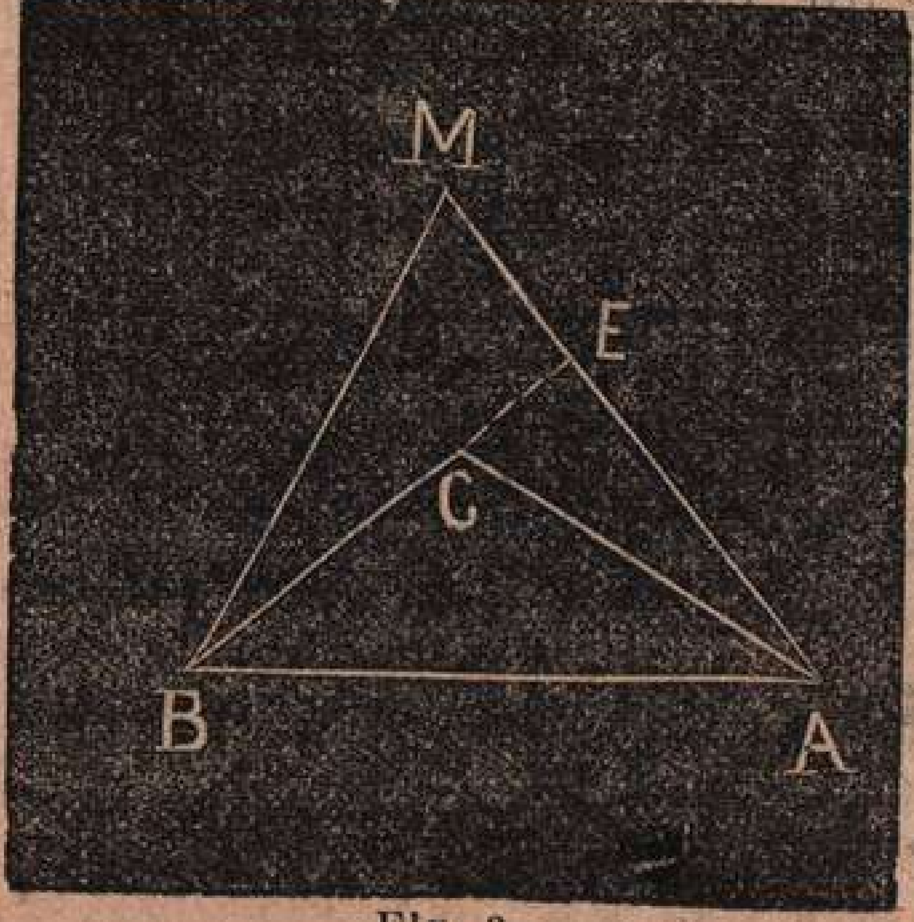


Fig. 3.

Entre los puntos B y A (figura 3.ª) evidentemente la menor distancia será la recta BA; demostremos ahora que

$$BC + CA < BE + EA < BM + MA.$$

En efecto, $CA < AE + EC$ por ser axiomático: añadiendo á ambos miembros BC, tendremos:

$$BC + CA < AE + EC + CB.$$

Luego $BC + CA < BE + EA$

Ahora bien, tambien tenemos que $BE < BM + ME$.

Añadiendo EA á ambos miembros, tendremos que

$$BE+EA<BM+ME+EA$$

luego: $BE+EA<BM+MA$ y por tanto demostrado lo que se queria probar.

19. Probemos ahora que *toda línea proligonal convexa* BCDA (figura 4.ª) *envolvente de otra poligonal* BMNA *es mayor que esta, con tal que ambas tengan los mismos estremos.*

En efecto, en dicha figura observaremos que

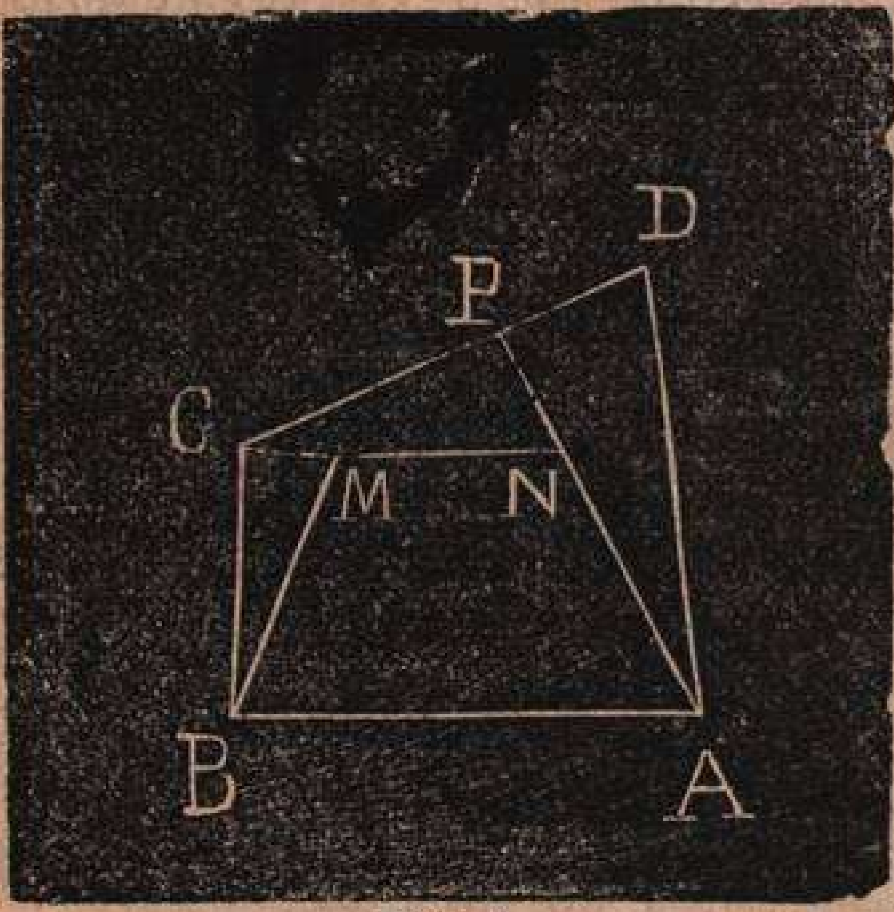


Fig. 4.

$$BM<BC+CM$$
$$CM+MN<CP+PN$$
$$PN+NA<PD+DA$$

Sumando estas desigualdades miembro á miembro, tendremos que:

$$BM+CM+MN+PN+NA$$
$$<BC+CM+CP+PN$$
$$+PD+DA$$

Restando de ambos miembros CM+PN, tendremos reduciendo que:

$$BM+MN+NA<BC+CP+PD+DA$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Como corolario, resultará evidente que *entre varias curvas convexas que unen dos puntos, será mayor la que mas se separe de la línea recta.*

Se llama *línea vertical* la que se dirige incesantemente al centro de la tierra; la direccion que afecta un hilo de cuya estremidad inferior pende un peso cualquiera, es la direccion que tiene la línea vertical.

Se llama *línea horizontal* la que nos marca la direccion del horizonte; la direccion que afecta la superficie superior de cualquier líquido contenido en una basija, es la direccion que tiene la línea horizontal.

Las posiciones relativas de dos rectas sobre un plano son dos: 1.ª que sean Angulares: 2.ª que sean Paralelas.

Rectas angulares.

20. Son *angulares* cuando se encuentran ó tienden á

encontrarse; cuando se encuentren, pueden ser perpendiculares ú oblícuas; cuando tienden á encontrarse se llaman *convergentes*; cuando se separan mas, cada vez, se llaman *divergentes*.

La interseccion de dos rectas es un *punto*.

La inclinacion de dos rectas forma un *ángulo*.

Las partes de un ángulo son: *vértice* ó punto comun de las dos rectas; y estas rectas que son *los dos lados* del ángulo.

Llamamos *ángulo rectilíneo* á la mayor ó menor inclinacion de dos rectas que tienen un punto comun. Un ángulo se designa siempre ó por tres letras, colocadas una en el vértice y otra en cada uno de los lados, *teniendo cuidado de leer la letra colocada en el vértice en el medio de las dos anteriores*, ó por una sola letra colocada en el vértice.

Llámase *ángulo curvilíneo* el formado por líneas curvas.

La *magnitud de un ángulo* se determina siempre por la mayor ó menor inclinacion de sus lados, nunca por la longitud de estos, la cual en nada hace variar á aquella. Los lados de todo ángulo podemos considerarlos prolongados indefinidamente.

Dos rectas son perpendiculares, cuando la una cae sobre la otra sin inclinarse mas á un lado que al otro; el ángulo que forman dos rectas perpendiculares se llama *recto*.

Dos rectas son oblícuas cuando la una cae sobre la otra, inclinándose mas á un lado que á otro: el ángulo que forman dos rectas oblícuas se llama *agudo ú obtuso*.

Un ángulo es agudo cuando tiene entre sus dos lados una inclinacion ó un espacio menor que el que corresponde á un ángulo recto.

Un ángulo es obtuso cuando tiene entre sus dos lados una inclinacion ó un espacio mayor que el que corresponde á un ángulo recto.

21. Decimos que *dos ángulos son iguales* cuando colocado el uno sobre el otro, de manera que coincidan sus dos vértices y uno de sus dos lados, los otros dos lados tambien coinciden.

Llamamos *Bisectriz* de un ángulo, á la línea que lo bifurca ó divide en dos partes iguales.

22. La Bisectriz del ángulo AOB será la línea OG.

Para trazar la Bisectriz *de un ángulo cualquiera*, por ejemplo, del ángulo AOB (figura 5.ª) se hace centro en el vértice O y con cualquier abertura de compás, describiremos un arco que corte á los dos lados; desde las dos intersecciones de el arco con cada lado, se hace centro con una abertura de compás, mayor que la mitad del arco comprendido, y se trazan otros dos arcos que se cortarán en un punto, el cual con el vértice nos determinará la Bisectriz pedida.

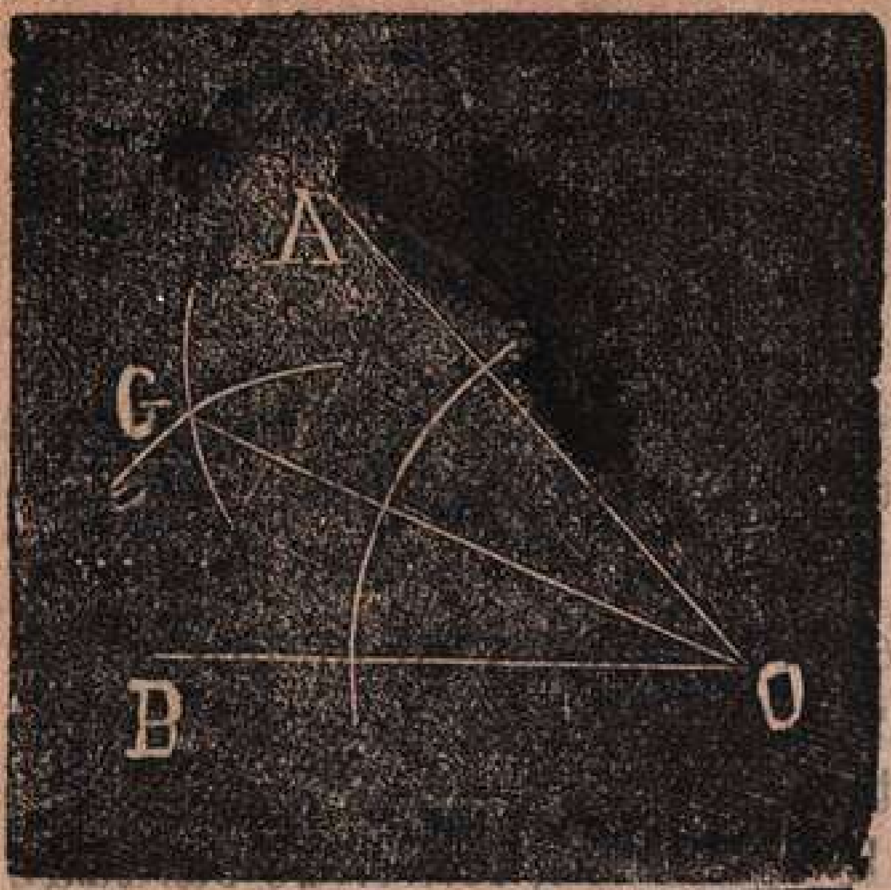


Fig. 5.

23. Se llaman *ángulos consecutivos* aquellos que van uno en pós del otro.

Se llaman *ángulos complementarios* todos aquellos que reunidos valen tanto como un ángulo recto: y entendemos por *complemento de un ángulo dado*, lo que le falte ó sobre á este para valer un recto; el complemento de un ángulo puede ser positivo ó negativo, segun sea el ángulo dado agudo ú obtuso.

Se llaman *ángulos suplementarios* todos aquellos que reunidos valen dos ángulos rectos: entendemos por *suplemento* de un ángulo dado, lo que le falte para valer dos ángulos rectos. El suplemento de un recto será otro recto; el de un agudo un obtuso; y el de un obtuso un agudo.

Los ángulos rectos no admiten variedad de especies, ó de otro modo, *todos los ángulos rectos son iguales.*

En efecto, dos ángulos iguales superpuestos coinciden: si los dos ángulos rectos que comparásemos no coincidieran, habria dos maneras diferentes de ser perpendiculares dos líneas, lo cual es un absurdo, siendo cierta por tanto la proposicion primera.

Se llaman *ángulos adyacentes* aquellos que tienen un lado comun, siendo los otros dos lados prolongacion uno de otro. Los ángulos BON y NOA de la figura 6.ª son dos ángulos adyacentes.

24. Teorema. *Dos ángulos adyacentes son suplementarios*; y recíprocamente, *si dos ángulos* tienen un lado comun *y valen juntos dos rectos*, son adyacentes.

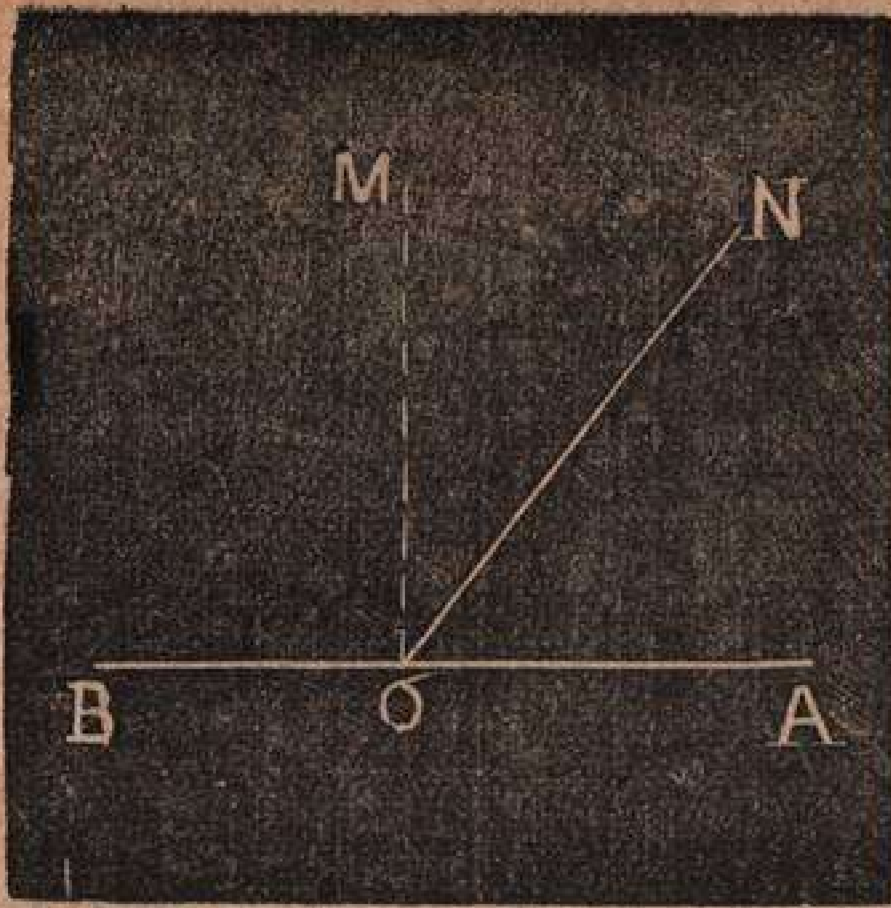


Fig. 6.

Para demostrar que el ángulo $BON+NOA=2R$ levanto en el vértice O una perpendicular OM y tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l} BON=BOM+MON \\ NOA=MOA-MON \end{array}\right\}\text{Sumando miembro á miembro, tendremos:}$$

$$BON+NOA=BOM+MOA=2\ \text{Rectos}$$

Como *corolarios* de este teorema, tendremos:

1.° *Todos los ángulos* $BOM+MON+NOA$ *formados en un punto* O *de una recta* BA, *y hácia un lado de esta, valen juntos dos rectos ó son suplementarios.*

2.° *Un ángulo cualquiera tal como* BON *no puede llegar á valer dos ángulos rectos, porque prolongando uno de sus lados, tal como el* BO, *se tiene que:*

$BON+NOA=2$ rectos, luego $BON=2$ rectos, menos NOA.

3.° *Las Bisectrices de dos ángulos adyacentes serán perpendiculares, ó formarán un ángulo recto.*

En efécto, el ángulo NOM formado por las bisectrices NO y OM de los dos ángulos adyacentes BOC y COA de la figura 7.ª, será recto puesto que siendo

$$BOC+COA=2\ \text{rectos}$$

la suma de sus mitades respectivas NOC y COM será igual á un ángulo recto.

Fig. 7.

4.° *Si un ángulo es recto, su adyacente lo será tambien. Si un ángulo es agudo, su adyacente será obtuso y viceversa.*

5.° *Todos los ángulos formados alrededor de un punto valen juntos cuatro ángulos rectos*, puesto que si los formados en un punto alrededor de una recta hácia uno de sus dos lados valen dos rectos, valdrán tambien otros dos los formados hácia el otro lado.

6.ª *Al rededor de un punto cualquiera, no se podrán formar ángulos cuya suma valga mas de cuatro ángulos rectos.*

7.º *Los ángulos formados por dos rectas que se cortan valdrán tambien juntos cuatro ángulos rectos.*

8.ª *Si dos ángulos adyacentes no tienen sus lados esteriores en línea recta, esos dos ángulos no son suplementarios.*

25. *Se llaman ángulos opuestos por el vértice* aquellos tales, que los lados del uno son prolongaciones de los lados del otro.

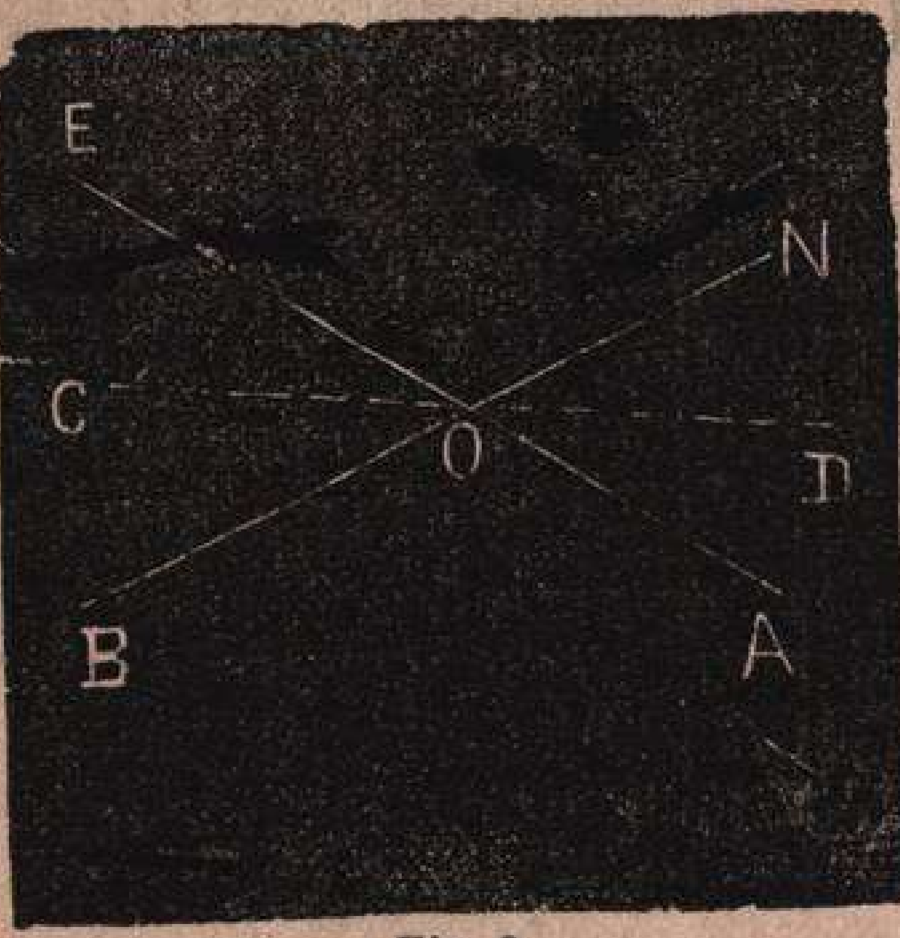


Fig. 8.

Teorema: *Los ángulos* EOB y NOA (fig. 8.ª) *opuestos por el vértice son iguales.*

En efecto.

EOB+EON=2 Rectos,

segun hemos demostrado;

NOA+EON=2 Rectos,

dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, luego,

EOB+EON=NOA+EON:

restando de ambos miembros EON, quedará que

EOB=NOA

que es lo que queriamos demostrar.

Corolario 1.º *Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son prolongaciones opuestas.*

En efecto, EOC+NOD=EOB y EOB+EON=2 Rectos, luego EOC+EON+NOD=2 Rectos y como sabemos que todos los ángulos que al rededor de un punto valen dos rectos, están á un lado de una línea, estará demostrado.

Corolario 2.º *Cuando uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas indefinidas que se cortan es recto, los otros tres son tambien rectos.*

Corolario 3.ª *Cuando una recta es perpendicular á otra, su prolongacion es tambien perpendicular á la misma recta: luego si una recta es perpendicular á otra, esta última es á su vez perpendicular á aquella.*

Corolario 4.º *Las bisectrices de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan, son dos rectas perpendiculares ó que forman entre sí ángulos rectos en el mismo vértice que aquellas.*

26. *Para sumar dos ángulos dados*, con una abertura cualquiera del compás, pero igual para todos desde sus vértices, se traza en cada uno el arco comprendido entre sus lados; en uno de los estremos de una recta se traza un arco ilimitado, con el mismo rádio, y desde el punto de intersección de este arco con la recta, se toma un arco igual á uno de los dos ángulos; desde dicho punto el otro, y este estremo se une con el estremo de dicha recta por medio de otra, y ámbas formarán un ángulo cuya inclinacion será equivalente á la suma de los dos ángulos dados.

Para restar dos ángulos ó para hallar la diferencia de dos ángulos, se traza en estos con una misma abertura de compás el arco comprendido entre sus lados; desde una de las dos intersecciones del arco del ángulo mayor, se toma el del ángulo menor y se une dicho punto con el vértice, siendo el ángulo formado por esta recta y el segundo lado del ángulo mayor, un ángulo precisamente igual á la diferencia de los dos lados.

Para formar un arco múltiplo de otro dado se traza en este un arco ilimitado con cualquier abertura de compás; la cantidad de arco comprendido entre sus lados se repite sobre el arco indefinido dos, tres, cuatro etc., las veces que se quiera, y uniendo el estremo con el vértice, se formará un ángulo *duplo, triplo, cuádruplo* etc., segun hubiese sido pedido.

Para hallar una parte alícuota de un ángulo como su mitad, tercera, cuarta parte etc., puede hacerse por tanteo con el compás: si se ha de dividir en 2, 4, 8, 16 etc. en un número de partes en fin, que sea una potencia de 2, se hará esta division trazando bisectrices, conforme se indicó en la figura 5.ª Se puede hallar la razon comun de dos ángulos, como se halló la de dos líneas, figura 2.ª

Teoría de perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares cuando al caer la una, sin prolongarse sobre el estremo de la otra, forman ambas *un ángulo recto*: cuando cae la una perpendicularmente sobre el estremo de la otra, formarán dos *ángulos rectos*; y cuando sean ambas perpendiculares é indefinidas formarán ***cuatro ángulos rectos***.

27. Teorema: *Por un punto dado, no se puede trazar mas que una sola perpendicular á una recta, tambien dada.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.° *Que el punto dado este fuera de la recta.* 2.° *Que este se halle en la recta.*

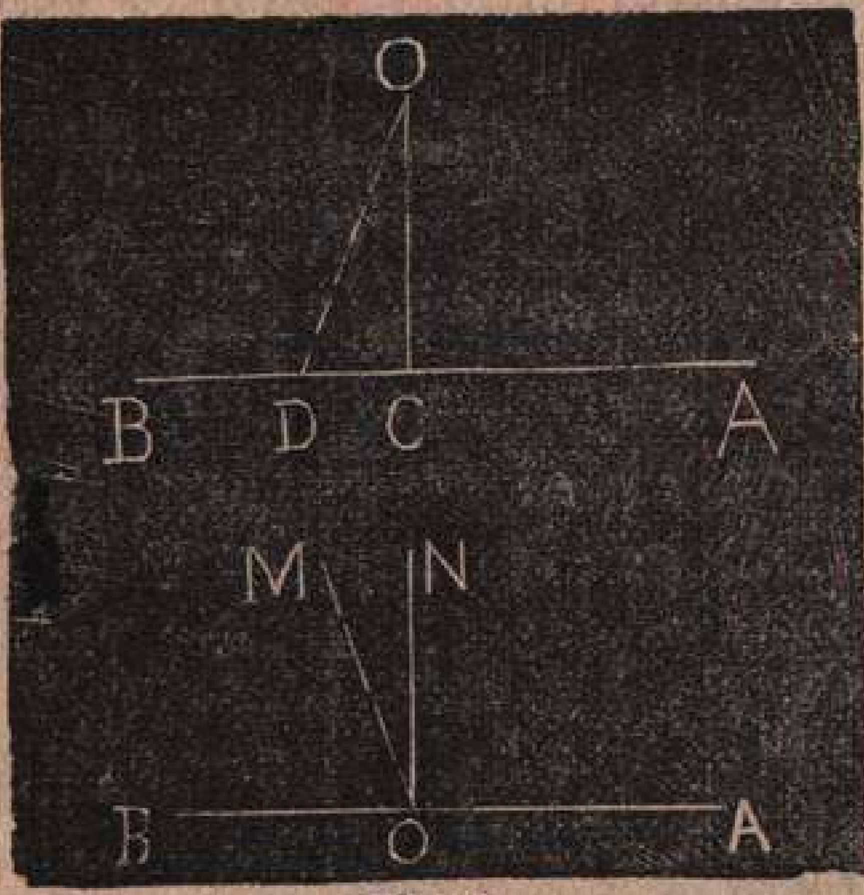


Fig. 9.

Sea el punto O dado fuera de la recta BA (1.ª figura 9.ª) digo que no se puede bajar desde dicho punto mas recta penpendicular que la recta OC: en efecto, esta recta forma con la BA dos ángulos adyacentes OCB y OCA iguales, como se puede comprobar doblando la figura por la OC, luego son rectos: otra cualquiera, por ejemplo, la OD formará con la BA dos ángulos adyacentes ODB y ODA evidentemente desiguales, el primero obtuso y el segundo agudo, luego dichas dos rectas son oblícuas.

2.° Sea ahora el punto dado el O en la recta BA (2.ª figura 9.ª) digo que desde dicho punto solo se puede levantar la perpendicular ON porque esta sola forma con la BA dos ángulos adyacentes iguales y rectos, como se comprueba doblando la figura por la misma, y otra recta cualquiera: por ejemplo la OM, forma evidentemente dos ángulos adyacentes BOM y MOA desiguales, uno agudo y otro obtuso, y por tanto y como en el caso anterior, otra cualquiera; si no coincide con la única que se puede trazar perpendicularmente desde cualquiera de los puntos dados, es evidentemente oblícua.

28. Teorema: *Si desde un punto fuera de una recta se trazan á esta una perpendicular y diferentes oblícuas se verifica que:*

1.° *La perpendicular es menor que todas las oblícuas.*

2.° *Las oblícuas cuyas intersecciones con la recta equidisten del pié de la penpendicular, son iguales.*

3.° *La oblicua cuya interseccion con la recta diste mas del pié de la perpendicular, es la mayor.*

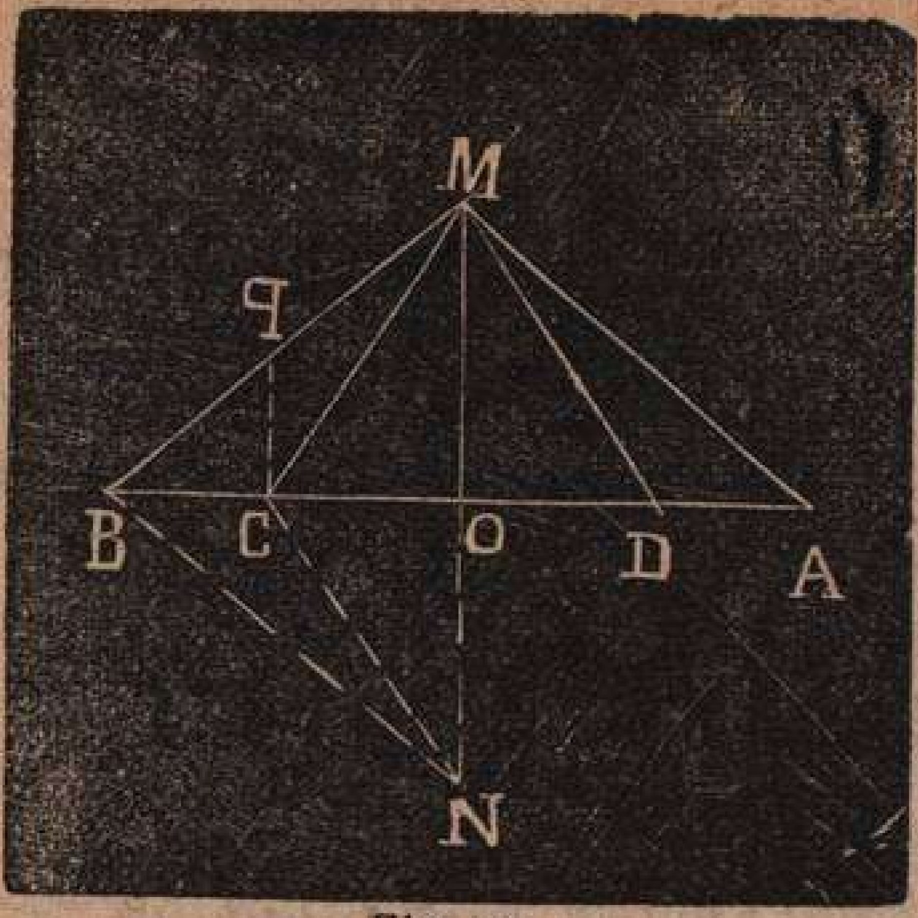


Fig. 10.

Para demostrar el primer aserto (figura 10) deberemos probar que la recta MO perpendicular bajada desde el punto M, á la recta AB, es menor que cualquier oblícua, por ejemplo MC; en efecto, prolongando la recta MO al otro lado de la recta AB una cantidad NO igual á la MO y uniendo el punto N con C por la recta NC, tendremos que la menor distancia entre los puntos M y N será la recta MN, luego por tanto (18) la línea quebrada MCN>MN y así tendremos que la mitad de MCN, que es *la oblícua, será mayor* que la mitad de MN que es *la perpendicular.*

2.° Siendo iguales las distancias OD y OC, OA y OB, vamos á demostrar que las oblícuas MD y MC, MA y MB son iguales.

En efecto, doblando la figura por MO tendremos que por ser rectos los ángulos MOA y MOB coincidirán las rectas OA y OB, pero siendo OA=OB. el punto A coincidirá sobre el punto B, y por la misma razon coincidirán el punto D y el C, y como el punto M no se mueve de su posicion inicial y dos puntos determinan la posicion de una recta, resultará que MD=MC y MA=MB. *Luego oblícuas equidistantes del pié de la perpendicular son iguales.*

3.° Siendo OC<OB vamos á demostrar que MC<MB. En efecto. levantando en el punto C una perpendicular QC tendremos que MC<MQ+QC pero QC<QB segun la 1.ª parte de este Teorema; luego MQ+QC<MQ+QB y con mayor motivo MC<MB. Tambien pudiera demostrarse este estremo, uniendo los puntos B y C con N, y tendremos, segun Teorema (18) que MCN<MBN y por tanto la mitad de MCN que es MC, será menor que la mitad de MBN que es MB, que es lo que se trataba de demostrar. *Luego la oblícua que mas se separa del pié de la perpendicular es la mayor.*

29. Recíprocamente: Si á una recta desde un punto dado fuera de esta hay trazadas una perpendicular y diferentes oblícuas, se verificará que:

1.° *La menor de todas ellas será la perpendicular,* 2.° *Las oblicuas iguales tendrán sus piés equidistantes del de la perpendicular.*

3.° *La mayor oblícua tiene su pié mas distante del de la perpendicular.*

De la 1.ª deduciremos que la distancia de un punto á una recta es la perpendicular.

De la 2.ª deduciremos que entre una recta indefinida y un punto fuera de ella, no se pueden tirar mas que dos rectas iguales de una longitud dada.

De la 3.ª deduciremos, que desde un punto fuera de una recta, se puede trazar á esta, otra recta de cualquier longitud con tal que sea mayor que la distancia desde dicho punto á la recta.

30. Teorema 1.° *Todo punto de la perpendicular levantada en el punto medio de una recta equidista de los estremos.*

2.° *Todo punto que no sea de la perpendicular levantada en el punto medio de una reeta, no equidista de los estremos.*

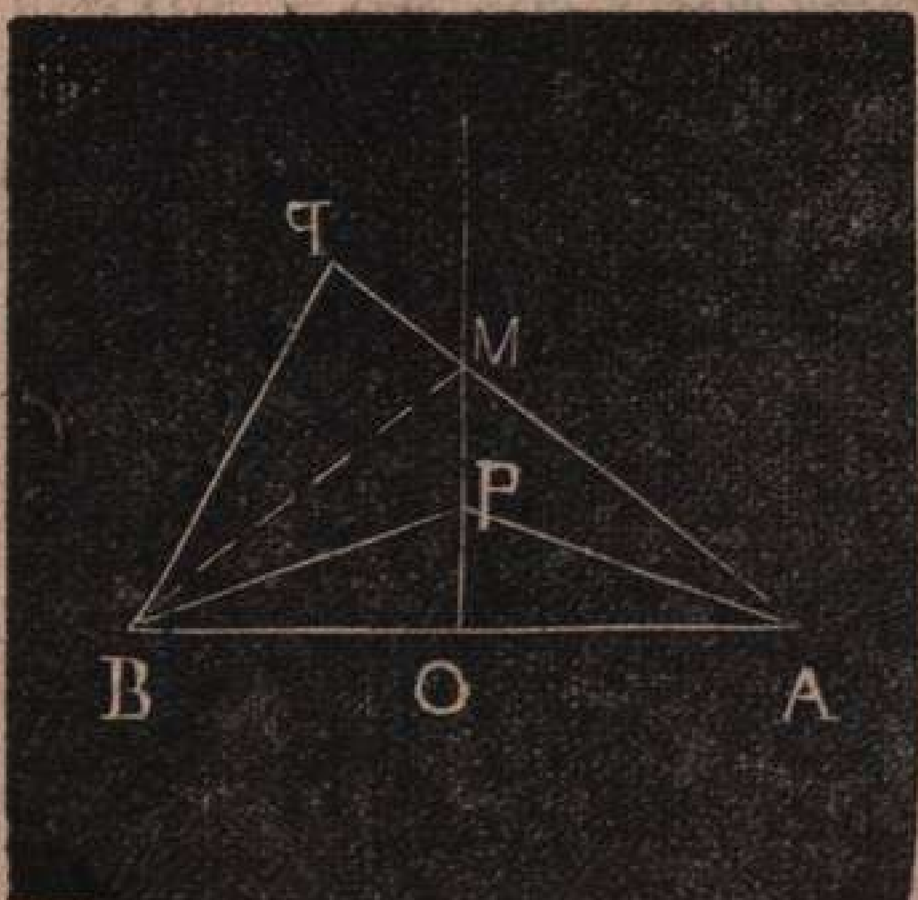


Fig. 11.

Vamos á demostrar que todo punto M de la perpendicular MO levantada en el punto medio O de la recta AB, equidista de los estremos A y B de la recta AB. En efecto, doblando la figura por MO, siendo $OA=OB$ el punto A caerá sobre el B; el punto M no se moverá de su posicion inicial y como dos puntos determinan la posicion de una recta, evidentemente la recta MA será igual á MB.

Recíprocamente: demostremos ahora que el punto Q que no es de la perpendicular levantada en el punto medio de la recta AB, no equidista de los estremos. En efecto, uniendo el punto Q con el B y luego con el A, cortará la recta QA á la perpendicular en un punto tal como el M, y tendremos que $QA=QM+MA$ ó lo que es lo mismo $QA=QM+MB$ pero ya sabemos que $QB<QM+MB$, luego $QB<QA$ que es lo que se queria demostrar.

Recíprocamente. *Todo punto equidistante de los estremos de una recta, es punto necesariamente de la perpendi-*

cular levantada en el punto medio de la recta. Todo punto que no equidiste de los estremos de una recta, no es punto de la perpendicular levantada en su punto medio.

Llámase Lugar geométrico *de varios puntos la línea ó figura que tiene una propiedad esclusiva á dichos puntos.* Así el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos fijos, es la perpendicular levantada en el punto medio de la recta que los une. La circunferencia será el *lugar geométrico* de todos los puntos que en el mismo plano equidistan del centro.

31. Teorema: *Todo punto de la Bisectriz de un ángulo, equidista de los lados que forman dicho ángulo: y todo punto que no sea de la bisectriz de un ángulo, no equidista de los lados que forman dicho ángulo.*

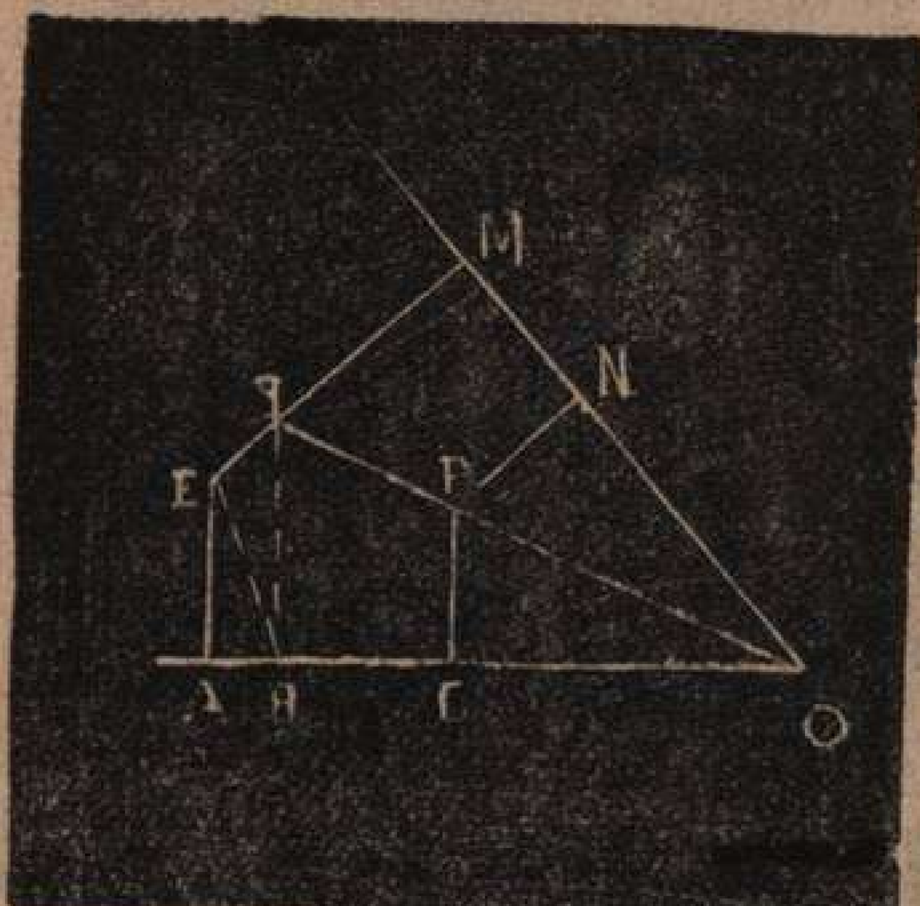


Fig. 12.

Vamos á demostrar que todo punto Q (figura 12) de la bisectriz QO del ángulo AOM, equidista de los lados AO y MO que forman dicho ángulo. En efecto, doblando la figura por la bisectriz QO, de ser iguales los ángulos AOQ y MOQ, evidentemente la recta MO coincidirá con la AO, y como el punto Q no se mueve de su posicion inicial y la menor distancia desde un punto á una recta es la perpendicular, resultará que QM coincidirá con QB por ser ambas perpendiculares á la MO y AO que en la superposicion han coincidido: luego QM=QB.

Demostremos ahora que todo punto E que no sea de la bisectriz no equidista de los lados del ángulo. En efecto, la menor distancia desde el punto E á la recta AO es la perpendicular EA, y desde dicho punto E á la recta MO, será la perpendicular EM, la cual cortará á la bisectriz en el punto Q y tendremos que EM=EQ+QM, pero QM=QB segun lo ya demostrado;

luego EM=EQ+QB pero EQ+QB>EB

(segun el axioma) y siendo por otra parte EB>EA (1.ª tésis del Teorema 28) resultará como evidente que EA<EM con mayor motivo, que es lo que nos proponiamos demostrar.

Corolarios: 1.° *Si una recta tiene dos puntos* Q *y* P *cada uno de los cuales es equidistante de los dos lados de un ángulo, dicha recta será la bisectriz del espresado ángulo, toda vez que dos puntos determinan la posicion de una recta.*

2.° *La Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos interiores á dicho ángulo y equidistantes de sus lados, puesto que solo una recta entre las del mismo plano tiene dicha propiedad.*

3.ª *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas indefinidas que se corten, se compone de las dos bisectrices, perpendiculares entre sí, de los cuatro ángulos que forman dichas rectas.*

Teoria de las Paralelas.

32. Se llaman *líneas paralelas* las rectas que estando en un mismo plano no se encuentran por mas que se prolongan.

33. Teorema. Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí. En efecto, si así no fuese se encontrarian en un punto, y desde dicho punto se podrian trazar dos rectas perpendiculares á otra dada, lo cual es absurdo, segun hemos visto en el (Teorema 27).

34. Dos rectas, una EC (figura 13) perpendicular y otra ND oblícua á una tercera AB, no son paralelas y se encuentran hácia donde la oblícua ND forma con la AB el ángulo agudo NDB: este es el llamado **Postulado de Euclides**, el cual como todo postulado, aunque no sea tan evidente como un axioma, carece de demostracion; sin embargo, no han faltado Matemáticos que hubiesen querido demostrarlo, como no ha faltado, tampoco, quien pretendiera demostrar aun hasta los axiomas; entre los que se ocupan de la primera demostracion tenemos á Vincent; entre los segundos tenemos á Tompson en su *Geometria sin axiomas.*

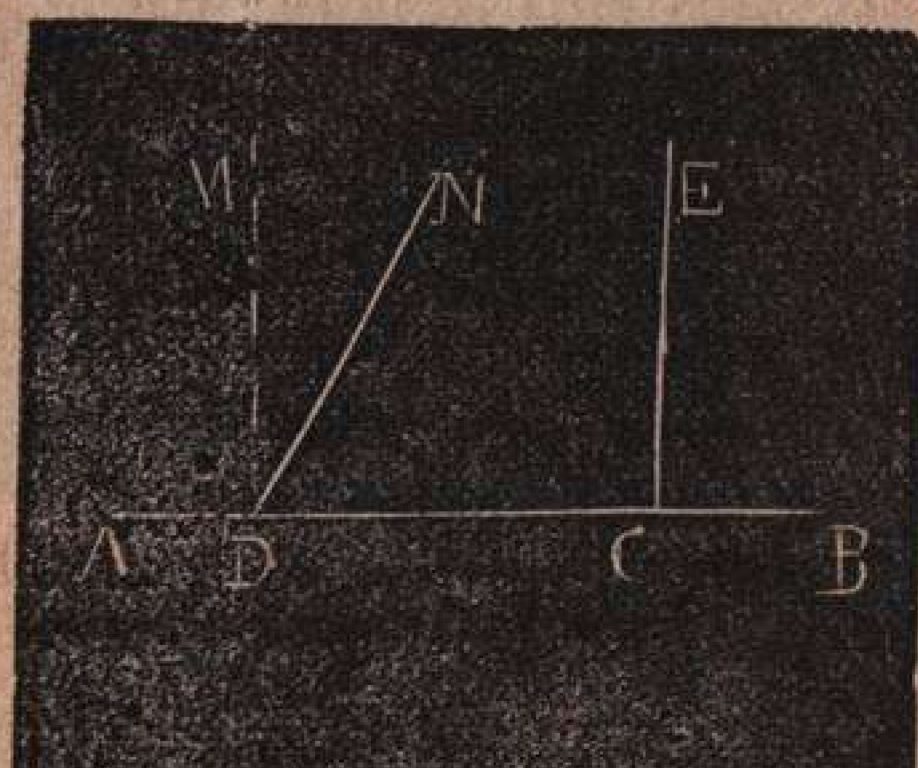


Fig. 13.

35. Teorema. *Por un punto dado fuera de una recta no se le puede tirar mas que una sola paralela.*

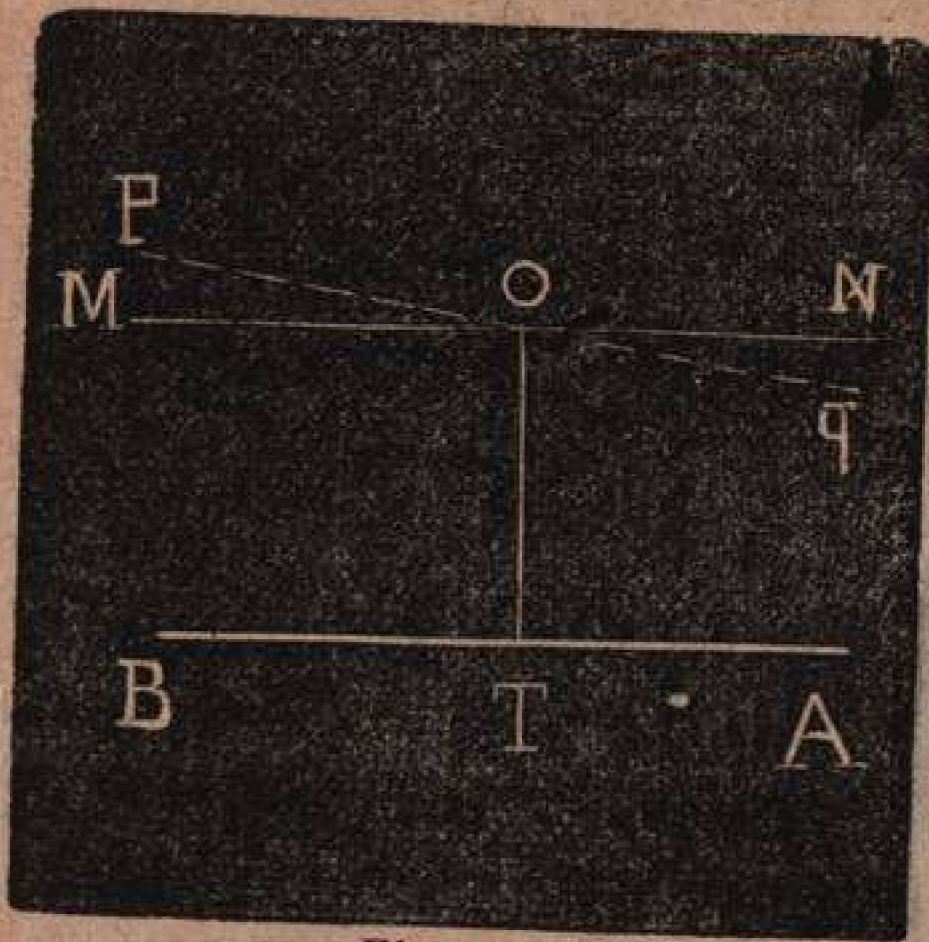


Fig. 14.

Demostremos que por el punto O (fig. 14) no se puede tirar mas que la recta MN que sea paralela, á la recta BA. En efecto, bajando desde el punto O una perpendicular OT á la recta BA, tendremos que la recta MON es la única perpendicular que se puede trazar en el punto O á la recta OT, y por tanto, otra cualquiera, por ejemplo POQ será oblícua á la OT y convergente con la BA; luego si esta recta MON es la única perpendicular en O á la recta OT, y dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas, la recta MON es la única paralela que por el punto O se puede trazar á la recta BA.

36. *Si dos rectas* a *y* b *son paralelas* (primer grabado de la fig. 15) *toda recta* c *que corte á una de ellas, cortará á la otra.* En efecto, si la recta *c* corta á la recta *b*, digo que cortará á la *a*, porque si así no fuera, por el punto de interseccion de las rectas *c* y *b* se podrian trazar dos rectas paralelas á la línea *a*, lo cual es contra la proposicion anteriormente demostrada.

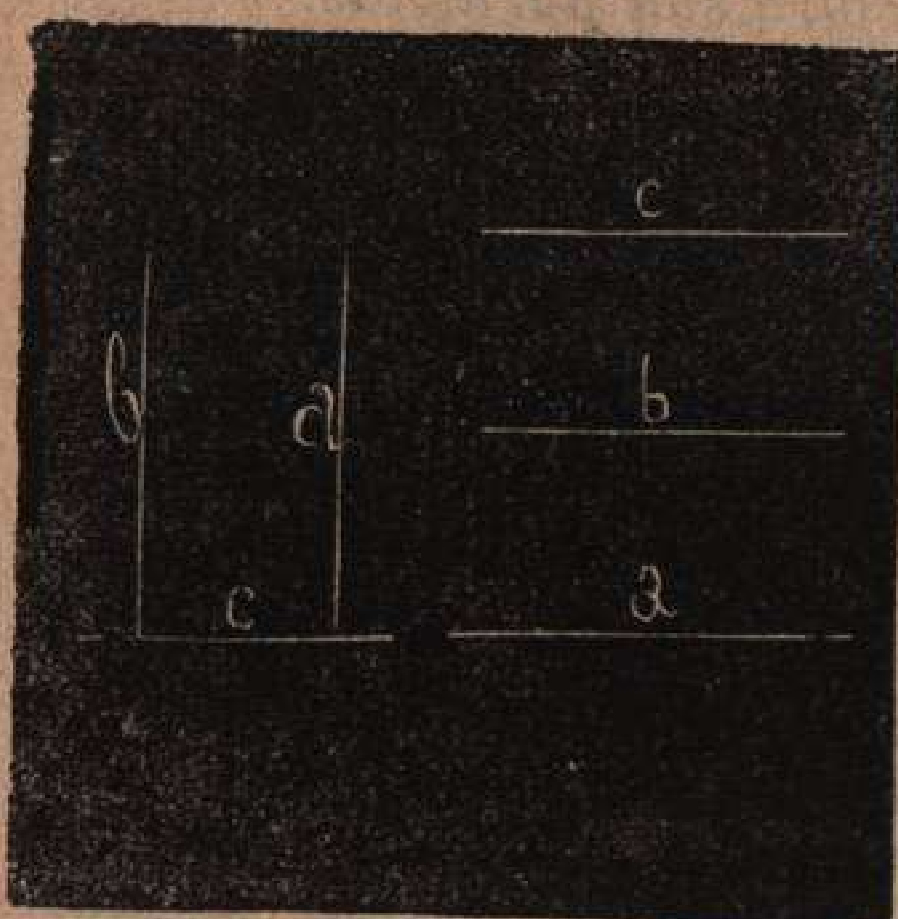


Fig. 15.

Dos rectas c *y* b (segundo grabado de la fig. 15) *paralelas á una 3.ª son paralelas entre sí.* En efecto, porque si no lo fueran, la recta *a* se encontraria con alguna de las otras dos, y desde el punto de interseccion se podrian trazar dos rectas paralelas á la otra línea recta, lo cual es absurdo.

37. De lo anteriormente espuesto se infieren los corolarios siguientes:

1.° *Si una recta corta perpendicularmente á una de dos paralelas, suficientemente prolongada cortará á la otra tambien perpendicularmente.*

2.° *Si dos rectas son respectivamente perpendiculares á dos paralelas, serán tambien paralelas entre sí.*

3.° *Si dos rectas no son paralelas, sus perpendiculares respectivas tampoco lo serán.*

38. Teorema: *Dos rectas paralelas* EF *y* GH *están siempre una de otra á igual distancia.* En efecto, si desde los puntos E y F bajamos dos perpendiculares á la recta GH, estas serán la EG y la FH, las que segun el 1.° de los corolarios anteriores, serán tambien perpendiculares á la recta EF, siendo además las rectas mas cortas que se pueden tirar á la GH desde los puntos E y F; bastará por tanto probar que EG=FH.

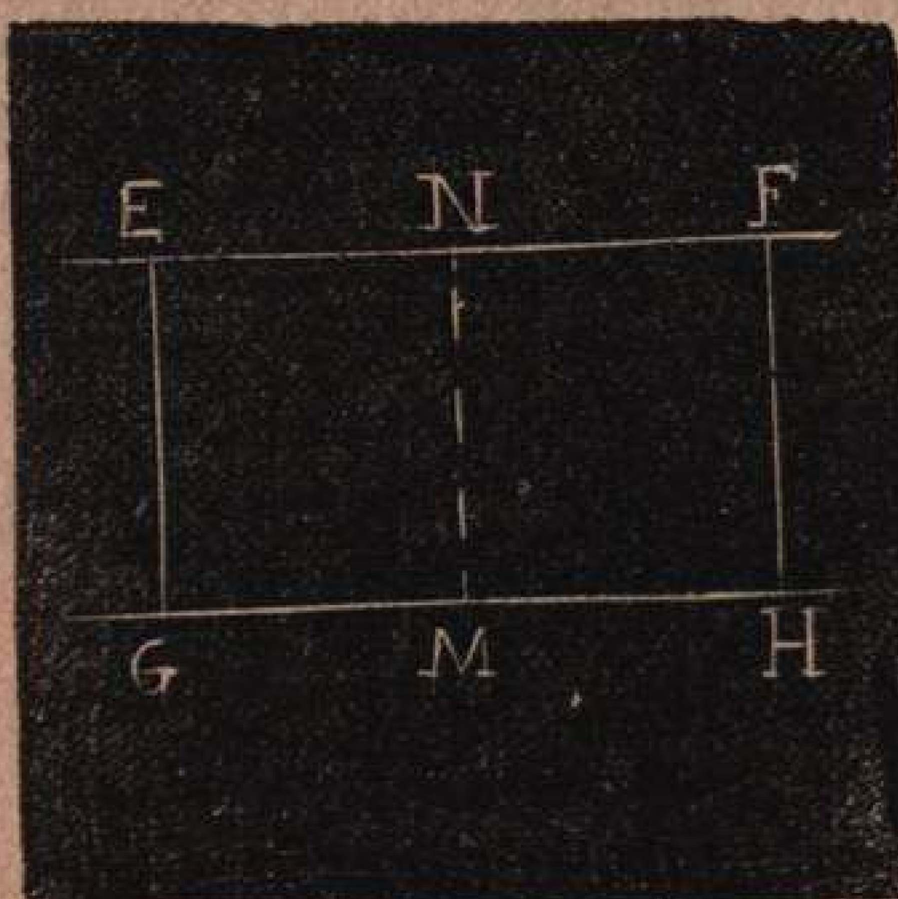


Fig. 16.

Tomando el punto medio N entre el E y el F y bajando desde el mismo una perpendicular á la recta GH, llegará á M. punto intermedio entre G y H; si doblamos la figura por dicha recta NM, observaremos como es precisa la coincidencia entre las rectas EG y FH, siendo evidente por tanto su igualdad.

Recíprocamente diremos: *Dos rectas que están siempre á una misma distancia una de otra son paralelas.*

Esta demostracion nos sirve tambien para demostrar *que dos rectas* EG *y* FH *paralelas, comprendidas entre las paralelas* EF *y* GH *son iguales entre sí, en el caso de ser estas perpendiculares dos á dos.*

39. Si dos rectas paralelas se cortan por otra tercera recta llamada secante ó transversal, dicha recta formará con las otras dos *ocho* ángulos, que considerados dos á dos toman las siguientes denominaciones.

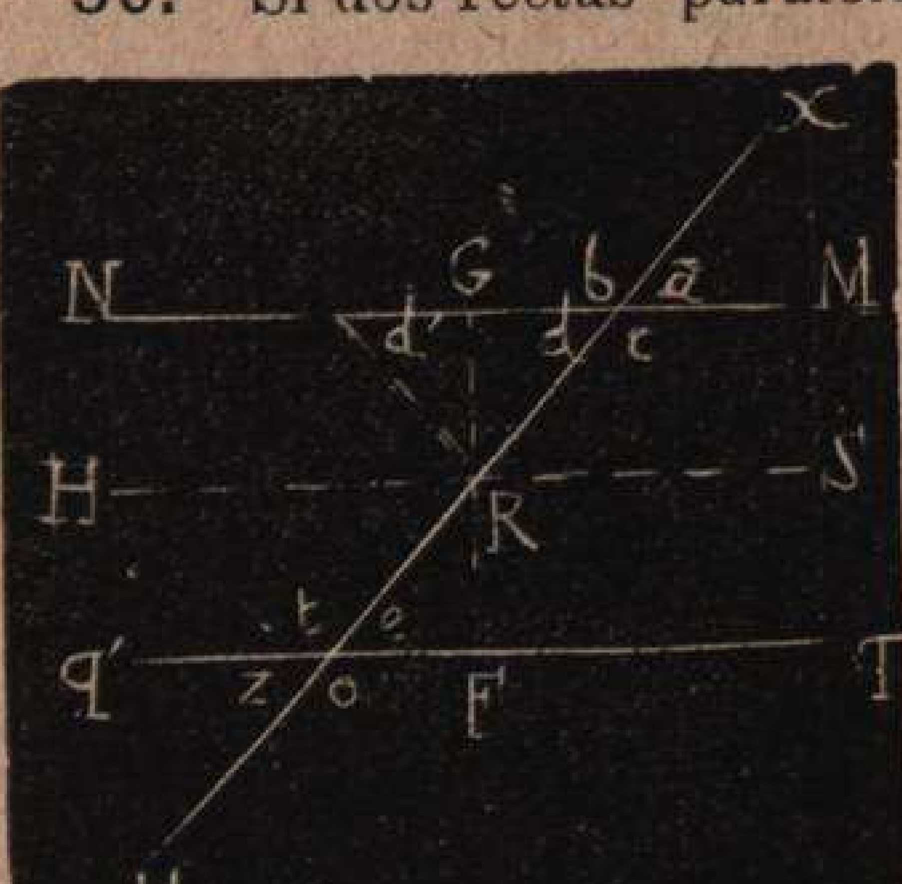


Fig. 17.

Sean (fig. 17) NM y Q'Q las dos rectas paralelas y sea xu la secante ó transversal, llamemos por una sola letra cada uno de los ocho ángulos a, b, c, d, e, t, o, z, que como hemos dicho forman, y tendremos que los ángulos *b*, *a*, *z* y *o* serán *Esternos:* que los ángulos *d*, *c*, *t* y *e* serán *Internos*: los ángulos *c* y *e* serán *internos de un mismo lado* de la secante, así mismo como lo serán el *d* y *t*: los ángulos *b* y *z* serán como los *a* y *o*, *externos de un mismo lado*. Los ángulos *d* y *e* serán *alternos internos* lo mismo que *c* y *t*: los ángulos *a* y *z*, lo mismo que los *b* y *o* se llamarán *alternos esternos*. Los ángulos *b* y *c*, *d* y *a*, *t* y *o*, *z* y *e* se llamarán *opuestos por el vértice*; y por último, los ángulos *a* y *e*, *c* y *o*, *b* y *t*, *d* y *z* se llamarán *correspondientes*; esto sabido, pasemos á demostrar el Teorema fundamental de la teoria de Paralelas que dice:

40. *Dos rectas son paralelas cuando cortadas por una secante forman iguales los ángulos* alternos internos, *los* alternos esternos *y los* correspondientes.

1.° Vamos á demostrar que si á las dos rectas paralelas NM y Q'Q (fig. 17) se les traza la secante *xu*, los ángulos *alternos internos d* y *e* son iguales.

En efecto, trazando por el punto medio R, del segmento de la *secante* comprendido entre las dos paralelas la perpendicular á entrambas GF, y doblando la figura por dicha recta GF, tendremos que el ángulo *d* coincidirá con el ángulo *d'*, siendo iguales por superposicion: si desdoblando la figura por espresada recta GF la doblamos ahora por la paralela media HS, evidentemente coincidirán el ángulo *d'* con el *e*, y como dos cosas *d* y *e* iguales á una tercera *d'* son iguales entre sí, resultará que d=e. *Luego los ángulos alternos internos son iguales*. Por tanto, los ángulos *c* y *t* serán iguales por la misma razon, por suplementarios de los anteriores.

Para demostrar ahora que son iguales tambien los ángulos *correspondientes a* y *e*, observaremos que habiéndolo sido los *d* y *e* y siéndolo tambien los *d* y *a* por opuestos al vértice (25) evidentemente por el axioma antes enunciado, serán iguales los ángulos *a* y *e*. De la misma manera probaremos la igualdad de los ángulos *c* y *o*, *b* y *t*, *d* y *z*.

Por último, para demostrar la igualdad de los ángulos *alternos esternos a* y *z*, observaremos que habiendo sido iguales los ángulos *a* y *e* por *correspondientes* y siéndolo tambien por *opuestos al vértice* los ángulos *e* y *z*, lo serán tambien los *a* y *z* que es lo que se queria demostrar. Por la misma razon serán tambien iguales los ángulos *b* y *o*.

Los ángulos internos ó esternos de un mismo lado de la secante son suplementarios. En efecto, siendo evidentemenle *adyacentes* los ángulos c y d resultará que $c+d=2R$, pero $d=e$ por *alternos internos*, luego $c+e=2R$.

Los ángulos a y b son adyacentes, luego $a+b=2R$, pero $b=o$ por *alternos esternos*, segun lo demostrado, luego $a+o=2R$, que es lo que queriamos demostrar.

De lo espuesto anteriormente se desprende que *dos rectas serán paralelas* en los cuatro casos siguientes:

1.° *Cuando son iguales los ángulos alternos internos.*

2.° *Cuando son iguales los ángulos correspondientes.*

3.° *Cuando son iguales los ángulos alternos esternos.*

4.° *Cuando son suplementarios, los internos ó esternos de un mismo lado de la secante.*

41. Teorema: *Dos rectas concurrentes, sean convergentes ó divergentes, forman desiguales los ángulos alternos internos.*

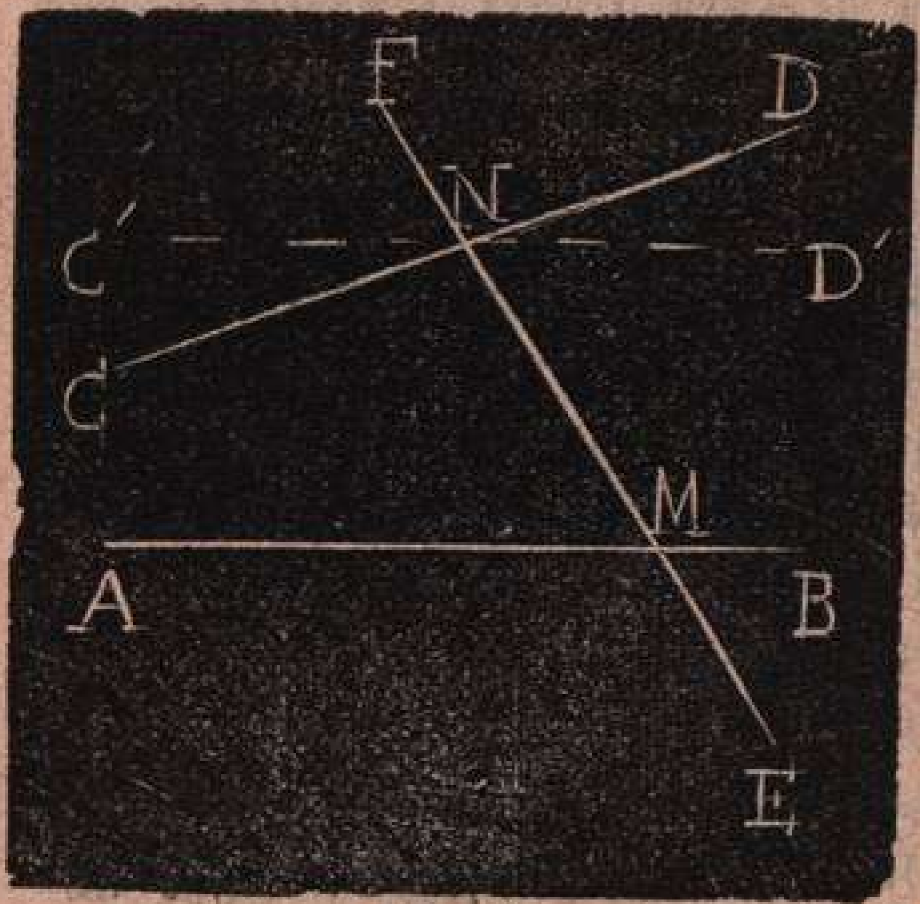


Fig. 18.

Vamos á demostrar que si las dos rectas AB y CD son concurrentes, los ángulos *alternos internos* MND y AMN son desiguales.

En efecto, MND>AMN. Tracemos ahora por el punto N la recta paralela C'ND' de modo que tengamos que

D'NM=AMN

en cuyo caso la recta C'ND' será la única paralela que se puede trazar á la recta AB por el punto N; si los ángulos MND y AMN fuesen iguales, la recta CD tambien seria paralela á la AB pasando por el punto N, lo cual es evidentemente *absurdo*, toda vez que por el punto N solo se puede trazar la paralela C'ND'.

Dos rectas concurrentes tienen tambien concurrentes sus respectivas perpendiculares, porque si así no fuese, serian paralelas, lo cual resultaria absurdo evidentemente.

De todo lo anterior inferiremos *reciprocamente.*

Dos rectas cortadas por una secante serán ó no paralelas segun que:

1.° *Los ángulos alternos internos, correspondientes y alternos esternos, sean iguales ó desiguales.*

2.° *Los ángulos internos ó esternos de un mismo lado de la secante, sean ó no suplementarios.*

42. *Los segmentos de rectas paralelas comprendidas entre otras paralelas son siempre iguales.*

Dos casos pueden ocurrir: 1.° *Que las primeras paralelas sean perpendiculares á las segundas.*

Para este caso la demostracion está dada al final del teorema 38.

2.° *Que las primeras paralelas no sean perpendiculares á las segundas.*

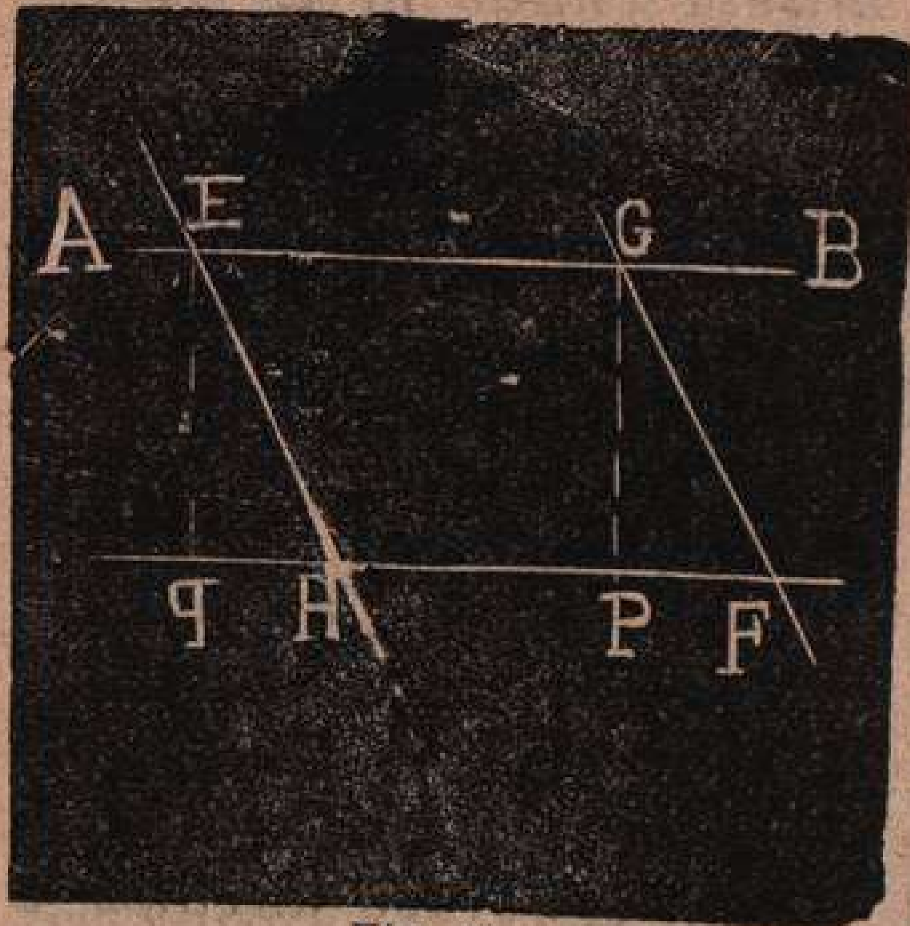


Fig. 19.

Vamos pues, á demostrar en la (fig. 19) que siendo la recta AB paralela con QF, y siendo tambien paralelas la EH y la GF, dichas rectas son iguales.

En efecto, bajando desde los puntos E y G respectivamente las perpendiculares EQ y GP, estas serán evidentemente iguales, segun lo demostrado (38). Mas ahora tenemos que los ángulos QEH y PGF serán iguales, y por tanto, colocando la figura QEH respectivamente sobre PGF, la coincidencia de sus líneas respectivas nos dará que EH=GF, que es lo que queriamos demostrar.

Con el conocimiento de los casos de igualdad de triángulos puede tambien demostrarse.

43. Teorema: *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, siendo ambos agudos ó ambos obtusos son siempre iguales.*

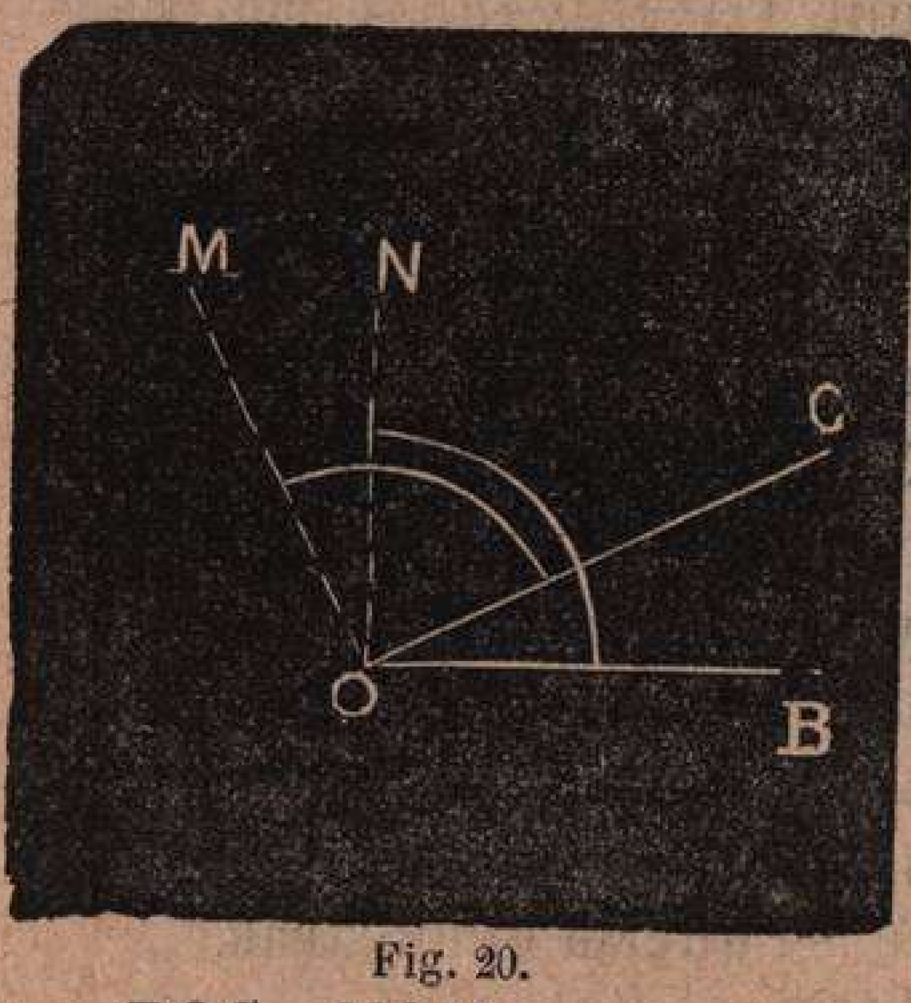


Fig. 20.

Vamos á demostrar (figura 20) que siendo el ángulo MON formado por las dos rectas MO y NO, respectivamente perpendiculares á la OC y OB que forman el ángulo COB, dicho ángulo

COB=MON.

En efecto,

BOC+CON=Un recto, pero

MON+CON=Un recto, luego

BOC+CON=MON+CON.

Restando de ambos miembros la cantidad CON, quedará que BOC=MON, que es lo que se queria demostrar.

44. Teorema: *Los ángulos que tienen sus lados paralelos*, cada uno á su homólogo, *y dirigidos en el mismo sentido, son siempre iguales.*

Los ángulos que tienen sus lados paralelos homólogamente *y dirigidos en el sentido contrario, son tambien iguales.*

Dos ángulos que tienen sus lados paralelos pero no dirigidos los dos á la vez en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, si no son iguales, son siempre suplementarios.

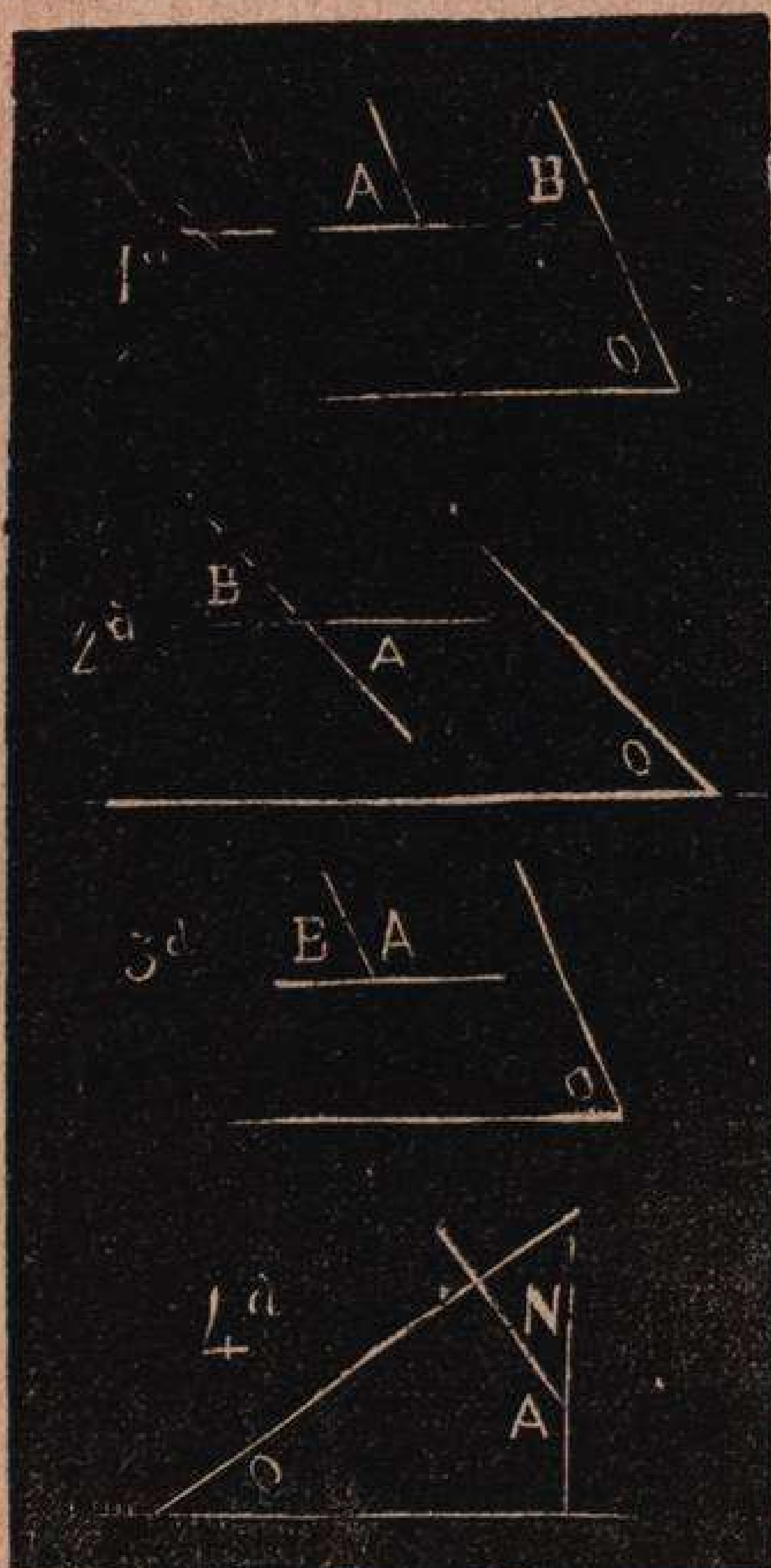


Fig. 21.

Vamos á demostrar (figura 21).

(1.ª) Que los ángulos A y O son iguales.

(2.ª) Que los ángulos A y O son iguales.

(3.ª) Que los ángulos A y O son suplementarios.

(4.ª) Que los ángulos O y A son suplementarios.

En efecto, en la 1.ª prolongando la recta AB tendremos que A=B por correspondientes, y B=O por la misma razon.

Luego A=O.

En la (2.ª). Demostrado que que O=B segun lo anterior, y tambien que B=A por opuestos al vértice, tendremos que A=O.

En la (3.ª). Demostrado que B=O. Siendo B y A adyacentes tendremos

$$B+A=2 \text{ Rectos}$$

y poniendo O en vez de B, tendremos que A+O=2 Rectos.

En la (4.ª). Siendo A+N=2 Rectos por adyacentes, y siendo N=O segun lo demostrado (43) tendremos que A+O=2 Rectos, que es lo que se queria demostrar.

De todo lo cual deduciremos:

Dos ó mas ángulos, cuyos lados sean respectivamente paralelos, son iguales si ámbos lados del uno están dirigidos en el mismo sentido que sus paralelos del otro, ó en sentido contrario que estos: y dos ángulos son suplementarios si un lado del uno está dirigido en el mismo sentido que su paralelo, y el otro en sentido contrario.

Dos ó mas ángulos, cuyos lados sean respectivamente perpendiculares, son iguales si ámbos son agudos ó ámbos obtusos: y dichos dos ángulos serán suplementarios si uno es agudo y otro obtuso.

45. Para trazar una paralela á una recta dada por un punto fuera de la misma, se hace aplicacion de la *regla y de la escuadra*, cuyo manejo por ser tan sencillo omitimos aquí.

Otros varios procedimientos tenemos para resolver tan fácil problema, con la aplicacion del compás.

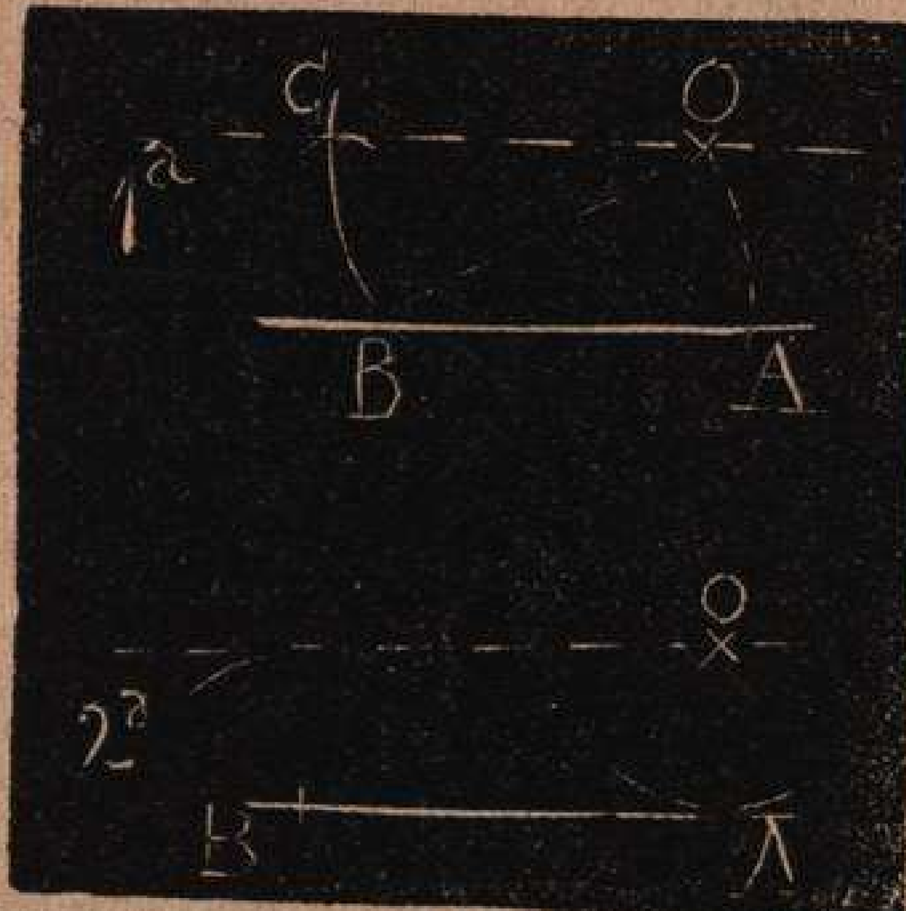


Fig. 22.

Para trazar desde el punto O (1.ª de la fig. 22) una paralela á la recta BA, se hará centro en O con cualquier abertura, por ejemplo con la OB trazándose un arco que corte á la recta BA; con la misma abertura se hará centro en B trazándose el arco AO, se toma la distancia AO sobre el arco BC y uniéndose el punto *O* con *C* la recta CO será paralela á la BA, toda vez que los ángulos que se formarian OBA=BOC.

Otro procedimiento tenemos (2.ª de la misma figura), con la abertura de compás correspondiente á la distancia entre ámbas paralelas, desde el punto O trazaremos un arco tangente á la recta BA, y desde un punto cualquiera de esta recta, B por ejemplo, con la misma abertura trazaremos otro arco, y trazando por el punto O una recta tangente al arco últimamente descripto, esta será la recta paralela á la dada.

Teoria de Rectas proporcionales.

46. Los conceptos bajo los cuales debe verificarse el completo estudio de las estensiones, sean estas *lineales*, *superficiales* ó *de volúmen*, son, como hemos dicho, *la figura*, *posicion* y *magnitud*.

Bajo el primer concepto ó sea el de su figura, las estensiones lineales ó las líneas pueden ser rectas ó curvas.

Nos ocupamos actualmente de las líneas rectas.

Bajo el segundo concepto ó el de su posicion, hemos considerado las líneas rectas en sus diferentes *posiciones relativas*, sean estas *oblícuas*, *perpendiculares* ó *paralelas*.

A las rectas, *oblícuas y perpendiculares*, bajo un concepto mas general hemos llamado rectas *angulares*.

Nos hemos ocupado ya de las posiciones relativas de las rectas sobre un plano, es decir, de las rectas oblícuas, perpendiculares y paralelas.

Bajo el tercer concepto ó sea el de su magnitud, se estudian las líneas ó estensiones de una sola dimension, en esta Teoria de Rectas proporcionales *que resulta de la comparacion relativa de las magnitudes lineales*.

Llamamos, por tanto, *líneas proporcionales*, *aquellas con cuyas magnitudes numéricas pueden formarse proporciones geométricas legales*, *ó lo que es lo mismo* establecerse *igualdades fraccionarias*, de las cuales hemos tratado (Tomo I págs. 65 y 95).

En los números 15 y 16 nos hemos ocupado de las líneas, de sus valores numéricos, de la adicion y sustraccion de varias estensiones lineales, de lo que entendemos por rectas múltiplas y divisoras de otras dadas: ahora convendrá tener en cuenta que aunque es frecuente decir *producto* y *cociente de dos líneas*, no se refiere esto directamente á dichas líneas, sino á los productos y cocientes de sus valores numéricos tomados sobre una escala, en las que se miden dichas líneas, teniendo cada medida su cantidad numérica respectiva, la cual es correspondiente á cada estension.

47. Teorema: *Si uno de los lados de un ángulo se divide en partes iguales y por los puntos de division se trazan paralelas al otro lado, este quedará tambien dividido en partes iguales.*

Si el lado BA (fig. 23) del ángulo ABC le divido en las partes iguales BD, DE, EF, FH, HA, y por los puntos D, E, F, H y A trazo las paralelas DN, EM, FO, HZ y AC, el lado BC quedará tambien dividido en las partes iguales BN, NM, MO, OZ y ZC.

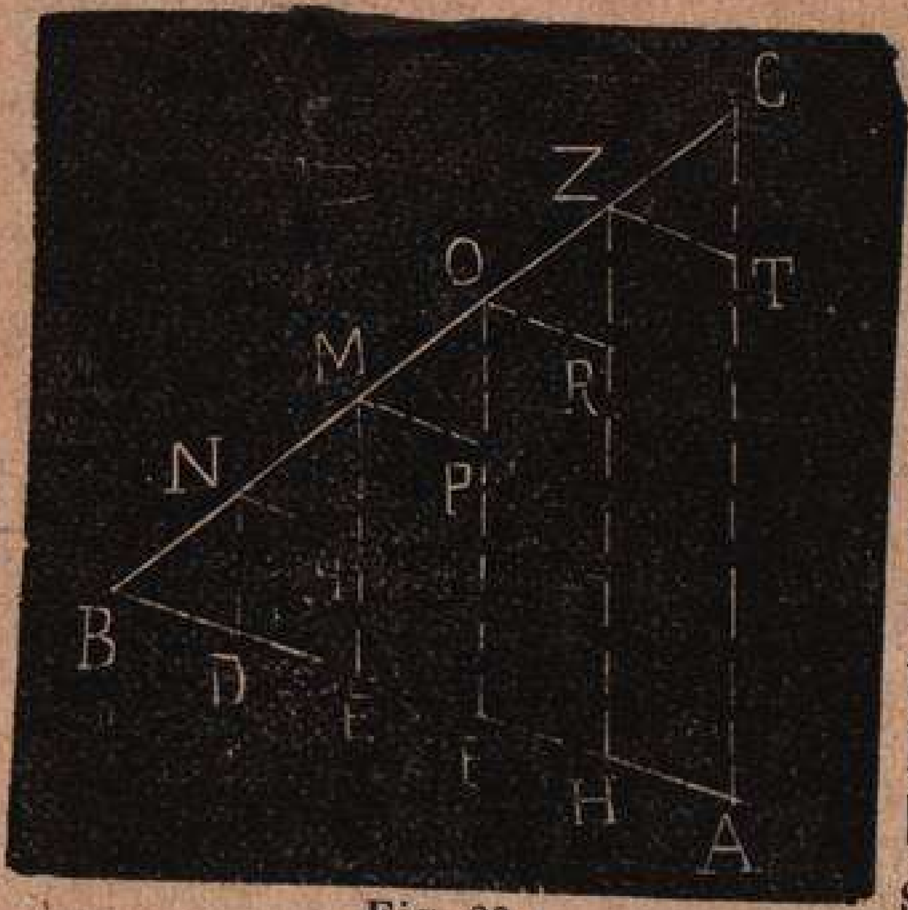


Fig. 23.

En efecto, trazando por los puntos N, M, O y Z las paralelas NQ, MP, OR y ZT al lado BA, tendremos segun lo demostrado (en el núm. 42) BD=NQ=MP=OR=ZT; además, segun lo espuesto (en el núm. 44) los ángulos B, MNQ, OMP, ZOR, CZT serán tambien iguales por tener sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido; y como los ángulos en T, R, P, Q y D son iguales, lo mismo como los C, OZR, MOP, NMQ y BND resultará precisamente que si superponemos las estensiones BND, NMQ, MOP, OZR, ZCT coincidirán precisamente, siendo por tanto iguales, conforme se queria demostrar, las partes BN=NM=MO=OZ=ZC.

Corolario. *Para dividir la recta* BC *en un número cualquiera de partes, por ejemplo en cinco*, trazo por un estremo cualquiera la recta BA, tomo en esta cinco partes iguales, pero de una dimension arbitraria, uno luego el estremo A de esta, con el C de la dada, y por los puntos D, E, F y H trazo las paralelas DN, EM, FO y HZ, las cuales dividirán á la recta dada BC en las cinco partes iguales BN, NM MO, OZ y ZC.

Fig. 24.

Para dividir una recta dada AC (fig. 24) *en varias partes proporcionales á otras rectas dadas* a, b, c, d, se traza un ángulo cualquiera CAB en uno de sus lados, se toma la distancia AC igual á la recta dada á partir desde el vértice; en el otro lado á partir del vértice, se toma la distancia AQ=a, á continuacion la distancia QE=b, ED=c y

DB=d; se traza luego la recta CB y por los puntos Q, E y D se trazarán las paralelas QP, ER y DT á la recta BC, las cuales dividirán á la recta dada AC en las partes AP, PR, RT y TC, que serán respectivamente proporcionales á las rectas dadas a, b, c y d.

En efecto, si por los mismos puntos Q, E y D trazamos las paralelas QH, EN y DM, resultarán iguales los ángulos de las figuras que se formen, estas resultarán semejantes y precisamente proporcionales las líneas que las limitan, teniéndose que

$$\frac{AP}{AQ}=\frac{PR}{QE}=\frac{RT}{ED}=\frac{TC}{DB}$$

que es precisamente lo que queriamos demostrar.

48. Teorema: *Si varias rectas paralelas cortan á dos ó mas rectas concurrentes, las partes de una de estas son directamente proporcionales á sus correspondientes de cualquier otra.*

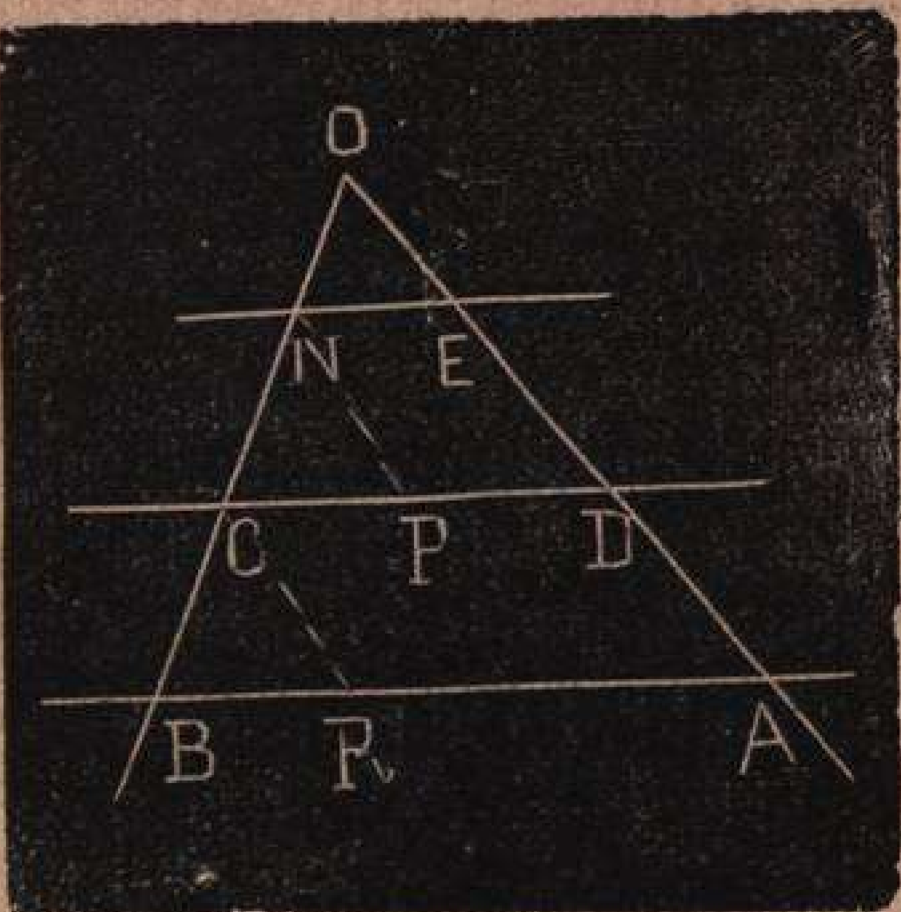


Fig. 25.

En efecto, sean las rectas paralelas NE, CD y BA las cuales cortan á las dos rectas concurrentes OB y OA; trazando por los puntos N y C las paralelas NP y CR, las figuras ONE, NCP y CBR resultarán, segun lo demostrado, con ángulos iguales, siendo por tanto semejantes los lados que las limitan homólagamente, serán proporcionales, luego tendremos que

$$\frac{ON}{OE}=\frac{NC}{ED}=\frac{CB}{DA}$$

que es lo que se queria demostrar.

Recíprocamente diremos que si los dos lados del ángulo O se hallan divididos por las rectas NE, CD y BA en partes directamente proporcionales, dichas rectas serán necesariamente paralelas.

De todo lo espuesto inferiremos que: Si varias rectas paralelas y equidistantes cortan á otras varias concurrentes, las dividirán respectivamente en partes iguales.

Que si dichas rectas aunque paralelas no son equidistantes, dividirán á las rectas concurrentes en partes respectiva y directamente proporcionales.

Que á la suma ó diferencia de dos partes correspondientes á una de ellas, corresponderá necesariamente la suma ó diferencia de las partes respectivas de la otra.

Problema: *Para hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas a, b y c* (fig. 26) se traza un ángulo cualquiera O por ejemplo, á partir del vértice se toma la distancia OR=a y OP=b en uno de sus lados; y en el otro lado se toma OQ=c y uniendo el punto Q con el P; por el punto R se traza la paralela Rx, verificándose según lo que ya sabemos que

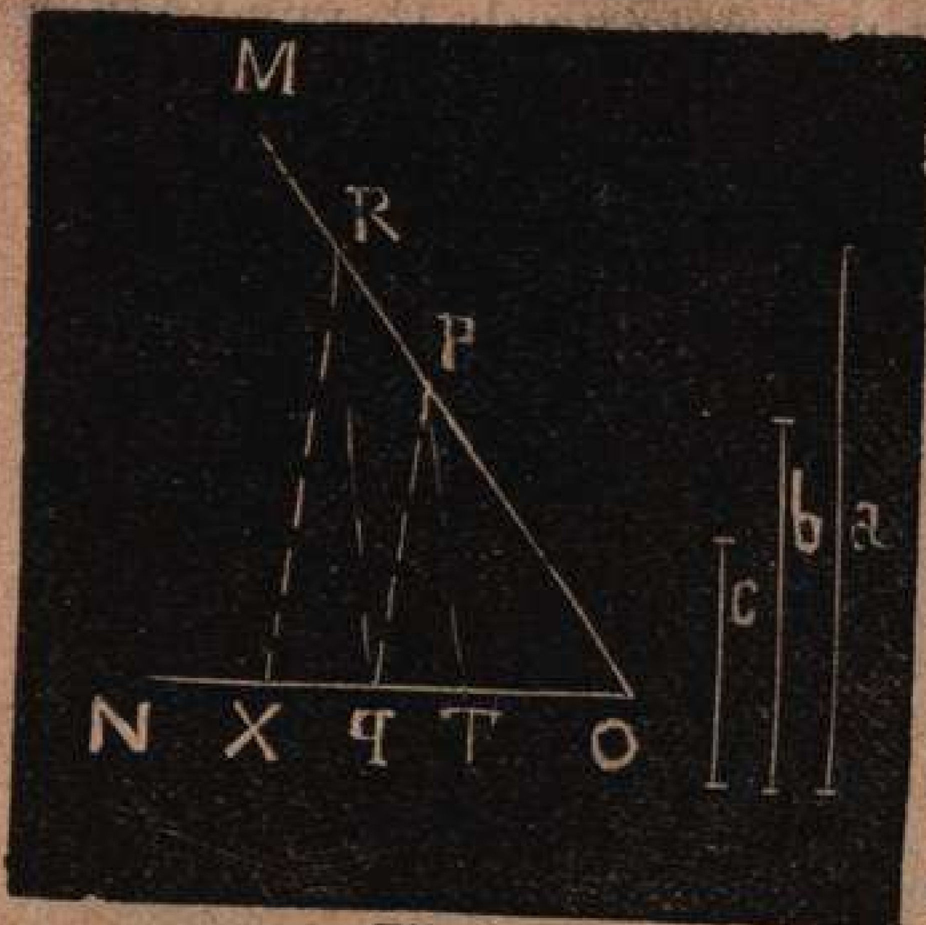


Fig. 26.

$$\frac{OP}{OR}=\frac{OQ}{OX}$$

es decir que $b:a::c:x$.

Si hubiéramos querido resolver el problema, determinando el valor de la incógnita en la proporcion a:b::c:x, hubiéramos unido en la misma figura el punto R con Q y trazando por P una paralela á la RQ señalaria un punto en la recta ON, que limitaria la longitud de la incógnita, la cual seria OT.

Problema: *Para hallar una tercera proporcional á las dos rectas dadas a y b*, se resuelve como en el caso anterior, tomando en el lado AN las distancias AB=a y AC=b, y en el lado AM, AD=b se traza la recta BD y por el punto C la paralela Cx, teniéndose que

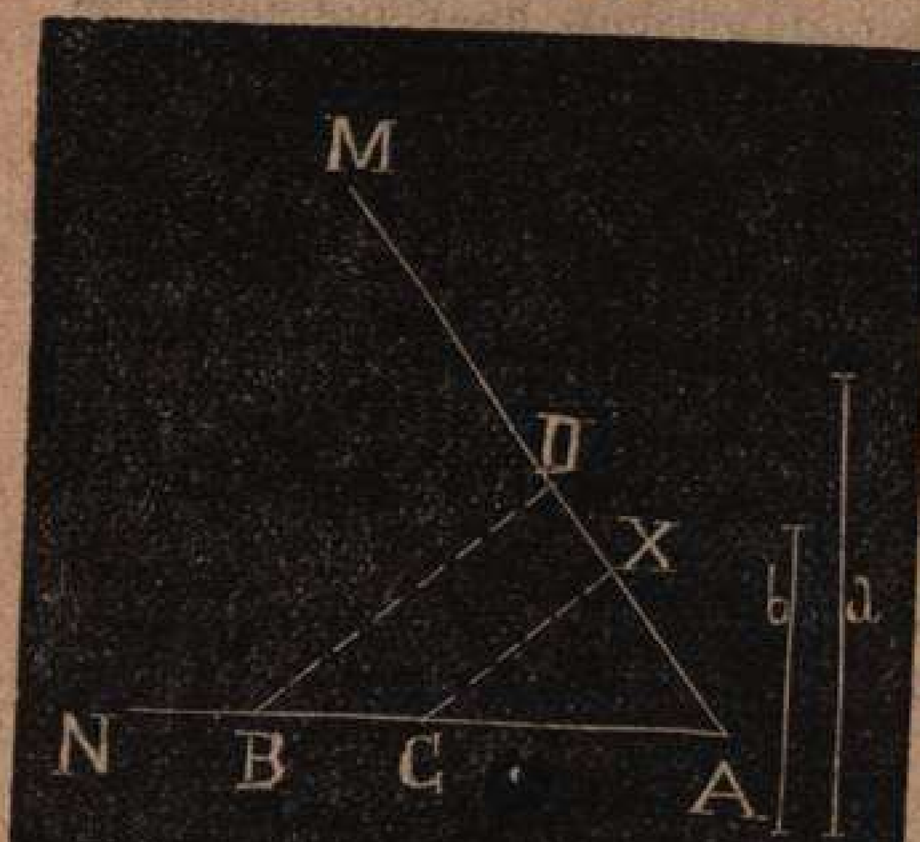


Fig. 27.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{Ax}$$

es decir, a:b::b:x.

49. Teorema: *Dos rectas paralelas* CE *y* BD *comprendidas entre los dos lados de un ángulo* A (fig. 28) *son directamente proporcionales á las distancias* AC *y* AB *de sus intersecciones con un mismo lado del ángulo al vértice de este.*

Dos posiciones distintas puede tener la figura, segun se representan; sin embargo, la demostracion es una.

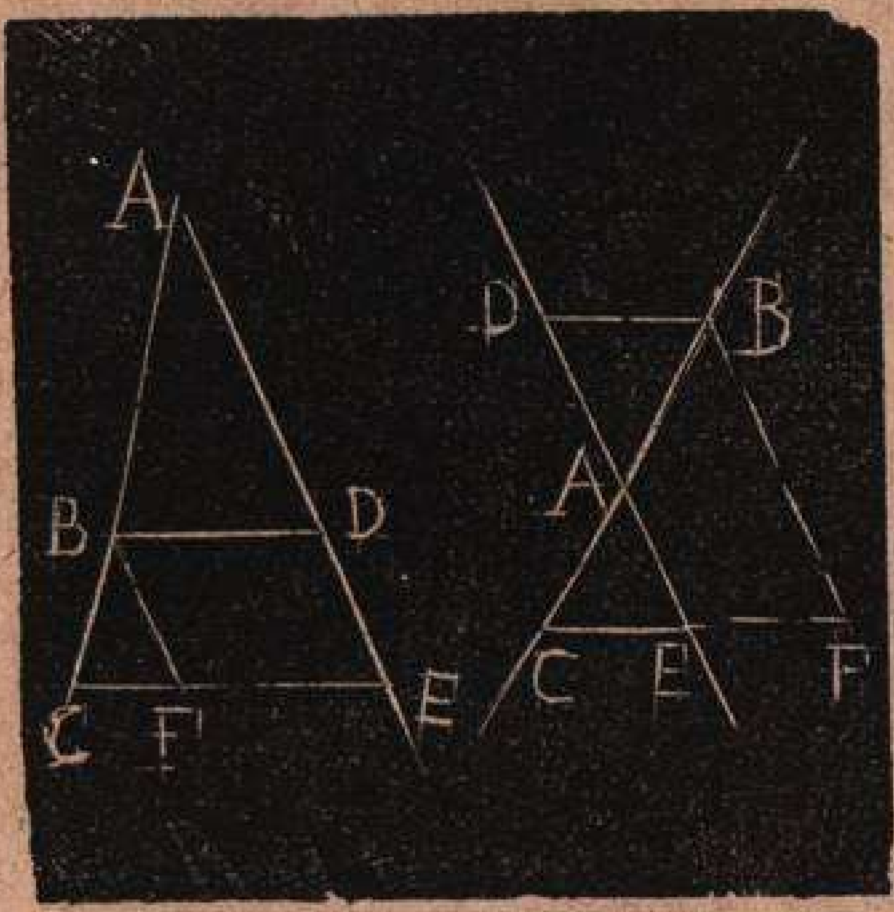


Fig. 28.

En efecto, trazando la recta BF paralela á la AE, estas dos paralelas cortan á los dos lados del ángulo C, verificándose que $\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{EF}$, mas siendo EF=BD por paralelas comprendidas entre paralelas se tendrá por último que: $\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BD}$.

De la misma manera demostrariamos que $\frac{AE}{AD}=\frac{CE}{BD}$ que tambien podriamos obtener de la anteriormente demostrada y de ser $\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$.

50. En la práctica es muy frecuente hacer aplicacion de los llamados COMPÁS DE REDUCCION y COMPÁS DE PROPORCION, cuya construccion está fundada en la proporcionalidad de las lineas.

El primero se aplica para obtener la parte alicuota de una linea; consiste en dos ramas de igual longitud, terminadas por ámbos estremos en unas puntas aceradas; ámbas ramas del compás tienen una ranura longitudinal por la cual cerrado este, resbala un tornillo de presion, pudiendo fijarse en un punto cualquiera: se halla graduada la ranura longitudinal en su borde interior, de manera que nos marca la parte alicuota que hay comprendida entre uno de sus estremos y uno de los puntos interiores, relativamente á la porcion mayor restante.

Si por ejemplo nos propusiésemos hallar la 3.ª ó 4.ª parte exacta de una recta dada, cerrado el compás hariamos resbalar el tornillo hasta que el eje del mismo coincida con la division 1/3 ó 1/4 respectivamente; fijo ya el tornillo abririamos el compás, y tomando la recta propuesta con la abertura de sus estremedidades mayores, la distancia comprendida entre sus mas cortas estremidades, nos determinaria la parte alicuota pedida.

El compás llamado de proporcion consiste en dos reglas iguales unidas en uno de sus estremos por una charnela; sus bordes interiores se hallan divididos en un número de partes iguales y girando sobre la charnela, pueden formar un ángulo cualquiera desde cero hasta dos rectos. El uso mas frecuente del compás de proporcion consiste en hallar una recta que tenga con otra dada una razon conocida; si suponemos, por ejemplo, que se quiere hallar una recta que tenga con otra la razon de 7:10, se abrirá el compás hasta que la distancia comprendida entre las divisiones 10 de sus bordes interiores sea igual á la recta dada; siendo la incógnita pedida la distancia que exista entre las divisiones sietes de entrambas reglas.

Para determinar exactamente el valor de varias partes alicuotas de una distancia lineal cualquiera, se traza en uno de sus estremos una recta que forme con la misma un ángulo poco oblicuo, se toman en ella con longitud arbitraria el número de partes iguales en que querramos dividir la recta primitiva, y uniendo el otro estremo de esta con el estremo de la recta auxiliar y trazando paralelas por los puntos de division, las longitudes de estas paralelas á partir desde el vértice formado nos darán una, dos, tres, etc. partes alicuotas de la recta dada. En este principio se fundan la construccion de las llamadas «escalas tranversales,» y entre ellas la mas importante conocida con el nombre de «escala miliarea.»

* 51. *Se dice que dos rectas trazadas entre los lados de un ángulo ó de su opuesto por el vértice, son antiparalelas, cuando la 1.ª forma con uno de los lados del ángulo dado, un ángulo igual al que la 2.ª forma con el otro.*

Las dos rectas DE y BC (fig. 29) son *antiparalelas* con respecto al ángulo BAC, cuando el ángulo ADE es igual al ángulo ACB. Entonces el ángulo AED que la primera recta forma con el segundo lado AC, es igual al ángulo ABC que la segunda recta forma con el primer lado AB.

52. Teorema: *Cuando los dos lados de un ángulo son cortados por dos rectas antiparalelas, el producto de las distancias del vértice á los dos puntos en que cada uno de los lados corta á las dos trasversales, es constante* (fig. 29).

Vamos á demostrar que siendo BC y DE rectas antiparalelas en el ángulo BAC se ha de verificar que

$$AB \times AD = AC \times AE.$$

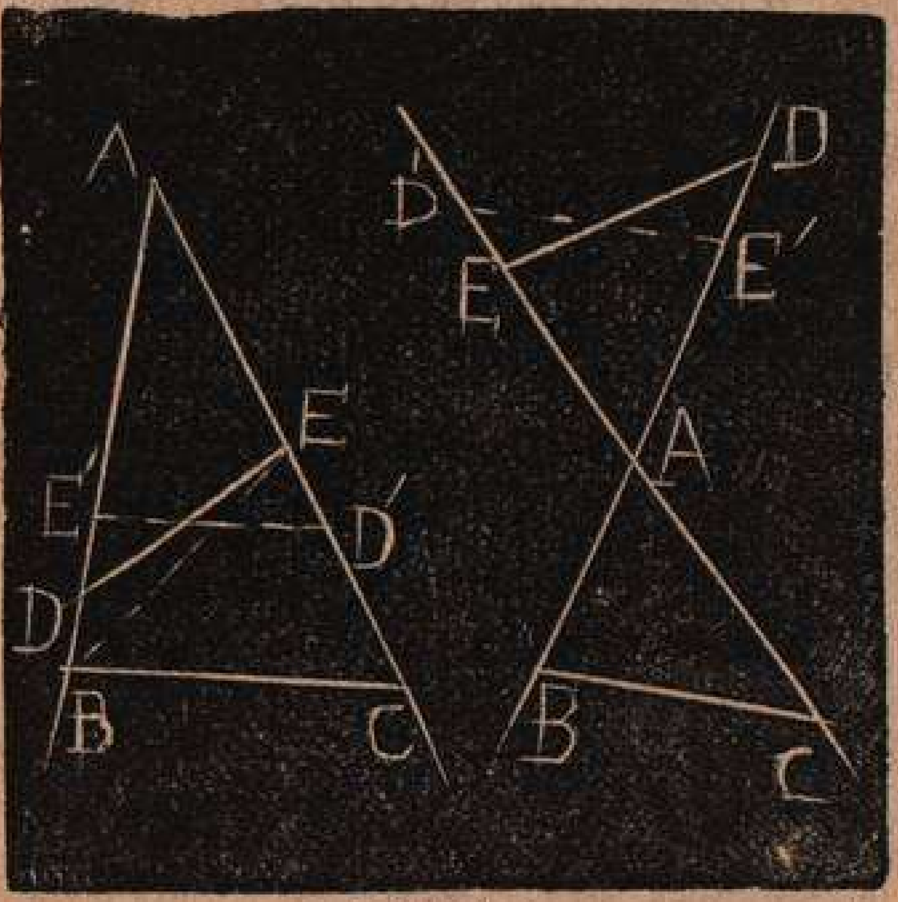


Fig. 29.

En efecto, tómese AD'=AD y AE'=AE, trácese D'E'; la relacion de las figuras ADE y AD'E' que tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales lleva consigo la igualdad de los demás elementos, es decir, que los ángulos ADE y AD'E' son iguales, y siéndolo tambien por hipótesis los ángulos ADE y ACB, resultará que los ángulos correspondientes AD'E' y ACB son iguales y las rectas BC y D'E' son paralelas, teniéndose que segun lo espuesto en el número 49 $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'}$, en cuya igualdad fraccionaria si sustituimos las cantidades AE' y AD' por sus iguales AE y AD resultará que $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$, donde $AB \times AD = AC \times AE$, que es lo que se queria demostrar.

Recíprocamente podremos decir, *si dos rectas* DE *y* BC *trazadas entre los lados de un ángulo* BAC *son tales que el producto de las distancias del vértice á los dos puntos en que cortan á cada uno de los lados es constante, es decir, son tales que se verifica que* $AB \times AD = AC \times AE$; *dichas rectas serán antiparalelas con respecto al ángulo.*

El Teorema y recíproco anterior podremos tambien espresarlo de la manera siguiente:

Si los dos lados del ángulo A *se cortan por dos rectas antiparalelas* DE *y* BC, *quedan divididos en partes inversamente proporcionales.*

Recíproco. Si las dos rectas DE y BC cortan á los dos lados del ángulo A en partes inversamente proporcionales, dichas dos rectas son antiparalelas.

Como corolarario muy importante de este Teorema diremos que *cuando dos rectas antiparalelas con respecto á un ángulo, se cortan sobre uno de los lados de este ángulo; el cuadrado de la distancia del vértice á este punto. es igual al producto de las distancias que existen entre el vértice del ángulo y los puntos en que el segundo lado del mismo corta á las dos rectas antiparalelas*, lo cual se comprende perfectamente por haber llegado á confundirse los puntos D y B de la espresada figura 29.

El recíproco de este corolario lo espresaremos diciendo: Si por un punto B tomado sobre uno de los lados de un ángulo BAC, se trazan en el interior del ángulo dos rectas BC y BE tales que $AB^2 = AC \times AE$, esas dos rectas son antiparalelas con respecto al ángulo.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO PRIMERO

DE LA PRIMERA PARTE DE LA GEOMETRIA PLANA.

SOBRE LINEAS RECTAS.

I. Hallar la bisectriz del ángulo que formarian dos rectas convergentes, si se prolongasen lo suficiente hasta encontrarse.

II. Por un punto dado en una de dos rectas paralelas, trazar una secante tal, que la parte interceptada por las paralelas, sea igual á la longitud de una recta dada.

III. Demostrar que si por el vértice de un ángulo se traza una recta interior al mismo, forma con su bisectriz un ángulo igual á la semidiferencia de los ángulos que forma con los lados del primero.

IV. Demostrar que la distancia de un punto cualquiera de una recta á su punto medio, es la semidiferencia de las distancias de dicho punto á los estremos de dicha recta.

V. Demostrar que si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos, sus bisectrices son respectivamente perpendiculares ó paralelas.

VI. Dar bola por tabla en el juego del billar.

VII. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos alternos ó correspondientes formados por dos paralelas y una secante, son tambien paralelas.

VIII. Por un punto dado fuera de una recta, trazar otra que forme con ella un ángulo igual á otro dado.

IX. Manejo y uso de la Regla y la escuadra para la determinacion de problemas sobre perpendiculares y paralelas.

X. Descripcion, manejo y uso de los compases llamados de reduccion y proporcion para la resolucion de problemas.

XI. Construccion de escalas para la determinacion de longitudes y formacion de la llamada miliaria ó de mil partes.

LIBRO SEGUNDO.

CIRCUNFERENCIAS DE CÍRCULO.

Preliminares.

52. Circunferencia de círculo, es una linea curva, plana y cerrada, que teniendo cualquier *magnitud*, la *posicion* de la misma se halla en una superficie plana y su *figura* tal que todos los que la forman son equidistantes de otro interior llamado centro.

Se llama Círculo la superficie plana que limita la circunferencia.

Centro de un círculo y de la circunferencia es el punto interior que dista igualmente de todos los de la circunferencia.

Rádio es una línea recta que va desde el centro á un punto cualquiera de la circunferencia.

Diámetro ó doble rádio es la línea recta que va de uno á otro punto de la circunferencia pasando por el centro.

Cuerda es la línea recta que va de uno á otro punto de la circunferencia sin pasar por el centro.

Secante es una línea recta que corta á la circunferencia; la secante es una cuerda prolongada.

Tangente es la línea recta que toca en un solo punto á la circunferencia.

Arco es una porcion de circunferencia: cuando el arco es igual á media circunferencia se llama semi-circunferencia, y cuando es igual á la cuarta parte de la circunferencia, se llama cuadrante.

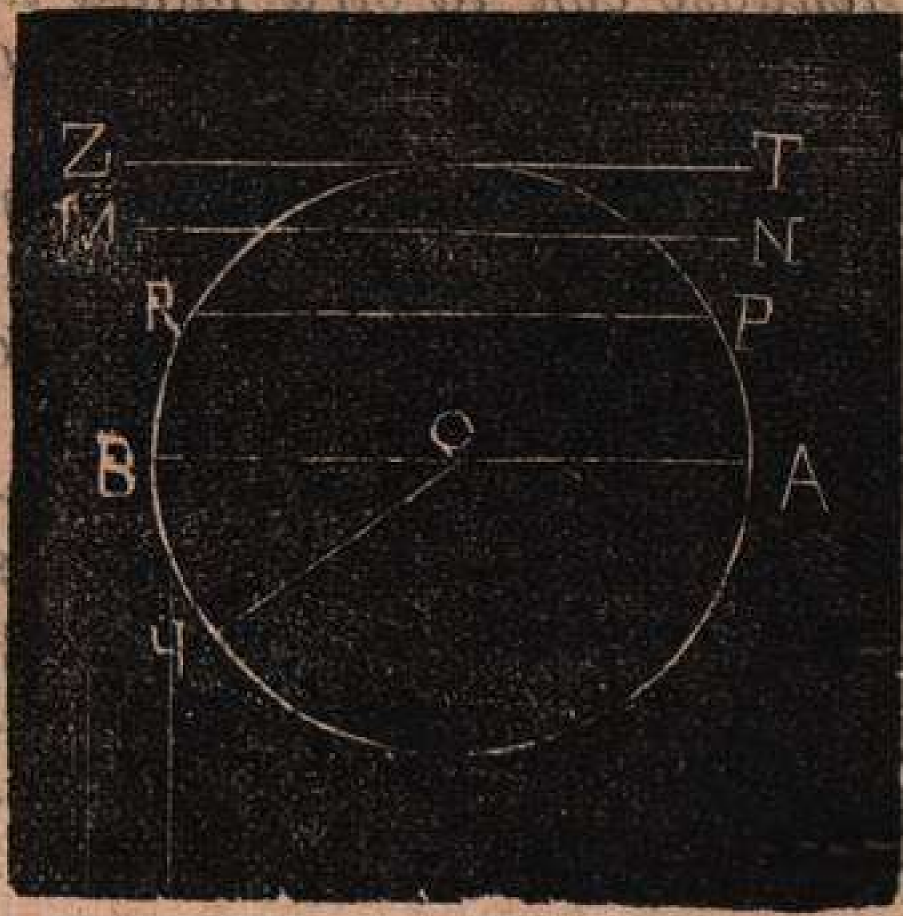


Fig. 30.

En la (fig. 30 adjunta) representamos una circunferencia.

El centro es O.

Un rádio OQ.

Un diámetro BA.

Una cuerda RP.

Una secante MN.

Una tangente será ZT.

Una circunferencia se representa por la letra del centro, si está sola, ó por las dos letras del rádio; si varias circunferencias tienen el mismo centro, se llaman concéntricas.

53. De la definicion de la circunferencia se deduce:

1.° *La circunferencia admite diversidad de especies, toda vez que puede ser variable la longitud de un rádio.*

2.° *Todos los rádios de una circunferencia son iguales.*

3.° *Todos los diámetros de la misma son tambien iguales.*

4.° *El número de rádios ó diámetros que se pueden trazar á una circunferencia son en número infinito.*

5.° *Las circunferencias de igual rádio ó de igual diámetro son iguales, porque haciendo que se superpongan los centros, las circunferencias coincidirán.*

6.° *Todo punto que en el plano de un círculo diste del centro una cantidad igual rádio, es punto de la circunferencia.*

7.° *Todo punto que en dicho plano diste del centro una cantidad mayor que el rádio, es punto esterior á la circunferencia.*

8.° *Todo punto que en dicho plano diste del centro una cantidad menor que el rádio, es punto interior á la circunferencia.*

9.° *Los arcos trazados con igual rádio son siempre adaptables por superposicion.*

10. *La posicion y magnitud de una circunferencia se determinan, dado el centro y la magnitud del rádio; sabido que todas las circunferencias de igual rádio y del mismo centro coinciden superpuestas.*

11. *Para trazar circunferencias se emplea el compás colocando una de sus dos puntas en el centro, haciéndole*

girar en rotacion y describiéndose con la otra punta la circunferencia; tambien puede emplearse una regla ó una cuerda.

12. *Dos circunferencias coinciden siempre si se hallen superpuestos los centros, aun cuando se hagan girar independientemente al rededor del mismo, y teniendo el mismo rádio.*

54. **Teorema:** *Tres puntos que no están en línea recta, determinan la posicion de una circunferencia.* Sean los tres puntos dados A, B, C, (fig. 31), digo que por referidos tres puntos no puede pasar mas que una circunferencia. En efecto, uniendo el punto A con el B, y el B con el C, trazaremos las dos rectas AB y BC; en los puntos medios de dichas dos rectas, levanto dos perpendiculares, las cuales precisamente habrán de encontrarse en el punto O, y este segun lo demostrado (30) equidistará de los estremos ó puntos dados A, B y C: haciendo centro en referido punto O con el rádio OA, trazaremos la circunferencia que nos fué pedida.

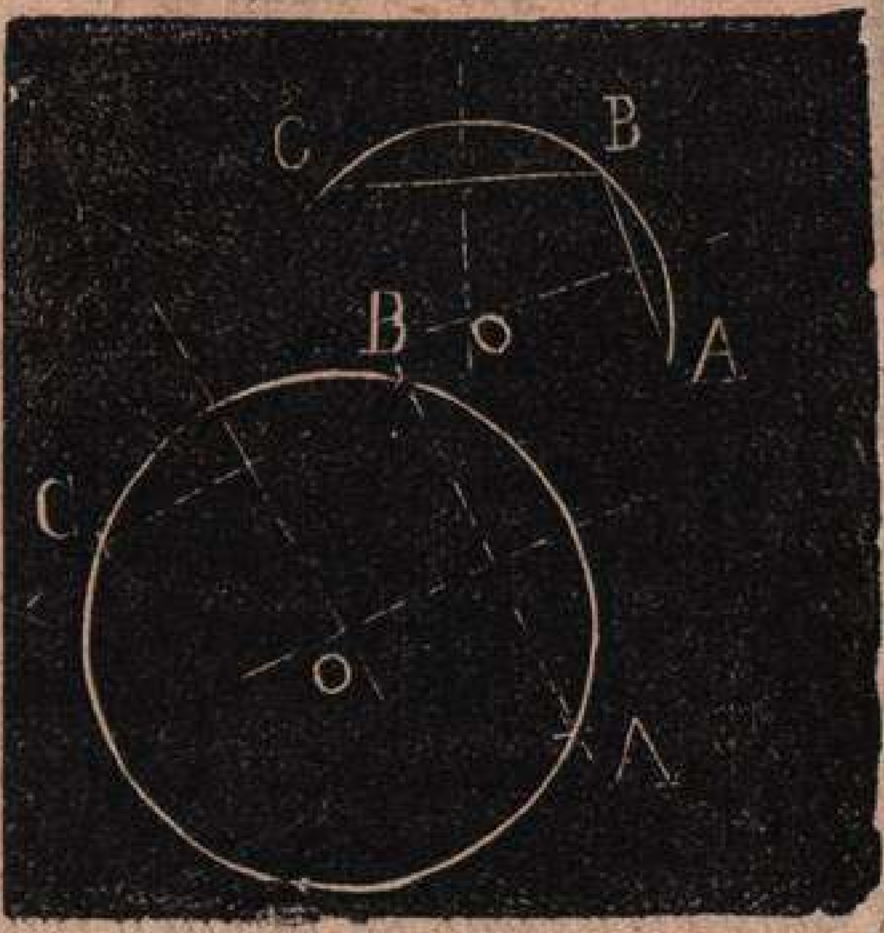


Fig. 31.

Recíprocamente. *Dada una circunferencia ó un arco, hallar el centro desde donde fué trazada.*

Para esto se toman tres puntos cualquiera en dicha circunferencia ó arco y se unen con dos cuerdas; sean aquellos A, B y C; estas serán AB y CD, levanto una perpendicular en el punto medio de cada una de las mismas las cuales se encuentran precisamente en el centro pedido.

Como corolarios de este Teorema resultan:

1.° *Una circunferencia no puede tener tres puntos en línea recta, porque evidentemente si así fuese, las perpendiculares á dos rectas, que son rigurosamente la prolongacion de una misma, serian paralelas y por tanto no se encontrarian; deduciendose de aquí la consideracion que hemos espuesto en el* núm. 12, *referente á ser considerada por algunos la línea recta como arco de una circunferencia cuyo centro está en el infinito.*

2.° *Dos circunferencias que pasen por tres puntos, coinciden en todos ellos si se superponen.*

3.° *Dos circunferencias distintas ó una circunferencia y una recta, pueden tener uno ó dos puntos comunes; en el primer caso se llaman* tangentes, *en el segundo* secantes.

4.° *Por tres puntos dados no puede pasar mas que una sola circunferencia, pero por dos ó por uno pueden pasar infinito número de circunferencias.*

5.° *El centro de una circunferencia que ha de pasar por tres puntos dados, está determinado invariablemente. Los centros de todas las circunferencias que pueden pasar por dos puntos dados, están todos en línea recta. Los centros de todas las circunferencias que pueden pasar por un punto dado tienen posiciones perfectamente indeterminadas.*

Circunferencias Tangentes.

55. Teoremas: Entre dos circunferencias situadas en un mismo plano se verifica:

1.° *Que si dichas dos circunferencias son secantes, la distancia comprendida entre sus centros es menor que la suma de sus rádios y mayor que la diferencia de estos.*

2.° *Que si son esteriores sin tocarse, la distancia comprendida entre sus centros, es mayor que la suma de sus rádios.*

3.° *Que si son tangentes esteriores, la distancia comprendida entre sus centros, es igual á la suma de sus rádios.*

4.° *Que si son tangentes interiores, la distancia comprendida entre sus centros, es igual á la diferencia de sus rádios.*

5.° *Que si son interiores sin tocarse, la distancia comprendida entre sus centros es menor que la diferencia de sus rádios.*

En efecto, fijémonos para cada caso en los grabados 1.°, 2.°, 3.°, 4.° y 5.° de la (fig. 32) y observaremos:

(1.°) Entre las dos circunferencias C y c, se verificará que: $Cc<CN+Nc$, si llamamos D á la distancia de los centros, R y r á los rádios de las circunferencias, tendremos: $D<R+r$.

Tambien tendremos que $R<D+r$; restando r (rádio menor) de entrambos miembros de esta desigualdad, resultará que $R-r<D$, es decir, en dos circunferencias secantes la distancia de los centros es menor que la suma y mayor que la diferencia de sus rádios.

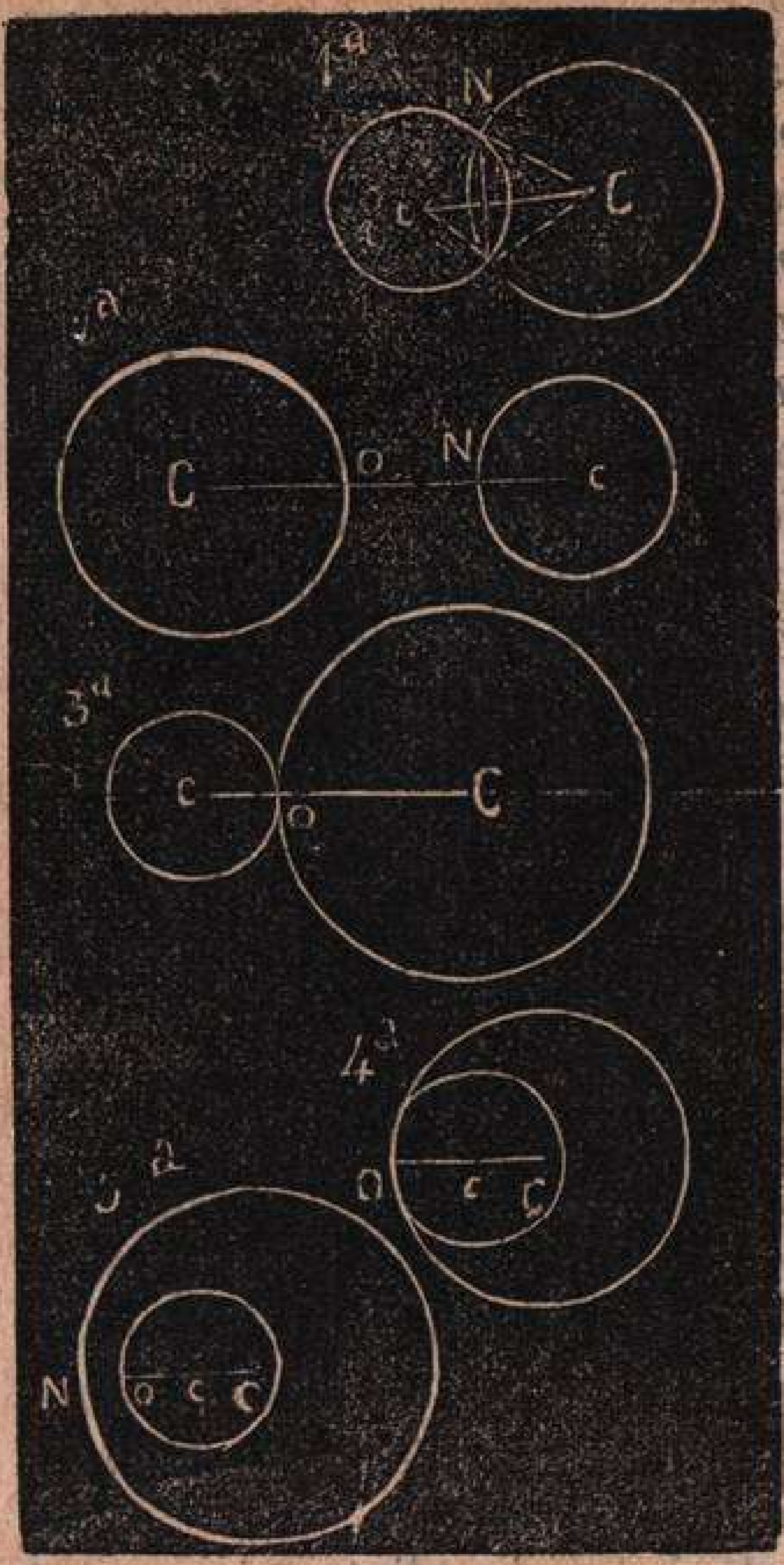


Fig. 32.

(2.°) Siendo

$$Cc = CO + ON + Nc$$

tendremos que disminuyendo en ON el segundo miembro resultará que

$$Cc > CO + Nc;$$

es decir, $D > R + r$. Y por tanto *en dos circunferencias esteriores la distancia de los centros es mayor que la suma de sus rádios.*

(3.°) $Cc = CO + Oc$, es decir, $D = R + r$ y por tanto *en dos circunferencias tangentes esteriores la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.*

(4.°) $Cc = CO - cO$, es decir $D = R - r$; y por tanto, *en dos circunferencias tangentes interiores la distancia de los centros es igual á la diferencia entre los rádios.*

(5.°) $Cc = CN - (Oc + ON)$; el segundo miembro es una diferencia indicada, si en él disminuimos el sustraendo, aumentamos relativamente la diferencia y por tanto, si restamos del segundo miembro ON, tendremos que $Cc < CN - Oc$, es decir, que $D < R - r$, por lo cual *si dos circunferencias son interiores sin tocarse, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.*

Recíprocamente podremos decir, *si entre dos circunferencias se verifica que la distancia de los centros es:*

1.° *Menor que la suma de los rádios ó mayor que la diferencia de estos*, las dos circunferencias serán *secantes*.

2.° *Mayor* que la suma de los dos rádios, las circunferencias son *esteriores sin tocarse.*

3.° *Igual* á la suma de los rádios, las circunferencias son *tangentes esteriores.*

4.° *Igual* á la diferencia de los rádios, las circunferenrencias son *tangentes interiores.*

5.° *Menor* que la diferencia de los rádios, las circunferencias son *interiores sin tocarse.*

Las proposiciones recíprocas no son siempre ciertas;sin embargo y como regla general podemos decir que: siempre que haciendo todas las hipótesis posibles sobre el mismo sugeto en una ó varias proposiciones, resulten lógicamente conclusiones distintas, que cada una escluya á las demás, las proposiciones recíprocas son todas ciertas.

El conocimiento del Teorema precedente nos conduce á la resolucion del problema siguiente:

56. Trazar una circunferencia tangente á otra en punto dado de ia misma y que pase además por otro punto interior ó esterior á la circunferencia dada.

Distinguiremos los dos casos indicados: 1.° *que el punto dado independiente del de la circunferencia sea esterior.*

2.° *Que el punto dado independiente del de la circunferencia sea interior.*

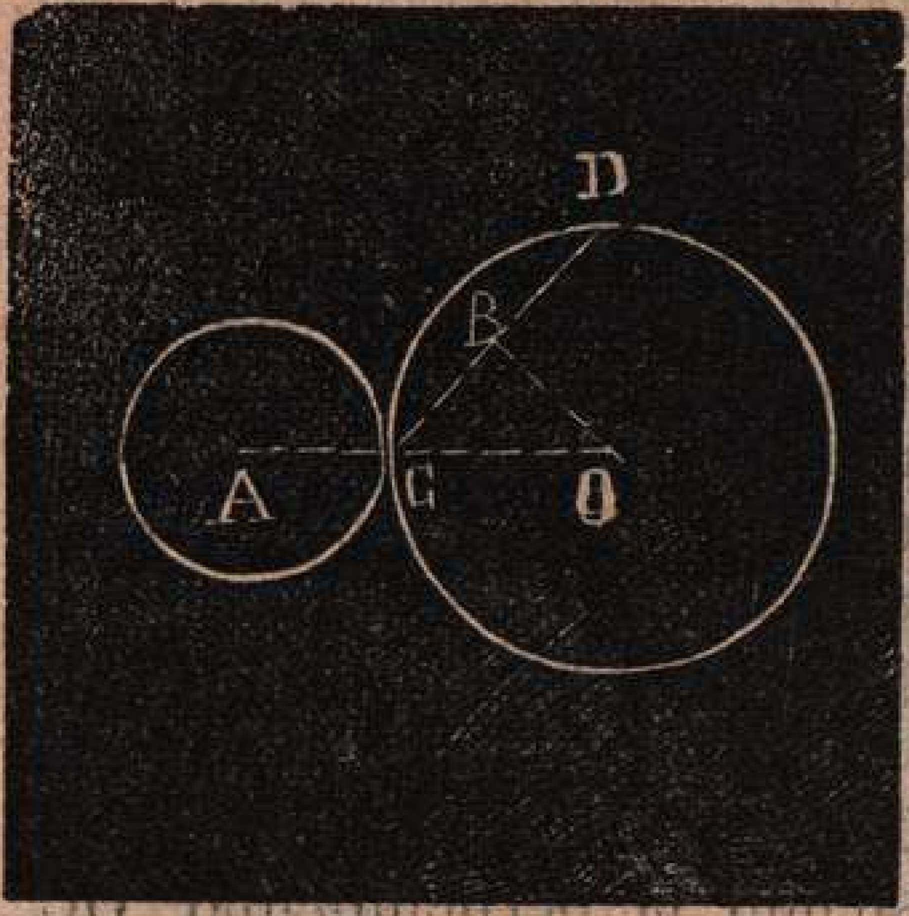


Fig. 33.

1.° Sea A la circunferencia dada, C el punto de la misma por donde ha de trazarse la circunferencia tangente, que deberá pasar además por el punto D.

Para buscar el centro trácese la recta AO indefinida, únase el punto C con el D por medio de la recta CD, en el punto medio de esta, levántese una perpendicular BO y en el punto O donde dicha recta intercepte á la AO, tendremos el centro de la circunferencia tangente pedida; haciendo centro en O con el rádio OC, trazaremos la circunferencia pedida O.

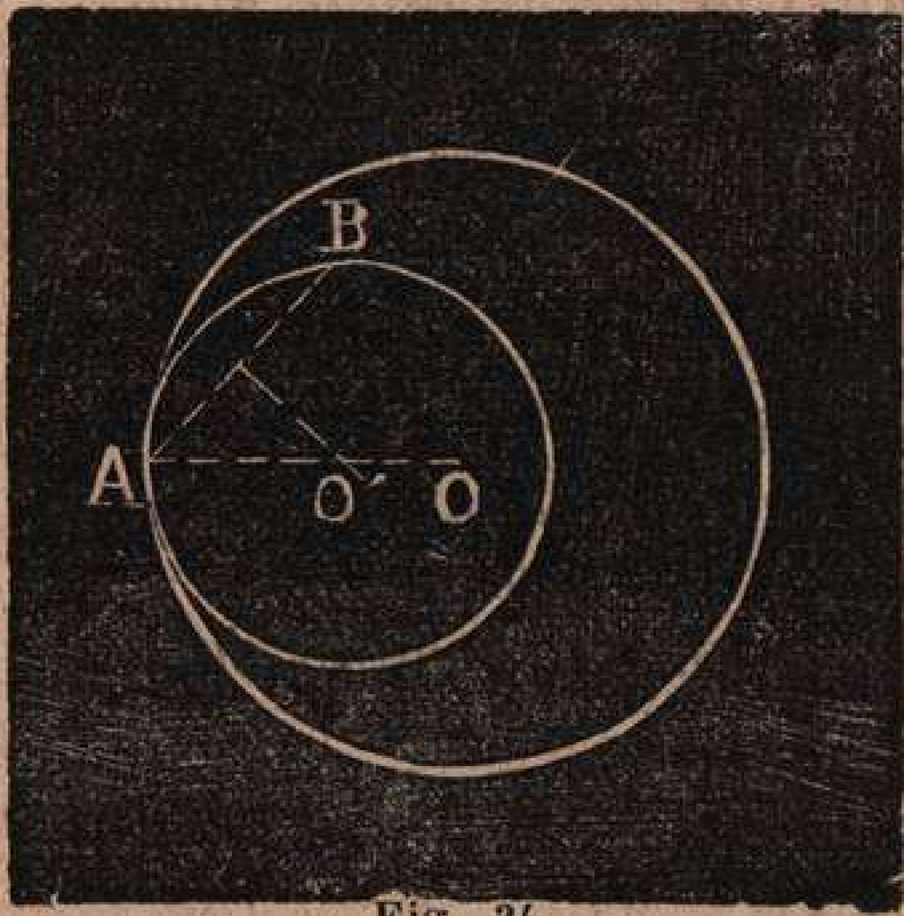


Fig. 34,

2.° Si el punto dado de la circunferencia O fuese A, y el *punto interior* á la misma fuese B, trazariamos el rádio AO, uniriamos el punto B con el A trazando la recta AB, y en el punto medio de esta levantariamos una perpendicular y en el punto O' donde dicha perpendicular intercepte al rádio, hariamos centro y con el rádio O'A trazando la circunferencia pedida.

Rectas tangentes á la circunferencia.

57. Teorema: Una recta y una circunferencia trazadas en un plano se verifica siempre que:

1.° *Si son tangentes, la distancia del centro de la circunferencia á la recta, es igual al rádio; y el rádio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia.*

2.° *Si la recta es esterior á la circunferencia, la distancia del centro á dicha recta es mayor que el rádio.*

3.° *Si la recta y la circunferencia son secantes, la distancia del centro á dicha recta es menor que el rádio.*

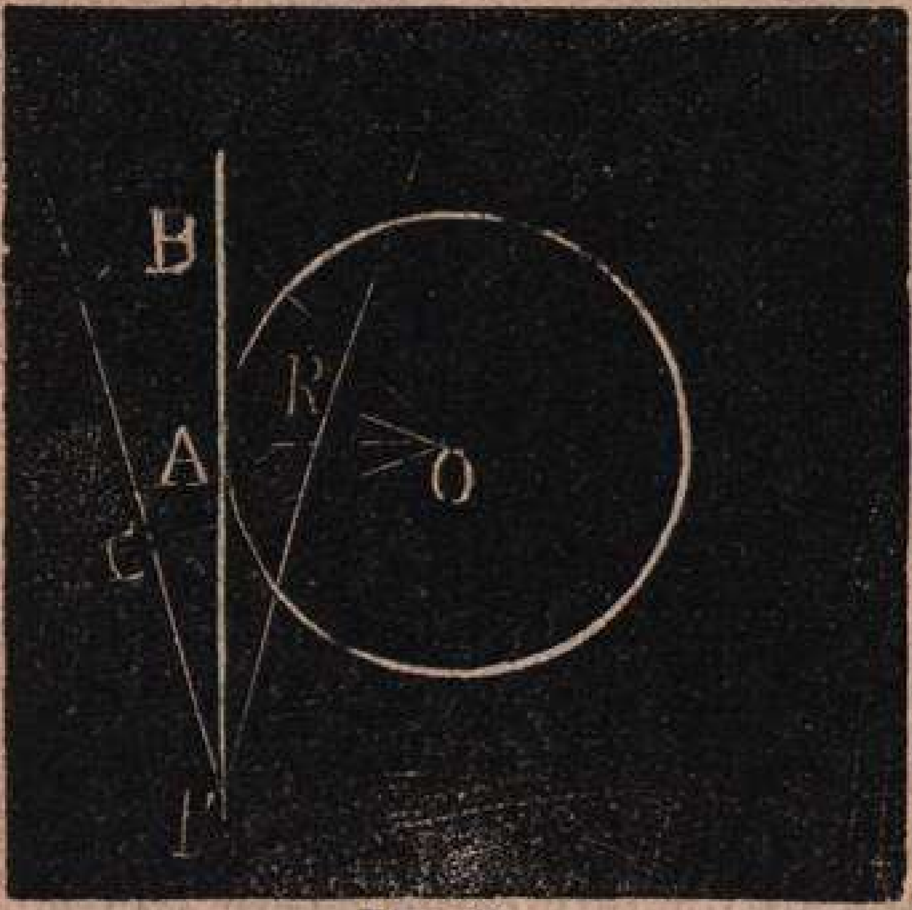


Fig. 35.

En efecto, 1.° si la recta BP (fig. 35) es tangente en el punto A, á la circunferencia O, la recta AO será un rádio y dicha recta será precisamente *perpendicular* al espresado rádio, porque otra recta cualquiera, por ejemplo, la OB que se trace desde el centro á dicha recta, será mayor y por tanto oblícua. (28).

2.° Si la recta PC es esterior á la circunferencia, siendo la perpendicular OC la menor distancia que se puede trazar desde el centro á dicha recta, esta es, evidentemente mayor que el rádio, toda vez que sale fuera,

3.° Siendo la recta PR secante con la circunferencia, la menor distancia desde el punto O, centro de esta, á referida recta, será OR su perpendicular, la cual es evidentemente menor que un rádio, toda vez que no llega á un punto de la espresada circunferencia.

Recíprocamente diremos. Entre una recta y una circunferencia trazadas en un plano, si se verifica que:

1.° *La distancia del centro de la circunferencia á la recta, es igual al rádio, serán aquellas tangentes.*

2.° *Si dicha distancia es mayor que la longitud del rádio, serán aquellas esteriores.*

3.° Y *si dicha distancia es menor que la longitud del rádio, serán aquellas interiores.*

El conocimiento del Teorema precedente, nos conduce á la resolucion de los problemas siguientes:

58. 1.° *Para trazar á una circunferencia dada por un punto de la misma una recta tangente*, se traza el rádio de la misma á referido punto y en un estremo se levanta una perpendicular y tendremos la tangente pedida.

En efecto, para trazar una tangente á la circunferencia O en el punto A, (fig. 35) se trazará el rádio AO y la perpendicular AB levantada en su estremo, será la tangente pedida.

2.° *Trazar una recta tangente á una circunferencia, desde un punto dado fuera de la misma* (fig. 36).

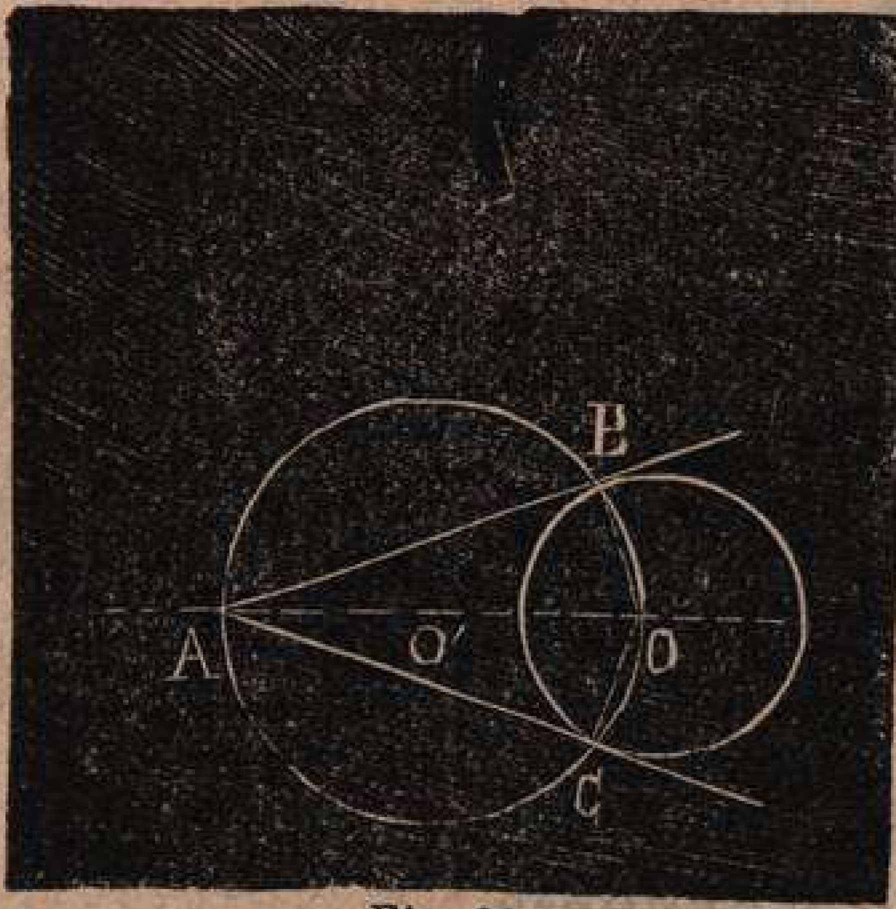


Fig. 36.

Para trazar una tangente á la circunferencia O desde el punto dado A, fuera de la misma, se unirá el punto dado A con el centro O de la circunferencia dada y sobre dicha recta AO, desde su punto medio O' trazaremos la circunferencia O', la cual será secante con la ya dada, cortándola por tanto, en los dos puntos B y C, trazaremos las rectas AB y AC y esas serán precisamente las dos rectas tangentes á la circunferencia O, que pasan por el punto dado A.

En efecto, trazando los rádios OB y OC, observaremos que estos son perpendiculares respectivamente á las dos tangentes AB y AC que resuelven el problema, segun lo espresado anteriormente. (57).

3.° *Describir una circunferencia* O *tangente á las tres rectas* AB, BC *y* CD, (fig. 37) *que forman entre sí ángulos cualesquiera.*

Para esto trácense las bisectrices BO y CO de los ángulos B y C, las cuales se encontrarán en el punto O, siendo este el centro de la circunferencia, y con el rádio perpendicular á una de ellas OE trazaremos la circunferencia pedida, segun lo demostrado (31).

Se comprende como evidente, que cualquier circunferencia trazada haciendo centro en un punto de la recta BO, con un rádio igual á la distancia perpendicular comprendida entre dicho punto y cualquiera de los dos lados, será tangente á las rectas AB y BC. Igualmente haciendo centro en cualquier punto de la recta CO, con una distancia igual á la perpendicular á una de las mismas, trazaremos circunferencias tangentes á las rectas BC y DC. Luego BO es el lugar geométrico de todas las circunferencias tangentes á las rectas AB y BC; así mismo, CO es el lugar geométrico de todas las circunferencias tangentes á las rectas BC y CD.

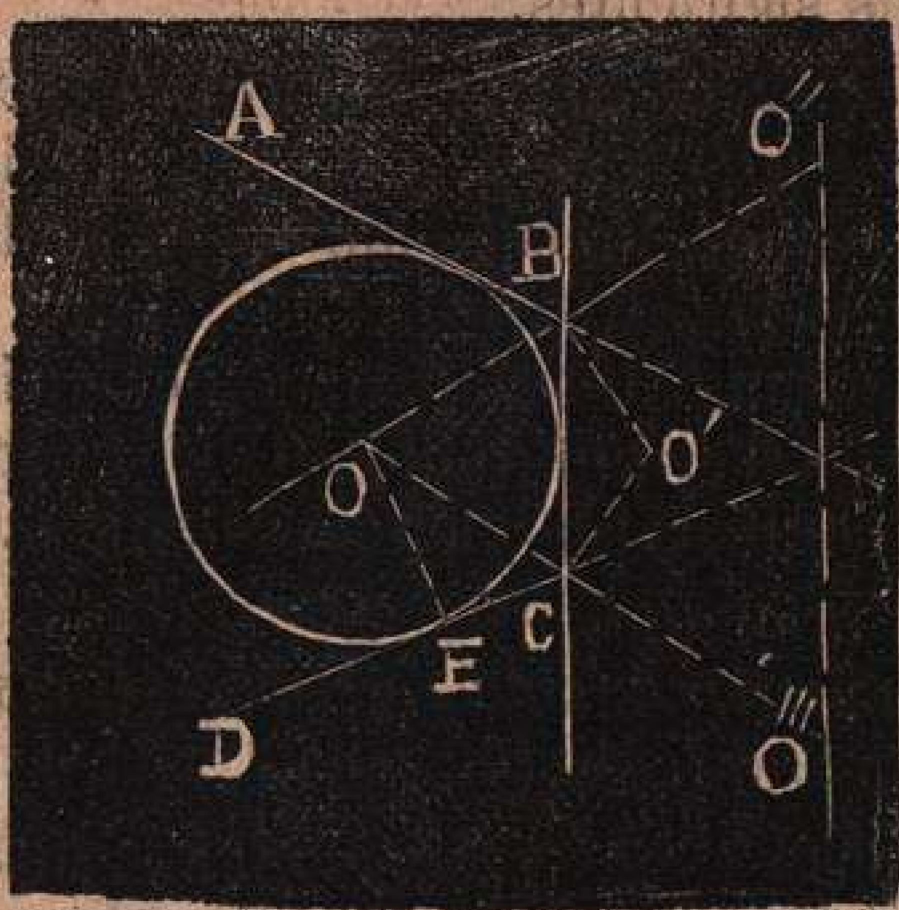


Fig. 37.

Escolio. Si suponemos prolongadas indefinidamente las rectas AB, BC y CD, se podrian trazar otras tres circunferencias tangentes á las tres mismas rectas, cuyos centros serán respectivamente O', O'' y O'''.

Rectas perpendiculares, oblícuas y paralelas en la circunferencia.

59. Propiedades del Diámetro.

1.° *Todo diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.*

2.° *El diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

3.° *Todo diámetro perpendicular á una ó varias cuerdas, las divide en dos partes iguales, lo mismo que á los dos arcos que subtiende.*

1.° *Todo diámetro trazado en una circunferencia, divide á esta en dos partes iguales.*

En efecto, doblando la superficie sobre la cual esté trazada la circunferencia por referido diámetro, observaremos como coinciden sus dos mitades respectivas, lo cual se desprende como evidente que así debe verificarse de la propia definicion dada de la circunferencia.

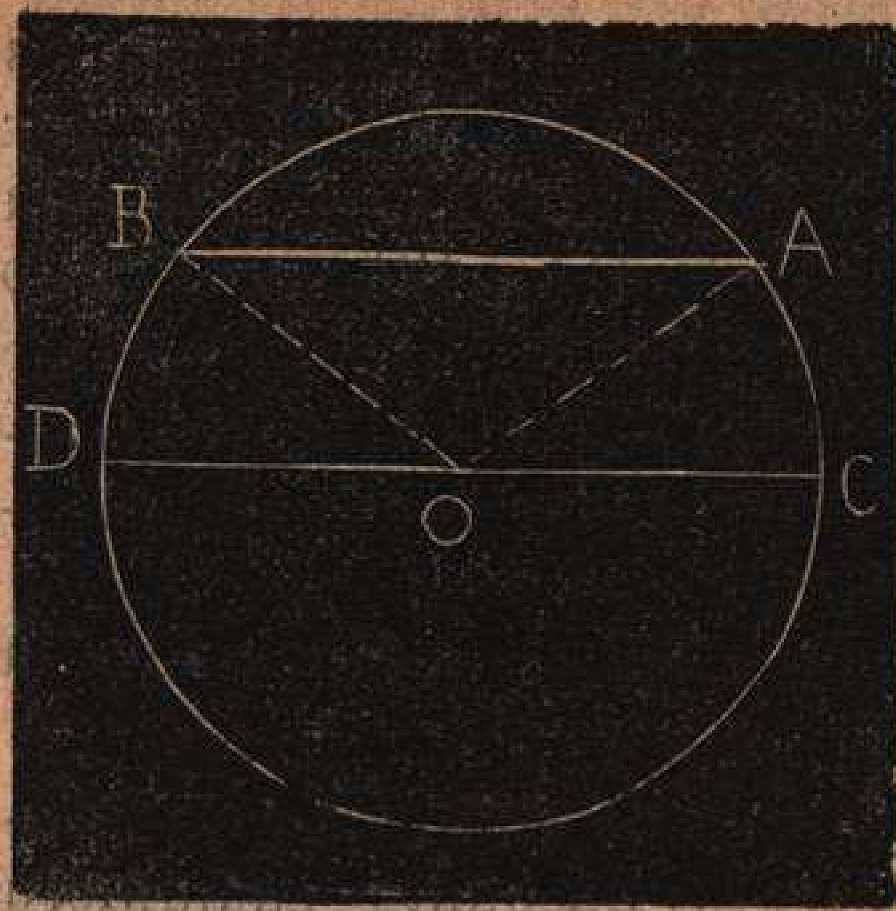


Fig. 38.

2.° Para demostrar (figura 38) que *el diámetro* DC *es mayor que cualquier cuerda*, por ejemplo, que AB, trazaremos los dos rádios AO y BO, observándose que

$$AB < AO + BO,$$

pero AO es un rádio y BO es otro rádio, luego $AB < 2$ rádios; pero DC diámetro, igual á la suma de dos rádios.

Luego por tanto, $AB < DC$ ó bien *diámetro>cuerda.*

3.° Para demostrar (fig. 39) que el diámetro PE siendo perpendicular á las cuerdas AB y DC, las divide en partes iguales, lo mismo que á los arcos que subtienden, se trazan los rádios OA y OB, los cuales por ser iguales serán oblícuas equidistantes del pié de la perpendicular lo mismo como EA y EB.

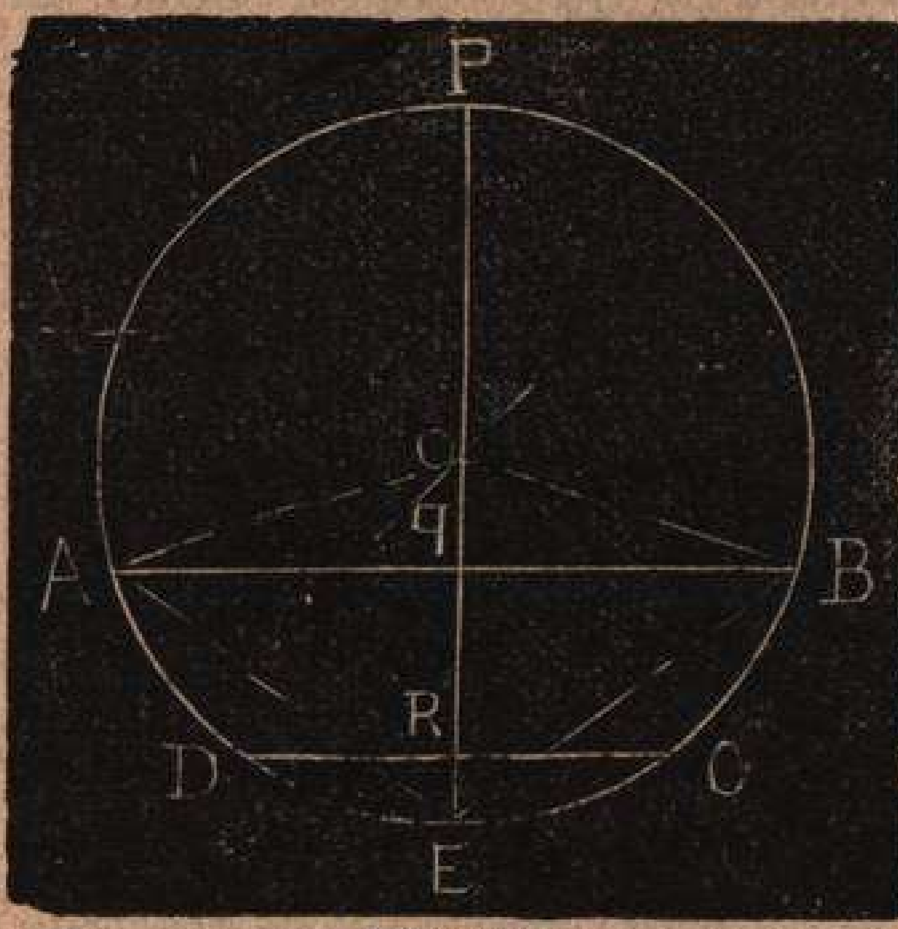


Fig. 39.

Y por tanto, AQ=QB, y de ser tambien OD=OC será tambien DR=RC. Además doblando la figura por el diámetro PE, coincidirán QB con QA; el arco EB con EA: el segmento RC de la cuerda DC, con el DR, y por tanto el arco EC con el ED.

Recíprocamente podremos decir: *La recta perpendicular á una cuerda en su punto medio, pasa por el centro siendo el segmento interior de la misma un diámetro, los estremos de este señalan en la circunferencia los dos puntos medios de los dos arcos subtendidos por dicha cuerda.*

Corolario. El lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas entre sí, lo constituye el diámetro perpendicular á todas ellas.

60. Teorema: *Arcos de una misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, son iguales.*

Vamos á demostrar (fig. 39) que son iguales los arcos AD y BC comprendidos entre las cuerdas paralelas AB y

DC. En efecto, hemos visto trazando el diámetro PE que los arcos AE y BE son iguales, siéndolo tambien los DE y CE: si restamos miembro á miembro estas igualdades resultará que AE—DE=BE—CE, y por tanto DA=BC, que es lo que nos habiamos propuesto demostrar.

De la misma manera se demostrará este teorema, siendo las rectas paralelas dos cuerdas, una cuerda y una tangente ó dos tangentes.

El conocimiento del teorema precedente nos conduce á la fácil resolucion del problema siguiente:

Trazar por un punto dado fuera de una recta una paralela. Para esto se hace centro en un punto cualquiera comprendido, próximamente, entre la recta y el punto dado hácia un lado, y mas cercano de la recta que del punto dado; y con un rádio igual á la distancia que media entre el centro y el punto dado, se traza una circunferencia, se toma la distancia comprendida entre el punto dado y la recta, y con dicha distancia á partir de la segunda interseccion de la recta y la circunferencia se marca en esta un punto uniéndole con el dado por una recta, que será la paralela pedida.

61. Teorema: En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales se verifica que *á iguales cuerdas corresponden iguales arcos y recíprocamente.*

En efecto, porque siendo iguales los arcos en una misma circunferencia, doblando esta de manera que coincidan aquellos, sus estremos tambien coincidirán, lo mismo como las rectas que los separan, que serán las cuerdas.

Recíprocamente haremos ver como *siendo iguales las cuerdas lo serán tambien los arcos* correspondientes, bien sea en una misma circunferencia ó en circunferencias iguales.

Si los arcos fuesen iguales pero pertenecientes á circunferencias diferentes, aunque de una misma magnitud, hariamos que coincidiesen sus centros, despues los arcos y por tanto sus estremos, y las distancias comprendidas entre estos, que serán las cuerdas, resultarian iguales. Recíprocamente, siendo iguales las cuerdas lo serán sus arcos, toda vez que superpuestos coinciden.

62. Teorema: *En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales se verifica que á mayor arco le corresponde mayor cuerda.*

Vamos á demostrar (fig. 40) que siendo el arco CBA mayor que el arco CB, tambien la cuerda CQA es mayor que la cuerda CB.

En efecto, aniendo el centro O con los estremos A, B, tendremos que:

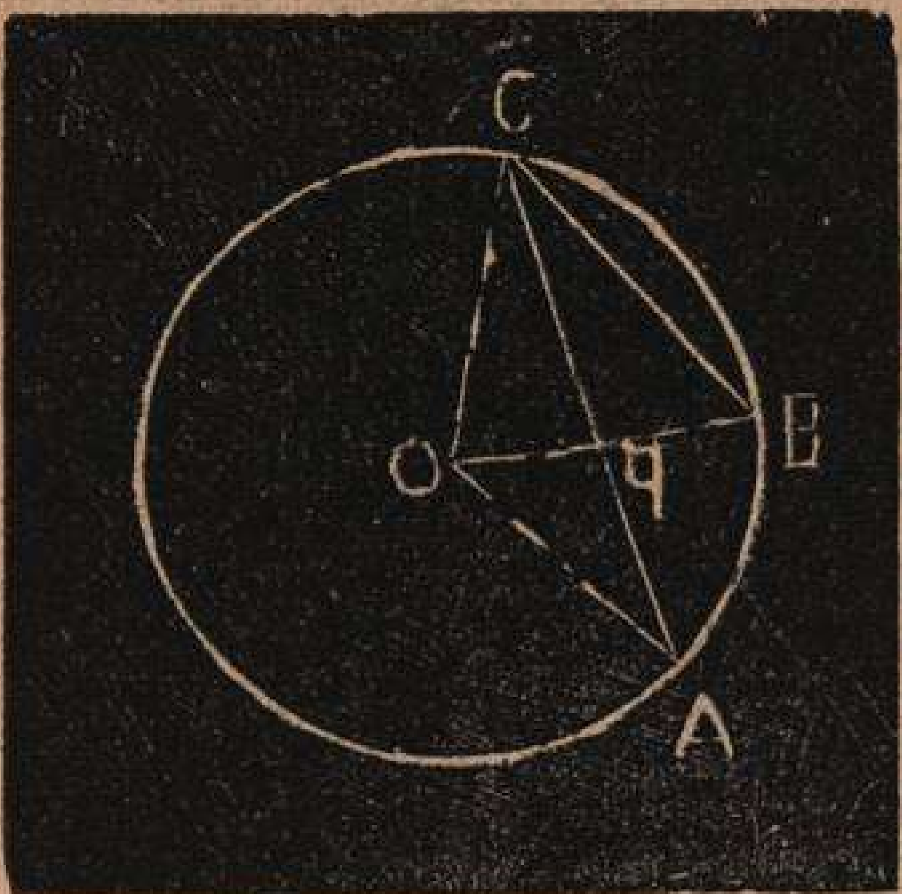


Fig. 40.

$$CB < CQ + QB,$$

teniéndose tambien que

$$OA < AQ + QO;$$

sumando miembro á miembro estas desigualdades, y advirtiéndose que $OQ + QB$ igual á OB, igual á un rádio, tendremos que:

$$CB + R < CA + R,$$

y restándose de ambos miembros R, resultará que:

$$CB < CA,$$

que es precisamente lo que queriamos demostrar.

Recíprocamente diremos que:

A mayor cuerda corresponde mayor arco en una misma circunferencia ó en circunferencias iguales.

Escolio. Es preciso tener en cuenta que la ley que se establece en la proposicion precedente es exacta aun cuando no haya proporcionalidad, pero solo entre arcos menores que una semicircunferencia, verificándose lo contrario cuando la magnitud del arco escede á una semicircunferencia; y por tanto, que á mayor arco corresponde menor cuerda; *inversamente*, que á menor arco, mayor cuerda: Recíprocamente, que á menor cuerda, mayor arco y á mayor cuerda, menor arco.

63. Teorema: *En una misma circunferencia ó en circunferencias iguales se verifica que:*

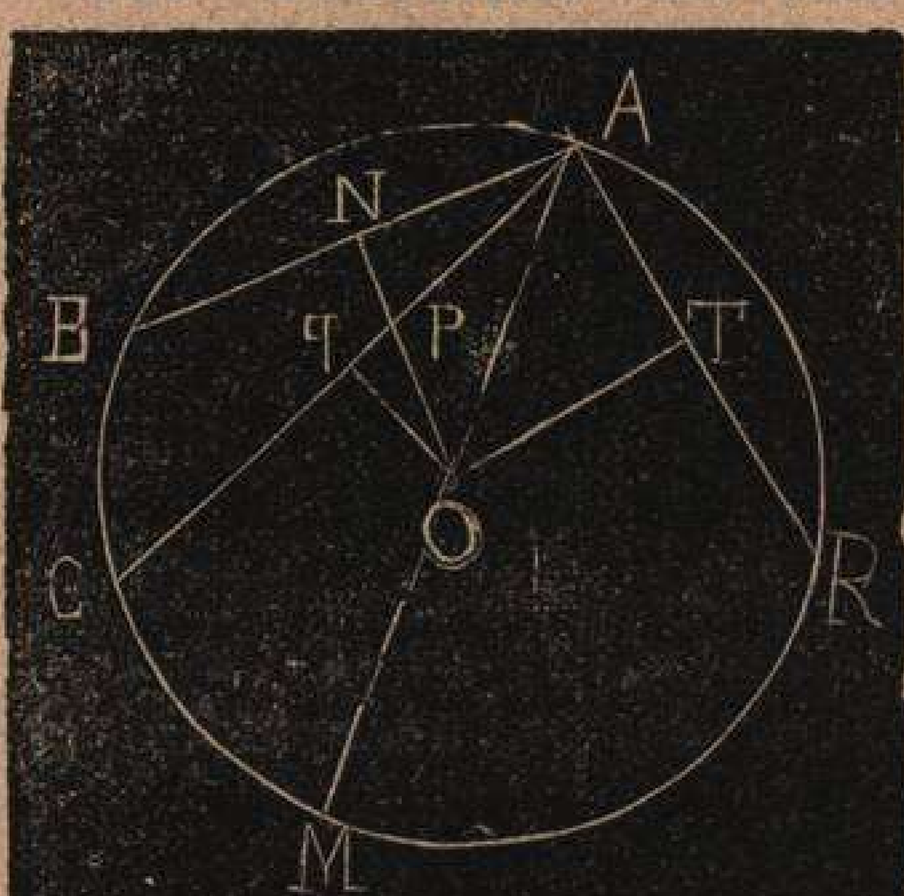


Fig. 41.

1.° *Cuerdas iguales equidistan del centro.*

2.° *La cuerda mayor dista del centro menos que la menor.*

1.° Vamos á demostrar (fig. 41) qne siendo iguales las dos cuerdas AB y AR, las distancias ON y OT son iguales. En efecto, sabiendo ya que la menor distancia entre el centro O y las dos cuerdas AB y AR son sus perpendiculares respectivas ON y OT, tendremos que doblando la figura por el diámetro intermedio AM, al superponerse la cuerda AR sobre la AB coincidirán; y por tanto, los puntos medios N y T coincidirán tambien, verificándose la exacta coincidencia de OT y ON, las cuales por esta razon serán tambien iguales.

2.° Vamos á demostrar ahora que si la cuerda CA es mayor que la BA, la distancia perpendicular OQ es menor que la perpendicular ON, ó sea la menor distancia del centro á la cuerda AB.

En efecto, trazando dichas rectas OQ y ON, tendremos que esta cortará en el punto P á la recta AC, verificándose (1.ª Tésis del Teorema 28) que $OQ<OP$, si añadimos PN al segundo miembro, ya mayor, de la desigualdad anterior, con mas motivo resultará que $OQ<OP+PN$, es decir, que $OQ<ON$, que es lo que queriamos demostrar.

Recíprocamente podremos decír y demostrar que

Las cuerdas trazadas en una circanferencia equidistantes del centro, son iguales.

La cuerda trazada mas próxima al centro de una circunferencia, es la mayor.

La longitud de una cuerda se halla comprendida entre el punto de tangencia, límite inferior, y el diámetro límite superior.

La distancia entre el centro de una circunferencia y una cuerda trazada en la misma, se halla comprendida entre el rádio, límite superior, que es la distancia que corresponde á la cuerda menor, y cero, límite inferior, que es la distancia que existe desde el centro al diámetro, que como sabemos pasa por el mismo.

Del Teorema precedente podremos fácilmente deducir:

1.° *Toda recta perpendicular al rádio en su estremo esterior, es tangente de la circunferencia en referido punto.*

2.° *Toda tangente á una circunferencia, es necesariamente perpendicular al rádio trazado al punto de contacto.*

3.° *Por un punto de una circunferencia no se puede trazar á la misma mas que una sola recta tangente.*

4.° *Toda recta tangente á una circunferencia es paralela á las cuerdas que el diámetro terminado en el punto de tangencia divide en dos partes iguales, toda vez que la tangente como las cuerdas son perpendiculares á dicho diámetro.*

5.ª *La cuerda menor que se puede trazar por un punto cualquiera dado, dentro del plano que limita la circunferencia, es la perpendicular trazada al diámetro que pasa por dicho punto, siendo como sabemos, la mayor, el diámetro.*

Medida de los ángulos.

64. *La medida de los ángulos se determina siempre teniendo en cuenta la magnitud del arco comprendido entre sus lados.*

Por regla general diremos: el arco correspondiente á un ángulo dado, es el comprendido entre sus lados y trazado en él, haciendo centro en el vértice del mismo.

Para reconocer numéricamente la magnitud de un arco, se ha verificado la division sesagesimal y centesimal de la circunferencia: segun la primera division mas general y frecuente, la circunferencia se divide en 360 grados, el grado en 60 minutos, el minuto en 60 segundos, el segundo en 60 terceros, etc., es decir, una circunferencia es igual á

$$360^\circ = 21600' = 1296000'' \text{ etc.}$$

representándose respectivamente los grados por un cerito, los minutos por un acento, los segundos por dos, etc.

Para las reduciones que se pueden verificar entre las unidades de estos órdenes diferentes, análogamente á lo que sucede entre los demás números denominados ó complejos, se aplican las tablas de reduccion de números sesagesimales, las cuales se hallan al final de la tabla de Logaritmos, aunque por su estrema sencillez puede prescindirse de las mismas.

Segun esta division, á la semicircunferencia ó á dos ángulos rectos corresponden 180°; y á un arco cuadrante correspondiente á un ángulo recto corresponden 90°.

La division centesimal divide la circunferencia en 400 grados, correspondiendo por tanto, al ángulo recto 100°. Esta, como hemos dicho, no es la division generalmente empleada.

El ángulo recto entre los ángulos y *el cuadrante* entre los arcos, es de todas las unidades ó términos de comparacion la principal y generalmente adoptada.

Llamamos en general medida de un ángulo, *al número de veces que este contiene á la unidad de su misma es-*

pecie, ó de otro modo á la razon de dicho ángulo con otro que se toma por unidad.

Esta determinacion se funda en el siguiente:

65. Teorema: *La magnitud de los ángulos son siempre proporcionales á los arcos correspondientes, y por tanto, todo ángulo tiene la misma medida que su arco correspondiente.*

Vamos á demostrar (fig. 42) que siendo el ángulo *BAC* mayor que el *bac*, sus magnitudes respectivas están determinadas por las de los arcos BC y *bc* comprendidos entre sus lados y trazados ambos con el mismo rádio, haciendo centro en sus vértices respectivos.

En efecto, si elegimos como término de comparacion, es decir, como unidad, el ángulo R y hacemos centro en el vértice del mismo con un rádio cualquiera trazando su arco correspondiente, y con el mismo rádio trazamos los que corresponden á los dos ángulos dados, y despues determinamos en cada uno de estos las veces que contienen al arco unidad, estableceremos las igualdades siguientes:

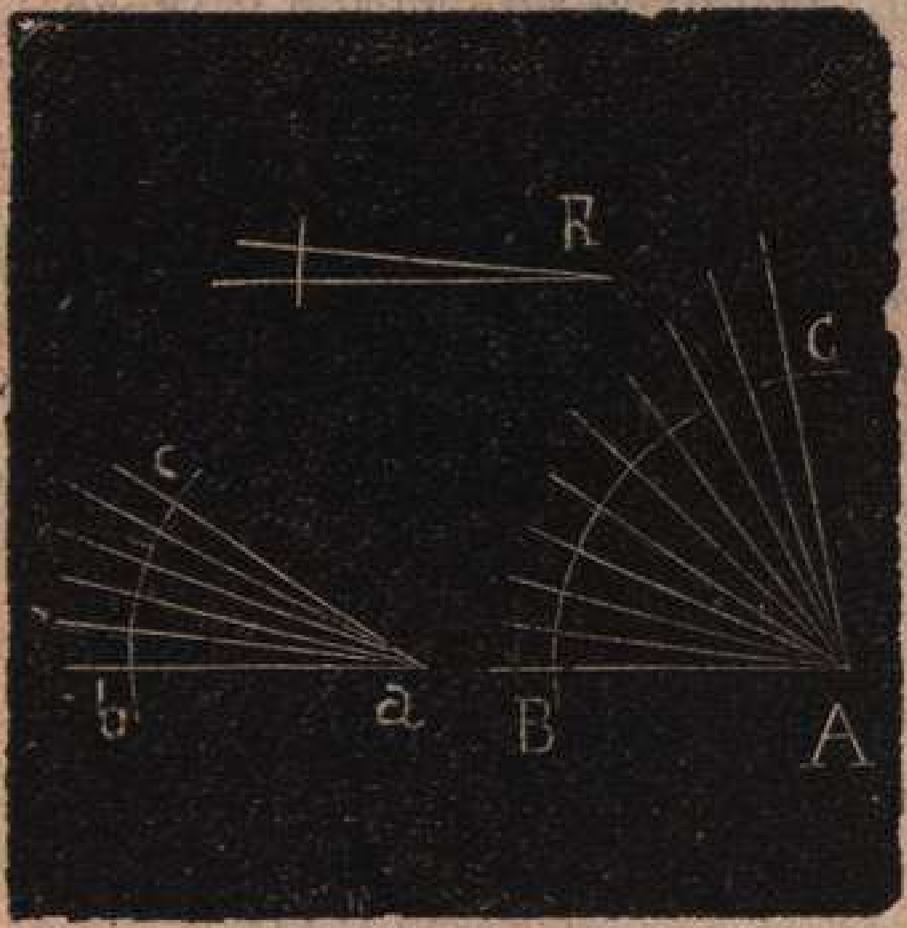


Fig. 42.

$$\frac{BAC}{bac}=\frac{9}{5}$$

mas como tambien tenemos que $\frac{BC}{bc}=\frac{9}{5}$ y estas dos igualdades tienen un miembro comun, resultará que $\frac{BAC}{bac}=\frac{BC}{bc}$, que es precisamente lo que queriamos demostrar.

Si ambos arcos no fuesen conmensurables con la unidad elegida, tomariamos otra menor, tanto, como fuera necesaria para poder despreciar todo resto menor que ella. De esta manera podriamos hallar la máxima medida comun de dos arcos ó de dos ángulos dados; y tambien la razon numérica de sus magnitudes respectivas.

Observacion. Convenia que en este punto, si no hubiese sido atendido al principio, se ensayasen los alumnos en el manejo del trasportador ó semicírculo graduado, determinando la medida de algunos ángulos y aun graduando por sí mismos alguno de estos instrumentos.

De lo espuesto anteriormente se deduce que:

1.° *Si dos ángulos son iguales, lo serán sus arcos correspondientes y reciprocamente.*

2.° *A mayor ángulo corresponderá mayor arco y recíprocamente.*

3.° *Si un ángulo es igual á la suma ó diferencia de otros dos, el arco correspondiente al primero será igual á la suma ó diferencia de los arcos correspondientes á los otros dos.*

Cuando los ángulos tienen su vértice en el centro de la circunferencia, se llaman *centrales.*

Así decimos, *la medida de un ángulo central es la del arco comprendido entre sus lados.*

Cuando los ángulos no tienen su vértice en el centro de la circunferencia, se llaman *ángulos excéntricos*; la medida de estos es variable y dependiente siempre de la posicion del vértice con respecto al centro de la circunferencia con quien está en relacion, si su valor ha de ser determinado en partes alícuotas de aquella.

Estudiemos los ángulos mas importantes. El primero que se ofrece á nuestra consideracion es el **Inscripto.**

Llámase ángulo inscripto *aquel que teniendo su vértice en un punto de la circunferencia, son sus lados dos cuerdas, ó una cuerda y un diámetro, ó una tangente y un diámetro, ó una tangente y una cuerda.*

66. Teorema: *Todo ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Hay que distinguir todos los casos anteriormente espuestos.

Vamos á demostrar (fig. 43) que la medida del ángulo inscripto ABC formado en el punto B de la circunferencia por el diámetro AB y por la cuerda BC, es la mitad del arco AC comprendido entre sus lados.

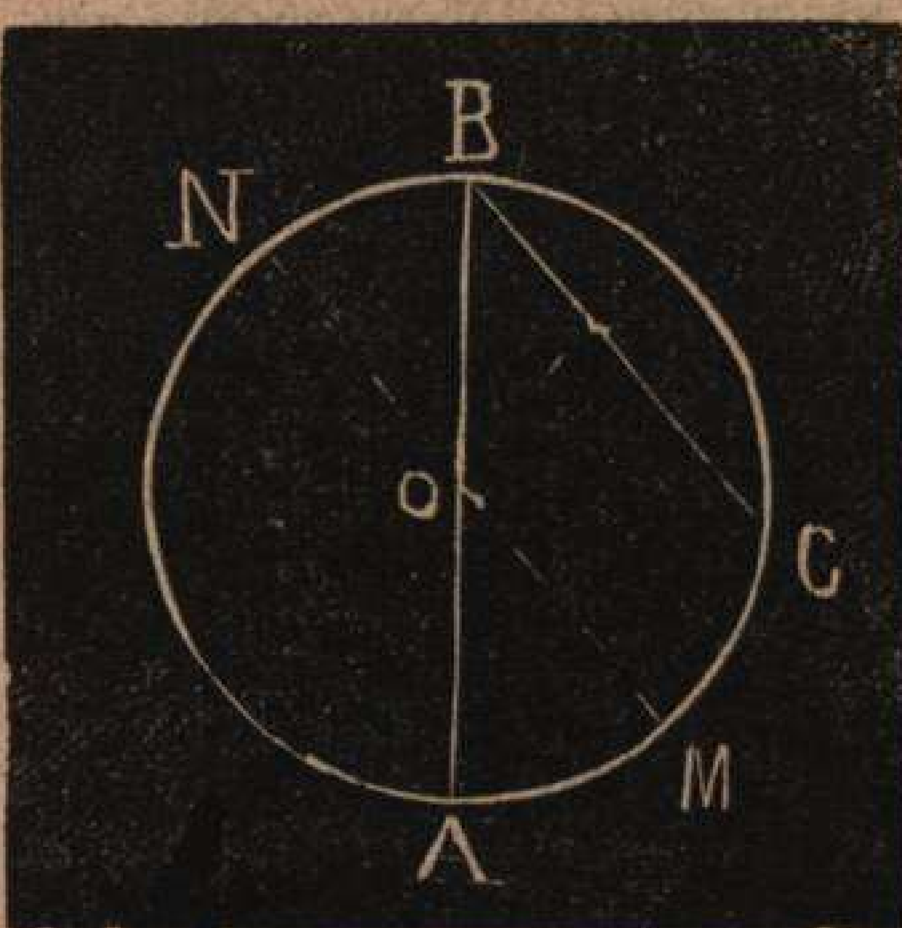


Fig. 43.

En efecto, trazando por el centro O el diámetro NM paralelo á la cuerda BC, tendremos que el ángulo inscripto dado ABC será igual al AOM por *correspondientes*, y al BON por *alternos internos* entre paralelas (40) pero los ángulos AOM y BON son centrales y tienen, segun lo espuesto (65) por medida, todo el arco comprendido entre sus lados, es decir los arcos correspondientes AM y BN que por corresponder á ángulos iguales de una misma circunfeferencia serán tambien iguales; por otro lado tenemos que los arcos NB y CM son iguales por ser de una misma circunferencia y hallarse comprendidos entre cuerdas paralelas (69), luego por tanto, el arco AM=MC=$^1/_2$AC y como ABC=AOM=AM=$^1/_2$AC, tendremos por tanto, que el ángulo inscripto ABC=$^1/_2$AC.

67. El *ángulo inscripto* pudiera estar formado segun hemos espresado (1.ª fig. 44) por las dos cuerdas AO y BO; dejando el centro fuera; este se podria reducir al anterior diciendo: ángulo inscripto AOB=AON—NOB, es decir, AOB=$^1/_2$AB.

Si el ángulo inscripto (2.ª fig. 44) estuviese formado por las dos cuerdas NO y OA, trazariamos el diámetro OB, para reducirlo al anteriormente demostrado, y diriamos ángulo inscripto AON=AOB+BON, y como AOB=$^1/_2$AB y BON=$^1/_2$BN será AON=$^1/_2$ arco ABN.

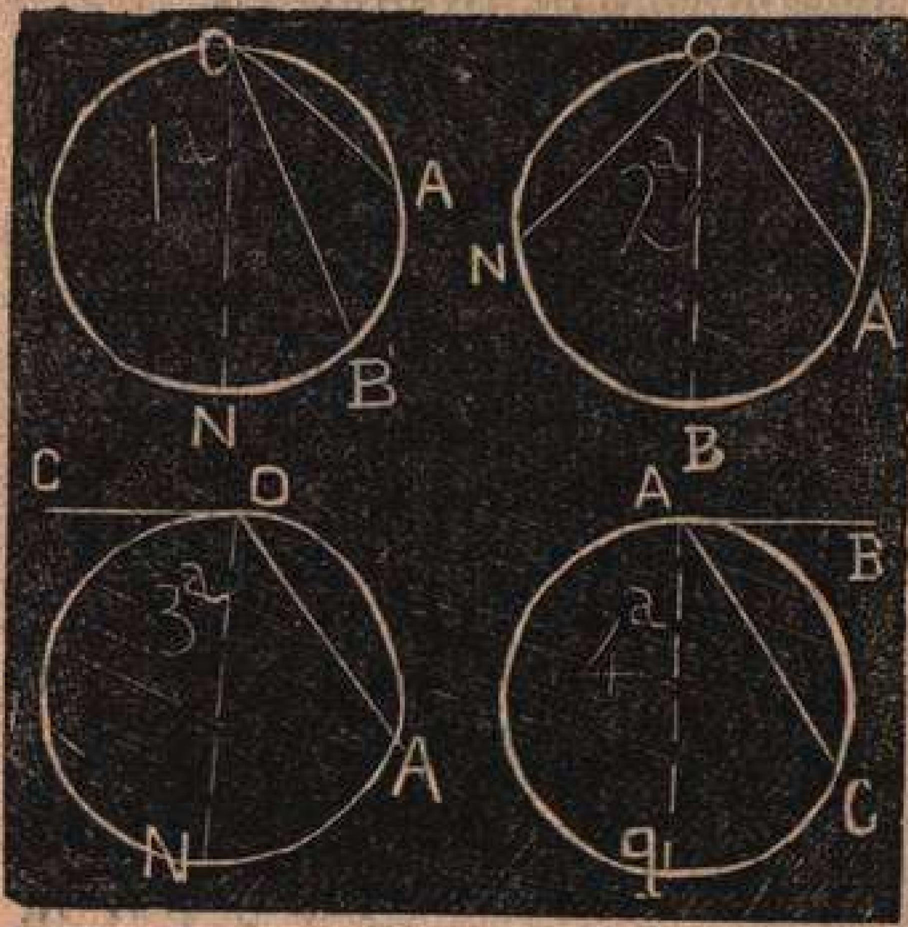


Fig. 44.

Si el ángulo inscripto fuese el CON (3.ª fig. 44) formado por la tangente CO y por el diámetro ON, seria recto, conforme hemos dicho (58). Y en efecto, así sucede y ese es su valor deducido tambien de esta teoria, puesto que el arco comprendido entre los dos lados del ángulo recto inscripto CON es media circunferencia ó sean 180° y su valor la mitad ó sean 90°.

Si el ángulo inscripto estuviese formado por la tangente CO y la cuerda OA (3.ª figura 44) quedando el centro comprendido entre sus lados, trazariamos el diámetro ON, diciendo luego: ángulo COA=CON+NOA y como CON=$^1/_2$ arco ON y NOA=$^1/_2$ arco NA, será: ángulo COA=$^1/_2$ arco CNA.

Por último, si el ángulo inscripto estuviese formado por la tangente BA y la cuerda AC, (4.ª fig. 44) trazariamos el diámetro AQ diciendo luego: ángulo inscripto

BAC=BAQ—QAC,

y siendo BAQ=$^1/_2$ arco ACQ y QAC=$^1/_2$ arco QC, tendremos que BAC=$^1/_2$ arco AC.

68. De todo lo anteriormente espuesto deduciremos los corolarios siguientes:

1.° *Todos los ángulos inscriptos en una misma circunferencia que abracen el mismo arco, serán iguales, por que todos tendrán de medida la mitad del mismo arco.*

2.° *Todos los ángulos inscriptos en una misma circunferencia cuyas cuerdas terminen en las estremidades de un diámetro, son rectos.* En efecto, porque todos ellos abrazan una semicircunferencia, y por tanto, valdrán todos un cuadrante.

Fundado en este corolario, resolvemos el *problema* siguiente: *Trazar una perpendicular en el estremo A de la recta AB que no se puede prolongar* (fig. 45).

Para esto, haciendo centro en un punto cualquiera O con el rádio OA, trazaremos la circunferencia O, y trazando luego el diámetro BON, uniremos el punto N con el A y la recta CNA, será perpendicular á la AB.

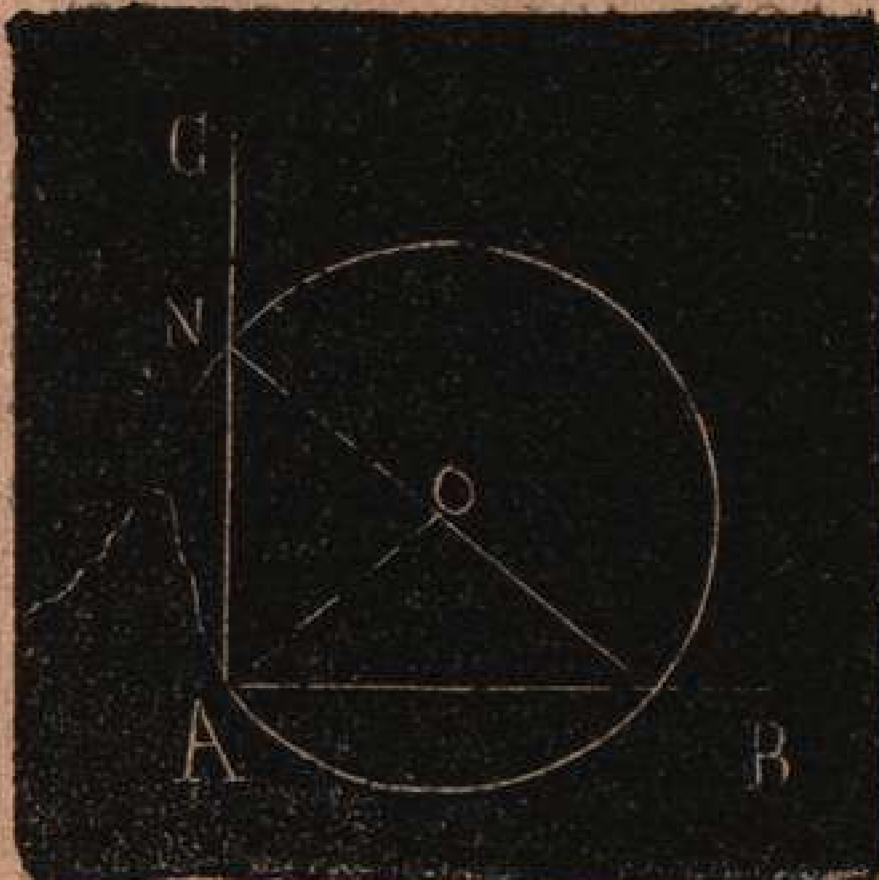


Fig. 45.

En efecto, el ángulo inscripto NAB abrazará una semi-circunferencia, y teniendo por medida la mitad de esta, será un cuadrante ó ángulo recto, el cual solo puede estar formado por líneas perpendiculares.

3.° *Un ángulo inscripto será agudo, recto ú obluso según que el arco comprendido entre sus lados sea menor, igual ó mayor que una semi-circunferencia.*

4.° *Si una circunferencia se divide por una cuerda en dos segmentos, y en la misma se trazan dos ángulos inscriptos uno en cada segmento y tales que sus lados terminen en los estremos de dicha cuerda, dichos dos ángulos serán suplementarios.*

En efecto, entre los dos abrazan toda la circunferencia, y pues valen la mitad de lo que abrazan y esto es una semicircunferencia ó dos ángulos rectos, juntos valdrán 180°, es decir, que serán suplementarios.

5.° *Todo ángulo formado en un punto de la circunferencia y cuyos lados son una cuerda y la prolongación de*

8

otra cuerda, se llama de segmento, *y tiene por medida la semisuma de los arcos subtendidos por dichas cuerdas.*

69. Vamos á demostrar (fig. 46) que *el ángulo de segmento* AOB, formado en el punto O de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco AO mas la mitad del arco OC.

En efecto, los dos ángulos AOC y AOB son adyacentes, valen juntos dos rectos, ámbos son inscriptos, y como tales y para que se pueda por la medida de estos determinar su valor, deben de abrazar toda la circunferencia.

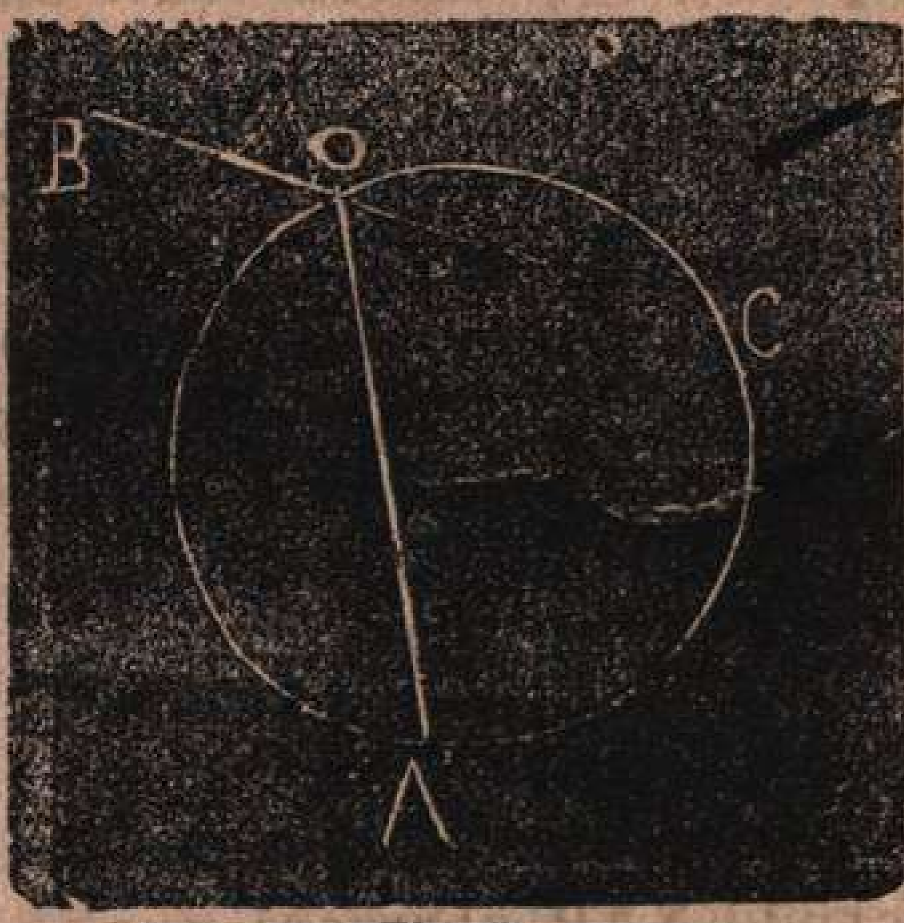


Fig. 46.

El ángulo inscripto AOC$=\frac{1}{2}$ arco AC, luego su suplemento AOB$=\frac{1}{2}$ (circunferencia menos arco AC) por tanto, ángulo de segmento AOB$=\frac{1}{2}$(arcos AO$+$OC).

La demostracion precedente nos facilita la resolucion del problema siguiente:

Sobre una recta dada en una circunferencia, construir un segmento capáz de un ángulo dado.

Para esto, en uno de los estremos de la cuerda dada en la circunferencia, construiremos un ángulo igual al dado, por dicho punto se levanta una perpendicular al segundo lado del ángulo, y en el punto medio de la cuerda se levanta otra perpendicular á la misma, la cual cortará á la anterior, y haciendo centro en este punto con un rádio igual á la distancia comprendida entre dicho punto y el estremo de la cuerda donde se formó el ángulo igual al dado, trazaremos una circunferencia y el segmento esterno de la misma será el pedido; todos los ángulos inscriptos trazados en el mismo, tendrán la misma medida que la del ángulo dado.

70. **Teorema:** *El ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia pero dentro del círculo que esta limita, se llama ex-central, tiene por medida la semi-suma de los dos arcos comprendidos por sus dos lados prolongados.*

Vamos á demostrar (fig. 47) que el ángulo ex-central AOB tiene por medida la mitad del arco AB, mas la mitad del arco MQ.

En efecto, prolongando el lado AO hasta que encuentre á la circunferencia en M, y trazando por este punto la cuerda paralela MN al segundo lado OB del ángulo AOB, tendremos que el ángulo AOB=AMN por correspondientes entre paralelas; pero el ángulo AMN como inscripto, y segun lo anteriormente demostrado, tiene por medida la mitad del arco ABN, es decir, la mitad del AB, mas la mitad del BN. El arco BN es, conforme sabemos, (60) igual al MQ, y por tanto,

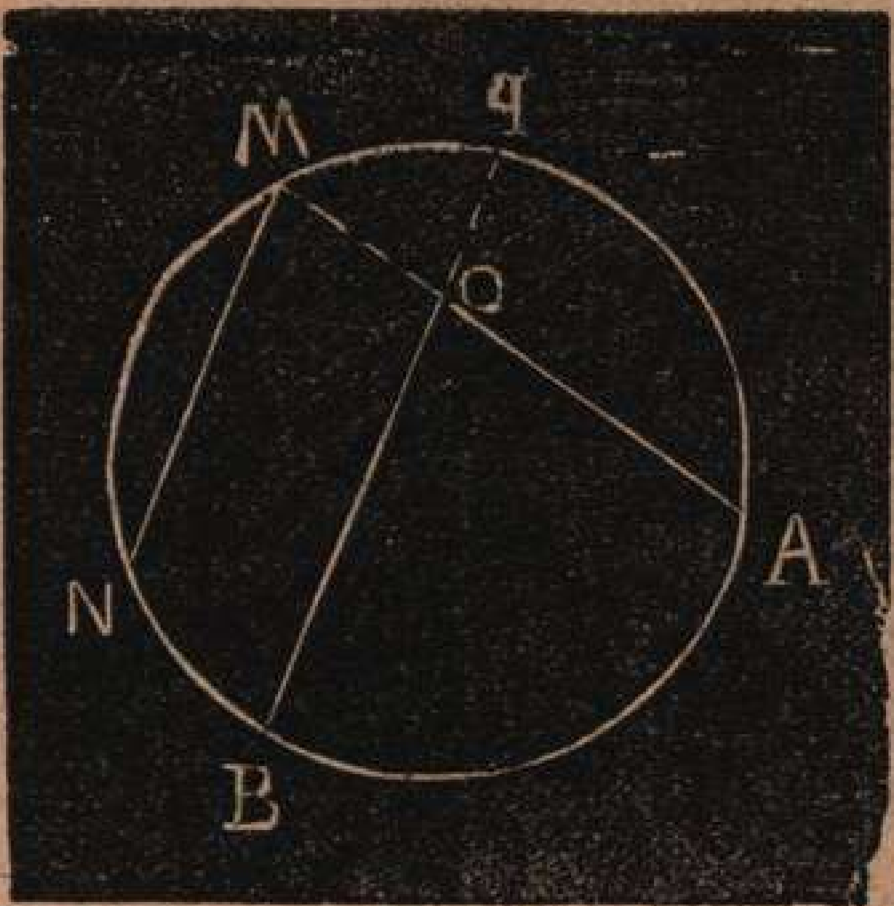


Fig. 47.

siendo AOB=AMN=$^1/_2$ arco ABN=$^1/_2$ arco (AB+BN) =$^1/_2$ arco (AB+MQ), será por último: ángulo

AOB=$^1/_2$ arco (AB+MQ).

Observacion.—El Teorema anterior comprende, como caso particular, el del ángulo central, y en efecto, aun para este cabe la misma demostracion, puesto que prolongando sus dos lados formaremos otro igual al dado, por opuesto por el vértice; al que corresponderá tambien un arco igual cuya medida será la del propuesto, y por tanto, la de este será equivalente precisamente á la semi-suma de entrambos.

71. Teorema: *El ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y del plano que esta limita y cuyos lados son dos secantes, ó dos tangentes, ó una secante y una tangente, se llama* esterior, *y tiene por medida la semi-diferencia de los dos arcos comprendidos entre sus lados.*

El ángulo esterior formado por dos secantes se llama *circunscripto.*

Vamos á demostrar (fig. 48) que el ángulo esterior AOB tiene por medida la mitad del arco mayor AB, menos la mitad del arco menor EN. En efecto, para esto trácese por uno de los puntos N ó E la cuerda EC paralela al otro lado, y tendremos formado el ángulo BEC igual al BOA por correspondientes entre paralelas; pero tambien tenemos que el arco BC= arco BCA—AC, por tanto, $^1/_2$ arco BC=$^1/_2$ arco (BCA—AC).

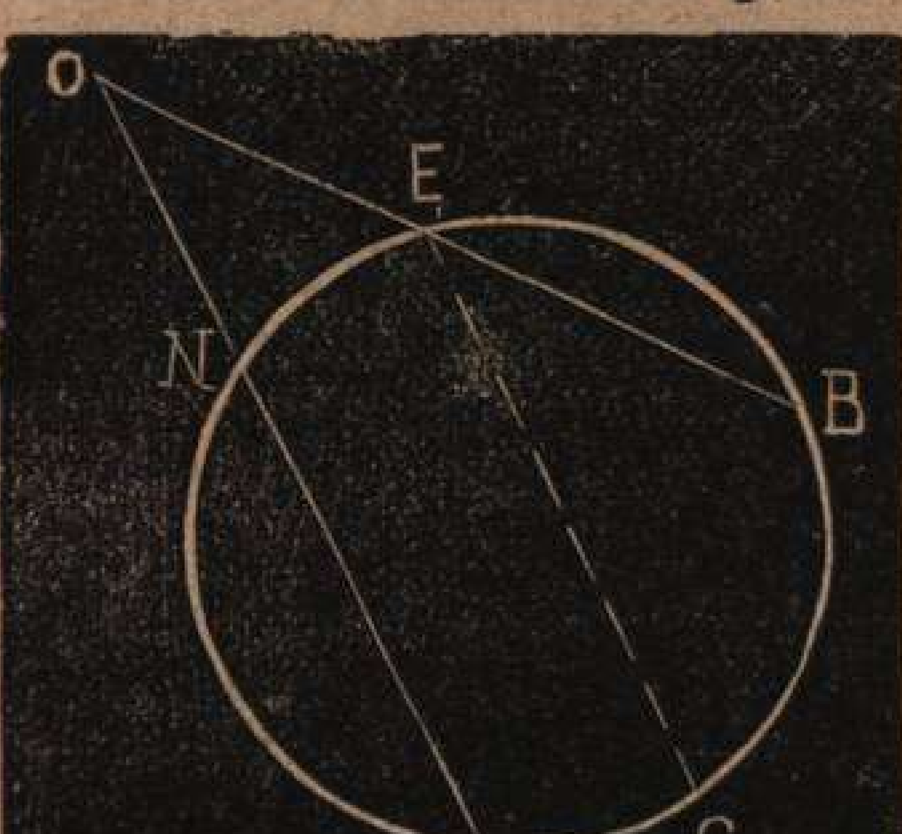


Fig. 48.

Por otro lado sabemos que arco AC=arco NE (60).

Luego por tanto, siendo

$$BOA=BEC=\tfrac{1}{2}\text{ arco } BC=\tfrac{1}{2}\text{ arco }(BCA-NE)$$

$$\text{será ángulo } BOA=\tfrac{1}{2}\text{ arco }(BCA-NE)$$

que es precisamente la demostracion de la tésis anterior.

Conforme hemos indicado, el ángulo esterior hubiera podido estar formado por una secante y una tangente ó por dos tangentes, mas en uno y otro caso se verifica la demostracion análogamente á la anterior ya efectuada.

Observacion. Del segundo corolario de los indicados en el número (68) se desprende que cuando los lados de un ángulo pasan por los estremos de un diámetro, se verifica que:

1.° *Si el vértice del ángulo se halla en un punto de la circunferencia, el valor del ángulo son 90°.*

2.° *Si el vértice del ángulo se halla fuera de la circunferencia, pero dentro del plano del círculo que limita, el ángulo es obtuso y vale mas de 90°.*

3.° *Si el vértice del ángulo se halla fuera de la circunferencia y del plano del círculo que esta limita, el ángulo es agudo y valdrá menos de 90°.*

Recíprocamente. Cuando los lados de un ángulo pasan por los estremos de un diámetro se verifica que:

1.° *Si el ángulo es recto, tiene su vértice en un punto de la circunferencia.*

2.° *Si el ángulo es obtuso, tiene su vértice fuera de la circunferencia pero en un punto del plano que esta limita.*

3.° *Si el ángulo es agudo, tiene su vértice fuera de la circunferencia y en un punto fuera del plano que esta limita.*

72. * Los ángulos centrales, hemos demostrado (65) que tienen por medida la del arco correspondiente, ó comprendido entre sus dos lados y descripto desde el vértice como centro; conviene en este punto que indiquemos, no se crea que su medida es dependiente esclusivamente de su magnitud absoluta, porque en tal concepto resultaria que cuanto mayor sea el rádio, mayor será la longitud del arco, lo cual es inexacto, porque la medida del arco se determina en grados, minutos y segundos, y «la magnitud de los arcos son siempre exactamente proporcionales á los rádios,» y por tanto la longitud del arco correspondiente á un grado y sus divisores es siempre proporcional al rádio con que fué trazado.

Esto se espresa en un Teorema posterior que dice así:

La longitud de dos circunferencias rectificadas son proporcionales á sus rádios: ó á sus diámetros: ó á sus cuerdas semejantes.

En efecto, si suponemos trazadas dos circunferencias con sus rádios respectivos y las llamamos C y c y á sus rádios respectivos R y r, tendremos que

$$C=2.\text{pi}.R;\qquad c=2\text{pi}.r$$

de donde $\dfrac{C}{c}=\dfrac{2.\text{pi}.R}{2.\text{pi}.r}=\dfrac{R}{r}.$

Esta igualdad nos demuestra que las circunferencias son proporcionales á sus rádios.

Si partimos ambos términos del primer quebrado de la igualdad fraccionaria anterior por 360°, tendremos que los cocientes serian un grado respectivamente y que $\frac{G}{g}=\frac{2R}{2r}$ es decir $\frac{G}{g}=\frac{D}{d}=\frac{R}{r}$.

Esta igualdad nos demuestra que los arcos correspondientes á un grado son proporcionales á las longitudes de sus rádios ó diámetros. Para demostrar el tercer estremo, es decir, que las circunferencias son proporcionales á las cuerdas correspondientes á arcos semejantes, lo haremos tambien fácilmente por la proporcionalidad de las lineas.

Rectas proporcionales en la circunferencia.

73. Teorema: *Si dos cuerdas se cortan dentro del plano de un círculo, sus partes son recíprocamente proporcionales.*

Vamos á demostrar (fig. 49) que si las dos cuerdas AB y CE se cortan en el punto O, se ha de verificar que

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OE}$$

En efecto, trazando las dos rectas BC y AE, dichas dos rectas serán antiparalelas (51 y 52) puesto que los ángulos B y E que forman cada una de ellas con cada cuerda son iguales por inscriptos que abrazan el mismo arco; siéndolo tambien el C y A por la misma razon, luego por tanto resultará ya como evidente que $\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OE}$.

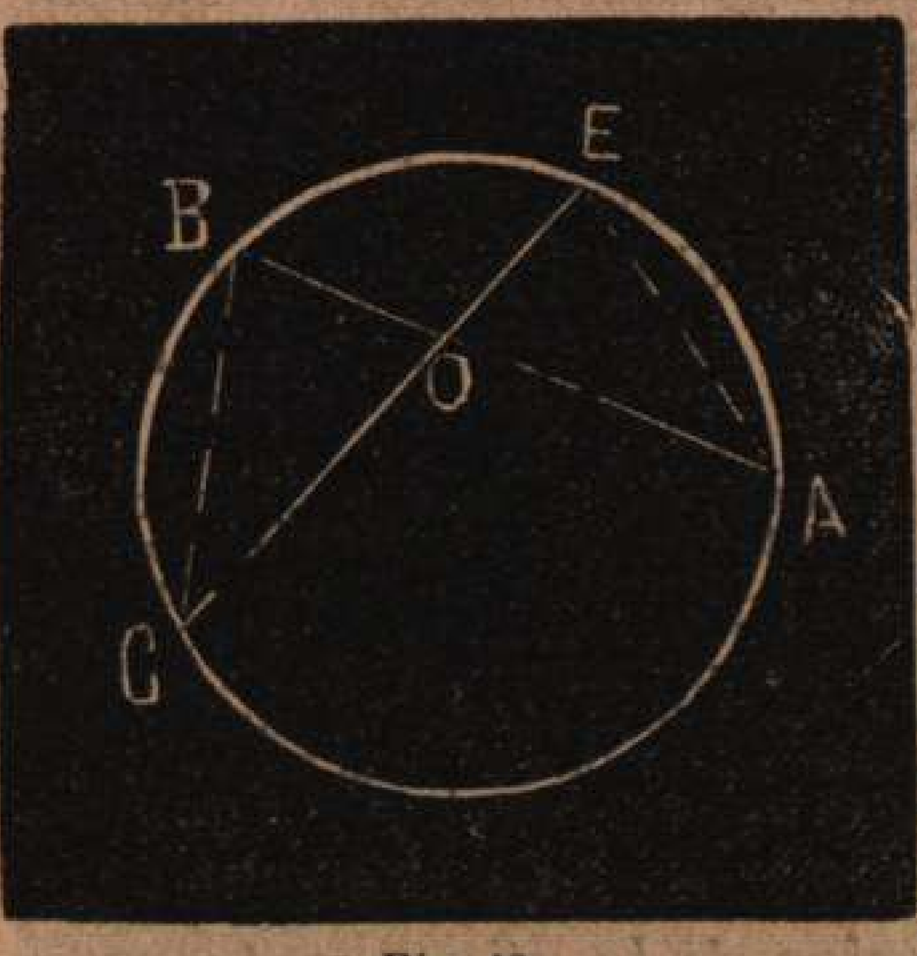


Fig. 49.

Recíprocamente diremos: *Si dos cuerdas se cortan en partes recíprocamente proporcionales por sus cuatro estremos, se puede hacer pasar una circunferencia.*

En efecto, si existe la proporcion $\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OE}$, las rectas CB y AE serán antiparalelas con respecto al ángulo COB, y por tanto, los ángulos B y E serán iguales, así como los C y A, luego trazando sobre la recta AC el segmento capaz del ángulo B, su arco contendrá los puntos B y E además de A y C.

74. Corolario. *Si suponemos en la figura anterior que*

una de las cuerdas sea un diámetro, cuando la otra sea perpendicular á esta, resultará que quedará dividida en dos partes iguales (2.° del Teorema 59) *en cuyo caso el producto de estas ó el cuadrado de la recta perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia sobre el diámetro será media proporcional entre los segmentos diámetro.*

El corolario precedente nos conduce á la resolucion del siguiente

Problema. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas.*

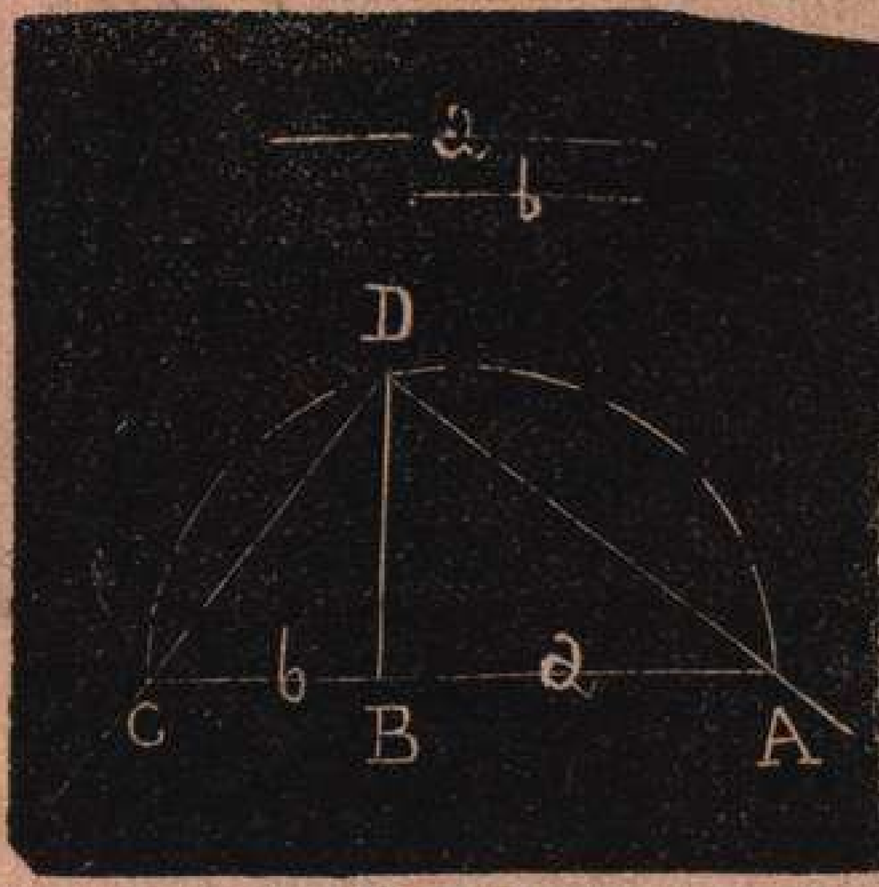


Fig. 50.

Sean las rectas dadas *a* y *b* (fig. 50).

Para hallar una media proporcional entre las mismas, sobre una recta indefinida tomo la recta *a* y á continuacion la recta *b*, sobre la súma de las dos trazo una semicircunferencia, y en el punto de union de dichas dos líneas levanto la perpendicular BD, siendo esta medida proporcional entre las rectas dadas *a* y *b* ó entre AB y BC segmentos diámetro.

Si trazamos las cuerdas DC y DA formarán un ángulo inscripto que abraza media circunferencia, luego el ángulo será recto, y como á toda figura cerrada por 3 líneas la llamaremos TRIÁNGULO, el cual teniendo un ángulo recto se llama RECTÁNGULO, en el cual las líneas que forman el ángulo recto se llaman CATETOS, y la línea opuesta al ángulo recto HIPOTENUSA; la precedente proposicion puede tambien enunciarse diciendo: «si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa.»

75. Teorema: *Si se trazan dos secantes á una circunferencia desde un punto esterior de la misma, estas son inversamente proporcionales con sus segmentos esternos.*

Vamos á demostrar (fig. 51) que si desde el punto O fuera de la circunferencia se trazan las dos secantes OA y OB, se ha de verificar que $\frac{OB}{OA}=\frac{ON}{OC}$.

En efecto, si se trazan las dos cuerdas CA y NB se verificará que los ángulos de segmento ONB y OCA serán iguales, puesto que tienen la misma medída, por abrazar arcos iguales.

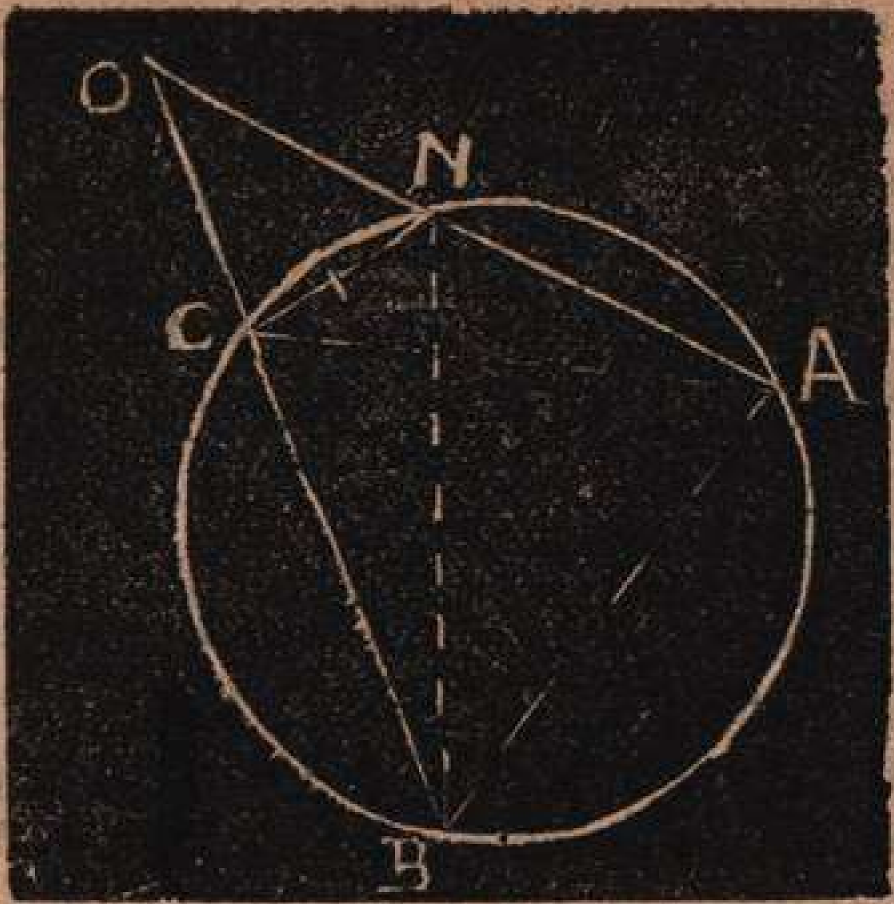


Fig. 51.

A la vez, tambien tendremos que los ángulos inscriptos OBN y OAC, serán tambien iguales por abrazar los dos el arco CN, y por tanto, las líneas opuestas á ángulos iguales en figuras semejantes (puesto que los triángulos OBN y OCA lo son) serán proporcionales.

La demostracion de este Teorema tambien pudiera hacerse trazando las líneas CN y BA, que resultarán ser antiparalelas, en cuyo caso resultará que el ángulo OBA=ONC, el primero inscripto y el segundo de segmento, y por tanto, dichas rectas CN y BA son antiparalelas con respecto al ángulo O.

Observacion. El teorema precedente y el anterior, se enuncian tambien diciendo:

Si desde cualquier punto del plano de una circunferencia se trazan dos secantes á esta, las distancias de dicho punto á los cuatro de interseccion son recíprocamente proporcionales. Es decir, *los productos de las situadas en cada secante son iguales.*

El recíproco de este Teorema lo enunciaremos diciendo:

Si en un ángulo se verifica que en cada uno de sus dos lados hay dos puntos tales que sus distancias al vértice son recíprocamente proporcionales, dichos cuatro puntos están en una circunferencia

76. Teorema: *Si desde un punto fuera de una circunferencia, pero en el plano donde esta esté trazada, se tiran una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre toda la secante y su segmento esterno*

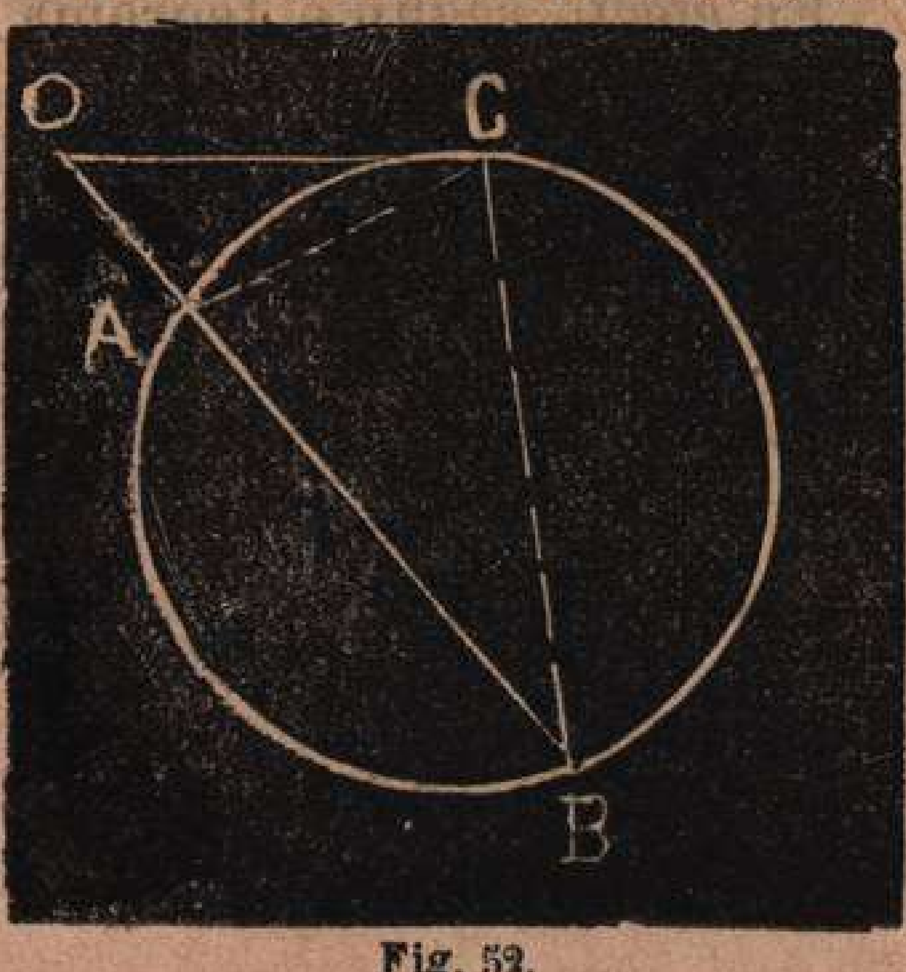


Fig. 52.

Vamos á demostrar (figura 52) que si desde el punto O se trazan una tangente OC y una secante OB, se ha de verificar que $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}$.

En efecto, trazando las rectas CA y CB se verificará que los ángulos OCA y OBC son iguales por inscriptos, lo mismo que los ángulos OAC y OCB, el primero por ser de segmento y el segundo por inscripto, ambos abrazan el mismo arco y ambos tienen por medida su mitad. Luego por tanto, las rectas CA y CB son antiparalelas con respecto al ángulo O; de lo cual

$$OA:OC::OC:OB.$$

Recíprocamente enunciaremos este teorema diciendo: *Si un punto* C *de uno de los lados del ángulo* O *dista del vértice una cantidad lineal* CO, *tal que el cuadrado de la misma es equivalente á los productos de las distancias de* OB *por* OA *tomadas desde el vértice á los puntos* B *y* A *del otro lado, la circunferencia que pasa por dichos tres puntos es tangente en* C *al lado* OC. (Corol. del Teor. 52.)

77. Escolio. Si una recta se divide en dos partes tales que una de ellas sea media proporcional entre toda la recta y el otro segmento, se dice que dicha recta se halla dividida *en media y estrema razon.*

La demostracion del Teorema precedente nos conduce á la resolucion del siguiente:

Problema. *Dividir una recta en media y estrema razon.* Sea la recta dada BA (fig. 53). Para esto en uno de sus estremos, B por ejemplo, levanto la perpendicular BO de una longitud igual á la mitad de la recta dada AB; con dicho rádio trazo la circunferencia O y luego la recta secante AM, tomo luego la distancia AN igual á la AP sobre la recta dada, y esta parte será media proporcional entre toda recta y su segmento BP, verificándose que: $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{BP}$

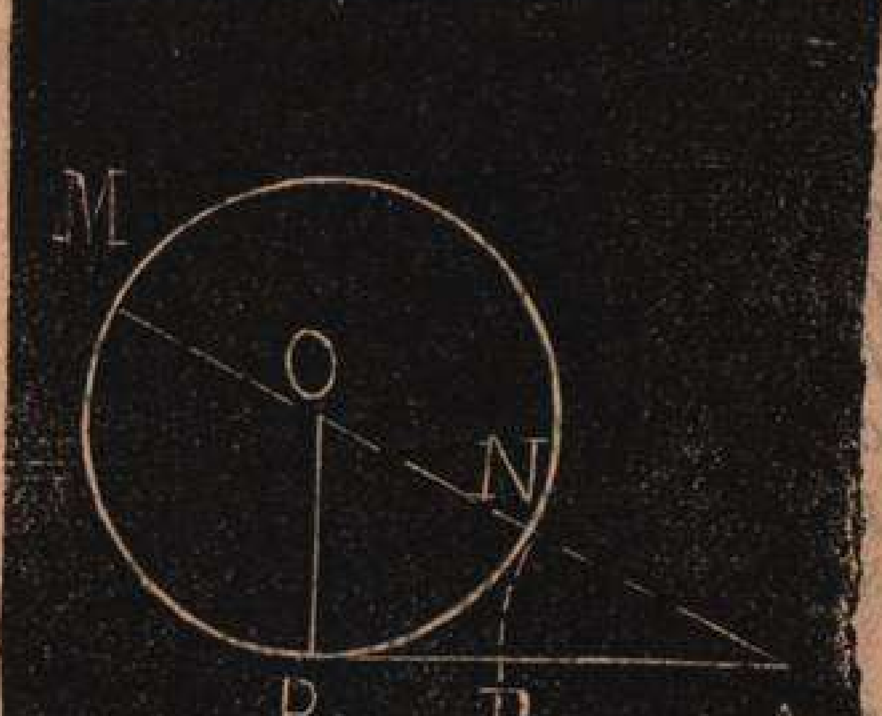


Fig. 53.

En efecto, segun el teorema precedente tenemos que:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AB}{AN}$$

de donde resulta que:

$$\frac{AM-AB}{AB}=\frac{AB-AN}{AN}$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{AN}{AB}=\frac{BP}{AN},$$

mas cómo AN=AP, invirtiendo la proporcion y sustituyendo AP por AN resultará que $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{BP}$, es decir, que AB:AP :: AP:BP, que es lo que se queria demostrar.

78. Teorema. *La cuerda comun de dos circunferencias secantes, es perpendicular á la línea que une los centros, y esta divide á aquella en dos partes iguales.*

En efecto, cada uno de los dos centros de las dos circunferencias secantes equidista de los estremos de la cuerda comun, puesto que los rádios de un círculo son todos iguales, y como dos puntos determinan la posicion de una recta, resultará que la línea que une los centros de entrambas circunferencias, es perpendicular en el punto medio de la cuerda comun de entrambas circunferencias. Lo cual podremos reconocer en el primer grabado de la figura 32.

Fundado en el teorema precedente se resuelven los fáciles problemas siguientes:

1.° *Desde un punto* O (fig. 54) *dado fuera de una recta* AB, *trazar á la misma una perpendicular.*

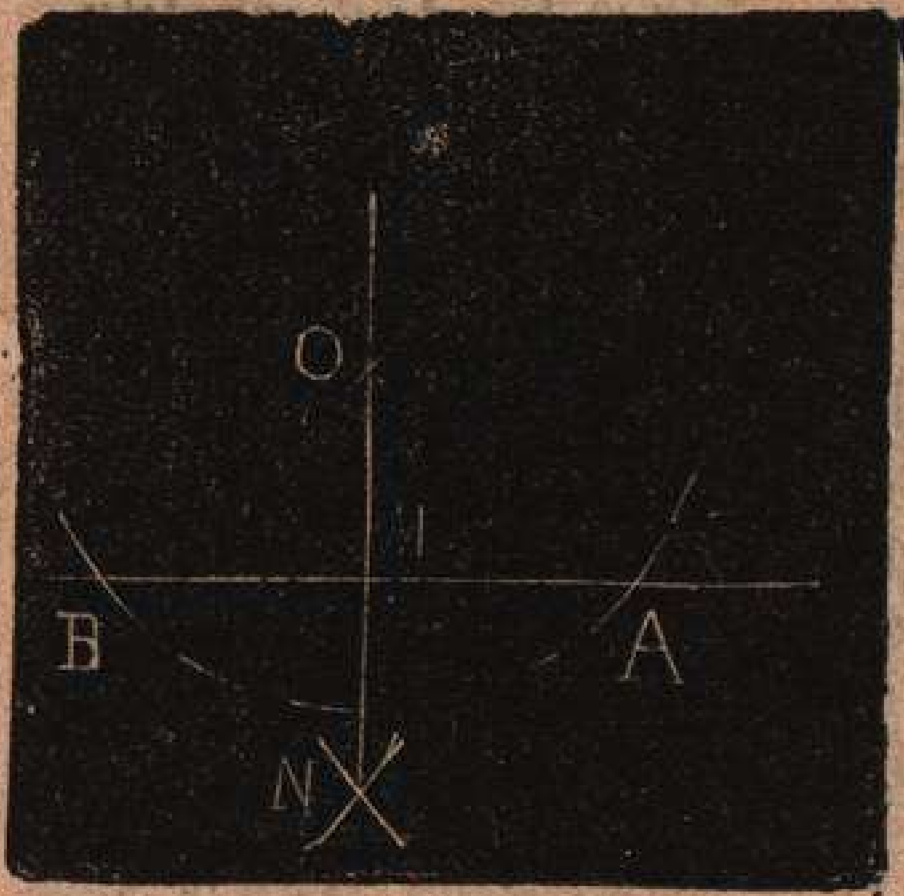


Fig. 54.

Para esto con un rádio cualquiera OA se traza el arco AB que corte á la recta en los dos puntos A y B, desde los mismos con un rádio mayor que la mitad de la distancia comprendida entre ellos, trazo arcos cuya interseccion en el punto N y el punto dado O determinarán la posicion de la perpendicular ON trazada desde el punto O sobre la recta AB.

2.° Si el punto dado fuese M, en la recta AB tomariamos iguales las distancias arbitrarias MA y MB, y desde los puntos A y B trazariamos los arcos que señalasen los puntos O y N, que marcarian la posicion de la perpendicular ON.

3.° *Para dividir una recta en dos partes iguales ó para levantar una perpendicular en el punto medio de una recta*, con una abertura mayor que la mitad de la recta desde cada uno de los estremos se traza un arco, los cuales se interceptarán en dos puntos, uno sobre la recta y otro debajo de la misma, los cuales unidos marcarán la posicion de la perpendicular pedida.

79. **Teorema.** *Si por uno de los puntos de secancia de dos circunferencias secantes, se trazan dos diámetros uno en cada circunferencia, la línea que une los otros dos estremos de los diámetros pasará precisamente por el segundo punto de secancia.*

Vamos á demostrar (fig. 55) que si por el punto D se trazan los dos diámetros DB y DC y se unen los otros dos estremos B y C, la línea que los une pasa precisamente por el punto A.

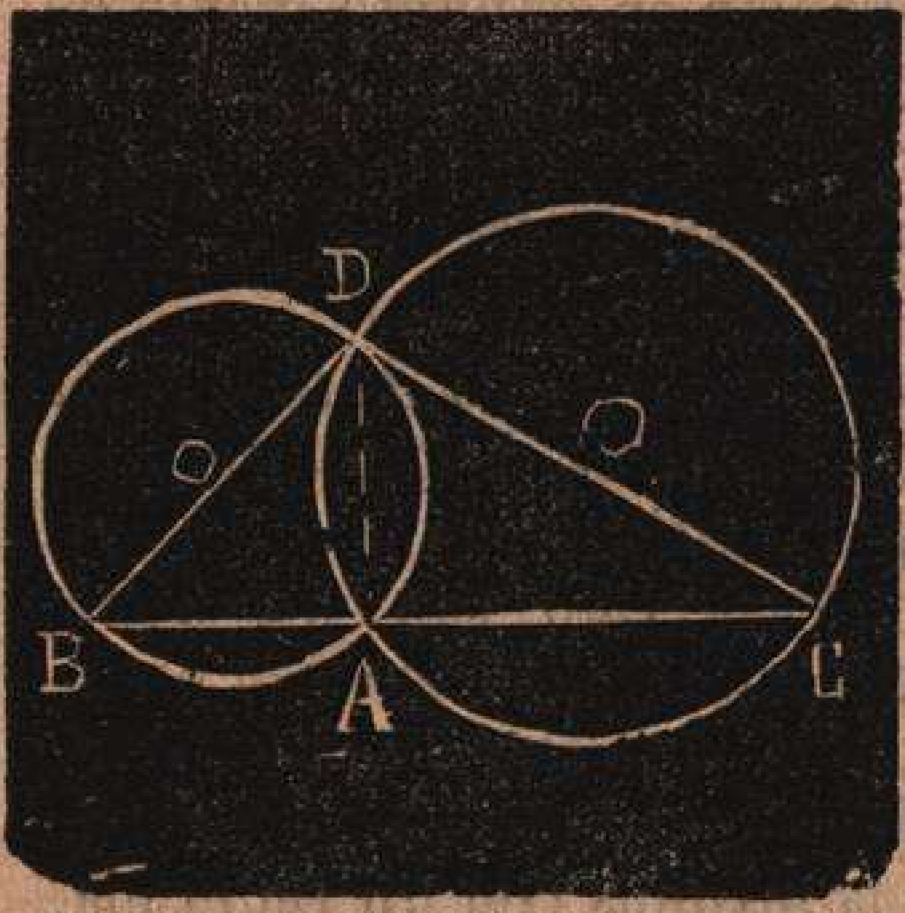


Fig. 55.

En efecto, los ángulos BAD y DAC son adyacentes, por que la recta DA es comun para los dos y ambos ángulos, son inscriptos que abrazan media circunferencia, por consiguiente los dos son rectos y entre los dos constituyen el valor de todos los ángulos formados alrededor del punto O sobre la recta BC.

Recíprocamente podremos decir: *Si trazamos á dos circunferencias secantes una línea recta secante que pase por uno de los puntos de secancia de dichas dos circunferencias, y por los estremos del segmento interno de dicha recta secante trazamos dos diámetros, uno en cada circunferencia, estos se encontrarán en el segundo punto de secancia.*

* 80. **Problema.** *Trazar una tangente comun á dos circunferencias dadas.*

Si las circunferencias dadas son esteriores tendrán cuatro tangentes comunes. En efecto, supongamos (fig. 56) que las dos circunferencias dadas sean o y O, trazando en la menor un rádio *om* y en la mayor el diámetro paralelo MM' y uniendo los estremos de este con el del rádio anterior por las rectas *m*M y *m*M' procurando que estas rectas ó sus prolongaciones corten á la línea oO que une los centros, lo harán en los puntos T y F, y trazando por estos puntos las tangentes FA y TB á una de ellas, resultarán tambien tangentes á la otra.

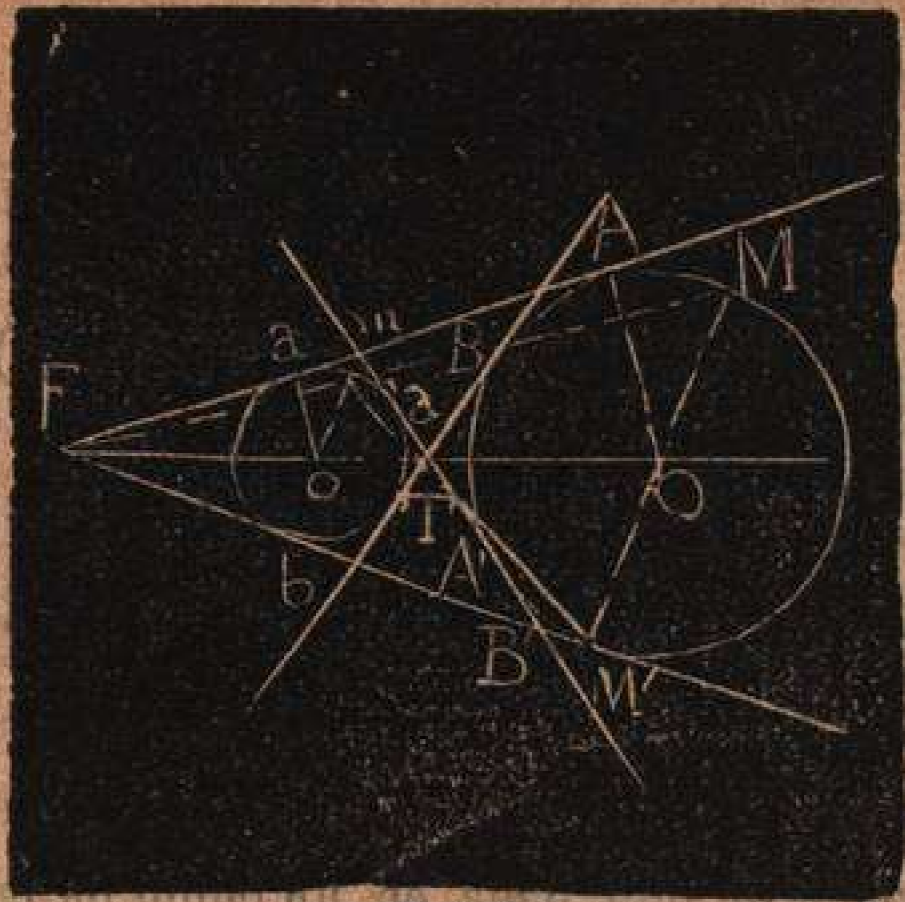


Fig. 56.

En efecto, tendremos

$$\frac{oT}{OT}=\frac{om}{OM}$$

y trazando los rádios *oa* y OA perpendiculares á la tangente FA, resultará que

$$\frac{oT}{OT}=\frac{oa}{OA},$$

que comparada con la anterior, nos dá que

$$\frac{om}{OM}=\frac{oa}{OA};$$

mas siendo $om=oa$, resultará por último que OM=OA: luego el punto A pertenece á la circunferencia O y la recta FA perpendicular al rádio OA en su estremo A será tangente á la circunferencia O.

Escolio. De la razonada discusion de este problema se deducen las conclusiones siguientes:

1.ª *Si las circunferencias dadas son esteriores sin tocarse, serán, como hemos visto, cuatro las tangentes comunes.*

2.ª *Si las circunferencias son tangentes esteriores, habrá una sola recta tangente interior que será perpendicular á la línea que une los centros en el punto de tangencia, y otras dos tangentes esteriores.*

3.ª *Si las dos circunferencias son secantes, solo tendrán comunes las dos tangentes esteriores.*

4.ª *Si son tangentes interiores, no tendrán mas que una sola recta tangente comun que será esterior y perpendicular á la recta que une los centros en su estremo esterior donde son tangentes referidas circunferencias.*

5.ª *Por último, si las circunferencias son interiores sin tocarse, no pueden tener ninguna recta tangente comun.*

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO

DE LA PRIMERA PARTE DE LA GEOMETRIA PLANA.

SOBRE CIRCUNFERENCIAS DE CÍRCULO.

I. Trazar una circunferencia tangente de otra dada en un punto de la misma y que pase además por otro punto.

II. Demostrar que si por el punto de tangencia de dos circunferencias tangentes esteriores se trazan dos secantes, las cuerdas que interceptan son paralelas.

III. Trazar una circunferencia:

1.° Que pase por dos puntos dados y tenga un rádio conocido.

2.° Que pase por dos puntos dados y tenga su centro en una recta dada ó en una circunferencia dada.

3.° Que tenga un rádio dado y sea tangente á dos rectas, ó á dos circunferencias, ó á una recta y una circunferencia.

4.° Que pase por un punto dado, tenga un rádio conocido y sea tangente á una recta ó á una circunferencia dada.

5.° Que tenga un rádio dado su centro en una recta ó en una circunferencia y sea tangente á otra recta ó á otra circunferencia.

6.° Que pase por un punto dado y sea tangente en otro punto dado á una recta ó á una circunferencia dada.

7.° Que sea tangente á dos rectas dadas y á una de estas en un punto dado.

8.° Que sea tangente á una recta y á una circunferencia dadas, y á esta en un punto preciso de la misma.

IV. Trazar una secante comun á dos circunferencias dadas y cuyos segmentos internos tengan longitudes determinadas.

V. Por uno de los puntos de interseccion de dos circunferencias trazar la secante comun que tenga su punto medio en referida interseccion.

VI. Trazar una circunferencia tangente á dos rectas y á una circunferencia dadas.

VII. Trazar una circunferencia tangente á una recta y á dos circunferencias dadas.

VIII. Trazar por un punto dado una circunferencia tangente á dos rectas dadas.

IX. Dadas tres rectas concurrentes en un punto, trazar otra que resulte dividida por aquellas en dos partes iguales.

X. Dadas tres rectas concurrentes en un punto, trazar por otro punto dado una secante tal que sus segmentos tengan una razon dada.

XI. Por un punto dado entre dos rectas trazar una recta tal que esté dividida por dicho punto en partes que tengan una razon dada.

XII. Por un punto esterior á una circunferencia trazar una secante cuya parte interna sea media proporcional entre la secante entera y su parte externa.

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

LIBRO PRIMERO.

SUPERFICIES POLIGONALES.

Polígonos.

81. Se llama *Polígono* á toda superficie terminada por rectas.

Los elementos de un polígono son sus líneas de terminacion que se llaman *lados*, y la interseccion de cada dos de estos que son los *vértices*, y la inclinacion de los mismos que son los *ángulos*.

Al conjunto de todos los lados de un polígono se llama *contorno*.

A la medida del contorno se llama *Perímetro*.

Se llaman *vértices* de un polígono á la interseccion de cada dos lados.

Diagonal de un polígono, es una línea que une dos vértices no contiguos.

Llamamos *base* de un polígono á uno cualquiera de sus lados.

Altura de un polígono es la perpendicular trazada desde el vértice mas distante de la base á esta ó á su prolongacion.

Lados adyacentes á un ángulo, son los lados que le forman.

Angulos adyacentes á un lado son los formados en los estremos de este.

Los polígonos se dividen en *cóncavos* y *convexos*.

Un polígono es *cóncavo* cuando como en el PQTSR (fig. 57) se verifica que una recta trazada en el mismo corta á su perímetro en mas de dos puntos. De otro modo puede definirse tambien diciendo: es *cóncavo* todo polígono en el cual se verifique, como en el PQTSR, que prolongando una de sus líneas, por ejemplo la RS ó la TS, esta prolongacion divide la superficie en dos segmentos.

Fig. 57.

Generalmente nos ocupamos de los polígonos convexos que como el ABCDEN, una recta cualquiera trazada en el mismo no corta á su perímetro mas que en 2 puntos.

Los polígonos para su estudio se dividen en *regulares* é *irregulares*. Se llaman regulares á aquellos que tienen todos sus lados de igual magnitud, siendo tambien todos sus ángulos iguales.

Polígonos irregulares son aquellos que no tienen sus lados iguales, ni por tanto, tampoco sus ángulos.

Los polígonos reciben diferentes nombres, los cuales dependen del número de sus lados.

Así tenemos (fig. 58) que los regulares representados en este grabado se llaman respectivamente, por tener 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 lados

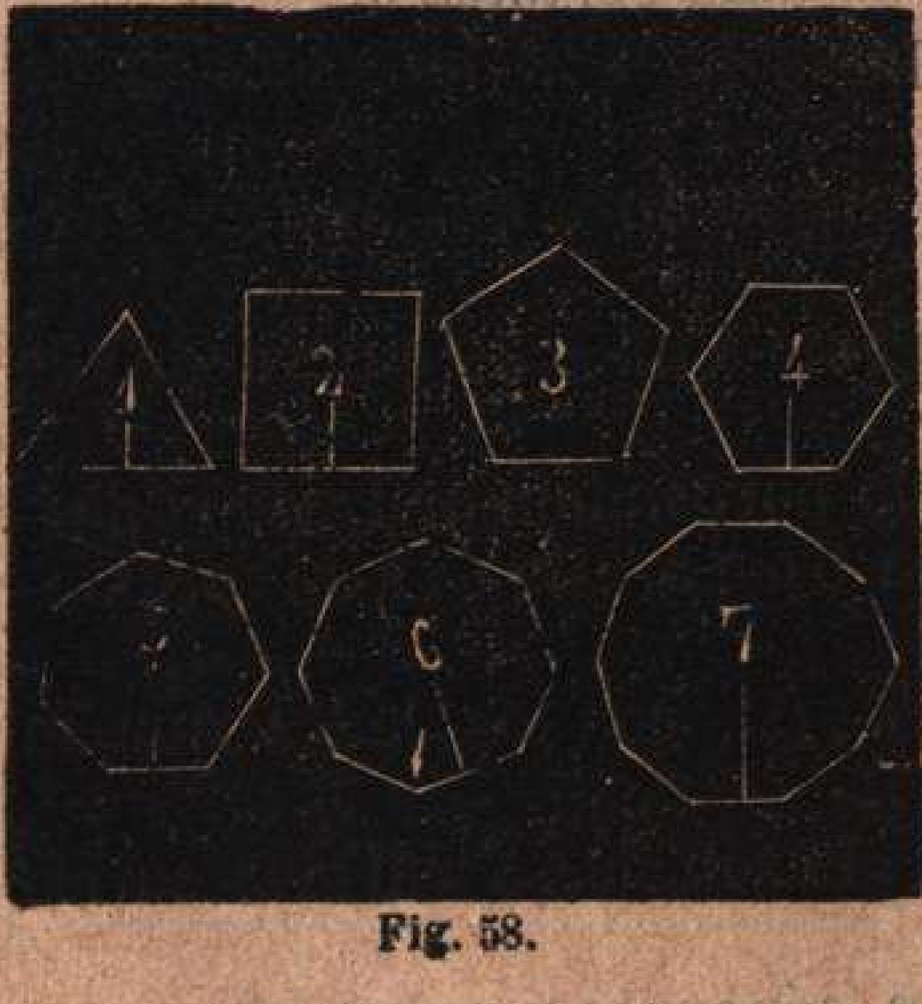


Fig. 58.

El 1.º *Triángulo.*
El 2.º *Cuadrado.*
El 3.º *Pentágono.*
El 4.º *Exágono.*
El 5.º *Eptágono.*
El 6.º *Octógono.*
El 7.º *Decágono.*

Como todos ellos son regulares, se llaman tambien *equiláteros* por tener los lados iguales, y tambien se llaman *equiángulos*, por tener iguales los ángulos.

Triángulos.

82. Se llama **Triángulo** *la porcion de plano comprendido entre tres rectas que se cortan dos á dos.*

El triángulo con respecto á sus lados se llama *Equiláctero* si tiene sus tres lados iguales (1.ª fig. 59).

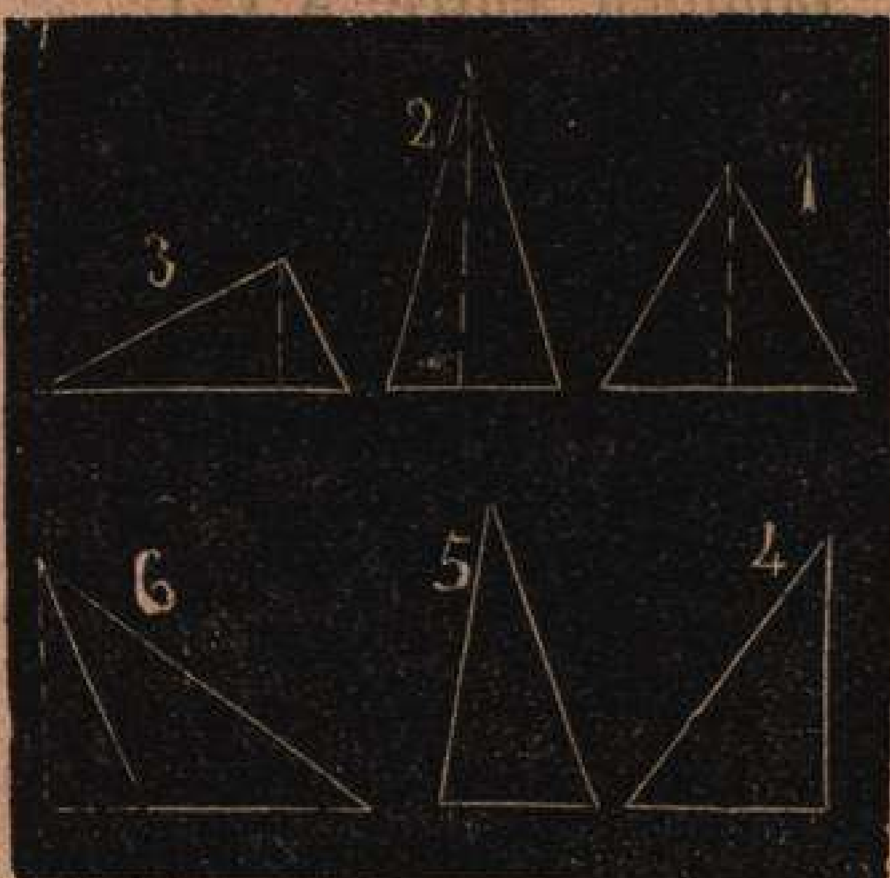


Fig. 59.

Isosceles si tiene dos lados iguales (2.ª)

Escaleno si todos sus lados son desiguales (3.ª)

El triángulo con relacion á sus ángulos se llama *Rectángulo*, si tiene un ángulo recto (4.ª)

En todo triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *Catetos*, y la línea opuesta al ángulo recto *Hipotenusa*.

Lado de un triángulo opuesto á un ángulo, es aquel único lado que no forma al ángulo.

Triángulo *acutángulo* es aquel que tiene agudos sus tres ángulos (5.ª)

Obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso (6.ª)

Todo triángulo tiene 6 elementos, *3 ángulos* y *3 lados.*

83. Entre los elementos lineales de un triángulo se verifican las relaciones siguientes:

1.° *Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.* (Primer axioma.)

2.° *Un lado cualquiera de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos* (18).

3.° *Con tres rectas de longitud arbitraria no se puede siempre formar un triángulo, como entre ellas no se verifique que cada una sea menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia de las mismas.*

4.° *Si desde un punto cualquiera interior de un triángulo, se trazan las tres líneas una á cada vértice, la suma de ellas es menor que el perímetro del mismo y mayor que la mitad de dicho perímetro.*

Vamos á demostrar (fig. 60) que si desde el punto O interior del triángulo ABC se trazan las tres rectas OA, OB y OC, se ha de verificar que $OA+OB+OC<AB+BC+CA$ y tambien que $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

En efecto, desde el punto A al B, la menor distancia es AB, pero tambien

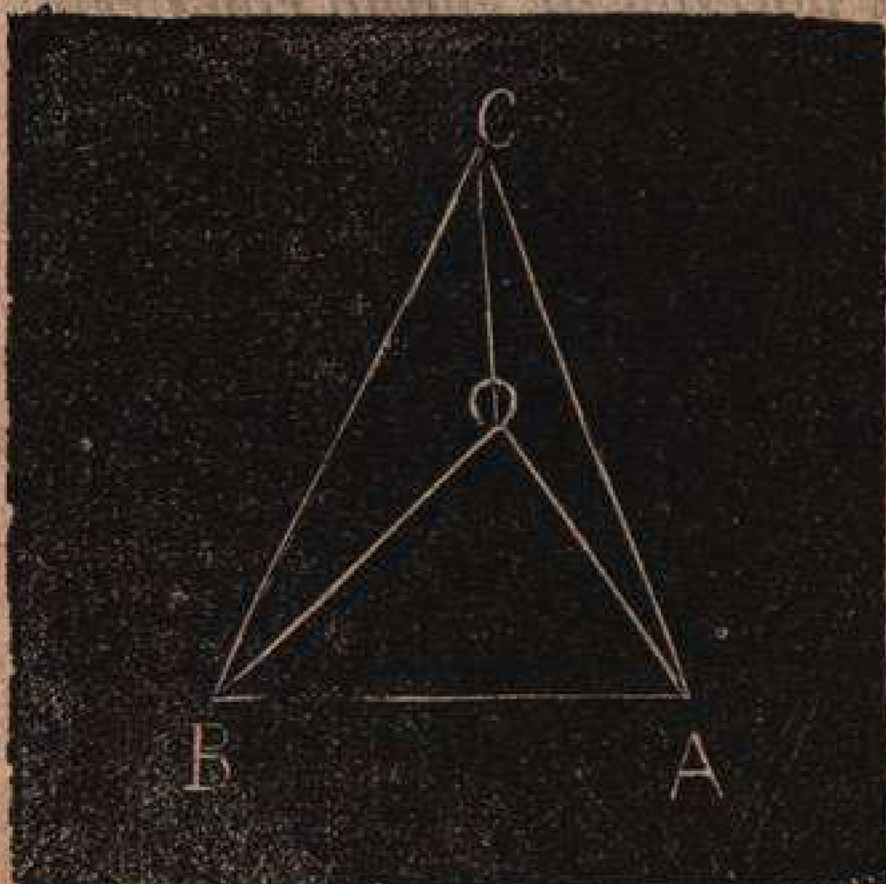


Fig. 60.

$$AO+OB<AC+CB$$

igualmente entre B y C, será:

$$OB+OC<AB+AC$$

y tambien entre A y C

$$OC+OA<AB+BC$$

sumando estas desigualdades, ordenadamente tendremos que:

$$2OA+2OB+2OC<2AB+2BC+2AC,$$

partiendo por 2 ámbos miembros de esta desigualdad se tendrá que:

$$OA+OB+OC<AB+BC+AC.$$

Si suponemos trazadas desde el punto O tres perpendiculares una á cada uno de los tres lados, deduciremos fácilmente que $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

5.° *Si dos triángulos tienen un lado comun y están de modo que el uno comprende al otro, la suma de los dos lados del triángulo envuelto, es menor que la suma de los dos lados del triángulo envolvente.*

La demostracion de esta proposicion está dada en el núm. 18.

6.° *Si dos triángulos* OBC *y* ABC *tienen un lado comun* BC *y otro lado* OB *del primero que corta al* AC *del segundo, la suma de los dos lados* AB *g* OC *que no se cortan, es menor que la suma de los dos lados* AC y OB *que se cortan.*

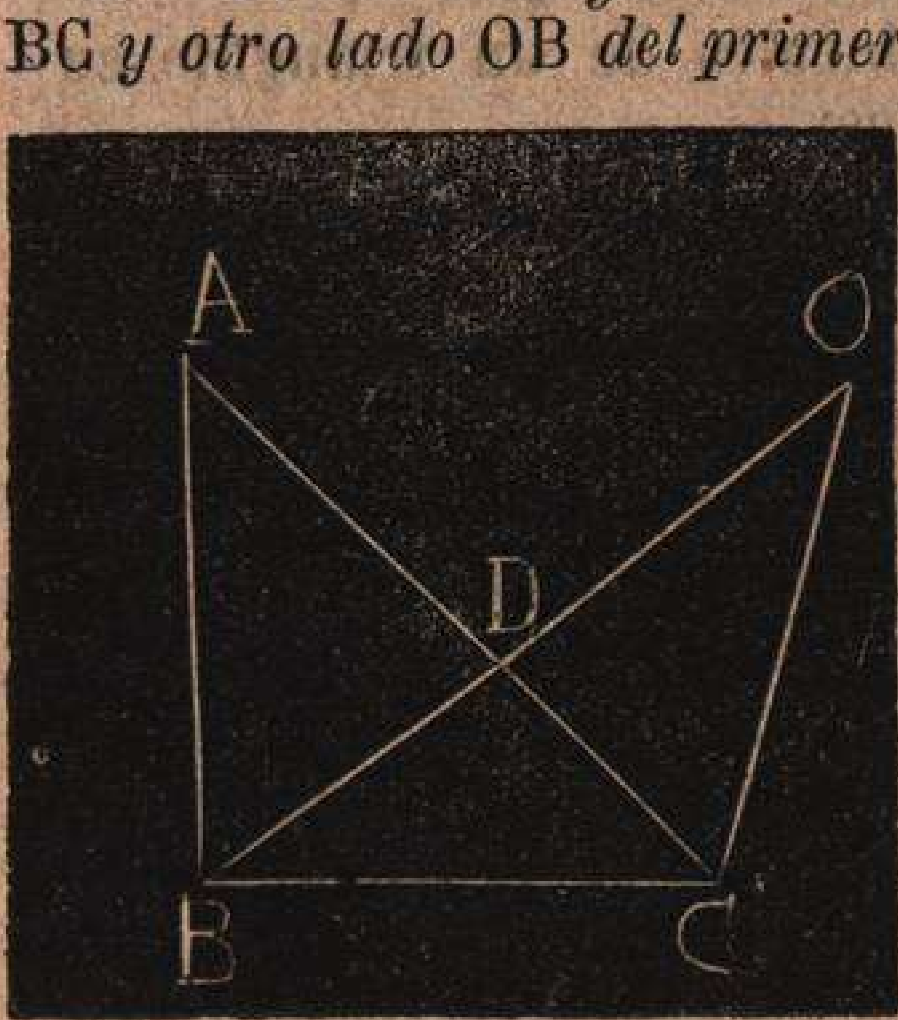


Fig. 61.

Vamos á demostrar (figura 61) que la suma de los dos lados AB y OC es menor que la de los AC y OB, respectivamente en los dos triángulos ABC y OCB que tienen comun el lado BC.

En efecto, en el triángulo ABD tendremos que

$$AB<AD+DB.$$

y tambien en el triángulo OCD, $CO < CD + DO$, sumando miembro á miembro resultará que $AB + CO < AC + OB$.

84. Entre los elementos angulares de un triángulo se verifican las relaciones siguientes:

Teorema. *En todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos ángulos rectos.*

Vamos á demostrar (fig. 62) que la suma de los tres ángulos $A + B + C$ es igual á dos rectos.

En efecto, prolongando el lado AC y trazando por el punto C una paralela á la recta AB, tendremos que los ángulos $C + D + E = 2$ Rectos (primer corolario del Teorema 24) pero el ángulo $D = B$ por *alternos internos* y el ángulo $E = A$ por *correspondientes*. Sustituyendo, por tanto, en la igualdad anterior B y A por D y E, tendremos que $C + B + A = 2$ Rectos.

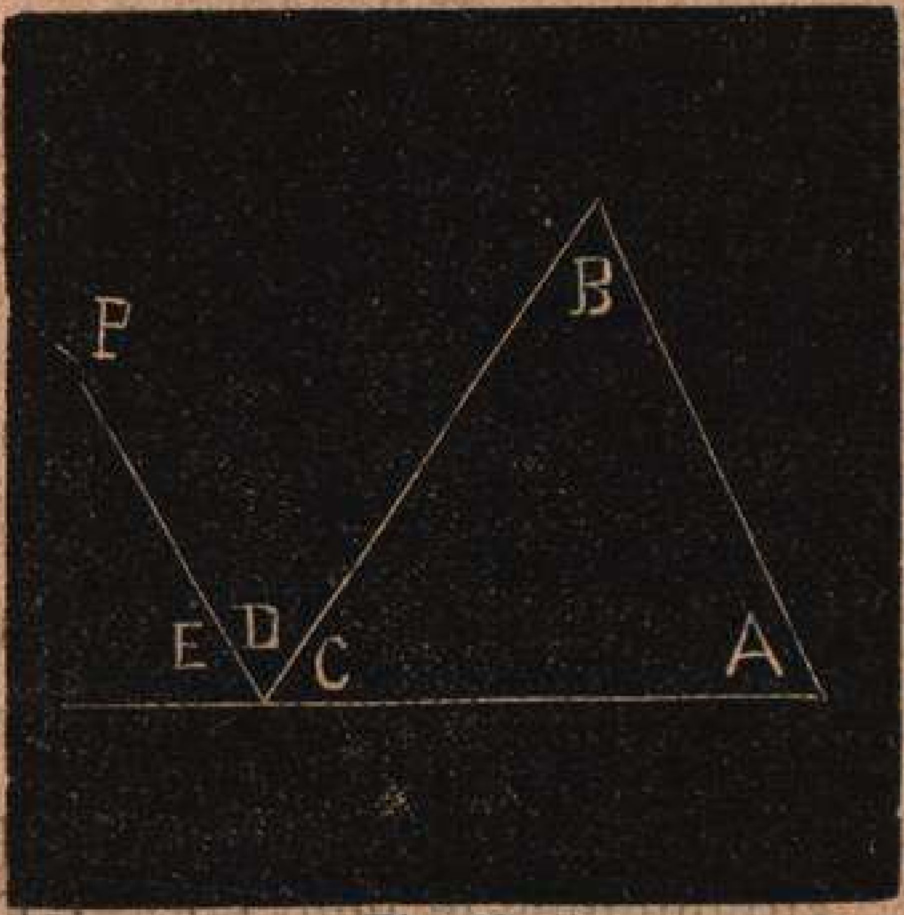


Fig. 62.

Este teorema tambien se puede demostrar trazando un triángulo en una circunferencia y haciendo que sus tres ángulos sean inscriptos, entre los tres abrazarán toda la circunferencia,y valiendo la mitad del arco que abracen, será este de 180°.

Como *corolarios* de este teorema se desprenden las demás relaciones angulares que nos dicen:

1.ª *Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo que forma la prolongacion, es equivalente á la suma de los otros dos no adyacentes á él.* En efecto, si entre la suma de los tres ángulos de un triángulo valen 2 rectos; y la suma de dos adyacentes valen tambien 2 rectos y ámbas igualdades tienen un término comun, supriméndola é igualando los que quedan, resultará cierta la proposicion.

2.ª *Un ángulo cualquiera de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos.*

3.ª *Ningun triángulo rectilíneo ó formado por líneas rectas, puede ser birectángulo ó tener dos de sus ángulos rectos; tampoco puede tener uno recto y otro obtuso, ni tampoco dos obtusos.*

4.ª *En todo triángulo rectángulo se verifica que la suma* *de los dos ángulos adyacentes á la hipotenusa, valen un ángulo recto ó son complementarios.*

5.ª *Si desde un punto interior de un triángulo cualquiera se trazan dos líneas á los estremos de un lado, el ángulo formado por las mismas es mayor que el opuesto al mismo lado del triángulo.*

Vamos á demostrar (fig. 60) que si desde el punto interior O del triángulo ACB se trazan las dos líneas OA y OB, el ángulo O es mayor que el ACB.

En efecto, CAB+CBA+ACB=2R segun el teorema anterior, y tambien OAB+OBA+AOB=2R por el espresado teorema, y como axiomáticamente se tiene que

CAB>OAB y CBA>OBA

resultará que CAB+CBA>OAB+OBA,

luego por tanto será evidente que ACB<AOB.

Convendrá tener en cuenta esta relacion al tratar de la 2.ª propiedad de los ángulos Triedros, Teorema 225 (GEOMETRIA DEL ESPACIO).

85. Entre los elementos lineales y los elementos angulares de un triángulo, se verifican las siguientes relaciones:

1.ª **Teorema.** *A lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Vamos á demostrar (fig. 63) que si en el triángulo EGF suponemos el lado GE=GF, es el ángulo F=E.

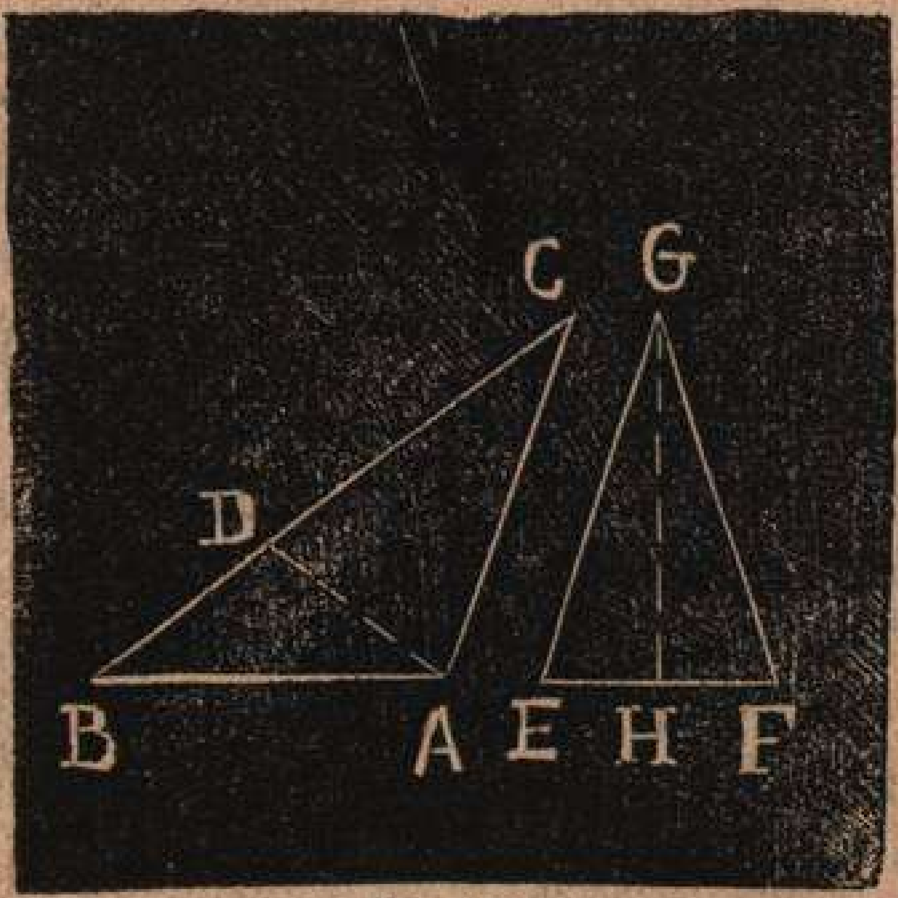


Fig. 63.

En efecto, bajando desde G la perpendicular GH á la base EF, siendo por hipótesis GE=GF serán oblícuas equidistantes del pié H de la perpendicular GH (2.ª tésis del Teor. 28) y por tanto HE=HF, doblando la figura por GH, coincidirá GF con GE y FH con EH, siendo evidente la coincidencia é igualdad de los ángulos F y E.

2.ª **Teorema.** *En todo triángulo al mayor lado se opone mayor ángulo.* (Fig. 63).

Vamos á demostrar que si en el triángulo ABC es BC>CA, el ángulo BAC es mayor que el CBA.

En efecto, tomando sobre la CB una parte CD=CA, se tendrá, segun el primer teorema, que el ángulo CAD=CDA, pero CDA>B (segun la 1.ª relacion del número 84) luego por tanto, CAD>B y como el ángulo CAD es menor que el CAB, con mayor razon resultará ser menor el ángulo CBA que el CAB.

Recíprocamente podremos decir en todo triángulo:

A ángulos iguales se oponen lados iguales.

Al mayor ángulo se opone el mayor lado.

Corolarios. *Si un triángulo es equiláctero será equiángulo y recíprocamente: en cuyo supuesto es este el único polígono regular triangular que hay.*

Si un triángulo es isosceles, los ángulos contiguos al lado desigual son iguales y recíprocamente.

Si un triángulo es rectángulo, la hipotenusa opuesta al ángulo recto será mayor que cualquiera de los dos catetos, lo que se comprueba desde luego por la 1.ª tésis del Teorema 28.

Si un triángulo es obtusángulo, el mayor lado está opuesto al ángulo obtuso y recíprocamente.

De los teoremas precedentes se desprende que la perpendicular bajada desde el vértice opuesto al lado desigual *de un triángulo isosceles*, cumple las condiciones siguientes:

1.° *Es perpendicular á la base.*
2.° *La divide en dos partes iguales.*
3.° *Es bisectriz del ángulo opuesto á la base.*

86. Teorema. *Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales á los dos lados del otro, y el ángulo comprendido entre los dos primeros es mayor que el comprendido entre los dos del segundo, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo.*

Vamos á demostrar (fig. 64) que si los dos triángulos ABC y A'B'C' tienen los dos lados AB=A'B' y BC=B'C' siendo el ángulo B>B', el lado AC opuesto al mayor ángulo es mayor que el A'C' opuesto al menor.

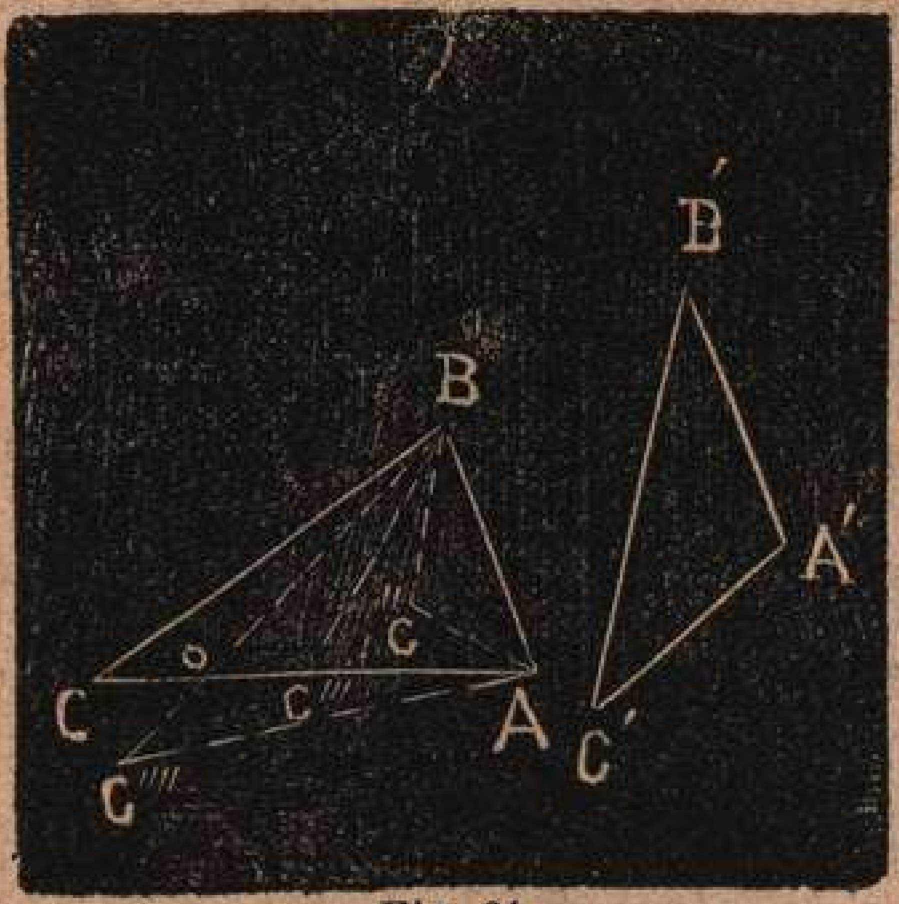


Fig. 64.

En efecto, superpongamos el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que A'B' coincida con su igual AB y el lado B'C' caerá dentro del ángulo CBA, puesto que este ángulo es menor que el C'B'A'.

Ahora bien, el punto C' puede tomar tres posiciones distintas:

1.ª En C'' dentro del triángulo.

2.ª En C''' sobre el lado AC.

3.ª En C'''' fuera del triángulo.

1.° Si C' cae en C'' se tendrá que AC+BC>AC''+BC'' (segun Teor. núm. 18) y como BC=BC'' resulta por hipótesis que AC>AC'' ó bien AC>A'C'.

2.ª Si el punto C' cae sobre el C''' se tendria que AC>AC''' ó bien AC>A'C'.

3.ª Si el punto C' cayese en C'''' se tendria que

$$OA+OC'''' > AC'''' \text{ y } BO+OC > BC.$$

Sumando estas dos desigualdades resultará que

$$AO+OC''''+BO+OC > AC''''+BC,$$

es decir, que AC+BC''''>AC''''+BC y como BC=BC'''' por hipótesis resulta al fin que

$$AC > AC'''' \text{ ó bien } AC > A'C'.$$

Recíprocamente podremos decir que: Si dos triángulos ABC *y* A'B'C' *tienen dos lados respectivamente iguales y el tercer lado* CA *es mayor que el* C'A', *el ángulo opuesto al mayor lado será el mayor.*

87. Teorema. Dos triángulos son iguales:

1.° *Cuando un lado y los dos ángulos adyacentes del primero, son respectivamente iguales á un lado y los dos ángulos adyacentes del segundo.*

2.° *Cuando un ángulo y los dos lados que lo forman en uno de ellos, son iguales á un ángulo y los dos lados que lo forman en el otro.*

3.° *Cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales*

Vamos á demostrar (fig. 65) los tres casos de igualdad de los triángulos ABC y A'B'C'.

En efecto, 1.er *caso.* Supongamos que BC=B'C', B=B', C=C'. Colocando el triángulo A'B'C' sobre el ABC, de modo que el lado B'C' coincida con BC; ahora bien, puesto que B'=B la recta B'A' tomará la direccion BA y el punto A' se hallará sobre la prolongacion indefinida de la recta BA. De igual manera puesto que el ángulo C' es igual al C, el lado C'A' coincidirá con el CA, y el punto A' se hallará situado sobre la recta indefinida CA. Luego ese punto A' teniendo que hallarse á la vez sobre las dos rectas BA y CA, caerá precisamente en el punto de interseccion A y por tanto los dos triángulos habrán coincidido y serán iguales.

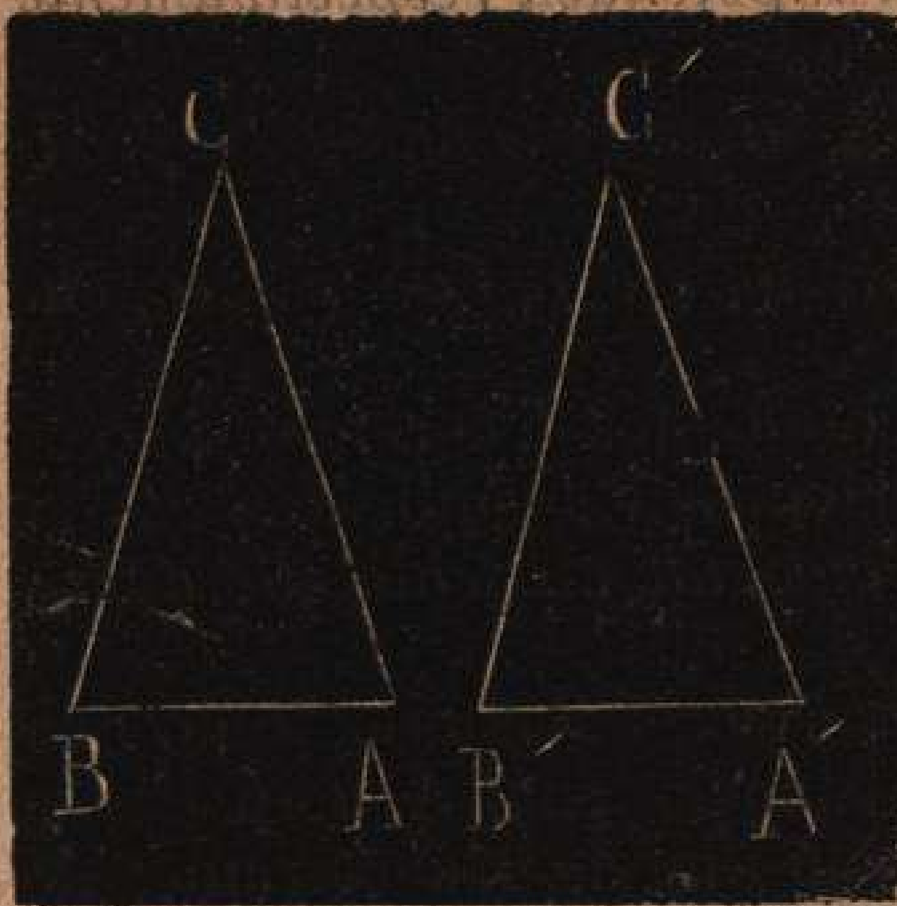


Fig. 65.

2.° *caso.* Supongamos ahora en los mismos triángulos que A=A', AB=A'B' y AC=A'C'.

Colocando el triángulo A'B'C' sobre el ABC de manera que coincida el ángulo A' sobre el A, el lado A'B' coincidirá sobre el AB y el lado A'C' sobre el AC. Estos dos lados que tienen la misma longitud y llevan la misma direccion, terminarán en el mismo punto, es decir, que el punto B' caerá sobre el B y el C' sobre el C, coincidiendo por tanto los dos triángulos.

3.^er^ *caso.* Supongamos ahora en los mismos triángulos que A'B'=AB, B'C'=BC, A'C'=AC.

El ángulo A del primer triángulo comprendido entre los lados AB y AC, deberá ser igual al ángulo A' del segundo comprendido entre los lados A'B' y A'C' respectivamente iguales á AB y AC, porque segun el teorema 86, si estos ángulos difiriesen, los lados BC y B'C' que les son opuestos serian desiguales en contra del supuesto.

Por tanto, los dos triángulos dados deberán ser iguales puesto que tienen un ángulo igual comprendido entre lados iguales.

Es esencial saber que los dos triángulos dados satisfacen las seis condiciones siguientes:

AB=A'B'; BC=B'C'; CA=C'A': A=A'; B=B'; C=C'

Escolios: 1.° *Cada caso de igualdad contiene tres condiciones de las anteriores, pero de tal suerte combinadas, que cuando están satisfechas se verifican las seis.*

2.° *El único caso en que no es fácil sean iguales dos triángulos aun cuando tengan tres elementos del uno iguales á los tres del otro, es cuando estos elementos iguales sean los tres ángulos, lo cúal dá márgen al primer caso de semejanza de los mismos.*

3.° *Si los triángulos que se comparan fuesen rectángulos, como estos sabemos tienen siempre un ángulo igual que es el recto, los casos de igualdad de los mismos son cuatro.*

1.° *Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen los dos catetos iguales.*

2.° *Si tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente iguales.*

3.° *Si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales.*

4.° *Si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente iguales.*

88. El perfecto conocimiento de los Teoremas precedentes nos conduce á la resolucion de los siguientes

Problemas gráficos. 1.° *Construir un triángulo dados sus tres lados.*

Para esto (fig. 66) sobre una recta indefinida, tomo una distancia igual á *a*, y desde cada uno de los estremos de esta con un rádio igual á la recta *b* y *c* respectivamente, trazo dos arcos que se cortarán en el punto N, el cual uniendo por dos rectas con los estremos de la *a*, formarán con esta un triángulo, en el cual la longitud respectiva de sus lados, es precisamente la de las tres rectas dadas *a*, *b* y *c*.

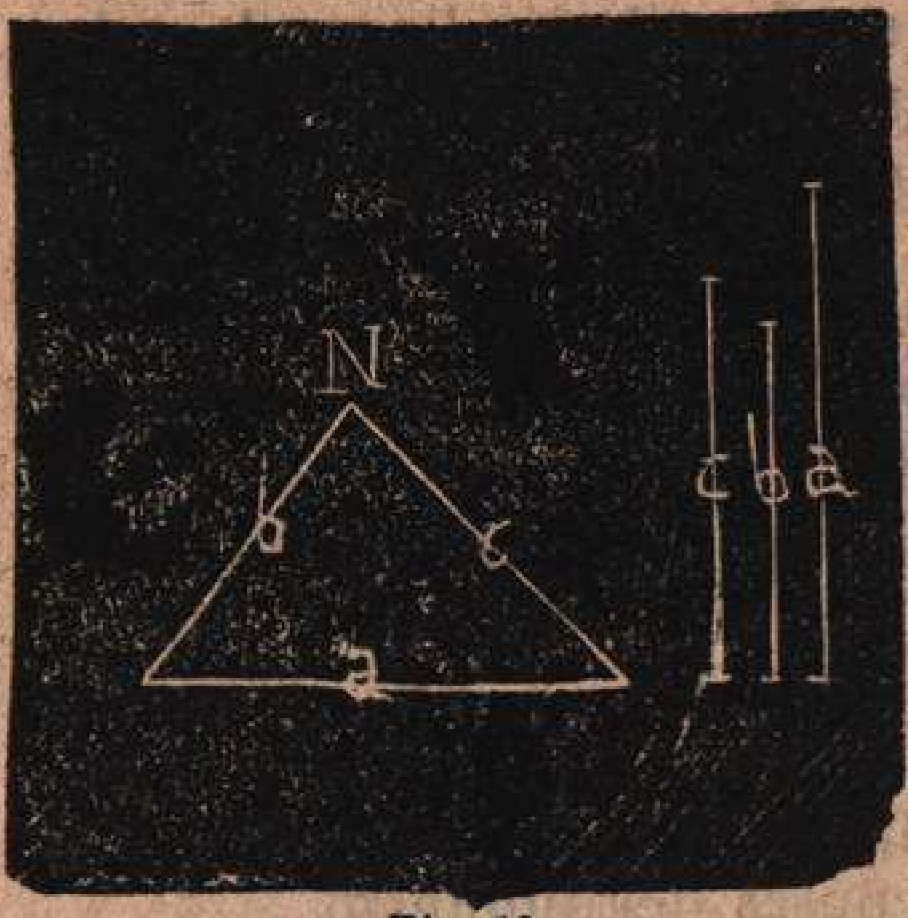


Fig. 66.

Escolio: es necesario tener en cuenta que tres rectas de longitud arbitraria no pueden formar siempre un triángulo (Teorema 18) es preciso que una cualquiera de las mismas sea menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia de ellas.

2.° *Construir un triángulo dados dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* C.

Para esto (fig. 67) sobre una recta indefinida tomo una distancia igual á la *a* y sobre uno de sus estremos trazo un ángulo igual al dado C, limitando el segundo lado del mismo, con una distancia igual al otro lado *b*, y uniendo los estremos de estos, tendré un triángulo que tiene los dos lados *a* y *b* y el ángulo C iguales á los dados.

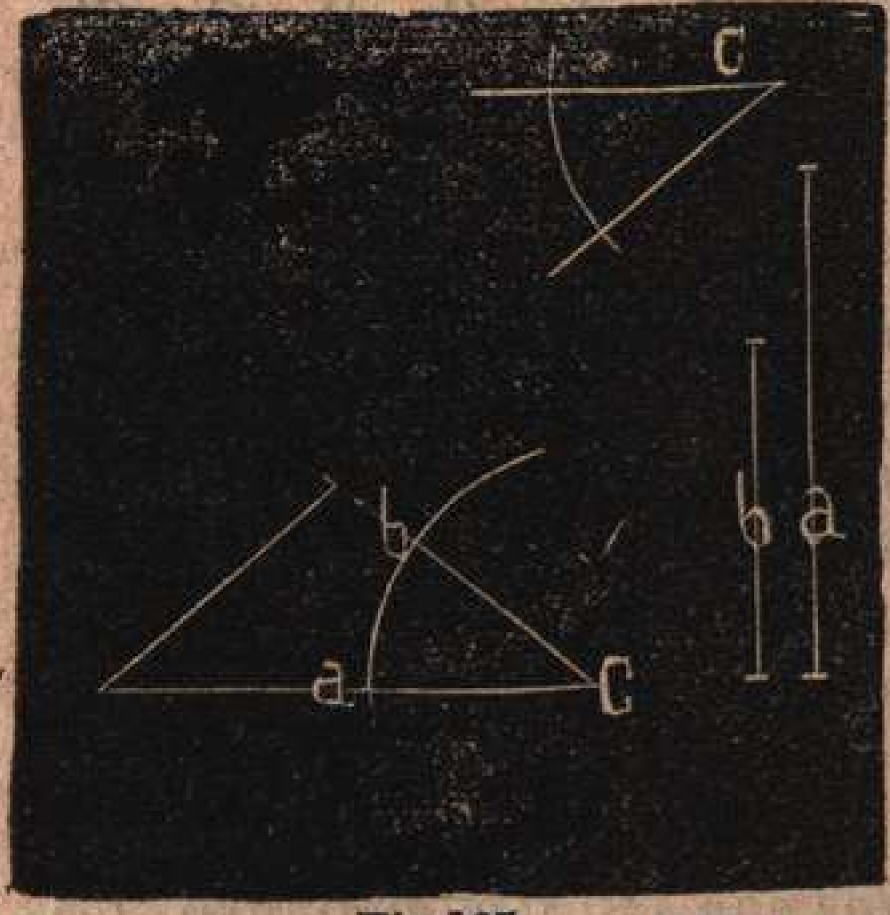


Fig. 67.

3.° *Construir un triángulo dados uno de sus lados y los dos ángulos contiguos.*

Sean (fig. 68) *a*, *B* y *C* los elementos conocidos. Sobre una recta indefinida tomaremos una distancia igual al lado conocido *a*, y en los estremos de este tomaré los arcos correspondientes para formar los ángulos B y C iguales á los dados, cuyas segundas líneas suficientemente prolongadas cerrarán el triángulo que cumple con las condiciones requeridas. Este caso nos obliga á tener en cuenta (Teor. 84) que la suma de los dos ángulos dados debe ser en grados menor que 180°.

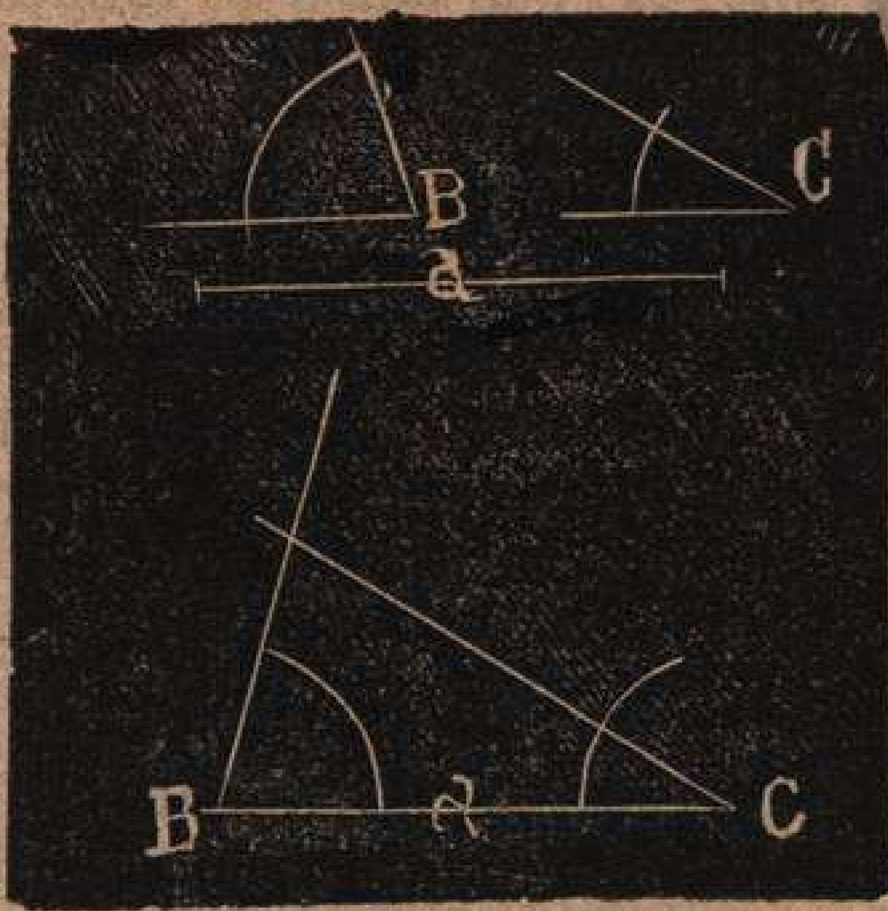


Fig. 68.

4.° *Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos, uno de estos contiguo y el otro opuesto al lado conocido.*

Sean (fig. 69) *b*, el lado conocido, A el ángulo contiguo y B el ángulo opuesto al lado dado.

Para esto se traza un ángulo NAB igual al dado A y por un punto cualquiera B de la recta AB formariamos un ángulo igual al dado B, y tomando luego AN igual al lado dado *b*, por el punto N, trazariamos la recta paralela NB', cerrándose el triángulo NB'A que cumple con las condiciones requeridas, puesto que NA=*b*; A=A y B'=B

Para este caso debe tenerse en suenta la misma consideracion espuesta para el anterior.

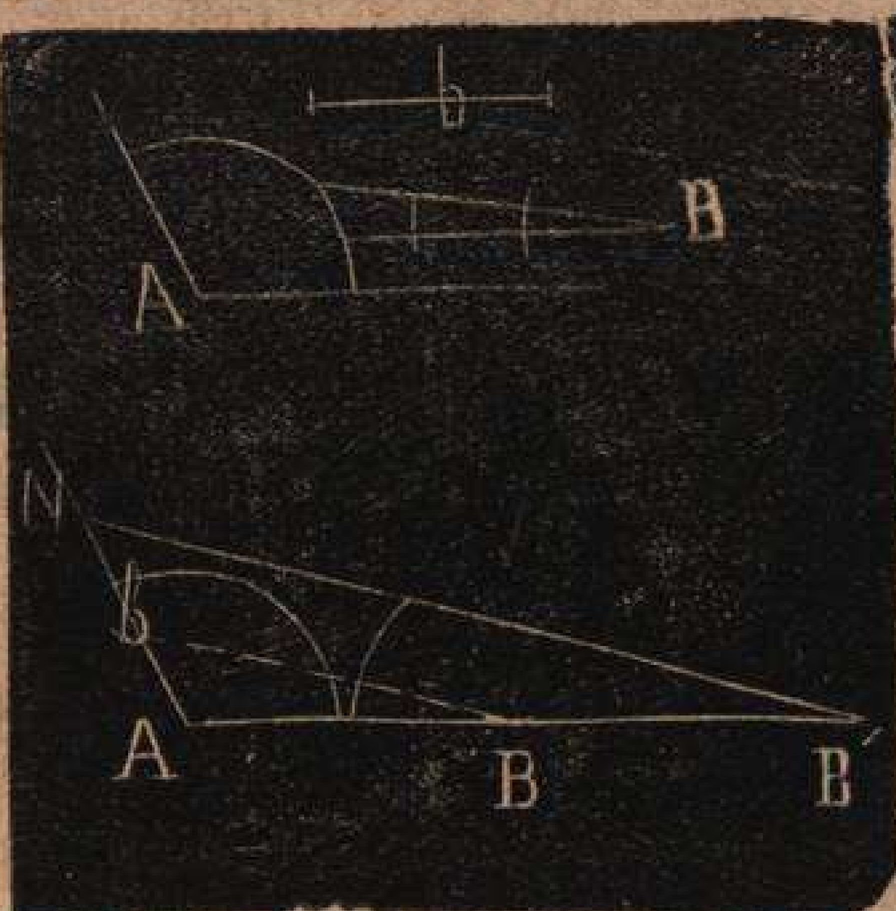


Fig. 69.

5.° *Construir un triángulo, dados dos de sus lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.*

Sean (fig. 70) *b* y *c* los dos lados dados y B el ángulo opuesto al lado B.

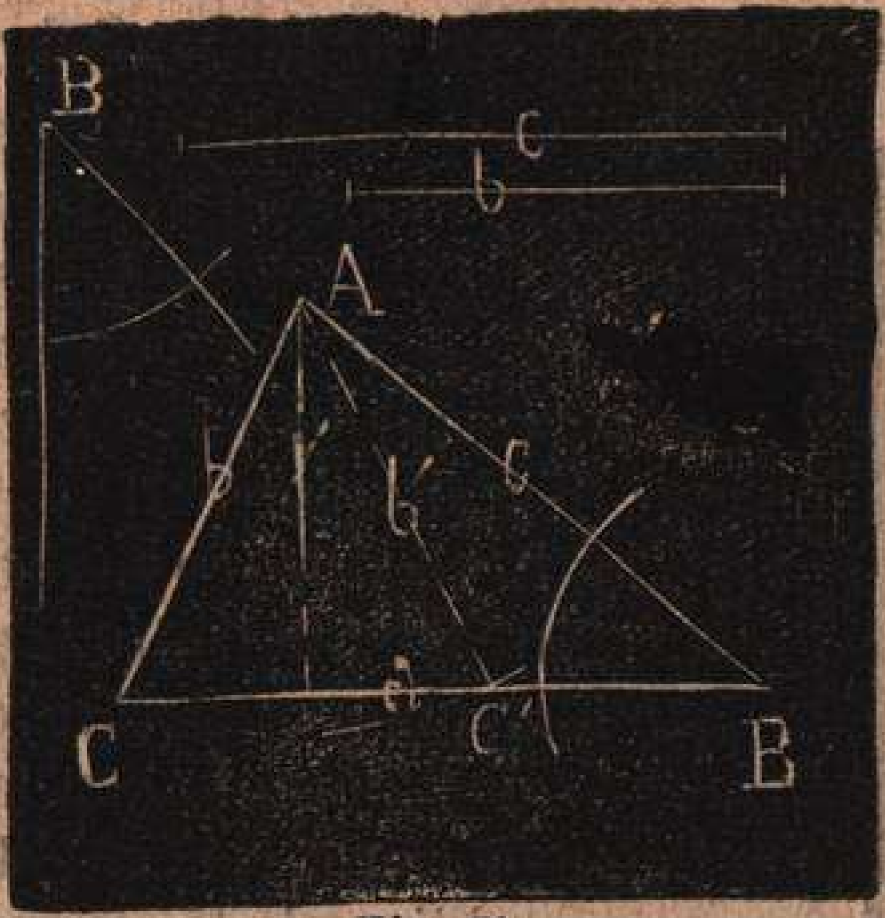


Fig. 70.

Para esto se construye el ángulo B igual al dado, sobre uno de sus lados se toma la distancia BA=*c* y con un rádio igual á *b*, haciendo centro en su estremo A se describe un arco que cortará en general al otro lado CB en dos puntos C y C', uniendo cada uno de ellos con A originará los dos triángulos ABC' y ABC que satisfacen el problema.

Discusion del mismo para todos los casos posibles.

1.er *caso.* Si el ángulo B fuese obtuso, no habria posible solucion siendo el lado $b<c$, porque en tal supuesto el ángulo opuesto al lado *c* debiera ser mas obtuso todavia (segun la 2.ª tésis del Teorema 85) lo cual absurdo.

Si el lado $b=c$, resultaria tambien absurdo por no poder un triángulo tener dos ángulos obtusos. Por tanto, en este caso solo hay posible solucion, siendo el lado $b<c$, en cuyo supuesto hay una sola solucion determinada.

2.º *caso.* Si el ángulo dado B fuese recto, no habria posible solucion siendo el lado opuesto $b<c$, porque entónces á este lado *c* se le opondria un ángulo obtuso, lo cual es, como sabemos, absurdo, porque un triángulo no puede tener un ángulo recto y otro obtuso. (4.º del Teorema 85).

Si el lado $b=c$ resultaria tambien absurdo. Y por último, solo siendo $b>c$ es posible dar una sola solucion á este problema.

3.er *caso.* Siendo el ángulo dado B agudo, y siendo $b<c$ hemos visto en la (fig. 70) que caben dos soluciones, ó el triángulo ABC' ó el ABC.

Si el lado $b=c$, tendriamos una sola solucion perfectamente determinada: y por último, siendo $b>c$, es perfectamente determinado el problema que tiene una sola solucion.

Los problemas gráficos para la construccion de triángulos rectángulos, comprenden cuatro casos.

1.º *Dados los dos catetos* b *y* c *construir un triángulo rectángulo.*

Para esto (1.ª fig. 71) se forma un ángulo recto y desde el vértice de este se toman sobre sus lados las dimensiones respectivas de sus catetos, se unen los estremos de estos y quedará construido el triángulo rectángulo con las condiciones pedidas.

2.° *Dado un cateto* b *y la hipotenusa* a *construir un triángulo rectángulo.*

Para esto (2.ª fig. 71) trazo el ángulo recto A, en uno de sus lados tomo un cateto igual al dado *b*, y desde su estremo superior con una abertura de compás igual á la hipotenusa *a* corto el otro lado del ángulo A, quedando formado así el triángulo rectángulo con las condiciones requeridas.

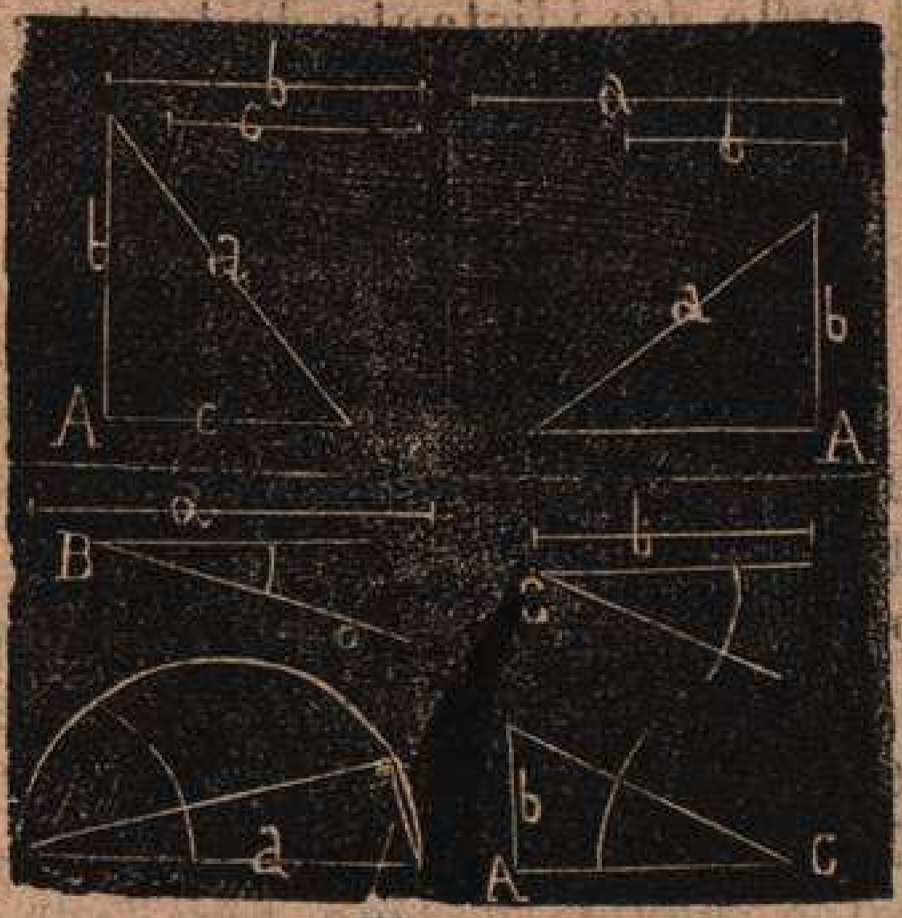


Fig. 71.

3.° *Dada la hipotenusa* a *y el ángulo agudo* B *construir el triángulo.*

Para esto (3.ª fig. 71) limito sobre una recta indefinida la longitud *a* igual á la hipotenusa dada, sobre la misma trazo una semicircunferencia, y formando en uno de los estremos del diámetro ó hipotenusa un ángulo B, igual al dado, cortará su segundo lado en un punto á la semicircunferencia, desde el cual cerraremos el triángulo, trazando una línea que vaya al otro estremo.

4.° *Dado un cateto* b *y un ángulo agudo* C, *construir un triángulo rectángulo.*

Para esto (4.ª fig. 71) trazo un ángulo recto, tomo desde su vértice una distancia AC=*b* cateto dado, y en el estremo C del mismo construyo un ángulo igual al dado, cuyo segundo lado cortará al segundo del ángulo recto, formándose un triángulo con las condiciones requeridas.

89. Teorema. *En todo triángulo se verifica que si se le trazan las tres bisectrices á sus tres ángulos, se encuentran en un punto interior del mismo.*

Vamos á demostrar (fig. 72) que si en el triángulo ABD se trazan las tres bisectrices, una en cada uno de sus tres vértices, se encuentran en el punto O.

En efecto, todo punto de la bisectriz BO, del ángulo B, equidista de los lados del ángulo: (Teorema 31) luego por tanto ON=OM.

Si trazamos ahora la bisectriz DO al ángulo D, todo punto O de la misma equidistará de los lados DB y DA, y por tanto, OM=OP; y por último, siendo ON=OP el punto O, será tambien de la bisectriz trazada al tercer ángulo A (Primer Cor. Teor. 31) luego el punto O, es punto de las tres bisectrices trazadas á sus tres ángulos, siendo por tanto equidistante de los tres lados. Este teorema tambien se enuncia diciendo:

Fig. 72.

Todo triángulo es circunscriptible á la circunferencia.

Decimos que un triángulo ú otro cualquier polígono es circunscriptible á la circunsferencia, cuando todos los lados de aquel son tangentes de esta.

90. Teorema. *En todo triángulo se verifica que las tres perpendiculares levantadas en los puntos medios de sus tres lados se encuentran en un punto.*

Vamos á demostrar (fig. 73) que las tres perpendiculares levantadas en los tres puntos medios de sus tres lados se encuentran en el punto O, interseccion comun de las mismas.

Fig. 73.

En efecto, todo punto de la recta ON, perpendicular levantada en el punto medio de la recta AB equidista de sus estremos, (Teorema 30) luego tendremos que OA=OB.

Además, todo punto de la recta OM perpendicular trazada en el punto medio de la recta BD, equidista de sus estremos, y por tanto OB=OD. Luego OA=OD, lo que nos dice que siendo tambien el punto O equidistante de A y de D, es precisamente tambien, punto de la perpendicular levantada en el punto medio del tercer lado AD. (Recíproco del Teor. 30).

De lo espuesto comprenderemos que el punto de interseccion comun de las tres perpendiculares es equidistante de los tres vértices del triángulo.

El precedente teorema puede enunciarse diciendo: *Todo triángulo es inscriptible á la circunferencia.*

Decimos en general que un triángulo ó cualquier polígono es inscriptible á la circunferencia cuando todos sus lados son cuerdas de la misma y todos sus ángulos son inscriptos en ella.

91. **Teorema.** *En todo triángulo se verifica que: si se prolongan sus lados en un mismo sentido y se trazan las tres bisectrices, una á cada uno de los tres ángulos esteriores, estas, suficientemente prolongadas, formarán otro triángulo cuyos vértices se hallen en puntos de las bisectrices de los ángulos interiores.*

Vamos á demostrar (fig. 74) que si en el triángulo ABC se prolonga el lado CA en la direccion P, el BC en la direccion N y el AB en la direccion D, y se trazan las tres bisectrices AR, BT y CO, estas suficientemente prolongadas en sentido contrario se encontrarán formando el nuevo triángulo OTR, cuyos vértices O, T y R son puntos respectivamente de las bisectrices de los ángulos interiores B, A, C del triángulo BAC dado.

En efecto, el vértice O, por ejemplo, es un punto de la bisectriz OC del ángulo esterior NCA, y por tanto, ON=OM (Teorema 31) pero el punto O es tambien punto de la prolongacion de la bisectriz AR correspondiente al ángulo PAB, y por tanto á su igual opuesto al vértice SAC, luego OM=OS, y siendo OS=ON el punto O será de la bisectriz OB correspondiente al ángulo SBN del triángulo ABC dado.

Fig. 74.

Si hacemos igual razonamiento para cada uno de los otros dos vértices T y R, quedará comprobado el teorema que nos habiamos resuelto demostrar.

92. **Teorema.** *Si cortamos un triángulo cualquiera* ABC *por una paralela* MN *á uno de sus lados* AB, *se formará un nuevo triángulo* CMN *semejante al primero,*

En efecto, sean los dos triángulos dados ACB y NCM (fig. 75) estos tendrán los tres ángulos respectivamente iguales, porque el ángulo C es comun para los dos, y los ángulos CMN y CNM son, como sabemos, iguales al B y A respectivamente por correspondientes.

Además los lados homólogos (ó de igual posicion relativa) son directamente proporcionales, y por tanto,

$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CA}.$$

Si trazamos la recta NP se tendrá $\frac{CN}{CA}=\frac{BP}{BA}$ y como las partes de paralelas MN y BP comprendidas entre paralelas son iguales, se tiene que

Fig. 75.

$$\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{BA},$$

pero esta proporcion y la primera de las anteriores, tienen una razon comun y por tanto serán iguales todas las relaciones siguientes:

$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{BA}$$

Escolio. Esta proposicion subsiste siempre aun cuando la paralela MN esté debajo de la recta AB, ó comprendida entre las prolongaciones de los dos lados AC y BC prolongados en el sentido C.

Del teorema precedente se deduce la siguiente proposicion:

93. *Si se unen los dos puntos medios de dos lados de un triángulo, la línea recta que los une es:*

1.° *Paralela á la base.*

2.° *Igual á su mitad.*

En efecto: 1.° hemos demostrado que es cierta la proporcion siguiente:

$$\frac{CM}{CB}=\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{BA}$$

de donde las rectas AB y NM son paralelas.

2.° Hemos observado que siendo NM y AP paralelas comprendidas entre las paralelas CA y MP serán iguales, lo mismo como MN y BP comprendidas entre las BC y NP. Luego MN=BP=PA=$\frac{1}{2}$AB, por tanto MN=$\frac{1}{2}$AB.

94. **Teorema.** Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes en los casos siguientes: (Fig. 75).

1.° *Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

2.° *Cuando tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales.*

3.° *Cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.*

1.^{er} *caso.* Supongamos que se tenga que A=A' y B=B': sobre el lado CB homólogo del C'B', tómese una longitud CM=C'B' y trácese la paralela MN, el triángulo CMN es semejante al CBA, y como el triángulo C'B'A'=CMN estará demostrado.

2.° *caso.* Supongamos ahora que sea A=A'

$$\text{y} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$$

tómese sobre el lado AB homólogo del A'B' una longitud AP=A'B' y por el punto P trazemos la paralela NP, el triángulo ANP es semejante ACB, y como A'B'C'=APN estará demostrado.

3.^{er} *caso.* Supongamos por último que:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

tómese sobre el lado AB una longitud AP igual á A'B' y trazando por P una paralela PN á la recta BC, esta dividirá al lado opuesto en partes proporcionates y por tanto, el triángulo APN es semejante al ABC, pero como

APN=A'B'C',

estará demostrado que ambos triángulos son semejantes.

Corolarios: 1.° *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó respectivamente perpendiculares, porque en uno y otro caso los dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales.* (44 Teorema).

2.° *Dos triángulos rectángulos para ser semejantes bastará que tengan un ángulo agudo igual.*

Escolio. Haremos observar que la *igualdad* de todos los ángulos homólogos en figuras diferentes, entraña la *proporcionalidad* directa entre sus líneas, y por tanto la *semejanza* entre las figuras, mas esto es cierto sola y esclusivamente entre triángulos, pues en otra clase de polígonos irregulares es perfectamente inexacto, aun cuando sobre este punto se espresen vagamente los autores.

95. El cuadro siguiente, en el que se hallan reunidos los casos de igualdad y semejanza de dos triángulos haciendo que se correspondan, permite comparar las dos teorías.

DOS TRIÁNGULOS SON:

Iguales	**Semejantes**
CUANDO TIENEN:	
1.° *Los tres lados iguales.*	1.° *Los tres lados proporcionales.*
2.° *Dos lados iguales é igual tambien el ángulo comprendido.*	2.° *Dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido.*
3.° *Un lado igual é iguales los dos ángulos adyacentes.*	3.° *Dos ángulos iguales.*

DOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS SON:

Iguales	**Semejantes**
CUANDO TIENEN:	
1.° *Los dos catetos iguales*	
2.° *Un cateto y la hipotenusa iguales respectivamente.*	1.° *Los dos catetos proporcionales.*
3.° *La hipotenusa y un ángulo agudo iguales respectivamente.*	2.° *Un cateto y la hipotenusa respectivamente proporcionales.*
4.° *Un cateto y un ángulo agudo iguales respectivamente.*	3.° *Un ángulo agudo igual.*

96. **Teorema.** 1.° *La bisectriz trazada interiormente en uno cualquiera de los vértices de un triángulo, divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos proporcionales á los lados adyacentes.*

2.° *La bisectriz de un ángulo esterior de un triángulo cualquiera, divide al lado opuesto, suficientemente prolongado, en dos segmentos sustractivos, proporcionales á los lados adyacentes.*

Vamos á demostrar (fig. 76) que si en el triángulo ACB se traza la bisectriz CD del ángulo ACB, se verifica

que: $\frac{AC}{AD}=\frac{CB}{BD}$.

En efecto: 1.° Prolongando el lado AC indefinidamente y trazando la bisectriz CD al ángulo C del triángulo ACB, y por el otro vértice B trazando una paralela á la bisectriz, cortará esta á la prolongacion del lado AC en el punto E, y segun lo ya demostrado (Teor. 48) tendremos que cortando las dos rectas paralelas CD y EB á los dos lados EA y BA del ángulo A se verificará que:

Fig. 76.

$$\frac{AC}{AD}=\frac{CE}{BD}.$$

Pero ahora tenemos que el àngulo ACD=E por correspondientes, y el ángulo ACD=DCB por hipótesis, y como el DCB=EBC por alternos internos, será el ángulo E=EBC, y por tanto el triángulo ECB es isoscelos, en cuyo supuesto CE=CB; sustituyendo en la proporcion anterior resultará que: $\frac{AC}{AD}=\frac{CB}{BD}$, que es lo que se queria demostrar.

Como los dos segmentos AD y DB suman el lado AB se llaman *aditivos*.

2.° Trazando la recta BE', paralela á la bisectriz CD' correspondiente al ángulo esterno BCE, se tiene en el triángulo ACD'. $\frac{D'B}{D'A}=\frac{CE'}{CA}$.

Por otra parte el ángulo BE'C es el correspondiente del ACD', y los ángulos E'BC iguales BCD' por alternos internos; además por ser CD' bisectriz del ángulo BCE, los ángulos D'CE y D'CB son iguales; por tanto, los ángulos BE'C y E'BC son tambien iguales, y el triángulo BCE' es isosceles. Reemplazando ahora en la proporcion anterior el lado CE' por CB resultará que: $\frac{D'B}{D'A}=\frac{CB}{AC}$, que es lo que se queria demostrar.

Como la diferencia de los dos segmentos D'A y D'B componen el lado AB, se llaman *sustractivos.*

Recíprocamente podremos decir:

Si una recta que parte del vértice de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, esta recta es la bisectriz del ángulo considerado ó del suplementario, segun que corte al mismo lado opuesto ó á su prolongacion.

La demostracion de este recíproco es la inversa del Teorema directo.

97. Se llama *proyeccion* del punto P sobre una recta EA (fig. 77) al pié E de la perpendicular á esta recta, trazada desde aquel punto. La proyeccion de la recta ilimitada PQ, sobre la recta EA, perpendicular á la anterior, es siempre un punto. Llámase á la 1.ª *proyectante* y la 2.ª *de proyeccion*. La proyeccion de la recta SR, sobre la recta EA, es la distancia DC comprendida entre las proyecciones de los puntos estremos S y R de la primera sobre la segunda.

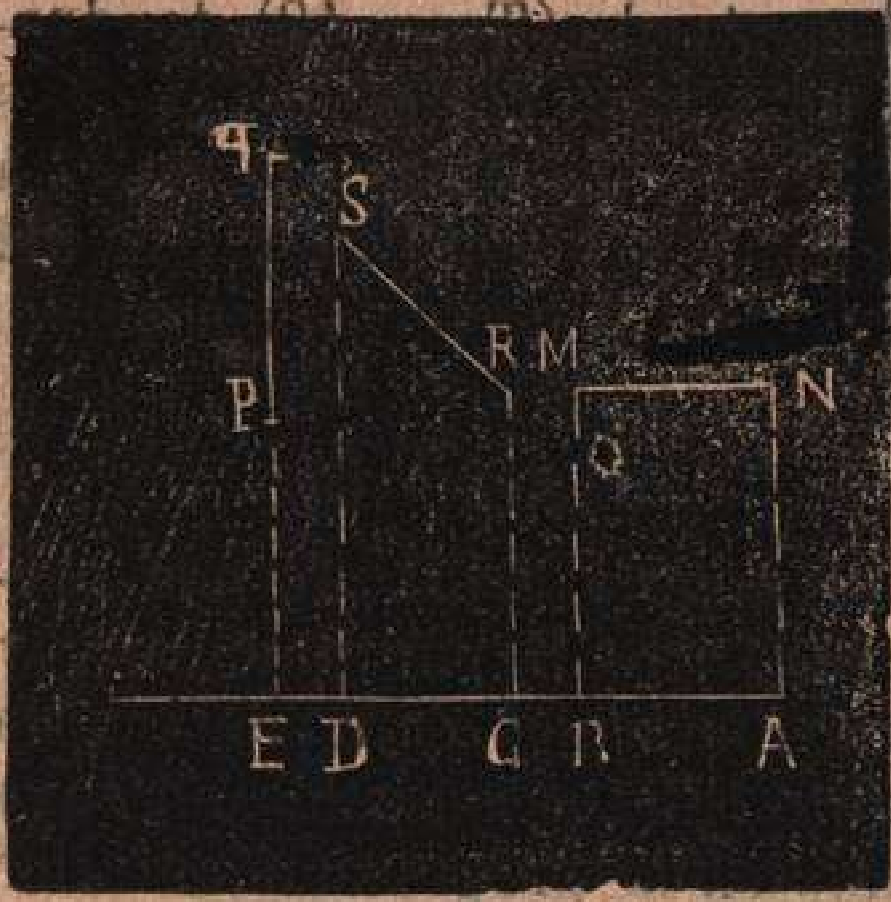


Fig. 77.

Cuando la recta proyectante es oblícua á la recta de proyeccion, esta es menor que aquella, tanto mas, cuanto mas se aproxime en su inclinacion á la perpendicularidad.

La proyeccion de la recta MN sobre su paralela la recta EA, es la distancia igual AB comprendida entre las proyecciones de los estremos de la misma B y A, porque rectas paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.

De lo dicho comprenderemos:

1.° *La proyeccion de una recta perpendicular, es un punto.*

2.° *La proyeccion de una recta oblícua, es otra menor que ella.*

3.° *La proyeccion de una recta paralela, es otra igual á ella.*

98. **Teorema.** Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular sobre la hipotenusa, se verifica:

1.° *Dicha perpendicular divide al triángulo rectángulo en otros dos rectángulos semejantes entre sí y semejantes con el total.*

2.° *La perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa.*

3.° *Cada uno de los dos catetos es media proporcional entre toda la hipotenusa y su proyeccion sobre esta.*

4.° *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de todo triángulo rectángulo es equivalente á la suma de los formados sobre los catetos.*

5.° *Los cuadrados de los catetos son directamente proporcionales á los segmentos de la hipotenusa.*

6.° *La perpendicular es cuarta proporcional con la hipotenusa y los dos catetos.*

En efecto, si en el triángulo rectángulo ABC (fig. 78) se traza la perpendicular AD á la hipotenusa BC desde el vértice opuesto A, se tendrá:

1.° Los triángulos ABC y DAC, son ámbos rectángulos, el 1.° en A, el 2.° en D, y como tienen comun el ángulo en C, serán tambien iguales los ángulos CBA del total y el DAC del parcial mayor, como se comprueba evidentemente por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Los triángulos ABC total y DBA parcial menor, son tambien rectángulos que tienen el ángulo en B comun, y los ángulos ACB y BAD iguales por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Por último. *siendo semejantes cada uno de los parciales con el total, tambien serán semejantes entre sí los dos parciales.*

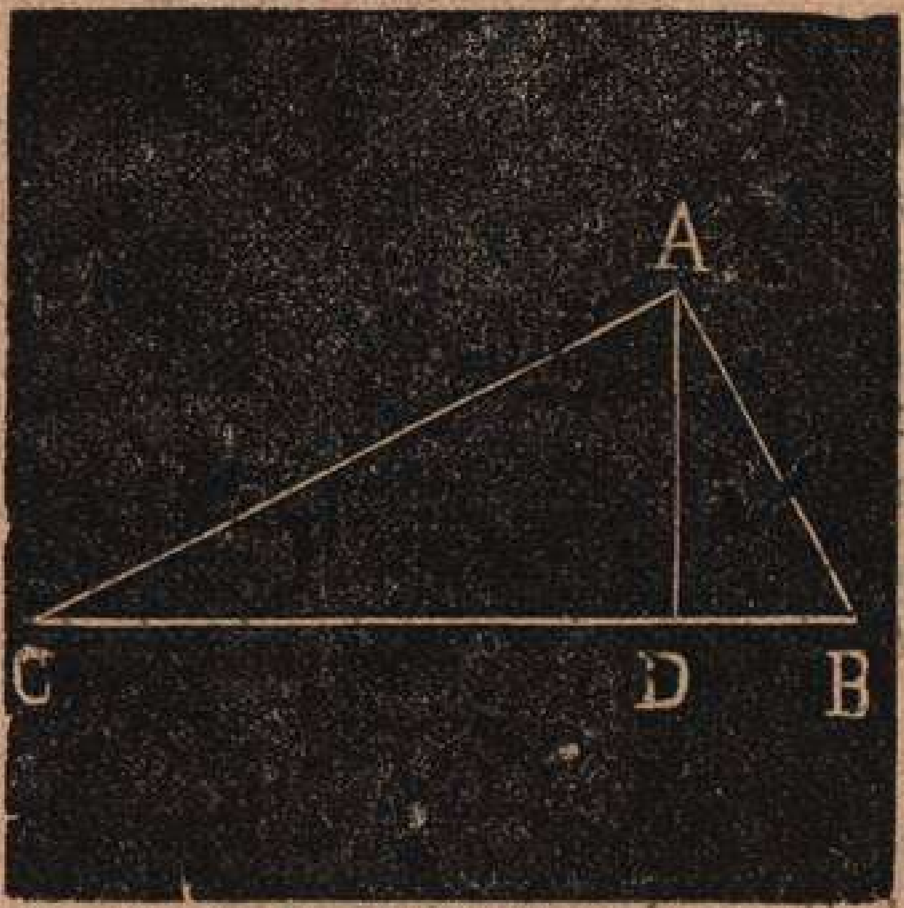


Fig. 78.

Estableciendo proporcionalidad entre sus lados homólogos resultará:

2.° Comparando los dos triángulos parciales CDA y ADB, tendremos: cateto mayor del parcial mayor, es á su cateto menor, como cateto mayor del parcial menor es á su cateto menor; es decir:

$$CD:DA::DA:DB.$$

Lo que nos dice que *la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa.*

3.° Comparando el triángulo total ABC con el parcial mayor DAC resultará: Hipotenusa del total es á su cateto mayor, como hipotenusa del parcial mayor es á su cateto mayor. Es decir,

$BC:AC::AC:CD$ y por tanto, $\overline{AC}^2=BC\times CD$.

Comparando ahora el triángulo total ABC, con el parcial menor DBA, diremos: Hipotenusa del total es á su cateto menor, como hipotenusa del parcial menor á su cateto menor. Es decir, que

$CB:AB::AB:DB$ y por tanto $AB^2=BC\times DB$,

lo cual nos dice que *cada uno de los dos catetos es media proporcional entre toda la hipotenusa y su segmento adyacente, ó su proyeccion sobre esta.*

4.° Si sumamos miembro á miembro las dos igualdades $\overline{AC}^2=BC\times CD$ y $AB^2=BC\times DB$ obtenidas anteriormente, tendremos: $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=BC\times CD+BC\times DB$; separando el factor comun del segundo miembro, tendremos: $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=BC(CD+DB)$ y como $CD+DB=BC$ tendremos por último $\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=BC^2$ lo que nos dice que *el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los dos catetos.* Este Teorema es conocido con el nombre de **Teorema de Pitágoras.**

5.° Si partimos miembro á miembro las dos mismas igualdades anteriores $\overline{AC}^2=BC\times CD$ y $\overline{AB}^2=BC\times DB$, tendremos que $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{BC\times CD}{BC\times DB}$, simplificando el segundo miembro resultará que $\overline{AC}^2:\overline{AB}^2::CD:DB$, lo que nos dice que *los cuadrados de los catetos son directamente proporcionales con los segmentos de la hipotenusa.*

6.° Si comparamos el triángulo total ACB con el parcial menor DAB, tendremos que: Hipotenusa del total es á su cateto mayor, como hipotenusa del parcial menor es á su cateto mayor, es decir $BC:AC::BA:AD$, lo que nos dice que. *La perpendicular es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los dos catetos.*

Si sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo trazamos una circunferencia, haciendo centro en *el punto medio de dicha hipotenusa el cual tiene la propiedad de equidistar de los tres vértices,* resultará ser la hipotenusa un diámetro y los catetos cuerdas de la espresada circunferencia, pudiéndose enunciar las proposiciones anteriores de la manera siguiente.

Si desde un punto cualquiera de una circunferencia se baja una perpendicular sobre el diámetro y se trazan desde dicho punto, dos cuerdas á sus estremos, se verifica:

1.° *Dichas cuerdas y el diámetro forman un triángulo rectángulo semejante á los dos parciales formados por la perpendicular, por cada cuerda y la proyeccion de esta sobre el diámetro.*

2.° *La perpendicular bajada sobre el diámetro es media proporcional entre los segmentos de este.*

3.° *Cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y la proyeccion de aquella sobre este.*

4.° *El cuadrado construido sobre el diámetro es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre las cuerdas.*

5.° *Los cuadrados de las cuerdas son proporcionales directamente á las proyecciones de estas sobre el diámetro.*

6.° *La perpendicular es cuarta proporcional con el diámetro y las dos cuerdas.*

De la semejanza de los triángulos sacamos importantes aplicaciones, como luego veremos, para la determinacion de distancias inaccesibles en todo ó en parte.

De ser la perpendicular trazada desde un punto de la circunferencia sobre el diámetro, media proporcional entre los segmentos de este, damos resolucion al problema (esplicado en el número 74) de determinar una media proporcional entre dos rectas dadas.

El cuarto teorema, facilita en la práctica el cálculo de determinar un lado de un triángulo rectángulo, cuando se conocen los otros dos, porque en efecto si $H^2=C^2+c^2$ espresando con cada letra respectivamente la hipotenusa y los catetos, se verificará que: $C^2=H^2-c^2$ y por tanto,

$$C=\sqrt{H^2-c^2}=\sqrt{(H+c)(H-c)}$$

y tambien $c^2=H^2-C^2$ en donde

$$c=\sqrt{H^2-C^2}=\sqrt{(H+C)(H-C)}.$$

99. Teorema. *En todo triángulo acutángulo se verifica que el cuadrado construido sobre un lado, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros* *dos lados*, menos *el doble producto de uno de ellos, multiplicado por la proyeccion del otro sobre él.*

En efecto, sea el triángulo ACB; (fig. 79) si desde el vértice C bajamos la perpendicular CD sobre la base AB, tendremos, segun el 4.° teorema de los anteriores ó sea el de *Pitágoras*, que en el triángulo rectángulo ACD es $\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+AD^2$, pero siendo la perpendicular CD un cateto tambien, del triángulo rectángulo CDB, resultará que $\overline{CD}^2=CB^2-BD^2$: por el mismo teorema, y siendo $AD=AB-BD$ resultará que

$$\overline{AD}^2=(AB-BD)^2=$$
$$\overline{AB}^2-2.AB.BD+\overline{BD}^2,$$

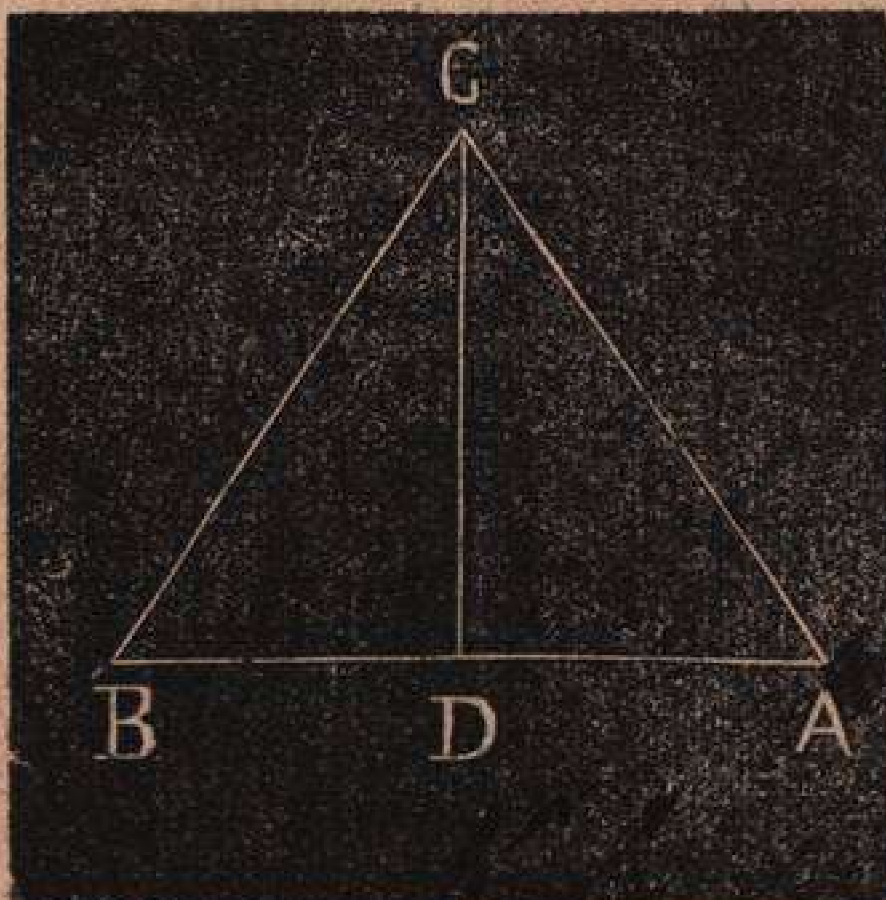


Fig. 79.

Si repetimos la primera igualdad sustituyendo en el segundo miembro los valores obtenidos para $\overline{CD}^2$ y para $\overline{AD}^2$ respectivamente, tendremos que

$$\overline{AC}^2=\overline{CB}^2-\overline{BD}^2+AB^2-2AB\times BD+\overline{BD}^2$$

la cual simplificando nos dá que:

$$\overline{AC}^2=\overline{CB}^2+\overline{AB}^2-2AB\times BD$$

que es lo que nos proponiamos demostrar.

100. Teorema. *En todo triángulo obtusángolo se verifica que el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo obtuso, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados*, mas *el doble producto de uno de ellos, multiplicado por la proyeccion del otro sobre él.*

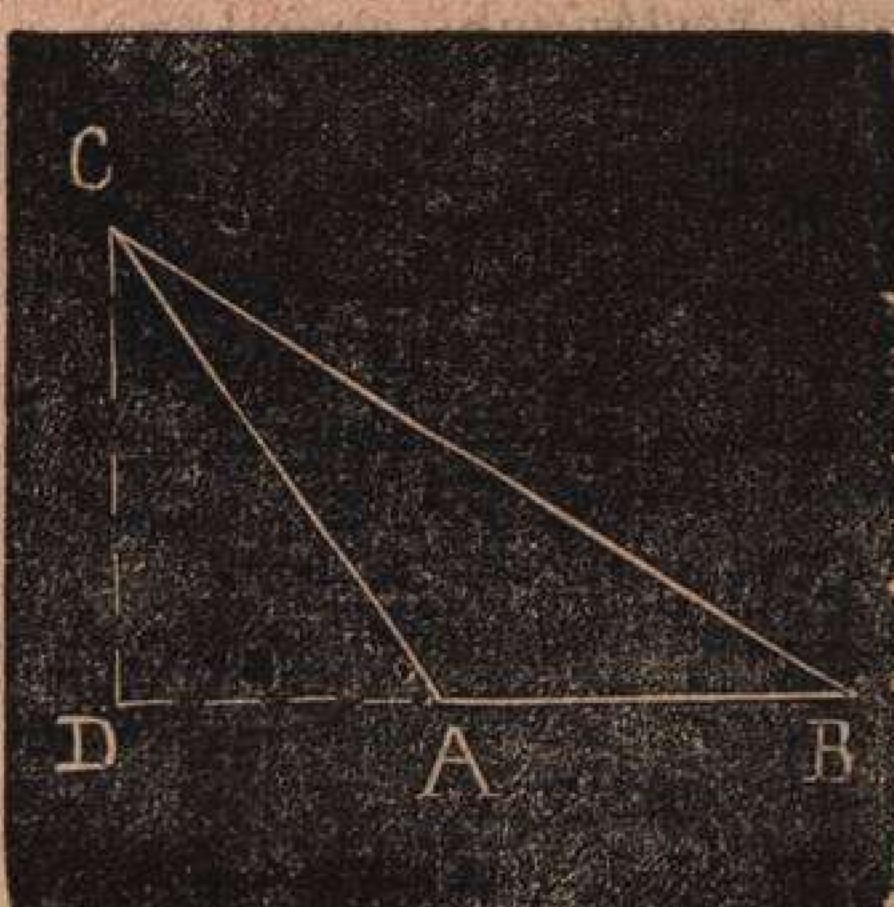


Fig. 80.

En efecto, sea ABC el triángulo obtusángulo (figura 80) bajando la perpendicular CD sobre la base, caerá esta, en un punto de su prolongacion.

Segun el Teorema de *Pitágoras*, tenemos en el triángulo rectángulo BCD que

$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$, pero CD es tambien un cateto del triángulo rectángulo ACD y por tanto $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DA}^2$.

Ahora bien, DB=DA+AB y por tanto

$$\overline{DB}^2 = (DA+AB)^2 = \overline{DA}^2 + 2DA \times AB + \overline{AB}^2$$

y sustituyendo en el segundo miembro de la primera igualdad tendremos que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DA}^2 + \overline{DA}^2 + 2DA \times AB + \overline{AB}^2$$

en la cual simplificando resultará que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \times AD,$$

que es lo que se queria demostrar.

Corolario. *De lo anteriormente espuesto deduciremos que si el cuadrado construido sobre uno de los lados de un triángulo es mayor, igual ó menor que la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados, el ángulo opuesto al primero será respectivamente obtuso, recto ú agudo.*

Recíproco. *Si un ángulo de un triángulo es obtuso, recto ó agudo, el cuadrado construido sobre su lado opuesto será respectivamente mayor, igual ó menor que la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados.*

101. El completo estudio del triángulo nos facilita la resolucion de un sin número de problemas, por medio de los cuales se determina toda distancia accesible ó inaccesible, se calculan las distancias mas insondables; con su poderoso apoyo se dá cabal solucion á todo aquello que es dependiente de la ciencia de la estension; sirva de ejemplo el planteamiento y resolucion de los problemas siguientes:

1.° *Conocida la altura de un faro, calcular á que distancia se verá el mismo desde alta mar con buen tiempo.*

Fig. 81.

Para esto, supongamos (figura 81) que sea BC la altura del faro, sabiendo que el rádio terrestre =6;366.198 metros.

La mayor distancia á que será visto el punto B del faro será AB.

Supongamos que el faro se halle sobre el nivel del mar á la altura de 100 metros.

En el triángulo rectángulo AOB tendremos que

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{AO}^2$$

en la que siendo $OB=BC+CO=100+6366198=6366298$ y $AO=6366198$; luego por tanto,

$$AB^2=(6.366298)^2-(6.366198)^2=1273.249600$$

luego $AB=\sqrt{1273.249600}=35682$ metros, es decir que se verá á mas de $35\ ^1/_2$ kilómetros.

Por triángulos rectángulos semejantes resolver los problemas siguientes: (1)

102. 2.° *Determinar la altura de una torre ó árbol solo accesible por su base.*

Para esto, sea el árbol dado AB (fig. 82) desde un punto C dirijo una visual á su cúspide, hecho esto por un punto cualquiera D de la recta AC se clava un estilete ó jalon cuyo punto superior E se halle en la visual CB, y habremos formado así dos triángulos rectángulos CDE y CAB que son semejantes por tener comun el ángulo C y por tanto diremos:

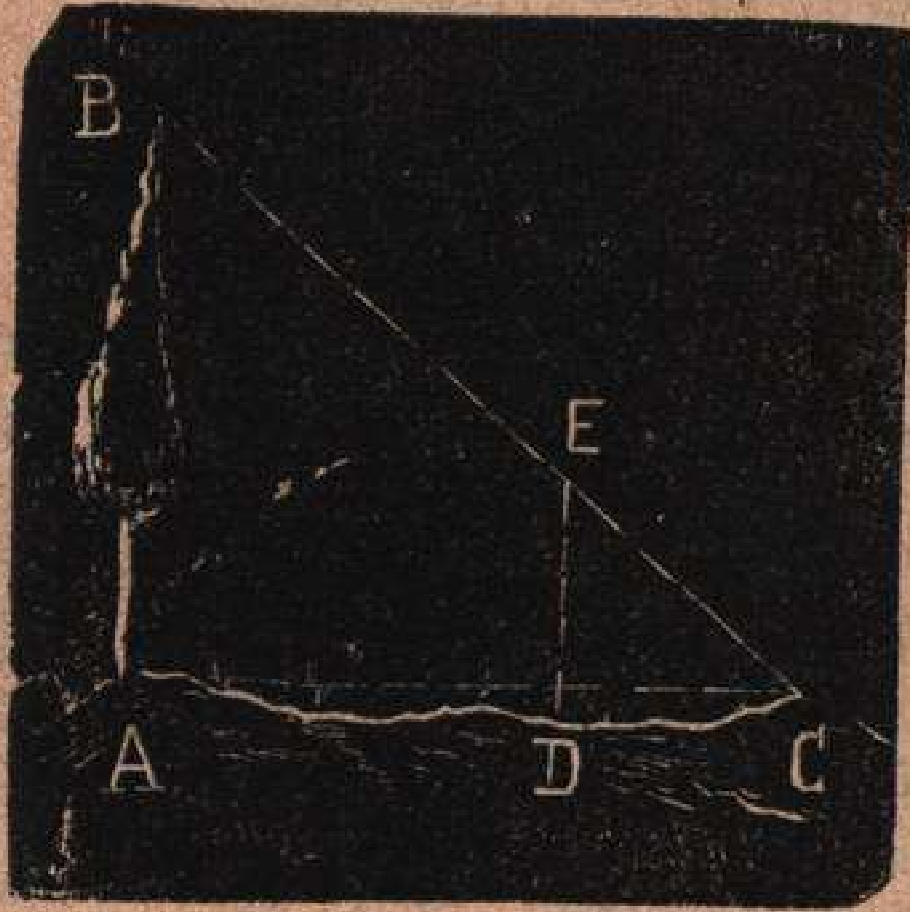


Fig. 82.

$$\frac{CD}{DE}=\frac{CA}{AB},\text{ donde } AB=x:$$

si suponemos, por ejemplo, que $CD=5$, $DE=8$, $CA=10$ metros, resultará ser $AB=16$.

103. 3.° *Determinar la anchura de un rio.*

Para esto, sea la incógnita AB (fig. 83) marcaremos un punto A de su orilla enfrente de B para que dicha recta AB marque la verdadera perpendicular á la direccion de la corriente, es decir, la anchura del rio; y otro punto D, tambien á la orilla y algo mas distante, levanto en D una perpendicular á la recta DA, la cual será la recta DE, hasta cualquier punto E, por ejemplo, y marcándose en la recta DA el punto C en que la visual

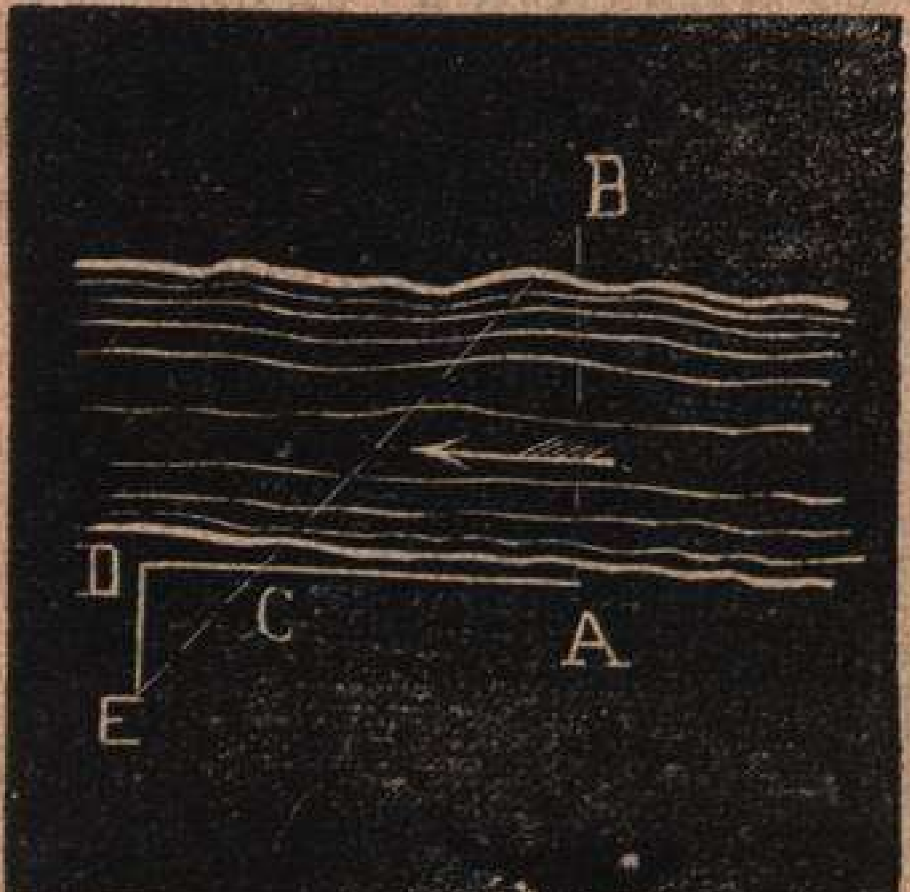


Fig. 83.

(1) Seria conveniente á este objeto una breve descripcion de algunos de los goniometros, especialmente del Grafómetro, que tanta semejanza tiene con el trasportador ó semicírculo graduado.

EB corta á dicha recta, habremos así formado dos triángulos rectángulos EDC y BAC que tienen el ángulo agudo en C iguales por opuestos al vértice, siendo por tanto semejantes, así que: $\frac{CD}{DE}=\frac{CA}{AB}$ donde $AB=x$. Si suponemos que CD, DE y CA sean respectivamente iguales á 7, 11 á 19,5 metros, resultará ser AB=29,5 metros.

Por triángulos oblicuángulos semejantes resolver los problemas siguientes:

104. 4.° *Determinar la longitud de una laguna.*

Sea AB (fig 84) la incógnita que tratamos de despejar.

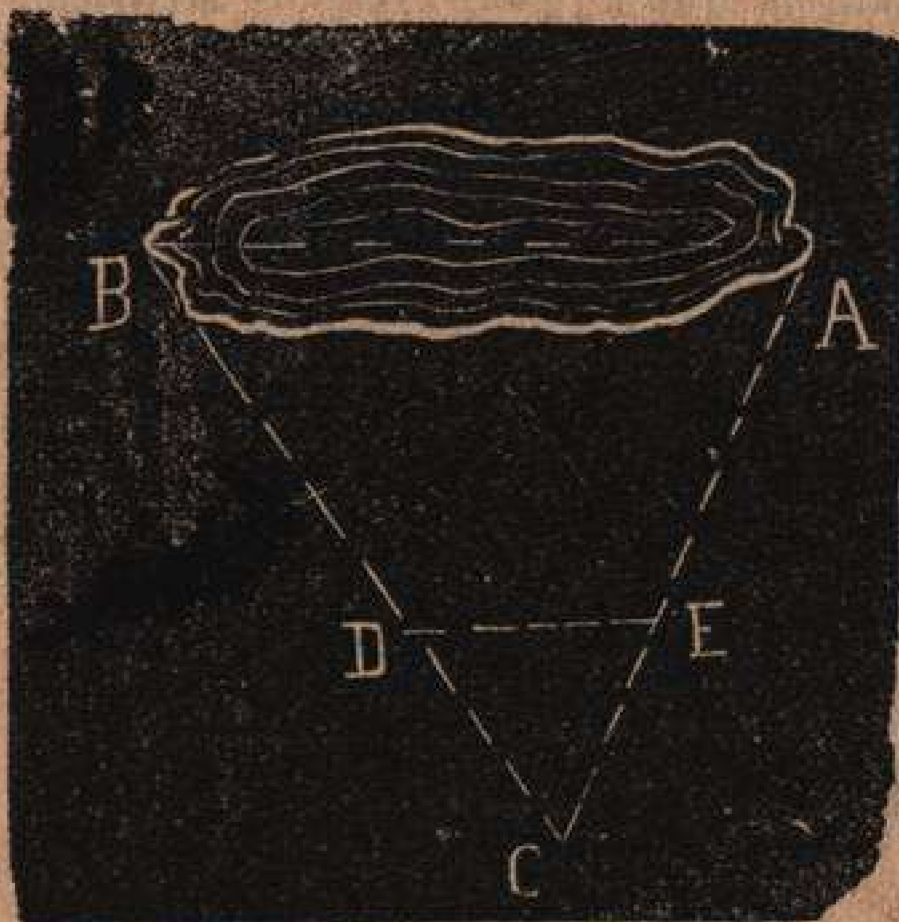


Fig. 84.

Desde un punto cualquiera C dirijo las visuales CA y CB á sus estremos, tomo una parte alícuota de la distancia CA, tal como la distancia CE, (su 3.ª parte) y en la otra recta CB la distancia CD (que debe ser tambien su tercera parte) (estos puntos C, A, B, E y D se señalan con piquetes) y las líneas que los unen, segun la figura, formarán los triángulos semejantes CED y CAB; en los que tendremos $\frac{CE}{DE}=\frac{CA}{AB}$ donde $AB=x$, si esponemos que CE=7, DE=6,5 y CA=21 metros, resultará ser AB=19.5.

105. 5.ª *Determinar la distancia entre dos puntos lejanos é inaccesibles.*

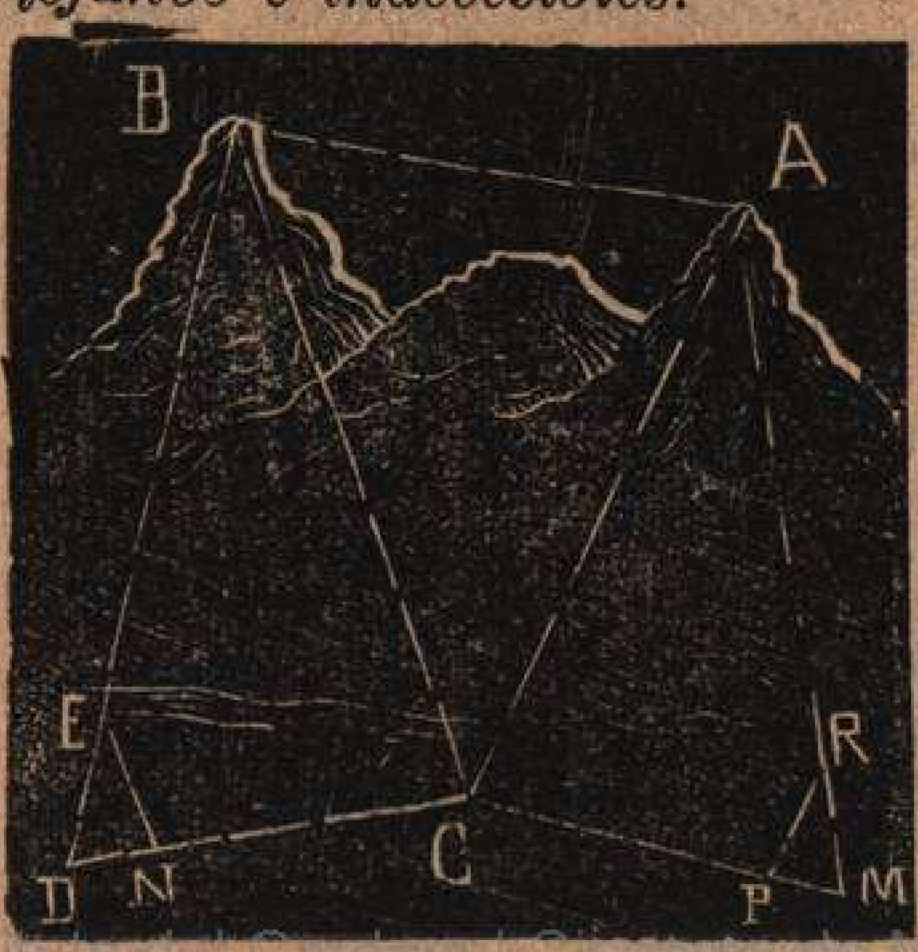


Fig. 85.

Sean los dos puntos dados A y B (fig. 85): desde uno cualquiera C dirijo las visuales CA y CB, la incógnita será la recta AB: señalo á la derecha de C un punto M, y desde él dirijo las visuales MC y MA; por un punto de la recta CM, tal como el P, trazo la recta PR paralela á la CA y tendremos

MP : PR :: MC : CA,

donde $CA=x$: supongamos

que MP=30, PR=40 y CM=60, resultará CA=80. Desde un punto cualquiera D á la izquierda de C dirijo las visuales DC y DB y por un punto cualquiera N de la recta DC, trazo la NE paralela á la CB, verificándose de ser tambien semejantes los triángulos DNE y DCB que

DN:NE::DC:CB donde CB=x,

si DN=30, NE=45 y DC=50 resultará ser CB=75.

Si medimos ahora con un *grafómetro* (que es un instrumento topográfico parecido al semicírculo graduado) el ángulo BAC y nos dá ser =45°, construiriamos en el papel un ángulo de 45°, limitariamos sus lados, uno con 80 unidades de cualquier escala y el otro con 75, y la distancia comprendida entre sus estremos será referida á unidades de la misma escala, la correspondiente al valor de la incógnita pedida, que en este caso será 59,5 metros.

Son innumerables los problemas que pueden resolverse por medio de los triángulos semejantes: sin embargo, siempre se aplican con ventaja, por las razones que espondremos oportunamente, los medios trigonométicos para la resolucion de los triángulos, cuyos métodos nos proporciona la *Trigonometría* que no se ocupa mas que de la resolucion de los mismos.

Cuadriláceteros,

106. Se llama cuadriláctero la porcion de plano limitada por cuatro rectas que se cortan.

Las rectas que los limitan se llaman lados.

La inclinacion de cada dos lados contiguos forman los ángulos.

La interseccion de cada dos lados, forman sus vértices.

Las líneas que unen dos vértices no contiguos, son sus diagonales.

Conforme ya hemos indicado, nos ocuparemos solo de los cuadriláceteros que tienen sus ángulos salientes y sus dos diagonales interiores, es decir, de los cuadriláceteros *convexos*.

Todo cuadriláctero tiene cuatro ángulos y cuatro lados y por tanto tiene ocho elementos.

Entre los elementos angulares *de todo cuadriláctero* se verifica la propiedad siguiente:

107. Teorema. *La suma de los cuatro ángulos de un cuadriláctero componen 4 ángulos rectos ó valen juntos 360°*

En efecto, trazando en el mismo una diagonal, quedará descompuesto en dos triángulos, y como la suma de los seis ángulos de estos dos triángulos equivalen á los cuatro del cuadriláctero, y además, segun el Teorema 84, la suma de los tres ángulos de un triángulo valen dos ángulos rectos, resultará que los seis ángulos de los dos triángulos ó de los cuatro del cuadriláctero, valdrán cuatro ángulos rectos, los que, como sabemos, equivalen á 360°.

Corolarios. 1.° *Si un cuadriláctero tiene tres ángulos rectos, el cuarto será tambien recto.*

2.° *Conocidos tres de los cuatro ángulos de un cuadriláctero, se determinará el valor del cuarto por lo que falte á la suma de estos para valer cuatro rectos.*

3.° *Si entre dos ángulos contiguos ú opuestos de un cuadriláctero suman dos rectos ó son suplementarios, entre los otros dos contiguos ú opuestos sumarán tambien otros dos ángulos rectos ó serán suplementarios.*

4.° *Un cuadriláctero no puede tener cuatro ángulos obtusos, ni tres obtusos y uno recto, ni dos obtusos y dos rectos, ni uno obtuso y tres rectos.*

108. Los cuadriláceros se dividen en *Paralelógramos, Trapecios* y *Trapezoides.*

Los Paralelógramos tienen sus lados iguales y paralelos dos á dos.

Los Trapecios tienen dos lados desiguales pero paralelos, y si son iguales, no paralelos.

Los Trapezoides no tienen paralelos ninguno de sus lados.

Llamamos *base* de un paralelógramo, á uno cualquiera de sus lados, y *altura* á la perpendicular á la base comprendida entre las dos paralelas.

Se llaman *bases* del trapecio los dos lados paralelos, y *altura* la perpendicular bajada de una de las bases á la otra, es decir, la distancia comprendida entre estas.

Tambien puede considerarse como base de un trapecio á uno de sus dos lados no paralelos, y altura á la perpendicular trazada á esta, desde el punto medio de su lado opuesto.

Hay cuatro clases de paralelógramos, el *Cuadrado, Rectángulo, Rombo* y *Romboide.*

El *Cuadrado* tiene los cuatro lados iguales y los ángulos rectos; es el único polígono regular cuadrangular.

El *Rectángulo* tiene los cuatro ángulos rectos y dos lados mayores que los otros dos; es por tanto equiángulo, pero no equiláctero, verificándose ser este el único polígono que cumple con tal condicion.

El *Rombo* tiene sus cuatro lados iguales y de sus ángulos, dos son obtusos y dos agudos; este cuadriláctero-paralelógramo es equiláctero pero no equiángulo.

El *Romboide* tiene los lados y los ángulos iguales dos á dos los opuestos. Dos de sus ángulos son obtusos y los otros dos son agudos. Dos de sus lados son mayores que los otros dos.

Del Paralelógramo.

109. Teorema. En todo paralelógramo se verifica:

1.° *Los lados opuestos son respectivamente iguales.*

2.° *Los ángulos opuestos son respectivamente iguales.*

3.° *Las diagonales se cortan mútuamente en dos partes iguales.*

Sea ABCD (1.ª de la fig. 86) el paralelógramo propuesto.

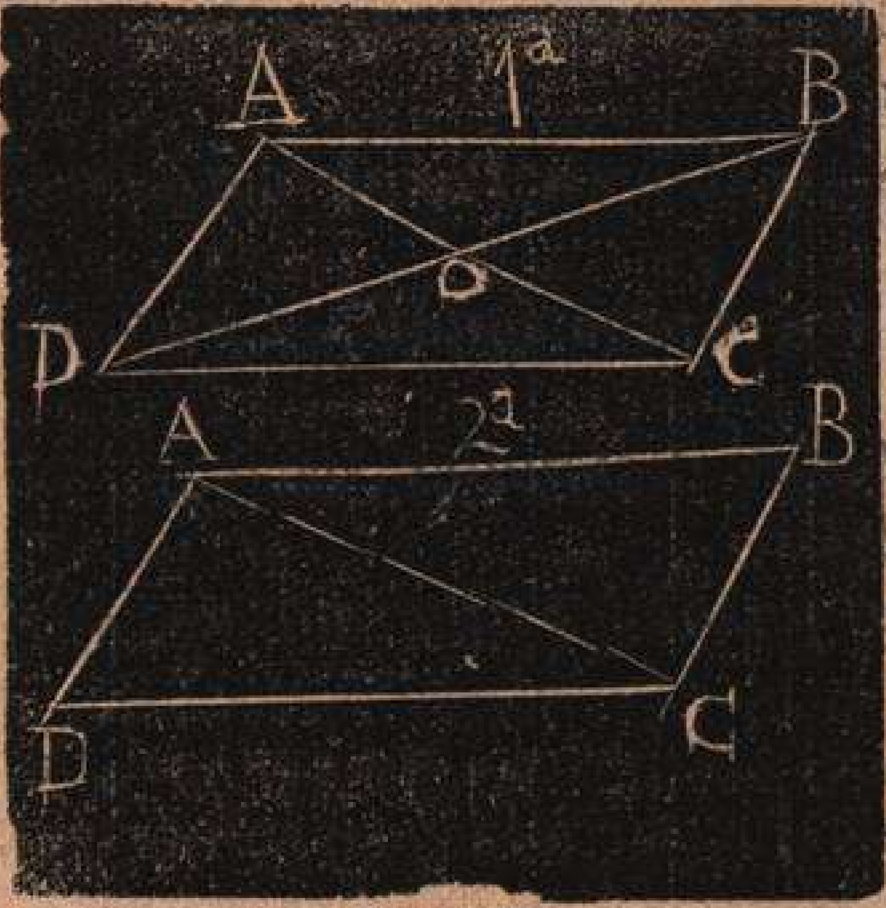


Fig. 86.

1.° Dos lados opuestos cualquiera, AB y CD por ejemplo, son iguales entre sí, porque son partes de paralelas comprendidas entre paralelas. (Teorema 42).

2.° Dos ángulos opuestos cualquiera tales como DAB y BCD son iguales, porque están formados por lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario (Teorema 44) AB y CD son efectivamente rectas paralelas, como lo son tambien las AD y CB.

3.° (2.ª fig. 86). Cada una de las diagonales AC y BD está dividida por la otra en el punto O en dos partes iguales, porque en efecto, los dos triángulos AOB y DOC tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, puesto que el lado AB igual al lado CD, por lados opuestos de un paralelógramo; el ángulo OAB igual al OCD, por alternos internos entre las paralelas AB y CD y la secante AC; el ángulo OBA igual al ángulo ODC, por alternos internos entre las mismas paralelas y la secante BD. Luego los triángulos AOB y DOC son tambien iguales. De todo lo cual inferiremos que el lado

OB, opuesto al ángulo OAB, es igual al lado OD opuesto al ángulo OCD, y el lado OA opuesto al ángulo OBA, es tambien igual al lado OC opuesto al ángulo ODC.

110. Teorema. Un cuadriláctero se llama Paralelógramo, cuando tiene:

1.° *Sus lados opuestos respectivamente iguales.*

2.° *Sus ángulos opuestos respectivamente iguales.*

3.° *Sus lados opuestos á la vez que iguales, paralelos.*

4.° *Cuando sus diagonales se cortan mutuamente en dos partes iguales.*

Para esto, sea ABCD (2.ª fig. 86) el cuadriláctero.

1.° Tracemos la diagonal AC y observaremos que son iguales los dos triángulos ABC y ADC por tener el lado AC comun, AB y CD iguales, como tambien AD y BC por rectas paralelas comprendidas entre paralelas. De consiguiente el ángulo BAC, opuesto á BC, es igual al ángulo ACD opuesto á AD, y como además estos ángulos son alternos internos entre las paralelas AB y DC siendo AC la secante serán tambien iguales. La igualdad entre los ángulos BCA y CAD es tambien evidente, y por la misma razon el paralelismo de los otros dos lados AD y BC. *Por tanto, el cuadriláctero* ABCD *teniendo sus lados opuestos respectivamente iguales es un paralelógramo.*

2.° Los ángulos opuestos B y D son iguales entre sí lo mismo que los ángulos A y C, pues dos ángulos consecutivos de este cuadriláctero, tales como B y C, valen juntos dos rectos, porque son internos de un mismo lado, formados aquellos por las paralelas AB y DC y la secante BC, y por tanto valen juntos 180°. Ahora bien, los ángulos A y B por ser suplementarios determinan análogamente el paralelismo de los otros dos lados AD y BC. Luego el cuadriláctero ABCD es un paralelógramo, toda vez que A=C.

3.° Sean ahora AB y CD los dos lados opuestos que se suponen iguales y paralelos. Trazando la diagonal AC se formarán dos triángulos ABC y ADC que tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales, es decir, el ángulo BAC=ACD por alternos internos entre las paralelas AB y CD cortadas por la secante AC; los lados AB y CD iguales por hipótesis, y el lado AC comun. De la igualdad de dichos triángulos resulta la de los ángulos ACB y CAD, y como estos ángulos son alternos internos con respecto á las dos rectas AD BC y la secante AC, dichas dos rectas son paralelas. Luego el cuadriláctero ABCD que tiene sus lados opuestos paralelos é iguales es un paralelógramo.

4.° Suponiéndose que OA=OC (1.ª figura 86) y OB=OD, puesto que los ángulos AOB y COD son opuestos por el vértice, los dos triángulos AOB y COD serán iguales. El ángulo OAB es por lo tanto igual al OCD. Por otra parte, siendo estos ángulos alternos internos son iguales, siéndolo tambien los lados opuestos AB y CD que son paralelos. De ser iguales los triángulos AOD y BOC, se deduce análogamente la igualdad de los ángulos OAD y OCB, y por tanto el paralelismo de los otros dos lados opuestos AD y BC. Por lo cual el cuadriláctero ABCD será un paralelógramo.

111. Teorema. 1.° *Las diagonales del cuadrado son iguales y perpendiculares.* 2.° *Las del rectángulo son iguales y oblícuas.* 3.° *Las del rombo son desiguales y perpendiculares.* 4.° *Las del romboide son desiguales y oblícuas.*

En efecto, (1.ª figura, 87) representa un *cuadrado* en el cual han sido trazadas sus dos diagonales: si consideramos que siendo sus lados iguales, lo son tambien tomados dos á dos los contiguos, nos hará ver (Teorema 30) que sus dos diagonales son perpendiculares. Si consideramos ahora la igualdad de los dos triángulos en que cada diagonal divide al cuadrado (Teorema 87) nos hará ver la igualdad de las dos diagonales.

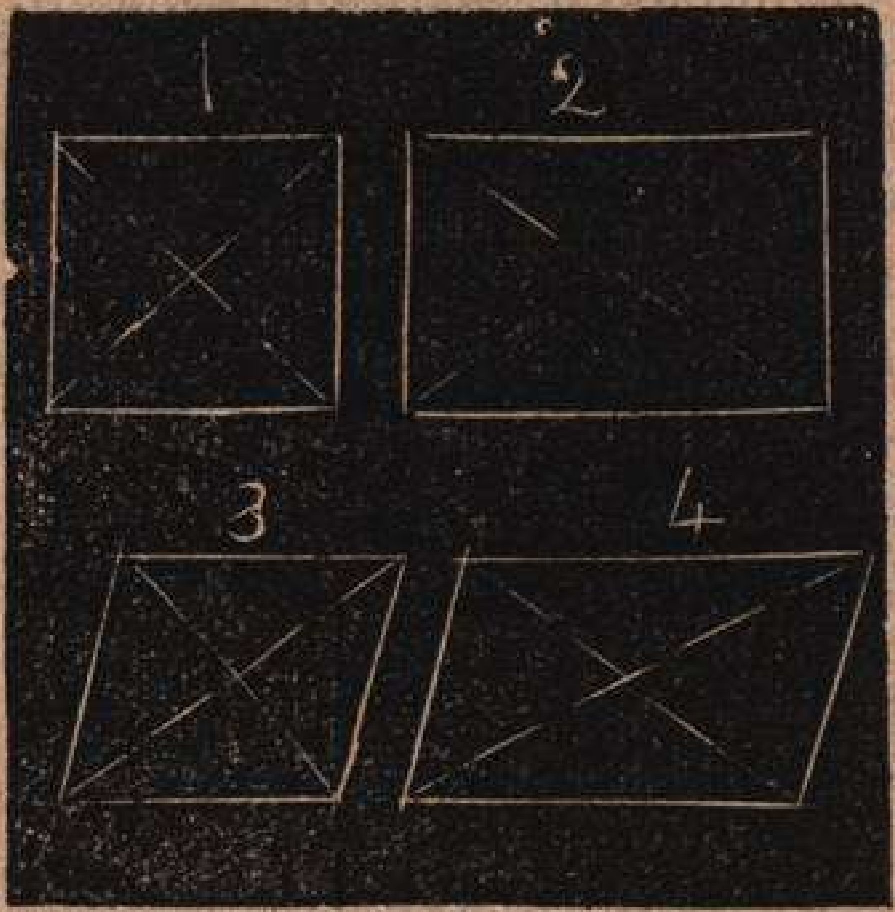


Fig. 87.

2.° (2.ª fig. 87) Representa un *rectángulo* con sus dos diagonales, en el que observaremos, que de la igualdad de los dos triángulos en que cada diagonal divide al rectángulo, resulta la igualdad de las dos diagonales; y de la desigualdad de dos de los 4 triángulos contíguos que tienen dos lados iguales, y diferente el ángulo comprendido (Teorema 86) resulta la oblicuidad de dichas dos diagonales.

3.° En la (3.ª fig. 87) que representa un *rombo* con sus dos diagonales, comprobaremos la perpendicularidad de estas, por la igualdad de cada dos lados contiguos (Teorema 30); y de la desigualdad que existe entre los triángulos, segun comparemos uno de los en que la diagonal que une los vértices de los ángulos agudos, divide al rombo, con otro de los en que la otra diágonal que tambien le divide, uniendo los vértices de los ángulos obtusos, deduciremos la desigualdad de dichas dos diagonales.

Este 2.° estremo tambien lo podemos demostrar por el Teorema 86.

4.° En la (4.ª fig. 87), que representa un *romboide* con sus dos diagonales, deduciremos ser estas oblícuas, de la desigualdad de los dos triángulos formados, ambos por la base, cada uno de los dos lados contiguos y cada una de las dos diagonales; segun el teorema 86. Luego por tanto la diagonal que une los vértices de los ángulos agudos, y esta opuesta á los ángulos obtusos, es mayor que la otra.

Si comparamos dos triángulos contíguos, de los cuatro en que las dos diagonales dividen al romboide, observaremos tienen un lado comun, y otro del uno, igual al otro del otro, por mitades de una diagonal (3.ª tésis del Teorema 109) y siendo diferente el ángulo comprendido, al mayor se opondrá mayor lado, deduciéndose de aquí la desigualdad de las dos diagonales.

Recíprocamente *diremos*: 1.° *Si las diagonales de un paralelógramo son iguales y perpendiculares, es aquel un* cuadrado. 2.° *Si son iguales pero oblícuas, es aquel un* rectángulo. 3.° *Si son desiguales pero perpendiculares, es aquel un* rombo. 4.° *Si son desiguales y oblícuas es aquel un* romboide.

Corolario. *La diagonal de un paralelógramo, le divide siempre en dos triángulos iguales. Porque en efecto, tienen un lado comun y cada uno de los otros dos lados son iguales por rectas paralelas comprendidas entre paralelas. Luego por tanto, teniendo los 3 lados del uno respectivamente iguales á los tres del otro, resultarán ser iguales.*

112. Recíproco. *A todo triángulo le podemos considerar como la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*

113. Teorema. *Un paralelógramo estará determinado siempre que sean conocidos dos de sus lados contíguos, y el ángulo comprendido entre ambos.*

En efecto: siendo un triángulo la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura, y estando determinado un triángulo (segun el 2.° caso del núm. 88) por dos lados y el ángulo comprendido entre ambos, lo estará tambien el paralelógramo, de quien es aquel su exacta mitad.

Corolarios: 1.° *Siendo isosceles los dos triángulos en que una diagonal divide al cuadrado, y siendo recto el ángulo comprendido entre dichos dos lados iguales, bastará que solo se dé un cateto de un triángulo rectángulo isosceles para construir este; luego por tanto para construir un cuadrado basta dar uno de sus lados.*

2.° *Siendo rectángulos los dos triángulos en que cualquier diagonal divide al paralelógramo rectángulo, y determinándose un triángulo rectángulo conocidos sus dos catetos, bastará conocer dos lados contiguos para construir un paralelógramo rectángulo.*

3.° *Siendo isosceles los dos triángulos en que cada diagonal divide al rombo, y siendo suficiente para construir un triángulo isosceles, conocer uno de sus dos lados iguales y el ángulo comprendido entre los mismos, bastará conocer un lado y un ángulo para construir un rombo.*

4.° *No siendo isosceles los triángulos en que cada diagonal divide al romboide, y no siendo rectos sus ángulos, resultará que para construir un romboide se precisa siempre conocer dos lados contiguos y el ángulo comprendido.*

114. El conocimiento de los corolarios anteriores nos facilita la resolucion de los cuatro problemas siguientes:

1.° *Construir un Cuadrado dado uno de sus lados.*

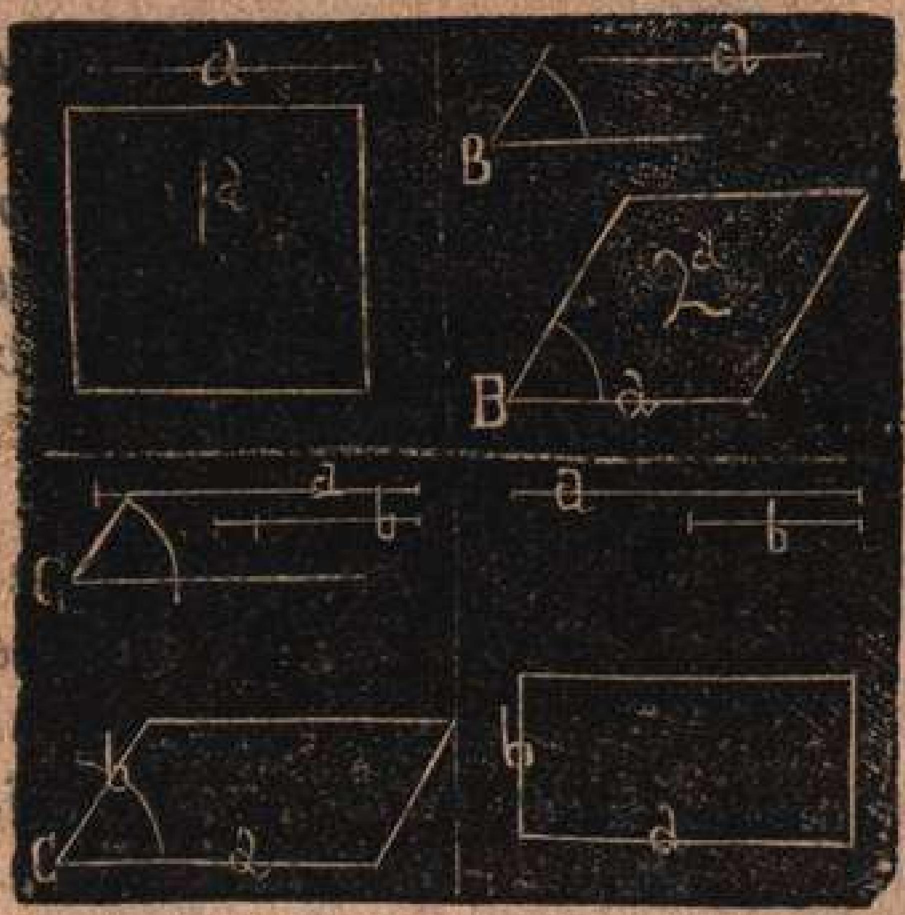


Fig. 88.

Para esto (1.ª fig. 88) en la misma recta dada *a*, ó en otra igual á la dada, construyo dos ángulos rectos, uno en cada estremo, limito estos segundos lados, con una longitud igual á la recta dada, y uno estos estremos, cerrando esta 4.ª recta el cuadrado pedido.

2.° *Construir un Rombo dado un lado y un ángulo.*

(2.ª fig. 88.) Para esto, formo un ángulo igual al dado, limito los dos lados de este con una longitud igual á la recta dada, y desde cada uno de los estremos de este, trazo un arco, y uniéndose los puntos de interseccion de estos con dichos estremos, formaremos el rombo pedido.

3.° *Construir un Romboide dados dos lados y el ángulo comprendido.*

Para esto (3.ª fig. 88) trazo un ángulo igual al dado, y haciendo que cada uno de los dos lados de este sea igual á cada una de las dos rectas dadas, y trazando desde el estremo de la mayor un arco, con la abertura del compás de la menor, que se intercepte, con otro arco, trazado desde el estremo de la menor, con un rádio igual á la mayor, uniendo este punto de interseccion con los estremos de los dos lados del ángulo, tendremos formado el Romboide pedido.

4.° *Construir un Rectángulo dados dos lados.*

Para esto, (4.ª fig. 88) formo un ángulo recto, limito sus lados con las dos longitudes dadas, y levantando perpendiculares en los estremos de manera que se encuentre, cerrarán el rectángulo pedido.

115. La determinacion de un paralelógramo, exige en general tres elementos; dos tratándose del Rectángulo y del Rombo, y uno solo tratándose del Cuadrado.

Del conocimiento del Teorema precedente se establecen los siguientes casos de igualdad de dos paralelógramos.

1.° *Dos cuadrados son iguales cuando tienen un lado igual.*

2.° *Dos rectángulos son iguales cuando tienen dos lados contíguos del uno, iguales á dos contíguos del otro.*

3.° *Dos rombos son iguales cuando tienen un lado y un ángulo igual.*

4.° *Dos romboides son iguales cuando tienen dos lados y ángulo comprendido iguales.*

116. Estando determinado un paralelógramo por uno de los dos triángulos iguales en que la diagonal le divide, (Teorema 113) y sabiendo los casos de semejanza de dos triángulos (92), determinaremos los que existen entre dos paralelógramos diciendo:

Dos paralelógramos son semejantes en los casos siguientes:

1.° *Dos cuadrados son siempre semejantes.*

2.° *Dos rectángulos son semejantes cuando tienen las bases y las alturas proporcionales.*

3.° *Dos rombos cuando tienen un ángulo igual.*

4.° *Dos romboides cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido.*

Del cuadriláctero propiamente dicho.

117. Llamamos *Trapecio* á todo cuadriláctero que tiene dos lados paralelos y dos que no lo son. Si este tiene dos ángulos rectos se llama *Trapecio rectángulo*; y si los dos lados no paralelos son iguales, se llama *trapecio isosceles ó simétrico.*

118. Teorema. *En todo trapecio se verifica que la recta que une los puntos medios de sus dos lados no paralelos, es:*

1.° *Paralela á entrambas bases.*

2.° *Igual á la semisuma de estas.*

En efecto, sea ABCD (fig. 89) el trapecio dado: la recta GH será la que una los dos puntos medios G y H de los dos lados AD y BC no paralelos del mismo, la cual pasará por el punto medio N de la diagonal DB; teniéndose que $GN=\frac{AB}{2}$ y $NH=\frac{CD}{2}$ segun lo espuesto en el número 93, y por tanto $GN+NH=GH=\frac{AB+CD}{2}$.

Siendo DF=FE la recta GH será equidistante de la DC y de la AB: por tanto

La línea que une los dos puntos medios de los dos lados no paralelos de un trapecio, llamada paralela media, es igual á la semisuma de las bases y paralela á las mismas

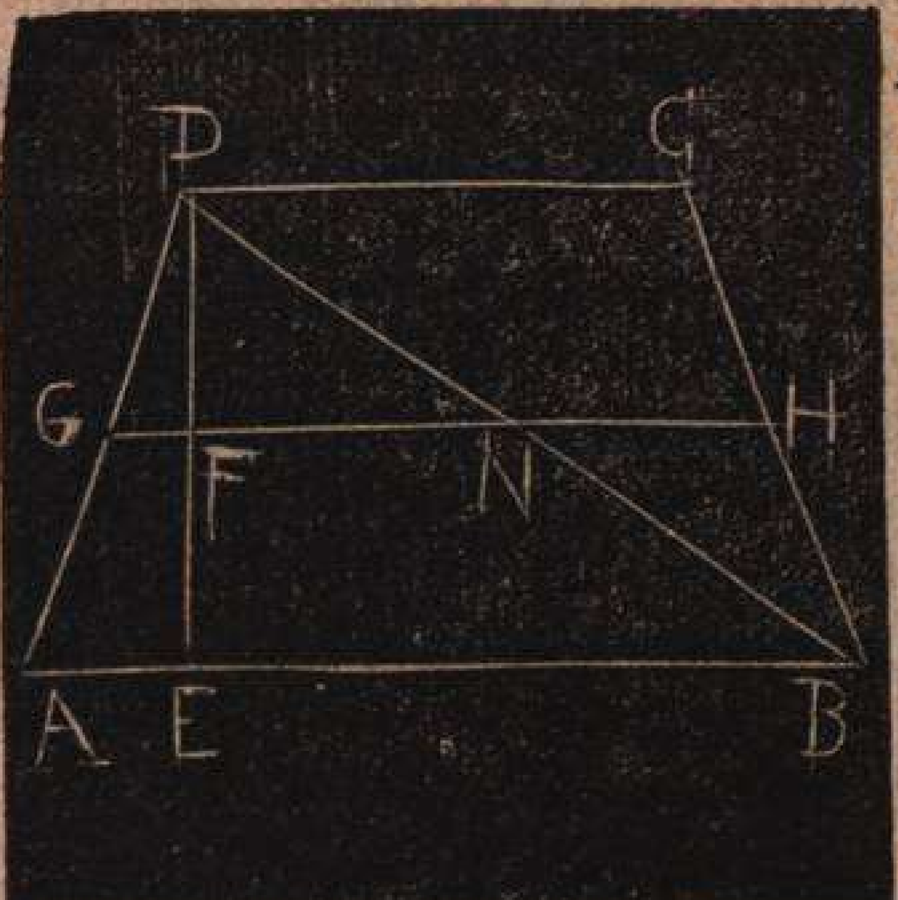


Fig. 89.

119. Teorema. *Todo cuadriláctero está determinado siempre que lo estén los dos triángulos en que se puede descomponer trazando una diagonal.*

En efecto, supongamos el cuadriláctero ABCD (fig. 89) en el cual la diagonal DB se descompone en los dos triángulos ABD y DBC; cada uno de estos estará determinado, conocidos: 1.° Los tres lados. 2.° Dos lados y el ángulo comprendido. 3.° Un lado y los dos ángulos adyacentes. (Teorema 87.)

1.er **Caso.** Si se conocen los tres lados de cada uno de los triángulos ABD y DBC, resultará que estos son los cuatro lados del cuadriláctero y una de sus diagonales; luego: *un cuadriláctero está determinado siempre que sean conocidos sus cuatro lados y una de sus diagonales.*

2.° **Caso.** Si se conocen los lados AB, AD y el ángulo A, y los lados DC y BC: con los tres primeros elementos, podremos formar el triángulo ABD, y con los otros dos lados DC y CB, sobre el ya determinado DB formariamos el otro triángulo. Por tanto: *un cuadriláctero está determinado siempre que sean conocidos sus cuatro lados y uno de sus ángulos.*

3.er **Caso.** Si se conocen los lados DA, AB, el ángulo A, el lado BC, y el ángulo en B, con los tres primeros elementos construimos el triángulo DAB, y formándose en B, sobre la recta DB, un ángulo ABC igual al dado B, limitando luego este lado BC, y uniendo los puntos C y D formaremos el cuadriláctero; luego: *un cuadriláctero está determinado, siempre que sean conocidos tres de sus lados y los dos ángulos comprendidos.*

4.° **Caso.** Si se conocen los lados AD, AB, el ángulo en A y los ángulos D y B, resultará que con los tres primeros elementos formaremos el triángulo ABD, y formándose en D, sobre la recta AD un ángulo igual al dado D, y sobre la recta AB, en B un ángulo igual al dado B, prolongándose estas rectas, cerrarán el cuadrilàctero ABCD, luego por tanto, *un cuadriláctero está determinado siempre que sean conocidos dos lados contiguos y los tres ángulos adyacentes á los mismos.*

5.° **Caso.** Si se conocen el lado AB, el ángulo A, el ABD, el ABC y el ADC, resultará que con los tres primeros elementos formaremos el triángulo ABD, y con los otros dos formaremos en B y D los ángulos iguales á los dados sobre las rectas AB y AD, determinándose el cuadriláctero; luego: *un cuadriláctero está determinado siempre que sean conocidos un lado y los cuatro ángulos.*

120. De lo espuesto compreuderemos que la determinacion de un cuadriláctero exige por lo menos cinco elementos, verificándose que de cada uno de los casos anteriores se desprende uno de igualdad de cuadriláceros en el órden siguiente:

Dos cuadriláceros son iguales cuando tengan:

1.° *Sus cuatro lados respectivamente iguales y una diagonal homóloga tambien igual.* 14

2.° *Sus cuatro lados respectivamente iguales y un ángulo homólogo tambien igual.*

3.° *Tres de sus lados respectivamente iguales, así como los dos ángulos comprendidos entre estos.*

4.° *Dos lados contiguos iguales respectivamente, así como los tres ángulos adyacentes á estos.*

5.° *Un lado y tres ángulos del mismo y el formado por una diagonal con el lado conocido.*

121. *En todo cuadriláctero se verifica que las rectas que unen los puntos medios de sus cuatro lados, trazadas entre cada dos contiguos, forman un paralelógramo.*

Vamos á demostrar, que siendo ABCD (fig. 90) el cuadriláctero dado, si uno los puntos medios N, Q, M y E de sus cuatro lados AB, BC, CD y DA, por las rectas NQ, QM, ME y EN, digo que el cuadriláctero NQME es un paralelógramo.

En efecto, trazando la diagonal AC, descompondrá al cuadriláctero en los dos triángulos ABC y ACD, y por tanto, en el ABC, segun el (Teor. 93) la recta NQ que une los puntos medios N y Q de los dos lados AB y BC, es paralela á AC é igual á su mitad; Ahora bien, en el triángulo ACD, la recta EM que une los dos puntos medios E y M de los dos lados AD y DC es tambien paralela á AC é igual á su mitad; luego por tanto, NQ y EM son paralelas é iguales, lo mismo como QM y NE, luego por último, el cuadriláctero EMQN es un *paralelógramo* porque tiene sus lados opuestos iguales y paralelos.

Fig. 90.

122. **Teorema.** *En todo cuadriláctero inscripto en una circunferencia se verifica que la suma de dos ángulos opuestos es igual á la suma de los otros dos, siendo por tanto cada dos opuestos suplementarios.*

Sea ADNB (fig. 91), el cuadriláctero inscripto, vamos á demostrar que $B+D=A+N=2R$.

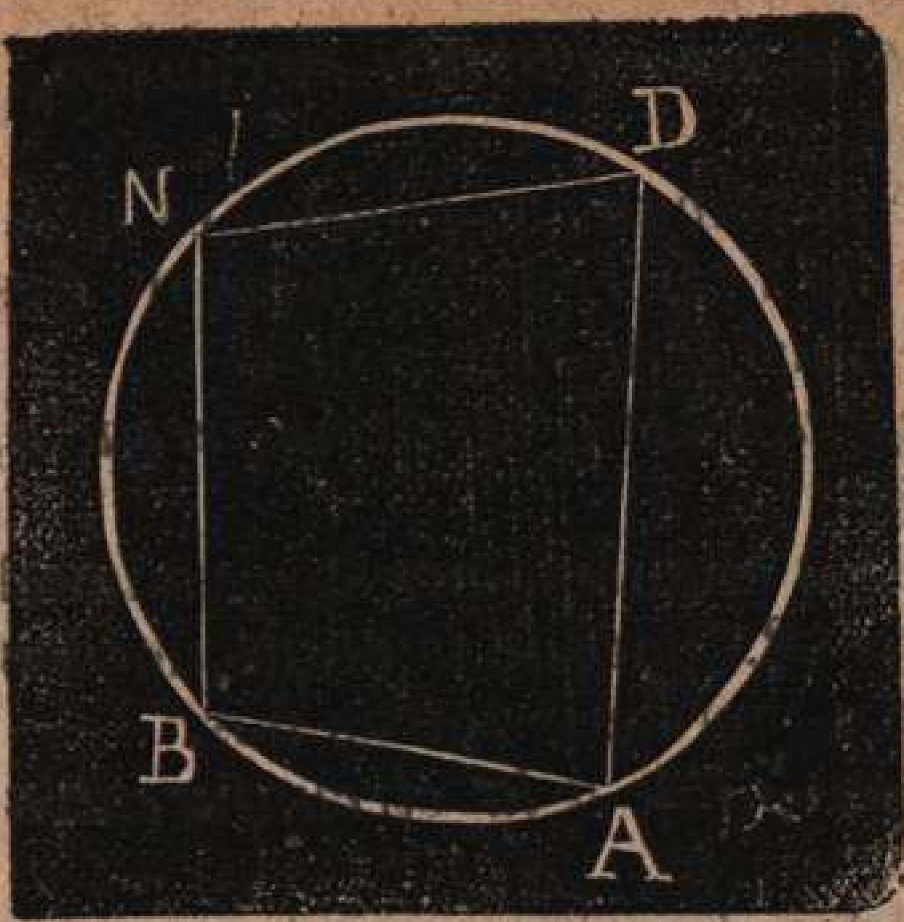


Fig. 91.

En efecto, los dos angulos B y D son inscriptos y entre los dos abrazan toda la circunferencia, valiendo por tanto la mitad, es decir dos ángulos rectos.

Igual consideracion podemos establecer para los ángulos A y N que son tambien inscriptos y valen juntos 180°.

123. Teorema. *En todo cuadriláctero circunscripto á la circunferencia se verifica que la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos.*

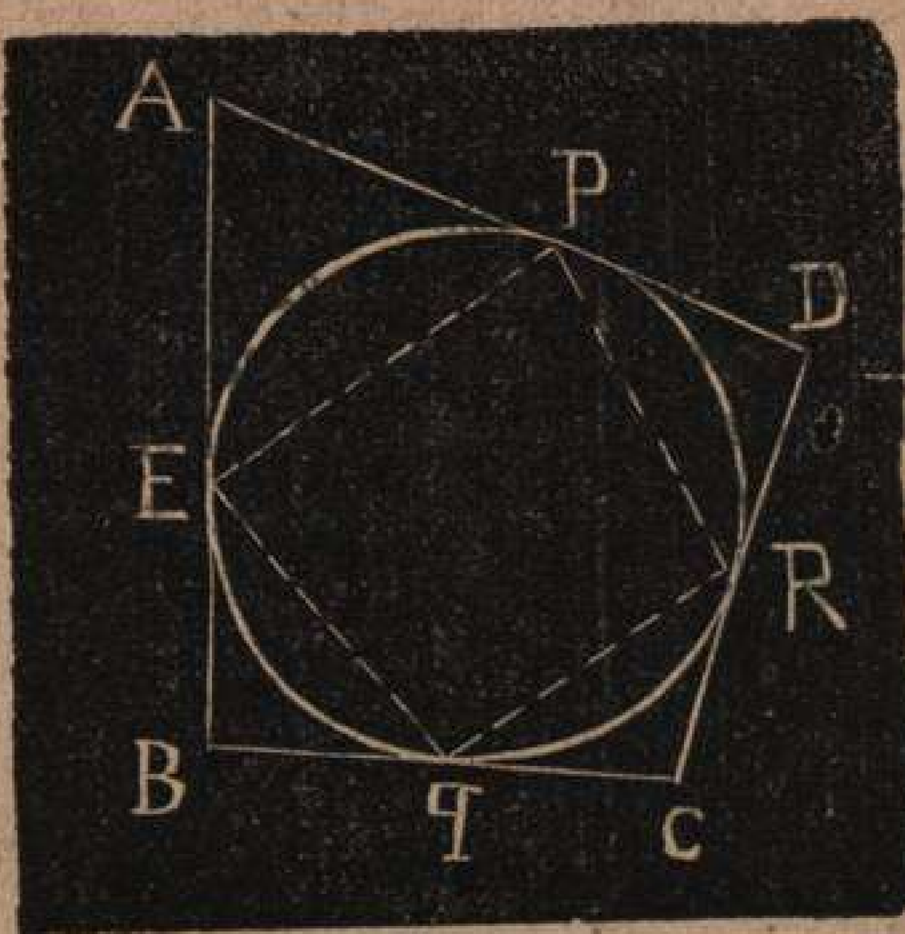


Fig. 92.

Sea ABCD, (fig. 92,) el cuadriláctero dado; vamos á demostrar que

$$AD+BC=AB+DC$$

En efecto, siendo los cuatro lados AD, DC, CB y BA del cuadriláctero tangentes de la circunferencia, tendremos que, uniendo los puntos de tangencia por las rectas EP, PR, RQ, y QE, los triángulos EAP, PDR, RCQ y QBE son todos isosceles, porque los dos ángulos de la base, en cada cuerda son iguales por inscriptos, y como á iguales lados se oponen iguales ángulos en un mismo triángulo (Teorema 85). Tendremos en el triángulo APE resultará que AP=AE

Tendremos	en el	triángulo	APE	resultará	que	AP=AE
»	»	»	PDR	»	»	PD=DR
»	»	»	RCQ	»	»	QC=CR
»	»	»	QBE	»	»	BQ=BE

sumando ahora miembro á miembro estas cuatro igualdades, resulta que $AP+PD+QC+BQ=AE+DR+CR+BE$ de donde, simplificando, resultará por último, que

$$AD+BC=AB+DC.$$

De lo espuesto en los dos teoremas precedentes se deduce:

124. 1.° *Todo cuadrado es inscriptible y circunscriptible á la circunferencia.*

Lo 1.° porque la suma de dos ángulos opuestos es igual á la suma de los otros dos, y lo 2.° porque la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos.

2.° *Todo rectángulo es inscriptible á la circunferencia, pero no es circunscriptible.*

Lo 1.° porque la suma de dos ángulos opuestos es igual á la suma de los otros dos, y lo 2.° porque la suma de dos lados opuestos no es igual á la suma de los otros dos.

3.° *Todo rombo no es inscriptible á la circunferencia pero sí es circunscriptible.*

Lo 1.° porque la suma de dos ángulos opuestos no es igual á la suma de los otros dos, y lo 2.° porque la suma de dos lados opuestos es igual á la suma de los otros dos.

4.° *Todo romboide no es, ni inscriptible, ni circunscriptible á la circunferencia.*

Lo 1.° porque la suma de dos ángulos opuestos no es igual á la suma de los otros dos, y lo 2.° porque la suma de dos lados opuestos no es igual á suma de los otros dos.

5.° *En general diremos: un trapecio ó un trapezoide son ó no inscriptibles á la circunferencia, cuando la suma de dos ángulos opuestos del mismo sean ó no suplementarios; y serán ó nó circunscriptibles á la circunferencia, si la suma de dos lados opuestos es equivalente ó no á la suma de los otros dos.*

Polígonos en general.

125. *Polígono, es toda estension plana limitada por rectas.* Estas rectas son los *lados* del polígono. La inclinacion de cada dos lados contíguos forma los *ángulos* del mismo. La interseccion de cada dos lados, los *vértices* del mismo. *Base*, es cualquier lado. *Altura*, es la perpendicular trazada á la base desde el vértice ó el lado opuesto.

Hemos ya visto que los polígonos se dividen en *cóncavos* y *convexos;* estos últimos se dividen en *regulares* è *iregulares.*

Hemos definido la *diagonal* como la línea que une dos vértices no contíguos, y desde cada uno de los vértices de un polígono se pueden trazar tantas diagonales como vértices tenga dicho polígono menos 3.

En efecto, por lo ya dicho no se pueden contar ninguno de los dos vértices contiguos, ni tampoco el vértice dado, porque de él, así mismo, no se puede trazar ninguna diagonal; por tanto, el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice serán $(n—3)$: espresando n el número de lados ó vértices de un polígono, resultará ser $n(n—3)$ el número total de vértices que se pueden trazar en un polígono, pero correspondiendo cada una á dos vértices resultará que el número total de las mismas se reduce

$$\text{á } \frac{n(n-3)}{2}.$$

De lo espuesto mas arriba se inferirá que un triángulo no puede tener ninguna diagonal; que un cuadriláctero solo tiene dos; que un pentágono tiene cinco, concurriendo dos á cada vértice; un exágono tendrá nueve, concurriendo tres en cada uno de sus vértices, etc. etc. De donde: *Todo polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene, menos dos.*

126. Teorema. *La suma de todos los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.*

En efecto, sea ABCDEF (fig. 93) el polígono dado: si desde uno de sus vértices, por ejemplo el A, trazamos las diagonales AC, AD y AE, quedará descompuesto en los cuatro triángulos ABC, ACD, ADE y AEF, y como la suma de los tres ángulos de cada uno vale dos ángulos rectos y el número de triángulos en que el polígono dado se descompone es $(n-2)$ ó sea tantos como lados tiene el polígono menos dos, resultará que el valor de todos los ángulos del polígono, estará dado en tésis general, por la fórmula $(n—2)2R$, y para el caso particular del exágono dado será $4 \times 2R = 8$ Rectos.

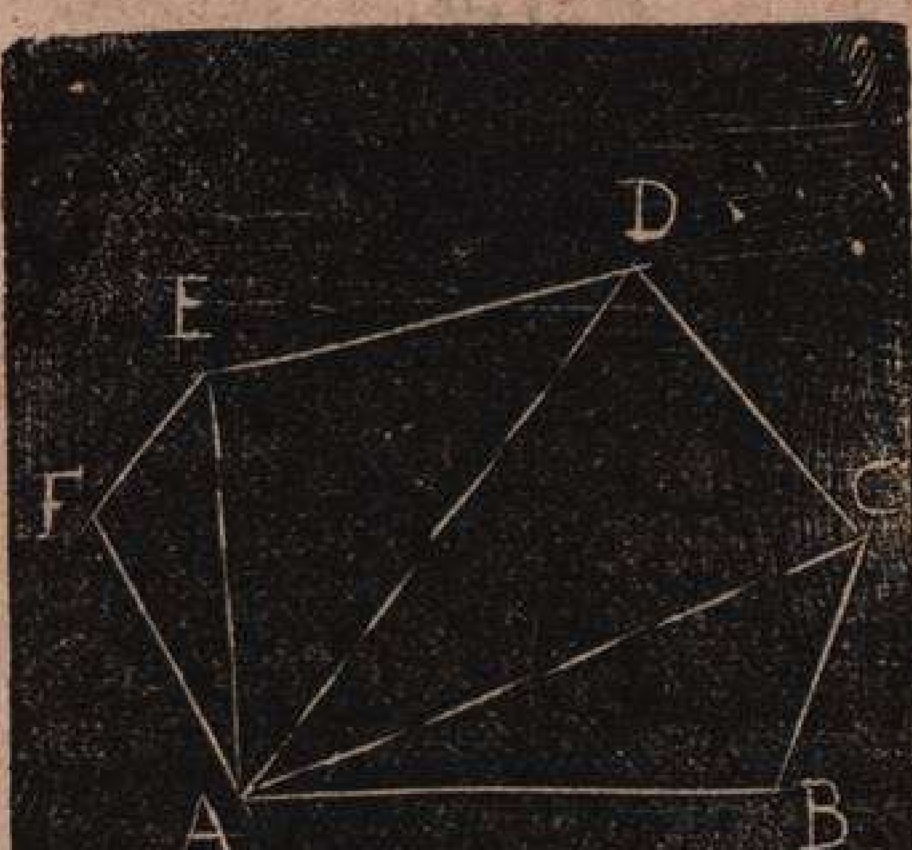


Fig. 93.

Corolarios: 1.° La fórmula $(n—2)$ espresa el número de triángulos en que un polígono cualquiera se descompone.

2.° La fórmula $(n—2)2R$ espresa el valor en rectos de la suma de todos los ángulos de un polígono, cuya fórmula será equivalente á $2Rn-4R$, pudiéndose por tanto espresar el valor de la suma de todos los ángulos de un polígono, multiplicando por 2 Rectos el número de sus vértices y deduciendo 4 de este producto.

3.° Si el polígono es regular, es decir, equiláctero y equiángulo, se verificará que el valor de cada ángulo será una parte alícuota del valor total, y como el número de ángulos es igual al de lados, resultará que el valor de cada uno de los ángulos de un polígono regular estará determinado por la fórmula $\frac{(n-2)2R}{n}$.

127. De aquí deduciremos los valores de todos y cada uno de los ángulos de los siguientes polígonos regulares, pudiéndose prolongar esta tabla indefinidamente.

Polígonos.	Valor de todos los ángulos.	Valor de uno solo.
Triángulo.	180° ó dos rectos	60°.
Cuadrado.	360° ó cuatro rectos	90°.
Péntágono.	540° ó seis rectos	108°.
Exágono.	720° ú ocho rectos	120°.
Eptágono.	900° ó diez rectos	120°+34'+17"
Octógono.	1080° ó doce rectos	135°.
Eneágono.	1260° ó catorce rectos	140°.
Decágono.	1440° ó diez y seis rectos	144°.
Dodecágono	1800° ó veinte rectos	150°.
etc.	etc.	etc.

128. **Teorema.** *En general, un polígono está determinado, siempre que lo estén todos los triángulos en que se descomponga, trazando diagonoles desde uno de sus vértices.*

En efecto, en la figura 93, el polígono ABCDEF se halla compuesto de los triángulos ABC, ACD, ADE y AEF, y como cada uno se halla formado de sus respectivos elementos, resultarán hallarse determinados con el conocimiento prévio de los mismos, dados en el órden necesario para formar el polígono; por tanto, y procediendo de la parte al todo, por estar determinado el primero de los triángulos anteriores, lo estarán tambien los lados AB, BC del polígono, así como el ángulo comprendido entre ambos; por estar determinado el segundo triángulo de los anteriores, lo estará tambien el lado CD del polígono y el ángulo en C; por estar determinado el tercer triángulo, lo estará tambien el lado DE y el ángulo en D del polígono, y por último, por estar determinado el cuarto triángulo, lo estarán tambien todos los demás elementos complementarios á la determinacion completa del polígono.

Como corolarios de este teorema resultan las proporciones siguientes:

1.° *Un polígono estará suficientemente determinado siempre que sean conocidos todos sus lados y todas las diagonales que concurren en un vértice.*

2.° *Un polígono estará suficientemente determinado siempre que sean conocidos todos sus lados, así como todos los ángulos que ordenadamente se sucedan, escepto los tres últimos.*

3.° *Un polígono estará suficientemente determinado siempre que sea conocido uno de sus lados y todos los ángulos que este lado forme con los lados y las diagonales concurrentes en sus estremos.*

4.° *Si el polígono es regular se hallará suficientemente determinado conociendo uno de sus lados y el número de los que el polígono propuesto debe tener.*

129. El conocimiento de los Corolarios anteriores nos proporciona cuatro soluciones siguientes para la construccion de un polígono; así diremos:

1.° *Para construir un polígono, igual á otro dado, se descompone este desde uno de sus vértices en triángulos, trazando diagonales, y despues se construyen otros tantos triángulos iguales á los dados y en su órden respectivo.*

2.° *Para construir un polígono igual á otro dado, se traza una série de lados iguales á los del polígono dado, formando cada dos consecutivos un ángulo igual al homólogo del polígono dado.*

3.° *Para construir un polígono igual á otro dado, se unen los estremos de uno de sus lados con cada uno de todos los demás vértices, construyéndose luego sobre un lado igual al anterior, una série de triángulos iguales á los formados en el polígono dado, y uniéndose despues los vértices superiores, formarán el polígono pedido.*

4.° *Para construir un polígono regular igual á otro dado, se formarán en los estremos de una recta igual á* *uno de los lados del polígono el ángulo correspondiente al mismo, segun el cuadro 127, se limitan estos lados con una estension igual al lado conocido, y en cada uno de los otros estremos se forma un ángulo igual á los anteriores, siguiéndose así hasta que el polígono quede construido.*

130. Las precedentes soluciones nos permiten afirmar que:

1.° *Dos polígonos son iguales, cuando descompuestos en triángulos desde un vértice homólogo los en que ambos polígonos resulten descompuestos, sean respectiva y ordenadamente iguales.*

2.° *Dos polígonos regulares son iguales, cuando teniendo el mismo número de lados tengan un lado igual.*

131. Teorema. *La suma de todos los ángulos esteriores de cualquier polígono y que se hallan formados por los lados del mismo y sus prolongaciones en un sentido, valen juntos cuatro ángulos rectos.*

Vamos á demostrar (fig. 94) que la suma de los ángulos $a+b+c+d+e=4R$ en el polígono ABCDE.

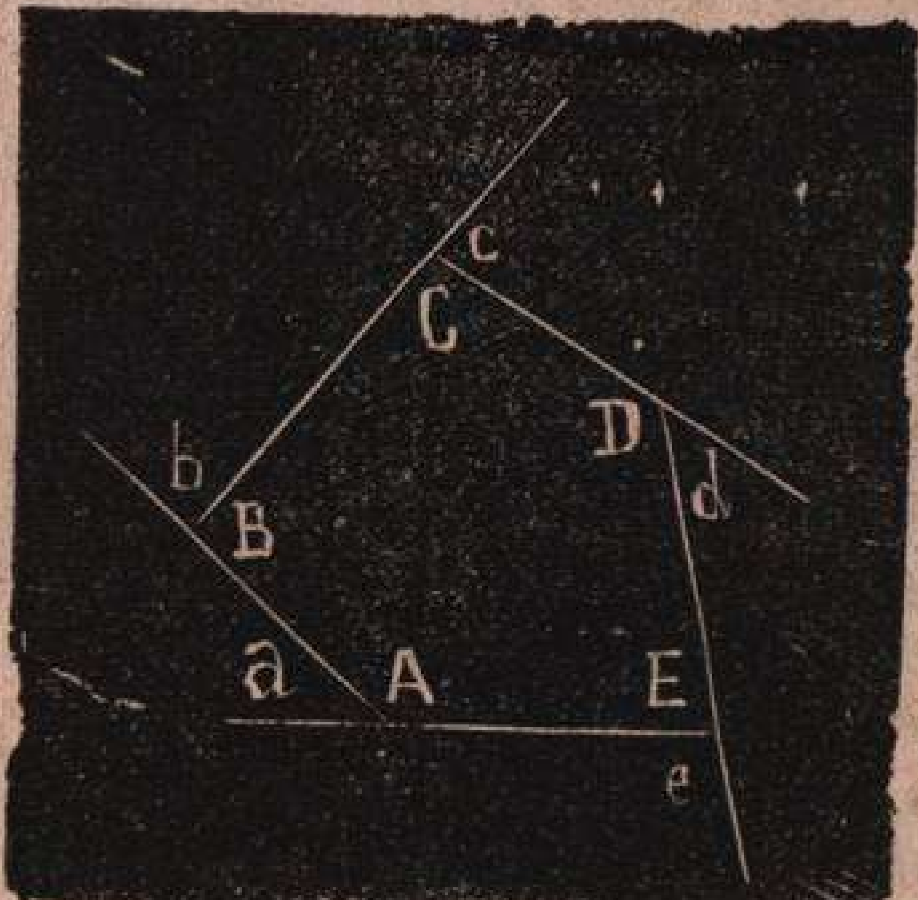


Fig. 94.

En efecto, siendo adyacentes cada dos ángulos, resultará que:

$$A+a=2R$$
$$B+b=2R$$
$$C+c=2R$$
$$D+d=2R$$
$$E+e=2R$$

sumando los primeros miembros, luego los segundos, é igualando, tendremos:

$$A+B+C+D+E+$$
$$a+b+c+d+e=10 \text{ Rectos.}$$

Pero siendo $A+B+C+D+E=(n-2)2R=6$ Rectos (Teorema 12) restando esta igualdad de la anterior, tendremos que: $a+b+c+d+e=4R$.

Generalizando para deducir la fórmula aplicable á cualquier otro polígono convexo de n lados, diremos: La suma de todos sus ángulos tanto interiores como esteriores será, pues que en cada vértice se forman dos ángulos adyacentes, $2Rn$. El valor de la suma de todos los ángulos interiores será: $(n-2)2R$ (segun el Teorema 126).

Restándose de la primera fórmula la segunda, tendremos que: $2Rn-((n-2)2R)=2Rn-(2Rn-4R)=$

$$2Rn-2Rn+4R=4R,$$

que es lo que queriamos demostrar.

Corolario. Siendo convexo el polígono, no podrá tener mas que tres ángulos interiores agudos, pues de lo contrario tendria mas de tres ángulos esteriores obtusos, y entónces la suma de estos seria mayor que cuatro ángulos rectos.

132. **Teorema.** *Dos polígonos* ABCDE *y abcde* (figura 95) *compuestos del mismo número de triángulos semejantes y ordenadamente colocados, son semejantes.*

En efecto, los ángulos A y *a* son iguales, por lados homólogos de los triángulos semejantes BAE y *bae*; el ángulo en E es igual al *e* por ser suma de ángulos homólogos de triángulos semejantes, y lo mismo sucederá con cada uno de los otros ángulos D y *d*, C y *c*, B y *b*. Siendo por tanto semejantes los dos triángulos BAE y *bae*, darán que: $\frac{BA}{ba}=\frac{BE}{be}=\frac{EA}{ea}$ y de la comparacion de los otros triángulos BED y *bed*, BDC y *bdc*, tendremos que:

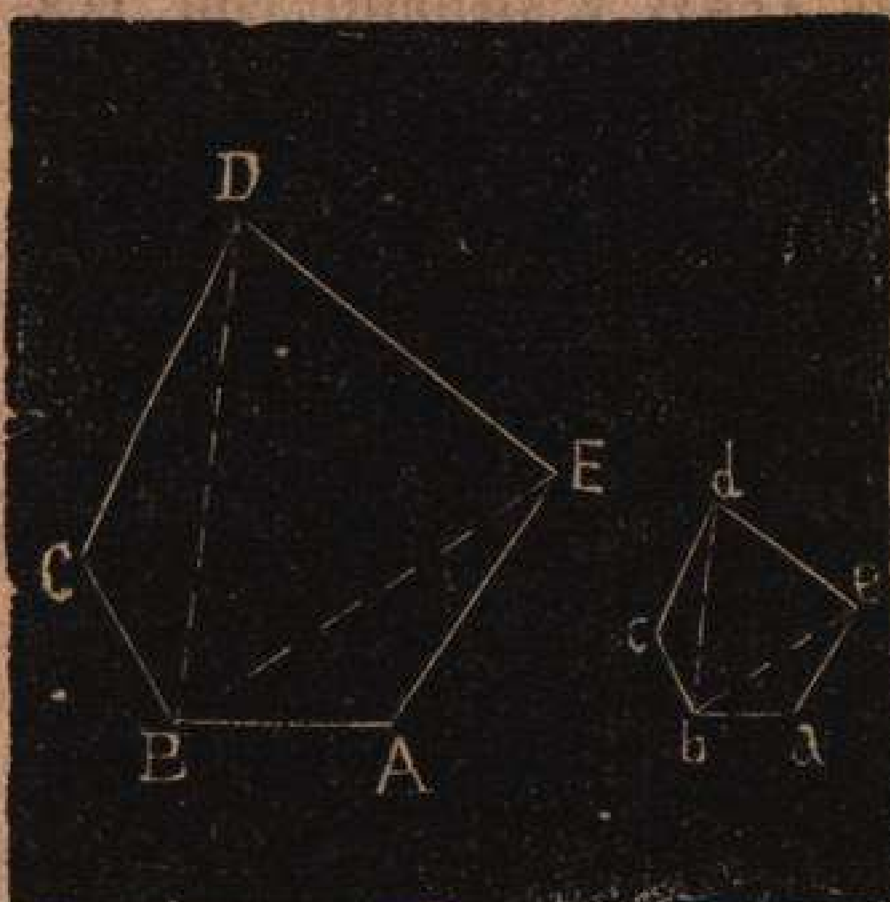


Fig. 95.

$$\frac{BE}{be}=\frac{DE}{de}=\frac{BD}{bd};\quad \frac{BD}{bd}=\frac{DC}{dc}=\frac{CB}{cb},$$

suprimiendo la razon comun é igualando, resultará que:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea};$$

por tanto, los dos polígonos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados directamente proporcionales son semejantes.

133. **Recíprocamente.** *Dos ó mas polígonos semejantes pueden siempre descomponerse en igual número de triángulos tambien semejantes y colocados respectivamente en el mismo órden.*

En efecto, (fig. 96) sean ABCDE y A'B'C'D'E' dos polígonos semejantes. Tomemos en el interior del primero un punto cualquiera O, uniéndolo con las estremidades del lado AB. Ahora sobre el lado A'B' homólogo de AB y en el interior de el polígono A'B'C'D'E' construyamos los ángulos B'A'O', A'B'O' respectivamente iguales á los ángulos BAO y ABO. El punto O' será vértice de un triángulo O'A'B' semejante al OAB y situado con respecto al segundo polígono, de la misma manera que el OAB con respecto al primero. Hecho esto, unamos el punto O con todos los vértices del primer polígono y el punto O' con todos los del segundo. Los dos polígonos quedarán así descompuestos en el mismo número de triángulos igualmente dispuestos, cuya semejanza respectiva nos resta demostrar ahora.

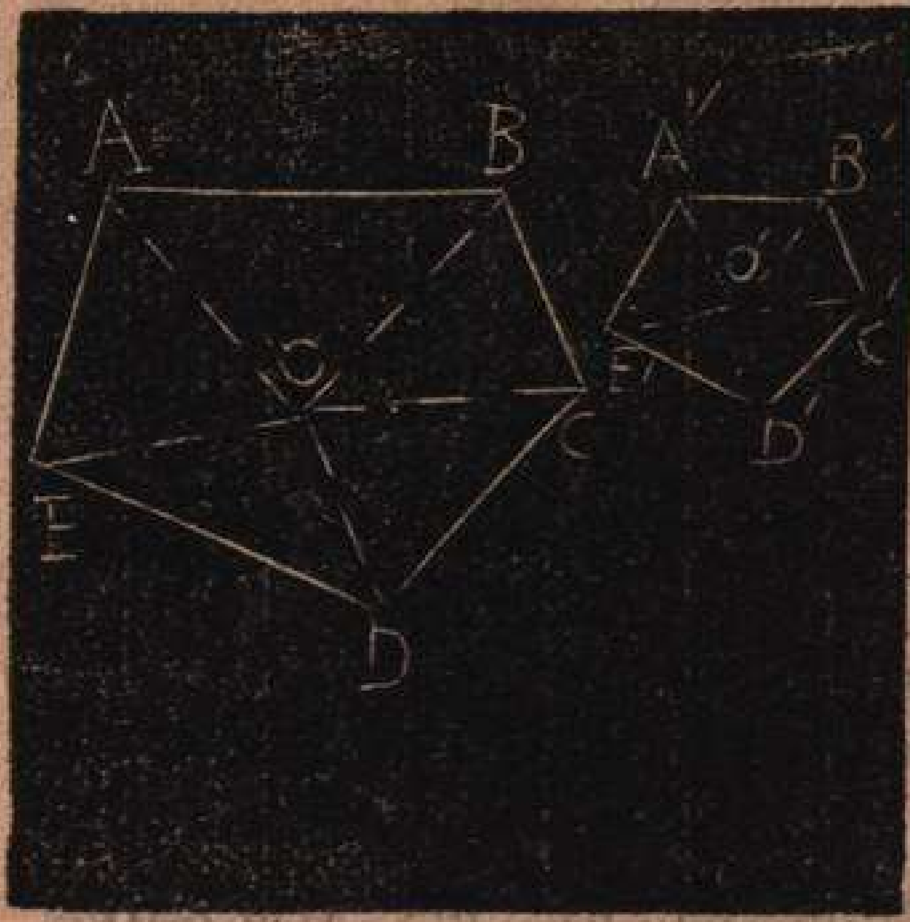


Fig. 96.

Los dos triángulos OAB y O'A'B' semejantes por construccion, nos dán $\frac{O'B'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}$; la semejanza de los polígonos propuestos $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$, luego se tiene $\frac{O'B'}{OB}=\frac{B'C'}{BC}$

Por otra parte, el ángulo O'B'C' diferencia de los ángulos A'B'C', A'B'O' que son respectivamente iguales á ABC y ABO, es igual al ángulo OBC diferencia de los últimos. Por tanto, los triángulos OBC y O'B'C', son semejantes por tener un ángulo igual comprendido entre dos lados proporcionales.

De la semejanza de los dos triángulos O'B'C' y OBC se podrá desde luego deducir igualmente la de los triángulos inmediatos O'C'D' y OCD, y así sucesivamente.

Luego los triángulos en que se han descompuesto los dos polígonos son respectivamente semejantes.

134. Escolio. Dos puntos O y O' situados en el plano de dos polígonos semejantes, se llaman *homólogos* cuando uniendo uno de ellos O con las estremidades de un lado AB, y el otro O' con las estremidades de su otro lado homólogo A'B', se obtienen los dos triángulos OAB y O'A'B' semejantes é igualmente dispuestos con respecto á los dos polígonos.

Si el punto O' fuese estericr á su polígono, el homólolo O lo sería tambien, y entónces habria que considerar cada polígono como compuesto de triángulos aditivos y sustráctivos.

Cuando el punto O coincidiese con uno de los vértices, A por ejemplo, el punto homólogo O' coincidiria con el vértice A'.

135. Teorema. *Si dos rectas se hallan situadas en el plano de dos polígonos semejantes, siendo homólogas, la relacion de dichas dos rectas, es igual á la relacion de semejanza de los dos polígonos.*

Sean los dos polígonos ABCDE y *abcde* (figura 97) y sean RS y *rs* las dos rectas homólogas.

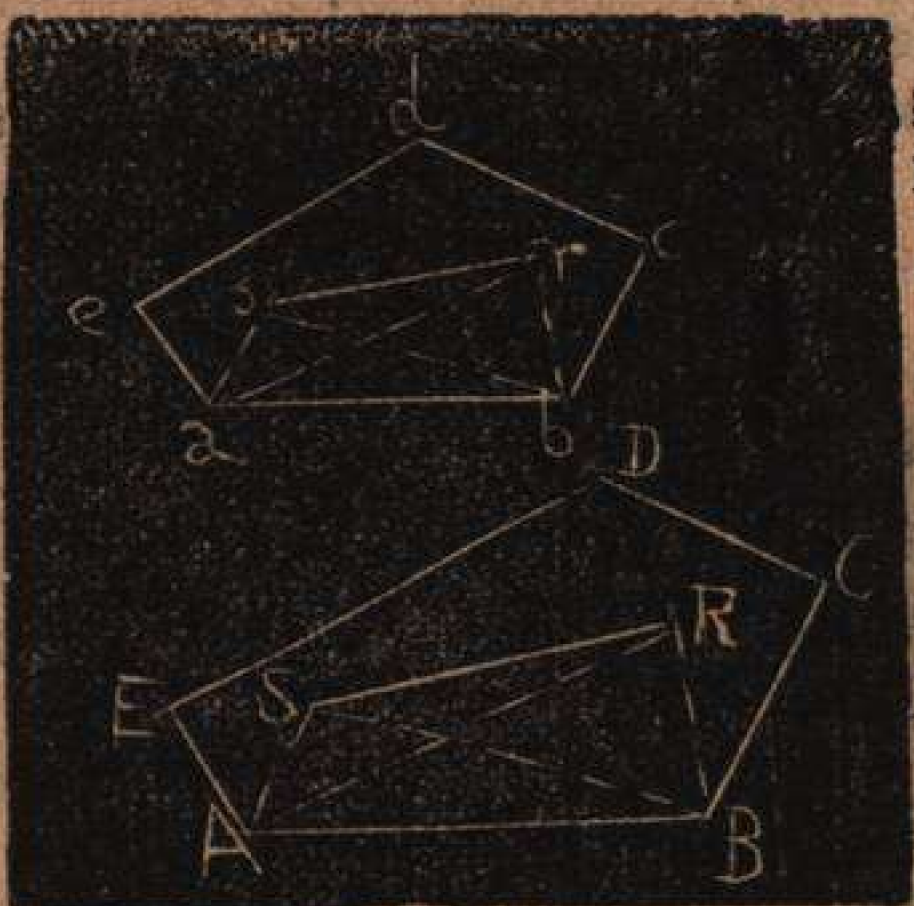


Fig. 97.

La semejanza de los triángulos ASR y *asr*, prueba la igualdad de los ángulos ABS y *abs*, y la igualdad de las relaciones $\frac{sb}{SB}=\frac{ab}{AB}$. De la misma manera la semejanza de los triángulos RAB y *rab* comprende la igualdad de los ángulos *RBA* y *rba* y de las relaciones $\frac{rb}{RB}=\frac{ab}{AB}$; teniéndose de esta y de la igualdad anterior que tienen un miembro comun, que: $\frac{sb}{SB}=\frac{rb}{RB}$. Además tambien tenemos que el ángulo ABR—SBA=ángulo *abr—sba*.

Luego los triángulos SBR y *sbr* con semejantes, y la relacion SR:*sr* es precisamente igual á cada una de las relaciones SB:*sb*, ó á AB:*ab*, es decir, á la relacion de semejanza de los polígonos dados.

136. Teorema. *La relacion de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual á su relacion de semejanza.*

En efecto, sean ABCDE y *abcde*, figura 97, los dos polígonos semejantes, las relaciones

AB:*ab*::BC:*bc*::CD:*cd*::DE:*de*::EA:*ea*, son exactas segun la definicion, é iguales á la relacion de semejanza; y como nos es conocida la propiedad que dice «*La suma de los numeradores ó antecedentes es á la de los denominadores ó consecuentes, como el numerador ó antecedente de cualquier fraccion ó razon es á su denominador ó consecuente respectivo*» resultará que:

$$AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AB : ab,$$

es decir, que: $P:p :: L:l$. Llamando P y p á los perímetros de los dos polígonos, y L y l á dos lados homólogos de los mismos. El teorema precedente se expresa generalmente diciendo: *Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales á sus lados y rectas homólogas.*

137. Teorema. *Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo nombre, son siempre proporcionales á sus lados, á sus rádios y á sus apotemas.*

Radio de un polígono regular, es la recta que va desde el centro á uno de sus vértices.

Apotema de un polígono regular es la recta que vá desde el centro al punto medio de uno de sus lados.

Sean ABCDEF y *abcdef* (figura 98) los dos polígonos dados, trazando desde los centros O y *o* los radios OA y OB en el mayor, y *oa* y *ob* en el menor, tendremos: 1.° que los triángulos OAB y *oab* serán semejantes, luego

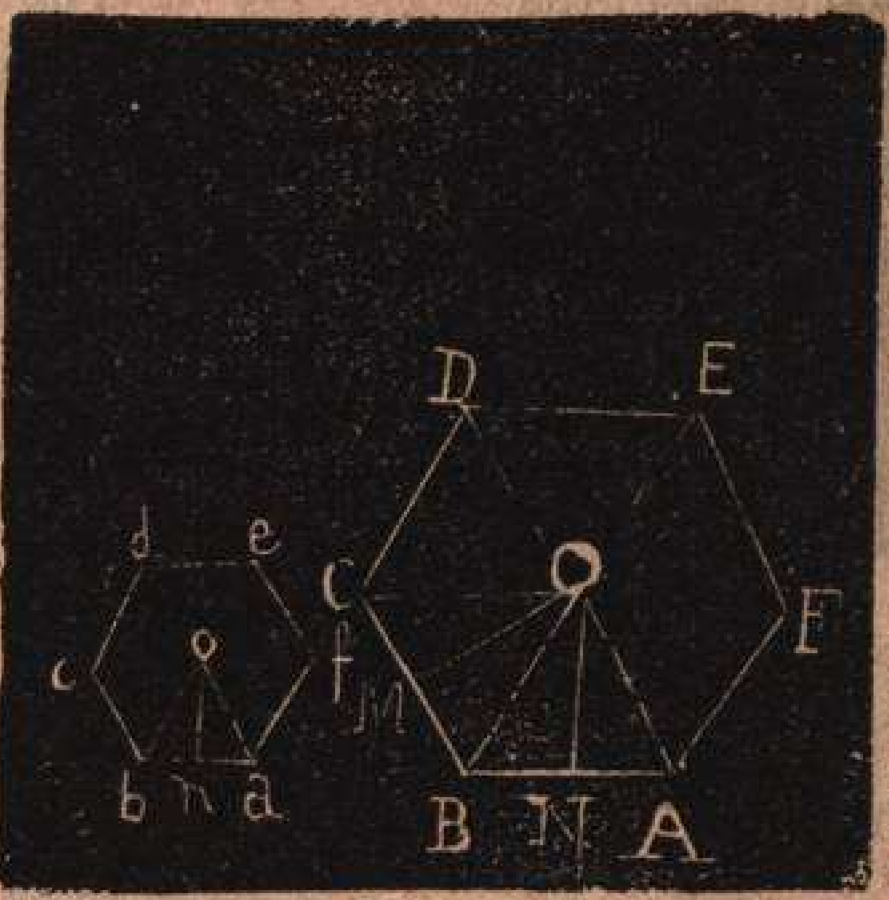


Fig. 98.

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AB}{ab},$$

siendo los polígonos exágonos, tendremos que multiplicando numerador y denominador del primer quebrado por 6, resultará:

$\dfrac{6AB}{6ab}=\dfrac{AB}{ab}$, es decir que $P:p :: L:l$.

2.° Siendo semejantes los mismos dos triángulos, resultará que $\dfrac{AB}{ab}=\dfrac{OA}{oa}$, multiplicando los dos términos de la 1.ª fraccion por el número de lados del polígono, resultará que $P:p :: R:r$.

Llamándose R y r á los dos rádios.

3.° En los mismos triángulos, bajando las alturas ON y on, que serán apotemas del polígono, resultará de la semejanza de los dos triángulos OAB y oab que:

$$\frac{AB}{ab}=\frac{ON}{on},$$

y multiplicando los dos términos de la 1.ª razon ó fraccion por el número de lados del polígono, resultará que

$$P:p::Ap:ap.$$

Llamamos Ap y ap las apotemas de los dos polígonos.

138. Teorema. *Las bisectrices de todos los ángulos de un polígono regular se encuentran en un punto. Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de todos los lados de un polígono regular se encuentran en un punto.*

En efecto, en el polígono ABCDEF (figura 98) las bisectrices OA y OB de los ángulos A y B concurren en el punto O, y vamos á demostrar que las bisectrices de los otros ángulos concurren tambien en O.

Trazando la recta OC el triángulo BOC=AOB porque tienen el lado BO comun, los lados AB=BC y los dos ángulos en B iguales, por ser BO bisectriz del ángulo ABC; luego el ángulo OCB=OBA; y como este es mitad del ángulo B, aquel será mitad del ángulo C, demostrando particularmente del mismo modo para las rectas DO, EO etc., concluiremos diciendo que las bisectrices de todos los ángulos de un polígono regular se encuentran en un punto.

2.° Para demostrar el segundo extremo, observaremos que el punto de concurso de cada dos bisectrices consecutivas, previene que este se halla en la primera de dichas perpendiculares; y como dicho punto es el de concurso de todas las bisectrices, corresponderá tambien á todas las perpendiculares; luego por lo tanto es tambien el de interseccion de las mismas.

El precedente teorema puede tambien enunciarse diciendo: *Todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible á la circunferencia.*

Para la inscripcion del mismo trazaremos las perpendiculares en los puntos medios de sus lados, siendo el punto de interseccion comun el centro, y tomando por rádio la distancia del mismo á uno de sus vértices.

Para la circunscripcion trazaremos las bisectrices á todos sus vértices, siendo el centro el punto de interseccion comun, y tomándose por rádio la apotema.

139. Corolarios. 1.° *Cuando el número de lados del polígono regular es infinito, el perímetro de este es la circunferencia, el polígono se llamará círculo, y su apotema será el rádio del mismo.*

2.° *Los lados del polígono regular equidistan de su centro, así como tambien los vértices del mismo.*

3.° *Las apotemas de un polígono regular son bisectrices de los ángulos que forman los rádios. Los rádios son tambien bisectrices de los ángulos que forman las apotemas.*

4.° *Valiendo todos los ángulos formados al rededor de un punto cuatro ángulos rectos ó sean 360°, y siendo iguales todos los formados en el centro del mismo por pertenecer á triángulos iguales, resultará que la fórmula general que espresa el valor de cada uno de los ángulos formados en el centro de un polígono regular será* $\frac{4R}{n}$.

Segun esta fórmula, el ángulo en el centro del triángulo equiláctero es igual á 120°

El del Cuadrado	»	»	á	90°
El del Pentágono	»	»	á	72°
El del Exágono	»	»	á	60°
El del Eptágono	»	»	á	51°+25'+43''
El del Octógono	»	»	á	45°
El del Eneágono	»	»	á	40°
El del Decágono	»	»	á	36°
El del Dodecágono	»	»	á	30°
etc.				etc.

5.° *El ángulo formado en el centro de un polígono regular por dos rectas trazadas á los estremos de un lado, es suplementario del formado por dos lados contiguos del mismo polígono.*

En efecto, siendo cada ángulo de un triángulo el suplemento de la suma de los otros dos, y siendo tambien la suma de estos equivalente á uno de los ángulos de un polígono regular, será cierta la proposicion enunciada.

6.° *Un polígono regular se descompone en tantos triángulos isosceles como lados tiene, porque en efeclo, si desde su punto interior llamado centro se trazan los rádios á sus vértices, resultará efectuada la descomposicion pedida.*

140. Dos polígonos trazados en un plano se llaman simétricos con referencia á un punto llamado *centro de simetría*, cuando los vértices homólogos de entrambos polígonos equidistan de dicho punto y se hallan en línea recta con el mismo.

Dos polígonos trazados en un plano se llaman simétricos con referencia á una línea llamada *eje de simetría*, cuando las rectas que unen los vértices homólogos de entrambos polígonos, son perpendiculares al eje de simetría, siendo dichos vértices equidistantes del eje. En este caso los dos polígonos coincidirán si doblamos la figura por el eje de simetría.

Areas de las figuras poligonales.

141. *Area de una figura* es la medida de su estension superficial. Se determina el *área* de una superficie, midiéndola.

A la unidad que sirve para medir superficies se llama *unidad superficial ó cuadrada,* siendo por esto un cuadrado el que sirve para determinar las áreas.

Las áreas de las figuras se determinan siempre por las relaciones numéricas que estas tienen, con la unidad tipo que sirve para determinarlas.

Se llaman figuras *equivalentes* aquellas que tienen la misma extension superficial.

La determinacion de las áreas de las figuras planas se funda en los Teoremas siguientes:

142. 1.° *Dos rectángulos de iguales bases son entre sí como sus alturas.*

En efecto, sean R y r (fig. 99) los dos rectángulos dados, que tienen bases iguales, B=B; y alturas diferentes, $A > a$; tomando una unidad de comparacion que tenga la misma base que los dos rectángulos dados, y que tenga la unidad de altura, tendremos que

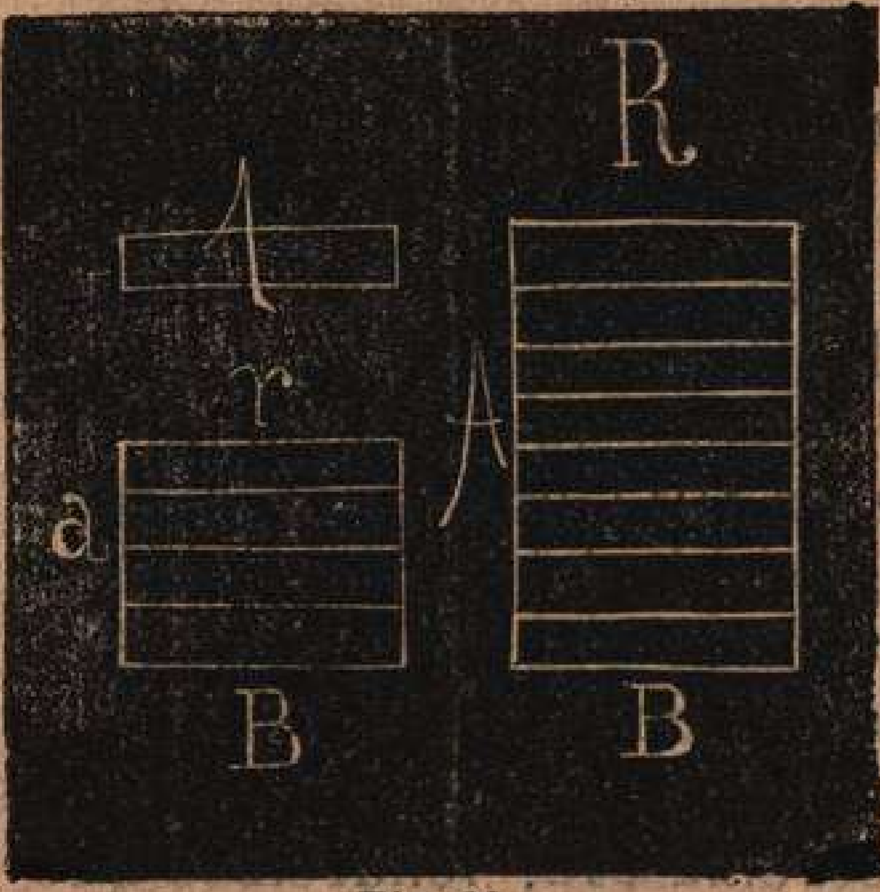


Fig. 99.

$$\frac{R}{r}=\frac{8}{4},$$

y como las bases son iguales y las alturas son respectivamente, las que contienen á la unidad comun, tendremos que $\frac{A}{a}=\frac{8}{4}$. Esta igualdad y la anterior tienen una razon comun, la cual, suprimiendo, resultará que: $\frac{R}{r}=\frac{A}{a}$, que es lo que queríamos demostrar.

143. 2.° *Dos rectángulos de las mismas alturas son entre sí como sus bases.*

Sean R y r (fig. 100) los dos rectángulos dados que tienen iguales alturas A=A; y cuyas bases son diferentes $B>b$: eligiendo una unidad de comparacion que tenga la misma altura que la de entrambos rectángulos, y que á un tiempo tenga de base la unidad, observaremos las veces que esta, está contenida en aquellos, y así diremos:

$$\frac{R}{r}=\frac{6}{3},$$

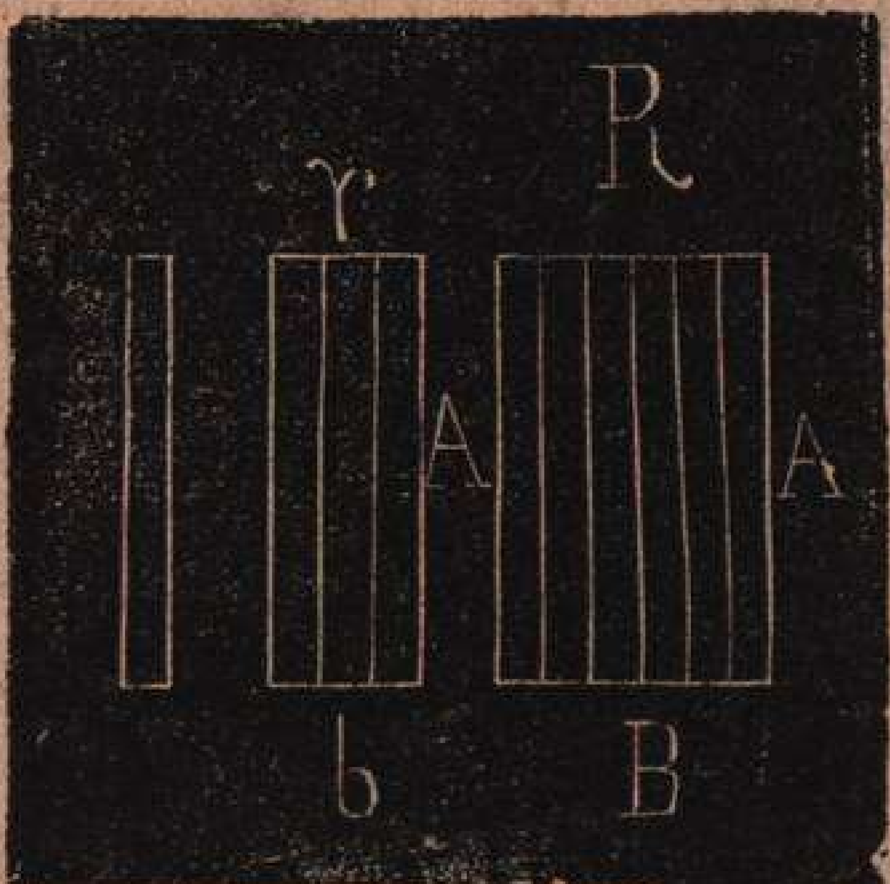


Fig. 100.

y como las bases son las que contienen respectivamente á la unidad, diremos que $\frac{B}{b}=\frac{6}{3}$: esta igualdad y la anterior tienen una razon comun, suprimiéndola y formando proporcion con las otras dos, resultará que: $\frac{R}{r}=\frac{B}{b}$, lo que queríamos demostrar.

144. 3.° *Dos rectángulos de diferentes bases y alturas son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, sean R y r los dos rectángulos dados, construyendo uno auxiliar R' (figura 101) que tenga la base igual á la del menor, y la altura igual á la del mayor: estableciendo relacion entre el auxiliar y el menor, segun el teorema 142, tendremos que

$$R':r::A:a.$$

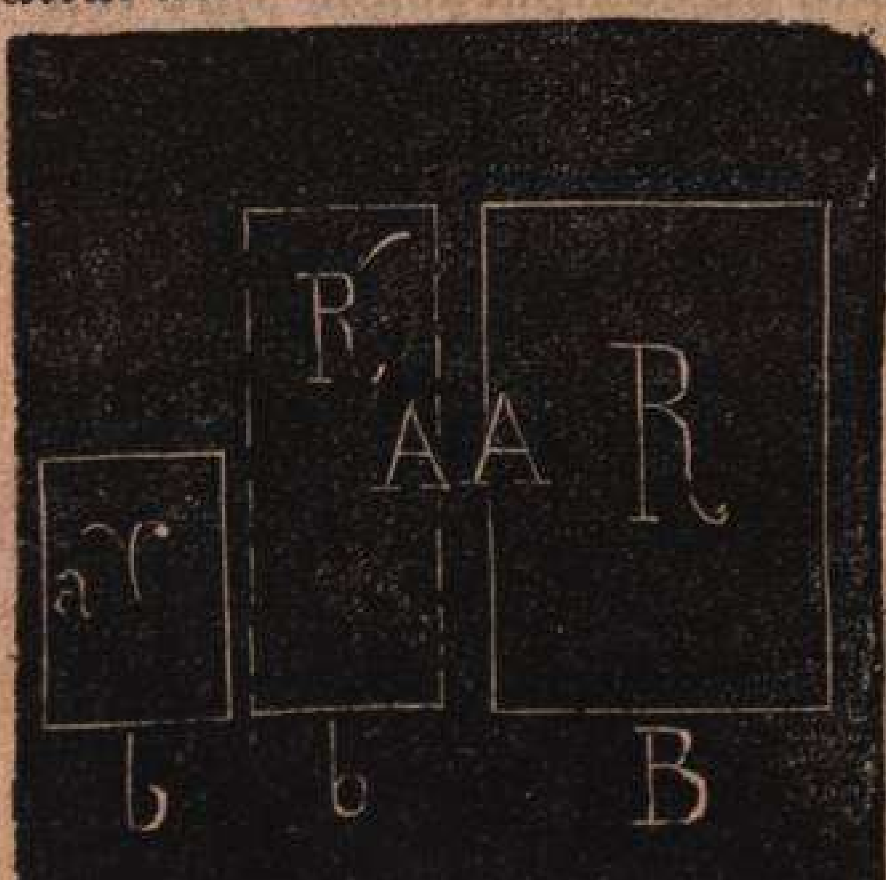


Fig. 101.

Comparando ahora el auxiliar con el mayor, segun el teorema 143, tendremos que

R : R' :: B : b: multiplicando ordenadamente estas dos proporciones resultará que: RR' : R'r :: BA : ba; partiendo los dos términos de la 1.ª razon por R' resultará por último que R : r :: B$\times$A : $b\times a$, que es lo que nos proponiamos demostrar.

145. Si suponemos que el rectángulo menor acd (figura 102) tenga la unidad de base y la unidad de altura, es decir, que sea un cuadrado, observaremos las veces que dicha base y altura están contenidas respectivamente en la base y altura del mayor, y al decirse que

R : r :: AC$\times$CD : $ac\times cd$

tendremos que el producto de medios igual al de los estremos, y por tanto,

R$\times ac\times cd$=AD$\times$CD$\times r$,

mas r=1 y como ac=1 y cd=1, resultará que

Area de R=AC$\times$CD

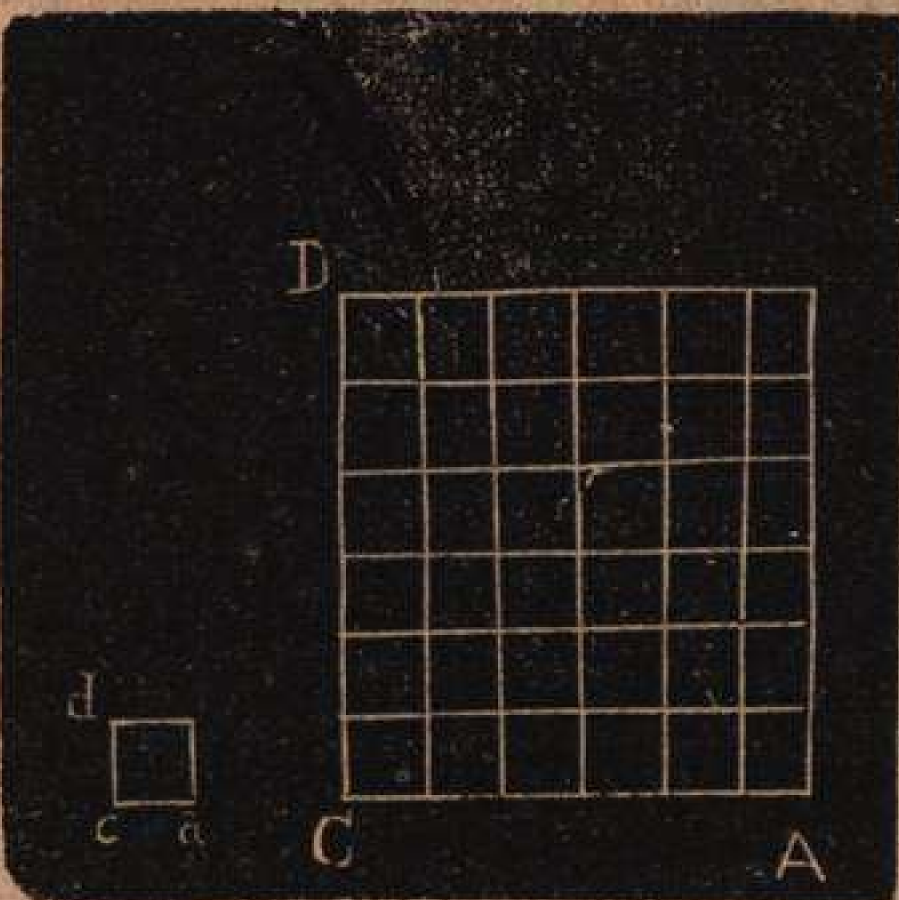


Fig. 102.

y en este caso particular R=6$\times$6=36. Luego por tanto, *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Si la base y altura del rectángulo fuesen iguales, este seria cuadrado, y como el producto de una cantidad por sí misma es igual á su segunda potencia ó cuadrado, resultará que *el área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado*, originándose de aquí que á las segundas potencias se les llame cuadrados.

146. El conocimiento del teorema precedente nos permite dar solucion á los problemas siguientes:

1.° *Para construir un cuadrado equivalente á un rectángulo*, se hallará el lado de aquel, que será la media proporcional entre la base y la altura del rectángulo.

2.° *Para construir un rectángulo equivalente á otro y que tenga uno de sus lados de una longitud cualquiera dada*, se hallará una cuarta proporcional entre esta longitud dada, la base y la altura del rectángulo propuesto.

3.° *Para construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado y que la suma de los dos lados contiguos de* *aquel sea una recta dada,* se trazará una semicircunferencia sobre dicha recta, en uno de sus estremos se trazará una perpendicular de una longitud igual á un lado del cuadrado, se trazará luego una paralela que corte á la semicircunferencia en un punto de la misma, y desde él se bajará una perpendicular que cortará á la recta dada en dos segmentos, los cuales serán la base y la altura del rectángulo pedido.

4.° Para construir un rectángulo equivalente á un paralelógramo dado, se levantan perpendiculares en los estremos de un lado hasta que encuentre al opuesto suficientemente prolongado, si es preciso, y cerrarán el rectángulo pedido.

147. De todo lo anteriormente espuesto se deduce:

1.° *El área de un rectángulo ó de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

2.° *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

3.° *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Toda vez que un paralelógramo se descompone en dos triángulos iguales, un triángulo será la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.

* El área de un triángulo tambien se puede determinar diciendo que *es igual á la raiz cuadrada de un producto de cuatro factores, que son: su semiperímetro y las tres diferencias que este tiene, una, con cada uno, de los tres lados de referido triángulo.*

La demostracion de este teorema es sencilla, si se tiene en cuenta: 1.° Que el área de todo triángulo es igual á la mitad de su perímetro por su apotema, (ó sea la distancia comprendida entre cualquiera de sus tres lados y el centro del círculo que quede inscrito dentro del mismo.)

2.° El semiperímetro de cualquier triángulo es igual á la suma de uno de sus lados, mas la distancia comprendida desde su vértice opuesto al punto de tangencia en que uno de los dos lados que forman el mismo toca á la circunferencia inscrita á dicho triángulo.

3.° Los teoremas 89 y 91, el tercer corolario del teorema 24, y la semejanza de los triángulos.

4.° *Todos los paralelógramos de igual base y altura son equivalentes,* porque como su área se determina en funcion de la base y de la altura y estos no varian, el producto ó el área será el mismo para todos.

5.° *Todos los triángulos* ABC, ABD, ABE, ABF, (figu-

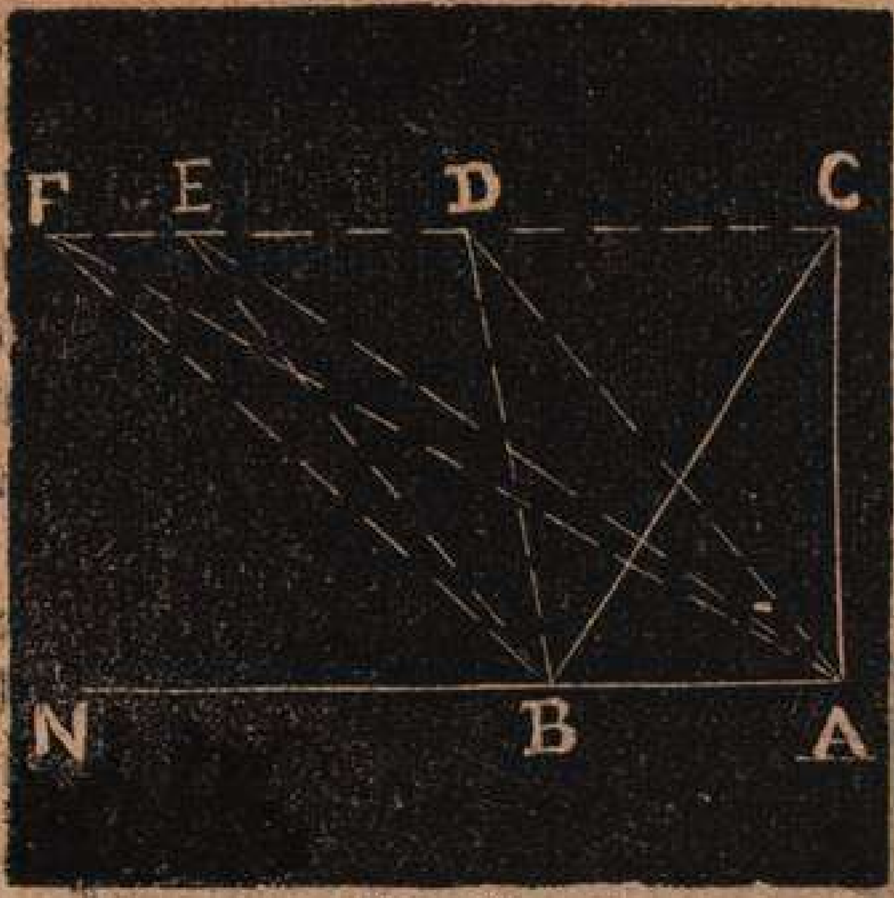


Fig. 103.

ra 103) *de igual base y altura son equivalentes.* En efecto, la base AB es la misma para todos ellos, y la altura lo es tambien, puesto que está determinada por la distancia comprendida entre las dos rectas paralelas NA y FC.

6.° *Dos paralelógramos de la misma base son como sus alturas. De la misma altura, son como sus bases, de diferente base y altura, son como los productos de sus bases por sus alturas.*

7.° *Dos triángulos de iguales bases son como sus alturas. De iguales alturas son como sus bases. De diferentes bases y alturas son como los productos de sus bases por sus alturas.*

148. Teorema. *El área de un polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad de la apotema.*

En efecto, segun lo expuesto en el 6.° corolario del teorema 138, «*Todo polígono se descompone en tantos triángulos como lados tiene*» y como el área de uno de estos está dada en el producto de un lado por la mitad de la apotema; tendremos que para determinar el área total habrá necesidad de multiplicar la de un triángulo por el número de ellos; y como si uno de los factores de un producto se multiplica por un número, el producto resulta multiplicado por dicho número; y repetir tantas veces un lado como lados tiene, es el perímetro del polígono; diremos por último que el área de un polígono regular es igual *al perímetro por la mitad de la apotema.*

Corolario. De lo expuesto en el teorema precedente se deduce que para reducir un polígono regular á cuadrado equivalente, se hallará una media proporcional entre el perímetro y la mitad de la apotema.

149. Teorema. *El área de un trapecio es igual á la semisuma de las bases multiplicada por la altura.*

En efecto, si por el punto medio de uno de los dos lados no paralelos del mismo se traza una paralela al otro lado no paralelo, formaremos un paralelógramo equivalente al trapecio, porque los dos triángulos que resultan son iguales; y como el área de aquel es igual á la altura por la base, y esta es la paralela media, resultará comprobada la proposicion anterior.

* *El área de un trapecio tambien se puede determinar diciendo que es igual á uno de sus dos lados no paralelos, tal como AD* (fig. 104) *multiplicado por PR, perpendicular trazada desde el punto medio P del otro lado BC, sobre el AD.*

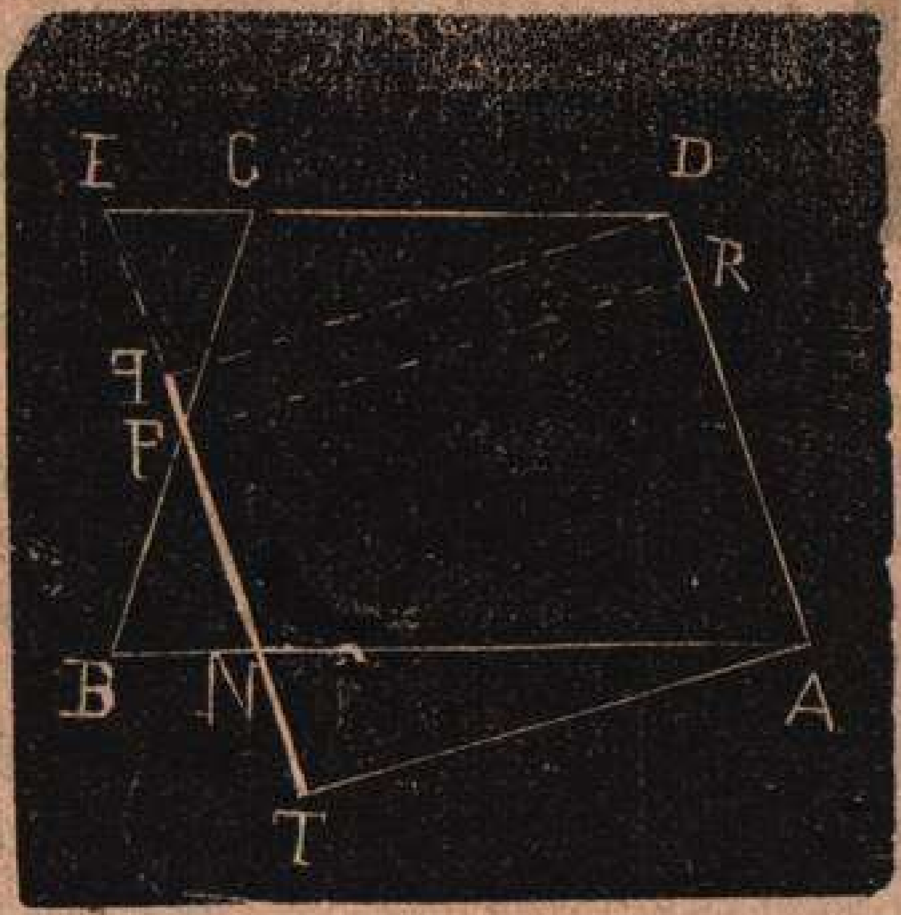


Fig. 104.

En efecto, el trapecio dado ABCD, es perfectamente equivalente al paralelógramo ANED, y este, al TADQ, que tiene, como observaremos, por base la recta AD, y por altura la QD ó RP, que es la perpendicular bajada desde el punto medio del lado opuesto á este. Que el trapecio ABCD es igual al paralelógramo ANED se comprueba, observando la igualdad de los triángulos BNP y PCE: y que el paralelógramo ANED es igual al ATQD se comprueba, observando la igualdad de los triángulos ANT y DQE.

Para reducir un trapecio á cuadrado equivalente se hallará una media proporcional entre la altura y la paralela media.

150. *Para determinar el area de un polígono irregular, se descompone desde uno de sus vértices en triángulos, trazando diagonales, y como el conjunto de partes es igual al todo, tendremos que la suma de las áreas de todos los triángulos en que un polígono irregular se descomponga, será el área de dicho polígono irregular.*

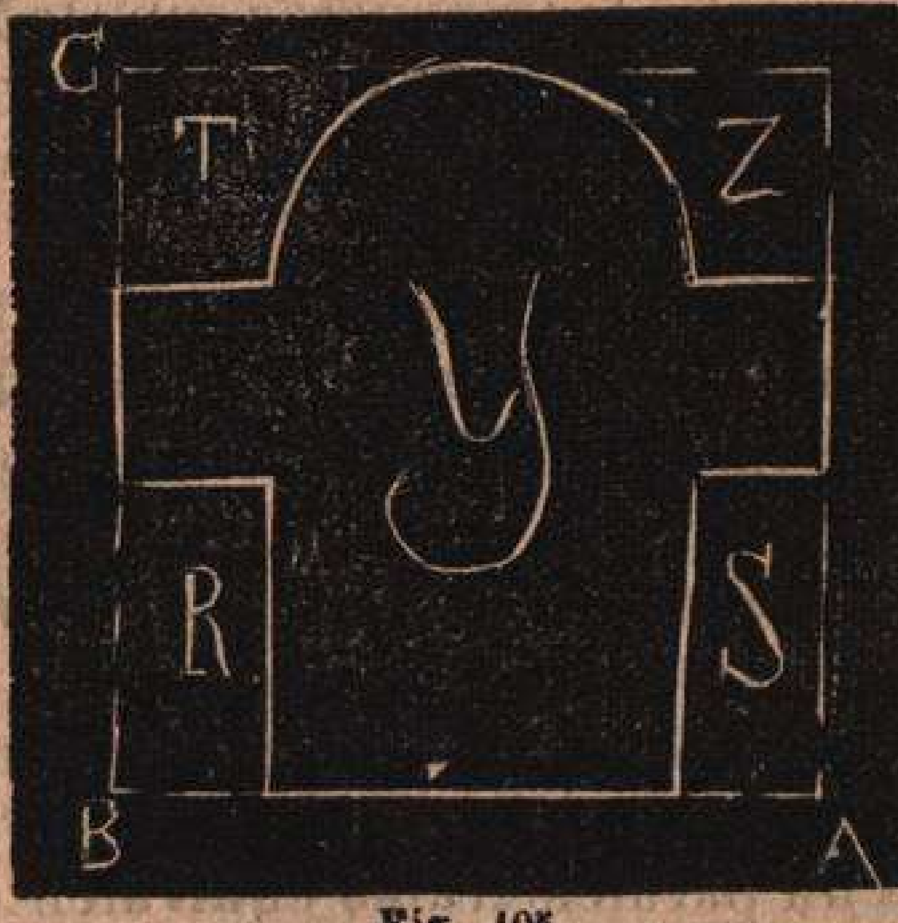


Fig. 105.

Para determinar el área de una estension superficial, tal como Y (fig. 105) que sea inaccesible, se trazará el paralelógramo ABC por los vértices mas salientes; y como sabemos que la parte es igual al todo menos el conjunto de las demás partes complementarias, resultará que área de Y es igual á AB×BC menos la suma de las áreas de R, S, Z y T.

151. Teorema. *Para reducir un polígono á otro equivalente que tenga un lado menos*, lo efectuaremos por medio de la equivalencia de los triángulos.

Sea el polígono dado ABCDE (fig. 106): prolongo uno de los lados AB, por ejemplo, y trazando por B la diagonal BD y por el vértice C á esta una paralela CM, cortará en el punto M á la prolongacion de la base AB; si uno ahora el punto D con el M, tendré que el polígono dado ABCDE es equivalente al AMDE que tiene un lado menos. El primero pierde el triángulo NCD y el segundo gana el NMB, y ámbos son equivalentes. En efecto, los triángulos BDM y BDC lo son por tener la misma base y altura; si de ámbos deducimos el BDN, resultará que

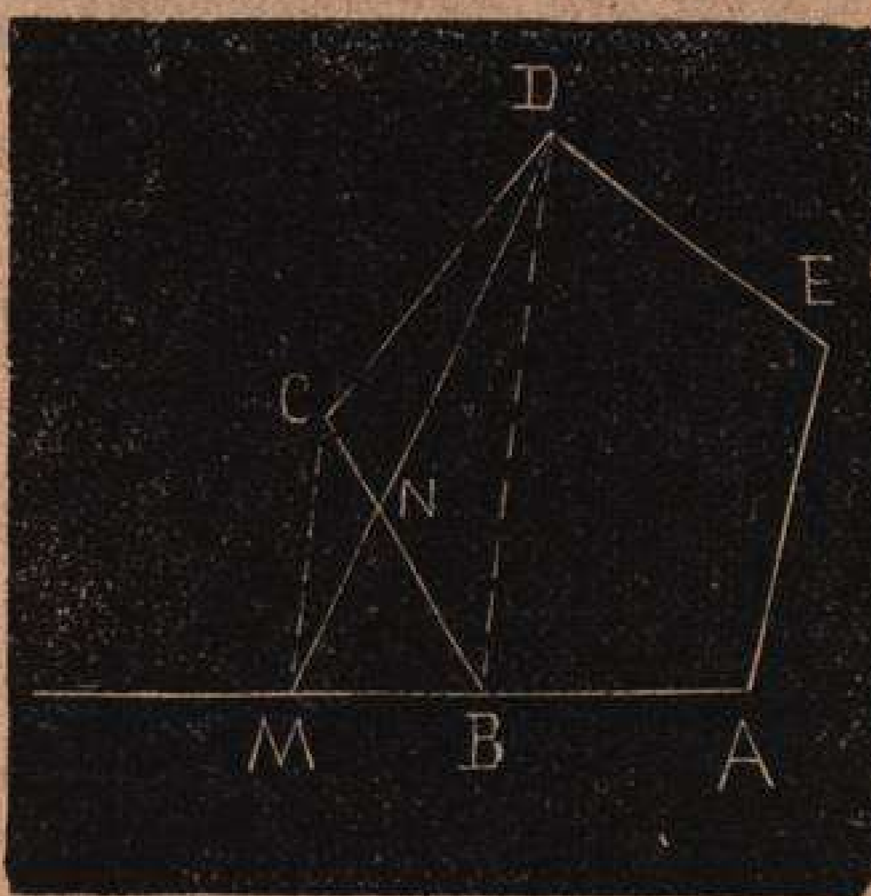


Fig. 106.

NMB=NCD.

Comparacion de las áreas poligonales.

152. Teorema. *Las áreas de dos figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus rectas homólogas.*

Supongamos en primer lugar que los polígonos dados sean triángulos.

Sean estos ABC y *abc* (fig. 107), y tendremos que siendo semejantes por hipótesis se verificará que

AB:*ab*::AC:*ac*,

bajando ahora las alturas CE y *ce*, tendremos que:

CE:*ce*::AC:*ac*;

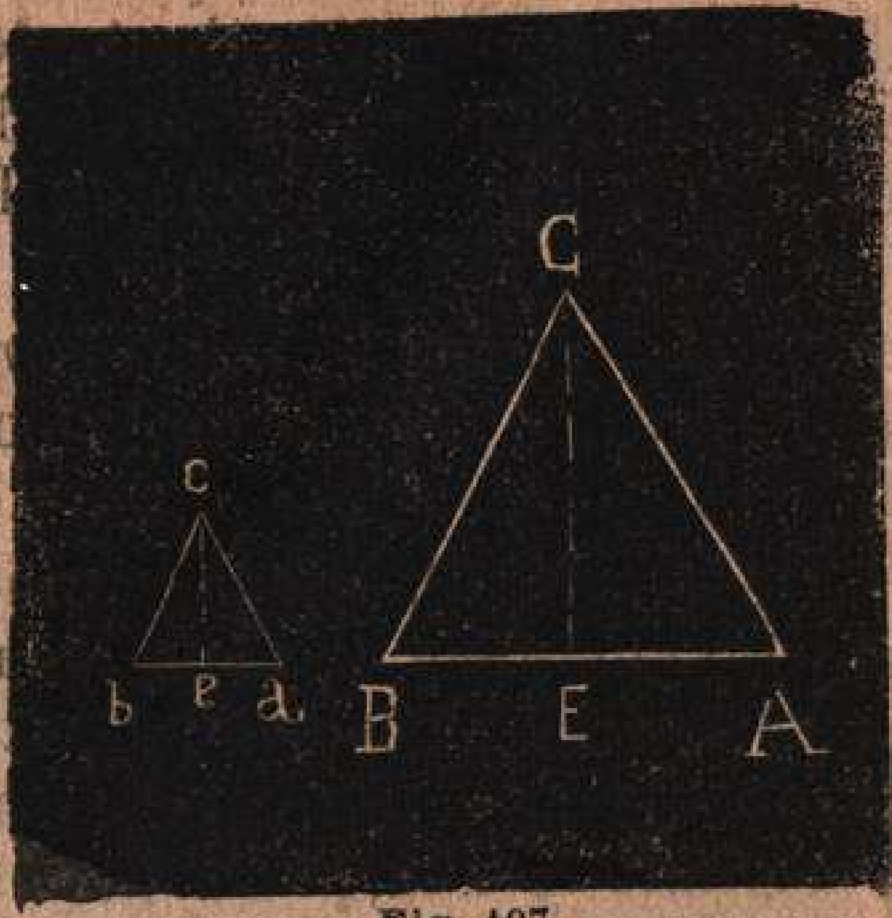


Fig. 107.

multiplicando término á término estas dos proporciones tendremos que:

$$AB \times CE : ab \times ce :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2,$$

partiendo por 2 los dos términos de la primera razon, resultará que:

$$\tfrac{1}{2}AB.CE : \tfrac{1}{2}ab.ce :: \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2,$$

y como los dos primeros términos de la proporcion espresan respectivamente las áreas de las dos figuras; y como los dos últimos tèrminos espresan los cuadrados de lados homólogos, resultará que:

$$\text{Area T.M : área } t.m :: L^2 : l^2,$$

que es lo que queriamos demostrar.

Si multiplicamos por 2 los dos primeros términos de la proporcion, quedará el Teorema demostrado con respecto á los paralelógramos.

Siendo el triángulo el elemento superficial de cualquier polígono; si los dos polígonos que se nos propusiesen para la demostracion de la proposicion fuesen regulares, bastaria multiplicar por un mismo número el antecedente y consecuente de la primera razon de la proporcion anterior, para que aquella estuviese demostrada.

Si los polígonos dados fuesen irregulares, demostrada la proposicion con relacion á cada dos triángulos semejantes, diriamos luego: la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, y como la suma de los antecedentes constituye el primer polígono y la suma de los consecuentes forma el segundo, *será cierto entre dos polígonos semejantes que sus áreas respectivas son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

153. Teorema. *Dos triángulos que tengan un ángulo igual, son entre sí como los productos de los lados que forman dichos ángulos;* es decir, como los rectángulos que se formen respectivamente tomando por base y por altura de cada uno, los dos lados que forman cada uno de los dos ángulos iguales.

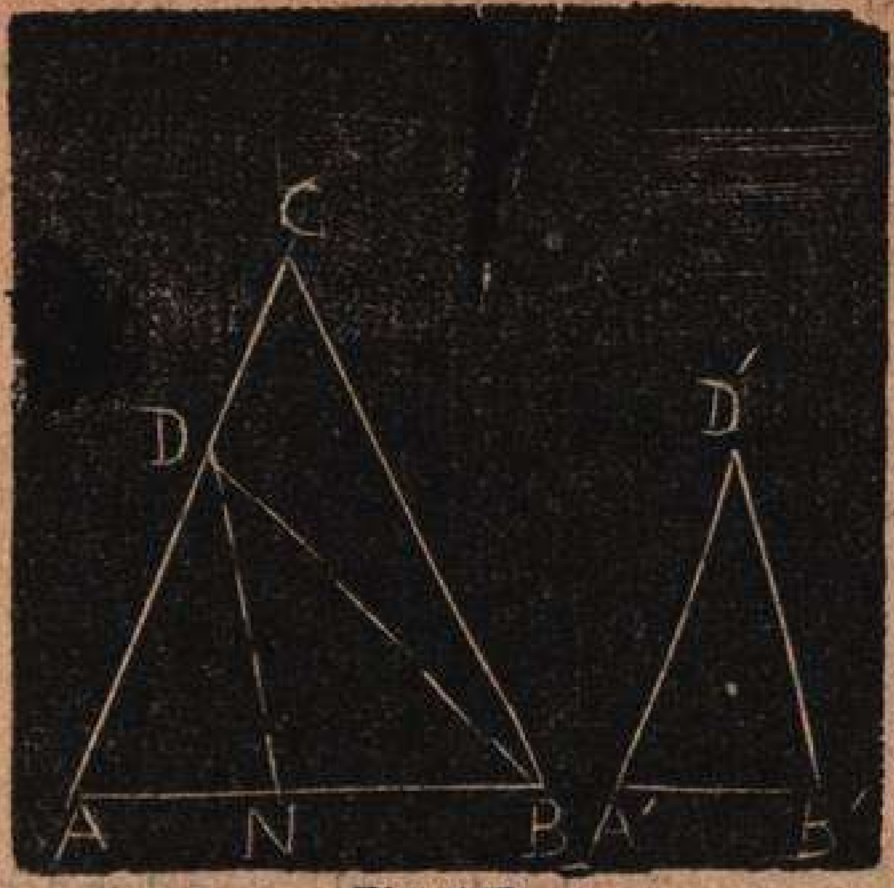


Fig. 108.

Sean ABC y A'B'D' (figura 108) dos triángulos, tales que el ángulo A=ángulo A', colocando el triángulo menor A'B'D' sobre el mayor ABC de manera que el ángulo A' caiga sobre su igual A, tendremos que el vértice D' caerá sobre D y el vértice B' sobre el N, es decir, que el triángulo A'B'D' caerá sobre el AND, teniéndose que:

A'B'D'=AND;

si unimos ahora el punto D con el B, tendremos que los triángulos ADB y ADN tienen la misma altura y diferente base, y por tanto (7.° cor. Teor. 147) serán proporcionales á sus bases; luego

Triáng. ADB : Triáng. ADN :: AB:AN.

Ahora bien, los triángulos ACB y ADB, tienen las bases diferentes AC y AD (que por tales se pueden considerar) y las mismas alturas, puesto que en ámbos será la perpendicular trazada desde B al lado opuesto: luego por tanto: Triáng. ACB : triáng. ADB::AC : AD, multiplicando término á término las dos proporciones anteriores, resultará que:

$$ADB\times ACB:ADN\times ADB::AB\times AC:AN\times AD,$$

partiendo los dos términos de la primera razon por ADB se tendrá: $ACB:ADN::AB\times AC:AN\times AD,$

lo mismo que: $ACB:A'D'B'::AB\times AC:A'B'\times A'D'$

que es lo que queriamos demostrar.

Corolario. Siendo equivalentes las áreas de dos triángulos que tienen la misma base y la misma altura, resultará que no solo es cierto el teorema anterior, en el caso de tener los dos triángulos un ángulo igual, sino tambien en el de tener los dos triángulos un ángulo suplementario.

154. Teorema. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa deun triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.*

En efecto, sea ABC (fig. 109) el triángulo rectángulo dado. Vamos á demostrar que el cuadrado BCMN construido sobre la hipotenusa BC, es equivalente á la suma de los cuadrados ACPQ y ABTR construidos sobre los catetos del mismo AC y AB.

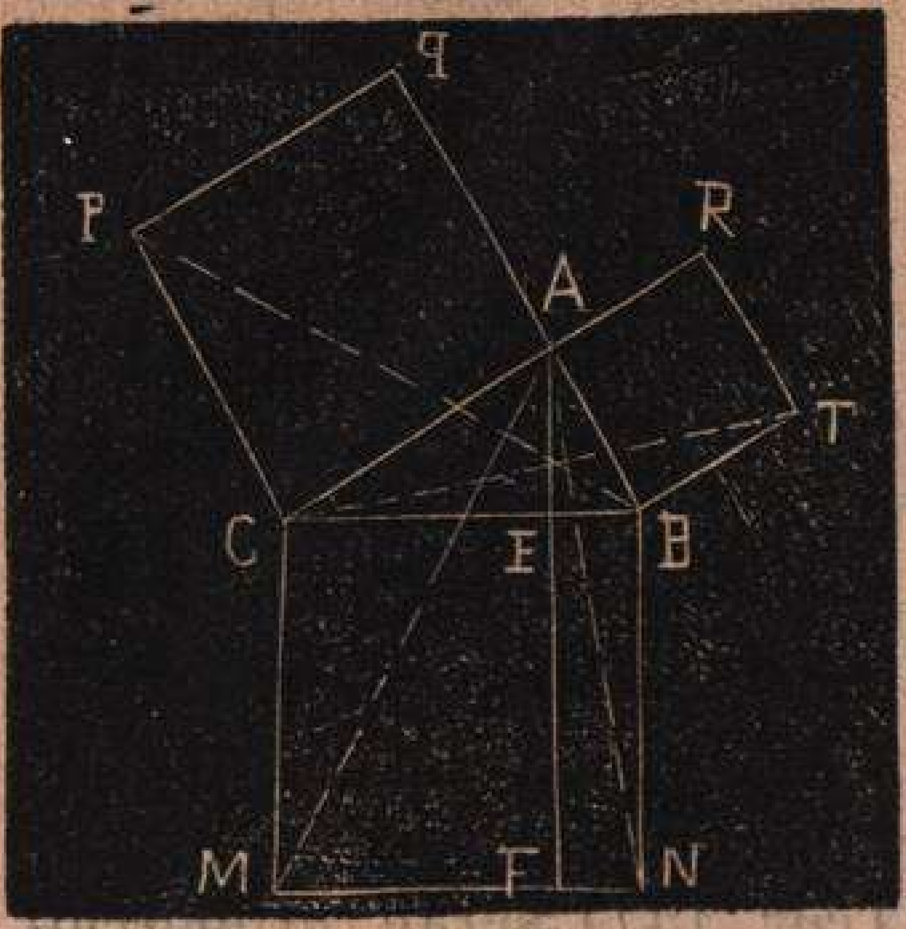


Fig. 109.

Si por el vértice A del ángulo recto trazamos la perpendicular AF, quedará por ella dividido el cuadrado CBNM formado sobre la hipotenusa en los dos rectángulos CEFM y BEFN.

Vamos á hacer ver que el primero de estos rectángulos es equivalente al cuadrado ACPQ formado sobre el cateto mayor, y que el otro rectángulo es equivalente al cuadrado construido sobre el cateto menor.

Si para la primera demostracion unimos el punto P con el B, formaremos el triángulo PCB, y si trazamos la recta AM formaremos el triángulo ACM.

Ahora bien, dichos dos triángulos PCB y ACM son iguales porque tienen: PC=AC, CB=CM dos lados iguales é igual el ángulo comprendido PCB=ACM, por componerse de un mismo agudo ACB mas un recto.

Además el triángulo PCB tiene la misma base PC y la misma altura que el cuadrado PCAQ, luego este es duplo de aquel. Y como el triángulo ACM tiene la misma base CM que el rectángulo CEFM, así como la misma altura que este, resultará que: ACM=$^1/_2$CEFM; luego PCB=ACM; PCB=$^1/_2$ACPQ; ACM=$^1/_2$CEFM y $^1/_2$ACPQ=$^1/_2$CEFM y por tanto, ACPQ=CEFM.

De la misma manera, demostraremos que los triángulos CBT y NBA son iguales, y como el 1.° es equivalente á medio cuadrado ABTR, y el 2.° á medio rectángulo EBNF, por tener aquellos la misma base y altura que estos, resultará que el cuadrado ABTR es equivalente al rectángulo EBNF; si á este rectángulo sumamos el anterior, resultará que *el cuadrado* CBNM *formado sobre la hipotenusa, es equivalente á la suma de los formados sobre los catetos.* Demostracion gráfica del teorema de Pitágoras.

155. **Corolario.** 1.° El cuadrado construido sobre un cateto de un triángulo rectángulo, es equivalente á la di-

ferencia entre los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.

2.° Siendo la proyeccion del cateto mayor AC, el segmento mayor CE de la hipotenusa, y siendo la proyeccion del cateto menor AB, el segmento menor EB de la misma, se comprobará prácticamente el tercer teorema de los del número (98) es decir, que el cuadrado construido sobre cada uno de los dos catetos, es equivalente à un rectángulo, que tiene por base la hipotenusa, y por altura la proyeccion de aquel sobre esta, toda vez que

ACPQ=CEFM y ABTR=BEFN.

3.° Los cuadrados construidos sobre la hipotenusa y los catetos son directamente proporcionales á la hipotenusa y á las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

En efecto, teniendo igual altura los rectángulos CMNB, CMFE y BNFE, tendremos que CBNM:CEFM::CB:CE, CBNM:BEFN::CB:BE ó bien CBNM:CB::CEFM:CE, CBNM:CB::BEFN:BE; si sustituimos los cuadrados en vez de los rectángulos, tendremos

CBNM:CB::ACPQ:CE::ABTR:BE.

4.° Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se construyen polígonos regulares del mismo nombre ó polígonos semejantes, el construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.

En efecto, si representamos estos respectivamente por H, C, c, resultará que $\overline{CB}^2:H::\overline{CA}^2:C::\overline{AB}^2:c$ ó lo que es lo mismo $\frac{H}{\overline{CB}^2}=\frac{C}{\overline{CA}^2}=\frac{c}{\overline{AB}^2}$ de donde $\frac{H}{\overline{CB}^2}=\frac{C+c}{\overline{CA}^2+\overline{AB}^2}$ y como $\overline{CB}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$ resultará tambien que $H=C+c$.

5.° De lo espuesto en el corolario precedente, se deduce que si en vez de polígonos regulares construimos círculos (que es entre todos el de mayor número de lados) resultará que el área del círculo construido con la hipotenusa, tomando esta por radio ó por diámetro, será equivalente á la suma de las áreas de los dos círculos construidos, tomando por rádio ó por diámetros de los mismos, los dos catetos.

6.° *Del precedente Corolario se desprende que área de todo triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de las áreas de las dos lúnulas construidas sobre los catetos.*

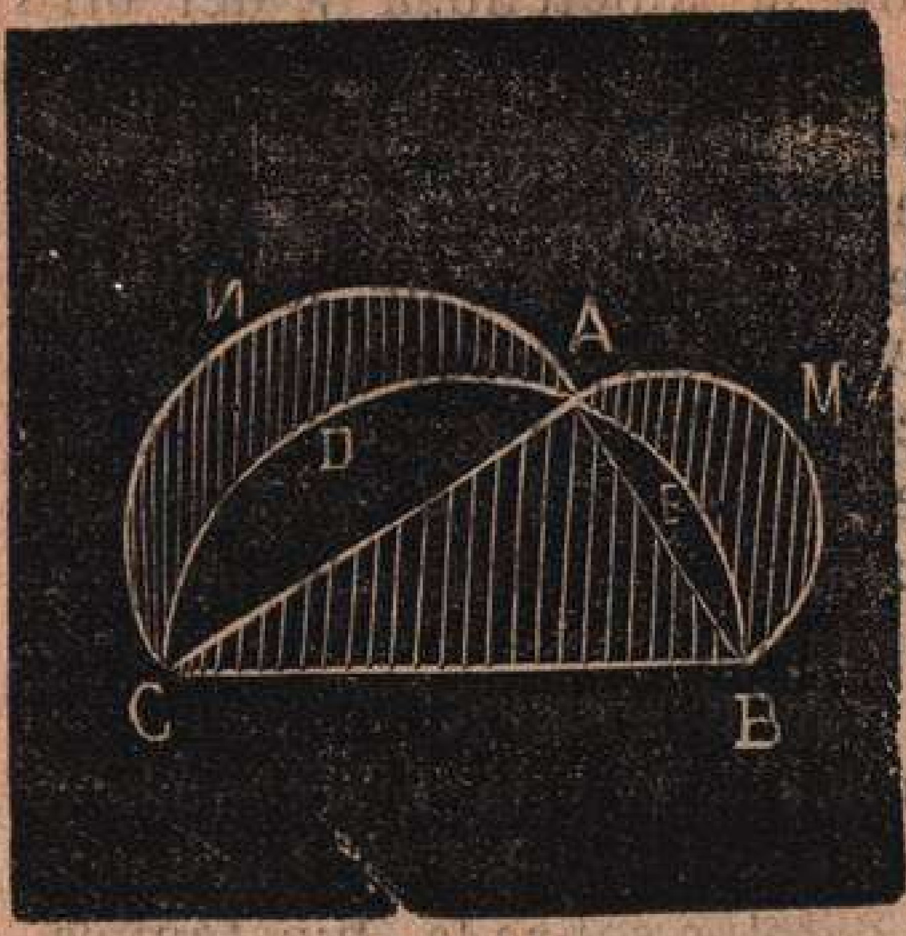


Fig. 110.

En efecto, sea BAC el triángulo rectángulo dado (figura 110,) trazando la semi-circunferencia CDEB sobre la hipotenusa CB, y las CNA y AMB sobre los dos catetos AC y AB, resultará que el semi-círculo CBEADC es equivalente á la suma de los otros dos CANC y ABMA.

Ahora bien, si del primer semi-círculo deducimos los segmentos D y E, quedará el área del triángulo dado, y si de la suma de los otros dos semi-círculos, deducimos los mismos segmentos D y E, resultarán las dos lúnulas: Luego, por tanto, Ar. Triángulo CBA=lúnula CDANA+lúnula AEBMA, que es lo que queríamos demostrar. Esta propiedad fué descubierta por Hipócrates de Chio, geómetra griego del siglo V, anterior á N. S. J.

7.º *El cuadrado construido sobre la diagonal de otro cuadrado*, es duplo de este: y tambien podremos decir, *el rectángulo construido sobre las diagonales del rombo, es duplo de este.*

8.º Para determinar numéricamente el lado de un cuadrado duplo de otro cualquiera dado, se multiplicará el de este por $\sqrt{2}$

En efecto, sea $2l^2=L^2$ estrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros será $L=l.\sqrt{2}$

El conocimiento de lo espuesto anteriormente nos conduce á la resolucion de varios problemas como los siguientes:

156. **Problemas.** 1.º *Determinar el lado de un triángulo equilátero, ó de un cuadrado, ó de un polígono regular, ó el rádio de un círculo, equivalente á la suma de otros dos triángulos equilácteros, ó de dos cuadrados, ó de dos polígonos regulares ó de dos círculos dados.*

Para resolver este problema gráficamente se construye un ángulo recto, desde su vértice se toman sobre cada lado, cada uno de los lados de los dos triángulos, ó de los dos cuadrados, ó de los dos polígonos regulares, ó los rádios de los dos círculos dados, y uniendo los estremos de estos por una recta, esta será la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y por tanto, el lado del triángulo, ó del cuadrado ó del polígono regular, ó el rádio del círculo pedido equivalente respectivamente á los dos lados.

2.° *Dados dos polígonos regulares ó dos círculos, determinar gráficamente el lado de otro polígono regular semejante, ó el rádio de un círculo equivalente á la diferencia de los dos dados.*

Para resolver este problema se forma un ángulo recto, desde su vértice se toma en uno cualquiera de sus lados el lado del polígono menor de los dados, y desde el otro estremo, con un rádio igual al lado del polígono mayor, se corta al otro lado en un punto y la distancia de este al vértice será la longitud del lado del polígono pedido.

3.° *Dados dos polígonos semejantes construir otro semejante á los mismos, y que sea equivalente á la suma ó á la diferencia de ellos.*

Para la resolucion de este problema procederemos como en los casos anteriores.

4.° *Construir un polígono semejante á otro dado y cuyas áreas tengan la razon de dos rectas* m *y* n.

Supongamos, para fijar las ideas, que $m:n=5:3$.

Sobre una recta que tenga $5+3=8$ unidades de cualquier escala, trazo una semi-circunferencia; en el punto de union de las dos rectas 5 y 3, levanto una perpendicular, hasta que toque á la semi-circunferencia en un punto; desde este trazo rectas á los estremos del diámetro prolongándolas indefinidamente, y si desde dicho punto y sobre la cuerda mayor (por que el polígono dado representa *cinco*, y el semejante á este, cuyos lados vamos á determinar, *tres*) tomamos uno de sus lados cualquiera, y sobre su estremo trazamos una paralela al diámetro, aquella cortará la otra cuerda prolongada en un punto, desde el cual al vértice del ángulo inscripto, será el lado homólogo del polígono pedido correspondiente á aquél, mediante el cuál se determina este.

Otros muchos problemas podrian proponerse y que omitimos en obsequio á la brevedad.

157. *El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas, equivale al cuadrado construido sobre la mayor, mas dos rectángulos iguales, que tienen por base la mayor, y*

por altura la menor, mas el cuadrado construido sobre la menor de dichas dos rectas.

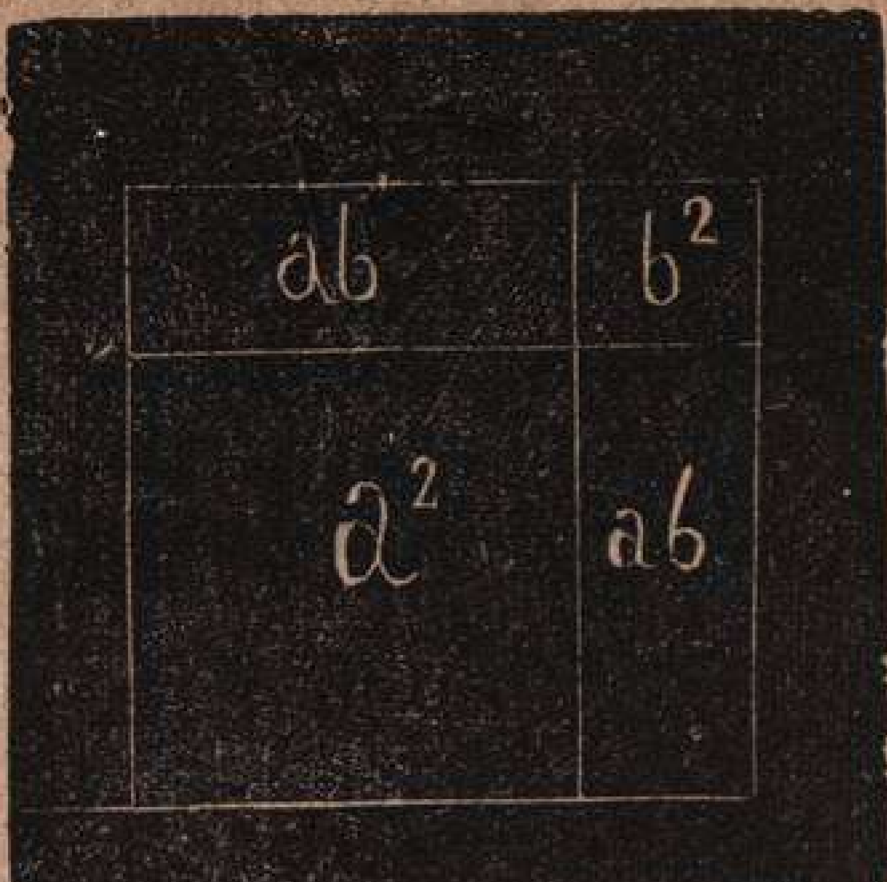


Fig. 111.

En efecto, sean a y b las dos rectas dadas (fig. 111) pongo á continuacion de la recta a, la b, y sobre la suma construyo un cuadrado; levanto en el punto de union de dichas dos rectas una perpendicular, y otra en la recta vertical suma, en el punto de union de las dos dadas, y así como algebráicamente hemos visto que

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

así tambien, geométricamente, y con la figura á la vista, veremos que a^2 cuadrado de la recta mayor a mas b^2 cuadrado de la recta menor b, y mas los dos rectángulos marcados con ab, constituyen sumados un cuadrado solo, que tiene por lado la suma de las dos rectas dadas $a+b$.

Escolio. De una manera análoga se demuestran los dos teoremas siguientes, de acuerdo con lo espuesto algebráicamente:

1.° *El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas, equivale al cuadrado construido sobre la primera, menos el rectángulo de la primera por la segunda, mas el cuadrado construido sobre la segunda.*

Conforme con: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

2.° *La diferencia superficial de los cuadrados construidos, sobre dos rectas dadas, equivale á un rectángulo que tenga por base la suma de dichas dos rectas, y por altura la diferencia de las mismas.*

Conforme con: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

* Division de las áreas.

158. La Teoría de la division de las áreas de las figuras planas, es una de las mas importantes de la Geometría práctica, y la base fundamental, podemos decir, del ejercicio contínuo del Agrimensor, en el reparto de terrenos etc.

El fundamento y resolucion de todas las diversas y complejas cuestiones que pueden proponerse, estriva en el completo estudio de la Geometría plana: innumerables son los problemas que pueden establecerse, por cuyo motivo haremos aquí referencia solo de algunos que nos parecen de mas frecuente uso y aplicacion.

Problema 1.° *Desde un punto cualquiera dado, en uno de los lados de un ángulo, trazar una recta al otro lado que cierre una área determinada.*

Si suponemos que el área que tratamos de encerrar en esta extension triangular sea S, diremos que $S = \frac{1}{2}$ Base$\times$Altura; multiplicando por 2 ambos miembros de la igualdad anterior, tendremos que: $2S = B \times A$.

Si partimos ahora ambos miembros por A, tendremos que: $B = \frac{2S}{A}$, y como la Altura es siempre conocida, puesto que es la perpendicular trazada desde el punto dado en uno de los lados, sobre el otro, la única incógnita será la base, que es la que se determina por la fórmula anterior.

Problema 2.° *Para dividir un triángulo en cierto número de partes iguales desde uno de sus vértices*, se dividirá el lado opuesto á este en el número de partes pedido, y por los puntos de division se trazarán líneas al vértice. Los triángulos parciales que se formen serán evidentemente equivalentes por tener la misma base y altura.

Problema 3.° *Para dividir un triángulo en partes proporcionales á números dados por rectas concurrentes en uno de sus vértices*, se divide el lado opuesto á este, en un número de partes igual á las que sumen las proporcionales dadas, y por los puntos de union de cada una se trazan líneas al vértice, quedando efectuada la division.

Supongamos, por ejemplo, que se trata de dividir un triángulo ABC desde su vértice A en tres partes proporcionales á los números 3, 4 y 5. Para esto, el lado opuesto al vértice A, que es BC, lo divido en $3+4+5=12$ partes iguales, y por la division 3.ª y 7.ª trazo dos líneas respectivamenie al vèrtice A, y quedará efectuada la division.

Problema 4.° *Dividir un triángulo en partes iguales ó proporcionales á números dados por paralelas á la base.*

Para esto, siendo el triángulo total dado *semejante* al parcial pedido, serán los dos proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, (teorema 152) y por tanto diremos: $T:t::L^2:l^2$ de los cuatro términos de esta proporcion se conocen: T, ó el área total del triángulo dado; t ó el área parcial que desea separarse; L^2 ó cuadrado de una de las líneas del triángulo dado, por lo cual la incógnita es l^2 ó el cuadrado del lado del triángulo menor, y será:

$l^2 = L^2 \frac{t}{T}$, de donde $l = L\sqrt{\frac{t}{T}}$, fórmula que resuelve el problema.

Problema 5.° *Dividir un triángulo en partes iguales ó proporcionales á números dados por perpendiculares á la base.*

Para esto, desde el vértice opuesto á la base trazaremos á esta una perpendicular, la que si consideramos como base de los dos triángulos parciales que resultan, y manejamos oportunamente la fórmula obtenida para el problema anterior, resolveremos fácilmente este.

Problema 6.° *Dividir un triángulo en partes iguales ó proporcionales á números dados desde un punto cualquiera dado en la superficie triangular, sea en el centro ó en uno de sus lados.*

Para esto, desde dicho punto trazaremos una perpendicular á uno de los lados y con aplicacion de la fórmula $B = \frac{2S}{A}$, obtenida en el primer problema, daremos solucion á este fácilmente.

Problema 7.° *Para dividir un paralelógramo en partes iguales ó proporcionales á númeres dados desde uno de sus vértices*, se traza desde este una diagonal á su opuesto y queda así dividido el paralelógramo dado en dos triángulos y desde un vértice del mismo (Problema 3.°) ya sabemos como se divide.

Problema 8.° *Para dividir un trapecio en partes iguales ó proporcionales á números dados, por medio de rectas que corten á sus bases*, se dividen ambas bases en un número de partes igual á la suma de las proporcionales dadas, y uniendo los puntos respectivos de division, quedará resuelto el problema.

Problema 9.° *Dividir un trapecio en dos partes proporcionales á números dados por una paralela á las bases.*

Sea para esto, RPHQ (fig. 112) el trapecio dado, el cual queremos dividir por la recta DE paralela á sus bases en dos partes RPED y DEHQ que tengan entre sí la relacion de $n:m$. La incógnita es la longitud de la recta DE, porque obtenida esta y puesta sobre el lado RP, nos marcará en esta un punto desde el cual trazando una paralela á RQ, nos marcará otro punto E, por el cual trazando una paralela á entrambas bases, quedará resuelto el problema.

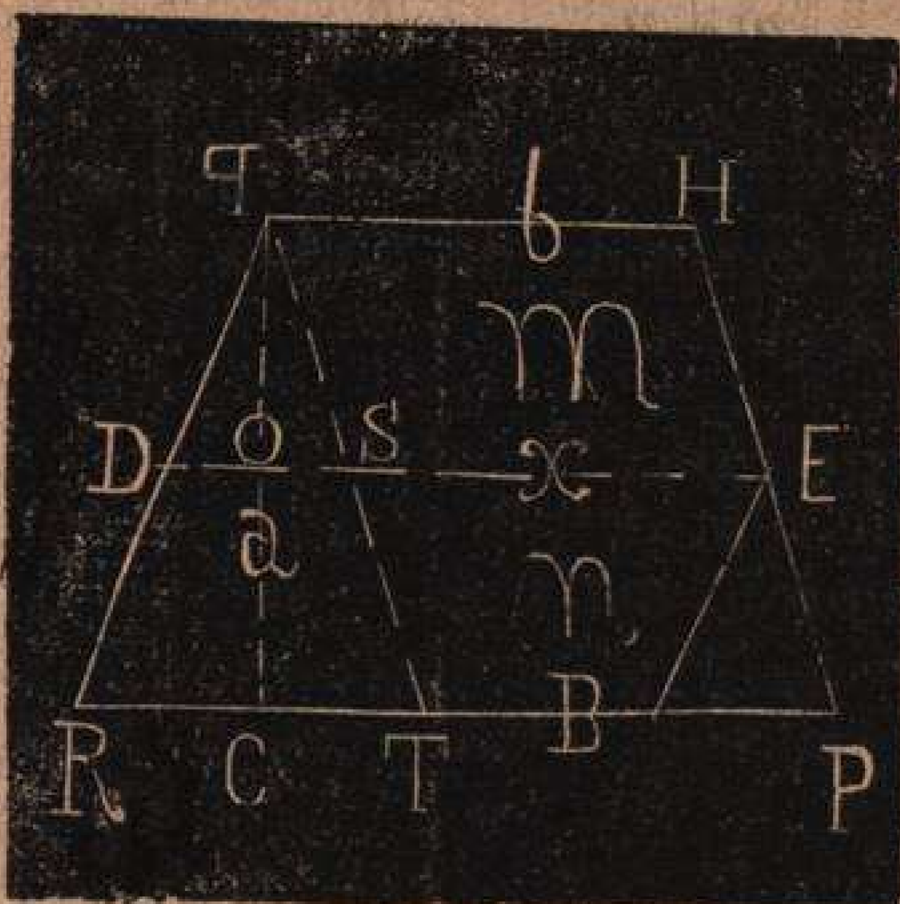


Fig. 112.

Si para esto trazamos la altura QC dei trapecio á la quien llamamos a y además la recta QT paralela á HP, formaremos los dos triángulos QSD y QTR, que serán semejantes.

Ahora bien, segun el Teorema 149, el área del trapecio total llamada $m+n$ será

$$\frac{\mathrm{RP}+\mathrm{QH}}{2}\times\mathrm{QC},$$

y como llamamos $\mathrm{B}=\mathrm{RP}$, $b=\mathrm{QH}$ y $\mathrm{QC}=a$, resultará que: Area Tl.$=\left(\frac{\mathrm{B}+b}{2}\right)\times a.$

Ahora bien, el área parcial de m es igual á

$$\frac{\mathrm{DE}+\mathrm{QH}}{2}\times\mathrm{QO},$$

y como $\mathrm{DE}=x$, $\mathrm{QH}=b$, tendremos que:

$$\text{área parcial}=\frac{x+b}{2}\times\mathrm{QO}.$$

En los triángulos QSD y QTR tendremos que $\mathrm{RT}:\mathrm{DS}::\mathrm{QC}:\mathrm{QO}$ y sustituyendo será $\mathrm{B}-b:x-b::a:\mathrm{QO}$

$$\text{de donde}\quad \mathrm{QO}=\frac{a(x-b)}{\mathrm{B}-b}.$$

Si ahora en la fórmula del área parcial sustituimos QO por su valor, resultará que:

$$\text{área parcial } m=\frac{x+b}{2}\times\frac{a(x-b)}{\mathrm{B}-b}=\frac{a(x^2-b^2)}{2(\mathrm{B}-b)}.$$

Y como las áreas del trapecio total y del parcial son proporcionales entre sí, resultará que:

$$m+n:m::\frac{a(\mathrm{B}+b)}{2}:\frac{a(x^2-b^2)}{2(\mathrm{B}-b)};$$

quitando los denominadores de los dos términos de la segunda razon, será: $m+n:m::2a(B^2-b^2):2a(x^2-b^2)$ partiendo por $2a$, antecedente y consecuente de la segunda razon, será: $m+n:m::B^2-b^2:x^2-b^2$. Despejando el cuarto término será: $x^2-b^2=(B^2-b^2)\frac{m}{m+n}$; añadiendo b^2 á ambos miembros, resultarà que: $x^2=b^2+(B^2-b^2)\frac{m}{m+n}$ y estrayendo, por último, la raiz cuadrada de ámbos miembros de esta igualdad, resultará que:

$$x=\pm\sqrt{b^2+(B^2-b^2)\frac{m}{m+n}}$$

fórmula final que resuelve el problema.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO PRIMERO

DE LA SEGUNDA PARTE DE LA GEOMETRIA PLANA.

SOBRE SUPERFICIES POLIGONALES.

I. Construir un triángulo, dados los elementos que se expresan en cada uno de los casos siguientes:

1.° Un ángulo, uno de sus lados adyacentes y la mediana (1) del ángulo opuesto al lado conocido.

2.° Dos lados y la mediana de uno de los ángulos opuestos á cualquiera de los dos lados conocidos.

3.° Un lado, uno de los ángulos adyacentes y la longitud de su bisectriz.

4.° Un lado y la circunferencia inscripta.

5.° La circunferencia inscripta y una de las ex-inscriptas.

6.° Dos de las circunferencias ex-inscriptas.

II. Demostrar que las perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo á los lados opuestos se cruzan en un mismo punto.

III. Demostrar que las medianas trazadas desde los vértices de un triángulo se encuentran en un punto (que es el centro de gravedad de dicho triángulo.)

IV. Demostrar que si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los ángulos comprendidos por ellos son suplementarios, los triángulos serán equivalentes.

V. Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

VI. Construir un triángulo en los casos siguientes:

1.° Dados los piés de las 3 alturas.

2.° Una altura, un ángulo y el perímetro.

3.° Dos ángulos y la suma de dos lados.

4.° Dos ángulos y el perímetro.

5.° Dos ángulos y una altura.

6.° Un lado, un ángulo y una altura.

VII. Demostrar que en todo cuadriláctero la suma de los cuadrados de las diagonales es doble de la suma de los cuadrados de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

VIII. Demostrar que en todo trapecio la suma de los cuadrados de las diagonales es igual á la suma de los cuadrados de los lados no paralelos, mas el duplo del producto de las bases.

IX. Cubrir una superficie plana con polígonos regulares, suponiendo que todos sean ya iguales, ó que lo establezcamos con polígonos de dos ó tres especie diferentes, sirviendo estas combinaciones de aplicacion al enlosado de pavimentos.

X. Demostrar que dos diagonales de un pentágono regular se dividen mútuamente en media y extrema razon.

XI. Demostrar que la suma de las distancias de un punto interior de un polígono regular á los n lados de este polígono, es igual á n veces la apotema.

XII. Dadas las proyecciones de los dos catetos de un triángulo rectángulo, determinar sus dos catetos, su hipotenusa, la perpendicular bajada desde su vértice recto, y el área de dicho triángulo rectángulo.

XIII. Demostrar que si en un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es doble que el otro, la hipotenusa es doble que su cateto menor.

(1) Se llama Mediana de un ángulo la recta que vá desde su vértice al punto medio del lado opuesto.

LIBRO SEGUNDO.

SUPERFICIES CIRCULARES.

Propiedades del círculo.

159. Llamamos *círculo* á la porcion de plano limitado por la circunferencia.

Las líneas que consideramos en el círculo son y tienen el mismo nombre de las que hemos considerado trazadas en la circunferencia.

En el círculo como en la circunferencia se puede trazar un número infinito de rádios y de diámetros.

Dos círculos como dos circunferencias, si tienen el mismo rádio ó diámetro coinciden, es decir, que son iguales.

La magnitud del círculo, como la de la circunferencia, está determinada conociendo el rádio.

La posicion del círculo, como la de la circunferencia, está determinada conociendo el centro.

Es menester tener en cuenta que *la idea de circunferencia* no *entraña* mas que *la de línea,* que la estension de una sola dimension; y que *la idea de círculo entraña* siempre la de *superficie*, es decir, la de estension de dos dimensiones.

La circunferencia es la línea que limita al círculo.

El círculo es la superficie limitada por la circunferencia.

Las tres propiedades del diámetro en toda circunferencia, son tambien exactas referidas al círculo.

El círculo como la circunferencia, se determinan conociendo tres de sus puntos.

Si dos círculos tienen diferentes rádios, no serán iguales pero sí semejantes, lo cual nos hace ver que todos los círculos son semejantes y que no hay por lo tanto, diferentes clases de círculos: el círculo es siempre una figura simétrica con referencia á cualquier diámetro, porque doblado por él, sus dos mitades coinciden.

Un círculo se dice que está inscripto á un polígono ó que este está circunscripto á aquel, cuando sus lados son tangentes del círculo, y por tanto, queda este dentro de aquel.

Un círculo se dice que está circunscripto á un polígono ó que este está inscripto á aquel, cuando sus lados son cuerdas del círculo, y por tanto, queda este fuera de aquel.

Hemos visto, Teorema 138, que todas las bisectrices de los ángulos de un polígono regular se encuentran en punto, así como tambien, que todas las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados se encuentran en un punto; luego por tanto, todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible al círculo. Los polígonos convexos irregulares necesitan para ser inscriptibles ó circunscriptibles, condiciones de las cuales no podemos ocuparnos en este tratado.

Los cuadriláctero, hemos visto, Teorema 122, que para ser inscriptibles en el círculo, es necesario que se cumpla en ellos que los ángulos opuestos sean suplementarios. En el teorema 123 hemos visto, que para que los cuadriláctores sean circunscriptibles en el círculo, se necesita que la suma de dos lados opuestos sea igual á la suma de los otros dos.

En los triángulos no se requiere condicion ninguna para que estos sean inscriptibles y circunscriptibles, puesto que teniendo solo 3 vértices, son siempre inscriptibles, y teniendo solo 3 lados son siempre circunscriptibles, toda vez que 3, son los puntos que se necesitan para trazar un círculo. Tan solo diremos que para que el círculo inscripto y el circunscripto á un triángulo sean concéntricos, es preciso que sea aquel equiláctero.

De lo espuesto inferiremos.

1.° Que el rádio de un poligono regular es el rádio del círculo circunscripto al mismo.

2.° Que la apotema de un polígono regular es el rádio del círculo inscripto al mismo.

160. Teorema. *Dado un lado de un polígono regular cualquiera, construir dicho polígono regular conociendo el número de los lados de este.*

Supongamos que se nos dá el lado CB (fig. 113) y que el polígono regular que se pide sea un pentágono.

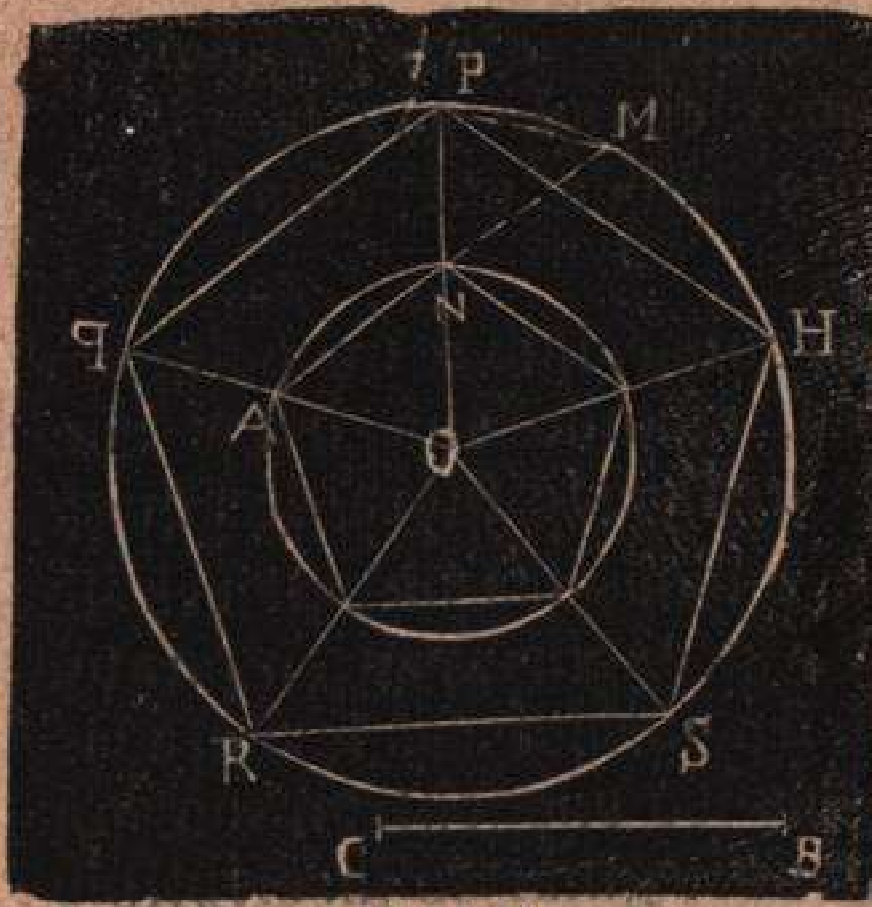


Fig. 113.

Con un rádio cualquiera ON por ejemplo, trazo un círculo é inscribo en el mismo un pentágono, trazo las bisectrices OA y ON de dos de sus ángulos contíguos y las prolongo indefinidamente. Prolongo tambien uno de sus lados, AN por ejemplo, para que una estension AM sea igual á la recta dada CB, y por dicho punto M trazo la paralela MP al rádio OQ hasta que corte en el punto P al otro rádio prolongado ON, y si desde dicho punto P trazo la paralela PQ al lado AN, tendremos que será igual á la recta dada CB. Ahora desde el centro con un rádio OP trazo un círculo y tomando la cuerda PQ=QR=RS=SH=HP habremos formado el polígono pedido.

161. Teorema. 1.° *Si una circunferencia de círculo se divide en partes iguales y se unen cada dos de los puntos de division, habremos formado un polígono regular inscripto.*

2.° *Si por cada uno de los puntos de division se traza una tangente, todas ellas formarán un polígono regular circunscripto á la misma.*

En efecto: 1.° sea O la circunferencia dada, (fig. 114) trazando las cuerdas iguales á la AB, siendo todas ellas iguales, lo serán los arcos y recíprocamente (Teor. 61) y como el conjunto de todas ellas cerrarán una estension superficial limitada por rectas, será un polígono, y como en él todos sus lados son iguales por cuerdas de iguales arcos, y los ángulos tambien lo son por inscriptos, resultará que el polígono es regular.

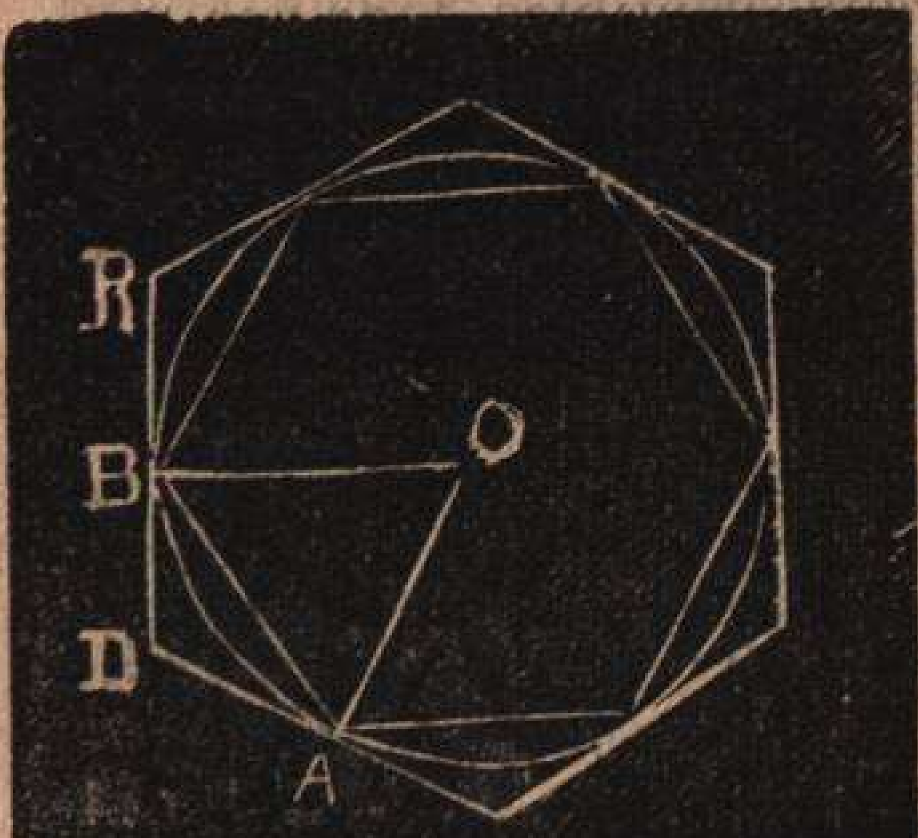


Fig. 114.

2.° Si trazamos rádios á los vértices y en sus estremos levantamos perpendiculares, serán estas tangentes del círculo en dichos puntos, todas ellas cerrarán una estension superficial, luego será un polígono, pero como el triángulo ADB y siguientes son iguales por tener sus lados respectivamente iguales, resultará que dichas tangentes serán iguales, y como los ángulos esteriores ó circunscriptos lo son tambien, el polígono será regular y circunscripto al círculo.

162. Teorema. *Toda circunferencia es el límite superior de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, y es á la vez el límite inferior de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos á la misma.*

En efecto, supongamos en la circunferencia O, (fig. 114) un polígono cualquiera regular inscripto y otro del mismo número de lados, regular circunscripto. En la misma figura observaremos que la menor distancia entre los puntos A y B, será la recta AB, luego AB cuerda $<$ AB arco, si multiplicamos ambos miembros por el número de veces que la circunferencia contiene al arco, diremos en este caso, que 6 veces cuerda AB $<$ 6 veces arco AB, y como 6 veces la cuerda AB constituye el perímetro del polígono, y como 6 veces el arco AB es la circunferencia, diremos que: *Perímetro Polígono regular inscripto $<$ que la Circunferencia.*

Ahora bien: entre el arco AB y la recta quebrada ADB, se verifica que *arco* AB $<$ *línea quebrada* ADB (teors. 18 y 19) si multiplicamos ambos miembros de la desigualdad anterior por el número de veces que la circunferencia dada contiene al arco (que en este caso particular son seis) diremos que 6 veces arco AB $<$ 6 veces línea quebrada ADB, pero 6 veces el arco, es la circunferencia, y como 6 veces la línea quebrada ADB es el perímetro del polígono regular circunscripto, diremos por último que: *circunferencia $<$ Perímetro polígono regular circunscripto.* Luego resultó demostrada la proposicion que dice que: *perímetro polígono regular inscripto $<$ circunferencia $<$ perímetro polígono regular circunscripto.*

Si referimos el precedente teorema, no ya á la relacion que liga la circunferencia con los perímetros de los dos polígonos regulares inscripto y circunscripto á la misma, sino á la relacion existente entre la superficie circular ó círculo y los dos polígonos, diremos que: *el círculo es el límite inferior de los polígonos regulares circunscriptos, siendo á su* *vez el límite superior de los polígonos regulares inscriptos al mismo.*

Escolio. Para construir un polígono inscripto regular cualquiera en un círculo dado, se dividirá la circunferencia de dicho círculo en tantas partes como lados ha de tener el polígono pedido, y uniendo cada dos divisiones consecutivas formaremos el polígono inscripto, y trazando tangentes formaremos el polígono regular circunscripto pedido.

Polígonos regulares en el círculo.

163. El lado de un polígono regular inscripto en un círculo se determina siempre en funcion del rádio del mismo círculo, á partir del exágono; así se dice:

Teorema. *El lado del exágono inscripto en un círculo es igual al rádio de este.*

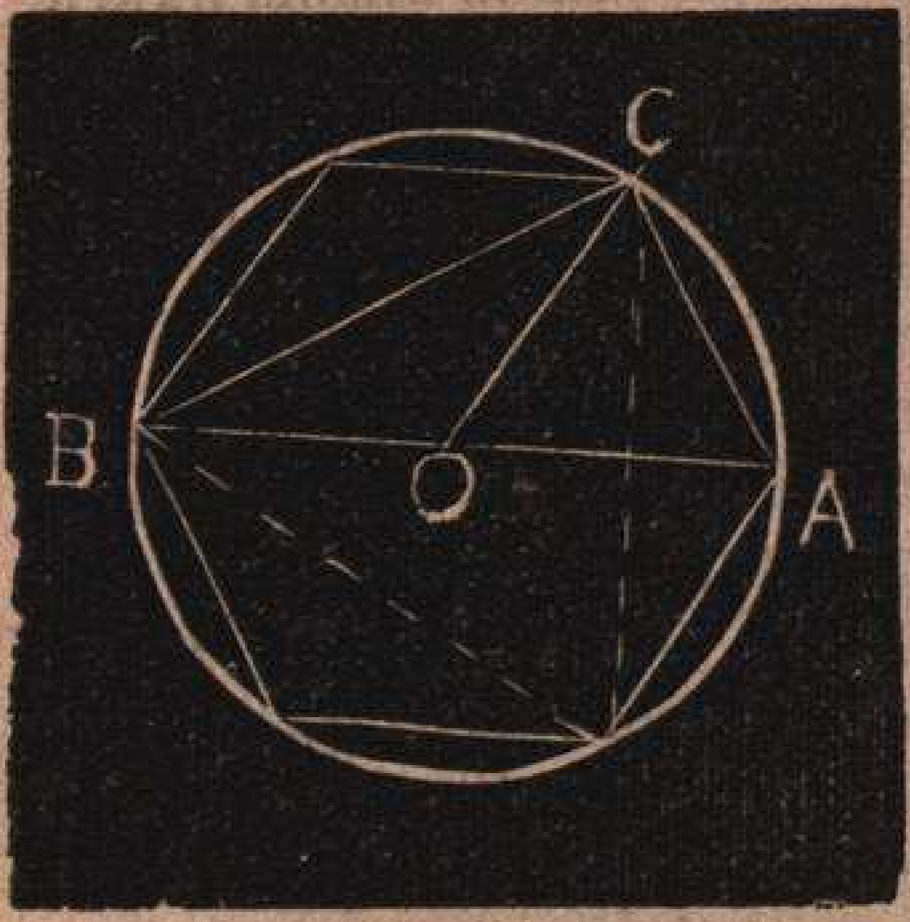


Fig. 115.

En efecto, sea AC (fig. 115) el lado del exágono inscripto en el círculo O, trazando desde los estremos A y C los dos rádios OA y OC, tendremos el triángulo OAC, el cual, si probamos ser equiláctero, habremos demostrado ser cierta la proposicion anterior.

Desde luego, y por ser iguales todos los rádios de un círculo, el triángulo OAC es isósceles; luego, por tanto, el ángulo OCA=OAC; pero el ángulo en O vale: $\frac{4R}{n}=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$ (segun el 5.° corolario del teorema 138) y como los ángulos

$$OCA+OAC=2R-O=180^\circ-60^\circ=120^\circ;$$

y dichos dos ángulos hemos visto que son iguales, luego $OCA=OAC=\frac{120}{2}=60^\circ$; por tanto, cada uno de los ángulos O, A ó C del triángulo OAC vale 60°; luego el triángulo es *equiángulo* y por tanto, *equiláctero*; y siendo AC=OA=OC=R, queda demostrada la proposicion anterior, *de ser el lado del exágono inscripto igual al rádio.*

La demostracion anterior la comprobamos *á posteriori*, observando como, en efecto, tomando el lado AC, igual OA sobre la circunferencia del círculo O, cabe exactamente 6 veces. De este polígono inscripto podemos partir diciendo: *Si el lado del exágono inscripto es igual al rádio, el lado de cualquier polígono regular que tenga menos de 6 lados como el lado de Pentágono, Cuadrado ó Triángulo inscriptos, serán respectivamente cada vez mayores que el rádio; y por el contrario, el lado de cualquier polígono regular que tenga mas de 6 lados, como el del Eptágono, Octógono, Eneágono etc., serán respectivamente menores que el rádio.*

164. Teorema. *El lado del triángulo equiláctero inscripto en un círculo en funcion de su rádio, es igual á $R\sqrt{3}$*

En efecto, sea BC (fig. 115) el lado del triángulo equiláctero inscripto en el círculo O; si por el extremo B trazamos el diámetro BA y unimos el punto C con el A, formaremos el triángulo rectángulo ACB, que tiene por hipotenusa al diámetro $AB=2R$, y que tiene por catetos los lados CB y CA, el primero del triángulo equiláctero y el segundo del exágono, ambos inscriptos en el círculo O.

Segun el teorema de Pitágoras, resultará que

$$\overline{BC}^2=\overline{BA}^2-\overline{AC}^2$$

$$\text{y por tanto } \overline{BC}^2=(2R)^2-R^2=4R^2-R^2,$$

de donde $\overline{BC}^2=3R^2$, y extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, resultará que $BC=R\sqrt{3}$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

165. Teorema. *El lado del cuadrado inscripto en un círculo en funcion de su rádio es igual á $R\sqrt{2}$.*

En efecto, sea O el círculo (fig. 116) y AB el lado del cuadrado que tratamos de determinar. El triángulo AOB será rectángulo, y en él se verificará, segun el teorema de Pitágoras, que

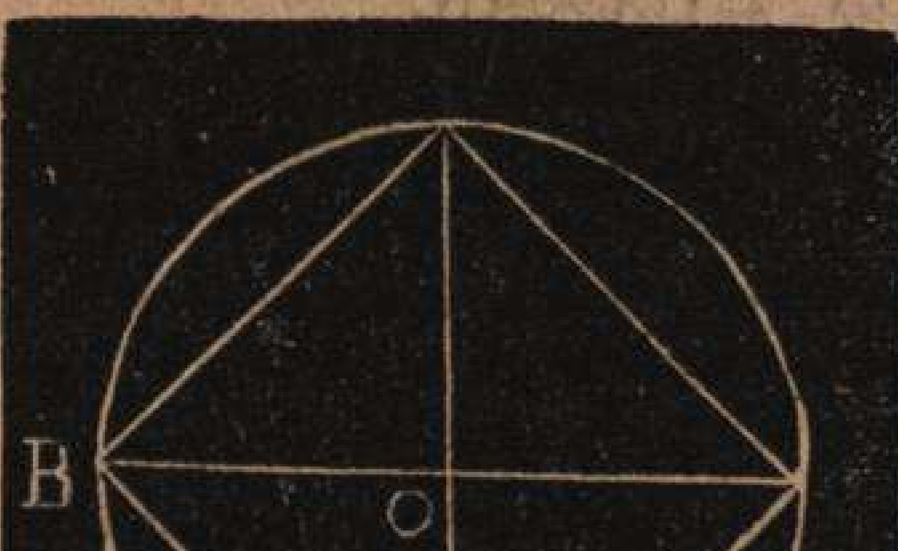


Fig. 116.

$\overline{AB}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2$; y siendo $AO=BO=R$, tendremos que

$$\overline{AB}^2=R^2+R^2=2R^2,$$

extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, resultará que $AB=R\sqrt{2}$, que es lo que queríamos demostrar.

166. Teorema. *El lado del decágono regular inscripto en un círculo, es igual á la parte mayor del rádio dividido en media y estrema razon.*

En efecto, sea O el círculo (fig. 117) y AB el lado del decágono, si unimos el centro O con los estremos A y B del lado, formaremos el triángulo isósceles OAB. El valor del ángulo en O será, segun la fórmula $\frac{4R}{n}$, de 36° y entre los otros dos A y B, valdrán 144°, que como son iguales, resulta para cada uno 72°.

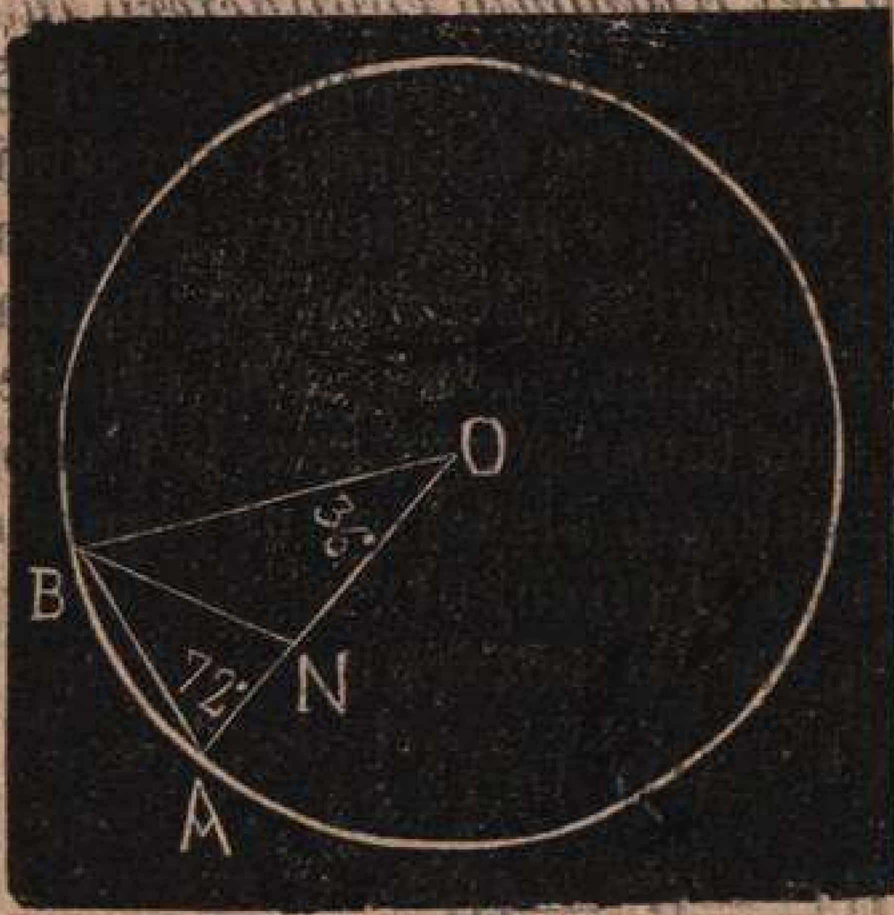


Fig. 117.

Si trazamos la bisectriz BN del ángulo B, formaremos el triángulo BNA que tendrá el ángulo en B de $^1/_2$ 72°, es decir, de 36°; el ángulo BAN de 72° y por tanto, el BNA tambien de 72°, luego los dos triángulos OBA y BAN son isósceles y semejantes por tener sus tres ángulos respectivamente iguales; de ser isósceles BAN resultará que BA=BN, y de serlo tambien el triángulo BNO, por tener los ángulos en O y en B de 36°, resultará que BN=NO.

Si establecemos proporcionalidad entre los triángulos

OBA y BNA, resultará que: OB:BA::BA:AN,

pero BO=AO y BA=NO, luego AO:ON::ON:AN

es decir, que $\overline{ON}^2 = OA \times AN$;

por tanto, AB que es el lado del decágono, equivale á la parte mayor del rádio dividido en media y estrema razon.

Algébricamente, si representamos el rádio por R, su parte mayor dividido este en media y estrema razon por x, y su parte menor por $R-x$, tendremos que:

$$R:x::x:R-x,$$

como producto de medios igual al de los estremos, resultará la ecuacion de 2.° grado

$$x^2=R(R-x) \text{ donde } x^2=R^2-Rx$$

y por tanto, $x^2+Rx=R^2$, el primer miembro de esta igualdad es igual á los dos primeros términos del cuadrado del binomio $(x+{}^1/_2R)^2=x^2+Rx+{}^1/_4R^2$, si añadimos á los dos miembros de la igualdad anterior $^1/_4R^2$ tendremos que:

$$x^2+Rx+{}^1/_4R^2=R^2+{}^1/_4R^2;$$

sustituyendo por el primer miembro su valor, resultará que: $(x+{}^1/_2R)^2=\frac{4R^2}{4}+{}^1/_4R^2$, luego $(x+{}^1/_2R)^2=\frac{5R^2}{4}$, estrayendo la raiz cuadrada de ámbos miembros resultará

$$\text{que: } x+{}^1/_2R=\pm\sqrt{\frac{5R^2}{4}}$$

$$\text{y por tanto, } x+{}^1/_2R=\frac{R}{2}\sqrt{5}$$

Pasando $^1/_2R$ al segundo miembro y sacando el factor comun, resultará que x ó lado del decágono$={}^1/_2R(\sqrt{5}-1)$ que es la fórmula general que tratábamos de determinar.

* 167. Teorema. *El lado del pentedecágono regular inscripto en un círculo es igual á la parte menor del rádio dividido en media y estrema razon.*

En efecto, aritméticamente tenemos que

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{5}{30}-\frac{3}{30}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

puesto que $\frac{1}{6}$ es el arco correspondiente al rádio ó á la cuerda del exágono, y $\frac{1}{10}$ es el arco correspondiente al decágono, siendo por tanto $\frac{1}{15}$ la diferencia, ó sea el arco correspondiente al pentedecágono.

La fórmula correspondiente al lado del pentedecágono se determina de la manera siguiente:

Llamemos L, al lado del pentedecágono; el del exágono será R, y el del decágono será, segun lo que hemos obtenido, $^1/_2R(\sqrt{5}-1)$, y por tanto, segun lo expuesto, será:

$$L=R-{}^1/_2R(\sqrt{5}-1)\text{, ó lo que es lo mismo}$$

$$L=\frac{2R}{2}-\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{2R-(R(\sqrt{5}-1))}{2}\text{, ó}$$

$$L=\frac{2R-R\sqrt{5}+R}{2}=\frac{3R-R\sqrt{5}}{2}\text{; luego}$$

$$L^2=\left(\frac{3R-R\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9R^2-6R^2\sqrt{5}+5R^2}{4}$$

$$=\frac{14R^2-6R^2\sqrt{5}}{4},\ \text{y por tanto } L^2=\frac{R^2}{4}\left(14-6\sqrt{5}\right)$$

extrayendo la raiz cuadrada de entrambos miembros, resultará que $L={}^1/_2R\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

* 168. Teorema. *El lado del pentágono regular inscripto en un círculo es igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son: el lado del exágono ó sea el rádio, y el lado del decágono regular, ó sea la parte mayor de aquel, dividido en media y estrema razon.*

En efecto, si trazado en un círculo el decágono regular unimos alternadamente los puntos de division, habremos formado el pentágono regular convexo.

Si formamos un triángulo rectángulo de catetos desiguales, y representamos estos, uno por R y otro por ${}^1/_2R(\sqrt{5}-1)$, aplicando el teorema de Pitágoras, resultará la fórmula que expresa el valor del lado del pentágono regular en funcion del rádio.

En efecto, si llamamos L al lado del Pentágono, ó sea á la hipotenusa de dicho triángulo, tendremos que:

$$L^2=R^2+\left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2,\ \text{de donde}$$

$$L^2=R^2+\frac{1}{4}R^2(5-2\sqrt{5}+1),\ \text{y por tanto}$$

$$L^2=\frac{4R^2}{4}+\frac{R^2(6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{4R^2+(R^2(6-2\sqrt{5}))}{4}$$

$$L^2=\frac{R^2(4+6-2\sqrt{5})}{4}=\frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{4}$$

$$L^2=\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}),\ \text{de donde, por último,}$$

$$L={}^1/_2R\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

fórmula que nos proponíamos determinar.

169. *La apotema* correspondiente á cada uno de los polígonos regulares de que nos hemos ocupado, en funcion del rádio, se determina en el triángulo rectángulo que se

forma con el rádio del expresado polígono con su apotema respectiva y con la mitad de uno de los lados del polígono, haciendo para esto aplicacion del teorema de Pitágoras.

El Perímetro de cualquier polígono regular inscripto en el círculo, conocido el lado de aquel, se determina fácilmente multiplicando dicho lado por el número de los que tenga dicho polígono.

El Area de cualquier polígono regular inscripto en el círculo, en funcion del rádio de este, se determina y formúla fácilmente, segun el teorema 148, multiplicando el perímetro por la mitad de la apotema.

170. Teorema. Método para determinar las fórmulas generales, conocido el lado de un polígono regular inscripto en funcion del lado:

1.° De su apotema respectiva.

2.° Del lado del polígono circunscripto semejante.

3.° Del lado del polígono regular inscripto de duplo número de lados.

Sea para esto MC=L (fig. 118) el lado conocido, su apotema respectiva será

OP=apt.

El lado del polígono circunscripto semejante será

NB=L'

El lado del inscripto de duplo número de lados será

AM=l.

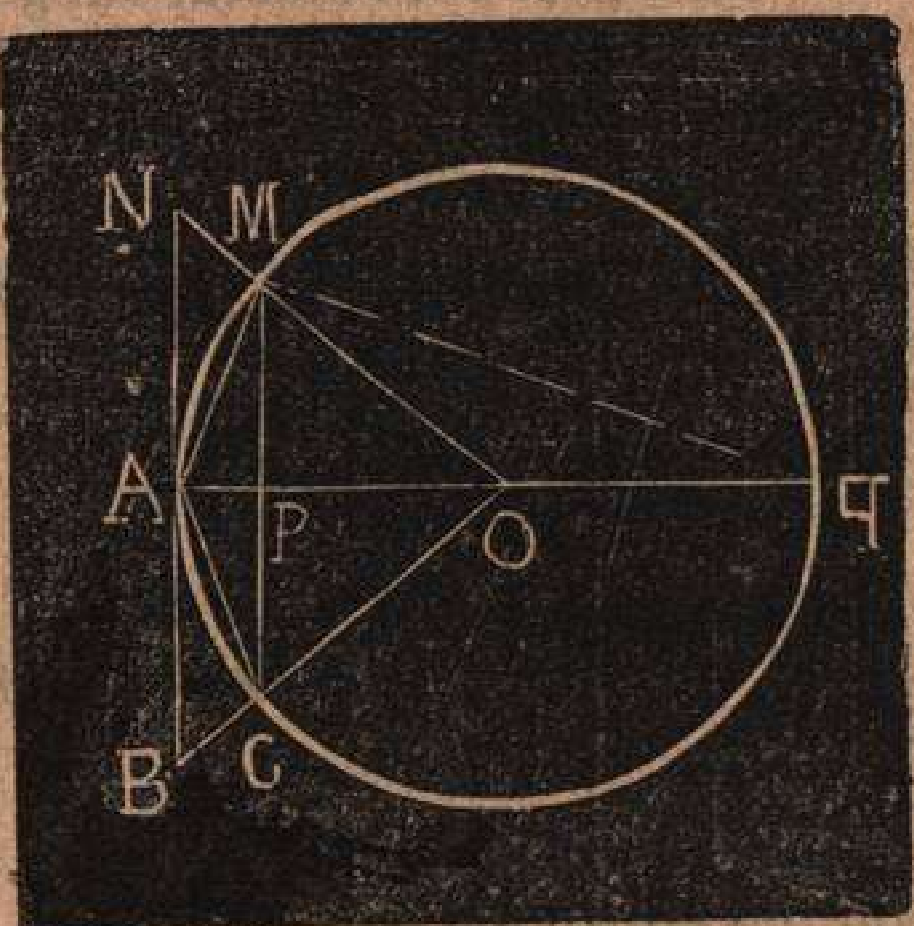


Fig. 118.

1.° En el triángulo rectángulo OMP, segun el teorema de Pitágoras, tendremos que:

$\overline{OP}^2=\overline{OM}^2-\overline{MP}^2$, luego

$$\overline{apt}^2=R^2-(\tfrac{1}{2}L)^2,\ \overline{apt}^2=R^2-\frac{L^2}{4},\ \overline{apt}^2=\frac{4R^2}{4}-\frac{L^2}{4}$$

y por tanto, $\overline{apt}^2=\tfrac{1}{4}(4R^2-L^2)$; de donde extrayendo la raiz,

$$\text{apotema}=\tfrac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}\ \text{(1.ª fórmula general.)}$$

2.° Para determinar el valor del lado NB del polígono circunscripto semejante, observaremos que los triángulos OMC y ONB son semejantes, y por tanto que

$$NB:MC::AO:PO;$$

si sustituimos en esta proporcion sus valores respectivos,

tendremos que: $L':L::R:{}^1/_2\sqrt{4R^2-L^2}$

despejando L', tendremos que $L'=\dfrac{LR}{{}^1/_2\sqrt{4R^2-L^2}}$, de donde

$$L'=\frac{2LR}{\sqrt{4R^2-L^2}} \quad \text{(2.ª fórmula general.)}$$

3.ª Si trazamos MQ formaremos el triángulo rectángulo AMQ (segun el 3.er teorema del número 98), tendremos que el cateto AM será media proporcional entre toda la hipotenusa AQ y la proyeccion AP de aquel sobre esta, luego

$\overline{AM}^2=AQ\times AP$, es decir, que $l^2=2R(R-apt.)$;

y por tanto, $l^2=2R(R-{}^1/_2\sqrt{4R^2-L^2})=2R^2-R\sqrt{4R^2-L^2}$

y por último, $l=\pm\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-L^2}}$

$$=\sqrt{\frac{R(2R+L)}{2}}-\sqrt{\frac{R(2R-L)}{2}}, \quad \text{(3.ª fórmula general.)}$$

Escolio. *La apotema de todo polígono regular circunscripto en un círculo, en funcion del rádio del mismo círculo, es siempre igual á dicho rádio.*

Con aplicacion de las fórmulas anteriores, obtendremos los lados, perímetros, apotemas y áreas, tanto de los polígonos regulares inscriptos, como de los regulares circunscriptos, con tal de que fueren conocidos de antemano el valor del lado de todos los polígonos que tienen un número primo de lados.

171. Sabiendo, por ejemplo, que el lado del triángulo inscripto es igual á $R\sqrt{3}$, se obtiene que:

INSCRIPTOS.

Polígonos.	Lado.	Perímetro.	Apotema.	Area.
Triángulo. .	$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$
Exágono.. .	R	6R	$\frac{1}{2}R\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$
Dodecágono	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$12R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3R^2$
P. 24 lados.	.	.	.	.
P. 48 lados. etc.	.	.	.	.

CIRCUNSCRIPTOS.

Polígonos.	Lado.	Perímetro.	Apotema.	Area.
Triángulo. .	$2R\sqrt{3}$	$6R\sqrt{3}$	R	$3R^2\sqrt{3}$
Exágono.. .	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$\frac{12R}{\sqrt{3}}$	R	$\frac{6R^2}{\sqrt{3}}$
Dodecágono	$\frac{2R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\frac{24R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	R	$\frac{12R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
P. 24 lados.	.	.	.	.
P. 48 lados. etc.	.	.	.	.

172. Sabido que el valor del lado del cuadrado inscripto en un círculo en funcion del rádio es $R\sqrt{2}$, tendremos que:

Polígonos.	INSCRIPTOS. Lado.	Perimetro.	Apotema.	Area.	CIRCUNSCRIPTOS. Lado.	Perimetro	Apotema.	Area.
Cuadrado. . .	$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}R\sqrt{2}$	$2R^2$	2R	8R	R	$4R^2$
Octógono. . .	.	.	.	.	.	.	.	.
P. de 16 lados	.	.	.	.	.	.	.	.
P. de 32 lados	.	.	.	.	.	.	.	.

173. Sabido que el valor del lado del pentágono regular inscripto en un círculo, en funcion del rádio de este, es:

$$L = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

determinaremos fácilmente su perímetro, apotema y área, así como las del circunscripto semejante, y esto conocido, y con aplicacion del Teorema 170, determinaremos estas nuevas incógnitas en el *Decágono*, *Icoágono*, polígonos de 40, 80, 160, etc. lados.

174. Si suponemos en todas las fórmulas anteriores que el rádio del círculo es igual á la unidad, se deduce entónces ser la siguiente la longitud del lado en los polígonos que se espresan á continuacion:

Polígonos regulares.	Longitud del lado.	Polígonos regulares.	Longitud del lado.
Triángulo. . . .	1,732	Octógono. . . .	0,765
Cuadrado. . . .	1,414	Decágono. . . .	0.618
Pentágono. . . .	1,176	Dodecágono. . .	0,518
Exágono. . . .	1,000	Pentadecágono. .	0,416

Para hallar la longitud del lado de un polígono regular cuyo rádio sea conocido, se multiplicará el valor de este, por el que para el mismo polígono nos dé la tabla anterior. Por el contrario, si conocemos el lado *para hallar la longitud del rádio* conocida la del lado, dividiremos esta por el correspondiente de la tabla anterior.

Medida de la circunferencia.

175. Desde luego se comprende que para medir la circunferencia, es preciso de antemano considerarla rectificada, y si de tal manera cambiamos *su posicion y figura*, en nada alteramos su *magnitud*, la cual es siempre independiente de los dos conceptos anteriores; en tal estado, resultará de la misma especie que la unidad lineal que sirve de término general de comparacion y por tanto, siendo perfectamente comparable la podremos medir y luego numerar, determinándose así su valor.

De lo espuesto en el Teorema 162, *consideramos á la circunferencia como el límite superior de los perímetros de* *los polígonos regulares inscriptos y tambien como el límite inferior de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos*, y por tanto, *podemos considerar á la circunferencia como un polígono regular de un número infinito de lados.*

Es general determinar la medida de la circunferencia por su relacion con el diámetro, en tal concepto, si hemos verificado un ámplio y completo estudio del valor de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos al círculo, segun la teoría anterior de Polígonos regulares en el círculo; por estar sabido y determinado el valor de cada uno de los lados en funcion del rádio, fácilmente y segun el polígono que consideremos, se obtendrá la medida de la circunferencia, multiplicando el duplo del valor del rádio (en unidades correspondientes á cualquier escala) por la relacion que exista entre cualquier circunferencia y su diámetro respectivo.

La relacion que existe entre la circunferencia y su diámetro respectivo, es inconmensurable y Mr. Legendre ha demostrado la inconmensurabilidad de esta relacion, así como la de su cuadrado. Por esta circunstancia la medida de la circunferencia determinada por su relacion con el diámetro, es solo aproximada y nunca la podremos obtener con exactitud y sí solo cometiéndose un error por *defecto* ó por *esceso*, segun que el polígono que tomemos por la circunferencia sea uno de los inscriptos ó uno de los circunscriptos á la misma.

El mayor ó el menor error que se cometa, consistirá en que el polígono que tomemos como *Isoperímetro* (1) con la circunferencia, sea de menor ó mayor número de lados. De lo cual se deduce la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

Medir la circunferencia por su relacion con el diámetro, es determinar el número de veces que la longitud de la circunferencia rectificada contiene á la del diámetro.

Por tanto y para esto, consideramos la longitud del diámetro como término de comparacion, luego *el diámetro es la unidad de medida.*

176. Teorema. *El número que expresa la relacion de la circunferencia al diámetro es mayor que 3 y menor que 4.*

(1) Se llaman «isoperímetros» los que tienen el mismo perímetro.

En efecto, observemos en la (fig. 119) una circunferencia, á la cual se halle inscripto un exágono regular, hallándose tambien circunscripto á la misma un cuadrado.

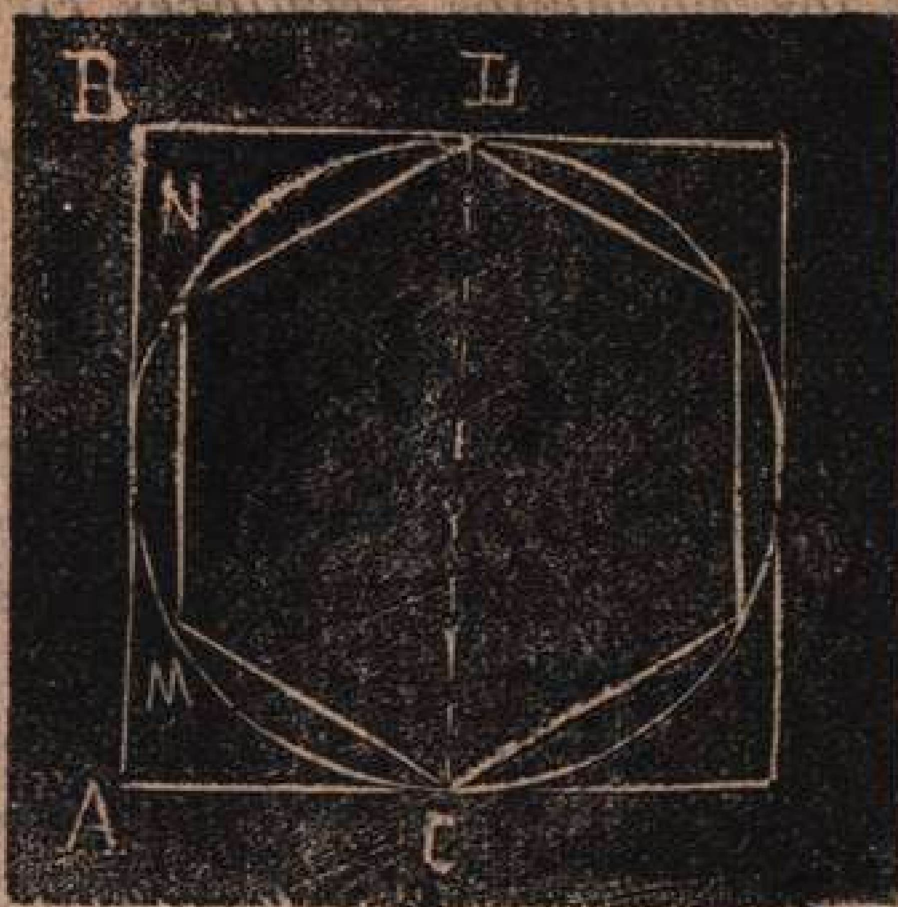


Fig. 119.

Segun el teorema 162, la circunferencia es *menor* que el perímetro de cualquier polígono regular circunscripto, y *mayor* que el perímetro de cualquier polígono regular inscripto á la misma.

Además, segun el teorema 163, el lado MN de un exágono regular inscripto es igual al rádio; luego el perímetro de un exágono regular en funcion del rádio será igual á 6 Rádios, ó á 3 Diámetros; y como el lado AB del cuadrado circunscripto es igual al diámetro DC por paralelas comprendidas entre paralelas, resultará que el perímetro de un cuadrado circunscripto en una circunferencia en funcion del rádio de la misma será 8 Rádios, ó sean 4 Diámetros.

Por tanto, *circunferencia* $\begin{matrix} > 3\,\textit{Diámetros.} \\ < 4\,\textit{Diámetros.} \end{matrix}$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

177. Teorema. *La razon de la circunferencia con su diámetro respectivo es constante en cualquier circunferencia.*

En efecto, si conforme con todos los autores llamamos π á la razon de la circunferencia al diámetro, llamando C y C' á dos circunferencias y D y D' á sus diámetros respectivos, tendremos que $\frac{C}{D}=\pi$ y $\frac{C'}{D'}=\pi$; por tanto, siendo Dividendo igual al producto del Divisor por el cociente, tendremos que $C=D\pi$ y $C'=D'\pi$, fórmulas de la circunferencia en funcion del diámetro.

Siendo cada Diámetro igual á dos rádios; resultará que:

$\frac{C}{2R}=\pi$ y $\frac{C'}{2R'}=\pi$, de donde $C=2\pi R$ y $C'=2\pi R'$

Si tenemos en cuenta, segun el teorema 137, que los perímetros de dos polígonos semejantes y regulares son proporcionales á sus rádios, tendremos que llamando P y P' á los perímetros de dos polígonos, y R y R' á sus rádios respectivos, que: $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$ igualdad que subsistirá siempre entre dos polígonos, interin sean semejantes, mas siendo los límites de P y P', C y C' tendremos que $\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$ ó lo que es lo mismo $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}$ y tambien $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$

De lo expuesto tendremos que:

A la razon de la circunferencia al diámetro llamamos π.

La fórmula que espresa la circunferencia en funcion del diámetro, es $D\pi$.

La fórmula que espresa la circunferencia en funcion del rádio, es $2\pi R$.

Siendo el Diámetro igual á uno, la Circunferencia es igual á π.

Siendo el rádio igual á uno, la circunferencia es igual á 2π.

El valor del Diámetro de una circunferencia, conocida esta, es $C:\pi$.

El valor del Rádio de una circunferencia, conocida esta, es $C:2\pi$.

Y en general podemos decir:

1.° *Para hallar la longitud de una circunferencia, se multiplica la longitud de su diámetro por el valor aproximado de* π.

2.° *Para hallar la longitud del rádio de un círculo, se divide la longitud de la semicircunferencia por el valor aproximado de* π.

177. Para calcular la razon de la circunferencia al diámetro pueden seguirse diferentes métodos, entre ellos: 1.° Si calculamos la longitud de la circunferencia, suponiendo conocida la del rádio, lo hacemos por el *Metodo de los perímetros*. 2.° Si calculamos la longitud del rádio, suponiendo conocida la de la circunferencia, empleamos el *Método de los isoperímetros*.

178. Método de los Perímetros. Hemos visto que en la fórmula $C=2\pi R$ siendo el Rádio igual á uno, resulta que: $C=2\pi$; y por tanto $\pi=\frac{C}{2}$, por consiguiente el número π es igual á la longitud de la semicircunferencia

cuyo rádio es la unidad, luego la mitad del perímetro de cualquier polígono regular inscripto es un valor de π aproximado por defecto, y el semiperímetro de cualquier polígono regular circunscripto es un valor de π aproximado por esceso. Si teniendo en cuenta lo anteriormente espuesto, calculamos sucesivamente los semiperímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos de 6, 12, 24, 48, 96, etc. lados, segun lo dicho en el número 172, tendriamos que entre los valores de los perímetros de dos exágonos, ó de los dos dodecágonos, ó de los dos polígonos de 24,ó de dos de 48, ó de dos de 96 etc. lados,se halla comprendido un valor de π, tanto mas aproximado, cuanto que el número de los lados de los dos polígonos regulares uno inscripto y otro circunscripto, semejantes, sea mayor.

Con efecto, supongamos que procediendo de la manera indicada, hubiésemos llegado hasta los dos polígonos regulares de 3072 lados, encontrariamos para valor del semiperímetro del inscripto 3,1415921 y para el del circunscripto 3,1415937 y por tanto, π, hallándose comprendido entre la 1.ª y 2.ª de estas dos cantidades, al decirse que $\pi=3{,}141592$ cometeremos un error por defecto menor que una millonésima.

Este método, fué el seguido antiguamente por *Arquímedes*, y sin embargo de su estremada sencillez, es harto prolijo en la práctica, por lo cual no es el generalmente seguido. De considerar la circunferencia como isoperimétrica con el exágono regular inscripto, resulta que $\pi=3$. De considerar la circunferencia isoperimétrica con el polígono regular inscripto de 96 lados, resulta que $\pi=\frac{22}{7}$, cuya relacion lleva el nombre de *Arquímedes*.

Otras hay, muy conocidas, como la de *Rivard*, que dice: $\pi=\frac{333}{106}$, pero esta comete mayor error que la de *Adriano Mecio* que dá para $\pi=\frac{355}{113}$, sin embargo de tener el mismo número de cifras, toda vez que el error que se comete en tomar por π dicho valor, es menor que una millonésima.

Tambien tenemos que la expresion $\pi=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, reducida á decimales, $=3{,}146......$ número que no difiere de π mas que en *una semi-centésima*, y por tanto, podemos decir que la razon de la circunferencia al diámetro puede representarse con escaso error por la suma de los lados del cuadrado y del triángulo equiláteros inscritos en el círculo que tenga por rádio la unidad, segun lo expuesto en los teoremas 164 y 165.

179. **Método de los isoperímetros.** Si ahora hacemos en la fórmula $C=2\pi R$, $C=2$, resultará que $2=2\pi R$, y por tanto $1=\pi R$, de donde $\pi=\frac{1}{R}$ y $R=\frac{1}{\pi}$; luego la longitud del rádio de una circunferencia igual á 2, vale $\frac{1}{\pi}$; y por tanto, la apotema a y el rádio r de todo polígono regular cuyo perímetro sea 2, serán dos valores de $\frac{1}{\pi}$, aproximados, uno por defecto y otro por exceso, puesto que las dos circunferencias, una inscripta y otra circunscripta á dicho polígono, serán: la 1.ª menor, y la 2.ª mayor que 2; y por tanto sus rádios a y r comprenderán al R rádio de la circunferencia igual á 2.

Si consideramos ahora que un cuadrado tenga por perímetro 2, su lado respectivo valdrá $^1/_2$, su apotema será $^1/_4$ y su rádio será $^1/_4\sqrt{2}$.

Si consideramos ahora, un octógono, luego un polígono de 16, de 32, de 64 etc. lados, segun las fórmulas indicadas en el número 172, iremos determinando sucesiva y respectivamente su lado, su apotema y su rádio.

La série de todos estos valores, obtenida en todos estos polígonos isoperimétricos desde el 3.° en adelante, constituirá cada uno alternadamente un medio diferencial y un medio proporcional entre los dos que le preceden, observándose que los del lugar impar, irán creciendo (son las *apotemas* cuyo valor lineal *aumenta* á medida que se dupliquen los lados del polígono): los de lugar par, decrecerán contínuamente (estos serán los *rádios* cuya longitud *disminuye* á medida que el número de los lados del polígono aumente); teniéndose en cuenta que entre los unos y los otros, se halla comprendido el valor constante $\frac{1}{\pi}$ que es el límite superior de los primeros y el inferior de los segundos; en efecto: si observamos que a' es $^1/_4$ y que este valor es el medio diferencial entre 0 y $^1/_2$, y tambien que r' es $^1/_4\sqrt{2}$, á la vez medio proporcional entre $^1/_2$ y $^1/_4$, resultará, por último, que $\frac{1}{\pi}$ *es el límite de la série cuyos dos primeros términos son 0 y $^1/_2$, y los siguientes son alternativamente cada uno, el medio diferencial ó el medio proporcional entre los dos que preceden.*

Si se calculan ordenadamente los términos de esta série hasta llegar duplicándose al polígono de 2048 lados, se obtienen los resultados siguientes:

Polígonos de los lados siguientes.	Apotemas.	Rádios.
4	0,2500000	0,3535534
8	0,3017767	0,3266407
16	0,3142087	0,3203644
32	0,3162867	0,3188217
64	0.3180541	0,3184377
128	0,3182459	0,3183418
256	0,3182938	0,3183178
512	0.3183058	0,3183118
1024	0,3183088	0,3183103
2048	0,3183095	0,3183099

De lo espuesto resulta que si tomamos un valor de $\frac{1}{\pi}$ que tenga su aproximacion hasta las millonésimas, resultará ser este 0,318309, si por tanto dividimos la unidad por dicho valor, se obtendrá que $\pi=3,141592$ con un error por defecto menor que una millonésima, el cual está conforme con el valor obtenido antes por el método anterior.

180. Los métodos espuestos se abrevian y simplifican estraordinariamente empleando otros procedimientos mas espeditos, pero son agenos por completo á la índole de estos elementos, por lo cual y en obsequio á la brevedad son omitidos aquí.

Entre los otros métodos elementales para poder obtener el valor aproximado de π, tenemos á mas de los espuestos, el de las *Areas*, que tambien en obsequio á la brevedad dejamos de consignarlo, concretándonos á espresar el valor de π con la aproximacion de 150 cifras decimales, conforme ha sido hallado; el de su logaritmo correspondiente con 30 cifras de mantisa; el de la raiz cuadrada de π; y el de $\frac{1}{\pi}$, ámbos, con 7 cifras decimales, para elegir de estas la aproximacion que se desee á la obtencion de la incógnita en cualquiera de los problemas que quieran proponerse.

π=3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971
6939937510 5820974944 5923078164 0628620899
8628034825 3421170679 8214808651 3282306647
0938446095 5058237172 5359408128

Log. de π=0,4971498726 9413385435 1268288291

$\frac{1}{\pi}$=0,3183099 $\sqrt{\pi}$=1,7724538

Rectificacion de la Circunferencia.

181. La rectificacion de la circunferencia se efectúa por diferentes procedimientos, entre ellos el mas usual, fácil y espedito es el conocido por *el del ángulo de 30°* que ponemos á continuacion.

Para esto, supongamos que sea O la circunferencia dada que tratamos de rectificar (fig. 120.)

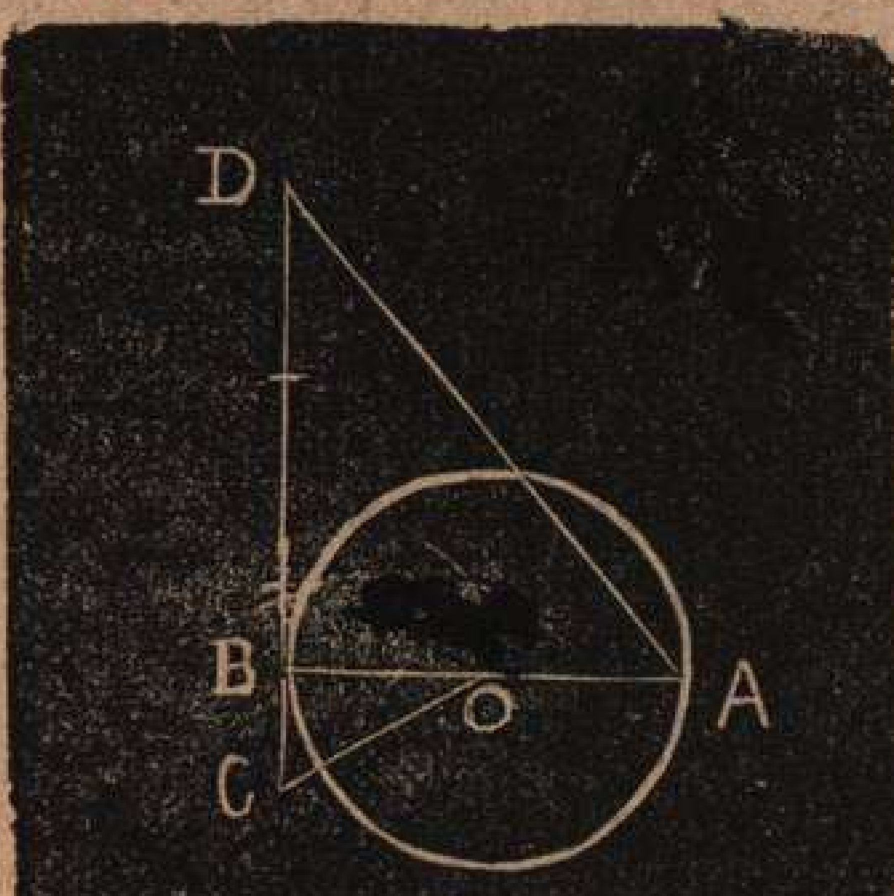


Fig. 120.

Trazando el diámetro AB y formando en el centro un ángulo BOC que tenga 30°, y trazando por el estremo B del diámetro BA, una tangente indefinida BD, haremos que intercepte al lado OC; y tomando sobre dicha tangente desde el punto C tres rádios, ó sea tres veces la distancia BO, quedará limitada dicha tangente en el punto D, el cual, uniendo con el otro estremo A del diámetro, nos dará que la recta AD es una semicircunferencia rectificada.

En efecto, el triángulo ABD es rectángulo, y en él se habrá de verificar que $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2$. Mas ahora tenemos que AB=2 rádios, y BD=DC—BC=3 rádios, menos la recta BC, que es medio lado del exágono regular circunscripto, cuyo valor, obtenido de las fórmulas del número 171, será $\frac{R}{\sqrt{3}}$, y por tanto, siendo el rádio igual á la unidad, resultará que:

$$\overline{AD}^2=2^2+\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=4+5,8692317=9,8692317,$$

de donde $AD=\sqrt{9,8692317}=3,14153$; luego la recta AD será la semi-circunferencia rectificada con menos error que 0,0001 del rádio.

Exactamente, no ha sido posible hasta ahora la rectificacion de la circunferencia.

* Esta rectificacion tambien puede ser obtenida con aproximacion, «empleando los lados del triángulo equiláctero y del cuadrado inscripto, ó bien la suma de tres rádios y la sexta parte del lado de dicho cuadrado.»

En efecto, para esto y suponiendo trazado un diámetro en una circunferencia, trazaremos en su estremo una recta tangente indefinida, en dicho diámetro marcaremos un punto que diste del centro la sesta parte de su rádio, señalándolo en aquel, de los dos rádios de que se compone el diámetro donde en su estremo no ha sido levantada la recta tangente; con una abertura de compás igual á dos diámetros, desde dicho punto limitaremos la recta tangente y uniendo dicho estremo de la tangente con el otro estremo del diámetro, cortará esta recta en un punto á la circunferencia, desde el cual si trazamos «una cuerda» al punto de tangencia, «esta será el lado del cuadrado equivalente al círculo, y su proyeccion sobre el diámetro» será fácil demostrar, «es la rectificacion de un cuadrante de dicha circunferencia.»

Este procedimiento, no solo «nos rectifica la circunferencia» ó uno de sus cuadrantes, sino que «nos resuelve la cuadratura del círculo.» con un error menor que una cienmilésima.

182. Conocido el valor de π tratemos de resolver los dos problemas generales siguientes:

Problemas. 1.° *Dado un arco de circunferencia, valuado en grados, hallar su relacion con el rádio ó con el diámetro tomado por unidad.*

Siendo π la razon de la circunferencia al diámetro, ó de la semicircunferencia al rádio, la razon del cuadrante rectificado al rádio será $\frac{\pi}{2}$, luego sabiendo la relacion que existe entre el arco dado A y el cuadrante, la multiplicaremos por $\frac{\pi}{2}$ y el producto será la relacion del arco rectificado con el rádio; si llamamos r á esta relacion será:

$$A=r\times\frac{\pi}{2}.$$

De otro modo podremos espresarlo diciendo:

$$360^\circ:2\pi R::G^\circ:x \text{ donde } x=2\pi R.G^\circ:360^\circ$$

siendo $R=1$ resultará que $x=\pi G:180$.

Problemas particulares. 1.° *Suponiendo que el rádio terrestre tiene 6;366.198 metros, se pregunta: ¿á qué distancia kilométrica se hallan dos puntos de la superficie terrestre, sabiendo que la diferencia de sus longitudes es 5° y 30'?*

Se tendrá que:

$$x=\frac{\pi\times G\times R}{180}=\frac{3{,}141592\times5°+30'\times6;366{,}198}{180}$$

reduciendo los 5°+30' á minutos, resultarán 330', reduciendo los 180° á minutos, resultarán 10800', luego

$$x=\frac{3{,}141592\times330\times6;366{,}198}{10800}=611 \text{ kilómetros.}$$

2.° *Siendo el rádio del ecuador terrestre de 6;376,984 metros ¿cuánto anda por minuto, un punto de su circunferencia en su movimiento de rotacion alrededor del eje?*

Siendo $C=2\pi R$ resultará ser, segun el rádio dado, $C=40;067738$ que será el camino recorrido por un punto en 24 horas; dividiendo este número por 24 dá 1;669489 metros, que será lo que camina dicho punto en una hora, y dividiéndolo por 60' dá 27,824 metros, que es lo que anda cada punto del ecuador en un minuto.

Problema 2.° *Conocido el valor de un arco rectificado y comparado con el rádio, determinar su valor en grados.*

Este problema notaremos ser el recíproco del anterior, y si en aquel obtuvimos que $A=r\times\frac{\pi}{2}$, aquí será

$$r=A:\frac{\pi}{2}=\frac{2A}{\pi}.$$

Y tambien de la proporcion anterior

$$360°:2\pi R::G°:A \text{ siendo } G=\frac{360°\times A}{2\pi R}=\frac{180\times A}{\pi R}.$$

Por ejemplo ó problema particular.

¿Cuál es el número de grados de un arco de la superficie terrestre cuya longitud es de 440 kilómetros?

$$\text{diriamos, } G°=\frac{180°\times440}{3{,}14\times6366{,}19}=3°+57'+40''.$$

183. * El conocimiento de la precedente teoría tambien nos permite resolver los siguientes problemas:

1.° *¿Determinar la relacion entre las áreas de un círculo y un cuadrado isoperimétrico?*

Siendo el perímetro del círculo la circunferencia será $2\pi R$. Teniendo el perímetro del cuadrado cuatro lados iguales, será 4L. Luego $2\pi R=4L$, de donde $\pi R=2L$. Elevando al cuadrado ámbos miembros resultará que: $\pi^2R^2=4L^2$, de donde $\pi R^2\times\pi=L^2\times 4$ y formando proporcion, resultará que $\pi R^2:L^2::4:\pi$, de donde *área del círculo es al área del cuadrado, como 4 es á* π.

Esto nos hará ver que de todas las figuras isoperimétricas, el círculo es el que contiene mayor área.

2.° *¿Determinar la relacion entre los perímetros de un cuadrado y de un círculo equivalente?*

Siendo $\pi R^2=L^2$, multiplicando ambos miembros por 16π resultará que $16\pi^2R^2=16L^2\pi$, estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, resultará que $4\pi R=4L\sqrt{\pi}$, es decir, que $2\pi R\times 2=4L\times\sqrt{\pi}$, y formando proporcion tendremos que $2\pi R:4L::\sqrt{\pi}:2$ y por tanto, *Perímetro del círculo es al del cuadrado, como* $\sqrt{\pi}$ *es á 2.*

Esto nos hará ver que entre todas las superficies equivalentes, el círculo es el polígono que tiene menor perímetro.

Cuyas conclusiones afirmariamos si nos propusiésemos seguir determinando las relaciones entre los perímetros de varios polígonos regulares equivalentes, así como tambien la relacion entre las áreas de varios polígonos regulares isoperimétricos.

Areas de las superficies planas circulares.

184. Se llaman *superficies planas circulares*, aquellas en que por lo menos alguna de las líneas de limitacion es un arco de circunferencia.

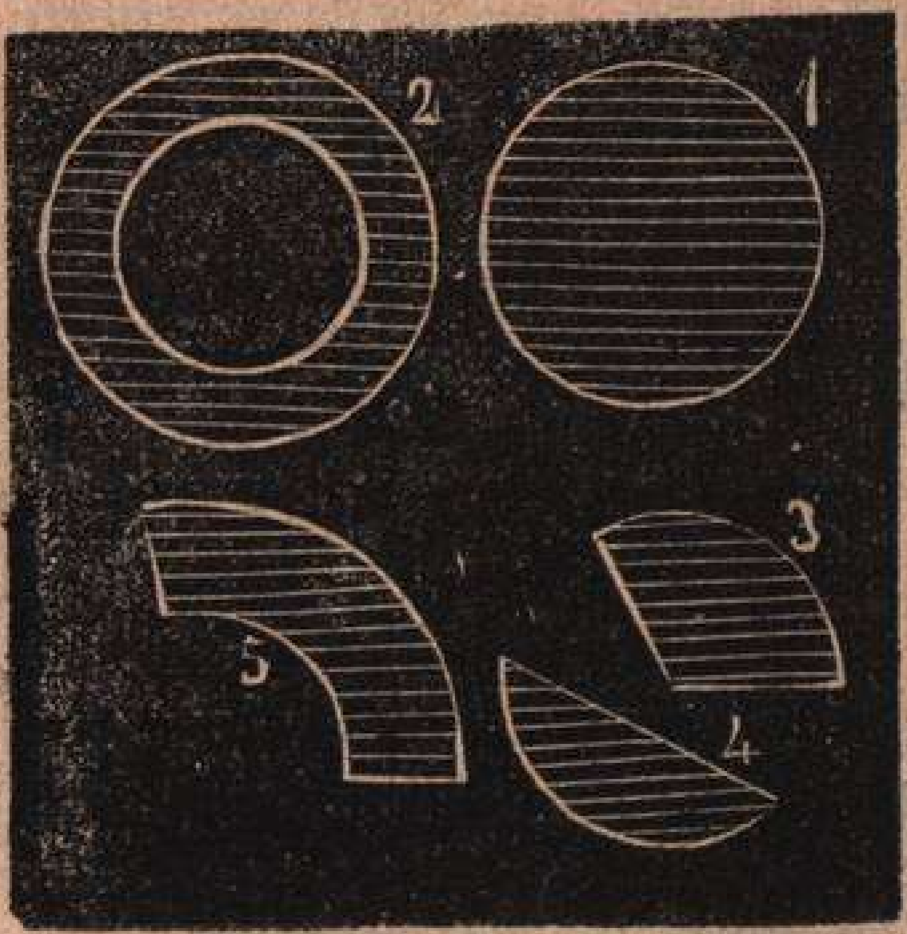


Fig. 121.

La superficie limitada por una circunferencia, se llama *círculo*. (1.ª fig. 121).

La superficie limitada por dos circunferencias del mismo centro ó concéntricas se llama *corona ó anillo*. (2.ª fig. 121).

La superficie comprendida por dos rádios y un arco de circunferencia, se llama *Sector circular*. (3.ª fig. 121)

Si los dos rádios son uno

prolongacion del otro y el arco es una semicircunferencia, se llamará *semicírculo.*

La superficie limitada por una cuerda y un arco se llama *segmento circular* (4.ª fig. 121); la cual podemos considerar como un sector, del cual ha sido escluida la superficie triangular isósceles, limitada por los dos rádios y la cuerda correspondiente.

La superficie, ó mejor, la parte de corona ó anillo comprendida entre dos rádios, es un *trapecio circular.* (5.ª figura 121.)

185. Teorema. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de su circunferencia por el rádio.*

En efecto, un círculo es un polígono regular de infinito número de lados, (162) y como el área de un polígono regular es, segun el Teorema 148, igual á la mitad del producto de su perímetro por la apotema, y el círculo tiene por perímetro la circunferencia y por apotema el rádio, resultará que Ar. Círculo$=2\pi R \times {}^1/_2 R = \pi R^2$ fórmula que espresa el área del círculo en funcion del rádio. Si el $R=1$ resultará que Ar. Círculo$=\pi$. El área del círculo en funcion del diámetro será $=\pi D \times {}^1/_4 D$, y por tanto, Ar. Círculo$={}^1/_4 \pi D^2$. Siendo el Diámetro $=1$ resultará:

Ar. Círculo$={}^1/_4 \pi$.

Las áreas de los polígonos regulares se pueden determinar análogamente á la del círculo, en este, su área es igual al cuadrado del rádio por el cociente π, que resulta de dividir su perímetro ó circunferencia por su diámetro respectivo, y así diremos que las áreas de los polígonos regulares se determinan aproximadamente multiplicando el cuadrado de su lado por el coeficiente que nos dá la tabla siguiente:

Triángulo. . . .	0,4330	Octógono. . . .	4,8284
Cuadrado. . . .	1,0000	Decágono. . . .	7,6942
Pentágono. . . .	1,7205	Dodecágono. . .	11,1962
Exágono. . . .	2,5981	Pentadecágono. .	17,6424

186. Teorema. *El área de una corona ó anillo es igual á la diferencia entre las áreas de los dos círculos.*

En efecto, si llamamos R y r á los rádios de dichos dos círculos, mayor y menor respectivamente, resultará que: Area corona$=\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$.

La fórmula de la corona en funcion del diámetro, será: Area$={}^1/_4 \pi D^2 - {}^1/_4 \pi d^2 = {}^1/_4 \pi(D^2 - d^2) = {}^1/_4 \pi(D+d)(D-d)$.

187. Teorema. *El área de un sector circular será igual al arco, multiplicado por la mitad del rádio.*

En efecto, un sector circular lo consideramos como un triángulo, toda vez que un [triángulo que tenga de base la circunferencia rectificada y de altura el rádio, será equivalente al área del círculo; y por tanto, un sector circular será equivalente á un triángulo que tenga por base el arco rectificado y por altura el rádio.

Por tanto, Area Sector=Arco$\times\frac{R}{2}$.

Tambien podremos determinar el área de un sector circular, sabido el número de grados del ángulo formado por los dos rádios, y tambien la longitud de estos, pues si consideramos al círculo como un sector de 360°, diremos:

$$360^\circ:\pi R^2::g^\circ:x;$$

de donde x ó Area del sector$=\frac{\pi R^2 g^\circ}{360^\circ}$

Corolario. El área de un sector poligonal es igual al producto de la línea quebrada poligonal por la mitad de la apotema, la cual espresariamos por la fórmula siguiente:

Ar. Sector Polig.=Línea quebrada Poligonal$\times{}^1/_2$Apotema.

188. **Teorema.** *El área de un segmento circular es igual á la mitad del producto del rádio por la diferencia entre el arco y la mitad de la cuerda del arco duplo.*

En efecto, supongamos que sea ANB el segmento dado (fig. 122), comprendido por la cuerda AB y el arco ANB, trazando los dos rádios BO y AO, y desde el estremo A de uno de ellos trazamos la perpendicular ACD al otro lado, se observará que dicho segmento ANB es igual al sector OANB, menos el triángulo OAB, cuyas áreas son:

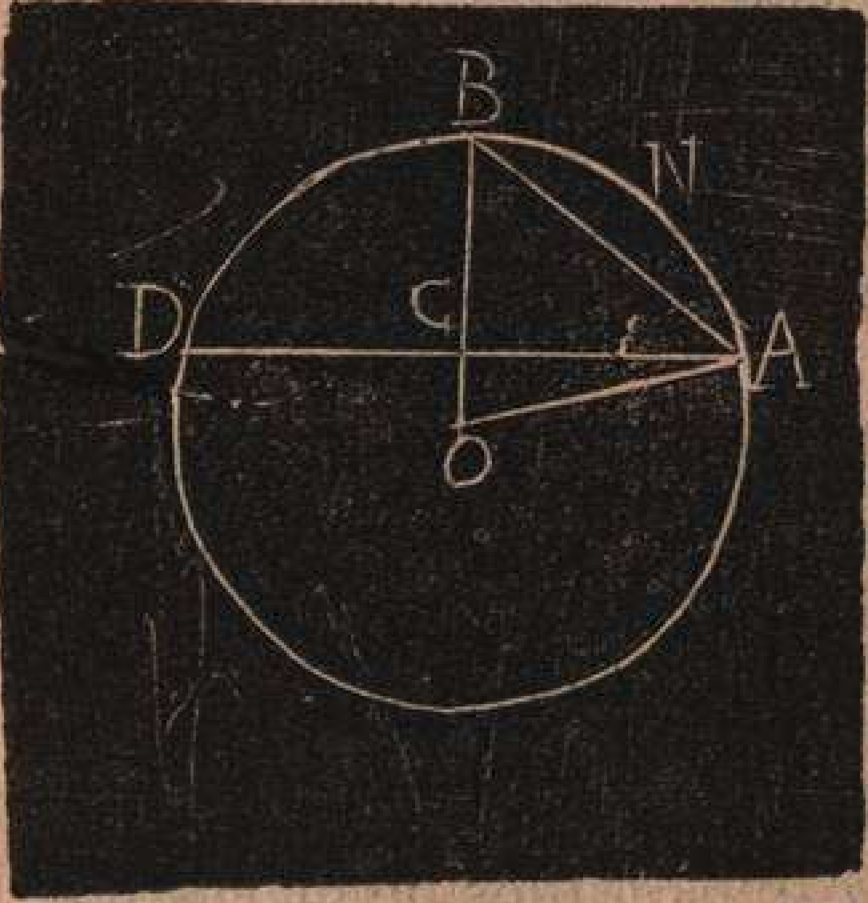


Fig. 122.

$$^1/_2 OB\times \text{arco } AB$$

y $^1/_2 OB\times AC={}^1/_2 OB\times AD\,^1/_2$

y por tanto el área del segmento$={}^1/_2$ OB$\times$arco AB$-{}^1/_2$ OB$\times{}^1/_2$ AD

$={}^1/_2$ OB (arco AB$-{}^1/_2$ AD).

189. **Teorema.** *El área de un trapecio circular es igual á la diferencia entre las áreas de los dos sectores correspondientes ó á la semi-suma de los dos arcos, por la diferencia entre sus rádios.*

En efecto, el trapecio circular lo podemos considerar como la diferencia entre las áreas de dos sectores, bajo tal concepto *Ar. Trap. cirl.* $=\frac{\pi R^2 g.^\circ}{360^\circ}-\frac{\pi r^2 g.^\circ}{360^\circ}$.

Tambien podemos considerar la corona ó anillo como un trapecio circular de 360°; en tal concepto, diremos:

$360^\circ : \pi(R^2 - r^2) :: g.^\circ : x$, de donde

x=área trapecio circular$=\frac{\pi g(R^2-r^2)}{360^\circ}=\frac{\pi g(R+r)(R-r)}{360^\circ}$

fórmula que conviene con la hallada anteriormente.

Corolario. *El área de un trapecio poligonal es igual á la semi-suma de las dos líneas poligonales regulares paralelas por su apotema respectiva.*

190. Teorema. *Las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus rádios ó de sus diámetros.*

En efecto, si dos círculos por C y c, sus áreas respectivas serán $c=\pi R^2$; $c=\pi r^2$; partiendo la 1.ª por la 2.ª, tendremos que $\frac{C}{c}=\frac{\pi R^2}{\pi r^2}$, de donde simplificando $\frac{C}{c}=\frac{R^2}{r^2}$

Si expresamos las áreas de los dos círculos en funcion de sus diámetros respectivos, tendremos que

$C=\frac{1}{4}\pi D^2$ y $c=\frac{1}{4}\pi d^2$

partiendo la 1.ª por la 2.ª y simplificando, tendremos que:

$$\frac{C}{c}=\frac{D^2}{d^2}.$$

De todo lo cual podremos concluir diciendo: que *la razon de las áreas de dos círculos es el cuadrado de la razon de sus rádios, ó el cuadrado de la razon de sus diámetros, ó el cuadrado de la razon de dos cuerdas homólogas trazadas en los mismos.*

Así mismo, la razon de las áreas de dos sectores circulares semejante será el cuadrado de la razon de semejanza. Y por tanto, las áreas de dos sectores semejantes son entre sí como los cuadrados de sus rádios.

Si los dos sectores corresponden á uno mismo ó á círculos iguales y no son semejantes, son sin embargo directamente proporcionales sus áreas con sus arcos respectivos.

Si dos sectores tienen rádios diferentes, pero los arcos tienen igual número de grados, entónces son semejantes y sus rádios, son entre sí, como sus arcos ó como sus cuerdas, y en general como dos rectas homólogas cualesquiera.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO

DE LA SEGUNDA PARTE DE LA GEOMETRIA PLANA.

SOBRE SUPERFICIES CIRCULARES.

I. Dadas dos circunferencias concéntricas, calcular el valor de la cuerda de la mayor que sea tangente de la menor.

II. Calcular el rádio del meridiano de Córdoba, considerando la tierra perfectamente esférica.

III. Calcular la distancia que existe entre dos lugares, sabiendo que la diferencia de sus latitudes respectivas es de 7°+13'.

IV. Hallar el área del Triángulo equiláctero, del cuadrado y del pentágono regular en funcion de su lado y tambien del rádio de la circunferencia que los circunscribe.

V. Determinar el lado, perímetro, apotema y área del triángulo cuadrado, pentágono, exágono, octógono, decágono y dodecágono regular en funcion del rádio del círculo que los inscriba ó que los circunscriba.

VI. Dada la apotema de un dodecágono regular, determinar su rádio y su lado.

VII. Determinar la cabida de una plaza de toros, conocido el rádio de la arena, el rádio total y la superficie ocupada por cada persona.

VIII. Construir un cuadriláctero inscriptible en la circunferencia, dados sus cuatro lados.

IX. Dadas las longitudes de dos cuerdas paralelas de un mismo círculo y la distancia entre ellas, hallar el rádio de dicho círculo.

X. Construir un trapecio rectángulo, dados un lado y sus dos diagonales.

XI. Inscribir en un círculo dado, un rectángulo de área dada.

XII. Demostrar que el área del exágono regular inscripto en un círculo es media proporcional entre las áreas de los triángulos equiláteros, inscripto y circunscripto al mismo.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

PRIMERA PARTE.

RECTAS Y PLANOS Y SUPERFICIES CURVAS DE REVOLUCION.

LIBRO PRIMERO.

Rectas y Planos.

191. La Geometría del espacio *se ocupa de la estension cuyos elementos no están todos en un mismo plano: trata en el primer Libro de su primera Parte*, de las Rectas y Planos.

Dos puntos hemos dicho que determinan la posicion de una línea recta sobre un plano, y por tanto diremos: si una recta tiene dos de sus puntos en un plano, se hallará toda ella situada en el mismo plano, de lo cual deduciremos que una recta y un plano, ó tienen un solo punto comun si se interceptan, ó los tienen todos si la recta está trazada en el plano, ó no tienen ninguno, en cuyo caso la recta y el plano son paralelos.

Una recta y un plano si se interceptan es en un solo punto, y entónces este se llama *pié* de la recta en el plano.

Teniendo en cuenta que los planos sean siempre rectangulares en vez de circulares como debieran, de rádio indefinido, se representan siempre como romboides: en todas las figuras correspondientes á la Geometría del espacio se representan estensiones cuyos elementos no están todos en un plano, y por tanto, no pudiéndolo estar en la figura es necesario tener en cuenta la perspectiva, de la cual nos valemos siempre para hacer las representaciones necesarias; por esta razon no es la Geometría del espacio tan intuitiva como la plana; mas se simplifica extraordinariamente con el conocimiento prévio de aquella, y se hace perfectamente clara con un poco de estudio y fijeza, y muy especialmente con el concurso de una buena caja de sólidos, las cuales son de frecuente empleo para este estudio.

192. Teorema. *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de un plano.*

En efecto, sean A, B y C los tres puntos dados: una recta está, como sabemos, determinada, conociendo dos puntos cualquiera, A y B por ejemplo; y como á la superficie no se asigna mas que longitud y latitud, resultará que un plano del cual sea límite la recta AB, podrá girar alrededor de dicha recta, colocándose en cualquiera de las infinitas posiciones que resultan de su movimiento giratorio; si suponemos ahora que el punto C no se halla en la recta AB, ni en su prolongacion, resultará qne al girar un plano alrededor de su recta AB, llegará un momento en que este movimiento sea suspendido por tocar dicho plano al punto C, en cuyo caso los puntos A, B y C, habrán determinado la *posicion* de aquel plano.

La *magnitud* del mismo se considera como indefinida.

Su *figura*, como ilimitada, la podemos considerar como circular; en el caso de considerarse como límite de ciertos cuerpos, afectará alguna de las formas poligonales ó circulares de que nos hemos ocupado en la Geometría plana.

De lo expuesto en el teorema precedente, deduciremos:

1.° *Por dos puntos dados, ó solo por uno, pueden pasar infinitos planos.*

2.° *Dos rectas que se cortan, ó dos rectas paralelas, ó una recta y punto, determinan tambien la posicion de un plano.*

En efecto, en el primer caso, el punto de interseccion y uno en cada recta, formarán los 3 necesarios: en el segundo, dos puntos en una de las dos rectas paralelas y otro en la otra, formarán los tres pedidos; y en el tercero, el punto dado y los dos que determinan la recta conocida, serán los tres pedidos.

3.° *La interseccion de dos planos es una línea recta,* porque es la única línea que ambos planos pueden tener en una misma direccion.

4.° Los planos en general é ilimitados como se consideran, no pueden diferenciarse mas que en la *posicion*, por que su *figura* es indefinida y su *magnitud* ilimitada; sin embargo, los planos limitados y que sirven á la vez de límites á los cuerpos, tienen su *figura* respectiva y su *magnitud* determinada, por lo cual, estos entre sí se diferencian no solo por su *posicion*, si que tambien por su *figura* y *magnitud*.

Corolarios: 1.° *El lugar geométrico de todas las rectas que corten á otras dos fijas, es el plano determinado por ellas.*

2.° *El lugar geométrico de todas las rectas que corten á dos paralelas, es el plano que estas determinan.*

3.° *El lugar geométrico de todas las rectas que pasando por un punto fijo corten á una recta fija, es el plano determinado por dicho punto y la recta fija.*

Rectas perpendiculares y oblícuas á un plano.

193. Si una recta y un plano tienen un punto comun, puede ser aquella oblícua á este, ó la recta y plano respectivamente perpendiculares.

Teorema. *Para que una recta sea perpendicular á un plano, es preciso que lo sea á todas las que pasen por su pié en el plano,* y para esto basta que lo sea solo á dos de las mismas.

En efecto, supongamos que sea AO (fig. 123) la recta perpendicular al plano PQ, (1) en tal caso, digo que ha de serlo tambien de las dos rectas BO y CO que pasan por su pié O en dicho plano PQ, siéndolo tambien de otra recta cualquiera DO que pasa por el punto O en el mismo plano.

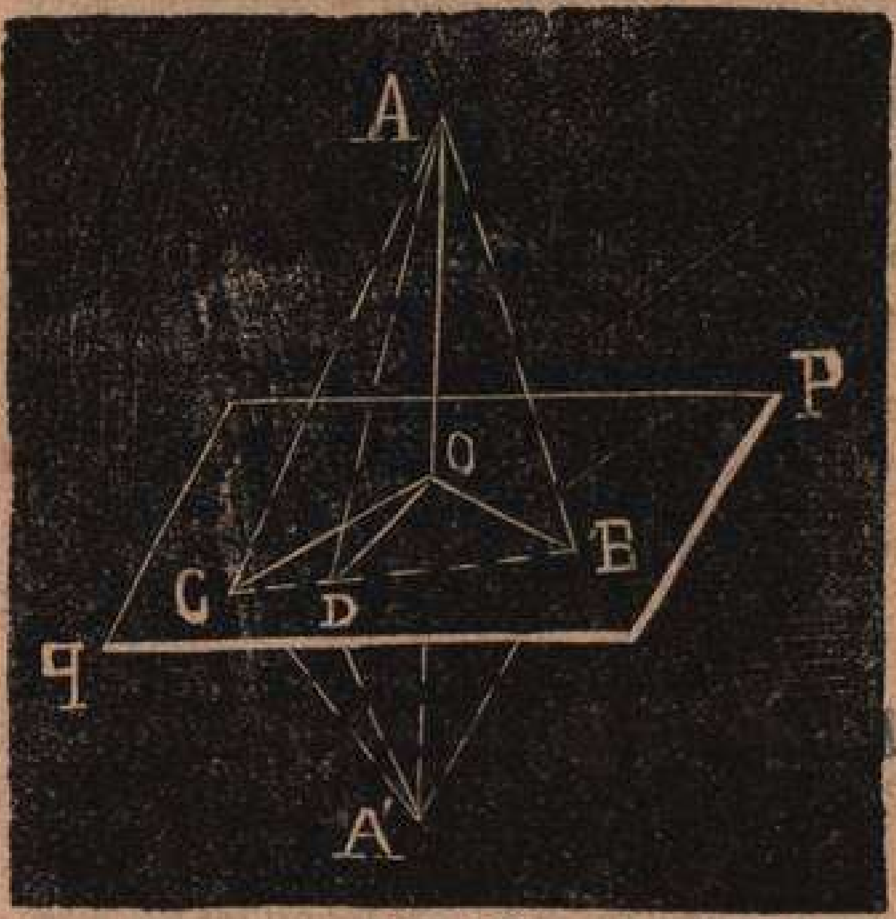


Fig. 123.

Prolongando la recta AO y tomando sobre su prolongacion AO=A'O y por un punto cualquiera D de la DO, trazando la recta CB que corte á las dos rectas indefinidas CO y BO, uniremos los puntos A y A' con los B, C y D.

(1) Un plano se nombrará casi siempre por las dos letras correspondientes á su diagonal al parecer mayor.

Los tres puntos A, B y A' corresponderán á un mismo plano, y además la recta BO es perpendicular á la AA' en su punto medio, resultando que AB=A'B (segun el Teorema 30) y por la misma razon AC=A'C, y por tanto, los triángulos ABC y A'BC serán iguales. Si doblamos ahora el A'BC sobre el ABC por la recta BC, la línea A'D coincidirá con la AD y serán iguales, por tanto, la recta DO tiene los puntos D y O equidistantes de los A y A', luego es perpendicular á la AA' por lo cual esta recta y la DO serán perpendiculares, que es lo que se queria demostrar.

Como dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano, diremos:

1.° *Si una recta es perpendicular á otras dos que pasan por un punto de la misma, lo será tambien al plano que las mismas determinen.*

2.° *El lugar geométrico de dos puntos cualquiera tomados en una recta, será el plano perpendicular á la misma y que se halle en el punto medio entre dichos dos puntos dados.*

3.° *El lugar geométrico de las perpendiculares trazadas en un punto de una recta, es el perpendicular á la recta en dicho punto.*

El recíproco *del Teorema anterior lo espresaremos diciendo: Si dos rectas* BO *y* CO *son perpendiculares á una tercera* AO *en un punto* O *de la misma, otra recta cualquiera* DO, *perpendicular á la misma* AO *en dicho punto, se hallará precisamente en el plano* BOC *de las dos primeras.*

En efecto, siendo PQ el plano de las rectas BO y CO, si la DO se encontrase fuera de dicho plano, haciendo pasar por dicha recta y la BO otro plano, este cortará al PQ en otra recta distinta de la DO, y se tendria que dicha recta, segun el teorema directo anterior, seria perpendicular á la AO, resultando el absurdo de que en el punto O de la recta AO habria dos rectas perpendiculares á la misma, que se hallarían en distintos planos.

194. Teorema. *Por un punto dado en un plano, ó fuera del mismo, no se le puede trazar mas que una sola perpendicular.*

En efecto: 1.° Sea el punto dado el O (1.ª fig. 124) del plano PQ, y supongamos que se pueden levantar las dos perpendiculares OA y OB. Si hacemos pasar por dichas rectas un plano, su interseccion con el PQ, será la recta CN, y por tanto se podrian trazar á esta recta por su punto O dos perpendiculares, lo que es un absurdo.

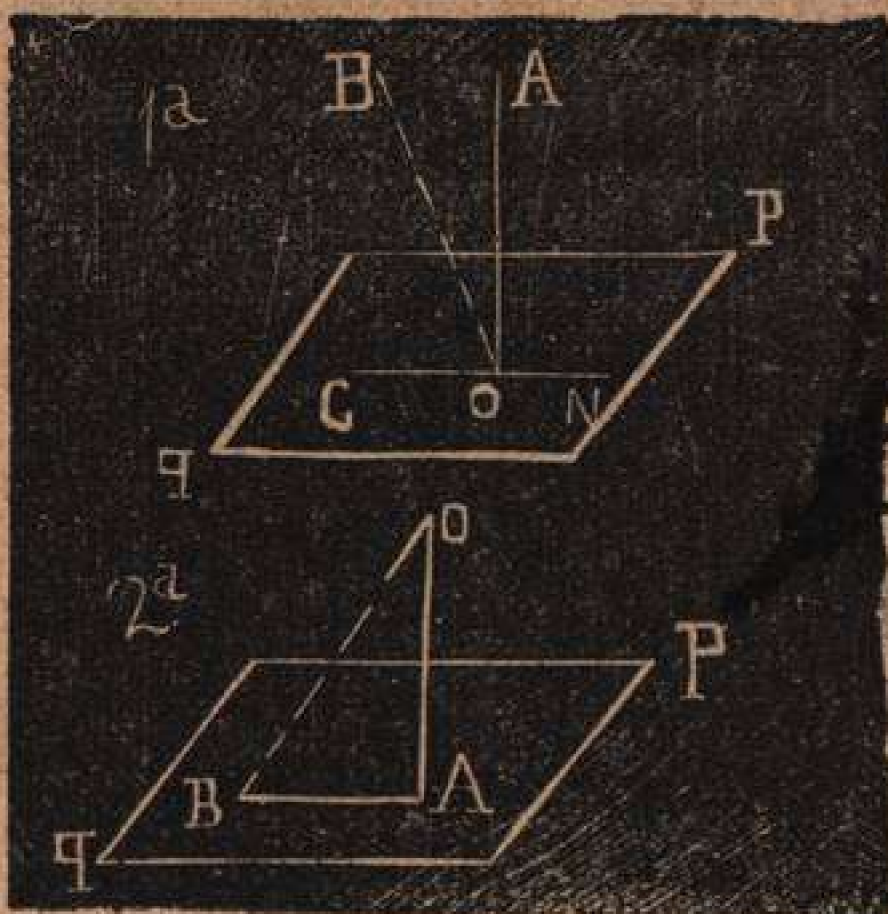


Fig. 124.

2.° Sea ahora el punto dado el O, (2.ª figura 124) el cual se halla fuera del plano PQ; y supongamos que desde dicho punto se le pueden trazar las perpendiculares OB y OA á dicho plano; si hacemos pasar por las dos rectas BO y AO un plano, su interseccion con el PQ será la recta AB, y resultaria que desde el punto O se podrian bajar dos rectas perpendiculares á la AB, lo cual es absurdo. (Teorema 27.)

195. Teorema. *Por un punto dado no se puede trazar á una recta mas que un solo plano perpendicular.*

En efecto, supongamos: 1.° Que por el punto O (1.ª figura 125) de la recta AB se puedan trazar dos planos PQ y PQ', perpendiculares á dicha recta; si hacemos pasar por AO un tercer plano que corte á los otros dos, sus intersecciones serán OC y OD; luego la recta AO seria perpendicular á la OC y OD, que pasan por su pié en dichos planos; luego en el punto O de la recta AB y en un mismo plano se tendrian dos perpendiculares á dicha recta, lo cual es absurdo.

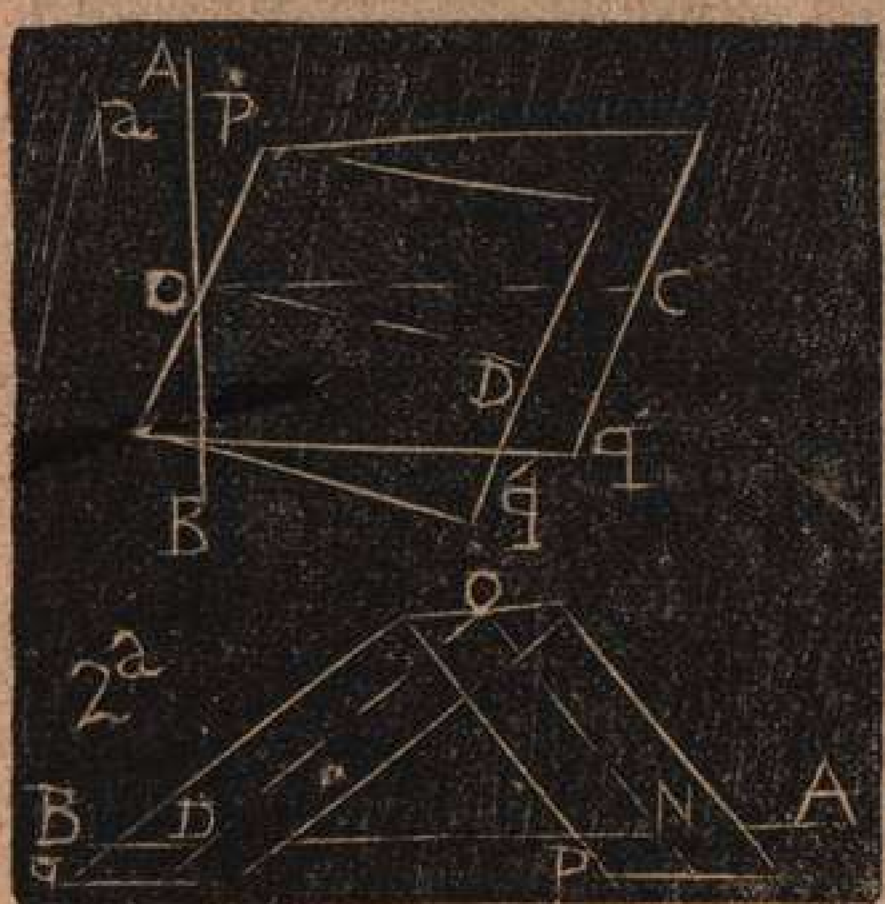


Fig. 125.

2.° Si desde el punto O (2.ª fig. 125), situado fuera de la recta AB, se suponen trazados los dos planos OP y OQ, perpendiculares á esta recta, haciendo pasar por O y por dicha recta AB un tercer plano, las intersecciones de este con los dos primeros, serian las rectas ON y OD; y como la AB es perpendicular á los dos planos OP y OQ, lo seria tambien á las dos rectas ON y OD que pasan por los puntos N y D de interseccion de los dos planos con la recta AB, lo cual es un absurdo, segun el teorema 27.

196. Teorema. *Si desde un punto fuera de un plano se trazan á este una perpendicular y diferentes oblícuas, se verifica:*

1.° Que la perpendicular es la menor de todas.

2.° Que las oblícuas equidistantes del pié de la perpendicular son iguales.

3.° Que la oblícua que mas se separe del pié de la perpendicular es la mayor.

En efecto, 1.° Sea O el punto dado fuera del plano PQ, (fig. 126) en la cual OA es la perpendicular: si trazamos una oblícua cualquiera, por ejemplo OD, y unimos el punto D con el A, tendremos el triángulo rectángulo OAD, en el cual, segun el Recíproco Teorema 85, habiendo sido el ángulo A>D será tambien OD>OA.

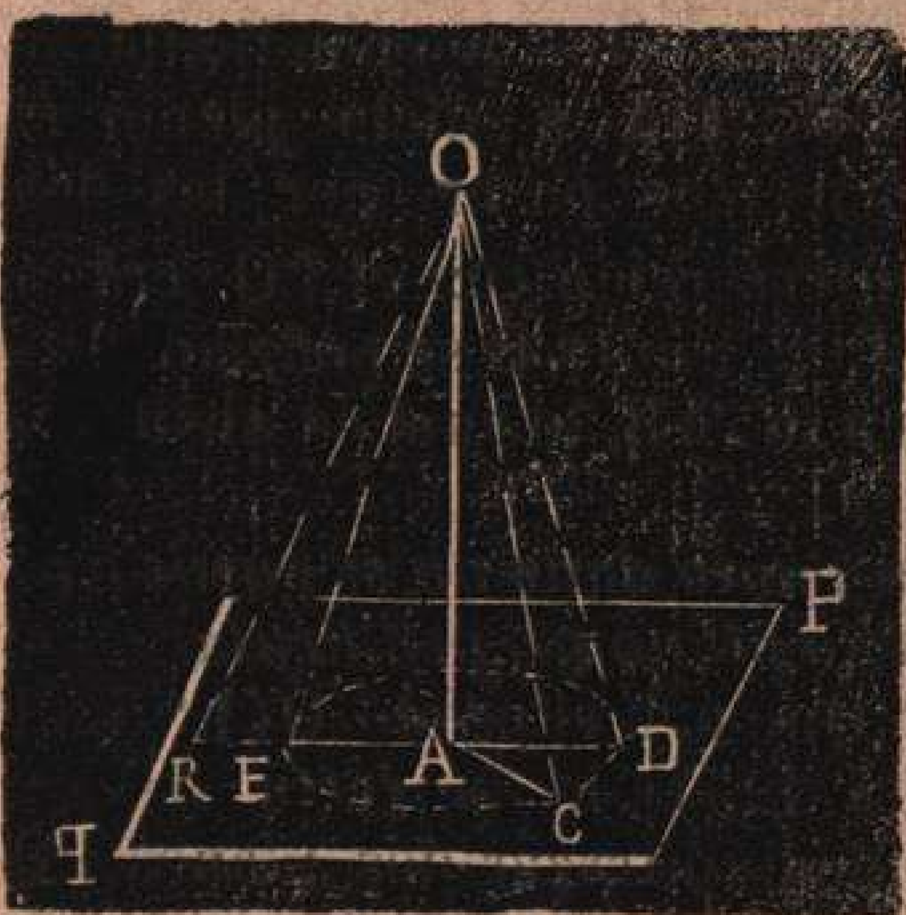


Fig. 126.

2.° Sean ahora AD=AC y vamos á demostrar que OD=OC; en efecto, los triángulos rectángulos OAD y OAC tienen el cateto OA comun, el ángulo en A, recto para los dos, y los catetos AD y AC iguales por hipótesis; luego por tanto OD=OC (segun el teorema 87.)

3.° Vamos á demostrar ahora que siendo AR>AC es la oblícua OR mayor que la OC. En efecto, AR>AE y AE=AC; luego por tanto OR>OC. (Teorema 28.)

Recíprocamente. *Si tenemos varias oblícuas y una perpendicular á un plano que concurren en un punto exterior á este, se verificará que:*

1.° La perpendicular es la menor de todas ellas.

2.° Las oblícuas iguales tienen sus piés equidistantes del de la perpendicular.

3.° La oblícua que sea mayor tiene su pié mas distante del de la perpendicular.

De lo expuesto se infiere que la distancia desde un punto exterior á un plano, es la perpendicular al plano, trazada desde dicho punto.

Resultando tambien que:

El lugar geométrico de los piés C, D, E, etc. de las oblícuas iguales trazadas desde un punto esterior O á un plano PQ, es una circunferencia CDE, situada en dicho plano y cuyo centro es el pié A de la perpendicular OA al mismo plano, trazada desde dicho punto esterior.

197. Teorema de las tres perpendiculares. *Si desde el pié de una perpendicular á un plano se traza una perpendicular á otra recta situada en el plano y se une este punto de interseccion con cualquiera de los de la perpendicular al plano, esta recta será perpendicular á la recta trazada en el plano.*

Vamos á demostrar (fig. 127) que si desde el pié O de la perpendicular AO al plano PQ, se traza la perpendicular OB á la recta CD situada en el mismo plano y se une el punto B donde estas rectas se encuentran con otro cualquiera A de la perpendicular al plano, la recta AB que une estos dos puntos es perpendicular á la recta CD situada en dicho plano.

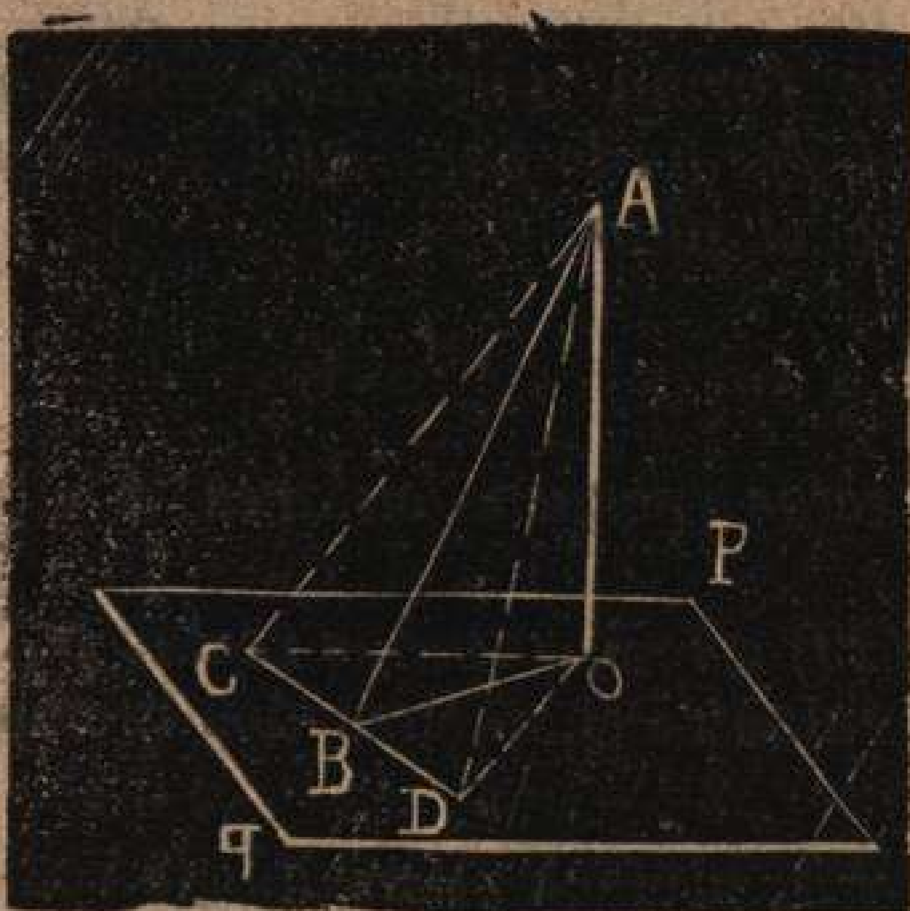


Fig. 127.

En efecto, tomando BC=BD resultará que OC=OD, segun el Teorema 28, y por tanto las oblícuas AC y AD al plano PQ, serán tambien iguales, segun el Teorema anterior 196, de lo cual deduciremos que el triángulo CAD es isósceles, luego la recta AB será perpendicular á su base CD. (Corolario del Teorema 85).

Escolio. De ser la recta CD perpendicular á la BO y tambien á la BA, resultará que dicha recta CD es tambien perpendicular al plano OBA que dichas dos rectas determinan. (Teorema 193).

198. Se llama *proyeccion de un punto* sobre un plano, al punto que sirve de pié á la perpendicular trazada desde aquel al plano.

Se llama *proyeccion de una recta* sobre un plano, otra tal que una los piés de las perpendiculares trazadas desde los estremos de aquella al plano.

199. Teorema. *El ángulo formado por una recta y un plano, está determinado por dicha recta y su proyeccion sobre el plano, y este es menor que cualquiera otro.*

En efecto, sea AB (fig. 128) la recta dada y PQ el plano; la proyeccion de aquella sobre este será la recta BC, y por tanto, el ángulo que forma dicha recta con su proyeccion será el ABC. Vamos ahora á demostrar que dicho ángulo ABC es menor que cualquiera otro, ABD por ejemplo, que dicha recta AB forma con otra recta cualquiera BD trazada por su pié en el mismo plano.

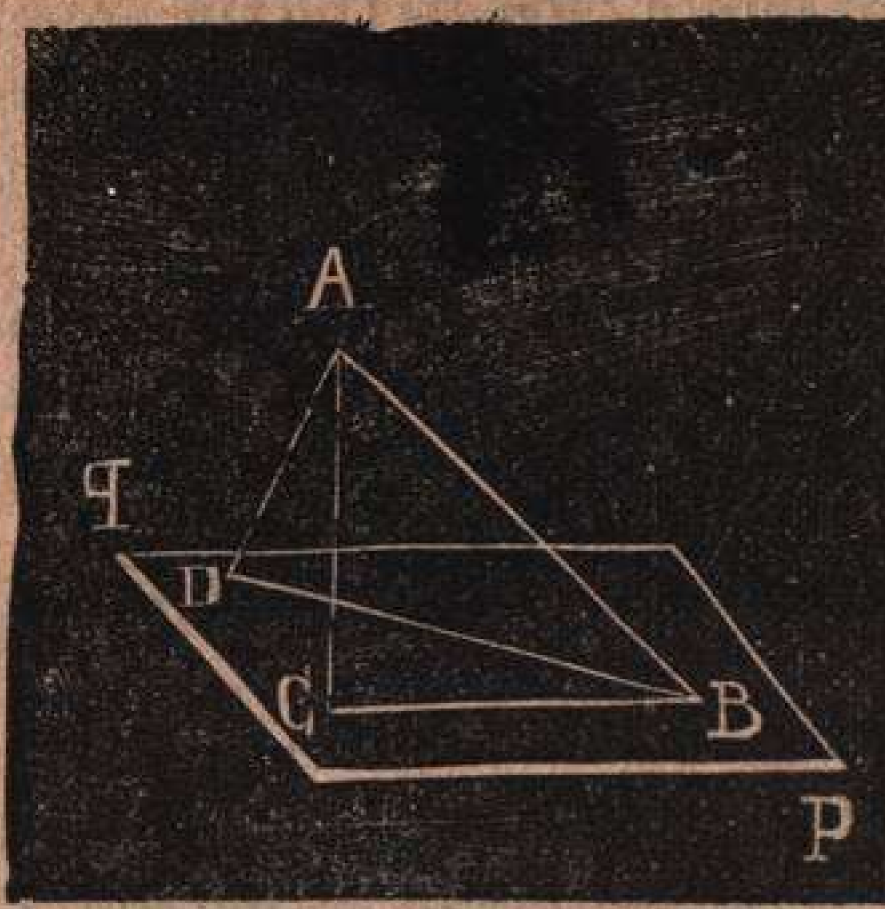


Fig. 128.

Si tomamos la recta BD igual á BC, tendremos que los triángulos ABD y ABC, tendrán el lado AB comun AD>AC por ser la primera oblícua y la segunda perpendicular, luego el ángulo ABD será mayor que el ABC, (Teor. 86) que es lo que se queria demostrar.

Corolario. *El ángulo que forma una recta con un plano, tiene por medida la del formado por dicha recta y su respectiva proyeccion sobre el plano.*

Rectas paralelas en el espacio.

200. Teorema. *Dos rectas perpendiculares á un mismo plano son paralelas.*

Vamos á demostrar (fig. 129) que si las dos rectas NA y MB son perpendiculares al plano PQ, dichas dos rectas son paralelas.

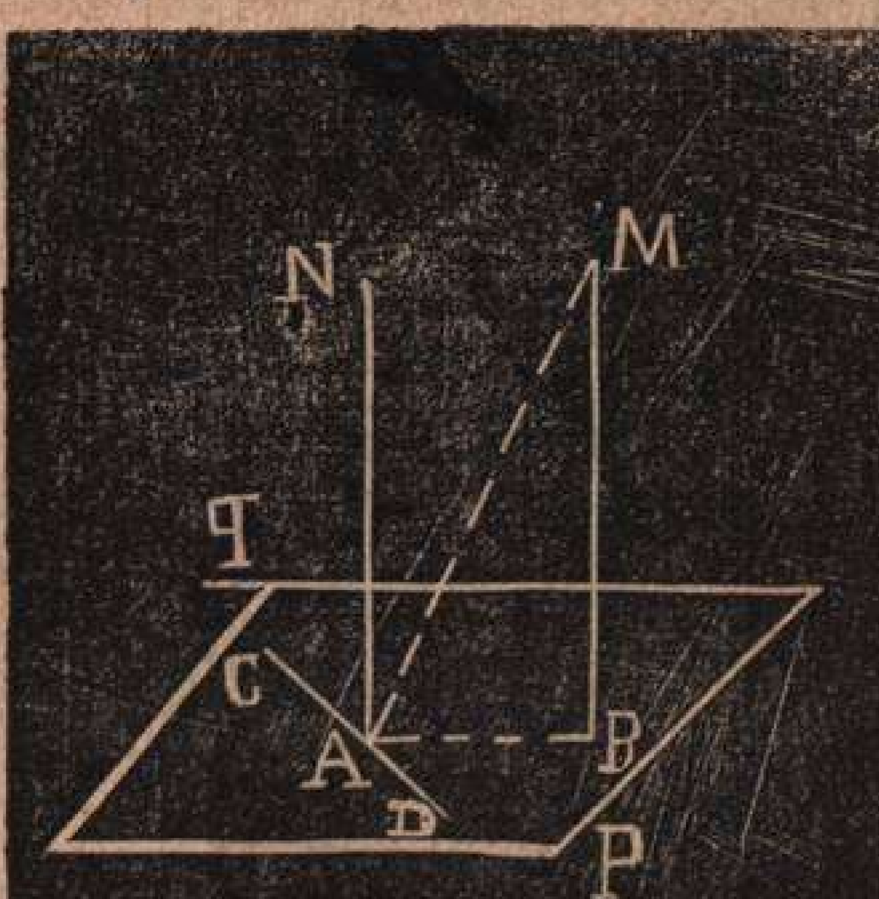


Fig. 129.

En efecto, trazando la recta AB que une sus piés, esta será perpendicular con las dos rectas dadas, y trazando la recta CD perpendicular á la AB en el plano PQ y uniendo M con A la recta MA será perpendicular á la CD (segun el Teorema 197), luego NA y AB lo son tambien, la primera por construccion y la segunda por hipótesis, y por tanto, las tres rectas AB, AM y AN están en un mismo plano, (Recíproco Teorema 193) y como la recta MB se halla tambien en él, resultará que las rectas MB y NA están en un mismo plano, son perpendiculares á una tercera, siendo necesariamente paralelas.

201. Teorema. *Sabido que por un punto cualquiera dado en el espacio no se puede trazar mas que una sola paralela á dicha recta* (Teorema 35), *vamos á demostrar que dos rectas, una perpendicular y otra oblícua á un mismo plano no son paralelas.*

En efecto, supongamos que sea PQ (fig. 130) el plano dado, AD una perpendicular y BE una oblícua. Si supusiésemos que dicha recta BE fuese perpendicular al plano PQ, tendriamos que levantando en el punto B la perpendicular BC al plano PQ, seria tambien paralela á la AD y resultarian los dos absurdos siguientes: 1.° que por el punto B se podrian trazar dos paralelas á la recta AD, y 2.° que por el punto B se podrian levantar dos perpendiculares al plano PQ, lo cual es contrario al teorema 194.

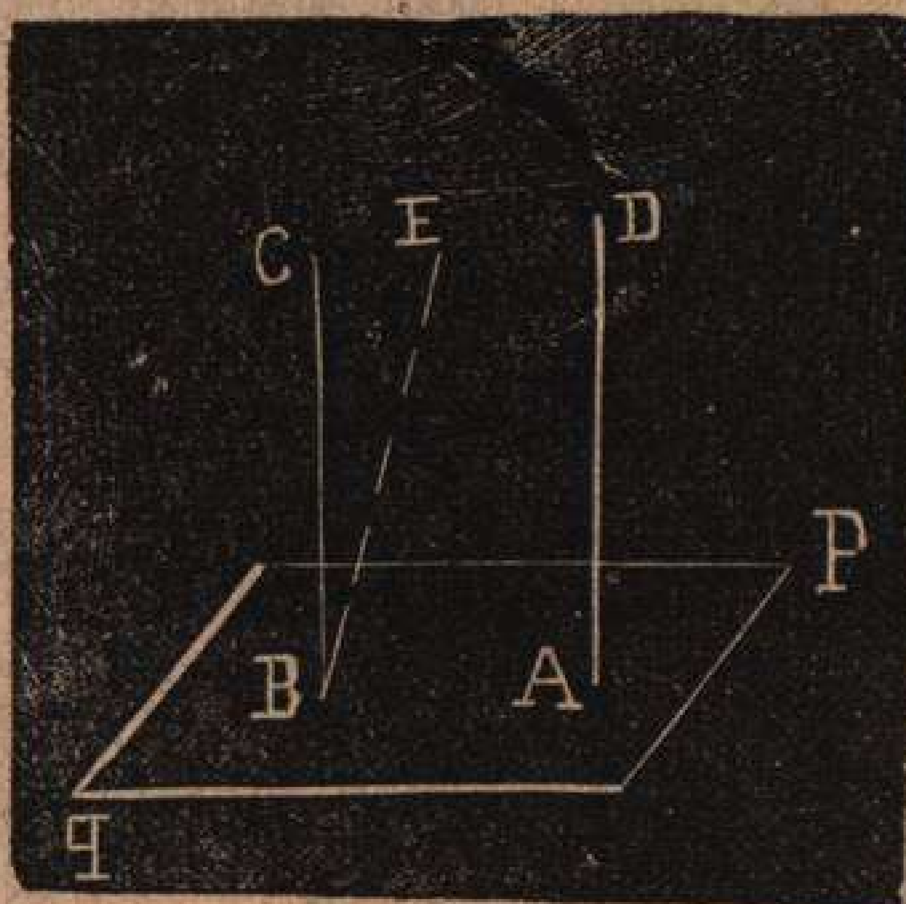


Fig. 130.

Luego dichas dos rectas AD y BE no son paralelas.

Corolario directo. *Si una recta es perpendicular á un plano, toda recta paralela á aquella será perpendicular al mismo plano.*

Recíproco. *Si un plano es perpendicular á una de varias rectas paralelas, lo será á todas las otras.*

202. Teorema. *Dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.*

Vamos á demostrar (figura 131) que si las dos rectas AB y CD son paralelas á la recta MN, dichas dos rectas son paralelas entre sí.

En efecto, trazando un plano PQ, perpendicular á la

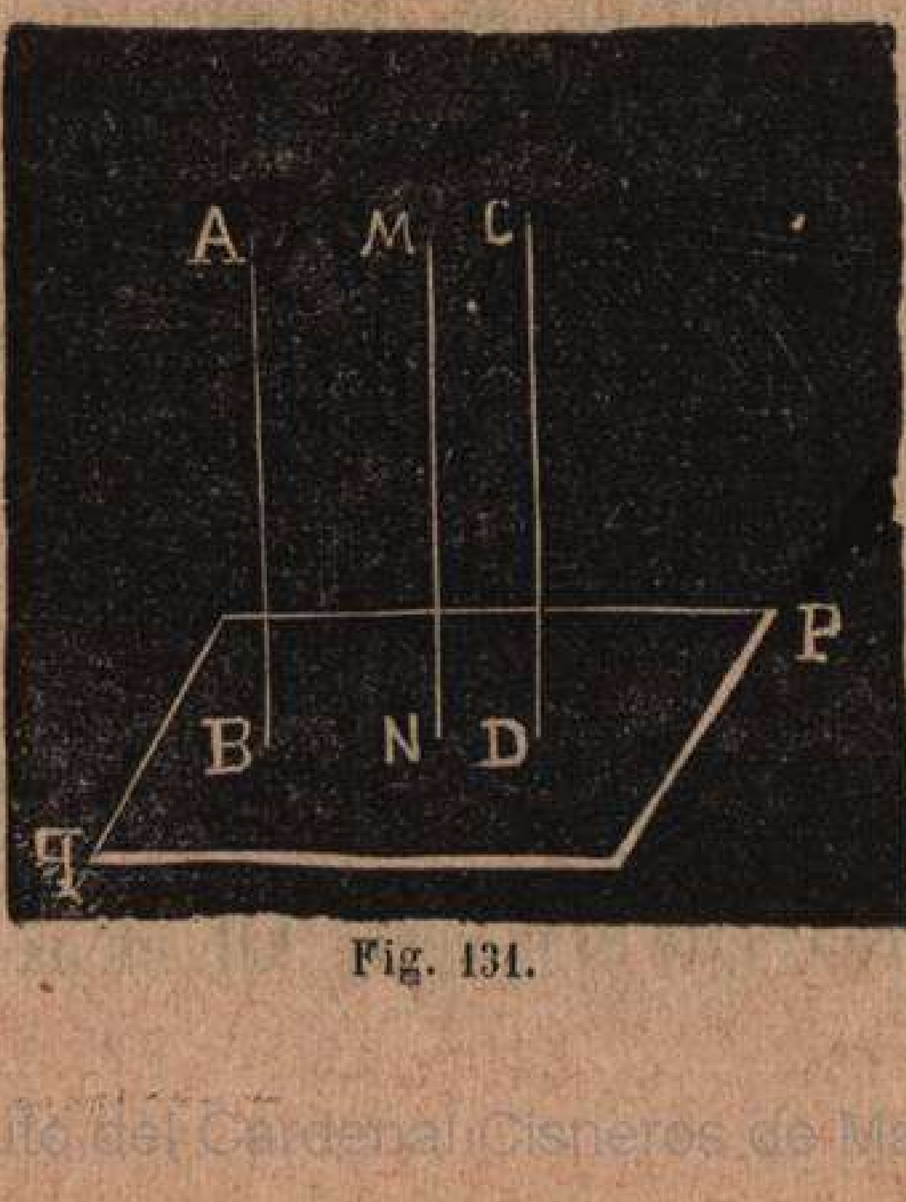


Fig. 131.

recta AB, lo será tambien á su paralela MN, y siéndolo á esta, lo será tambien á su paralela CD; por tanto, MN y CD son perpendiculares al plano PQ y segun el corolario anterior serán tambien paralelas.

Corolario. *Las rectas paralelas tienen comunes sus planos perpendiculares.*

203. Teorema. *Dos ángulos que en diferentes planos tengan sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son perfectamente iguales.*

En efecto, supongamos que los ángulos sean BAC y B'A'C' (fig. 132) trazados en los planos PQ y NM.

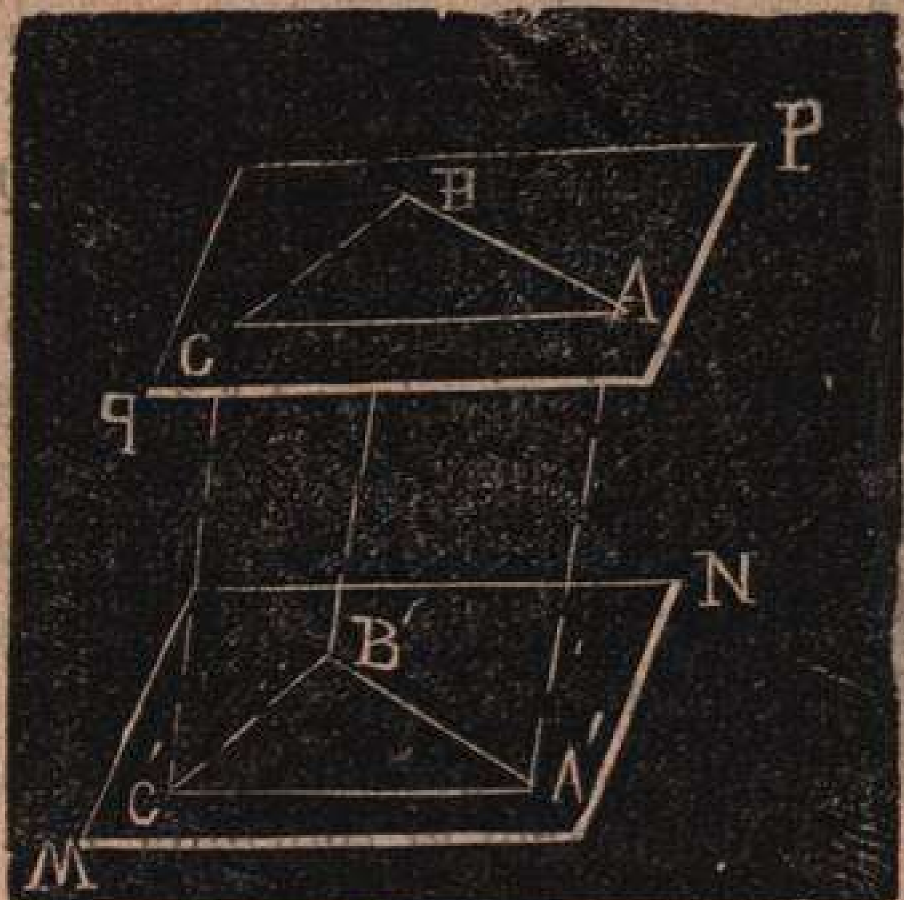


Fig. 132.

Si tomamos AB=A'B' y AC=A'C' y unimos el punto A con A', el B con B' y el C con C' por medio de las rectas AA', BB', CC', tendremos que los cuadriláteros ABA'B', ACA'C', BCB'C' serán paralelógramos (segun el Teorema 110), luego AA', BB' y CC' serán iguales y respectivamente paralelas, y por tanto, los triángulos ABC y A'B'C' serán respectivamente iguales y por tanto, los ángulos BAC y B'A'C' lo serán tambien.

Corolario 1.° Del precedente teorema, y del expuesto en la Geometría plana en el número 44, se deducirá que *los ángulos formados en dos planos paralelos y que tengan sus lados paralelos, unos dirigidos en el mismo sentido y otros en el contrario, serán suplementarios.*

2.° Las rectas paralelas comprendidas entre una recta y un plano paralelos, son iguales.

3.° Una recta y un plano paralelos son siempre equidistantes, es decir que todos los puntos de la recta equidistan de su plano paralelo.

204. Teorema. *Toda recta paralela á otra situada en un plano es paralela á dicho plano.*

Vamos á demostrar (fig. 133) que si la recta AB es pa-

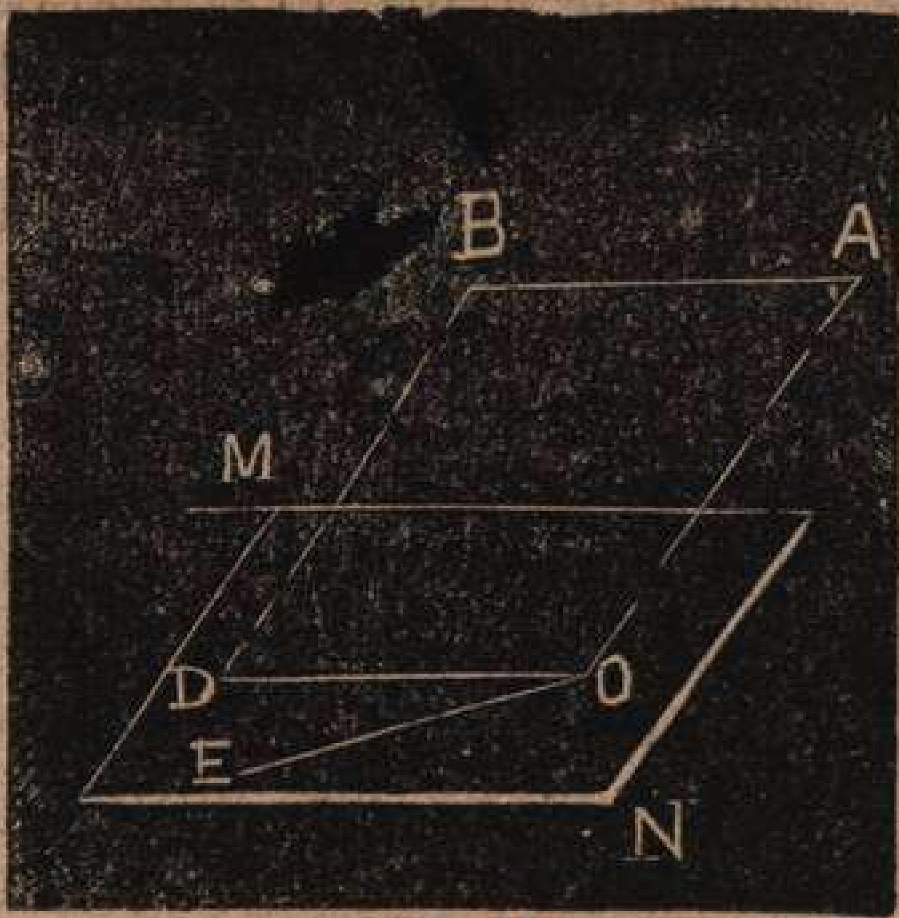


Fig. 133.

ralela á la DO, trazada en el plano MN, dicha recta y este plano son paralelos.

En efecto, tomando la AB igual á la DO, y trazando las rectas BD y AO, tendremos que la recta AB está en el plano ABDO; y por tanto no podrá encontrar al plano MN sino en algun punto de la DO, mas esto es contra la hipótesis; luego tampoco puede encontrar á dicho plano, y así siendo, el plano y la recta serán paralelos.

205. Teorema. *Si por una recta paralela á un plano se traza otro plano que corte al primero, la interseccion de estos planos es paralela á la recta dada.*

Vamos á demostrar que siendo la recta AB, paralela al plano MN, si se traza otro plano que corte al primero, la interseccion DO de estos planos es paralela á la recta dada AB.

En efecto, AB y DO están en el mismo plano ABDO, además AB no puede encontrar á DO, porque si la encontrase, encontraria tambien al plano MN en que está esta situada, lo que es contra la hipótesis; luego las rectas AB y DO son paralelas.

Corolario. *Si una recta AB es paralela á un plano MN y por un punto O de este se traza otra recta OD, paralela á la primera, dicha recta OD estará toda ella en el plano MN.*

En efecto, porque si OD no tuviese mas que el punto O en el plano MN, trazando por AB y OD otro plano cortaria al MN en una recta OE paralela con la AB (segun lo expuesto); luego por O habria dos paralelas OD y OE á la recta BA, lo cual es imposible (segun el teorema 201.)

206. Teorema. *Si una recta es paralela á dos planos que se cortan, lo será tambien á la interseccion comun de dichos planos.*

Sea AB (fig. 134) la recta paralela á los dos planos CR y DS; trazando por un punto cualquiera C de la interseccion CD una paralela á la recta AB, debe hallarse á un mismo tiempo en los dos planos CR y DS, puesto que ambos son paralelos á la recta dada, y como la recta única que corresponde á la vez á los dos planos, es sola la interseccion de los mismos, resultará demostrada la proposicion.

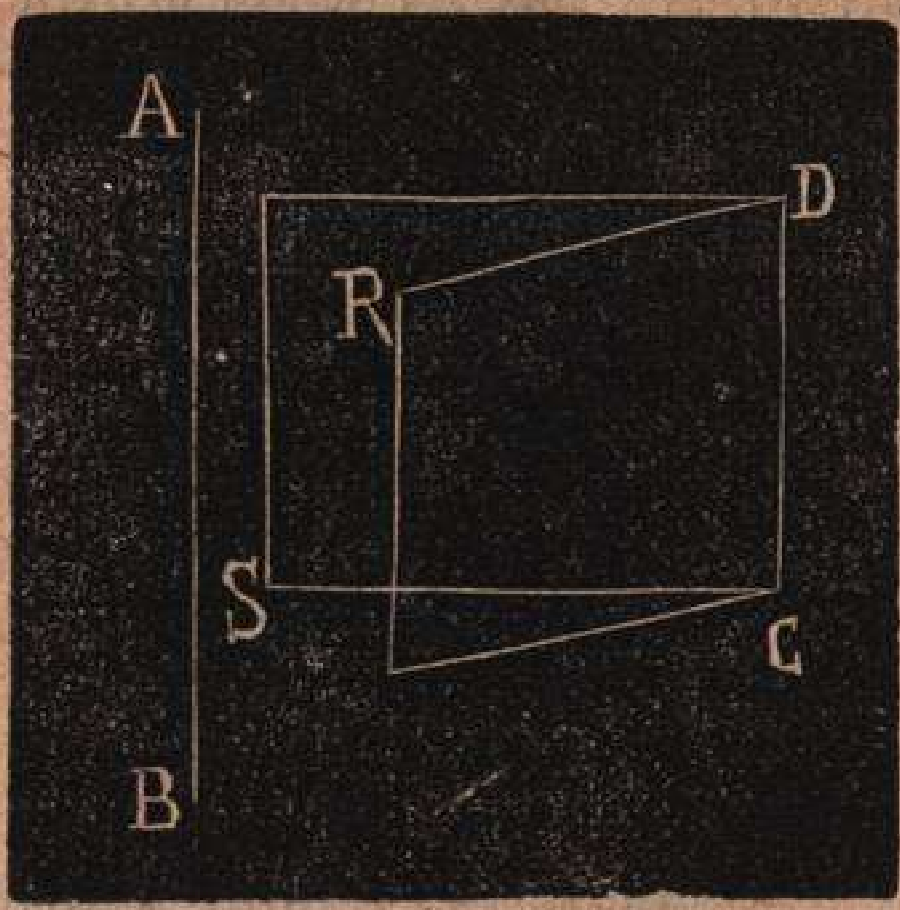


Fig. 134.

207. De lo expuesto en los teoremas precedentes se deduce fácilmente que:

1.° *Si varias rectas son paralelas, todo plano que pase por una de ellas es paralelo á todas las demás, si es que algunas de estas no se hallan en el plano.*

2.° *Si una recta es paralela á un plano y pasa por ella otro plano que corte á aquel, su interseccion es pararela á dicha recta.*

3.° *Una recta situada en un plano y otra fuera de él serán paralelas siempre que puedan estar ambas en un mismo plano.*

4.° *Si dos rectas son paralelas, todo plano paralelo á una de ellas lo será á la otra.*

5.° *Todo plano que corte á una recta cortará á todas sus paralelas.*

6.° *La interseccion de dos planos, cada uno de los cuales pase por una de dos rectas paralelas, es paralela á estas rectas.*

7.° *Si una recta es perpendicular á un plano, toda recta perpendicular á aquella será paralela al plano.*

Planos paralelos entre sí.

208. Se llaman *planos paralelos* los que jamás se encuentran por mas que se prolonguen.

Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.

En efecto, porque de no serlo se encontrarian y desde el primer punto de la línea de su encuentro se podrian trazar dos planos diferentes, ambos perpendiculares á dicha recta, lo cual, y conforme hemos visto en el teorema 195, es un absurdo.

209. Teorema. *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son rectas paralelas.*

En efecto, en la figura 132 hemos visto que AC y A'C' son las intersecciones de los dos planos PQ y MN con el tercer plano AC A'C', las cuales no pueden encontrarse, porque si así sucediera se encontrarian tambien los planos PQ y MN en que están situados, lo cual es contra la hipótesis, y por tanto la proposicion es cierta.

En la misma figura 132 comprobaremos que: *si dos ángulos BAC y B'A'C', situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos, los planos que determinan son tambien paralelos.*

En efecto, trazando por A' un plano paralelo al BAC, su interseccion con el AA'BB' será paralela con AB; y por tanto, tiene que coincidir con A'B'; igual razonamiento repetiremos en los tres vértices; luego el plano trazado por A' es paralelo al en que se halla el ángulo BAC, es decir, que ambos planos son paralelos.

De lo expuesto, deduciremos que:

1.° Para que dos rectas situadas en planos paralelos sean paralelas entre sí, basta saber que pueden hallarse en un mismo plano.

2.° Toda perpendicular á uno de dos planos paralelos lo será tambien al otro.

3.° Dos planos paralelos á un tercero son paralelos entre sí.

210. Teorema. *Si dos planos son paralelos, toda recta paralela á uno de ellos es paralela al otro.*

En efecto, sean N y N' dos planos paralelos; si suponemos que la recta M es paralela al plano N, todo plano que pase por M cortará al plano N' en la recta M' que será paralela al plano N'. De modo que la recta M es paralela á M' y esta al plano N'; luego la recta M y los dos planos N y N' serán paralelos.

De lo expuesto deduciremos:

El lugar geométrico de todas las paralelas á un plano, trazadas por un punto exterior al mismo, es el plano paralelo al primero que pasa por dicho punto.

211. Teorema. *Si tres planos paralelos cortan á dos rectas cualesquiera, las dividen en partes directamente proporcionales*

Vamos á demostrar (fig. 135) que si los planos ST, RP y NM son paralelos y cortan á las dos rectas OB y HA, se verifica que

OC:HE::CB:EA.

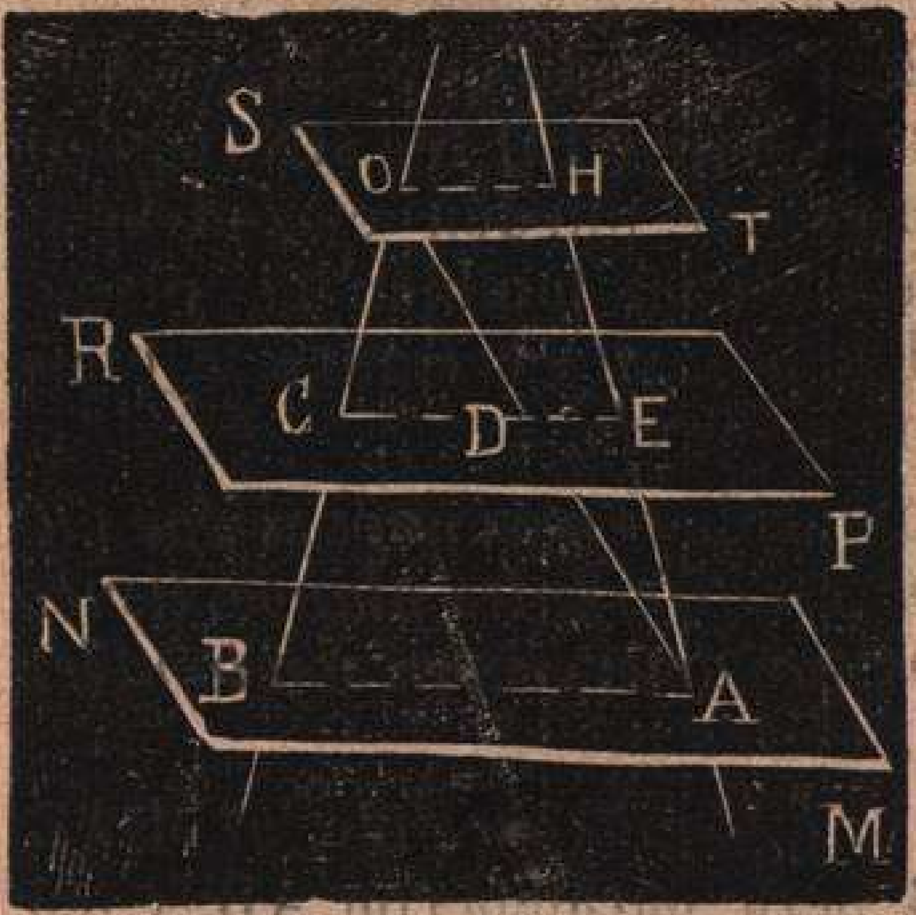


Fig. 135.

En efecto, trazando la recta OA, y uniendo C con D, B con A, O con H y D con E, por medio de las rectas paralelas CD y BA; OH y DE, se verificará en el ángulo BOA, segun el teorema 48, que OC:CB::OD:DA, y tambien en el ángulo OAH tendremos que

OD:DA::HE:EA;

suprimiendo la razon comun, y alternando, tendremos que:

$$\frac{OC}{HE}=\frac{CB}{EA},$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

212. Entendemos por proyeccion de un punto sobre un plano, el pié de la perpendicular trazada al plano que pase por dicho punto.

Entendemos por proyeccion de una recta cualquiera sobre un plano el lugar geométrico de las proyecciones de los diversos puntos de dicha recta.

La proyeccion de un punto es siempre otro punto.

La proyeccion de una recta es un punto cuando esta es perpendicular al plano de proyeccion: es otra recta igual ó menor que la dada cuando esta es paralela ú oblícua al plano de proyeccion. (97.)

213. De lo espuesto deduciremos que:

1.° *Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un mismo plano son otras dos rectas paralelas.*

2.° *Las proyecciones de una misma recta sobre varios planos paralelos, son tambien rectas paralelas.*

3.° *Si dos rectas concurrentes son paralelas á un plano* *y forman entre sí ángulo agudo, recto ú obtuso, sus proyecciones sobre dicho plano, formarán tambien un ángulo agudo, recto ú obtuso respectivamente.*

214. Teorema. *Entre dos rectas en el espacio, no paralelas por no pertenecer á un mismo plano y que se cruzan en proyeccion sobre un plano, existe una distancia que es la menor de todas ellas.*

En efecto, si por una de ellas hacemos pasar un plano y trazamos en este la proyeccion de la otra, encontrará esta recta de proyeccion á la primera en un punto, y la perpendicular levantada á esta en dicho punto hasta que encuentre á la otra, será la menor de todas las distancias, porque esta es perpendicular y otra cualquiera que pudiera trazarse seria una oblícua.

Planos perpendiculares y oblícuos entre sí.

215. Se dice que un plano es *perpendicular* á otro, cuando cae cada uno sobre el otro con igual inclinacion á sus dos lados.

Dos planos son *oblícuos* entre sí, cuando la inclinacion que entre ellos se forma es desigual á cada lado.

Llamamos ángulo diedro *al formado por dos planos que se cortan.*

Los ángulos diedros formados por dos planos perpendiculares, se llaman rectos.

Los ángulos diedros formados por planos oblícuos, se llaman tambien *agudos ú obtusos.*

Si un plano es perpendicu'ar á otro, este lo es tambien á aquel.

Si un plano es oblícuo á otro, este lo es tambien á aquel.

Dos planos perpendiculares que ámbos terminen en la interseccion comun, forman un solo ángulo diedro recto.

Dos planos perpendiculares que uno solo termine en la interseccion comun, forman dos ángulos diedros rectos.

Dos planos perpendiculares que se prolonguen indefinidamente, forman cuatro ángulos diedros rectos.

Los ángulos diedros que tengan una cara ó plano comun y las otras dos que constituyan un solo plano, se llaman *adyacentes.*

Los ángulos diedros que vayan uno en pós del otro, se llaman *consecutivos.*

Todos los ángulos diedros formados entre dos planos perpendiculares que terminen en la interseccion comun, se llaman *complementarios* y todos juntos valen un ángulo diedro recto, segun podemos observar en la (1.ª fig. 136) formados en A.

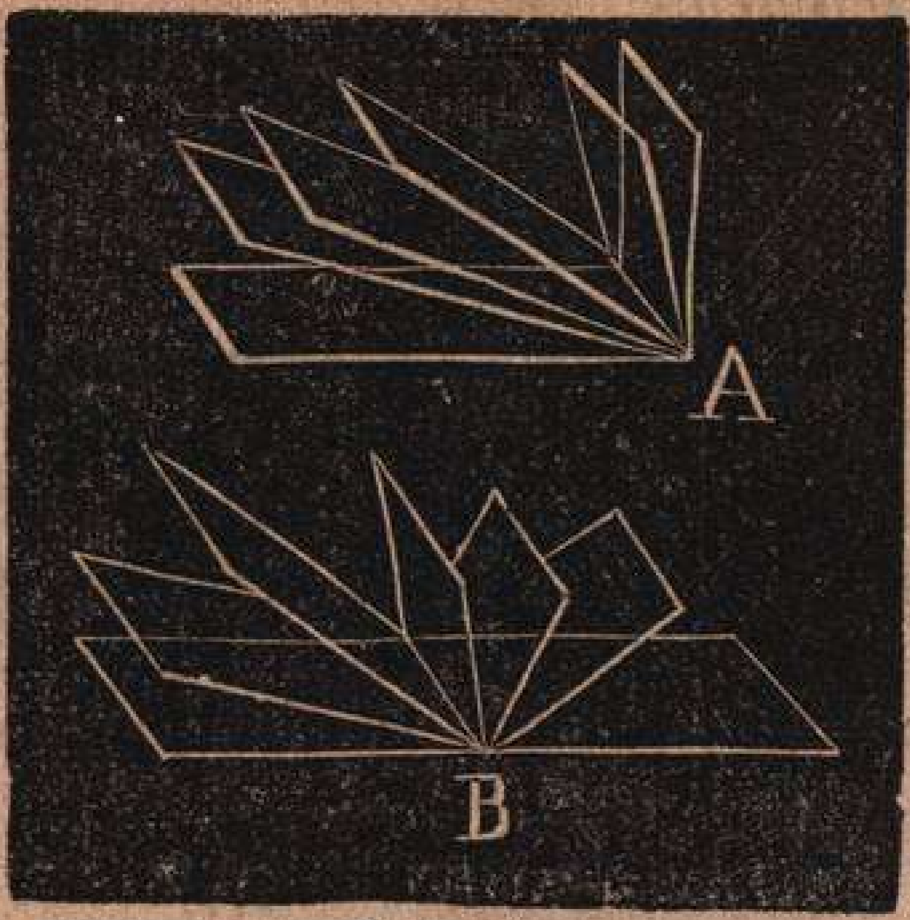


Fig. 136.

Todos los ángulos diedros formados entre dos planos perpendiculares que uno de ellos termine en la interseccion comun, se llaman *suplementarios*, y todos juntos valen dos ángulos diedros rectos, segun podemos observar en B (2.ª fig. 136).

216. Teorema. *Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.*

Vamos á demostrar que siendo la recta NO (fig. 137) perpendicular al plano PQ, si hacemos pasar por la recta NO el plano ND, este será perpendicular al plano PQ.

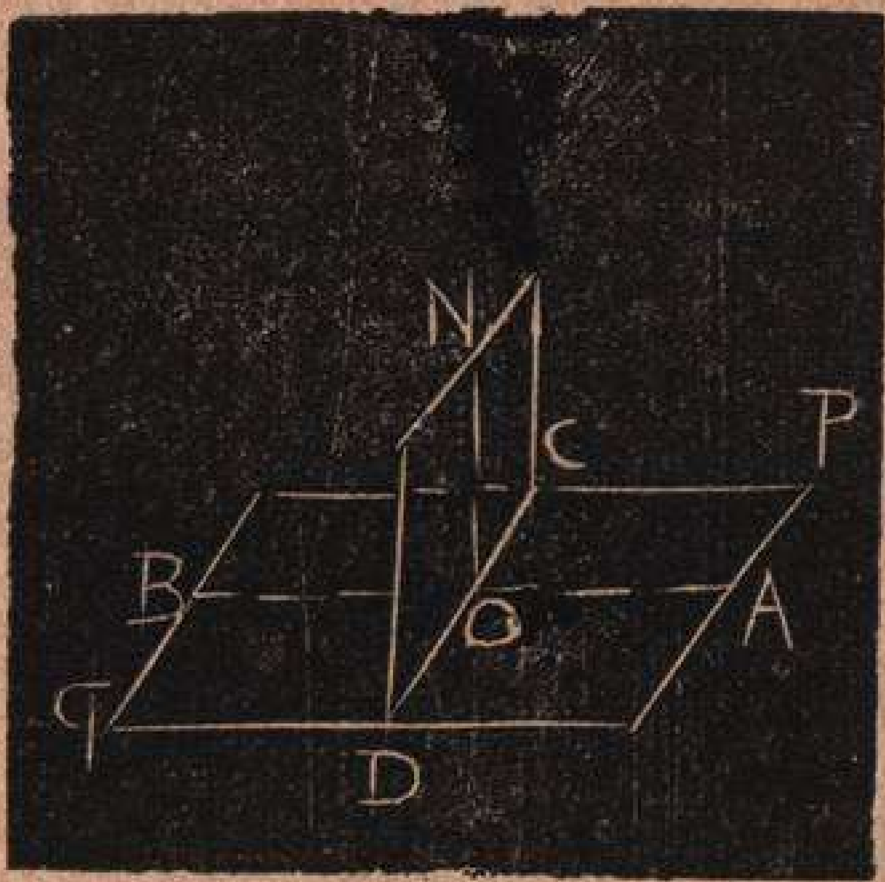


Fig. 137.

En efecto, trazando en el plano PQ la recta AO perpendicular á la interseccion DC de los dos planos PQ y ND, el ángulo AON es recto, pero este ángulo es el rectilíneo correspondiente al diedro PDCN, luego este diedro es recto y por tanto el plano ND es perpendicular al PQ.

Corolarios: *1.° Por un punto cualquiera* N *ú* O *ó por una recta cualquiera* NO, *perpendicular á un plano* PQ, *se pueden trazar infinito número de planos perpendiculares al primero.*

2.° Toda perpendicular trazada á uno de dos planos perpendiculares por un punto de la interseccion comun, se hallará precisamente en el otro plano.

3.° Todo ángulo diedro tiene por medida el rectilíneo *correspondiente, y este se halla formado por dos perpendiculares trazadas en un punto de la interseccion comun, una en cada cara.*

4.° *Por una recta cualquiera trazada en un plano, ó por una recta cualquiera fuera del mismo, no se puede trazar mas que un solo plano perpendicular al primero, porque este únicamente es el que forma dos ángulos, diedros iguales, que siendo adyacentes se llamarán rectos.*

5.° *La interseccion de dos planos perpendiculares á un tercero es perpendicular á este.*

En efecto, sea BA (fig. 138) la interseccion comun de los dos planos BE y BC; si en el punto A, comun á los dos planos anteriores, y al PQ se levanta una perpendicular á este, se hallará precisamente en los dos planos BE y BC; luego coincide con la interseccion BA de los dos primeros, y por tanto recíprocamente esta recta será perpendicular al plano PQ.

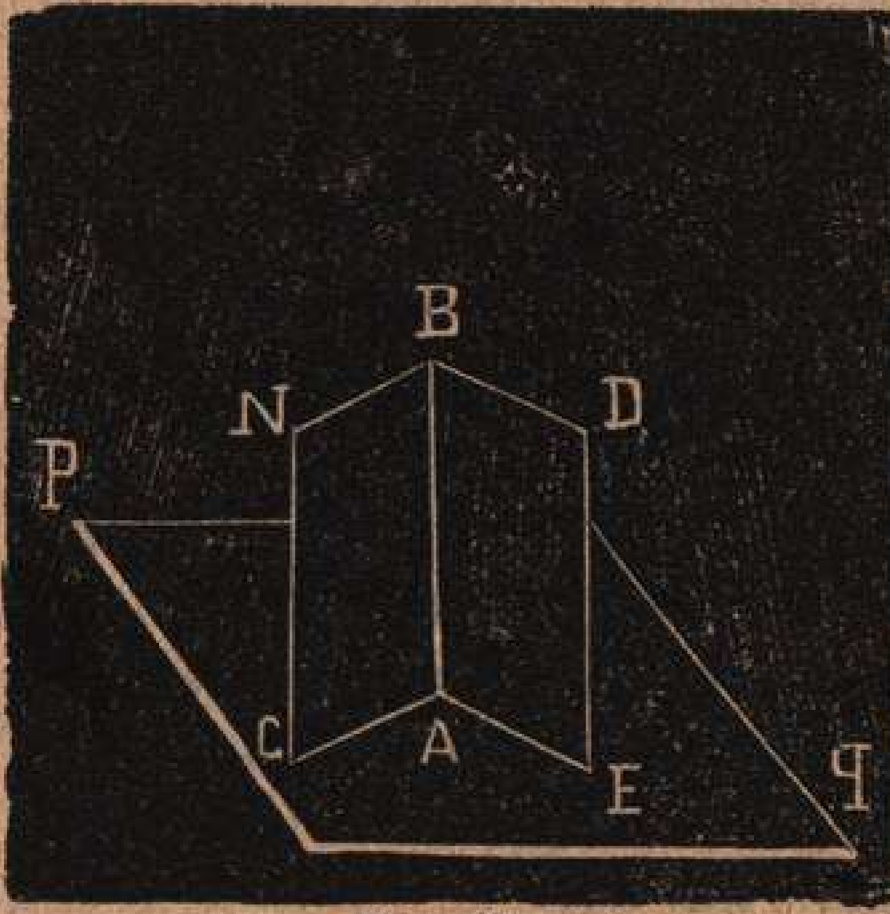


Fig. 138.

6.° *Por una recta perpendicular á un plano se puede trazar un número infinito de planos perpendiculares al primero; y por una recta no perpendicular á un plano no se puede trazar mas que un solo plano perpendicular al primero.*

217. **Teorema.** (1) *Si desde un punto interior á un ángulo diedro se trazan dos perpendiculares, una á cada uno de los dos planos que forman el ángulo diedro, el ángulo formado en el espacio es suplementario del rectilíneo correspondiente al diedro.*

Vamos á demostrar (fig. 139) que el ángulo O, formado por las dos rectas OA y OB, trazadas á los planos AC y BC, que forman el ángulo diedro en C, es suplementario de este.

(1) Este teorema debe tenerse en cuenta para la demostracion de la 3.ª propiedad de los ángulos triedros, que es una de las mas importantes.

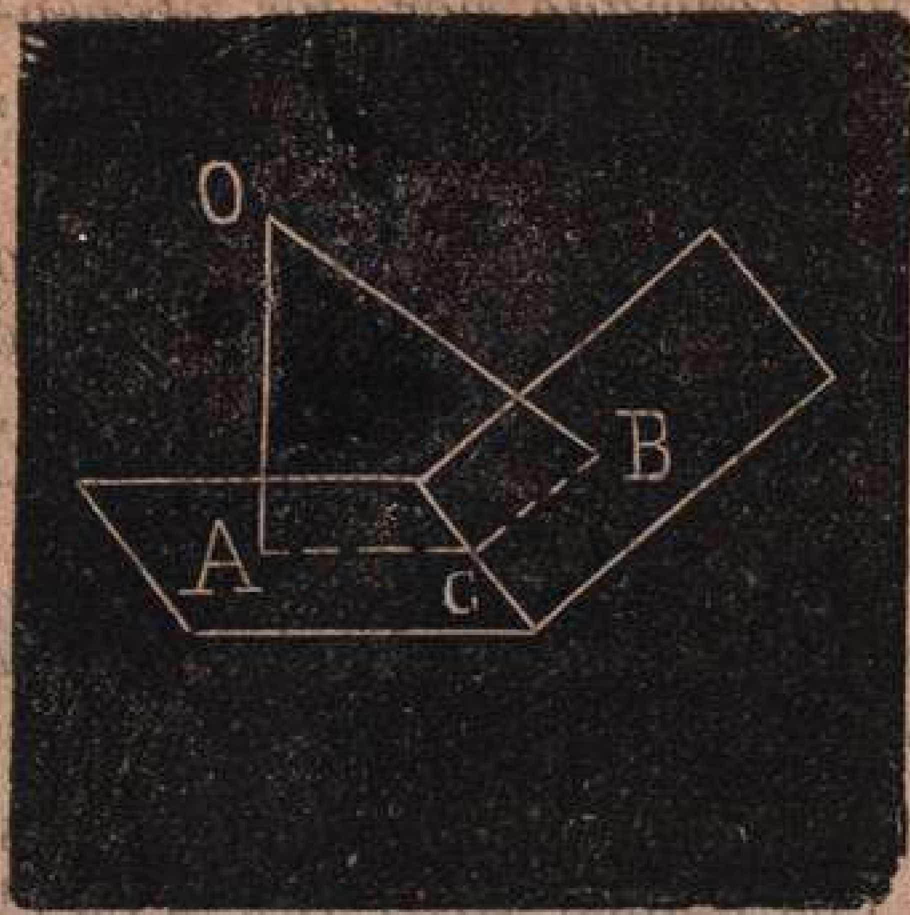


Fig. 139.

En efecto, si por dichas dos rectas OA y OB hacemos pasar el plano AOB, será perpendicular á los otros dos; y por tanto, la interseccion comun de estos será perpendicular á dicho plano AOB, la porcion de este, limitado por las dos perpendiculares y los dos planos, será el cuadriláctero AOBC, cuyos cuatro ángulos valdrán cuatros rectos (Teorema 107.) Mas siendo A y B rectos, tendremos que el cuadriláctero será inscriptible en una circunferencia, y por tanto, el ángulo O y ACB (que es el rectilíneo correspondiente al diedro), serán suplementarios.

218. Teorema. *Dos ángulos diedros adyacentes son suplementarios.*

En efecto, sean (1) NABD y DBAM (fig. 140) los ángulos adyacentes. Si por la interseccion comun AB levantamos el plano perpendicular AC, tendremos que ángulo

NABD=NABC+CABD;

y el ángulo diedro

MABD=MABC−CABD,

sumando estas dos igualdades miembro á miembro, resultará que

NABD+MABD=2 Rectos,

pues que los dos ángulos diedros NABC y MABC, como formados por planos perpendiculares, son diedros rectos.

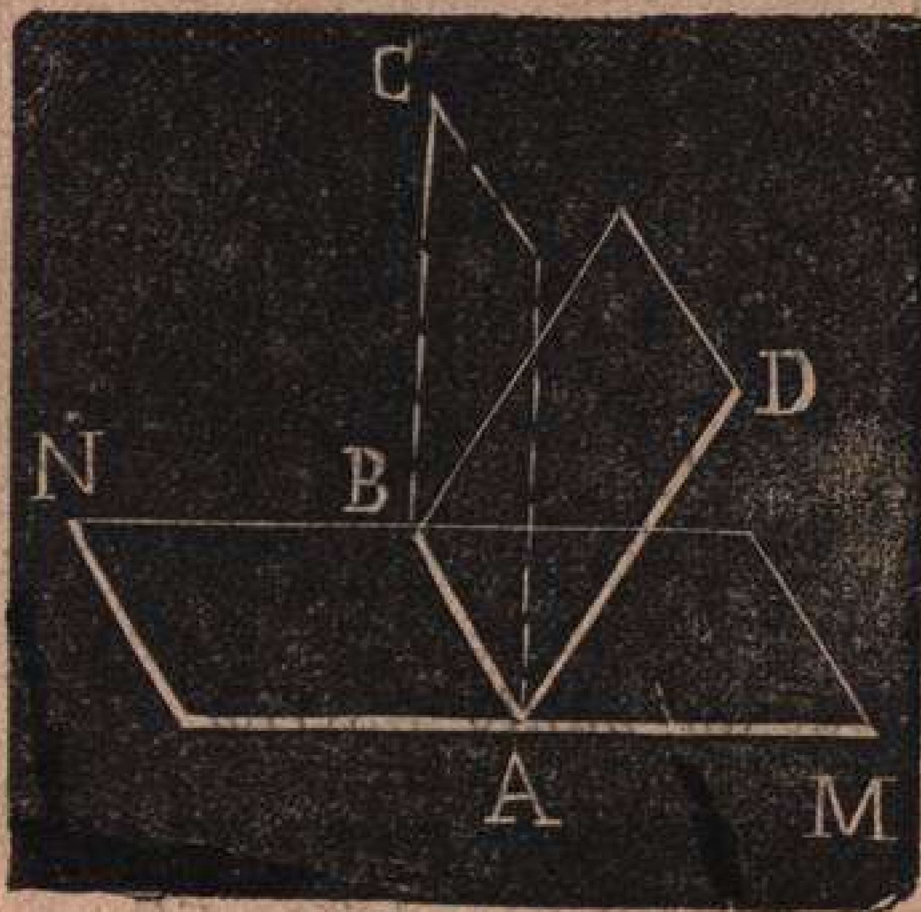


Fig. 140.

Corolarios. *1.° El suplemento de un ángulo diedro recto, es otro diedro recto.*

El suplemento de un diedro obtuso, es un diedro agudo.

(1) Un ángulo diedro se expresa por cuatro letras; las dos del medio corresponden á la interseccion comun, y la primera y la cuarta se hallan una en cada plano.

El suplemento de un diedro agudo, es un diedro obtuso.

2.° Los ángulos diedros opuestos por la arista son iguales porque tienen un mismo diedro suplementario.

3.° Los planos bisectores de dos ángulos diedros adyacentes son perpendiculares.

4.° Los planos bisectores de dos ángulos opuestos por una arista son prolongaciones opuestas de un mismo plano.

219. Todos los ángulos diedros rectos son iguales, puesto que son superponibles; no admitiéndose por tanto variedad de especies.

Los ángulos diedros, agudos y obtusos, admiten variedad de especies, pues á los primeros puede corresponder cualquier ángulo rectilíneo menor que 90°, y á los segundos puede corresponder cualquier rectilíneo mayor que 90° con tal que sea menor que 180°.

Ningun ángulo diedro obtuso puede tener 180°, porque en este caso su rectilíneo correspondiente seria una sola línea y el ángulo diedro un solo plano.

La magnitud de un ángulo diedro es independiente de la longitud de las caras ó planos que le formen.

El plano bisector es al ángulo diedro, lo que la bisectriz es al ángulo rectilíneo.

Si dos ángulos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes tambien lo son.

En efecto, porque si dichos diedros son iguales superpuestos coincidirán; y como estos tienen por medida la del rectilíneo correspondiente y este está determinado por dos perpendiculares trazadas á la arista comun, una en cada plano, resultará ser este el mismo para los dos diedros iguales.

Por tanto, dos ángulos diedros diferentes, tienen tambien distintos sus ángulos rectilíneos correspondientes.

Dos ángulos diedros cualesquiera son directamente proporcionales á sus rectilíneos correspondientes. (Teorema 65.)

A cada ángulo diedro corresponde un número infinito de ángulos planos ó rectilíneos, pero todos ellos perfectamente iguales. (Teorema 44).

Tambien á cada ángulo rectilíneo le corresponde su diedro respectivo, el cual se formaria trazando por el vértice de aquel una perpendicular á ambos lados, y determinando cada cara del ángulo diedro con dicha perpendicular y cada uno de los lados de aquel.

Por último, si los ángulos rectilíneos están determinados por el arco comprendido entre sus lados, los ángulos diedros lo están por los ángulos rectilíneos ó planos correspondientes, y por tanto, por el arco respectivo á su rectilíneo correspondiente.

220. Teorema. *Dos planos paralelos cortados por un tercer plano secante, forman ocho ángulos diedros, cuatro internos y cuatro esternos, entre ellos se verifica que:*

1.° Los ángulos diedros alternos internos son iguales.
2.° Los ángulos diedros correspondientes son iguales.
3.° Los ángulos diedros alternos esternos son iguales.
4.° Los ángulos diedros opuestos por cada arista son iguales.
5.° Los dos ángulos diedros internos ó esternos de un mismo lado son suplementarios.

En efecto, sean AB y CD (fig. 141) los dos planos paralelos, si estos se hallan cortados por el plano secante EF, formarán los ocho ángulos espresados, y como si en ellos trazamos las dos rectas paralelas RS y TH y la secante respectiva NM en el plano secante EF, tendremos, por el Teorema 40, que es evidente lo arriba espresado, y además sabiendo que á cada ángulo rectilíneo corresponde su diedro respectivo, será fácil reconocer como evidente la verdad de las tésis que afirma el teorema.

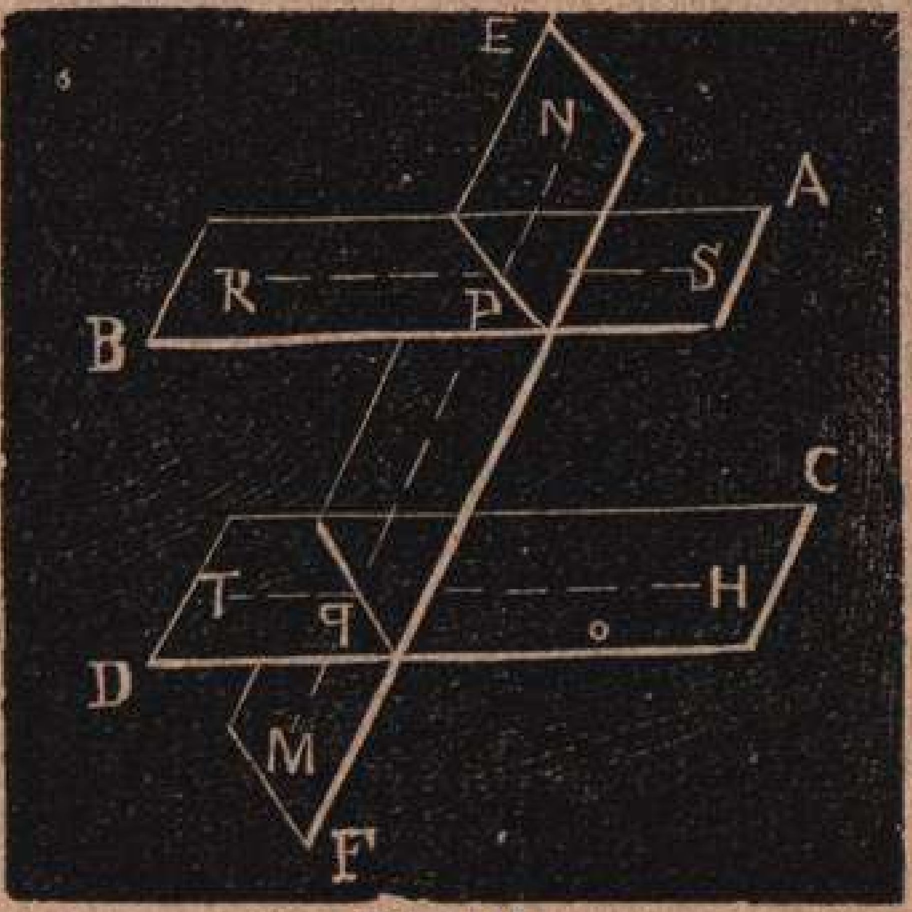


Fig. 141.

De lo espuesto se deduce:

1.° Si dos planos *no son paralelos,* al ser cortados por un tercer plano *secante,* los ángulos *alternos internos,* los *correspondientes* y los *alternos esternos no serán iguales;* los ángulos *alternos* ó *internos del mismo lado* del plano secante *no serán suplementarios.*

2.° *Los ángulos diedros que tienen sus planos respectivamente perpendiculares, serán iguales ó suplementarios,* cuya demostracion se comprueba por los rectilíneos correspondientes, teniendo en cuenta lo espuesto en los Teoremas 43 y 44.

Corolarios: *1.° Dos planos paralelos con un tercer plano, son paralelos entre sí.*

2.° Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano, son rectas paralelas.

221. Teorema. *De todos los ángulos rectilíneos formados por un plano secante, cuando este corta á la arista comun de los dos planos que forman un ángulo diedro, ninguno es mayor que cuando dicho plano secante corta á la arista perpendicularmente.*

Vamos á demostrar (fig. 142) que el ángulo ABa es mayor que cualquier otro tal como el ACa.

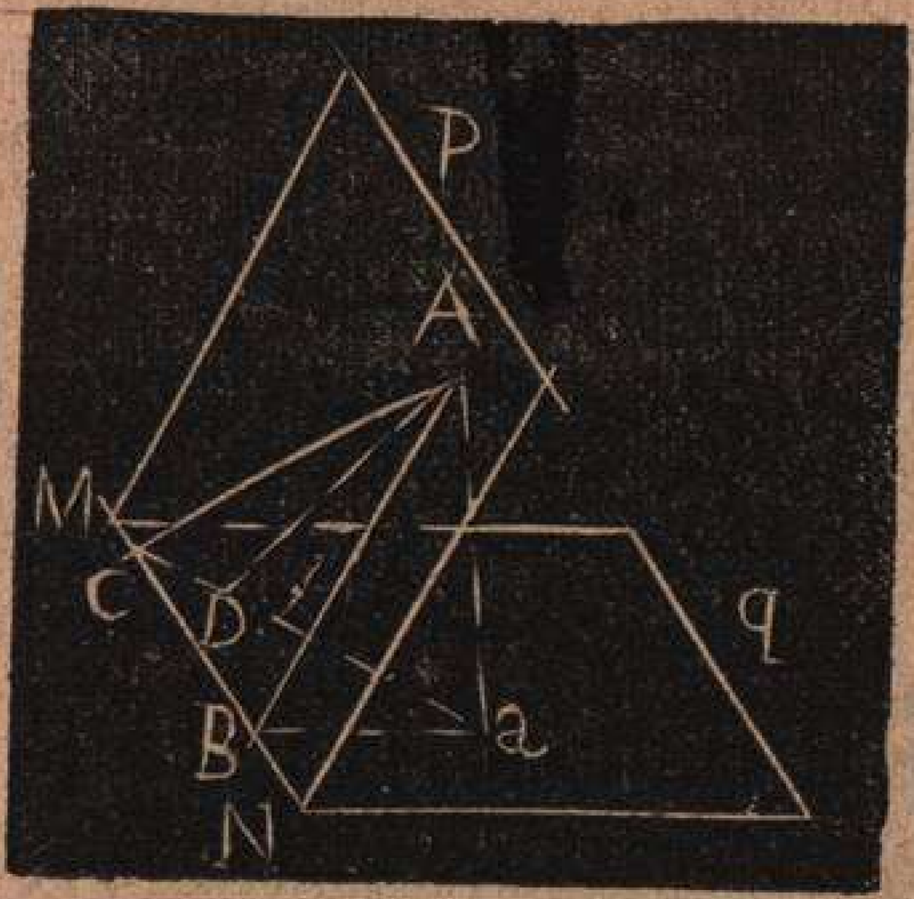


Fig. 142.

En efecto, siendo la recta AB perpendicular á la MN en el punto B, y siéndolo tambien la aB, resultará que $a\text{B}<a\text{C}$; si tomamos $a\text{D}=a\text{B}$ y trazamos la recta AD, resultará tambien que los triángulos rectángulos ABa y ADa serán iguales por tener iguales los dos catetos: por tanto, el ángulo $\text{AB}a=\text{AD}a$, mas este ángulo ADa es equivalente á la suma de

$$\text{ACD}+\text{CAD}$$

(primer corolario del Teorema 84) y por tanto ADa ó su igual ABa será mayor que ACa, que es lo que nos proponiamos demostrar.

Deberemos hacer observar que el ángulo ABa es el rectilíneo correspondiente al diedro PMNQ, pues que está formado por dos perpendiculares trazadas á la arista comun en un punto de la misma, una en cada plano y por tanto, este es de todos los ángulos que un plano secante formaria cortando á su diedro por su arista, el mayor.

222. De todas las diferentes posiciones relativas que pueden tener dos rectas en un plano, nos hemos ocupado en la **Geometria plana** en las teorias de *Rectas oblícuas, perpendiculares y paralelas*; estos nombres que determinan posiciones mútuas y relativas entre varias líneas, no pueden asignarse no existiendo dos al menos.

Nos hemos ocupado de estas mismas posiciones entre varias rectas, ya consideradas en el espacio, ya en varios planos, en la primera parte de la Geometría del espacio:

resta que espongamos lo que se entiende por recta y plano, *Vertical ú Horizontal.*

La direccion que toma un hilo del cual pende un peso cualquiera, se llama *línea de aplomo*, y la recta que sigue esta direccion se llama *vertical*. Toda recta perpendicular á la vertical se llama *horizontal*.

Todo plano que pasa por una recta vertical, se llama *plano vertical*.

Dos rectas horizontales que se cortan, determinan la posicion de un *plano horizontal*.

El plano horizontal de un punto y el vertical del mismo son respectivamente perpendiculares.

Es preciso tener en cuenta que todos los planos verticales no son paralelos, aunque por tales pueden considerarse, si la distancia entre los mismos es pequeña, y en efecto, la línea de aplomo se dirige al centro de la tierra, y por tanto, todas las líneas de aplomo deben encontrarse suficientemente prolongadas en aquel punto. Idénticas consideraciones podemos establecer entre los planos y rectas horizontales.

Angulos Poliedros.

223. Se llama *ángulo poliedro* á la inclinacion de tres ó mas planos que tienen un punto comun llamado *vértice* del ángulo poliedro. A los planos que le forman se les llama *caras*, y á las intersecciones de estas, *aristas*.

Un ángulo poliedro está formado por tres ó mas *ángulos planos*, y estos son cada uno de los que comprende cada cara por dos aristas contíguas.

Se llama *ángulo plano total* correspondiente á un ángulo poliedro, al conjunto de los ángulos planos que le forman.

Un ángulo poliedro se nombra por varias letras, la primera debe ser la del vértice, á la cual siguen despues, una, colocada en cada arista.

Los ángulos poliedros pueden ser *convexos* ó *cóncavos*.

Los ángulos poliedros convexos no pueden ser cortados por una recta mas que en dos puntos.

Los ángulos poliedros *cóncavos*, en mas de dos.

Los ángulos poliedros se llaman *regulares*, cuando los ángulos planos que le forman son iguales, y son irregulares, cuando los ángulos planos que le forman son desiguales.

Un ángulo poliedro no varía de valor por la mayor ó menor longitud de sus aristas, sino por la mayor ó menor abertura ó separacion de estas.

Los ángulos poliedros se llaman *triedros*, *tetraedros*, *pentáedros*, *exáedros*, *etc.* segun que el número de sus caras sea tres, cuatro, cinco, seis, etc.

Se llama *plano diagonal* de un poliedro el determinado por dos aristas no contíguas del mismo.

Dos ángulos poliedros se llaman *suplementarios* cuando los ángulos planos del uno son suplementarios de los ángulos diedros del otro y al contrario. (Debe tenerse en cuenta el teorema 217.)

Todo ángulo poliedro puede descomponerse en tantos triedros como caras tiene, ó en tantos, como caras tiene menos dos.

Empezaremos el estudio de los ángulos poliedros por el mas sencillo de ellos, ó sea por el triedro.

224. Teorema. *En todo ángulo triedro se verifica que un ángulo plano es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de los mismos.*

Vamos á demostrar (fig. 143) que en el ángulo triedro O se verifica que el ángulo plano AOC es menor que AOB+BOC.

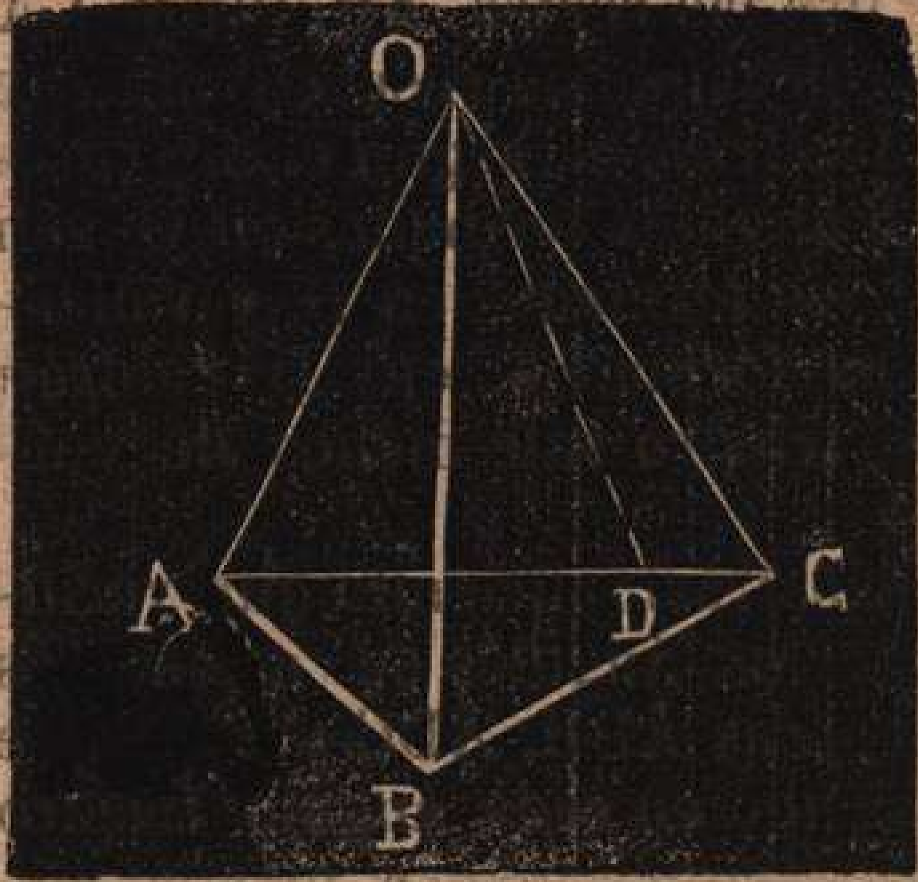


Fig. 143.

En efecto, trácese la recta AC que corte á las aristas OA y OC, y construyendo en la cara mayor AOC un ángulo AOD, igual al AOB, y tomando luego OB igual á OD, trazaremos las rectas AB y BC.

Los dos triángulos AOB y AOD serán iguales, y nos darán que AB=AD, y por tanto AD+DC<AB+BC, (1.er axioma,) de donde DC<BC; luego el ángulo DOC<BOC; si añadimos á ambos miembros AOD=AOB, resultará que AOC<AOB+BOC, lo que afirma la primera parte del teorema.

Ahora bien: si de ambos miembros de la anterior desigualdad, ó de alguna de las otras dos siguientes que pueden establecerse

AOB<AOC+BOC; BOC<AOC+AOB

se resta respectivamente cada una de las tres cantidades BOC, AOC ó AOB, resultará que *cualquier ángulo plano de un triedro es mayor que la diferencia de los otros dos.*

Corolario. *En todo ángulo triedro, á mayor ángulo diedro se opone mayor cara.*

225. Teorema. *En todo ángulo triedro se verifica que la suma de los tres ángulos planos que le forman es menor que cuatro ángulos rectos.*

En efecto, sea D (fig. 144) el ángulo triedro, y vamos á demostrar que la suma de los ángulos planos

ADB+BDC+CDA<4 rectos

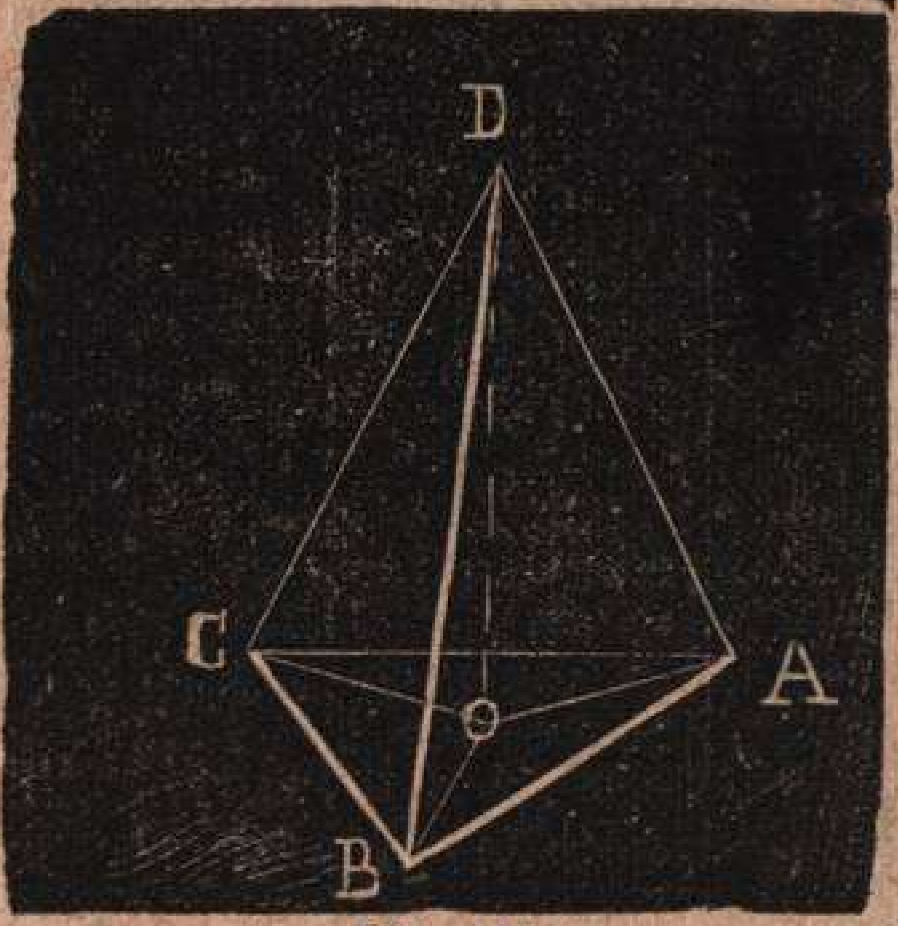


Fig. 144.

Cortemos las tres aristas del ángulo triedro por un plano ABC, y desde un punto interior O trácense las líneas OA, OB y OC, y habremos formado los triángulos

ABO, ACO y BCO.

Si hacemos girar los triángulos AOB, BOC y COA sobre las rectas AB, BC y CA colocándolos respectivamente sobre los ADB, BDC y CDA, tendremos, segun el 5.° corolario del teorema 84, que los 3 ángulos formados en O son respectivamente mayores que los formados en D, y valiendo aquellos juntos 4 Rectos, los formados en D valdrán menos, y por tanto todo ángulo triedro vale menos de cuatro rectos.

* Tambien podremos demostrarlo diciendo que verificándose ser la suma de todos los ángulos de estos tres triángulos igual al de las tres caras ADB, ADC y BDC que forman el ángulo triedro; y siendo en cada ángulo triedro A, B y C, la suma de dos ángulos planos mayor que el tercero, resultará que la suma de los formados en las bases de las caras laterales, será mayor que la suma de los ángulos del triángulo ABC; y por tanto, la suma de los formados en D será menor que la de los formados en O, y valiendo estos cuatro rectos, aquellos valdrán necesariamente menos, que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

El teorema expuesto no es esclusivo como el anterior á los ángulos triedros, sino que por un razonamiento análogo es aplicable á toda clase de ángulos poliedros convexos.

226. Teorema. *En todo ángulo triedro se verifica que la suma de sus tres ángulos diedros, formados uno en cada una de sus tres aristas, es mayor que dos rectos y menor que seis rectos.*

En efecto, sea O (fig. 145) un ángulo triedro; si desde un punto interiór o trazamos tres perpendiculares, una á cada uno de los tres planos que forman el ángulo triedro O, segun el Teorema 217, tendremos: llamando A, B y C á los tres ángulos diedros formados en sus tres aristas respectivas, y a, b y c á los ángulos planos formados en o, que:

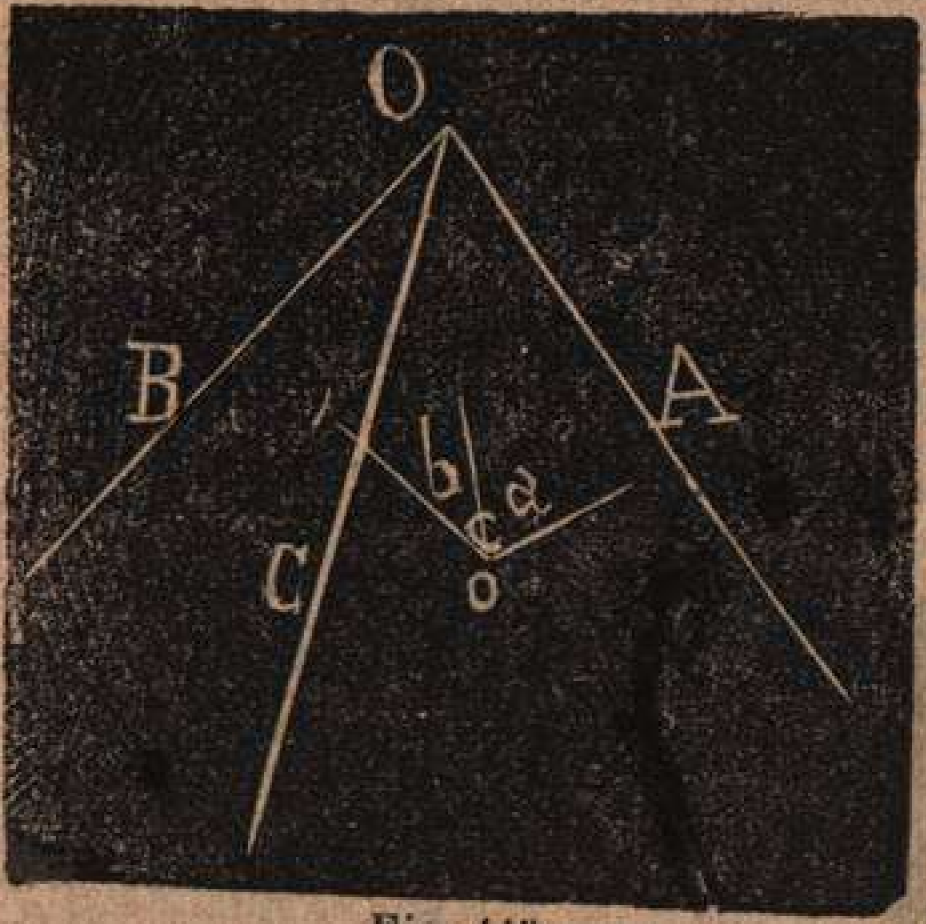


Fig. 145.

$$A+a=2R.$$
$$B+b=2R.$$
$$C+c=2R,$$

de donde sumándolas miembro á miembro resultará que $A+B+C+a+b+c=6R$, restando ahora de ambos miembros $a+b+c$, que como sabemos valen *menos* de 4 rectos, resultará $A+B+C$ mayor que dos rectos, pero menor de seis rectos.

Corolario. Un ángulo triedro puede tener uno, dos ó tres ángulos diedros agudos, rectos ú obtusos y todas las combinaciones que quieran establecerse.

227. Teorema. *Todo ángulo triedro tiene otro triedro suplementario.* En efecto, los dos triedros O y o de la figura anterior son sup'ementarios, porque las tres aristas que forman el triedro en o son respectivamente perpendiculares á cada uno de los tres planos que forman el triedro en O, y por tanto lo serán á cada una de las dos aristas que lo determinan, recíprocamente resultará que cada una de las tres aristas que forman el ángulo triedro en O, será respectivamente perpendicular al plano que determinan cada una de las dos perpendiculares del triedro en o. Y siendo siempre posible desde un punto interior de un ángulo triedro, trazar tres perpendiculares, una á cada uno de los tres planos que forman un ángulo triedro, los planos que determinen aquellas formarán un ángulo triedro *suplementario* al dado.

Diremos, por último, *que dos triedros son suplementarios cuando los ángulos rectilíneos de cada uno, son respectivamente suplementarios de los diedros del otro.*

228. **Teorema**. *Dos ángulos triedros son iguales: 1.° Si tienen sus tres caras ó ángulos rectilíneos respectivamente iguales. 2.° Si tienen dos caras iguales é igual el ángulo diedro comprendido. 3.° Si tienen una cara igual, contigua á dos diedros respectivamente iguales. 4.° Si tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales. En todos estos casos se debe suponer que los elementos dichos, se hallen dispuestos de la misma manera.*

1.er caso. Sean O y O' (fig. 146) los dos triedros en los que se supone que

AOB=A'O'B', BOC=B'O'C', AOC=A'O'C'.

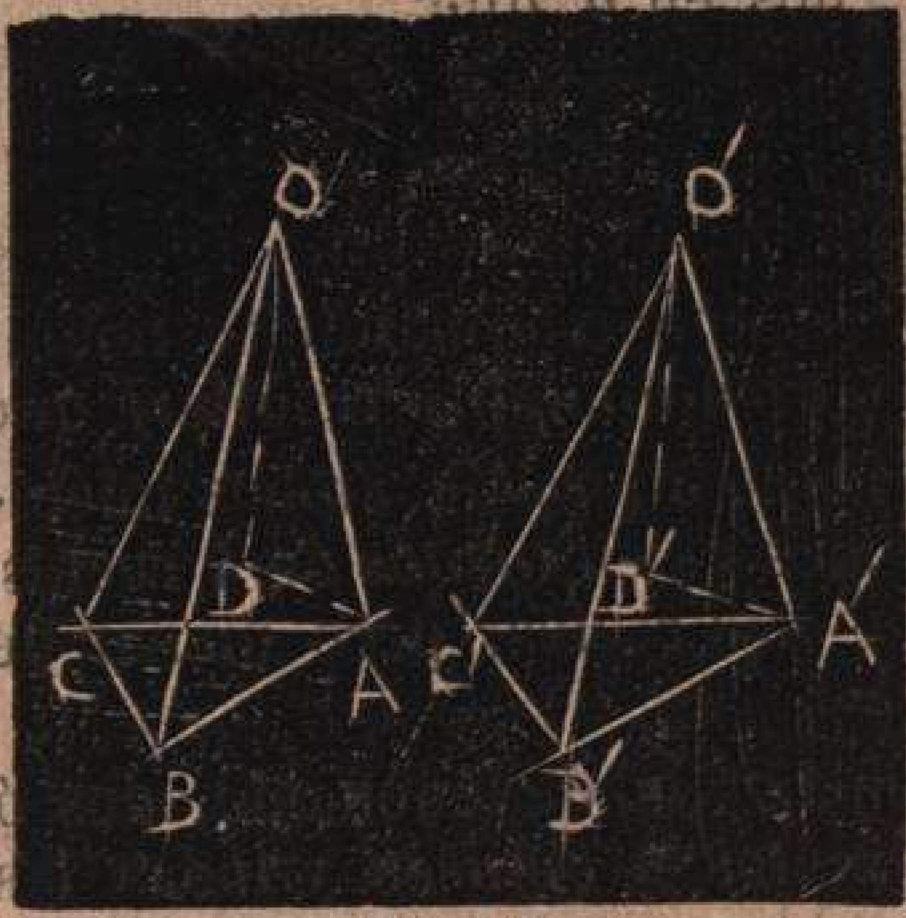


Fig. 146.

Si tomamos las aristas OA, OB y OC respectivamente iguales á O'A', O'B' y O'C', trazaremos los triángulos ABC y A'B'C', bajando las perpendiculares OD y O'D' sobre los planos de estos triángulos uniremos los puntos D y D' con A y A'.

Ahora bien, en los triángulos AOB y A'O'B' se tiene que AO y OB iguales respectivamente á O'A' y O'B' y el ángulo AOB=A'O'B', y por tanto, estos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, serán iguales, luego AB=A'B', y por la misma razon BC=B'C' y AC=A'C', por tanto, los triángulos ABC y A'B'C' serán iguales.

Los piés D y D' de las perpendiculares OD y O'D' serán los centros de las circunferencias circunscriptas á dichos triángulos (2.° corolario del teorema 196) los rádios AD y A'D' serán iguales, y por tanto, los triángulos rectángulos AOD y A'O'D' serán tambien iguales, siendo OD=O'D'.

Si, por último, superponemos el triedro O al O' de modo que los triángulos ABC y A'B'C' coincidan, el punto D coincidirá con el D' y DO con D'O' y las aristas OA, OB y OC coincirán con las O'A', O'B' y O'C', y por tanto, si los triedros coinciden serán iguales.

2.° caso. Si suponemos ahora que los dos triedros anteriores O y O' tengan iguales las dos caras AOB=A'O'B' y AOC=A'O'C', siendo tambien igual el ángulo diedro formado en la arista AO al formado en la A'O'; superponiendo el triedro O al O' de modo que coincidan las aristas AO y A'O' y las caras AOB y AOC con las A'O'B' y A'O'C', resultará que tambien coincidirán las aristas BO y CO con las B'O' y C'O', y la otra cara BOC coincidirá con la B'O'C'; por la igualdad de los ángulos rectilíneos de las dos caras iguales: y por tanto, si los triedros coinciden son tambien iguales.

3.^{er} caso. Si suponemos ahora que los dos triedros O y O' tienen iguales la cara AOC y la A'O'C', siéndolo tambien los diedros OA y OC del triedro O á los diedros O'A' y O'C' del triedro O', resultará que superponiendo el triedro O al O', haciendo que coincidan las caras AOC y A'O'C', y por tanto tambien los diedros OA y O'A', OC y O'C', resultará forzosamente que las caras BOC y B'O'C', AOB y A'O'B' coincidirán tambien lo mismo que los ángulos diedros OB y O'B' que estos forman; luego por tanto los dos triedros serán tambien iguales.

4.° caso. Si los triedros O y O' tienen sus diedros respectivamente iguales, formando los triedros suplementarios respectivos, tendrán estos precisamente iguales sus rectilíneos correspondientes (segun los teoremas 217 y 227;) y por tanto serán iguales segun el primer caso; luego los ángulos rectilíneos de los triedros O y O' son iguales, y por fin, estos triedros tambien lo serán.

229. Teorema. *Dos triedros* OABC y OA'B'C' (figura 147) *que tienen sus aristas en prolongaciones opuestas, son desiguales generalmente.*

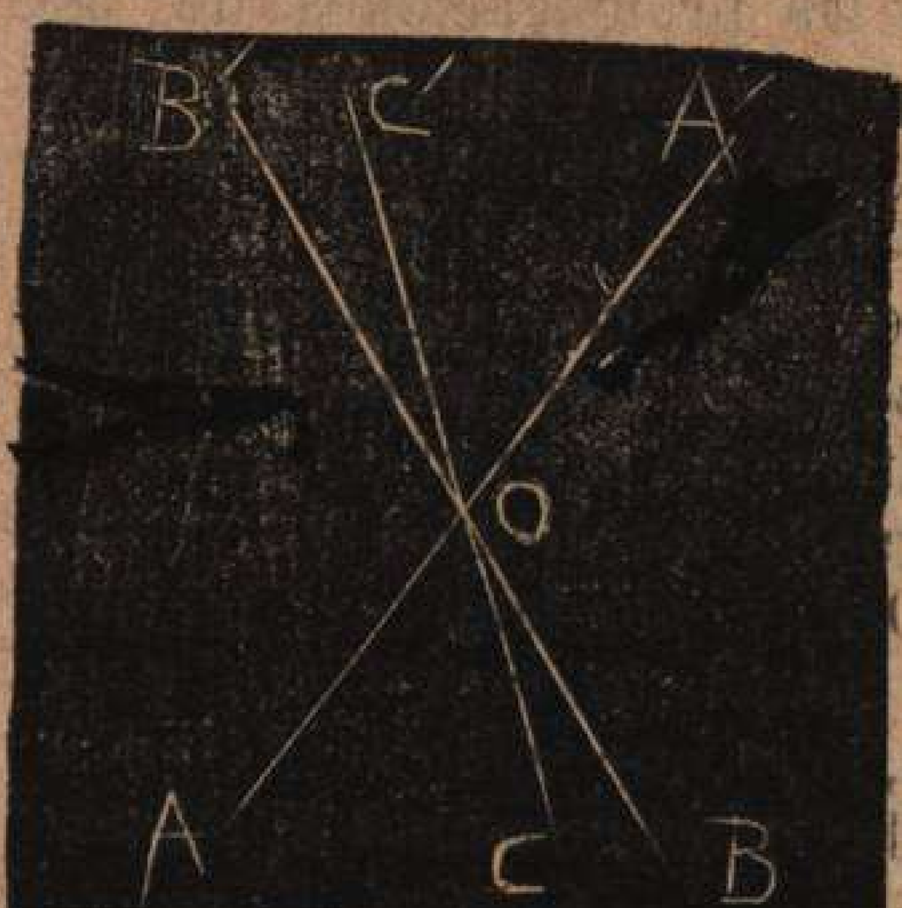


Fig. 147.

En efecto, para reconocer su igualdad ó desigualdad, intentemos verificar la superposicion si es posible, y observemos que las diferentes maneras, como pueden hacerse coincidir dos caras iguales cualesquiera, como AOB y A'OB', son haciendo que caiga OB sobre OB' y OA sobre OA', ó bien cayendo OA sobre OB y OA' sobre OB', conservando los demás elementos sus posiciones relativas.

En el *primer caso*, si el triedro OA'B'C' gira al rededor de su eje perpendicular al plano AOB en el punto O, las aristas OA' y OB' conservarán la misma posicion relativa en el plano que las contiene, y se colocarán respectivamente sobre OA y OB; mas la arista OC' quedará siempre á distinto lado del plano AOB, relativamente á la arista OC. Luego por tanto el triedro OA'B'C' en tal posicion, no puede coincidir con el OABC.

En el *segundo caso*, si el triedro OA'B'C' gira por completo al rededor de la bisectriz del ángulo AOB', la arista OA' se adaptará sobre OB y la arista OB' sobre OA; además tenemos que la arista OC' quedará precisamente al mismo lado del plano AOB que la arista OC; y siendo desiguales en general los diedros OA' y OB, tendremos que la cara C'OA' no coincidirá con la COB; y por tanto el triedro OA'B'C' en esta otra posicion no coincidirá con el OABC.

Por último, no verificándose la coincidencia de los dos triedros dados, en ninguna de las dos posiciones en que es posible superponerlos, resultará que los mismos son desiguales.

Los triedros anteriores se llaman *simétricos*, y en general podemos decir: cuando dos triedros tienen sus elementos respectivos iguales, pero de diferente modo colocados los triedros son simétricos, pero la coincidencia no puede verificarse: en efecto, en los dos triedros dados OABC y OA'B'C' los ángulos planos de cada una de las caras del primero son respectivamente iguales á los del segundo, puesto que siendo unas aristas las prolongaciones de las otras, aquellos ángulos serán iguales por opuestos al vértice, mas como la colocacion de sus elementos es inversa, la coincidencia no puede verificarse.

De lo espuesto se deducen los corolarios siguientes: 1.° *Dos triedros simétricos son iguales, si cada uno tiene dos diedros iguales*, porque evidentemente si en el 2.° caso de los anteriores, resultarán ser iguales los diedros OA y OB, tambien lo serian el OA' y OB', y por tanto, el triedro OA'B'C' en su nueva posicion, tendria la cara C'OA' y la COA iguales por superposicion, lo mismo como las C'OB' y COB, coincidiendo por lo tanto los demás elementes, los dos ángulos triedros serian iguales.

2.° Si de los ángulos triedros pasamos á los poliedros de de mayor número de caras, resultará que *dos ángulos poliedros que tengan sus aristas en prolongaciones opuestas, serán simétricos*; en efecto, todos sus elementos serán respectivamente iguales, pero se hallarán en órden inverso; no coincidirán, pero serán simétricos, y si trazamos planos diagonales por una misma arista, quedarán ambos poliedros descompuestos en igual número de triedros simétricos respectivamente dos á dos.

3.° *Un ángulo triedro se podrá resolver en los casos siguientes:*

Dadas sus tres caras, determinar sus tres diedros.

Dadas dos caras y el diedro comprendido, determinar la otra cara y los dos diedros contíguos.

Dadas dos caras y el diedro opuesto á una de ellas, discusion correspondiente á este caso en que puede haber dos triedros, uno solo ó ninguno, formados ó no con los datos que se facilitan, y en los que nos proponemos determinar otra cara, su ángulo diedro opuesto y el opuesto á la otra de las dos caras dadas, que es desconocido.

Dados una cara y los dos ángulos diedros contíguos, determinar las otras dos caras y el diedro que forman.

Dados sus tres ángulos diedros, determinar sus tres caras.

Dados dos diedros y la cara opuesta á uno de ellos, determinar las otras dos caras y el tercer ángulo diedro: discusion correspondiente á este caso en el que puede haber dos triedros, uno solo ó ninguno, que tenga los datos que se facilitan.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL PRIMER LIBRO

DE LA PRIMERA PARTE DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO.

I. Por un punto dado en un plano ó fuera de él, determinar cuántos planos pueden trazarse al primero, que sean perpendiculares, oblícuos ó paralelos.

II. Si dos rectas no están situadas en un mismo plano, ¿lo estarán en planos paralelos?

III. Trazar por un punto dado en un plano una recta perpendicular á otro, dada en el espacio.

IV. Dados un plano y dos puntos en el espacio á uno de los dos lados del plano, determinar un punto en el plano tal, que la suma de las distancias á los dos puntos dados sea un mínimo.

V. Dados un plano y dos puntos en el espacio á distinto lado de dicho plano, marcar en el plano un punto tal, que la diferencia de sus distancias á los dos puntos dados sea un máximo.

VI. Dados dos puntos en el espacio y una recta cualquiera, hallar un punto en la misma que equidiste de los dos puntos dados.

VII. Dados tres puntos en el espacio y un plano, hallar un punto de este que equidiste de aquellos.

VIII. Por una recta perpendicular, oblícua ó paralela á un plano, cuántos planos se pueden trazar que sean perpendiculares al primero.

IX. Demostrar la equidistancia de los estremos de la diagonal de un paralelógramo á un plano que pasa por la otra diagonal.

X. Demostrar que si las proyecciones de una línea sobre cada uno de dos planos que se corten son líneas rectas, la línea proyectada es tambien recta.

XI. Demostrar que los planos bisectores de los tres ángulos diedros de un triedro se cortan en una misma recta.

XII. Demostrar que los planos perpendiculares á las caras de un triedro trazados por las aristas opuestas, so cortan en una misma línea recta.

LIBRO SEGUNDO.

SUPERFICIES CURVAS DE REVOLUCION.

Preliminares.

230. Entendemos por *superficies curvas de revolucion* aquellas que podemos considerar originadas por las sucesivas posiciones de una línea llamada *generatriz*, la cual, cambiando de posicion en el espacio á consecuencia de un movimiento adquirido, se halla sujeta á una ley determinada.

Toda superficie curva de revolucion la podemos considerar como el lugar geométrico de todas las posiciones sucesivas de su línea generatriz.

Las superficies de revolucion son en número indefinido si tenemos en cuenta la diversidad de sus líneas generatrices, en las cuales puede ser distinta su *figura y magnitud.*

De todas las superficies de revolucion nos ocupamos únicamente en la Geometría elemental de las llamadas *regladas,* por ser una línea recta la generatriz, y por poderse aplicar una regla en la direccion de dicha generatriz rectilínea que pasa por cada uno de sus puntos.

Si nos fijamos en la generacion de las superficies regladas, observaremos que conforme á la ley de movimiento de una recta generadora podrá suceder que dos posiciones consecutivas de la misma generatriz se cruzen ó se puedan hallar situadas, estando muy próximas en un mismo plano. En el primer caso, los elementos de dicha superficie no pueden de modo alguno desarrollarse sobre un plano, y por esta razon son llamadas superficies *alaveadas*; en el segundo podemos considerar la superficie curva como compuesta de elementos planos estraordinariamente pequeños, de tal manera que cada uno de ellos pueda adaptarse al plano de cualquiera de sus dos inmediatas; y por tanto dicha clase de superficies podrán siempre adaptarse á un plano, siendo por esta razon conocidas por el nombre de superficies *desarrollables.*

Las superficies regladas pueden ser de dos especies, bien se conserve paralela á sí misma en todas sus posiciones la generatriz, en cuyo caso dá esta orígen á las *superficies cilíndricas* de revolucion: ó bien sean convergentes estas posiciones sucesivas de la recta generadora, en cuyo caso origina las *superficies cónicas de revolucion*; en estas debemos hacer observar que el punto de encuentro de todas las generatrices, se llama *vértice* ó *cúspide* de la superficie cónica, y como la generatriz de una superficie curva de revolucion la debemos considerar prolongada indefinidamente, resultará que la superficie cónica de revolucion la debemos de representar compuesta de dos hojas simétricas y opuestas y unidas por su vértice.

Si consideramos la superficie que una recta, sujeta por un estremo genera, recorriendo con el otro una circunferencia, observaremos es la cónica de revolucion; esta será un plano circular, en el caso particular, de tener la circunferencia que describe su estremo por rádio la longitud total de dicha generatriz.

Si consideramos la superficie que una recta genera, cuando conservándose paralela á sí misma describe cada uno de sus estremos una circunferencia, será esta *cilíndrica de revolucion*, y si consideramos que dicha circunferencia que ambos estremos describen tenga un rádio infinito, la superficie descrita será plana.

La superficie cilíndrica tambien puede ser considerada como un caso particular de la cónica en que el vértice de aquella se halle infinitamente alejado de su directriz.

Dos rectas angulares, una fija y otra móvil describiendo cada uno de todos los puntos de esta, circunferencias de diferente rádio en su movimiento de rotacion al rededor de aquella, origina una superficie *cónica* de revolucion: la recta fija se llamará *eje*, la móvil *generatriz.*

Dos rectas paralelas una fija y otra móvil describiendo cada uno de todos los puntos de esta una circunferencia de igual rádio, origina una superficie *cilíndrica* de revolucion; la recta fija es el *eje*; la móvil es la *generatriz.*

De las anteriores consideraciones resultará que todo plano secante que corte al eje perpendicularmente, cortará á las superficies cónicas ó cilíndricas, siendo sus intersecciones circunferencias de círculo.

Llamamos planos *meridianos* de las superficies de revolucion, aquellos que pasen por el eje en toda la longitud de este, y desde luego se comprende por las consideraciones anteriores que dichos planos meridianos serán todos iguales.

Las superficies de revolucion, de las que únicamente se ocupa la Geometría elemental, son además de la *cónica, y cilíndrica* la *esférica.*

Si la generatriz es una recta que corta al eje, producirá una superficie cónica.

Si la generatriz es una recta paralela al eje, producirá una superficie cilíndrica.

Si la generatriz es una semi-circunferencia que gira al rededor de su diámetro ó eje, resultará una superficie esférica.

Las superficies cónicas y las cilíndricas colocadas sobre un plano, tienen con él una *línea de contacto ó de tangencia.* La superficie esférica sobre un plano solo tiene un punto de tangencia ó de contacto.

Cuando dos superficies de revolucion son secantes y la interseccion comun de ambas puede hallarse sobre una superficie plana, se llama aquella interseccion, *seccion plana*; y cuando dicha interseccion comun no tiene todos sus puntos en un plano, se llama *curva de doble curvatura,* por participar de la de entrambas superficies, cual servirá de ejemplo la hélice ó sea el borde curvo de un tornillo. Algunas veces es posible que la interseccion de dos superficies curvas de revolucion sean líneas rectas, como sucede por ejemplo entre dos cilíndricas secantes siendo sus ejes paralelos.

Se llama *plano tangente* de una superficie curva en un punto de la misma, el que es perpendicular á la recta *normal* correspondiente á referido punto.

Se llama recta *normal* de una superficie curva en un punto de la misma, la que es perpendicular en referido punto á cada una de las rectas tangentes que pueden trazarse en el mismo, á las secciones planas producidas de seccionar la superficie por un plano secante que corte á la misma pasando por dicho punto.

El plano tangente de una superficie de revolucion en un punto de la misma, es el lugar geométrico de todas las rectas tangentes que pueden trazarse á la superficie en dicho punto.

Para determinar el plano tangente correspondiente á *un punto de una superficie curva dada, bastará determinar dos tangentes á dicho punto correspondientes en el mismo á dos secciones planas que se tracen por planos secantes á dicha superficie.*

Superficies cónicas de revolucion.

231. La superficie cónica de revolucion está engendrada por una recta (Generatriz) que gira al rededor de otra fija (Eje), con la cual tiene un punto comun. Puede definirse tambien diciendo que se halla originada por una recta sujeta á pasar siempre por un punto fijo llamado *vértice*, y recorriendo una curva plana que se llama Directriz.

La superficie cónica de revolucion puede ser *recta* ú *oblícua*, lo primero cuando el eje es perpendicular al plano de la disectriz, y lo segundo cuando es oblícuo.

El cuerpo limitado por una de las dos hojas de la superficie cónica es uno de los cuerpos llamados redondos que se conoce con el nombre de Cono.

El cono puede ser *circular ó elíptico* segun sea el plano de su base: siendo perpendicular al eje es un círculo ó una elipse.

El cono puede ser *recto ú oblícuo*, segun que el eje sea ó no perpendicular al plano de la base.

El cono puede ser *equiláctero ó no*, segun que siendo recto las longitudes de sus generatrices sean iguales ó no al diámetro del círculo de su base.

El cono puede ser *completo ó truncado*, segun que esté limitado por una hoja de superficie cónica y un solo plano, ó que sea el espacio comprendido entre una superficie cónica y dos planos paralelos ú oblícuos.

Altura de un cono es la perpendicular trazada desde su cúspide al plano de su base.

Se llama *seccion recta* de toda superficie cónica á la interseccion de la misma con todo plano secante perpendicular al eje.

232. **Teorema.** *Si se corta una superficie cónica de revolucion por un plano secante perpendicular al eje, la interseccion de la misma es una circunferencia de círculo cuyo centro está en el eje.*

En efecto, siendo el plano secante perpendicular al eje, este habrá tambien sido cortado en un punto, y si le unimos con otros varios de los en que el plano secante haya cortado á la superficie curva; esta recta de union, la parte del eje comprendido entre el vértice y el plano secante, y la porcion de generatriz comprendida, formarán en cada uno de dichos puntos un triángulo rectángulo, los cuales serán iguales por tener todos un cateto comun, que es el segmento del eje constante en todos y el ángulo agudo formado por este y la generatriz; luego los otros catetos son todos iguales, sus estremos equidistan, y como uno es fijo que es el estremo del eje, resultará ser el centro de una circunferencia y ser esta la interseccion del plano secante y la superficie cónica de revolucion.

Corolarios: 1.° *Una superficie cónica de revolucion estará determinada, conociendo el ángulo agudo formado por el eje y la generatriz.*

2.° *Dos superficies cónicas de revolucion cuyos ángulos agudos formados por el eje y la generatriz sean iguales, serán superponibles: podrán coincidir y serán iguales, puesto que todas las circunferencias directrices equidistantes de sus vértices serán iguales.*

3.° *En las superficies cónicas de revolucion se verifica que las secciones planas perpendiculares al eje son circunferencias proporcionales á las distancias de sus planos á la cúspide.*

En efecto, si consideramos los dos triángulos rectángulos que resultan formados por el eje, la generatriz y el rádio de cada una de las dos secciones observaremos que son semejantes; luego los rádios de las secciones son directamente proporcionales á las distancias de sus planos á la cúspide; y por tanto, si en la proporcion que se forme multiplicamos por 2π los rádios, resultará demostrada la proposicion anterior.

4.° *Todo plano secante que corte á la superficie cónica de revolucion pasando por el vértice, pasa tambien por dos generatrices.*

En efecto, si dicho plano secante pasa por el vértice, podrá suceder que pase solo por el mismo; que sea tangente á las dos hojas de superficie cónica, y por último, que corte á dichas superficies; en este último caso cortará tambien á cada una de las secciones planas perpendiculares al eje en *dos* puntos, puesto que no son planos que coinciden; ahora bien: si unimos cada uno de referidos puntos con el vértice, trazaremos dos rectas que corresponden á la vez á la superficie cónica de revolucion como generatrices de la misma, y al plano secante que secciona á aquella, luego la proposicion anterior es cierta cuando el ángulo formado por el plano secante con el eje es menor que el ángulo cónico formado por el eje y una generatriz: el plano será tangente á dicha superficie cuando el ángulo formado por el mismo y el eje sea igual al ángulo cónico; y por último, si este es menor que aquel no tendrán mas punto comun la superficie cónica de revolucion y el plano secante que el vértice de aquella.

El conocimiento del precedente corolario nos permite resolver los dos *problemas* siguientes:

1.° *Por un punto dado de una superficie cónica de revolucion, trazar á la misma un plano tangente.*

Para esto se traza la generatriz correspondiente á dicho punto; por el mismo se hace pasar un plano secante perpendicular al eje para obtener la seccion plana correspondiente, y trazando por dicho punto una recta tangente á referida seccion, la espresada tangente y la generatriz respectiva que pasan por dicho punto determinan el plano tangente á la superficie cónica en el punto dado.

2.° *Dado un punto esterior á una superficie cónica de revolucion, trazar por el mismo un plano tangente á referida superficie.*

Para esto, se traza por el punto dado un plano secante que sea perpendicular al eje, el cual cortará á la superficie cónica de revolucion en una circunferencia de círculo; si en este plano trazamos desde el punto dado dos rectas tangentes á dicha circunferencia y trazamos luego las dos generatrices en la superficie cónica de revolucion una á cada uno de dichos puntos de tangencia, cada una de ellas y cada recta tangente de las trazadas á la seccion desde el punto dado, determinarán un plano tangente á la superficie cónica que pasa por el punto dado. Como se vé, este problema tiene *dos soluciones.*

La interseccion de un plano secante oblícuo al eje y que corte á todas sus generatrices, forma con la superficie cónica de revolucion una curva llamada *Elipse* (1).

La interseccion de un plano secante paralelo á una generatriz de la superficie cónica de revolucion, es una curva abierta que se llama *Parábola* (2).

---

(1) Se llama ELIPSE á una línea curva plana y cerrada, en la cual se verifica que la suma de los rádios vectores de un punto cualquiera de la misma y que van desde dicho punto á los dos focos, es igual al eje mayor de dicha curva.

(2) Se llama PARÁBOLA una línea curva plana y abierta tal, que todo punto de la misma equidista del foco y de la disectríz.

La interseccion de un plano secante paralelo al eje de una superficie cónica de revolucion y esta, es una *Hipérbola* (1), y las proyecciones de sus dos generatrices opuestas sobre dicho plano son las *Asíntotas* (2).

De cuyas secciones cónicas no podemos ocuparnos en la Geometría elemental (3).

En la (fig. 148) representamos cuatro superficies cóni-

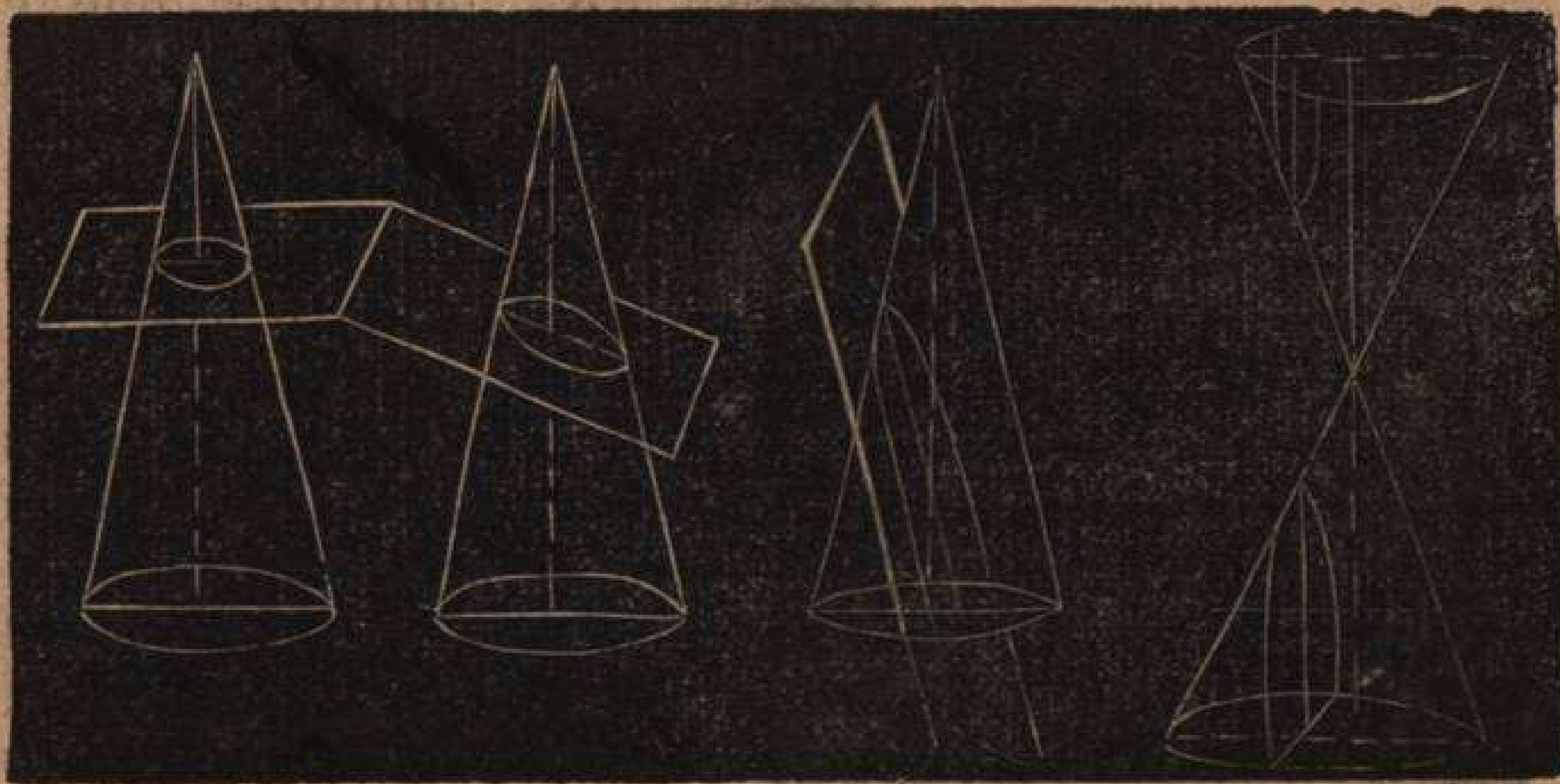


Fig. 148.

cas de revolucion, la primera cortada por un plano secante perpendicular al eje; produce su interseccion una *circunferencia de círculo.*

La segunda cortada por un plano secante oblícuo al eje y que corta á todas las generatrices, produce su interseccion una *elipse.*

La tercera cortada por un plano secante paralelo á una de sus generatrices, y por tanto, no cortando á todas estas, produce su interseccion una *parábola.*

La cuarta, cortada por un plano secante paralelo al eje de la misma, no corta tampoco á todas sus generatrices y su interseccion con cada hoja de la superficie cónica, forma cada una de las dos ramas de la curva llamada *hipérbola.*

233. Teorema. *Las superficies cónicas son desarrollables sobre un plano.* Distinguiremos dos casos.

(1) Se llama HIPÉRBOLA á una curva compuesta de dos ramas, en la cual se verifica que la diferencia de los rádios vectores tirados á un punto cualquiera de la misma, es igual al eje primero.

(2) ASÍNTOTA de una curva que tiene una ó mas ramas infinitas, es la recta que puede acercarse indefinidamente á cualquiera de dichas ramas infinitas sin llegar nunca á alcanzarla.

(3) El estudio algebráico de las secciones cónicas es uno de los mas importantes de la GEOMETRÍA ANALÍTICA.

1.° Que dicha superficie cónica de revolucion sea la que limite un cono recto y circular.

2.° Que dicha superficie cónica no sea la que limite un cono recto ni circular.

1.° Sea O (1.ª fig. 149) el cono recto y circular; tomando el lado OA del cono como rádio y describiendo el arco AB de una longitud igual á la de la circunferencia AM de su base, tendremos que el sector circular OAB será la superficie cónica desarrollada.

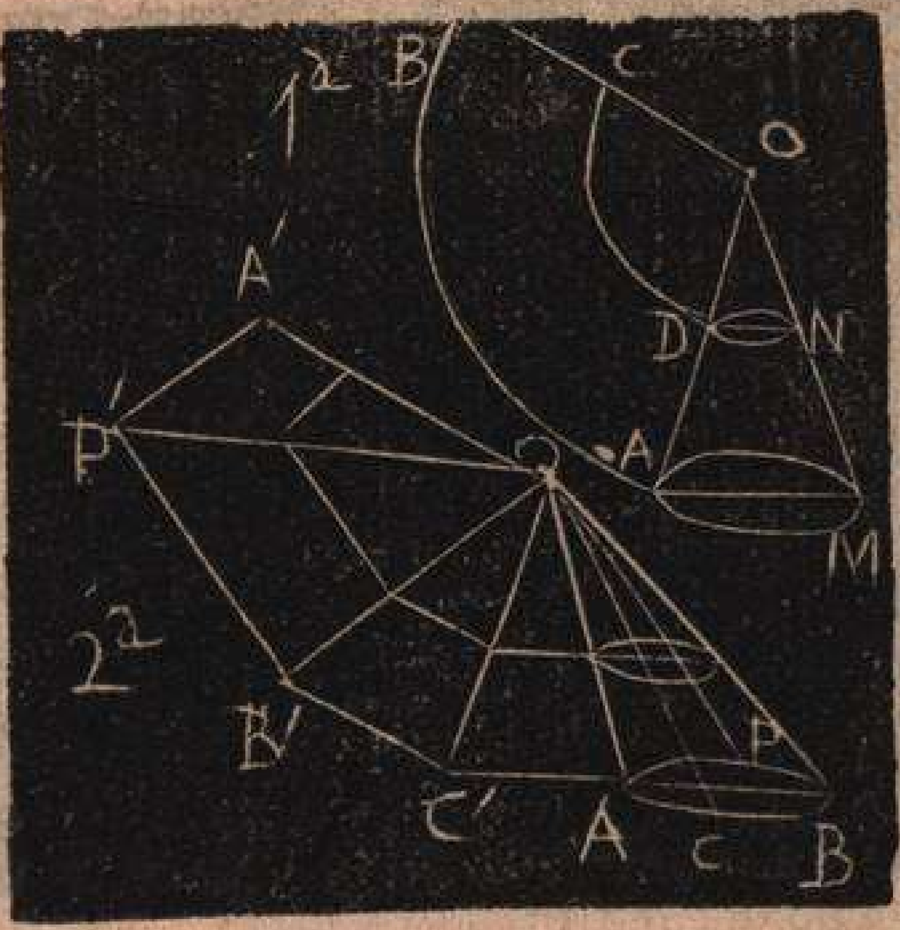


Fig. 149.

En efecto, señalando en el cono la generatriz OA y sugetando el vértice O de manera que ocupe siempre la misma posicion, y haciendo rodar el cono hasta que dicho cono y el plano vuelvan á ser tangentes en la generatriz OA, llegará á ocupar la posicion OB, y tendremos como evidente que la superficie cónica AOM es igual al sector circular AOB.

De lo espuesto comprenderemos que la superficie circular que limita al cono deficiente OND, se desarrollará en el sector circular ODC.

La superficie curva del cono truncado DNMA se desarrollará en el trapecio circular DABC.

2.° Sea O (2.ª fig. 149) un cono cualquiera oblícuo y no circular; si dividimos la directriz ACBP en un número de partes que podamos tomar cada una como rectas sin error sensible, tales como AC, CB, BP, PA, construiremos sobre su plano los triángulos AOC', C'OB', B'OP', P'OA' iguales respectivamente á los AOC, COB, BOP, POA considerados como rectilíneos, y desde luego tendremos que el polígono OAC'B'P'A', será muy aproximadamente, la superficie plana en que se desarrolla la cónica propuesta.

Si propusiésemos un trozo de cono, para desarrollar sobre un plano su superficie curva, lo hariamos por un procedimiento análogo mediante cierto número de trapecios, como se observa en la misma figura.

Superficies cilíndricas de revolucion.

234. La superficie cilíndrica de revolucion está engendrada por una recta (Generatriz) que gira al rededor de otra fija (Eje), siendo siempre paralelas entre sí.

La superficie cilíndrica de revolucion puede ser *recta* ú *oblícua*, lo primero cuando el eje es perpendicular al plano de la directriz y lo segundo cuando sucede lo contrario.

El cuerpo limitado por la superficie cilíndrica de revolucion y dos planos cualesquiera, es otro de los cuerpos redondos que se llama **cilindro.**

Bases de un cilindro son los planos que limitan la superficie curva.

Si la directriz de una superficie cilíndrica es una circunferencia, el cilindro se llama *circular.*

Si la directriz de la superficie cilíndrica es una elipse, dicha superficie limitará á un cilindro *elíptico.*

Lado de un cilindro es la longitud de una generatriz comprendida entre ambas bases.

Eje es la recta que une los centros de ambas bases.

Altura de un cilindro es la distancia comprendida entre ambas bases.

Si un cilindro es recto, la altura es igual al eje ó á cualquiera de sus lados.

Si un cilindro es oblícuo, la altura es menor que el eje ó que cualquiera de sus lados.

Un cilindro se llama *equiláctero ó no* cnando siendo recto, la longitud de cualquiera de sus lados, es igual ó nó al diámetro del plano circular de cualquiera de sus dos bases.

Se llama *seccion recta* de una superficie cilíndrica, á la interseccion de la misma con todo plano secante que sea perpendicular al eje.

235. Teorema. *En toda superficie cilíndrica de revolucion se verifica que: si se corta por un plano secante perpendicular al eje, la interseccion es una circunferencia de círculo cuyo centro está en el eje.*

En efecto, sea ABC (1.ª fig. 150) la seccion recta de la superficie cilíndrica, perpendicular al eje en el punto O del mismo: si unimos dichos puntos con otros cualesquiera de la interseccion, tales como el A, B, C, etc., las rectas OA, OB, OC., etc., serán perpendiculares al eje por hallarse en un plano perpendicular al mismo; y como las generatrices de toda superficie cilíndrica son paralelas al eje, tambien dichas rectas AO,BO,CO etc., serán perpendiculares á las mismas NN' etc.; mas como todas las posiciones de la generatriz son equidistantes al eje, resultará que dichas rectas OA, OB, OC etc., son iguales; luego el punto O es equidistante de A, B, C, etc.; y por tanto la curva ABC será una circunferencia de círculo.

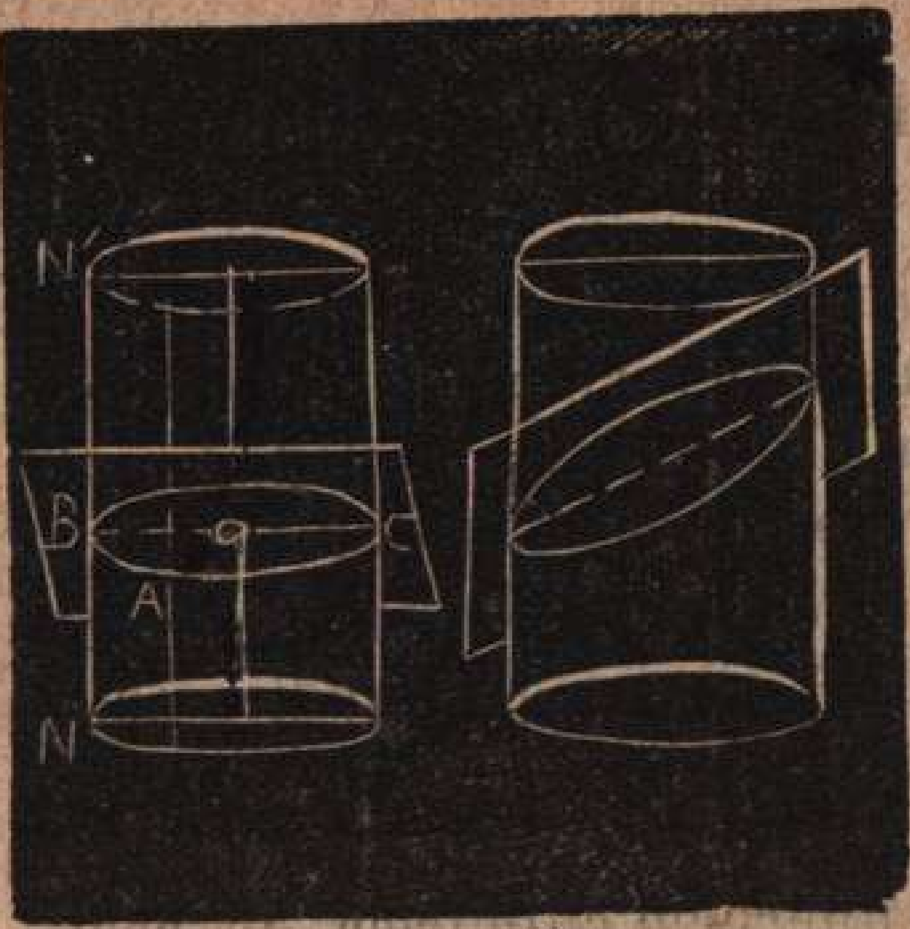


Fig. 150.

Siendo toda seccion recta de una superficie cilíndrica de revolucion una circunferencia de círculo, cuyo centro está en el eje y cuyo rádio es la distancia del eje á la generatriz, resultará que todas las secciones rectas de una superficie cilíndricas serán circunferencias iguales.

Corolarios: 1.° *Una superficie cilíndrica de revolucion estará determinada, conociendo su eje y el rádio de la superficie cilíndrica.*

2.° *Dos superficies cilíndricas de igual rádio serán iguales, y por tanto superponibles.*

En efecto, siendo iguales sus circunferencias generatrices coincidiran superpuestas, y siendo sus generatrices perpendiculares á los planos que limitan estas circunferencias, coincidirán tambien, y por tanto serán iguales.

3.° *Todo plano secante paralelo al eje de una superficie cilíndrica de revolucion, corta á esta por dos generatrices.*

En efecto, todas las generatrices son paralelas entre sí, y dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano; luego dos generatrices cualquiera determinarán la posicion de un plano secante á la misma; por tanto, todo plano secante á una superficie cilíndrica de revolucion es paralelo al eje y pasa por dos generatrices.

Todo plano secante oblícuo al eje de una superficie cilíndrica de revolucion y que corta á todas las generatrices de esta, dá de interseccion una *elipse.*

Todo plano que toque á la superficie cilíndrica de revolucion en una generatriz, es tangente de dicha superficie.

Por lo cual las diferentes posiciones que puede tener un plano con respecto á una superficie cilíndrica de revolucion, son que la toque ó que no la toque.

Si le toca, que dicho plano sea *tangente* ó *secante.*

Si es tangente á la misma, tiene de contacto una generatriz.

Si el plano es secante á la misma puede ser *perpendicular*, *oblícuo* ó *paralelo* al eje.

Si el plano es perpendicular al eje, la interseccion es una *circunferencia.*

Si el plano es oblícuo al eje, la interseccion es una *elipse.*

Si el plano es paralelo al eje, corta á la superficie por *dos generatrices.*

De lo expuesto anteriormente, inferiremos la solucion á los siguientes problemas:

1.° *Trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica de revolucion por un punto cualquiera dado en la misma.*

Para esto se trazará por dicho punto la generatriz, por el mismo una seccion recta, y por el mismo una recta tangente á dicha seccion; tendremos que la generatriz y dicha recta tangente perpendicular á la misma que pasan por el punto dado, determinarán la posicion del plano tangente pedido.

2.° *Trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica de revolucion por un punto cualquiera dado esteriormente, es decir, fuera de la misma.*

Para esto, se traza por dicho punto un plano que sea perpendicular al eje, y que por tanto su interseccion con dicha superficie cilíndrica sea una circunferencia; se trazan á la misma desde el punto dado dos tangentes, y en cada uno de los dos puntos de tangencia una generatriz que pase por el mismo, y tendremos que cada una de dichas generatrices y la recta tangente que la intercepta perpendicularmente, trazada desde el punto dado á la superficie curva, determinarán cada uno de los *dos planos tangentes que puedan trazarse á una superficie cilíndrica* *de revolucion desde un punto cualquiera dado esteriormente.*

236. Teorema. *Las superficies cilíndricas son desarrollables sobre un plano.*

Distinguiremos los dos casos análogos, que en las superficies cónicas.

1.° *Que el cilindro que dicha superficie limite sea recto y circular.*

2.° *Que no lo sea.*

1.° Si el cilindro es recto y circular, marcando en el mismo una generatriz, y haciendo que esta sea tangente á un plano, haciéndole rodar por el mismo hasta que dicha generatriz marcada vuelva de nuevo á ser la tangente á dicho plano, se habrá desarrollado sobre el mismo la superficie cilíndrica que le limita en un *rectángulo que tiene por altura la expresada generatriz y por base la disectriz de dicha curva rectificada.*

2.° Si el cilindro fuese oblícuo, dividiríamos los perímetros de sus bases partiendo de los estremos de una generatriz en partes tan pequeñas como se quiera, pero respectivamente iguales en ambos perímetros; trazaríamos las generatrices correspondientes á dichos puntos, formándose así una série de paralelógramos, los cuales, si consideramos como planos, el conjunto de los mismos será aproximadamente la superficie cilíndrica desarrollada sobre un plano.

Superficies esféricas.

237. La superficie *esférica* está engendrada por la revolucion de una semicircunferencia que gira al rededor de su diámetro.

El cuerpo limitado por una superficie esfèrica es el cuerpo redondo llamado **Esfera**.

En toda esfera llamamos *centro* al punto medio del diámetro de la semicircunferencia generatriz.

Rádio, á la distancia de un punto cualquiera de la misma al centro.

Diámetro de la esfera, ó *Eje* de la misma, á la distancia de un punto á otro, pasando por el cèntro.

Se llaman *Polos* de una esfera á los extremos del eje.

De lo expuesto, comprenderemos que:

Todos los rádios de una esfera son iguales.

Todos los diámetros de una esfera son iguales.

Toda esfera tiene un número infinito de rádios y de diámetros.

Todas las esferas de igual rádio son iguales.

Todas las esferas de igual diámetro son iguales.

Todo punto de la superficie esférica dista del centro una cantidad igual al rádio.

Todo punto interior á una superficie esférica dista del centro una cantidad menor que el rádio.

Todo punto exterior á una superficie esférica dista del centro una cantidad mayor que el rádio.

La figura *de una esfera se determina, conocido su nombre.*

La magnitud *de una esfera se determina, conocido su rádio.*

La posicion *de una esfera se determina, conocido su centro.*

La figura, magnitud y posicion *de una esfera se determina, conocido el centro y el rádio.*

238. Teorema. *La interseccion de un plano con la superficie esférica es siempre una circunferencia.*

En efecto, si dada la superficie esférica O (fig. 151) trazamos el plano secante AB, dicho plano cortará á la superficie esférica en la curva plana RQSP.

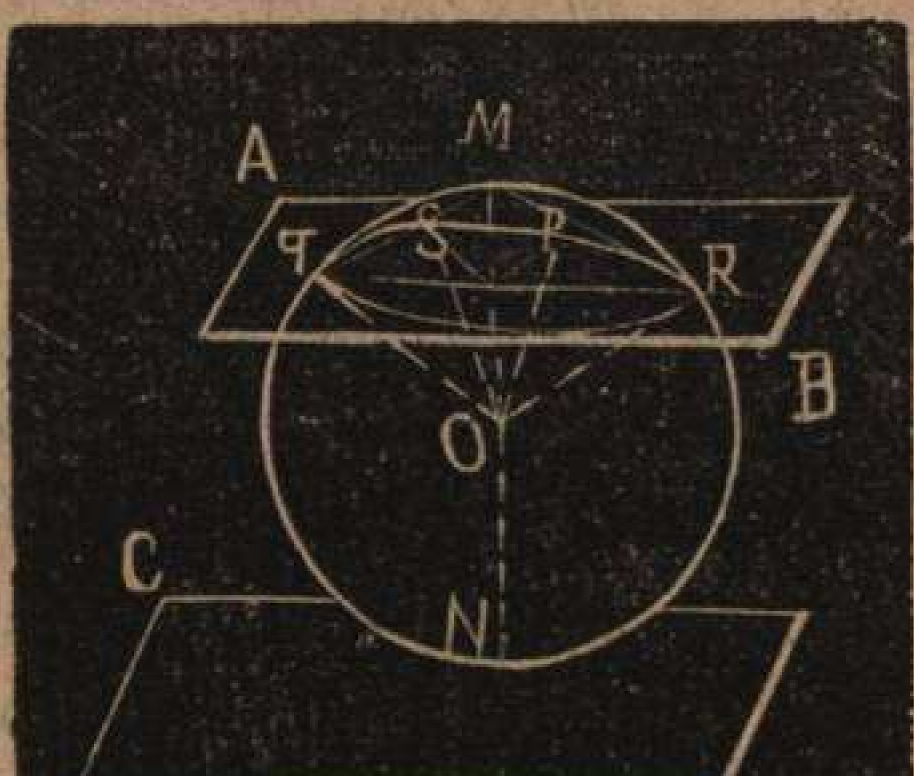


Fig. 151.

Todos los puntos R, Q, S, P etc., por estar tambien en la superficie esférica, equidistarán del centro O, y por tanto OR, OQ, OS, OP, etc. serán iguales como rádios de la esfera, y como sabemos (Rec. Teorema 196) que el lugar geométrico de los piés de R, Q, S, P, etc. de varias oblícuas iguales, trazadas desde un punto á un plano, es una circunferencia trazada en el mismo, resultará que la curva plana RQSP es una circunferencia.

Si el plano AB pasase por el centro de la esfera, los rádios de la circunferencia, interseccion comun, tendrian la misma longitud que los de la esfera; y como estos son los mayores posibles, resultará que una *circunferencia máxi-*

ma de la superficie esférica será la interseccion de esta y un plano, cuando pase por el centro de aquella referido plano secante.

239. Teorema. *Todo plano tangente CD á una superficie esférica es perpendicular al rádio trazado al punto de contacto.*

En efecto, la perpendicular ON es la menor distancia del centro O de la esfera al plano CD, y por tanto perpendicular á dicho plano.

Del precedente teorema deduciremos que por un punto dado de una superficie esférica no se puede trazar mas que un plano tangente á la misma, el cual estará determinado por dos perpendiculares trazadas en su estremo al diámetro ó rádio que termine en dicho punto.

240. De lo espuesto en los dos teoremas precedentes deduciremos:

1.° La magnitud de la circunferencia interseccion de una superficie esférica y un plano, se halla comprendido entre dos límites: el *menor* será un punto cuando dicho plano es solo tangente de la superficie esférica, y el *mayor*, será una circunferencia máxima, cuando dicho plano secante pasa por el centro de referida superficie esférica.

2.° *Toda circunferencia máxima divide á la superficie esférica en dos partes iguales*, porque separadas, invertidas y superpuestas coinciden; cada una de ellas se llama *hemisferio*.

3.° *Toda circunferencia, interseccion de una superficie esférica y un plano, secante á la misma, que no pase por el centro de aquella, divide en dos partes desiguales á la superficie esférica.*

4.° *Dos circunferencias máximas de una misma superficie esférica, se encuentran en los estremos de un diámetro*, porque pasando por el centro de la esfera, los planos correspondientes á ambas, su interseccion comun será dicho diámetro.

5.° *Dos circunferencias menores, producidas por las intersecciones de una superficie esférica y dos planos secantes, serán iguales si dichos planos son equidistantes del centro.*

6.° *De dos circunferencias desiguales producidas por las intersecciones de una superficie esférica con dos planos secantes, será la mayor la producida por el plano secante mas próximo al centro; y la menor por la interseccion del plano mas distante del centro.*

7.° *En una superficie esférica basta dar dos puntos que no sean los estremos de un diámetro para que esté determinada una circunferencia máxima.*

En efecto, dichos dos puntos y el centro determinarán la posicion del plano secante, cuya interseccion con la superficie esférica será la circunferencia máxima pedida.

8.° *Para determinar en una superficie esférica una circunferencia mínima, es necesario conocer tres de sus puntos.*

9.° *Una línea recta no puede cortar á una superficie esférica en mas de dos puntos*, toda vez que dicha recta no puede tener mas que dos puntos comunes con la circunferencia máxima trazada por dicha recta.

241. Teorema. *Si haciendo centro en un punto cualquiera* M (fig. 151) *de una superficie esférica, con un rádio cualquiera* MR *se traza una curva* RQSP, *dicha curva es una circunferencia.*

En efecto, trazando el rádio MO y los otros OR, OS, OP y OQ á diferentes puntos de la seccion, los triángulos ORM, OSM, OPM y OQM, serán iguales por ser OR=OS=OP=OQ, además MR=MS=MP=MQ por hipótesis, y el rádio OM comun para todos, y como si desde los puntos R, S, P, Q, se bajan perpendiculares sobre el rádio OM se encontrarán todos en un punto de un mismo plano siendo iguales, resultará por tanto que la curva RPSQ será una circunferencia.

Corolario. *Si se traza una circunferencia en una superficie esférica, todos sus puntos equidistan de uno de sus polos.*

En efecto, siendo RPSQ la circunferencia, M será uno de sus polos, y fácil será demostrar que todos sus puntos equidistan tambien á la vez del otro polo N, verificándose que: si dicha circunferencia es *máxima*, *equidistará* de los dos polos, y si es *mínima*, *no equidistará* de los mismos.

Se llama *distanciu polar* de un punto cualquiera R de una circunferencia RPSQ trazada en una superficie esférica, la distancia rectilínea trazada desde dicho punto á su polo mas inmediato M, y si tomamos la longitud MR de la circunferencia máxima comprendido entre dichos puntos, se llamará *rádio esférico* ó *distancia esférica.*

Para trazar circunferencias sobre una superficie esférica, se emplea el *compás llamado de brazos curvos.*

Si sobre una superficie curva se trazan dos arcos que se intercepten, formarán un *ángulo* llamado *curvilíneo.*

Si los arcos que forman dicho ángulo corresponden á circunferencias máximas se llamará este *ángulo* esférico.

El ángulo rectilíneo correspondiente á un esférico dado, se determina por las dos tangentes trazadas á dichos arcos, en el vértice del mismo.

242. Teorema. *Todo ángulo esférico tiene por medida la de su rectilíneo correspondiente y tambien la del diedro formado por dos planos, uno sobre cada uno de sus lados y el centro.*

En efecto, sea BCA el ángulo esférico dado (fig. 152); si trazamos la recta CG, tangente al arco CA en su vértice C, y despues la recta tangente CD en su vértice C al arco CB, formaremos el ángulo rectilíneo DCG, cuyos dos lados serán perpendiculares al rádio OC trazado al vértice del ángulo: luego considerados en proyeccion desde el vértice, el ángulo esférico y su rectilíneo correspondiente serán iguales. Además, si trazamos el ángulo plano correspondiente al diedro BOCA, trazaremos por uno cualquiera de los puntos de su interseccion comun CO dos perpendiculares, una en cada plano; si elegimos el punto C, dichas dos perpendiculares serán la DC y GC, luego el ángulo plano correspondiente al diedro dado, será el DCG que es el único rectilíneo que corresponde al ángulo esférico propuesto; por tanto, un ángulo esférico tiene por medida la misma que la del diedro ó rectilíneo correspondiente.

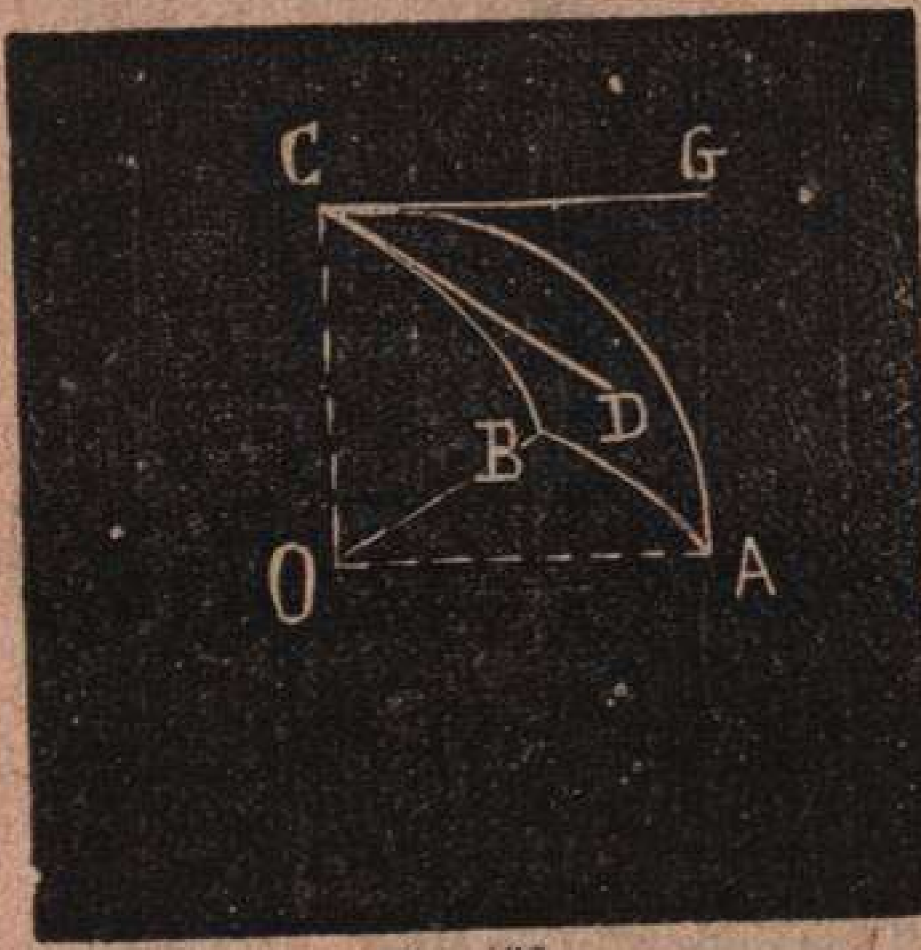


Fig. 152.

243. Teorema. *La menor distancia entre dos puntos de una superficie esférica, es el arco de circunferencia máxima que los une.*

En efecto, sean A y B (fig. 153) los dos puntos dados y sea AB el arco de circunferencia máxima; vamos á demostrar que otro arco cualquiera AECDB que les una, es mayor que aquel. Si tomamos un punto cualquiera C, intermedio entre A y B en el arco AECDB y trazamos los dos arcos AC y CB, tendremos que: $AB<AC+CB$; si en

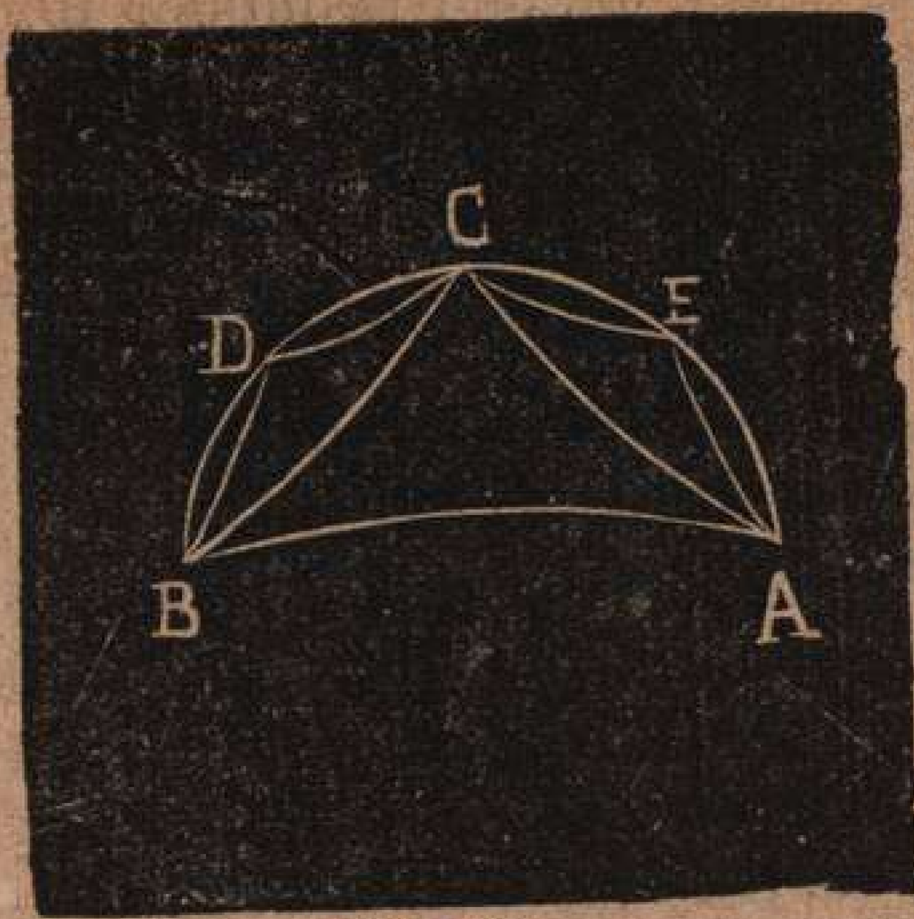


Fig. 153.

estos arcos AC y CB respectivamente, tomamos dos puntos intermedios E y D trazando los arcos AE, EC, CD y DB, tendremos que:

$$AC<AE+EC$$

y $CB<CD+DB$, luego por tanto, $AC+CB<AE+EC+CD+DB$: si tomamos mayor número de puntos intermedios hasta formar una línea poligonal esférica que se aproxime á la AECDB, resultará más evidentemente comprobado que el arco de circunferencia máxima AB, es menor que cualquiera otro AECDB que una dos puntos A y B tomados en la misma, por ser la distancia que mas se aproxima á la línea recta.

244. Se llama en general *Triángulo esférico* á la porcion de superficie esférica comprendida por tres arcos de circunferencia máxima que se interceptan mútuamente.

Polígono esférico es la parte de superficie esférica comprendida entre varios arcos de circunferencia máxima.

Contorno de un polígono esférico es el conjunto de todos sus lados.

Perímetro de un polígono esférico es la medida determinada de dicho contorno.

Lados del mismo son cada uno de los arcos que le limitan.

Vértice, la interseccion de cada dos arcos contíguos.

Angulo, la inclinacion de cada dos arcos adyacentes.

Diagonal, es el arco de circunferencia máxima que une dos vértices no contíguos.

De todos los polígonos esféricos es el mas sencillo el triángulo.

245. Teoremas. En todo triángulo esférico se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *Un lado cualquiera del mismo es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de estos.*

En efecto, siendo ABC (fig. 152) el triángulo esférico dado, si unimos sus tres vértices A, B y C con el centro de la esfera, por los rádios AO, BO y CO y hacemos pasar un plano por cada dos de estos tres rádios, tendremos que en el ángulo triedro OABC, segun el teorema 224, se verificará que: un ángulo plano cualquiera del mismo, es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de estos, y como en el triedro dado cada uno de los ángulos planos AOB, BOC y COA tiene respectivamente por medida los arcos AB, BC y CA (Teorema 65), resultará comprobada la proposicion.

2.° *La suma de todos los lados de un triángulo esférico, es menor que una circunferencia máxima.*

En efecto, siendo ABC el triángulo dado (fig. 152) y OABC el triedro correspondiente, si tenemos en cuenta el Teorema 225 que dice: «*la suma de los tres ángulos planos de un triedro, vale menos que cuatro rectos*» y observamos que los ángulos planos del triedro propuesto tienen respectivamente por medida los tres arcos AB, BC y CA de circunferencia máxima, resultará que entre los tres no pueden valer cuatro ángulos rectos, ó sea una circunferencia máxima.

Este teorema nos expresa la posibilidad de que haya triángulos esféricos que sean *birectángulos* y *trirectángulos*, es decir, que tengan dos y tres ángulos rectos.

Los triángulos esféricos tambien pueden ser *isósceles* y *equilácteros* como los rectilíneos.

3.° *La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y mayor que seis.*

En efecto, segun el teorema 242, todo ángulo esférico tiene por medida la de su diedro correspondiente, y como segun el teorema 226, la suma de los tres diedros de un triedro valen mas de dos rectos y menos de seis, quedará comprobada la proposicion.

En todo triángulo esférico se verifica: que si desde un punto interior del mismo se trazan dos arcos á los estremos de un lado, este será menor que la suma de aquellos, lo cual se comprueba por el teorema 243.

En todo triángulo esférico se verifica: *que el arco opuesto al mayor ángulo es el mayor tambien: que el arco opuesto al menor ángulo es el menor: que los arcos opuestos á iguales ángulos son iguales.*

Se llama *triángulo polar de un triángulo esférico dado, otro tal, que sus vértices sean respectivamente los polos de los lados del primero*, y situados al mismo lado de ellos que sus vértices opuestos.

Entre dos triángulos esféricos polares se verifica: que si el primero es polar del segundo, este lo es de aquel.

Dos triángulos esféricos polares son suplementarios.

Los dos triedros correspondientes á dos triángulos esféricos polares son suplementarios.

En efecto, por ser rectos los ángulos formados en el centro de la esfera por dos rádios, trazados uno á un polo que corresponde á uno de los vértices de un triángulo, y otro al principio del arco de otro triángulo, de quien es aquel su polo respectivo; luego cada una de las tres aristas que forma un triedro es perpendicular al plano que determinan las otras dos aristas del otro triedro, y por tanto, ambos triedros son suplementarios.

246. Si desde un punto de una superficie esférica se traza un arco perpendicular y varios oblícuos á otro arco de circunferencia máxima trazada en la misma, se verifica que:

1.° *El arco perpendicular, es el menor.*

2.° *Los arcos oblícuos que equidisten del pié del perpendicular, son iguales.*

3.° *El arco cuyo pié diste mas del pié del arco perpendicular, es el mayor.*

La demostracion de este teorema es análoga á la dada para el teorema 28 de la Geometría plana. Del mismo teorema se deducirán los corolarios siguientes:

1.° *La menor distancia que se puede trazar desde un punto de la superficie esférica á un arco de circunferencia máxima trazada en la misma, es el arco perpendicular al mismo, menor que un cuadrante.*

2.° Los triángulos esféricos rectángulos formados por el arco perpendicular, dos arcos oblícuos equidistantes sus piés del de aquel y el arco de circunferencia máxima trazado primeramente, son iguales. En efecto, entre ellos se cumplen las condiciones precisas de igualdad de dos triángulos esféricos rectángulos, las cuales son:

1.° *Que tengan la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales.*

2.° *Que tengan la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales.*

3.° *Que tengan los dos catetos respectivamente iguales.*

Las triángulos esféricos en estas condiciones si no son iguales se llamarán simétricos.

Dos triángulos esféricos, en general son iguales:

1.° *Cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

2.° *Dos lados respectivamente iguales é igual tambien el ángulo comprendido.*

3.° *Un lado igual, contiguo á dos ángulos respectivamente iguales.*

4.° *Sus tres ángulos respectivamente iguales.*

En todos estos casos es necesario tener en cuenta que los elementos dados deben hallarse dispuestos de la misma manera, porque si la colocacion de estos elementos es inversa, los dos triángulos esféricos serán *simétricos.*

247. Teorema. *Cuatro puntos que no están en un mismo plano determinan la posicion de una superficie esférica.*

Sean A, C, B, D, (fig. 154) los cuatro puntos dados, tratemos de determinar el centro de la superficie esférica que pase por dichos cuatro puntos.

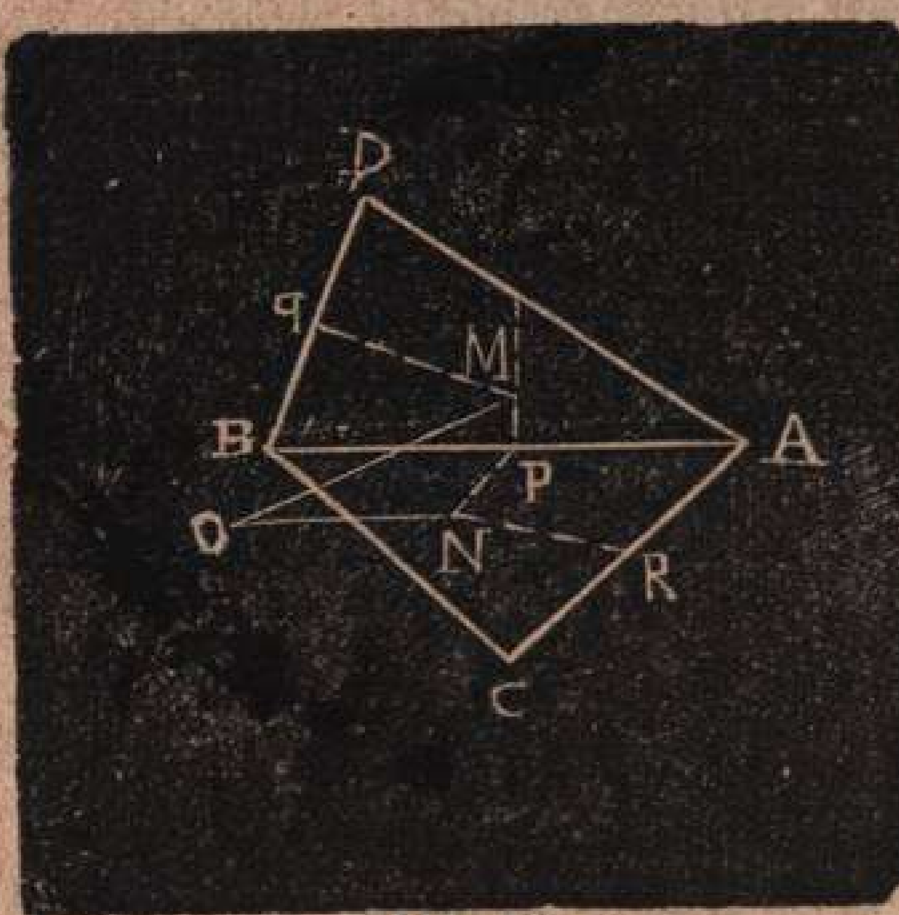


Fig. 154.

Para esto observaremos que cada tres de los 4 puntos dados determinan la posicion de un plano; y por tanto, los tres puntos A, D y B determinarán la posicion del plano ADB: si trazamos dos perpendiculares en los puntos medios de dos de sus lados, por ejemplo, de los AB y BD, serán dichas perpendiculares la MP y la MQ, las cuales se encontrarán en el punto M, que segun el teorema 90, equidistará de A, B y D.

Si ahora por los puntos A, B y C hacemos pasar el plano ABC, determinaremos el punto medio N, equidistante de los tres vértices A, B y C por la interseccion de las dos perpendiculares NP y NR, trazadas en los puntos medios P y R de los dos lados AB y AC.

Ahora bien: si en el punto medio M del plano ABD levantamos la perpendicular OM, todo punto de dicha perpendicular será lugar geométrico de los tres puntos A, B y D de dicho plano, segun el teorema 196; y si en el punto medio N del plano ABC levantamos la perpendicular NO, por la misma razon resultará que todo punto de dicha perpendicular equidistará de los tres vértices A, B y C; por último, el punto O de interseccion comun de dichas dos perpendiculares, (que se hallarán en un mismo plano) equidistará de los cuatro puntos dados A, D, B y C, y será por tanto el único punto que siendo equidistante de los cuatro dados sirve de centro á la superficie esférica que pasa por los cuatro puntos propuestos.

Corolarios: *1.° Las interseccion de dos superficies esféricas se halla en un plano.*

2.° Dicha interseccion comun es una circunferencia de círculo.

248. Si tenemos en cuenta los teoremas expuestos en el número 55, podremos demostrar relativamente la interseccion y contacto de dos superficies esféricas.

Dos superficies esféricas pueden ser tangentes esteriores, interiores entre sí, ó secantes.

Dos superficies esféricas tangentes pueden serlo interior ó exteriormente.

Si dos superficies esféricas son tangentes exteriores, la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.

Si dos superficies esféricas son tangentes interiores, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.

Si dos superficies esféricas son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que la diferencia de los mismos.

Si dos superficies esféricas son exteriores sin tocarse, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.

Si dos superficies esféricas son interiores sin tocarse, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.

Recíprocamente *diremos: si la distancia de los centros de dos superficies esféricas es:*

Mayor *que la suma de los rádios, las dos superficies esféricas serán exteriores sin tocarse.*

Igual *á la suma de los rádios, serán aquellas tangentes exteriores.*

Menor *que la suma de los rádios, serán aquellas secantes.*

Mayor *que la diferencia de los rádios, serán aquellas tambien secantes.*

Igual *á la diferencia de los rádios, serán tangentes interiores.*

Menor *que la diferencia de los rádios, serán interiores sin tocarse.*

Análogamente á algunos otros teoremas correspondientes á la Geometría plana, y que se demuestran sobre una superficie plana, se pueden demostrar tambien sobre una superficie esférica.

249. Sobre una superficie esférica se resuelven por procedimientos análogos á los ya empleados en la Geometría plana, un sin número de problemas, como los que se expresan á continuacion.

1.° *Trazar un arco de circunferencia máxima perpendicular á otro cualquiera dado en su punto medio.*

2.° *Dividir un arco de circunferencia máxima en dos partes iguales.*

3.° *Por un punto dado en un arco de circunferencia máxima trazado en una superficie esférica, trazar otro arco de circunferencia máxima que forme con el primero un ángulo propuesto.*

4.° *Sobre una superficie esférica, trazar un ángulo igual á otro dado.*

5.° *Trazar la bisectriz correspondiente á un ángulo esférico.*

6.° *Dado un triángulo esférico, formar sobre la misma superficie esférica su polar correspondiente.*

7.° *Determinar el polo de la circunferencia menor que pase por tres puntos cualesquiera dados en la superficie esférica.*

8.° *Por un punto de la superficie esférica, trazar un arco de circunferencia máxima, tangente á una circunferencia mínima dada en la misma.*

9.° *Dada una superficie esférica determinar su centro.*

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO

DE LA PRIMERA PARTE DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO, QUE SE OCUPA DE LAS SUPERFICIES CURVAS DE REVOLUCION.

I. Dados dos puntos sobre una superficie esférica, hacer pasar por ellos una circunferencia máxima.

II. Determinar la mínima y la máxima distancia entre dos puntos de la superficie esférica, determinadas ambas por arcos de circunferencia.

III. Dados tres puntos de la superficie esférica, hacer pasar por ellos una circunferencia mínima.

IV. Dados tres puntos de la superficie esférica, trazar el triángulo esférico correspondiente, y el triángulo polar respectivo al anterior.

V. Demostrar que si tres superficies esféricas se cortan dos á dos, los planos de las tres intersecciones se cortan en una misma recta perpendicular al plano que pasa por tres centros.

VI. Dadas las dos circunferencias que han sido producidas por dos secciones planas de una superficie esférica, y que son paralelas entre sí, siendo conocida la distancia entre ellas, determinar el rádio de la superficie esférica correspondiente.

VII. Por una recta cualquiera dada en el espacio, trazar un plano tangente á una superficie esférica tambien dada.

VIII. Por una recta cualquiera dada en el espacio, trazar un plano que corte á una superficie esférica tambien dada, en una circunferencia de rádio conocido.

IX. En qué condiciones deben hallarse cuatro puntos de una superficie esférica para que estos se hallen en un mismo plano.

X. Dos circunferencias trazadas sobre una misma superficie esférica son tangentes, si el arco de circunferencia máxima que une sus polos es igual á la suma ó á la diferencia de sus distancias polares.

XI. Demostrar que si desde un punto del espacio se tiran varias secantes á una superficie esférica, el producto de las distancias de este punto á las dos intersecciones de cada una de las secantes, es una cantidad constante.

XII. Dado el rádio de una superficie esférica, hacer que pase esta:

1.° Por tres puntos dados.

2.° Por dos puntos dados, siendo además tangente á un plano ó á otra superficie dada.

3.° Por un punto, siendo además tangente á dos planos, ó á otras dos superficies esféricas tambien dadas.

SEGUNDA PARTE.

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS DE REVOLUCION

LIBRO PRIMERO.

POLIEDROS.

Preliminares.

250. Se llama Poliedro á todo cuerpo terminado por superficies planas.

Los elementos de un *Poliedro* son sus *caras*, sus *vértices*, sus *aristas* y sus ángulos *diedros* y *poliedros*.

Los Poliedros pueden ser *cóncavos* ó *convexos*.

Un *poliedro es cóncavo*, cuando una línea que lo penetre corte á su superficie en mas de dos puntos.

Un *poliedro es convexo*, cuando una línea que lo penetre no pueda cortar á su superficie en mas de dos puntos.

Nos ocupamos solo de los Poliedros convexos.

Los Poliedros pueden ser *regulares* ó *iregulares*.

Un poliedro es regular: 1.° *cuando todas sus caras son polígonos regulares siendo iguales entre sí.*

2.° *Cuando todas sus aristas son iguales entre sí.*

3.° *Cuando todos sus ángulos diedros y poliedros son iguales entre sí.*

Un poliedro es irregular cuando no son iguales entre sí sus caras, vértices y aristas.

Los poliedros se denominan atendiendo al número de sus caras: así se llaman respectivamente *Tetraedro*, *Pentaedro*, *Exaedro*, *Eptaedro*, *Octaedro*, *Decaedro*, *Dodecaedro*, *Icosaedro*, etc., etc., segun que el número de sus caras sea respectivamente 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 20, etc.

Los Poliedros para su estudio se dividen en *convexos* y *cóncavos*.

Los convexos en *irregulares* y *regulares.*

Los irregulares en *Pirámides*, *Prismas* y *Poliedros en general.*

De las Pirámides.

251. Se llama Pirámide, un poliedro que tiene una cara poligonal cualquiera, siendo las demás triángulos cuyos vértices concurren en un punto comun que se llama vértice ó cúspide de la Pirámide.

En toda pirámide es necesario distinguir su *base*, su *altura*, su *vértice* y sus *caras laterales.*

Se llama *base* de una pirámide á la cara poligonal opuesta á su vértice ó cúspide.

Se llama *altura* de una pirámide á la perpendicular trazada á su base desde su cúspide.

Se llama *vértice* de una pirámide, al punto comun de todas sus caras laterales.

Se llaman *caras laterales* de una pirámide todos los triángulos que concurren en el vértice.

Las Pirámides se dividen en *regulares* é *irregulares.*

Una Pirámide se llama regular, cuando el polígono de su base es regular y la altura de la misma cae en el centro de la base.

Será irregular, cuando no tenga alguna de estas condiciones.

De la definicion de la Pirámide regular se deduce:

1.° *Todas sus aristas laterales serán iguales.*

2.° *Todas sus caras laterales serán triángulos equiláteros ó isósceles.*

3.° *Su cúspide equidista de todos los vértices de la base.*

4.° *Todo punto de su altura equidista igualmente de dichos vértices.*

5.° *Todos los ángulos poliedros de una pirámide son triedros, escepto el formado en su vértice ó cúspide, y todos precisamente iguales por hallarse formado de dos caras laterales iguales y de la base.*

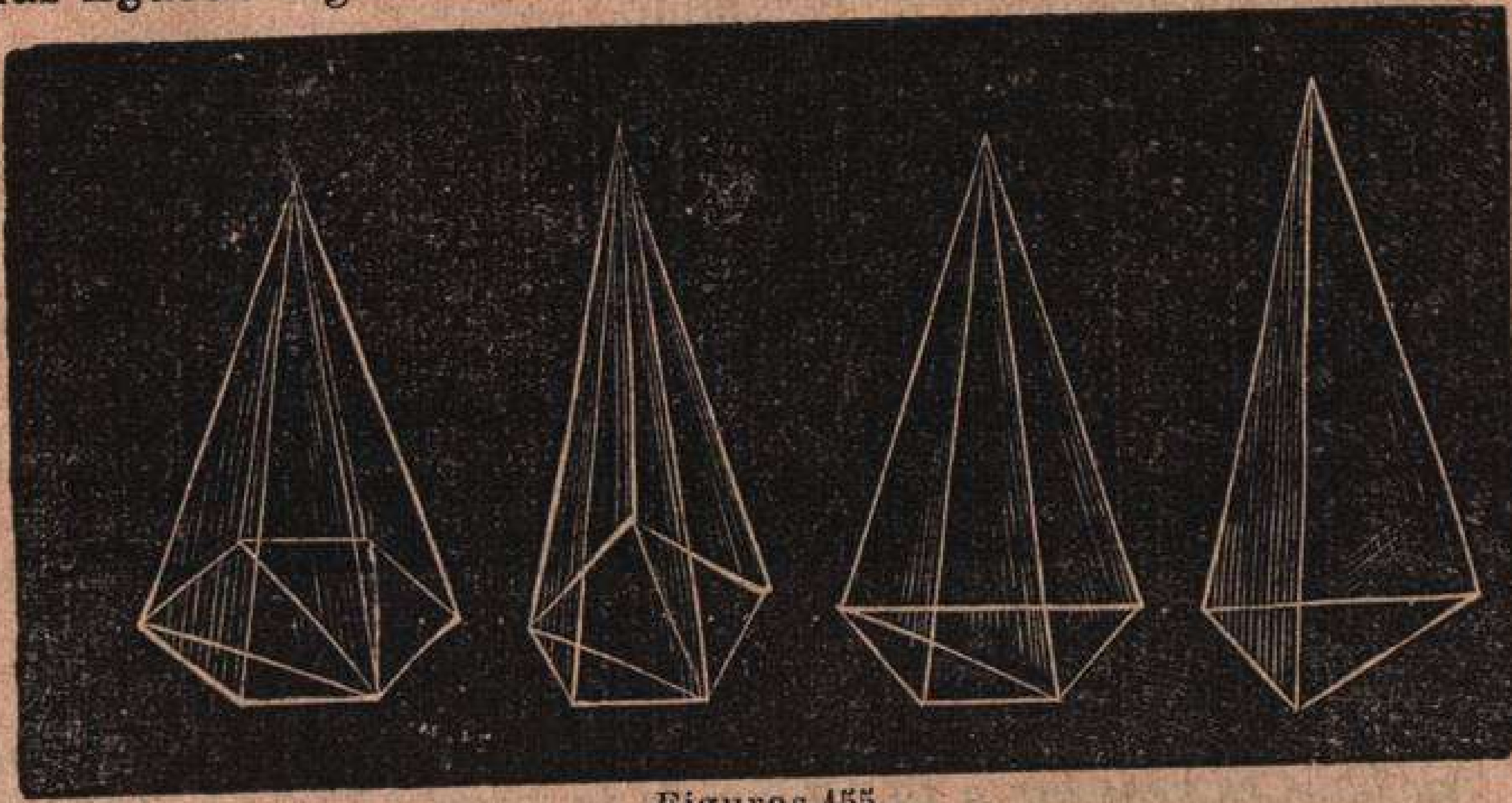
6.° *Los ángulos diedros formados por cada dos caras laterales de una pirámide regular, son iguales entre sí.*

7.° *Los ángulos diedros formados por la base con cada una de las caras laterales, son tambien iguales entre sí.*

Se llama *apotema* de una pirámide regular á la altura de una cualquiera de sus caras laterales triangulares.

Las pirámides regulares no son regulares como poliedros por lo espresado anteriormente, sino que son regulares como pirámides.

Las pirámides se denominan y clasifican atendiendo al número de sus caras laterales; así se llaman *exágonales*, *pentágonales, cuadrángulares, triángulares*, etc., segun que el número de sus caras laterales ó el de lados del polígono de su base sea 6, 5, 4 ó 3, etc., cual se representan en las figuras siguientes:



Figuras 155.

Llamamos *plano diagonal* de una pirámide al que pasa por dos aristas laterales no contíguas de la misma.

Toda pirámide triángular está formada por tres caras laterales y el triángulo que le sirve de base: teniendo por tanto cuatro caras de triángulo, se llama *Tetraedro*, entre los poliedros, el cual es entre los cuerpos lo que el triángulo entre las superficies: aquel es el espacio de tres dimensiones, cerrado por el menor número posible de superficies; este es la superficie cerrada por el menor número posible de líneas: uno y otro parece que debieran ser los términos de comparacion que sirvieran de medida, el *triángulo* para la determinacion de las *áreas*, el *tetraedro* para la determinacion de los *volúmenes*. La circunstancia de no poder ser rectos los ángulos que forman entre sí cada dos líneas de aquel, y la de no poder ser rectos los diedros de este, obliga para la determinacion de las áreas á elegir para medida, *un Cuadrado*, y para la determinacion de los volúmenes *un Exaedro regular*.

La Pirámide cuadrángular tiene cuatro caras laterales y la superficie de la base, y aun cuando se llama *cuadrángular* entre las pirámides, como la limitan cinco planos es un *Pentaedro* entre los poliedros. Respectivamente las pirámides pentagonales, exagonales, eptagonales ú octogonales, etc. como poliedros, les llamaremos respectivamente exaedros, eptaedros y octaedros, etc. Todos estos, aun cuando sean pirámides regulares, como poliedros no son regulares porque sus caras, vértices y aristas no son iguales entre sí respectivamente.

De todas las pirámides regulares ya veremos como no puede haber mas poliedro regular, que la pirámide triángular regular que tenga su base igual á una cualquiera de sus caras laterales.

Siendo la pirámide triangular el elemento de volúmen, no se podrá trazar en ella ningun plano diagonal, porque un elemento simple es indescomponible, análogamente á lo que sucede con el triángulo entre las superficies.

De lo espuesto al final del número 125, que dice: todo polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene, menos dos, y de saberse, segun el teorema 192, que una recta y un punto determinan la posicion de un plano, resultará que si desde una de las aristas de una pirámide se trazan planos diagonales á cada uno de los vértices de la base, *toda pirámide se descompone en tantos tetraedros como lados tenga el polígono de su base, menos dos*; conforme se comprobará en las figuras 155, en las que observaremos que la pirámide exagonal se descompone en cuatro tetraedros ó pirámides triangulares, la pentagonal en tres y la cuadrangular en dos.

252. **Teorema.** Dos tetraedros son iguales en los casos siguientes:

1.º Si tienen tres caras del uno respectivamente iguales á las tres del otro.

2.º Si tienen dos caras del uno y su ángulo diedro comprendido, iguales respectivamente á las dos caras homólogas del otro y á su ángulo diedro comprendido.

3.º Una cara y los tres ángulos diedros adyacentes del uno, respectivamente iguales á la cara homóloga y los tres ángulos diedros del otro.

1.er **caso.** De la igualdad respectiva de las tres caras del uno á las tres del otro, se infiere la de los ángulos planos respectivos; y como el conocimiento de las tres caras de un triedro entraña el del ángulo triedro respectivo, resultará que los dos tetraedros ya tienen tambien iguales dos ángulos triedros: si los superponemos coincidirán; luego los tetraedros serán iguales.

2.° caso. Si suponemos que los dos tetraedros tienen iguales dos caras respectivas y el diedro adyacente, resultará que superponiendo directamente dichos elementos coincidirán las aristas respectivas y serán iguales, siéndolo tambien las caras que estas limitan; luego los dos tetraedos serán iguales.

3.^er caso. Si suponemos que los dos tetraedros tienen iguales una cara y los tres ángulos diedros adyacentes, resultará que superponiendo directamente dicha cara del uno sobre la del otro, coincidirán; y como los ángulos diedros homólogos son respectivamente iguales, coincidirán tambien de igual manera que la totalidad de los demás elementos; luego los dos tetraedros serán tambien iguales.

Del teorema precedente se deduce el siguiente:

253. Teorema. *Un tetraedro está determinado* en los casos siguientes, (siendo el mismo el órden de su colocacion):

1.° Si se conocen tres caras.

2.° Dos caras y el ángulo diedro que forman.

3.° Una cara y los tres ángulos diedros adyacentes.

En efecto: 1.° Si conocemos tres caras de un tetraedro será tambien conocido el ángulo triedro que forman, y por lo tanto se conocerán tambien cada uno de los otros tres ángulos triedros y estará determinado el tetraedro.

Si conociésemos la posicion relativa de los cuatro vértices de un tetraedro serian tambien conocidas las 6 distancias comprendidas entre los mismos, es decir las seis aristas, y por tanto las cuatro caras; luego el tetraedro está determinado.

2.° Conociendo dos caras y el ángulo diedro que estas forman, es conocida la arista comprendida entre las mismas; y por tanto, los dos ángulos triedros formados en los estremos de dicha arista, todas las aristas del triedro, todas sus caras; luego el tetraedro estará determinado.

3.° Conociendo una cara y los tres ángulos diedros adyacentes serán conocidos tambien los tres ángulos triedros que se forman uno en cada uno de los 3 vèrtices del triángulo-base; lo será tambien el cuarto ángulo triedro, y lo serán, por fin, todos los elementos del tetraedro, estando este determinado.

254. Teorema. *Dos pirámides serán iguales siempre que descompuestas homólogamente en tetraedros, los homólogos de la una y la otra sean iguales y se hallen respectivamente colocados.*

En efecto, siendo el todo igual al conjunto de sus diferentes partes, si en la proposicion anterior tenemos en cuenta el teorema precedente número 252, resaltará la verdad de su tésis.

255. Teorema. *Una pirámide está determinada siempre que lo estén todos los tetraedros que la componga, así como tambien el órden de su colocacion.*

En efecto, siendo una pirámide el conjunto de varios tetraedros, si tenemos determinados estos, así como el órden de su colocacion, se hallará tambien aquella determinada.

Corolarios: *1.° Una pirámide regular está determinada, siempre que sea conocida la superficie de su base y la longitud de su altura.*

2.° Dos pirámides regulares serán iguales siempre que lo sean las superficies de sus bases y las longitudes de sus alturas.

256. Teorema. *Si una pirámide cualquiera se corta por un plano paralelo á su base, se verifica:*

1.° Sus aristas laterales y su altura quedan divididas en partes directamente proporcionales.

2.° El polígono de la seccion es semejante al de la base.

3.° Las áreas de estos dos polígonos son proporcionales á los cuadrados de sus distancias al vértice.

Sea OABC (fig. 156) la pirámide y NM el plano secante paralelo á la base ABC de dicha pirámide.

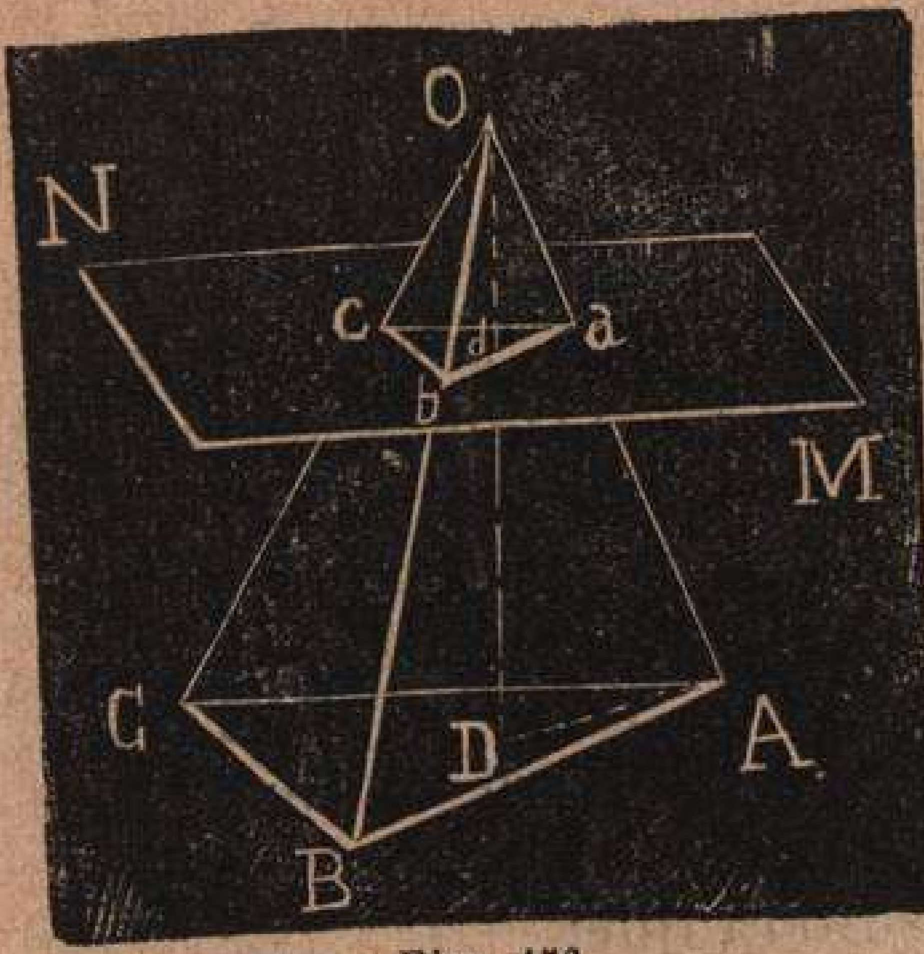


Fig. 156.

1.° El plano NM, siendo paralelo á la base, (Teorema 211) cortará á las aristas laterales y á la altura en los puntos a, b, c y d, y como segun el teorema espresado, dos planos paralelos cortan en partes directamente proporcionales á varias rectas concurrentes en un punto, se tendrá que:

$$\frac{OA}{Oa}=\frac{OB}{Ob}=\frac{OC}{Oc}=\frac{OD}{Od}.$$

2.° Las rectas ab, bc, ca serán respectivamente paralelas á las AB, BC, CA (2.° corolario del Teorema 220), por tanto, los ángulos A y a, B y b, C y c serán respectivamente iguales (Teorema 44) y por tanto los Polígonos ABC y abc serán semejantes entre sí.

3.° De la semejanza de los Polígonos ABC y abc se deduce que: $\frac{ABC}{abc}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}$. (Teorema 152). Además los triángulos AOB y aOb, nos dá que: $\frac{AB}{ab}=\frac{OB}{Ob}$; haciendo pasar el plano NM por la arista BO, tendremos tambien que: $\frac{OB}{Ob}=\frac{DO}{dO}$; de esta proporcion y la anterior, suprimiendo la razon comun, tendremos que: $\frac{AB}{ab}=\frac{DO}{dO}$ y tambien que: $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}=\frac{\overline{DO}^2}{\overline{dO}^2}$. Ahora bien, de esta última proporcion y de la primera, suprimiendo la razon comun y formando nueva proporcion con las otras dos, tendremos:

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{\overline{DO}^2}{\overline{dO}^2}$$

que es el tercer estremo que nos proponíamos demostrar.

257. Teorema. *Si dos pirámides de igual altura se cortan por planos paralelos á sus bases y equidistantes de sus vértices, las áreas de las secciones son proporcionales á las de sus bases.*

Sean STRQ y OABCD (fig. 157) las dos pirámides cuyas alturas son SH y OP iguales.

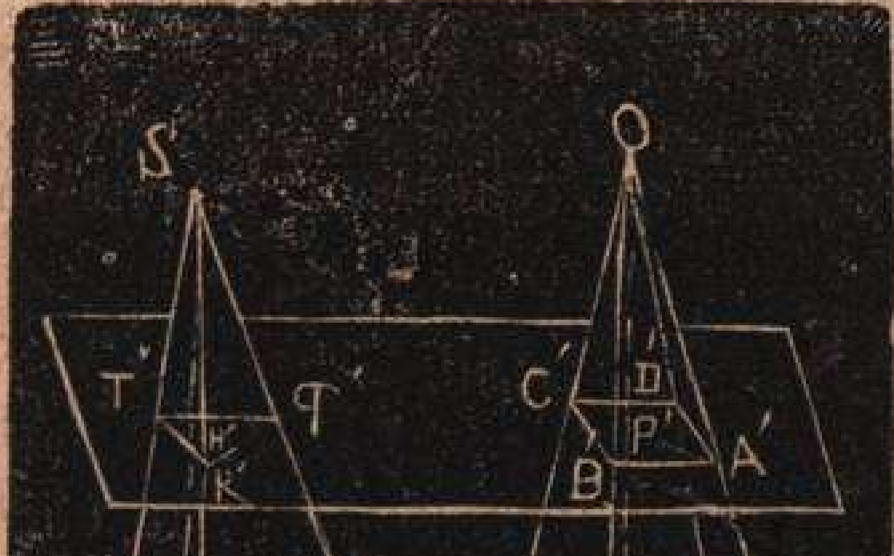


Fig. 157.

Si en sus alturas tomamos SH'=OP' y por los puntos H' y P' trazamos un plano paralelo á aquel sobre el cual ambas pirámides se hallan colocadas, resultarán las secciones T'R'P' y A'B'C'D', que segun el teorema demostrado anteriormente, resultará que:

$$\frac{TRQ}{T'R'Q'}=\frac{\overline{SH}^2}{\overline{SH'}^2}$$

$$y \quad \frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP'}^2},$$

y siendo OP=SH y OP'=SH', resultará que:

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{TRQ}{T'R'Q'}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Corolarios: *1.° Siendo dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, si se cortan por planos paralelos á dichas bases y equidistantes de sus vértices, las secciones serán respectivamente equivalentes.*

2.° Conociendo una pirámide truncada de bases paralelas, por la semejanza de triángulos fácilmente determinamos la altura de la total y la de la pirámide deficiente.

En efecto, sea T'R'P'TRP la pirámide truncada dada: si suponemos completa dicha pirámide, resultará que TR:T'R'::ST:ST'. Ahora bien: la semejanza de los triángulos THS y T'H'S nos dá que TS:T'S::SH:SH', de cuyas dos proporciones se tiene que TR:T'R'::SH:SH', de

donde TR−T'R':TR::SH—SH':SH, y tambien

TR−T'R':T'R'::SH−SH':SH';

si llamamos l y l' á los lados paralelos de la base y de la seccion, y a á la altura del tronco, tendremos que:

$l-l':l::a:$SH y $l-l':l'::a:$SH', de donde

$$SH=\frac{a\times l}{l-l'} \text{ y } SH'=\frac{a\times l'}{l-l'}.$$

De los Prismas.

258. Se llama **Prisma** un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, siendo todas las demás paralelógramos.

En todo prisma es necesario distinguir sus *bases*, su *altura*, sus *vértices*, sus *aristas* laterales y basilares y sus *caras* laterales.

Sus *bases* son las caras iguales y paralelas.

Su *altura* es la distancia comprendida entre ambas bases.

Sus *vértices* son los puntos comunes á tres caras.

Sus *aristas laterales* son las que unen vértices de ambas bases.

Sus *aristas basilares* son las que unen vértices de cada base.

Sus *caras laterales* son todas las caras del prisma que no son bases.

El Prisma se llama regular cuando sus bases son polígonos regulares, siendo la recta que une los puntos medios de estas perpendicular á las mismas.

El Prisma se llama *irregular* cuando no cumple con algunas de las condiciones expresadas.

Los *Prismas* pueden ser *rectos* ú *oblícuos*: en el primer caso sus aristas laterales son perpendiculares á sus bases, y en el segundo son oblícuas.

La altura de un prisma recto es igual á una de sus aristas laterales.

La altura de un prisma oblícuo es menor que una de sus aristas laterales.

De la definicion de Prisma regular se deduce:

1.° *Todas sus aristas basilares serán iguales entre sí.*

2.° *Todas sus aristas laterales serán paralelas entre sí.*

3.° *Todas sus aristas laterales serán iguales entre sí.*

4.° *Todos los ángulos diedros formados en las aristas basilares son rectos.*

5.° *Todos los ángulos diedros formados en las aristas laterales son iguales entre sí.*

6.° *Todos los ángulos poliedros de un prisma son triedros.*

Todos los prismas que como tales son regulares, no lo son como poliedros, pues que no tienen las caras vértices y aristas respectivamente iguales. De todos los prismas no hay mas que el *exaedro* que sea poliedro regular.

Los prismas se denominan y clasifican atendiendo al número de sus caras laterales: así se llaman Prismas *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales* etc., segun que el número de sus caras laterales sea 6, 5, 4, 3, etc., cual se representan en las figuras siguientes:

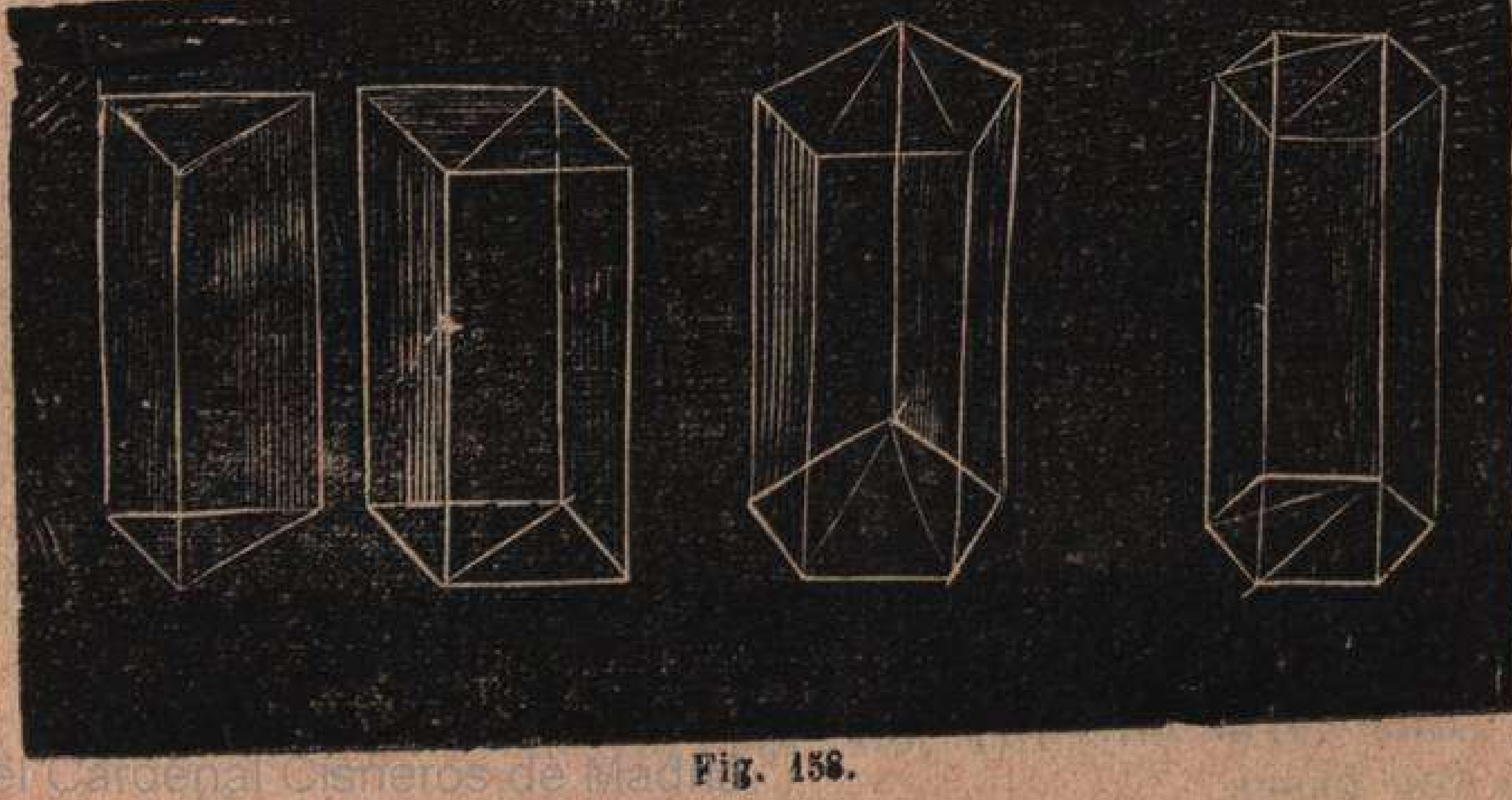


Fig. 158.

Se llama *plano diagonal* de un prisma el que pasa por dos aristas no contíguas del mismo.

De todos los prismas es el mas simple el prisma triangular, que le formarán *dos planos* triangulares y tres paralelógramos, y por tanto, teniendo cinco planos es un *Pentaedro* entre los poliedros.

Al prisma cuadrangular le podremos llamar exaedro, el cual será regular entre los poliedros, cuando siendo regular entre los prismas, una cualquiera de sus caras laterales sea igual á una de sus dos bases.

Al prisma pentagonal, exagonal, eptagonal, etc., se le llamará respectivamente *eptaedro, octaedro, eneaedro*, etc.

El elemento prismático es el Prisma triangular; y así como todo polígono se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene, menos dos; y de saberse tambien, que segun el teorema 192, un plano está determinado por dos rectas paralelas, resultará que:

Todo prisma se puede descomponer en tantos prismas triangulares como lados tenga el polígono de su base, menos dos.

Conforme se comprobará en las figuras 158, en las que observaremos que la pirámide exagonal se descompone en cuatro prismas triangulares; la pentagonal en tres; y la cuadràngular en dos.

259. Teorema. *Todo prisma de bases paralelas que se corte por un plano secante paralelo á sus bases, la seccion es un polígono igual á cualquiera de ellas.*

En efecto, siendo paralelas las dos intersecciones de un plano comprendido entre otros dos paralelos; y siendo iguales los ángulos formados por rectas paralelas dirigidas en el mismo sentido, y trazadas en planos diferentes (Teorema 203), y siendo paralelas comprendidas entre paralelas iguales, resultará evidente la tésis de este teorema.

260. Teorema. *Dos prismas rectos son iguales, cuando tienen igual base é igual altura.*

En efecto, superponiendo dichos dos prismas, por ser iguales sus bases coincidirán, y por ser iguales sus alturas y la de cada uno igual á todas sus aristas laterales, resultará que las aristas laterales del uno serán iguales á las del otro, y que por tanto, los dos prismas serán iguales.

Corolario. *Dos prismas* BP *y* B'P' (fig. 159) *son iguales si tienen un ángulo triedro igual, por ejemplo el* B=B';

siendo las tres caras BADEC, BNFC y BAMN que forman el primero, respectivamente iguales á las B'A'D'E'C', B'N'F'C' y B'A'M'N' que forman el segundo, hallándose además dispuestos de la misma manera dichos elementos.

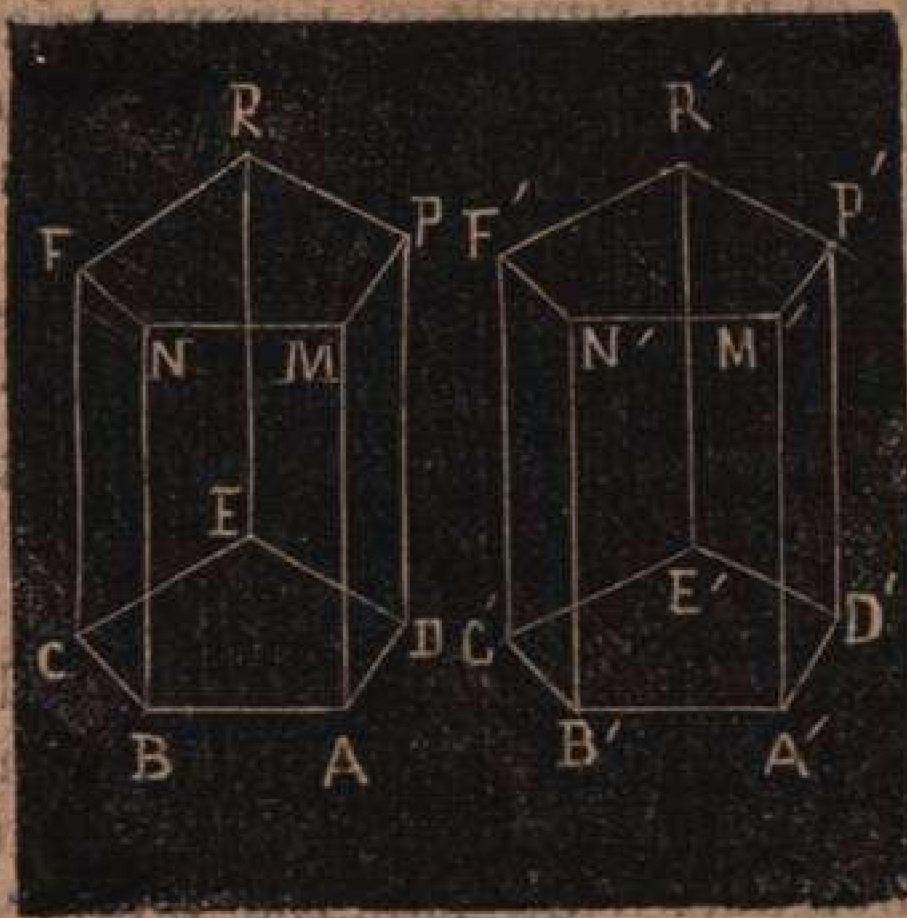


Fig. 159.

En efecto, siendo iguales los espresados elementos, si los superponemos coincidirán, y por tanto, todas las aristas serán respectivamente iguales, unas por superposicion y otras por ser rectas paralelas comprendidas entre paralelas, luego las caras serán iguales respectivamente y así mismo los dos prismas en las condiciones anteriormente espresadas.

Todo prisma oblícuo es equivalente á un prisma recto que tenga la misma altura y que tenga por base la seccion recta del prisma.

261. **Teorema.** *Un prisma recto está determinado, siempre que sea conocida la superficie de su base y su altura.*

En efecto, trazando un plano paralelo á la base conocida por el estremo superior de una de las aristas del prisma, que será una recta igual y paralela en un vértice de aquella á la altura dada, si trazamos además por todos los vértices de la base, paralelas á dicha arista ó á la altura dada, las intersecciones con dicho plano serán los vértices de la otra base: si por cada dos de las aristas laterales y uno de los lados de la base hacemos pasar planos, tendremos determinadas las caras laterales y por tanto el prisma.

Corolarios: *1.° Un prisma estará determinado, siempre que sean conocidas una de sus bases y dos caras laterales contíguas.* Pues entónces será conocida además de la base la arista que sirve de interseccion comun á dichas dos caras laterales, reduciéndose este caso al anterior.

2.° Un prisma cualquiera estará determinado conociendo su base, una de sus aristas laterales y el ángulo que esta forma con aquella.

3.° Un prisma cualquiera estará tambien determinado conociendo una de sus bases, una de sus caras laterales y *el ángulo diedro que forman.* En este caso, á mas de la base, serán conocidas dos de las aristas laterales qne determinan la cara lateral dada.

Los casos de igualdad de las pirámides y de los prismas, espresan los de determinacion de pirámides y prismas respectivamente.

262. Teorema. *En todo paralelepípedo las caras laterales y opuestas son iguales y paralelas.*

Se llama *Paralelepípedo*, un prisma cuyas bases son paralelógramos, tal como el APMNCEBD (fig. 160).

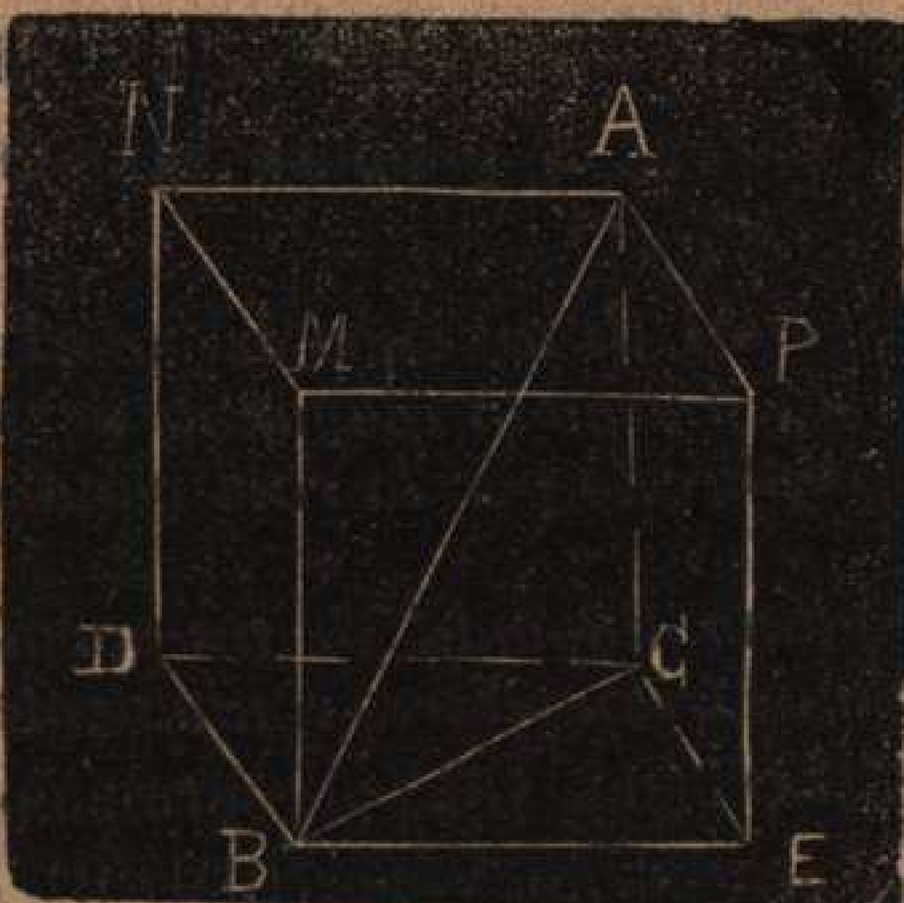


Fig. 160.

Lema: *Las aristas laterales de todo prisma recto, son iguales y paralelas.* En efecto, ND=MB=PE=AC, porque siendo diedros rectos los formados por la base con cualquiera de las caras laterales, cada una de las aristas espresadas será perpendicular á los planos de entrambas bases, y como todas las rectas perpendiculares á un plano son paralelas, resultará que dichas aristas son todas paralelas entre sí. Como rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos son iguales, resultará que dichas aristas son todas iguales entre sí.

Ahora bien, y *para la demostracion del Teorema*, siendo AC igual y paralela á PE, y siendo por hipótesis AP igual y paralela con CE, resultará ser un paralelógramo la cara lateral APEC, y por razones análogas todas las demás. Mas como MB y ND son iguales y paralelas entre sí y con las AC y PE de la cara opuesta, y además DB y NM son iguales y paralelas entre sí y con las AP y CE de la otra cara, resultará por último que las caras opuestas APEC y NMBD de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

Corolarios: *1.° En un paralelepípedo es indiferente tomar por bases dos cualesquiera de sus caras opuestas.*

2.° Todo paralelepípedo que tenga todas sus caras iguales, es un poliedro regular que se llama Cubo ó Exaedro.

3.° Todo plano que corte á un paralelepípedo en dos caras opuestas, la seccion del mismo es un paralelógramo.

4.° *Las diagonales de un paralelepípedo se cortan siempre en partes iguales, y si el paralelepípedo es rectángulo, sus cuatro diagonales son iguales.*

5.° *El cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, es igual á la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.*

En efecto, sea el paralelepípedo rectángulo el representado en la figura 160, su diagonal será AB, el triángulo ABC será rectángulo en C, y por tanto, $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$. Pero BC es diagonal del rectángulo de la base, luego el triángulo BCE es rectángulo, y por tanto, $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2$ y como $\overline{AC}^2=\overline{PC}^2$, sustituyendo en la primera igualdad resultará que: $\overline{AB}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{PE}^2$.

6.° *El cuadrado de la diagonal de un cubo es igual al triplo del cuadrado de su arista. Luego la diagonal de un cubo es igual á su arista, multiplicado por la raiz cuadrada de tres.*

263. Teorema. *Todo plano diagonal de un paralelepípedo le divide en dos prismas triangulares equivalentes.*

En efecto, sea ABCDA'B'C'D' (fig. 161) el paralelepípedo dado, y sea BDD'B' el plano diagonal, vamos á demostrar la igualdad de los dos prismas triangulares CBDC'B'D' y ABDA'B'D'. Dichos dos prismas triangulares tendrán una cara lateral comun que es el plano diagonal, las otras caras laterales iguales y paralelas, segun el teorema anterior, y sus bases respectivamente iguales como mitades de un paralelógramo, luego dichos dos prismas triangulares tienen la misma *magnitud* y son por tanto *equivalentes*; tienen además la misma *figura y magnitud*, siendo por tanto *iguales*.

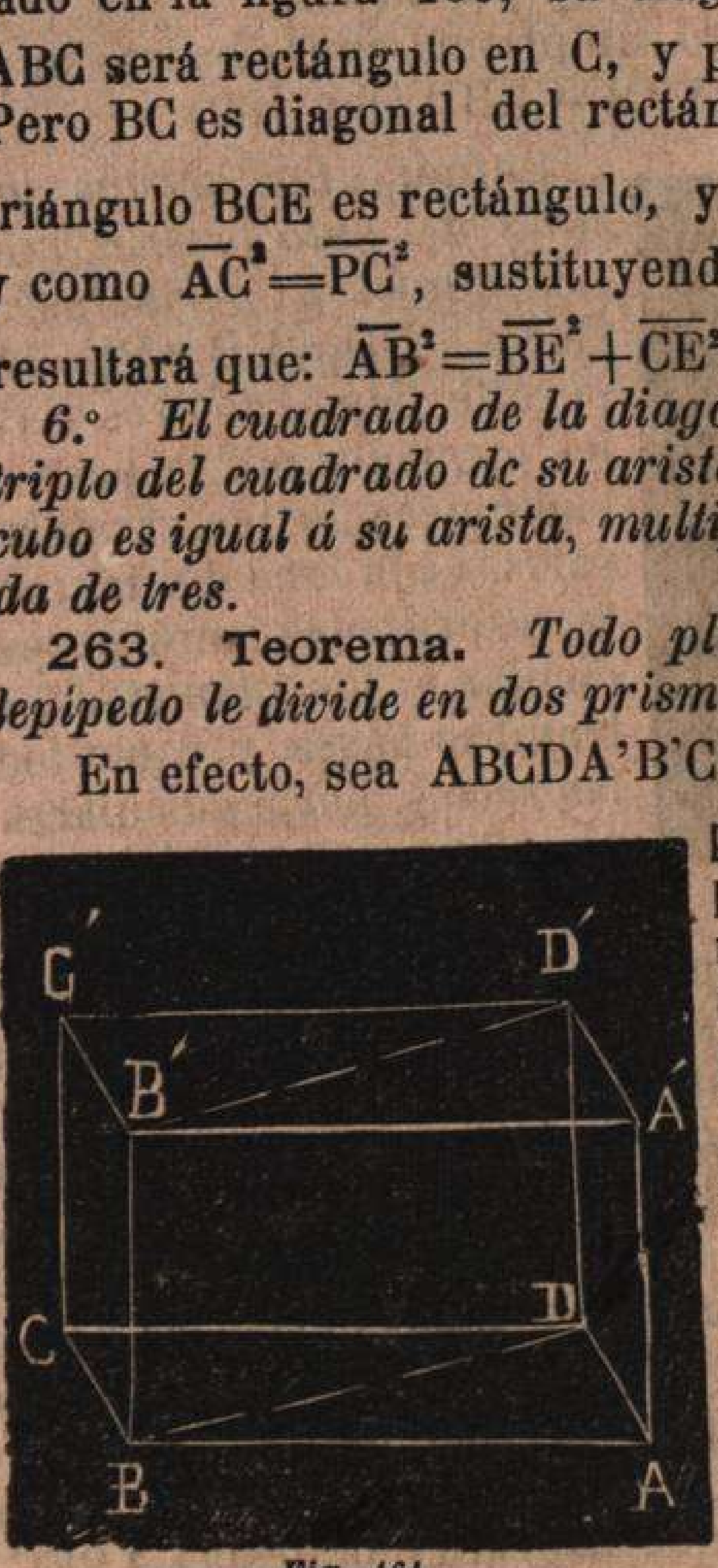


Fig. 161.

Corolarios: 1.° *Todo prisma triangular lo podemos considerar como la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y base dupla, bien sea dicho prisma triangular, recto ú oblícuo.*

2.° Los prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes serán tambien equivalentes por tener la misma magnitud.

3.° Todo prisma se puede descomponer trazando planos diagonales, en tantos prismas triangulares como lados tenga el polígono de su base, menos dos.

De esto resultará que el prisma triangular, es elemental y por tanto indescomponible. Que un prisma cuadrangular se descompone en dos prismas triangulares, el pentagonal en tres, el exagonal en cuatro, etc., etc.

De los Poliedros en general.

264. Teorema. *Dos Poliedros son iguales cuando tienen iguales é igualmente colocados sus caras y ángulos diedros homólogos.*

Sean A'B'C'D'O'P' y ABCDOP (fig. 162) los dos poliedros dados: si superponemos la cara A'B'C'D' del primero á la ABCD del segundo, por ser iguales los diedros D'C' y DC, la cara D'C'O'P' del primero coincidirá con la DCOP del segundo: iguales consideraciones podremos hacer con respecto á cada dos elementos iguales; y como en la superposicion coinciden, dichos dos poliedros serán iguales.

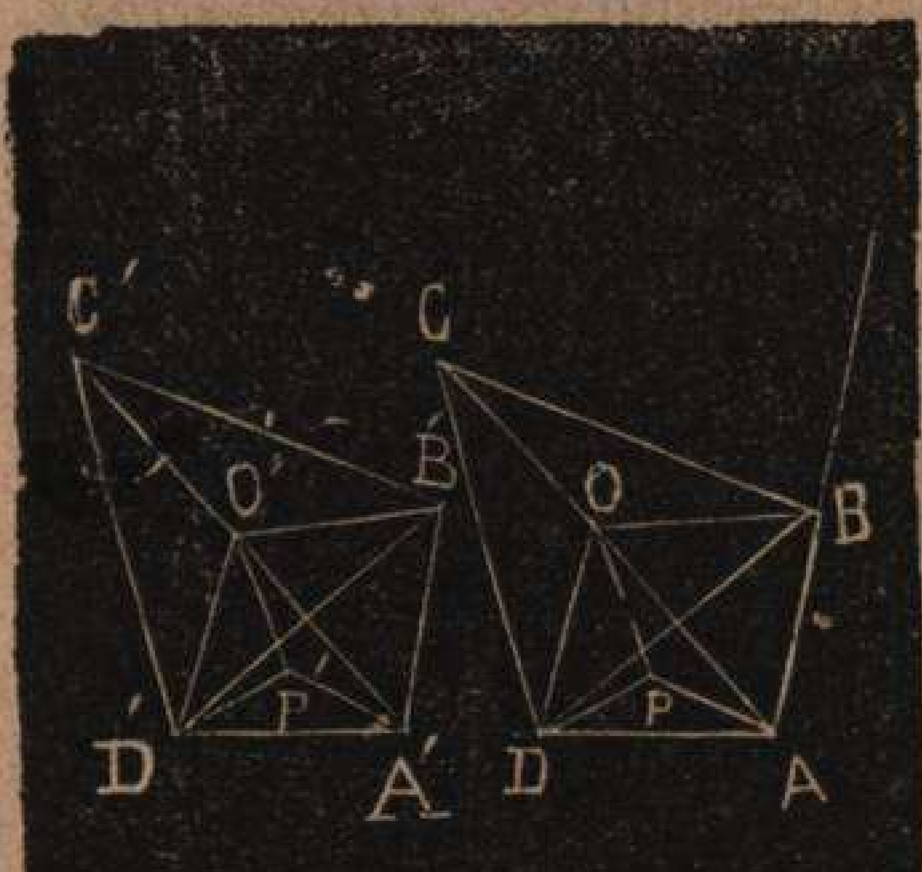


Fig. 162.

265. Teorema. *Dos poliedros iguales se pueden siempre descomponer por planos diagonales homólogos en el mismo número de tetraedros iguales, é igualmente colocados.*

En efecto, en los dos poliedros iguales anteriores, si trazamos los planos secantes O'D'A' y O'D'B' en el primero, y ODA y ODB en el segundo, resultará que los triedros O'D'A'P'. O'D'A'B' y O'D'B'C' del primero, los cuales serán respectivamente iguales á los ODAP, ODAB y ODBC del segundo, por cumplirse en ellos las condiciones expresadas en alguno de los casos del teorema 252.

Recíprocamente podremos decir: «*si dos poliedros se componen del mismo número de tetraedros iguales respec-*

tivamente y de la misma manera colocados, dichos dos poliedros serán iguales.»

266. Teorema. *Un poliedro cualquiera estará determinado siempre que lo estén todos los diferentes tetraedros en que puede descomponerse, trazando planos secantes y siendo tambien conocido el órden de colocacion de los mismos.*

En efecto, cualquiera de los poliedros dados se puede descomponer en los tetraedros DOAP, DOAB y DOBC; luego si sabemos la determinacion de cada uno de estos, y además que la arista DO es comun para todos; que la cara DOA es comun para los dos primeros, y la DOB para los dos últimos, se hallará perfectamente determinado el poliedro DABCOP.

Poliedros regulares.

267. Llámanse poliedros regulares, *segun hemos dicho en el número 250, aquellos que tienen iguales entre sí todas sus caras, todas sus aristas, todos sus vértices y ángulos poliedros.*

Los poliedros regulares están formados por caras de polígonos regulares.

268. Teorema. *Los polígonos regulares que pueden formar poliedros convexos regulares no pueden ser mas que triángulos cuadrados ó pentágonos.*

En efecto, de todos los ángulos poliedros el mas simple es el triedro, y por tanto se necesitan cuando menos tres ángulos planos para formar un triedro.

Segun el teorema 225, ningun ángulo triedro puede llegar á valer cuatro ángulos rectos.

El cuadro expuesto en el número 127, nos dice que el ángulo del triángulo equiláctero es igual á 60°.

Que el ángulo del cuadrado es igual á 90°.

Que el ángulo del pentágono es igual á 108°.

Que el ángulo de exágono es igual á 120°.

Que los ángulos de los demás polígonos regulares contienen mayor número de grados.

Necesitándose cuando menos tres ángulos planos de polígono regular para formar un ángulo triedro, y debiendo ser la suma menor que cuatro ángulos rectos, ó sean 360°, resultará que con ángulos planos de triángulo equiláctero, de cuadrado ó de pentágono, podremos formar ángulo triedro que no exceda ni aun llegue al límite de los 360°. Ahora bien, como el ángulo plano del exágono regular es igual á 120°, tendremos que *tres* ángulos de exágono valdrán 360°, es decir, que se unirán en un plano, no pudiendo formar de modo alguno ángulo triedro. Si pues con ángulos de exágono no puede formarse ángulo poliedro; imposible será formarlo con el concurso de tres ó mas ángulos planos correspondientes á polígonos de mayor número de lados; luego por tanto, solo con triángulos, cuadrados y pentágonos regulares se pueden formar poliedros regulares.

269. Teorema. *Los poliedros regulares son cinco y no pueden esceder de este número.*

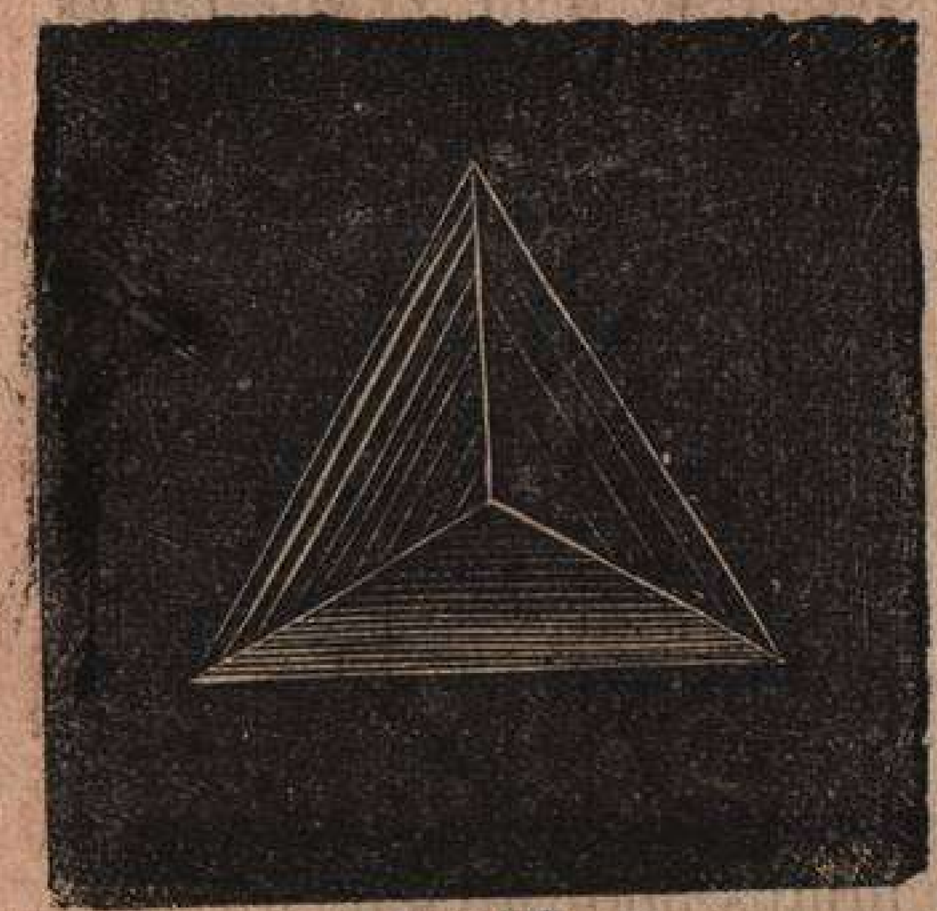


Fig. 163.

De todos los polígonos regulares el de menor número de lados es el triángulo equiláctero, cuyo ángulo tiene 60°; el ángulo poliedro formado por el menor número posible de planos, es el triedro; si cerramos el espacio comprendido por un ángulo triedro con otro triángulo equiláctero, habremos formado el poliedro regular mas sencillo de todos, que por ser el espacio comprendido por cuatro planos, se halla Tetraedo, cual se representa en la (fig. 163). *Todo tetraedro tiene cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas.* El ángulo poliedro del tetraedro vale $3 \times 60° = 180°$.

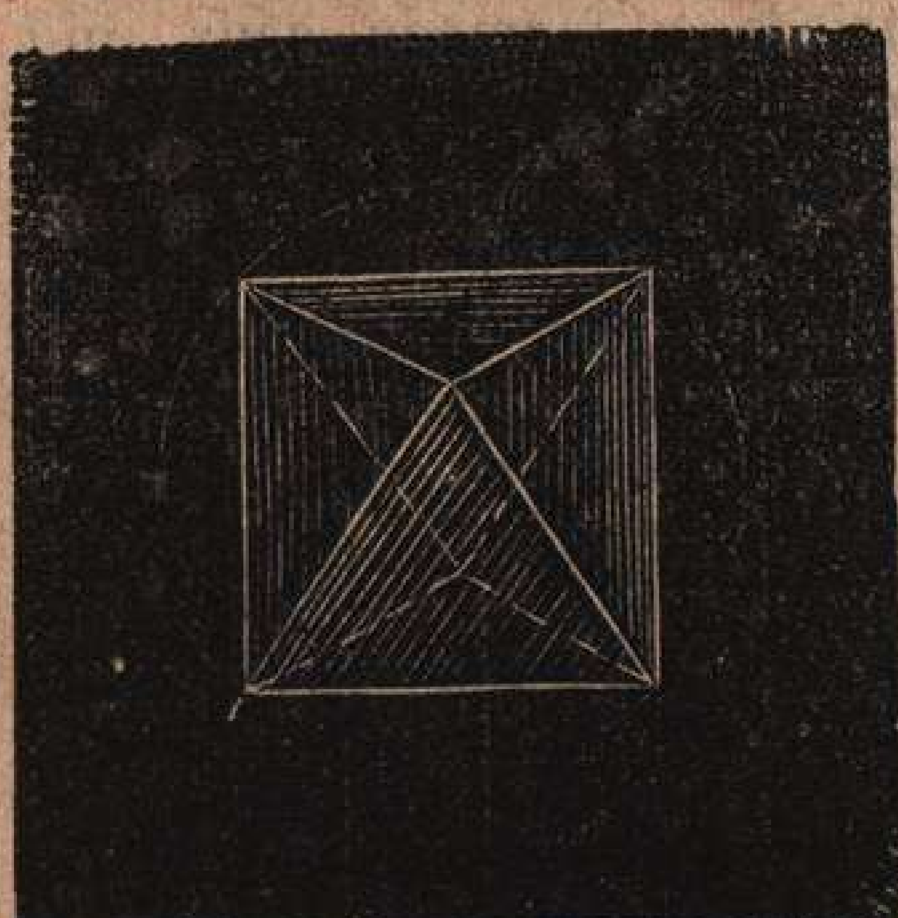


Fig. 164.

Si formamos un ángulo poliedro con cuatro planos de triángulo equiláctero, será posible, por valer este menos de cuatro rectos, formando otro y uniéndolos por sus aristas opuestas, todos los vértices de union serán ángulos tetraedros y el poliedro que se limite será un Octaedro, cual se representa en la (fig.164), el que tendrá *ocho caras, seis vértices y doce aristas.* El ángulo poliedro del octaedro como formado de cuatro ángulos planos de triángulo equiláctero valdrá $4\times60°=240°$.

Si formamos un ángulo poliedro con cinco planos de triángulo equiláctero, será tambien posible por valer este menos de cuatro ángulos rectos, y si en cada uno de los vértices del triángulo equiláctero formamos un ángulo *pentaedro*, cerrándolo luego llegaremos á formar el poliedro regular llamado **Icosaedro**; este tiene *veinte caras, doce vértices* y *treinta aristas*. El ángulo poliedro, como constituido de cinco ángulos planos de triángulo equiláctero, valdrá $5\times60°=300°$. Se representa el Icosaedro, conforme se indica en la (fig. 165).

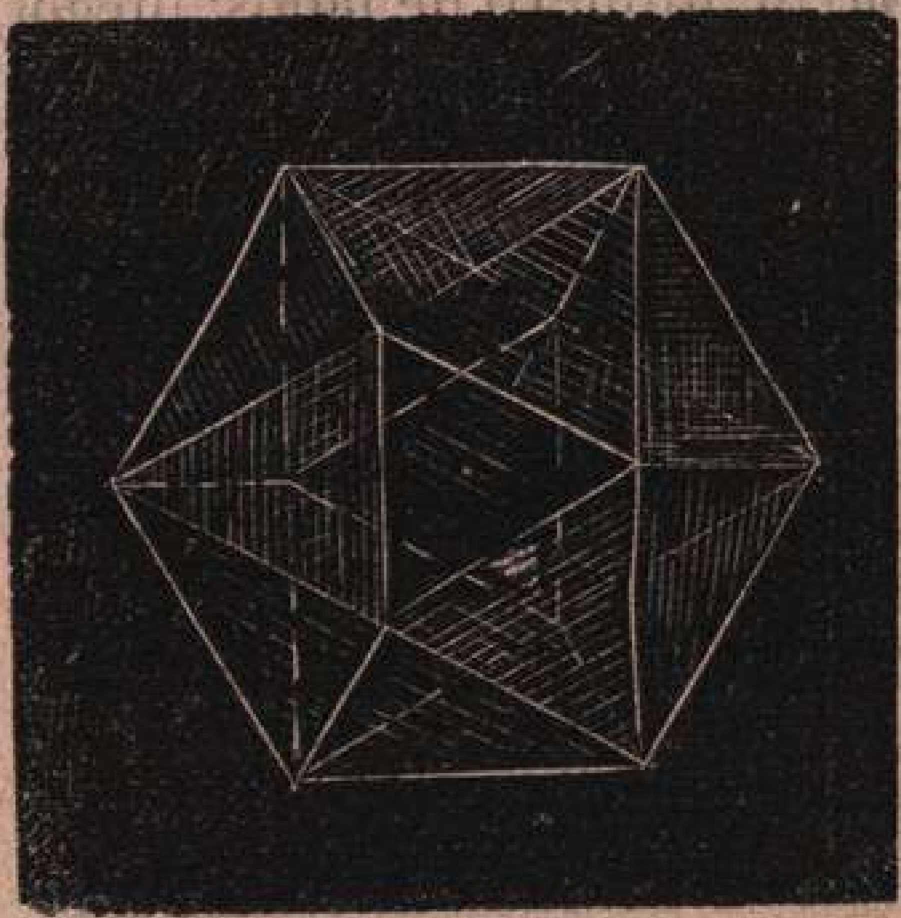


Fig. 165.

Con planos de triángulos equiláctero, no pueden formarse mas que los tres poliedros regulares que anteceden, pues con 6 ángulos planos de triángulo no podríamos formar vértice poliedro, por valer juntos $360°=6\times60°$.

Si del plano del triángulo pasamos inmediatamente al cuadrado, con estos no podemos formar mas que ángulos triedros; con dos ángulos triedros, formado cada uno de tres cuadrados, y cerrando espacio, conforme se indica en la (fig.166), cerraremos un poliedro regular que se llama **Cubo ó Exaedro**; este tiene *seis caras, ocho vértices* y *doce aristas*. El ángulo poliedro como formado de tres ángulos planos de cuadrado, valdrá $3\times90°=270°$. Con cuadrados, no se puede formar mas que este poliedro regular.

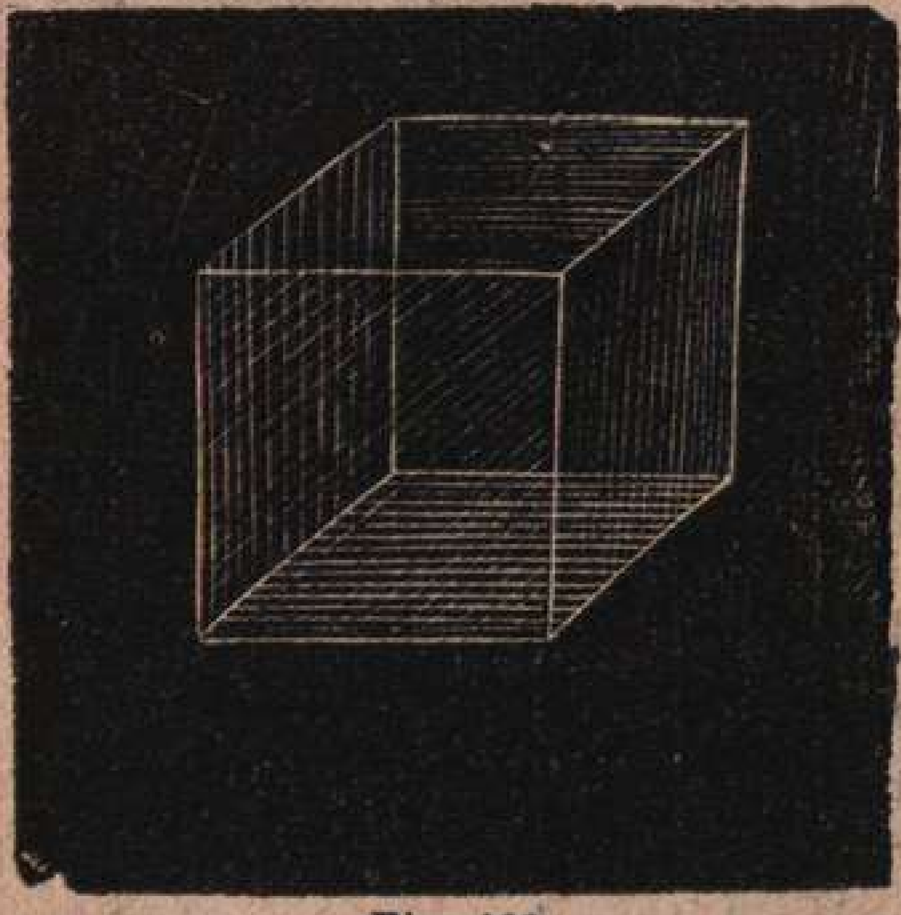


Fig. 166.

Inmediatamente despues del cuadrado en el órden de los polígonos regulares sigue el pentágono, y con polígonos de esta clase se puede formar ángulo triedro, puesto que tres veces el valor 108 del ángulo plano de este polígono (127) vale menos de cuatro rectos.

Si formamos ángulos triedros con ángulos planos de pentágono, procurando llegar á cerrar espacio, llegaremos á formar el Dodecaedro regular, (fig. 167) el cual tiene: *doce caras, veinte vértices y treinta aristas* (1). El ángulo poliedro, como constituido de tres ángulos planos de pentágono, valdrá:

$$3\times108^\circ=324^\circ.$$

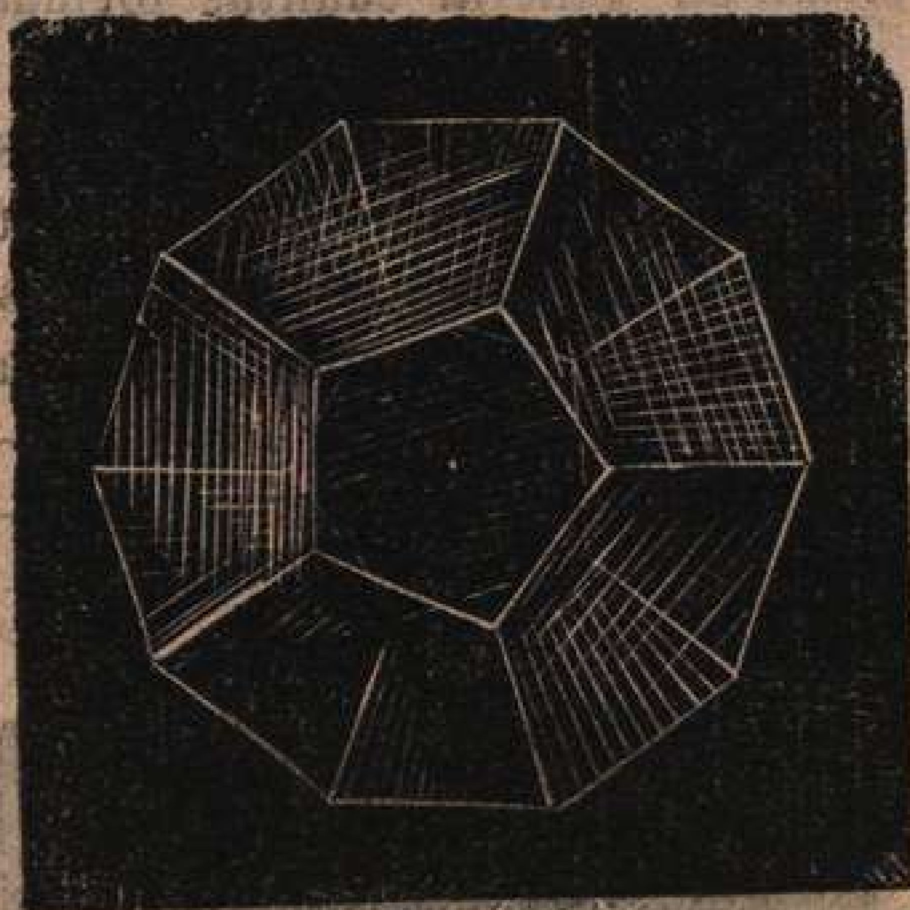


Fig. 167.

Dicho se está, que con pentágonos regulares no podremos formar ningun otro poliedro regular y tampoco con el concurso de exágono, toda vez que el menor número de estos posible para formar ángulo poliedro serian tres

$$\text{y}\quad 3\times120^\circ=360^\circ,$$

por lo cual seria un punto de una superficie plana, y no de modo alguno ángulo poliedro.

De lo expuesto, comprenderemos que *dos poliedros regulares del mismo nombre serán iguales, siempre que tengan una arista igual.*

En efecto, todos los polígonos regulares que tengan un lado igual son iguales (2.° corolario del teorema 130,) y por tanto los dos poliedros tendrian todas sus caras respectivamente iguales, las aristas tambien y los ángulos poliedros, puesto que estos están determinados por los ángulos planos de los polígonos regulares; luego los dos poliedros que tengan una arista serán iguales.

De esto se inferirá que *un poliedro regular está determinado siempre que se conozca su nombre y la longitud* de una de sus aristas.

Estos cuerpos son conocidos en la naturaleza con el nombre de cuerpos *Platónicos*, segun unos; y segun otros con el nombre de cuerpos *Aristotélicos*, por haber servido cada uno de ellos para

(1) Hay un teorema llamado de EULER, el cual expresa la relacion que en un poliedro existe entre el número de caras, vértices y aristas, las que si representamos respectivamente por C, V y A, nos demuestra que:

$$A+2=C+V,\quad \text{de donde}\quad A=C+V-2,\quad C=A+2-V\quad \text{y}\quad V=A+2-C.$$

la representacion de los llamados antiguamente elementos simples ó aristotélicos, *aire*, *agua*, *fuego*, etc. La naturaleza nos presenta estos poliedros bajo la forma regular.

Así tenemos, el diamante bajo la forma tetraédrica; el cinabrio, la galena, etc., bajo la forma cúbica; el hierro magnético bajo la forma octaédrica, etc , etc., verificándose que los tipos cristalinos y las formas derivadas, etc., presentan en general cuantas formas geométricas puedan estudiarse.

270. Las superficies poligonales que limitan estos cuerpos se pueden desarrollar sobre una superficie plana fácilmente, teniendo en cuenta el órden y disposicion de los diferentes polígonos que los limitan. De otro modo, para la construccion de estos cuerpos se necesita conocer el desarrollo de su superficie poligonal, cual los exponemos á continuacion:

Fig. 168.

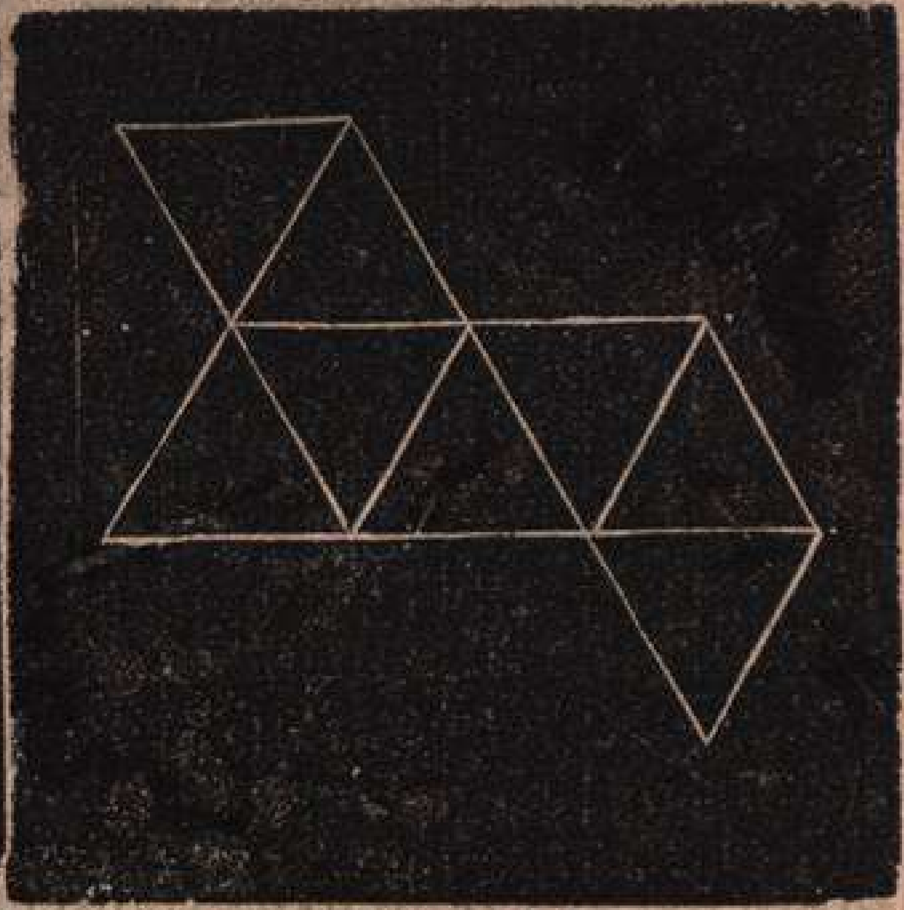


Fig. 169.

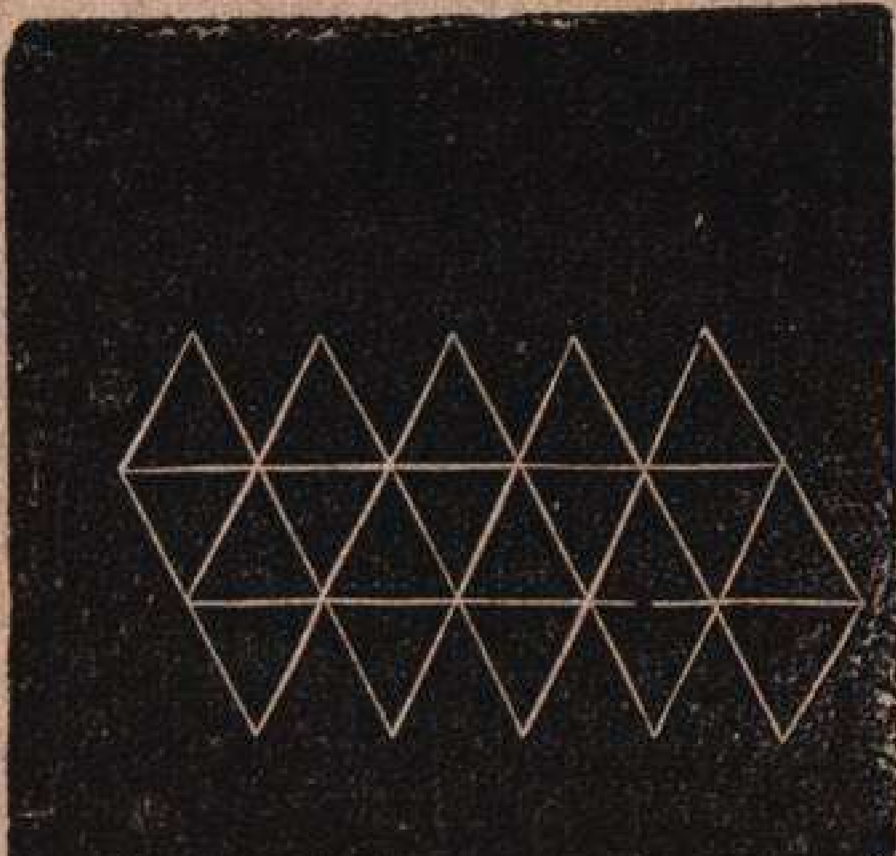


Fig. 170.

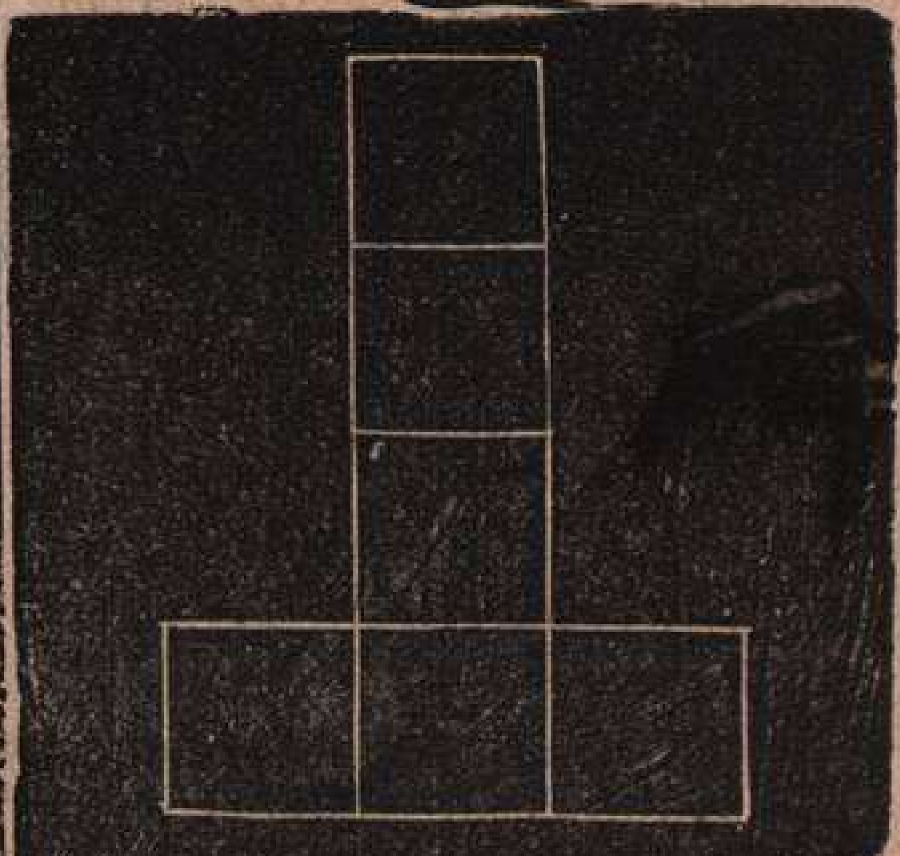


Fig. 171.

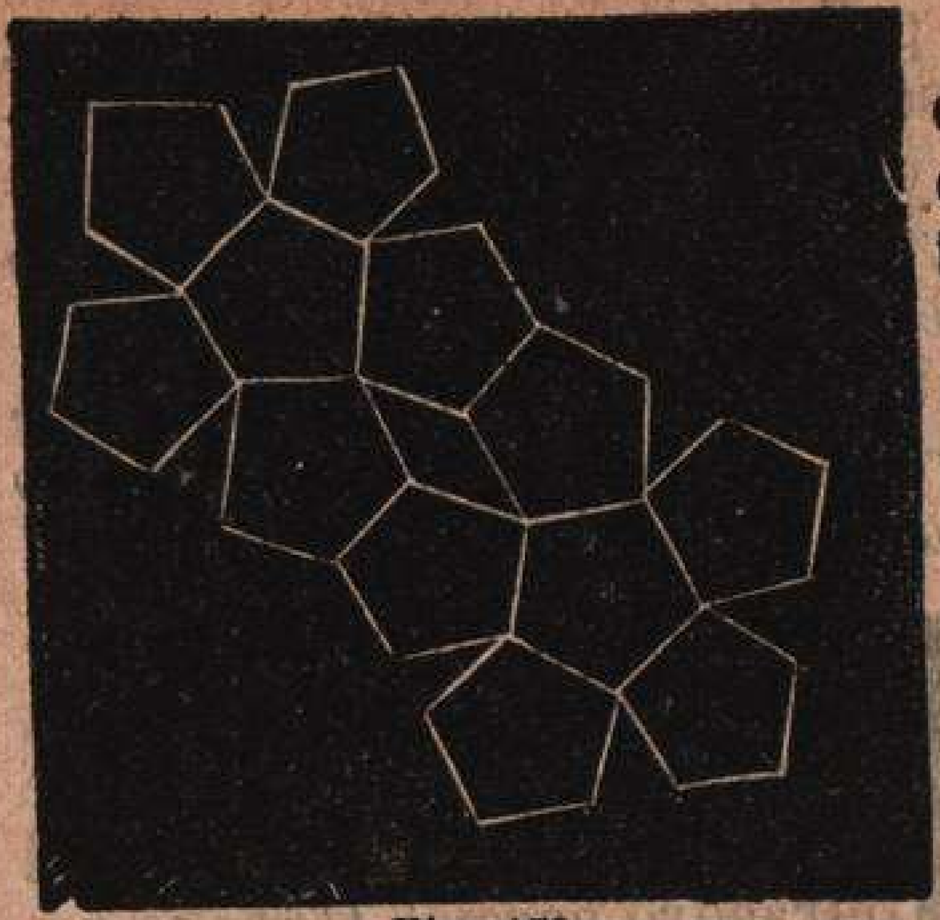


Fig. 172.

La figura 168 representa el desarrollo de las superficies poligonales de un tetraedro.

La figura 169 representa el desarrollo de las superficies poligonales de un octaedro.

La figura 170 representa el desarrollo de las superficies poligonales de un icosaedro.

La figura 171 representa el desarrollo de la superficie poligonal de un exaedro ó cubo y la figura 172 representa el desarrollo de la superficie poligonal de un dodecaedre regular.

Las siguientes conclusiones serán evidentes segun lo expuesto:

271. 1.° *Dada la arista de uno cualquiera de los cinco poliedros regulares, se podrá fácilmente proceder á la construccion de este, puesto que serán tambien conocidas todas sus caras, ángulos, diedros y poliedros.*

2.° *Todos los poliedros regulares del mismo nombre son siempre semejantes.*

3.° *Si la coordinacion de todos los elementos de dos poliedros iguales es una misma, dichos poliedros serán* idénticos.

4.° *Si la coordinacion de todos los elementos de dos poliedros iguales es inversa, dichos poliedros serán* simétricos.

5.° *Si se levantan perpendiculares en los centros de todas las caras de un poliedro regular, sucederá: 1.° que se encontrarán en un punto: 2.° que dichas perpendiculares serán todas iguales: 3.° que dicho punto será el centro del poliedro y el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los vértices de todas sus caras, llamándose cada una de estas distancias comprendidas entre el centro del poliedro y el de cada una de las caras* apotema *de poliedro, y la distancia del centro del poliedro regular á uno cualquiera de sus vértices,* rádio *del poliedro: 4.° dicho centro, lo será tambien de la esfera que inscriba ó circunscriba al poliedro; la inscripta tendrá por rádio la apotema, y la circunscripta el rádio del poliedro espresado.*

6.° Si se descompone un poliedro regular en pirámides, tomando por orígen de la descomposicion el centro del poliedro, las pirámides que se obtengan serán todas regulares, luego *todo poliedro regular puede ser descompuesto en tantas pirámides regulares iguales, como caras tiene.*

272. Teorema. *Si un tetraedro se corta por un plano paralelo á una cualquiera de sus caras, el tetraedro parcial que resulta es semejante al total.*

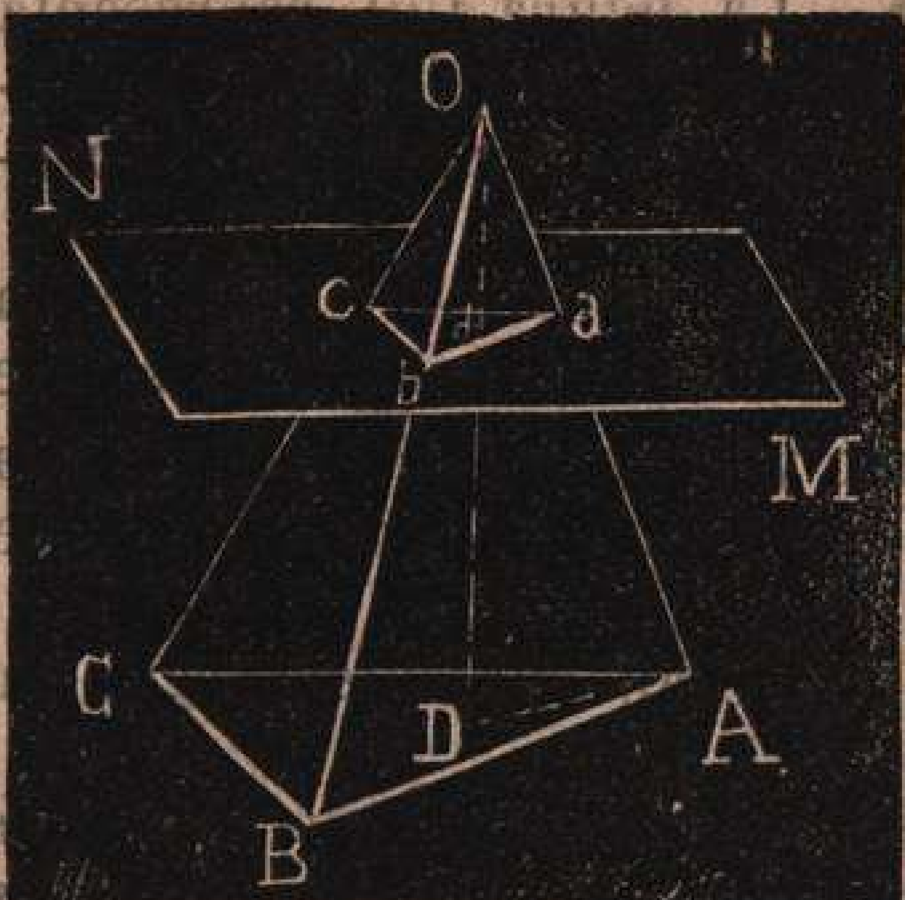


Fig. 173.

En efecto, sea OABC (figura 173) el tetraedro dado, y sea MN el plano secante paralelo á la base ABC; el tetraedro parcial O*abc* es semejante al total OABC, porque la base *abc* del parcial es semejante á la ABC del total, segun lo demostrado en el teorema 256. El ángulo triedro O es comun para los los, y siendo los triángulos O*ab*, O*ac*, O*bc* respectivamente semejantes á las OAB, OAC y OBC, segun lo demostrado en el teorema 92, re-

NOTA.—La trigonometria esférica nos proporciona medios para determinar el valor en grados del ángulo diedro formado en una arista por dos caras adyacentes en cada uno de los cinco poliedros regulares. Asi tenemos:

Tetraedro regular..........	70°+31'+43'',6.
Exaedro »	90°.
Octaedro »	109°+28'+16'',4.
Dodecaedro »	116°+35'+54'',2.
Icosaedro »	138°+11'+22'',75.

Asi mismo podemos determinar las apotemas y rádios de dichos poliedros regulares, es decir los rádios de las esferas inscriptas y circunscriptas á cada uno de dichos poliedros, cuyo conocimiento es muy esencial, llamándoles respectivamente *r* y R, y *a* á la arista, tendremos:

Tetraedro regular $r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$.......... $R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Exaedro » $r=\frac{a}{2}$.............. $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Octaedro » $r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$............ $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Dodecaedro » $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$... $R=\frac{a(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$

Icosaedro » $r=\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$..... $R=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

sultará que los ángulos triedros *a*, *b* y *c* del parcial, serán respectivamente iguales á los A, B y C del total. Por tanto, los dos triedros serán semejantes.

273. Teorema. *Dos tetraedros son semejantes en los casos siguientes: 1.° Si tienen sus tres caras respectivamente semejantes. 2.° Si tienen dos caras respectivamente semejantes, siendo igual respectivamente el ángulo diedro comprendido. 3.° Si tienen una cara respectivamente semejante, y siendo esta en los dos tetraedros contigua á tres ángulos diedros respectivamente iguales.*

Se supone que en todos estos casos se hallen los elementos dados colocados semejantemente.

1.er caso. Sean OABC y *oabc* (fig. 174) los dos tetraedros dados, y en los que suponemos que las tres caras laterales sean respectivamente semejantes. Si tomamos sobre la arista OC del mayor una longitud igual á la *oc* del menor y por el punto *c* trazamos un plano paralelo, los dos tetraedros OABC y O*abc*, total y parcial menor serán respectivamente semejantes, segun el teorema anterior. Ahora bien: de la igualdad de los dos tetraedros O*abc* y *oabc*, y de la semejanza de los OABC y O*abc*, se deduce la semejanza de los dos tetraedros dados: por tanto, sus caras homólogas serán respectivamente semejantes; los ángulos diedros que forman cada dos caras homólogas serán iguales, así mismo como los ángulos triedros.

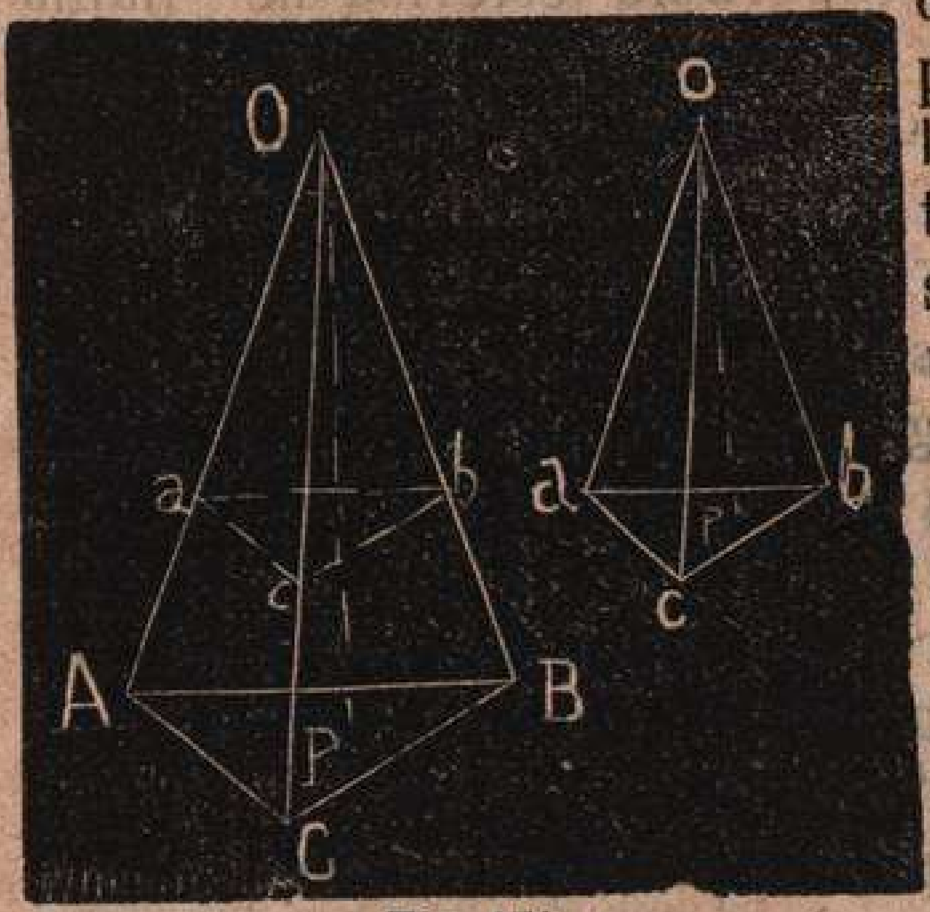


Fig. 174.

El 2.° y 3.er caso se demuestra análogamente al caso anterior; fundamos muy especialmente en lo expuesto en el 2.° y 3.° del teorema 252.

274. Teorema. *Dos poliedros serán semejantes cuando puedan descomponerse en el mismo número de tetraedros semejantes y ordenadamente colocados.*

Entre dos poliedros semejantes se verifica:

1.° *Que sus caras homólogas son respectivamente semejantes.*

2.° *Los ángulos diedros formados en las aristas homólogas son iguales.*

3.° *Los ángulos poliedros formados en los vértices homólogos son iguales.*

Este teorema se demuestra fácilmente de una manera análoga al teorema 264.

Recíprocamente diremos: *Si dos poliedros son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros semejantes respectivamente y colocados semejantemente.*

275. Al tratar de las superficies curvas de revolucion, hemos dicho:

El cuerpo que limita la superficie cónica se llama cono.

El cuerpo que limita la superficie cilíndrica se llama cilindro.

El cuerpo que limita la superficie esférica se llama esfera.

Estos tres cuerpos se conocen con la denominacion de cuerpos redondos.

Los cuerpos redondos son á los poliedros lo que el círculo á los polígonos regulares; lo que la circunferencia á los perímetros de dichos polígonos regulares; lo que es, en fin, el cero con las cantidades numéricas, sean estas positivas ó negativas: *sus límites.*

En efecto, una Pirámide regular cuyo número de caras laterales aumente progresivamente, vendrá á convertirse en *un cono*; luego el cono será el límite de todas las pirámides regulares, y por tanto podrá llamarse Pirámide redonda.

El cono será el límite superior de todas las pirámides regulares inscriptas en el mismo, y el límite inferior de las circunscriptas.

Un prisma regular cuyo número de caras laterales aumente progresivamente, vendrá á convertirse en *un cilindro.* Luego el cilindro será el límite de todos los prismas regulares, y por tanto podrá llamarse Prisma redondo.

El cilindro será el límite superior de todos los prismas regulares inscriptos en el mismo, siendo á la vez el límite inferior de todos los circunscriptos.

Un poliedro regular cuyas caras laterales disminuyen progresivamente de estension superficial, cuyos ángulos diedros y poliedros hayan llegado á adquirir el límite máximo de su valor, vendrá á convertirse en *una esfera.* Luego la esfera es el límite de todos los poliedros regulares, y por tanto podrá llamarse Poliedro redondo.

La esfera será el límite superior de todos los poliedros regulares inscriptos á la misma, siendo á la vez el límite inferior de todos los que á la misma se hallen circunscriptos.

De lo anteriormente expuesto, resultará como evidente:

1.° *Toda pirámide regular puede ser inscripta ó circunscripta á un cono.*

2.° *Todo prisma regular puede ser inscripto ó circunscripto á un cilindro.*

3.° *Todo poliedro regular puede ser inscripto ó circunscripto á una esfera.*

Se dice que una pirámide está inscripta en un cono ó que un prisma lo está á un cilindro, cuando las aristas laterales de uno y otro son respectivamente generatrices de la superficie curva que les limita, en cuyos casos las aristas basilares de uno y otro serán cuerdas del círculo ó círculos de sus bases.

Se dice que una pirámide está circunscripta á un cono ó que un prisma lo está á un cilindro, cuando la superficie cónica ó cilíndrica que limita respectivamente al cono ó al cilindro es tangente á cada una de las caras laterales de dicha pirámide ó prisma; en cuyo caso las directrices de dichas superficies de limitacion serán circunferencias inscriptas en los perímetros del polígono ó polígonos de las bases de aquellos.

Se dice que un poliedro regular está inscripto en una esfera cuando todos los vértices del poliedro están en la superficie esférica y un poliedro regular está circunscripto á una esfera, cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica.

Areas de los Poliedros.

276. Se llama *área de un poliedro* á la suma de las áreas de las superficies que le limitan.

La magnitud mayor ó menor del área de una superficie se determina con un número: así que cuando se pide la determinacion del área de un poliedro se pide el número final que represente aquella, tomando por unidad superficial la de un cuadrado que tenga por lado la unidad lineal.

Todos los problemas referentes á las áreas corresponden rigurosamente á la Geometría plana; pero como en esta no pueden ser estudiados los poliedros por no tener todos sus elementos en una superficie plana; de aquí que las áreas correspondientes á los poliedros en general tengan su verdadero lugar en la Geometría del espacio.

En las *áreas* de los poliedros es necesario reconocer la diferencia que existe entre las *superficiales* y las *numéricas*, entre las *laterales* y las *totales.*

Area superficial de un poliedro es la extension superficial equivalente á la suma de las áreas de todas las caras que le limitan.

Area numérica de un poliedro es el número final que expresa aquella, sirviendo de término de comparacion la de un cuadrado, tipo.

Area lateral de un poliedro es el área superficial ó numérica de la suma de todas las caras laterales del mismo.

Area total de un poliedro es el área superficial ó numérica de la suma de todas las caras laterales, mas la de la base ó bases del mismo.

Las áreas superficiales se determinan midiendo.

Las áreas numéricas se determinan contando.

Las primeras son puramente geométricas; se ocupan de la cantidad *contínua*. Las segundas, aunque referidas á cantidades contínuas, se equivalen á cantidades *discretas*.

Determinaremos las fórmulas generales que espresan las áreas de los poliedros, marcando la diferencia entre las laterales y totales.

Areas de las Pirámides.

277. Teorema. *El área lateral de una pirámide regular, es igual al Perímetro de su base por la mitad de la apotema*

En efecto, las caras iguales triangulares laterales que limitan á una pirámide, se desenvuelven sobre una superficie plana, en un sector poligonal. El área de este (187) es igual al producto de la línea quebrada poligonal por la mitad de la apotema, y como la línea quebrada poligonal es el perímetro del polígono de su base, que podremos representar por P; y la apotema de la pirámide por A: será la misma que la correspondiente al sector poligonal, resultará que la fórmula que espresa el Area Lateral de una Pirámide regular$=P\times{}^1/_2A$.

El área total de una pirámide regular es igual á la lateral, mas el área de su base.

Como la base de una pirámide regular es un polígono regular, y su área es el perímetro por la mitad de su apotema respectiva, resultará que *el área total de una pirámide regular es igual al Perímetro de su base por la semisuma de las dos apotemas.*

Si representamos por P el perímetro y por A y *a* las dos apotemas respectivas, la fórmula que esprese el Area Total de una pirámide regular$=P\times{}^1/_2(A+a)$.

278. Teorema. *El área Lateral de una pirámide truncada de bases paralelas, se determina por el producto de la semisuma de los perímetros de sus bases por su apotema respectiva.*

En efecto, las superficies de las caras laterales de una pirámide regular truncada de bases paralelas, se desarrollan sobre un plano en un trapecio poligonal, y como el área de este, segun hemos visto (Teorema 189) está determinada por la semisuma de las dos líneas poligonales, multiplicada por su apotema, y como dichas dos líneas poligonales son respectivamente los perímetros de las dos bases del trozo de pirámide, resultará evidente la tésis del teorema.

Si representamos por P y *p* los perímetros de sus dos bases y por A la apotema, tendremos que: Area Lateral Pirámide regular truncada$={}^1/_2(P+p)A$.

Tambien se determinará el área Lateral de la Pirámide regular truncada por la diferencia entre las áreas de los dos sectores poligonales en que respectivamente se desarrollan las superficies laterales de la pirámide total y la deficiente.

El área lateral de una pirámide irregular es igual á la suma de las áreas de las caras laterales de la misma.

El área total de la misma será igual al área lateral, mas el área de su base.

El Area lateral de una pirámide truncada irregular, se determina por la suma de las áreas de sus diferentes caras laterales.

El Area total de una pirámide truncada, es igual á la suma de las áreas de todas las caras que la limitan.

Areas de los Prismas.

279. Teorema. *El área lateral de un prisma regular recto es igual al perímetro de su base por una cualquiera de sus aristas laterales.*

En efecto, si desarrollamos sobre un plano las superficies de las caras laterales de un prisma recto, el conjunto de estas será un paralelógramo rectángulo que tendrá por altura la misma del prisma, el cual, siendo recto, será una cualquiera de sus aristas laterales; y por base el perímetro del polígono de aquella.

Esta misma será la expresion del area lateral de un prisma irregular, con tal que este sea recto; puesto que el desarrollo de las superficies laterales de todo prisma recto es un rectángulo.

El área total de un prisma recto es igual al área lateral del mismo, mas las áreas de sus dos bases. Tambien podremos decir: *El área total de un prisma recto es igual al perímetro de una de sus bases por la suma de su apotema respectiva y la altura del prisma.*

Llamando P al perímetro de su base, A á la altura del prisma, y a á la apotema, tendremos:

Area lateral prisma$=P \times A$. Area total prisma$=P(A+a)$.

280. *El área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto del perímetro de su seccion recta, multiplicada por su arista lateral.*

En efecto, el área de un rectángulo que tenga por base y altura respectivamente el perímetro de la seccion recta y una de las aristas laterales, será equivalente á la superficie en que se desarrollan todas las caras laterales del prisma oblícuo, resultando evidente la proposicion anterior.

Areas de los Poliedros en general.

281. *El área lateral* de un poliedro se determina sumando todas las de sus caras laterales.

El área total, conocida la lateral, se determinará sumando á esta el área de la base ó bases del mismo si tiene dos paralelas.

Si se trata de determinar las áreas laterales y totales de los cinco poliedros regulares, cuyas superficies de desarrollo no son conocidas, (270) bastará que sepamos la expresion del área del triángulo equiláctero con los cuales se forma al *tetraedro, octaedro é icosaedro* para conocer las áreas laterales de estos, multiplicando aquella respectivamente por 3, 6 ó 18, y para obtener las áreas totales multiplicando la fórmula que exprese el área del triángulo equiláctero por 4, 8 y 20 respectivamente.

Sabiendo el área del cuadrado con los cuales se forma el *cubo ó exaedro*, multiplicándola por 4 ó 6, tendremos respectivamente el área lateral ó total del *exaedro regular*.

Sabiendo el área del pentágono regular con los cuales se forma el *Dodecaedro*, multiplicando por 10 ó 12, tendremos respectivamente las áreas lateral y total del mismo.

Si trazado un triángulo equiláctero bajamos la perpendicular á su base, y determinamos la altura del mismo, por aplicacion del teorema de Pitágoras, tendremos que el área de un triángulo equiláctero en funcion del lado L, será:

$$\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}.$$

El área de un cuadrado en funcion del lado L, será L^2.

El área de un pentágono regular en funcion del lado L,

$$\text{será: } \frac{5}{4}L^2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}}.$$

* De lo cual deduciremos las áreas laterales y totales de los cinco poliedros regulares, en funcion del lado ó arista de los mismos, que es como sigue:

Tetraedro. . $\begin{cases}\text{Area lateral del mismo}=\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}.\\ \text{Area total del mismo}=a^2\sqrt{3}.\end{cases}$

Octaedro.. . $\begin{cases}\text{Area lateral del mismo}=\frac{6}{4}a^2\sqrt{3}.\\ \text{Area total del mismo}=2a^2\sqrt{3}.\end{cases}$

Icosaedro. . $\begin{cases}\text{Area lateral del mismo}=\frac{18}{4}a^2\sqrt{3}.\\ \text{Area total del mismo}=5a^2\sqrt{3}.\end{cases}$

(1) Exaedro ó cubo. . $\begin{cases}\text{Area lateral del mismo}=4a^2.\\ \text{Area total del mismo}=6a^2.\end{cases}$

Dodecaedro. $\begin{cases}\text{Area lateral del mismo}=\frac{40}{4}a^2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}}.\\ \text{Area total del mismo}=15a^2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}}\end{cases}$

* Tambien podremos determinar las áreas de los cinco poliedros regulares aproximadamente, multiplicando el cuadrado de su lado ó arista respectiva por los siguientes coeficientes que nos dá la tabla adjunta:

Tetraedro..	1,7320
Octaedro.	3,4640
Icosaedro. . . . . , ...	8,6600
Exaedro.	6,0000
Dodecaedro.	20,6457

(1) Para hallar el lado de un cubo de doble volúmen que otro dado, diremos que $L^3=2l^3$, de donde $L=l\sqrt[3]{2}$; esto nos prueba que las aristas de dos cubos, uno de doble volúmen que otro, son numéricamente dos cantidades inconmensurables.

El problema de la duplicacion del cubo fué considerado en la antigüedad como de tal importancia para la construccion del templo de Delfos, que con él, se creia poder conjurar las iras de los Dioses ofendidos. A su resolucion se dedicaron sábios Matemáticos; pero está probado que no puede resolverse exactamente por el cálculo. Hipócrates de Chio descubrió: que hallando dos medias proporcionales entre el lado del cubo y el doble de este lado, la primera seria el lado del cubo doble del cubo dado.

En las Colecciones matemáticas de Pappus se propone un procedimiento muy ingenioso para hallar estas dos medias proporcionales; posteriormente dicho procedimiento fué perfeccionado por Diocles en el siglo VI por medio de la cisoide, curva de su invencion. Modernamente Mr. Lacroix resuelve este problema por la interseccion de ramas parabólicas en su «Traité de Trigonométrie.»

☞ **282. Teorema.** *Las áreas de dos poliedros semejantes son directamente proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

En efecto, sean ABMENC y A'B'M'E'N'C' (fig. 175) los dos poliedros semejantes: en ellos tendremos que las áreas de las caras homólogas son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (Teorema 152). Por tanto:

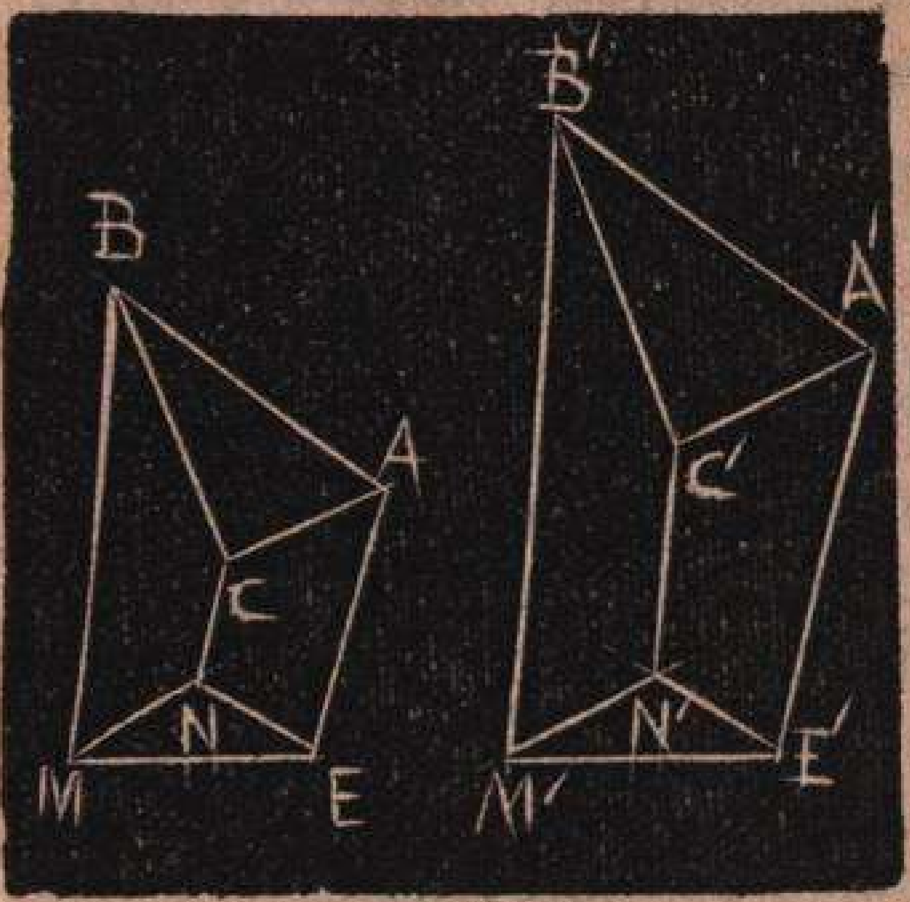


Fig. 175.

$$\frac{ABME}{A'B'M'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2},$$

$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

formándose proporcion ó igualdad fraccionaria legal con cada dos caras homólogas; suponiendo establecidas todas ellas, y llamando L' y L á dos cualesquiera de los lados homólogos correspondientes respectivamente á cada uno de los dos poliedros semejantes, tendriamos que:

$$\frac{ABME+BCNM+CAEN+ABC+MNE}{A'B'M'E'+B'C'N'M'+C'A'E'N'+A'B'C'+M'N'E'}=\frac{L^2}{L'^2}$$

mas como los dos términos de la primera fraccion ó razon espresan respectivamente las áreas Ar y Ar' de los dos poliedros, tendremos por último que: $Ar:Ar'::L^2:L'^2$.

Volúmenes de los Poliedros,

283. Se llama *volúmen* de un cuerpo á la magnitud relativa del mismo, tomando por término de comparacion el de un cubo ó exaedro regular que tiene de arista la unidad lineal.

Los volúmenes de los cuerpos se determinan *comparando*, *midiendo* y *numerando*.

Comparando el cuerpo cuyo volúmen tratamos de determinar con la unidad cúbica que nos sirve de medida.

Midiendo una tras otra el volúmen de la unidad en el del cuerpo.

Numerando las veces que el volúmen del cuerpo dado, equivale al de la unidad cúbica.

Este és el procedimiento que emplearíamos para obtener directamente la *magnitud volumétrica* de un cuerpo: sin embargo, los cuerpos no se miden generalmente, sino que su volúmen se determina por las relaciones numéricas que ligan á sus líneas y superficies, que son las que en rigor comparamos, medimos y numeramos.

La teoría de los volúmenes estriba en las siguientes proposiciones:

284. Teorema. *Dos paralelepípedos rectángulos de igual base son directamente proporcionales á sus alturas.*

Sea para esto P y p (fig. 176) dos paralelepípedos de iguales bases B=B y de diferentes alturas $A > a$.

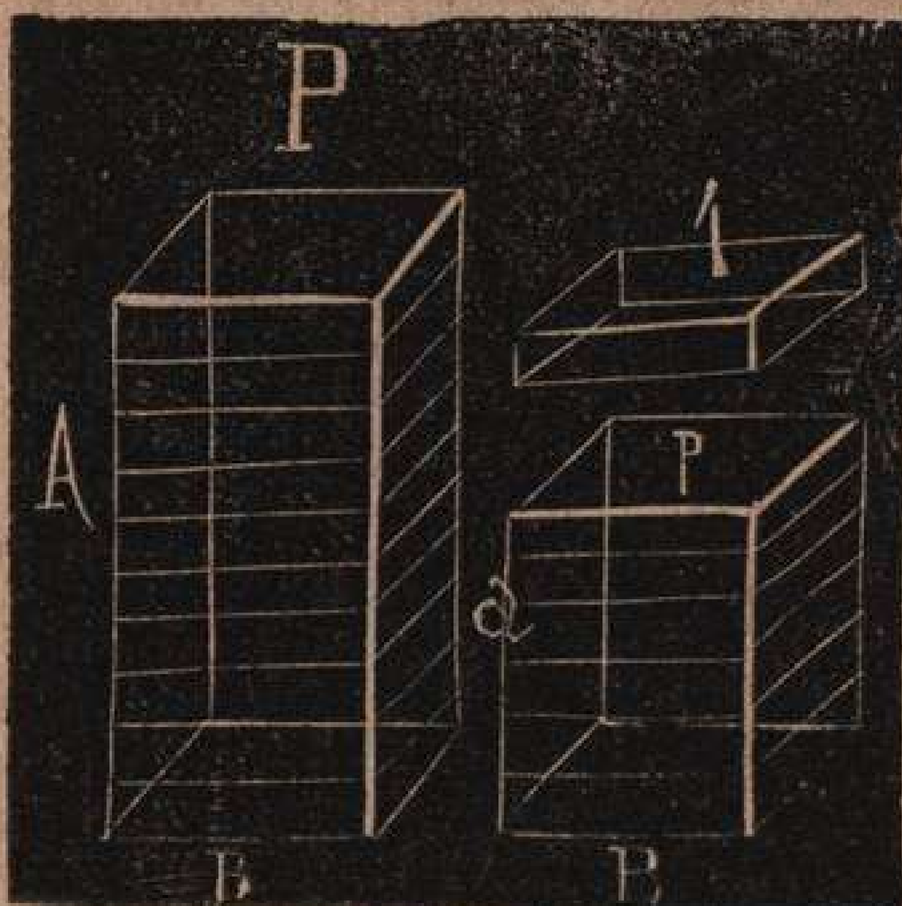


Fig. 176.

Si tomamos una unidad de comparacion, de la misma base que entrambos paralelepípedos, y que tenga de altura una magnitud tal que quepa exactamente en los dos paralelepípedos, ó cuando menos, que quepa aproximadamente un número exacto de veces, sin cometer error sensible, resultará que:

$$\frac{P}{p} = \frac{10}{6};$$

y como quien contiene respectivamente á 10, y 6 veces la unidad es la altura, resultará que: $\frac{A}{a} = \frac{10}{6}$; estas dos proporciones ó igualdades fraccionarias tienen una razon comun, la cual, suprimiendo y formando proporcion con las otras dos, resultará que $\frac{P}{p} = \frac{A}{a}$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

Corolarios. 1.° *Dos paralelepípedos rectángulos de igual base y altura son iguales.*

2.° *Dos paralelepípedos de igual altura y bases equivalentes tienen sus volúmenes equivalentes.*

3.° *Dos paralelepípedos rectángulos que tengan iguales* *respectivamente dos de sus tres dimensiones, son entre sí como sus terceras dimensiones.*

285. **Teorema.** *Dos paralelepípedos rectángulos de iguales alturas son directamente proporcionales á sus bases.*

Sean P y p (fig. 177) los dos paralelepípedos dados, en los que las alturas son iguales A=A, y las bases diferentes B>b.

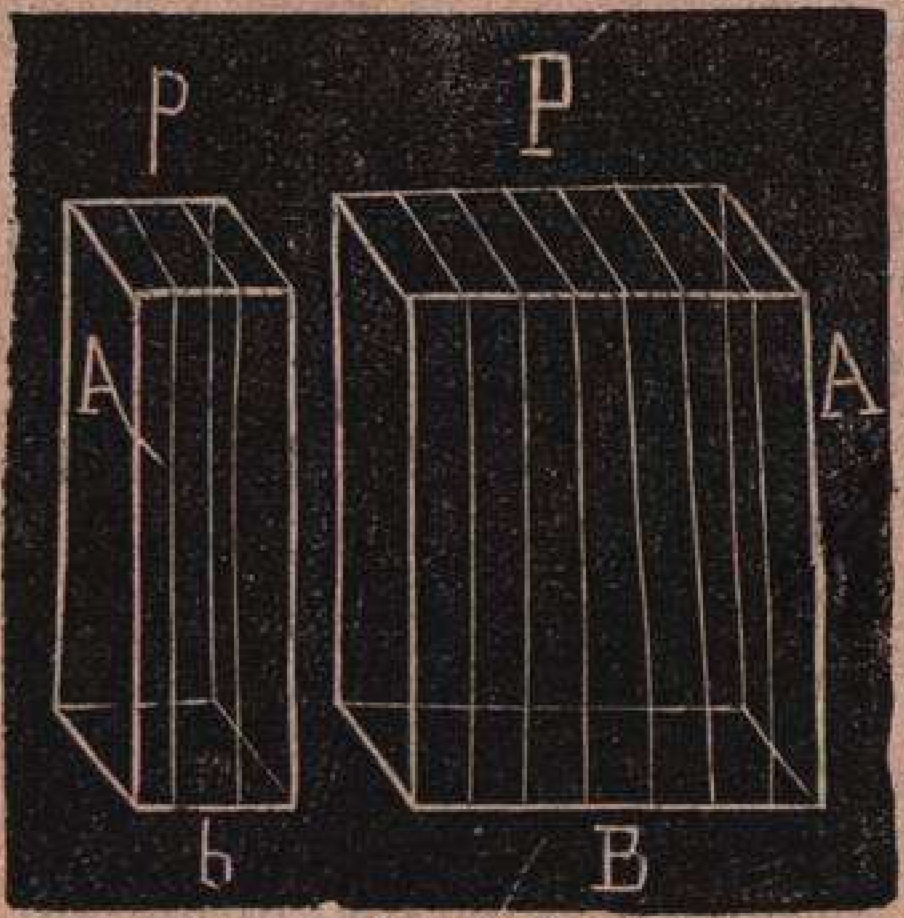


Fig. 177.

Si tomamos por término de comparacion una unidad que tenga la misma altura que entrambos paralelepípedos, y su base sea, una unidad tal, que quepa exacta ó lo mas aproximadamente posible en las bases de ambos paralelepípedos, resultará que:

$$\frac{P}{p}=\frac{7}{3};$$

y como quien contiene á estas unidades un número diferente de veces, es la base, resultará tambien que $\frac{B}{b}=\frac{7}{3}$:

estas dos igualdades fraccionarias ó proporciones tienen una razon comun, la cual, suprimiendo y formando proporcion con las otras dos, resultará que: $\frac{P}{p}=\frac{B}{b}$.

Corolario. *Dos paralelepípedos rectángulos que tengan igual respectivamente una cualquiera de sus tres dimensiones, son entre sí como los productos de sus otras dos dimensiones.*

286. **Teorema.** *Dos paralelepípedos rectángulos de diferentes bases y alturas son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, sean R y r los dos paralelepípedos rectángulos dados, (fig. 178) en los que las bases B y b son diferentes, así como tambien lo son sus alturas respectivas A y a.

Si formamos un paralelepípedo auxiliar R' tal, que teniendo la misma altura A de uno de ellos, tenga la misma base b del otro, segun el teorema anterior; si comparamos el paralelepípedo rectángulo total R con el auxiliar R',

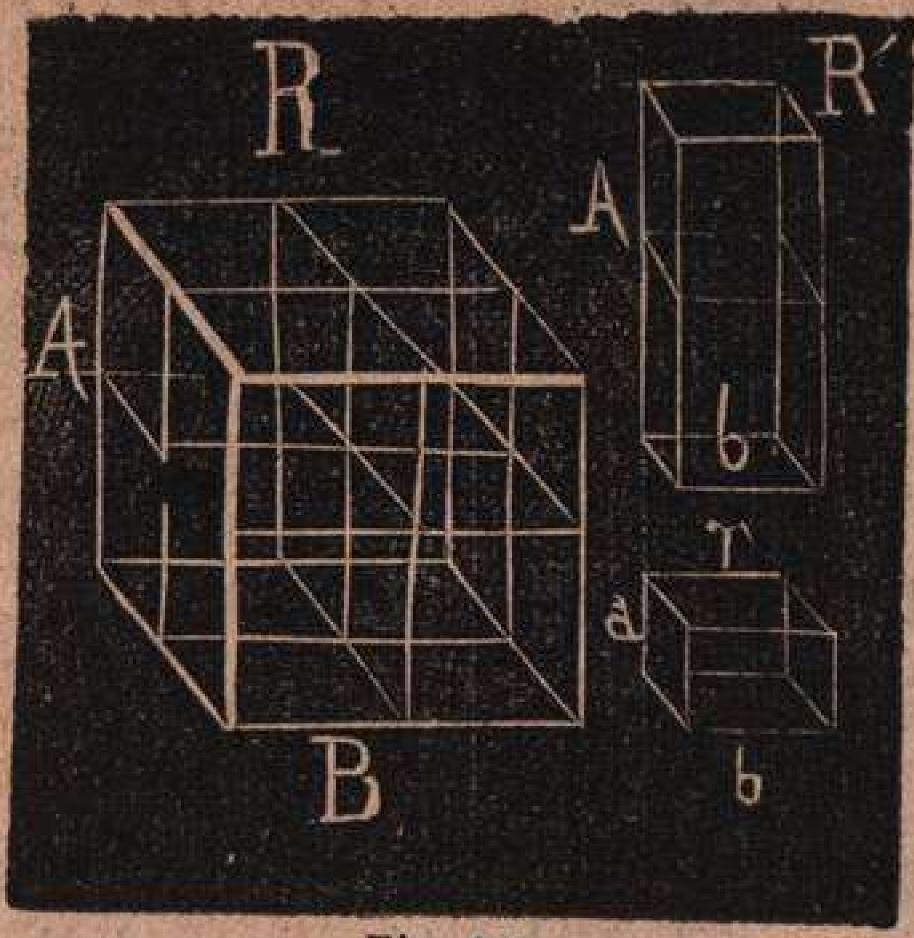


Fig. 178.

resultará que teniendo ambos las mismas alturas serán entre sí como sus bases, luego R:R' :: B:b. Si comparamos ahora el auxiliar R' con el menor r, como estos tienen igual base serán, segun el teorema (284), proporcionales á sus alturas; luego R':r :: A:a. Ahora bien: si multiplicamos término á término estas dos proporciones, dividiendo luego los dos de la primera razon por R', resultará que R:r :: B$\times$A:$b\times a$, lo cual nos dice que *dos paralelepípedos rectángulos de diferentes bases y alturas, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Corolarios: *1.° El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.* En efecto, porque determinándose todo volúmen de la comparacion con el de un cubo que tenga de arista la unidad; el de este será 1, ínterin el del paralelepípedo es: *Longitud por Latitud por Profundidad.*

2.° El volúmen de un prisma será igual al producto del área de su base por su altura.

3.° El volúmen de un cubo ó exaedro es igual á la tercera potencia de su arista.

4.° Los volúmenes de dos tetraedros semejantes, son entre sí como los cubos de sus aristas homólogas.

En efecto, sean los dos tetraedros semejantes OABC y $oabc$, (fig. 179) sus volúmenes respectivos serán:

$$V = {}^1/_3 ABC \times OP$$

y $v = {}^1/_3 abc \times op$, de donde

$$V : v :: ABC \times OP : abc \times op,$$

y sustituyendo en la segunda razon ABC:abc por su igual $OP^2 : \overline{op}^2$ (3.ª tésis Teorema 256) tendremos que:

$$V : v :: \overline{OP}^2 \times OP : \overline{op}^2 \times op,$$

de donde por último

$$V : v :: \overline{OP}^3 : op^3.$$

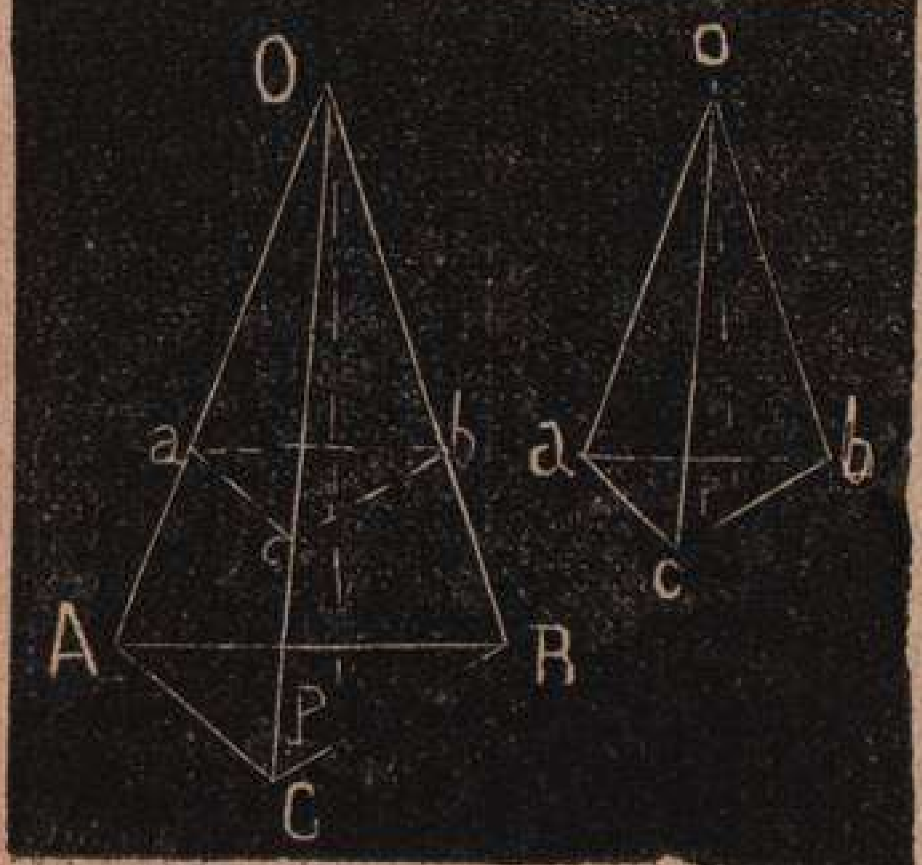


Fig. 179.

5.° *Los volúmenes de dos*

poliedros semejantes son entre sí directamente proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.

En efecto, llamando T, T', T'' etc. y t, t', t'' etc. á los tetraedros homólogos respectivamente en que ambos poliedros se descompone, tendremos que:

$$\frac{T}{t}=\frac{L^3}{l^3}, \quad \frac{T'}{t'}=\frac{L^3}{l^3}, \quad \frac{T''}{t''}=\frac{L^3}{l^3};$$

sumando los primeros miembros de estas igualdades que tienen una razon comun, resultará que:

$$\frac{T+T'+T''+\ldots}{t+t'+t''+\ldots}=\frac{L^3}{l^3},$$

luego por último, llamando V y v á los dos términos de la primera fraccion, es decir, á los volúmenes de los dos poliedros, resultará que: $V:v::L^3:l^3$.

6.° *Todo paralelepípedo oblícuo es equivalente á otro recto de su misma base é igual altura.*

7.° *El volúmen hallado de cualquier prisma ó poliedro se equivale al de un cubo que tenga de arista el número de unidades lineales que resulten de extraer la raiz cúbica de su volúmen numérico.*

287. Teorema. *Dos tetraedros de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

En efecto, sean OACD y O'A'C'D' (fig. 180) los dos tetraedros que tienen iguales sus alturas, siendo equivalentes las superficies de sus bases. Si se dividen las alturas en un número cualquiera de partes iguales é igual para ambos tetraedros, estas serán iguales en los dos; si se trazan por dichos puntos de division planos secantes paralelos á sus bases, las secciones equidistantes de ellas serán equivalentes. Ahora bien, si tomando por bases de prismas dichas secciones construimos estos en ambos tetraedros, dichos prismas por tener iguales sus alturas y equivalentes sus bases serán tambien equivalentes; por lo tanto, las sumas de dichos prismas en cada uno de los dos

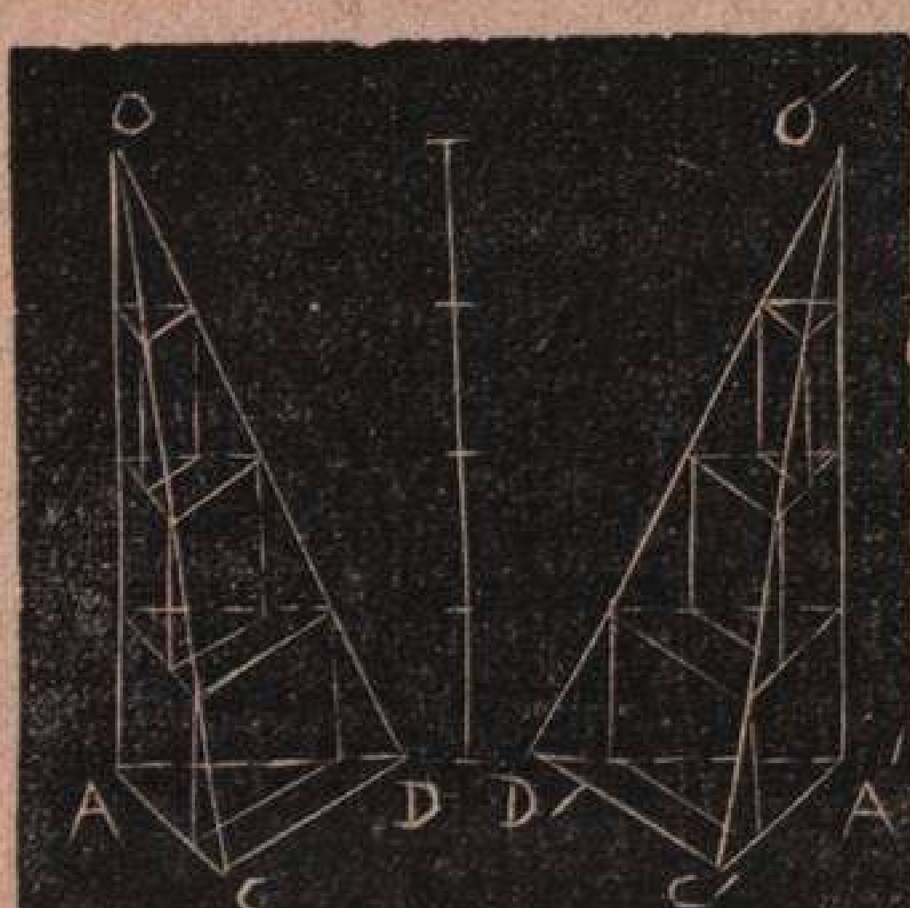


Fig. 180.

tetraedros serán respectivamente equivalentes. Luego si las alturas se dividen cada vez en mayor número de partes iguales en ambos tetraedros, dichas sumas se irán aproximando á sus límites respectivos que serán los dos tetraedros dados hasta que se confundan con estos, y como dichas sumas van siendo siempre equivalentes y los límites son los tetraedros, estos serán tambien equivalentes.

288. Teorema. *Todo prisma se puede descomponer en tres pirámides de la misma base y de la misma altura.*

El prisma dado podrá ser triangular ó de mayor número de caras laterales.

Supongamos 1.° que el prisma dado sea el mas simple de todos, es decir, el triangular ABCDEP (figura 181). En

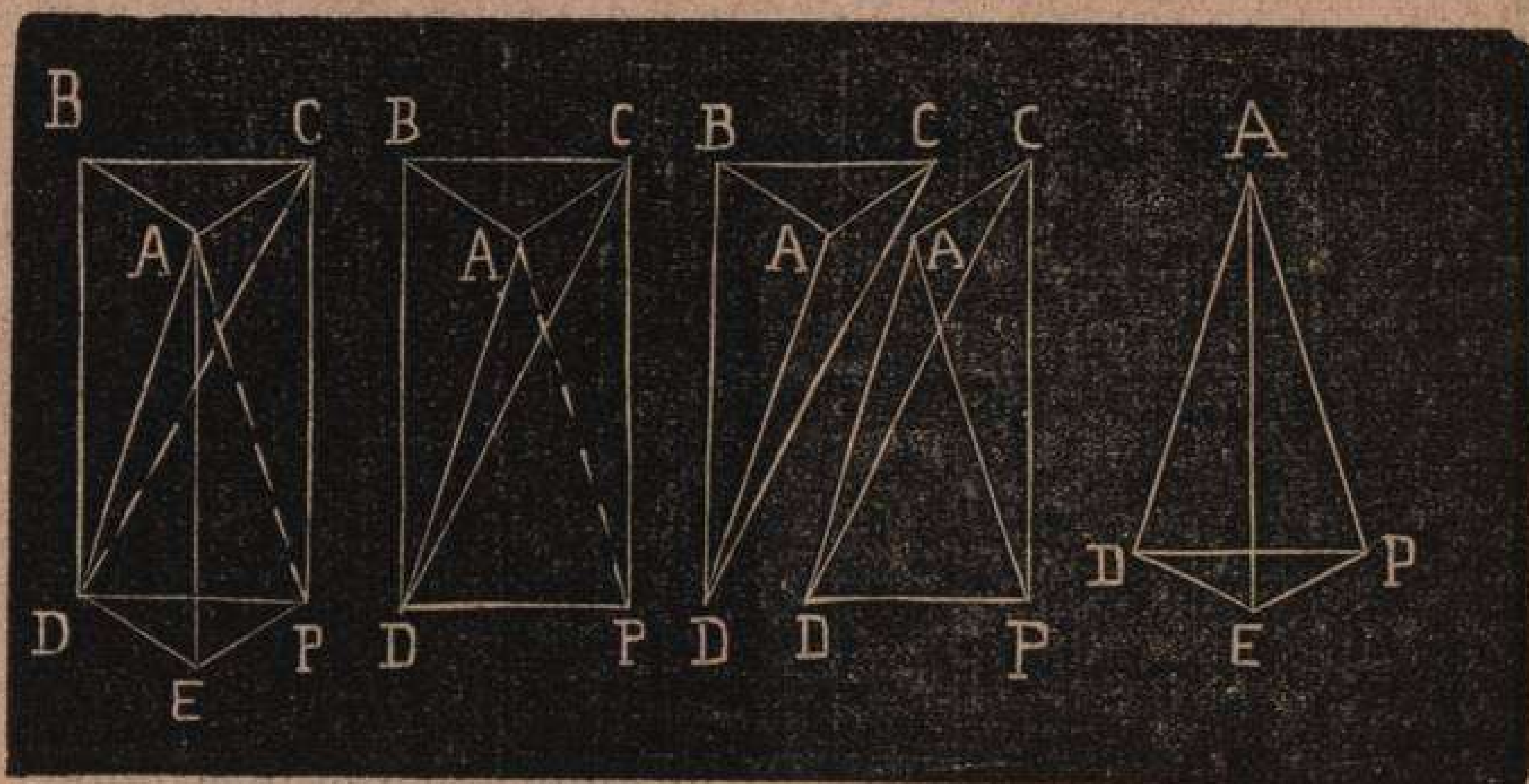


Fig. 181.

efecto, si por los tres vértices A, D, P, hacemos pasar un plano, separaremos del Prisma triangular dado, la pirámide triangular ADEP; que tiene la misma base DEP que el prisma y la misma altura EA (la cual queda separada en el grabado adjunto, al final de todos los que se exhiben.) Si en la pirámide cuadrangular ABCPD (expuesta en 2.° término) y que resta de la division dada al prisma hacemos pasar un plano por los vértices D, A y C, quedará dívidida en las dos pirámides triangulares ACDB y ACDP (que se exponen separadamente en el 3.° y 4.° lugar de las que se indican) las cuales serán equivalentes en volúmen, segun el teorema anterior, por tener las mismas alturas, toda vez que tienen comun y equidistantes de la base el vértice A, desde el que podemos considerar trazada dicha altura, siendo sus bases DBC y DPC respectivamente equivalentes como mitades del paralelógramo BCPD; y como la pirámide DABC es igual á la ADEP por tener la misma base y altura, siendo à la vez equivalente á la ADPC, resultará que las tres pirámides triángulares (que se manifiestan en el 3.°, 4.° y 5.° lugar de los del grabado adjunto) serán equivalentes al prisma triangular dado ABCDEP; que es lo que queriamos demostrar.

2.° Si tratamos de descomponer un prisma de cualquier número de caras laterales, en las tres pirámides, cuyos volúmenes, en conjunto, fuesen equivalentes al del prisma dado, y las cuales hubiesen de tener la misma base y altura que este, procederíamos de la siguiente manera:

Primero. Descompondríamos el prisma dado, en tantos prismas triangulares como lados tenga el polígono de su base menos dos, segun lo indicado en el tercer corolario del teorema 263.

Segundo. Cada uno de los prismas triangulares anteriores se descompondria, segun el teorema anterior, en tres pirámides triangulares, de igual base y altura que las que este tenga.

Tercero y último. Con la suma de todas las terceras partes, una de cada uno de los prismas triangulares en que el prisma dado se descomponga, formaremos, (pues que todas tendrán la misma altura,) una pirámide que tenga por base la del prisma dado y la misma altura que este, la cual será equivalente á cada una de las otras dos que formaremos análogamente; verificándose así la descomposicion de aquel en las tres pirámides de igual base y altura.

289. Del Teorema precedente deducimos los siguientes corolarios:

1.° *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.*

2.° *El volúmen de un tetraedro cualquiera es igual al producto del área de su base por el tercio de su altura.*

3.° Si todo prisma se puede descomponer en tres pirámides de la misma base y altura: *Toda pirámide es igual á la tercera parte de un prisma de la misma altura y base equivalente.*

4.° *Dos pirámides de iguales ó equivalentes bases, son entre sí como sus alturas: De iguales alturas, son entre sí como sus bases: Si tienen diferentes sus bases y sus alturas, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, puesto que si estas relaciones se verifican siempre entre dos prismas, se verificarán tambien entre todos sus múltiplos y divisores, luego entre las pirámides respectivas que son sus terceras partes.

5.° *Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes tendrán iguales numéricamente sus volúmenes.*

6.° *El volúmen de todo prisma triangular truncado, es equivalente al de tres pirámides triangulares que todas tengan una de las bases del prisma, y respectivamente por altura las perpendiculares bajadas desde cada uno de los tres vértices á la base opuesta, comun para los tres tetraedos. Tambien podremos decir que:* el volúmen de un prisma triangular truncado *es igual al área de su seccion recta por la tercera parte de la suma de sus tres aristas laterales.*

7.° *Existiendo la misma relacion entre los prismas y el cilindro que la que en tésis general existe entre las pirámides y el cono, resultará que el cilindro es equivalente en volúmen á la suma de tres conos, que tengan la misma base é igual altura que las del cilindro dado. Por tanto, todo cono es la tercera parte de un cilindro de la misma altura é igual base.*

290. Teorema. *Todo tetraedro truncado de bases paralelas, es equivalente á la suma de tres tetraedros que tengan todos la misma altura que el tronco, y cuyas bases son: la mayor, la menor y una media proporcional entre ambas bases.*

En efecto, sea ABCOPR (fig. 182) el tetraedro truncado dado; si hacemos pasar un plano por los tres vértices A, O y C, separaremos el tetraedro OABC (el cual se expone en segundo término) este tendrá por base la ABC, la mayor del tronco dado y su misma altura. Si ahora por los vértices P, O y C hacemos pasar un plano en el resto del tronco, habremos descompuesto este en los tetraedros OPAC y COPR (que se indican en el 3.° y 4.° lugar del grabado), este último tiene como los dos anteriores la misma altura, pero su base OPR es la menor de las del tronco.

No nos resta ahora demostrar mas sino que el tetraedro OPAC tiene una base que es la media proporcional entre las POR y ABC del tronco dado. Si trazamos en la 1.ª figura la recta OD paralela á la AP y unimos D con P y con C, resultará que el tetraedro OPAC y el PADC tienen la base comun PAC y los vértices O y D en la recta DO paralela á dicha cara y por tanto tienen igual base y altura, son equivalentes.

Vamos á demostrar ahora que el triángulo ADC es media proporcional entre la base mayor ABC y la menor POR.

En efecto, trazando la recta DN paralela á la BC, el triángulo ADN será igual al POR, y los triángulos ADN y

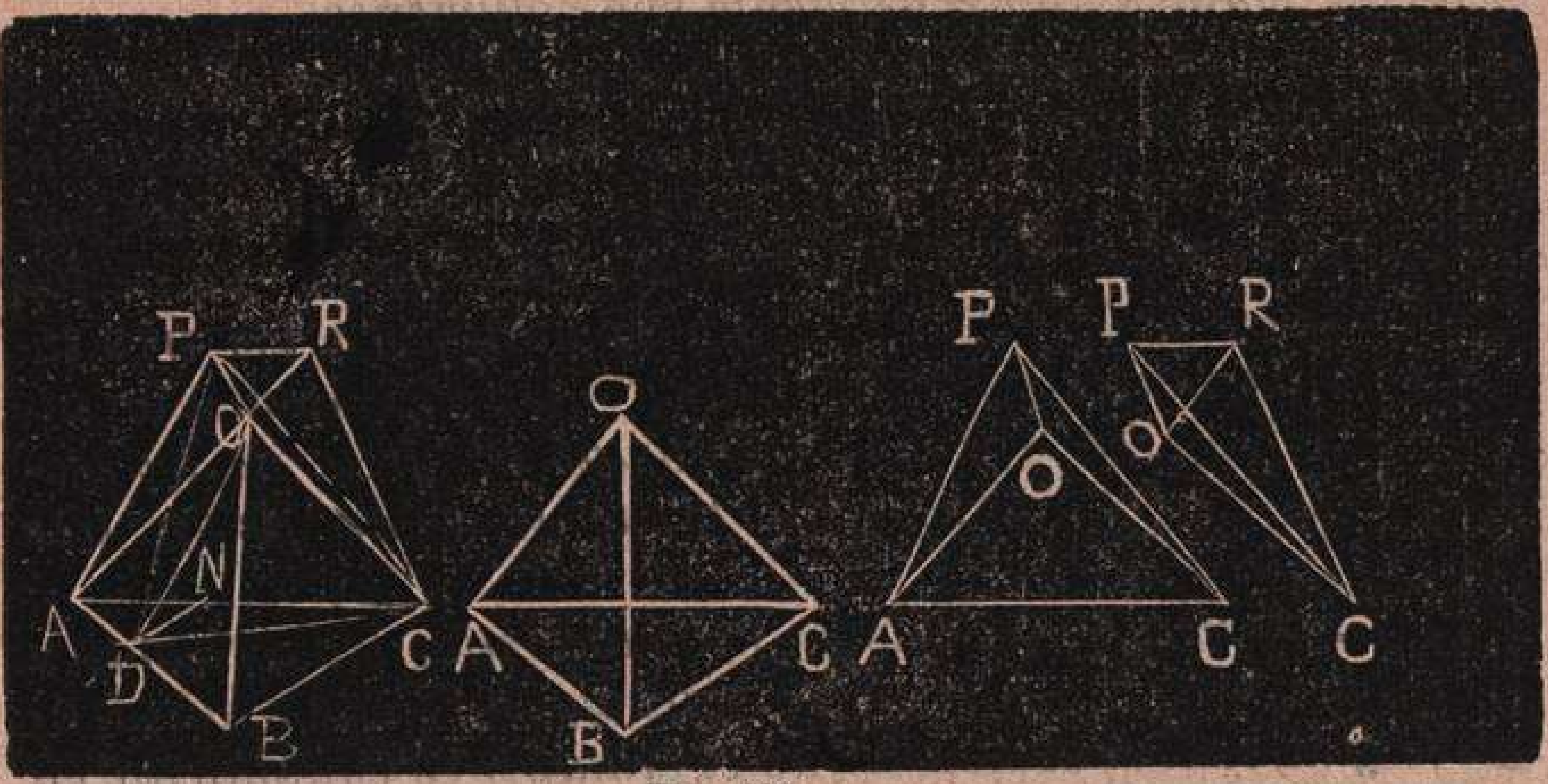


Fig. 182.

ADC tendrán la misma altura y diferentes bases, luego serán proporcionales á su base (147—7.° corolario) resultando que $\frac{ADC}{ADN}=\frac{AC}{AN}$. De los triángulos ABC y ADC por igual razon: $\frac{ABC}{ADC}=\frac{AB}{AD}$ y como $\frac{AC}{AN}=\frac{AB}{AD}$ (Teor. 47) resultará tambien que $\frac{ADC}{ADN}=\frac{ABC}{ADC}$ ó lo que es lo mismo, que: $ABC:ADC::ADC:ADN$ y como $ADN=POR$, tendremos que $ABC:ADC::ADC:POR$, que es precisamente lo que nos proponiamos demostrar.

Corolarios: *1.° El volúmen de un tetraedro truncado de bases paralelas es igual al producto del tercio de su altura por la suma de sus dos bases y una media proporcional entre ellas.*

2.° El volúmen de una pirámide truncada de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus dos bases y una media proporcional entre ellas.

Lo *cual* se demostraria análogamente á la 2.ª parte del teorema 288.

3.° Existiendo la misma relacion entre las pirámides con los conos, que la que existe entre los troncos de pirámides y los conos truncados, resultará tambien que: todo cono *truncado de bases paralelas es equivalente á la suma de tres conos que todos tengan la misma altura que el truncado, teniendo respectivamente por bases la mayor, la menor y una media proporcional entre ambas bases.*

291. Teorema. *El volúmen de un poliedro regular se determina multiplicando el área total del mismo, por tercera parte de su apotema respectiva.*

En efecto, segun la 6.ª conclusion espuesta en el número 271, todo poliedro regular puede ser descompuesto en tantas pirámides regulares iguales como caras tiene: y como el volúmen de una pirámide cualquiera es igual al producto del área de su base por el tercio de su altura, resultará, segun un teorema de Aritmética, (que para determinar la suma de los volúmenes de todas estas pirámides), bastará multiplicar uno de los dos factores de un producto por un número, para que resulte el producto multiplicado. Ahora bien, como tantas veces el área de una cara como caras tiene el poliedro regular, es su área total, y como la altura correspondiente á una cualquiera de estas pirámides es la apotema del poliedro regular, admitiremos como cierta la tésis que afirma el teorema.

* Fácilmente determinaremos el volúmen de un *tetraedro* ó de un *exaedro*, ó de un *octaedro* en funcion de su arista, sin necesidad de apelar al procedimiedto indicado anteriormente. En efecto, el del Tetraedro lo obtendremos multiplicando el área de una cara triangular en funcion de su lado, la cual es $^1/_4 a^2\sqrt{3}$, por $^1/_3$ de su altura a, considerándola como una pirámide, lo cual equivale á $^1/_9 a\sqrt{6}$ y por tanto el volúmen del tetraedro$=^1/_{12} a^3\sqrt{2}$.

El volúmen de un *exaedro* en funcion de su arista será a^3. El de un *octaedro* regular se determinaria sumando los de dos pirámides regulares cuadrángulares, que unidas por sus bases forman el octaedro regular; el volúmen correspondiente á cada una de estas, será a^2 multiplicado por *un tercio* de $^1/_2 a\sqrt{2}$. y por tanto igual á $^1/_6 a^3\sqrt{2}$ que duplicado nos dá para el volúmen del octaedro regular en funcion de su arista a, $V^n =^1/_3 a^3\sqrt{2}$.

* 292. Los volúmenes de los cinco poliedros regulares en funcion de la arista, se determinan fácilmente una vez conocida, las apotemas correspondientes á cada uno de dichos poliedros regulares, las cuales hemos expuesto en la nota de la página 238, en las que las hemos dado como rádios de las esferas inscriptas á los mismos en funcion de sus aristas. Si la tercera parte de dichas apotemas respectivas las multiplicamos por las áreas totales correspondientes á los mismos y dadas en el número 281, determinaremos los volúmenes de los poliedros regulares en funcion de su arista, las cuales esponemos á continuacion:

$$\text{VOLUMEN TETRAEDRO REGULAR} = a^2\sqrt{3} \times \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right) = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$$

$$\text{» EXAEDRO »} = 6\,a^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right) = a^3$$

$$\text{» OCTAEDRO »} = 2\,a^2\sqrt{3} \times \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$$

$$\text{» DODECAEDRO »} = 15a^2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}} \times \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$= \frac{5}{2}a^3\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{25-10\sqrt{5}}}$$

$$\text{» ICOSAEDRO »} = 5\,a^2\sqrt{3} \times \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}\right)$$

$$= \frac{5}{36}a^3(9+3\sqrt{5})$$

Los volúmenes de los poliedros regulares, tambien se pueden determinar fácilmente multiplicando el cubo de su arista por el coeficiente que nos dá la siguiente tabla:

Tetraedro.......	0,1178.
Exaedro..........	1,0000.
Octaedro.........	0,4714.
Dodecaedro....	7,6631.
Icosaedro.	2,1817.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO PRIMERO

DE LA SEGUNDA PARTE DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO, QUE SE OCUPA DE LOS POLIEDROS.

I. Demostrar que si en los puntos medios de las seis aristas de un tetraedro regular se levantan planos perpendiculares á las mismas, se encontrarán estos en un solo punto.

II. Demostrar que los seis planos bisectores de los seis ángulos diedros formados uno en cada una de las aristas del mismo, se encuentran en un punto.

III. Demostrar así mismo que las cuatro rectas perpendiculares levantadas en los puntos medios de las cuatro caras de un tetraedro se encuentran en un punto.

IV. Demostrar que el plano bisector de un ángulo diedro de un tetraedro divide á la arista opuesta en dos partes proporcionales á las caras que forman dicho diedro.

V. Demostrar que si dos tetraedros tienen igual uno de sus ángulos triedros son entre sí directamente proporcionales como los productos de las tres aristas respectivas que forman cada uno de los dos ángulos triedros iguales.

VI. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos medios de tres aristas de un tetraedro separa de este un volúmen igual á su 8.ª parte.

VII. Dividir un tetraedro en dos partes equivalentes por un plano paralelo á su base.

VIII. Comprobar geométricamente el cubo de la suma ó diferencia de dos rectas.

IX. Determinar las áreas laterales y totales de los cinco poliedros regulares en metros cuadrados, teniendo todos de arista 10 metros.

X. Qué condiciones deben tener una pirámide, un paralelepípedo y un prisma cualquiera, para que teniendo la misma altura sean equivalentes.

XI. Determinar los volúmenes de un tetraedro, exaedro y octaedro regular en decímetros cúbicos, teniendo todos 5 metros de arista.

* XII. Determinar el peso de varios poliedros, conocido su volúmen y densidad.

Determinar un volúmen, conocido su peso y su densidad.

Determinar su densidad, conocido su peso y su volúmen respectivo.

(Convendrá para esto tener en cuenta lo expuesto en el núm. 314.)

LIBRO SEGUNDO.

CUERPOS REDONDOS.

Preliminares.

293. Llamamos *cuerpos redondos* á los que están limitados ó por una superficie *esférica*, ó por una *cilindrica*, ó por una *cónica*; en estos dos últimos casos se hallan tambien limitados además por dos ó por una superficie plana que constituyen sus bases. Estos cuerpos se llaman **Esfera**. **Cilindro** y **Cono**, y se representan respectivamente en las siguientes figuras.

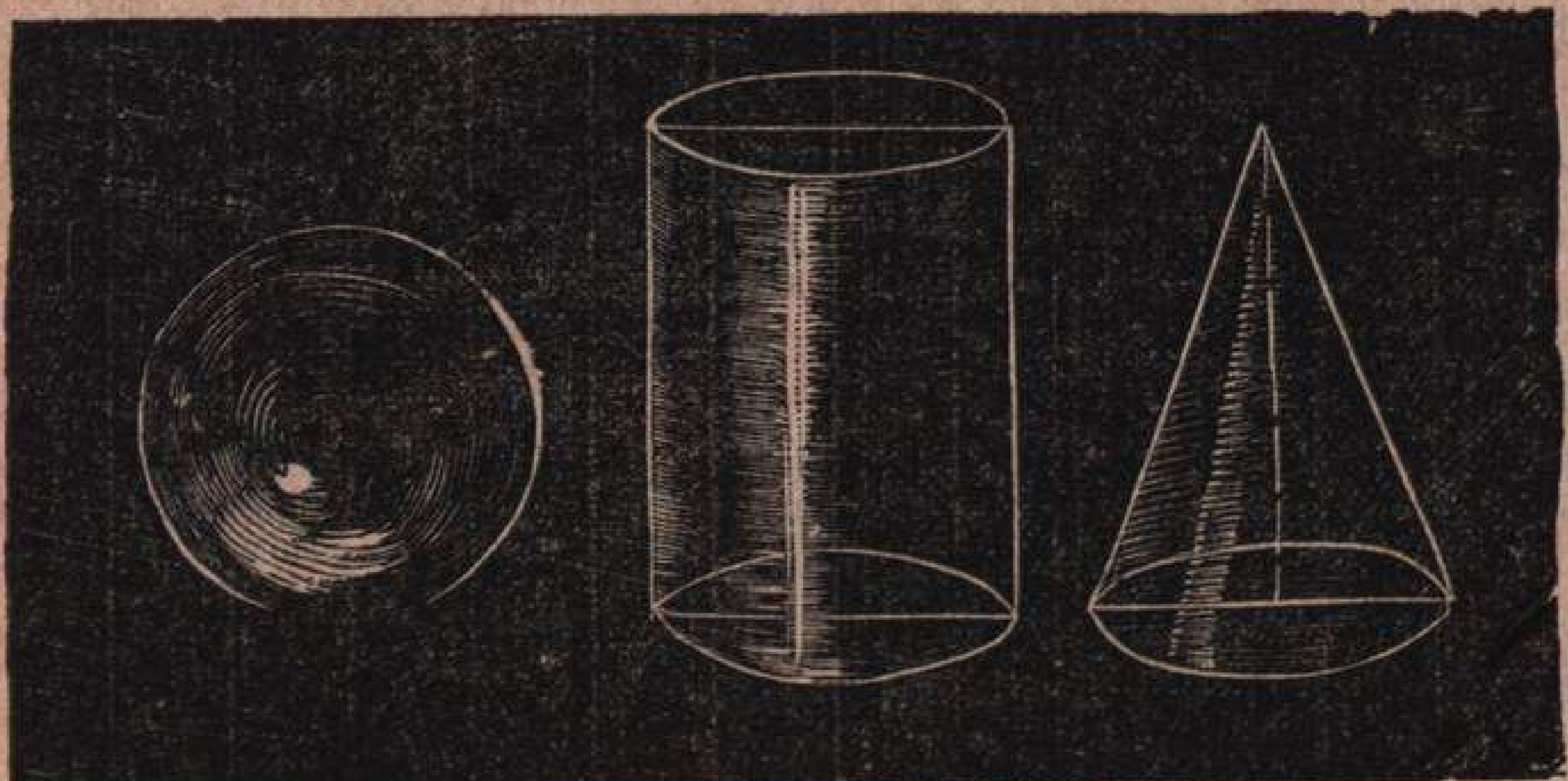


Figura 183.

Dichos cuerpos pueden tambien llamarse *cuerpos de revolucion*, puesto que la esfera está engendrada *por un semicírculo que gira al rededor de su diámetro*: el cilindro *por un paralelógramo rectángulo que gira al rededor de uno de sus lados*; el cono *por un triángulo rectángulo que gira al rededor de uno de sus catetos*. Sin embargo, la denominacion de cuerpos de revolucion no es propia, 1.° porque el cono y cilindro oblicuos, no son cuerpos de revolucion, y sin embargo, los estudiamos aquí. 2.° porque hay un número indeterminado de cuerpos de revolucion, que se escluyen de los llamados redondos y cuya figura, como dependiente de la superficie generadora, es tambien indeterminada; así pues, la denominacion mas propia es la de *cuerpos redondos*, en primer lugar porque está sancionada por el tiempo, y en segundo porque la série de planos secantes perpendiculares á los ejes, producen secciones circulares que con denominacion vulgar pudieran llamarse redondas.

294. *En toda* esfera *debemos tener en cuenta:*

1.° Toda seccion de la misma por un plano secante, es un círculo.

2.° Dicha interseccion será máxima cuando el plano secante pase por el centro, y tanto menor cuanto mas aquel se separe del centro.

3.° Una esfera está determinada de posicion y magnitud conociendo el centro y el rádio; ó estándolo el semicírculo generador.

4.° Dos esferas de igual rádio son iguales: si tienen el mismo centro y el mismo radio coinciden: si tienen el mismo centro y diferente rádio son concéntricas.

5.° Dos esferas de diferente rádio son semejantes, y en ellas se verifica que sus rectas ó líneas curvas homólogas son directamente proporcionales.

6.° Dos círculos máximos de una esfera se cortan siempre en un diámetro.

7.° La base de una esfera es un punto.

8.° La esfera es un poliedro regular de un número infinito de caras;

295. En todo cilindro se verifica:

1.° Toda seccion de un cilindro por un plano perpendicular al eje es un círculo; y todos ellos son iguales.

2.° Si el plano secante pasa por el eje, la seccion será un paralelógramo rectángulo, duplo del generador.

3.° En todo cilindro recto, se verifica que la altura es igual á un lado ó á una de sus generatrices.

4.° Si un cilindro recto tiene su lado igual al diámetro del círculo de su base se llamará EQUILÁCTERO.

5.° Todo cilindro estará determinado, estándolo el paralelógramo rectángulo generador; y este lo está, conociendo su base y su altura.

6.° Dos cilindros serán iguales, cuando lo sean tambien sus paralelógramos rectàngulos generadores; y estos lo son, teniendo iguales bases y alturas.

7.° Dos cilindros serán semejantes, cuando lo sean sus rectángulos generadores, y estos lo son, cuando tengan proporcionales sus bases y alturas respectivamente.

8.° Las rectas y líneas homólogas de dos cilindros semejantes son entre sí directamente proporcionales.

9.° Las áreas de las bases de dos cilindros semejantes, son directamente proporcionales á los cuadrados de sus lados.

Si el plano secante es oblícuo al eje, la interseccion será un plano elíptico.

En efecto, dichos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus rádios, y como estos lo son á los cuadrados de sus lados será evidente la proposicion.

10. Si un cilindro se corta por un plano perpendicular á su eje, no puede producir un cilindro parcial que sea semejante al total; pues que en el rectángulo generador no podemos tampoco trazar una recta paralela á uno de sus lados que separe del mismo otro rectángulo semejante al total.

11. Todo cilindro tiene dos bases, y de todo cilindro podremos hacer uno equiláctero, seccionándolo por un plano secante en el lugar correspondiente.

12. Al cilindro lo podemos considerar como un prisma regular de infinito número de caras.

296. En todo cono se verifica:

1.° Si un cono de revolucion se corta por un plano perpendicular al eje, su seccion es un círculo, y dicho círculo será tanto mayor, cuanto mas dicho plano secante, se aproxime á la base, y tanto menor cuanto mas se aproxime al vértice.

2.° Si el cono de revolucion se corta por un plano que pase por el eje, la seccion será un triángulo isósceles duplo del rectángulo generador.

3.° En todo cono recto, la altura será menor que uno de sus lados ó que una de sus generatrices.

4.° Todo cono recto, si tiene el lado igual al diámetro de su base se llama EQUILACTERO.

5.° Todo cono está determinado, estándolo su triángulo rectángulo generador; y este lo estará: 1.° Siendo conocidos sus dos catetos. 2.° Un cateto y la hipotenusa. 3.° La hipotenusa y un ángulo agudo. 4.° Un cateto y un ángulo agudo.

6.° Dos conos de revolucion son iguales, siempre que lo sean sus triángulos generadores, y estos lo son: 1.° Teniendo los dos catetos respectivamente iguales. 2.° Teniendo iguales un cateto y la hipotenusa respectivamente. 3.° Teniendo iguales la hipotenusa y el ángulo cónico. 4.° Teniendo iguales un cateto y el ángulo cónico.

7.° Dos conos rectos serán semejantes cuando lo sean sus triángulos rectángulos generadores, y estos lo son: 1.° cuando tengan sus dos catetos respectivamente proporcionales. 2.° Cuando tengan proporcionales un cateto y la hipotenusa. Y 3.° Cuando tengan igual el ángulo conico.

8.° Las rectas y líneas curvas homólogas de dos conos semejantes, son entre sí directamente proporcionales.

9.° Las áreas de las bases de dos conos semejantes, son directamente proporcionales á los cuadrados de sus alturas, y tambien á los de sus lados.

Si dicho plano, aunque paralelo al eje, no pasa por el mismo, cortará al cono por un plano y á la superficie cónica por una rama hiperbólica.

Si dicho plano es paralelo á una de las generatrices, su interseccion será un plano, y la de la superficie cónica una de las líneas de limitacion, que será una curva parabólica. Si, por último, el plano corta oblícuamente al eje, lo hará á todas sus generatrices, y la interseccion será un plano elíptico.

10. En todo cono se verifica que si se corta por un plano paralelo á su base, el cono parcial es semejante al total, puesto que los triángulos rectángulos generadores serán tambien semejantes entre sí.

11. Todo cono tiene una sola base; pero si el cono es truncado, tiene dos bases paralelas y desiguales. A un cono cualquiera no podemos hacerlo equiláctero, porque esto solo será posible para los conos en los que un ángulo cónico tenga 30.°

12. Al cono circular lo podemos considerar como una pirámide regular de infinito número de caras.

Del cono.

Conocida la determinacion de un cono, las condiciones de igualdad de los conos, las de semejanza de los mismos, las relaciones métricas que existen entre estos, pasemos á determinar sus *áreas* y *volúmenes* respectivos.

297. Teorema. *El área lateral de un cono de revolucion es igual á la circunferencia de su base, multiplicada por la mitad de su generatriz ó lado.*

En efecto, el área lateral de un cono se refiere solo á la de la superficie cónica que lo limita lateralmente; y como la superficie cónica se desarrolla sobre un plano (teorema 233) en un sector circular, y el área de este es igual al arco por la mitad del rádio (teorema 187), resultará que si llamamos R al rádio y G á la generatriz, el área lateral del cono será igual á $^1/_2 2\pi R \times G = \pi RG$.

Corolario 1.° *El área lateral de un cono de revolucion tambien podemos expresarlo diciendo que es igual al producto del lado por la circunferencia de una seccion recta dada en el punto medio del lado.*

En efecto, sea AOBC (fig. 184) el cono dado; si por el punto medio c del lado AC trazamos la seccion recta, el diámetro de la misma será cb y el eje del cono dificiente será Am.

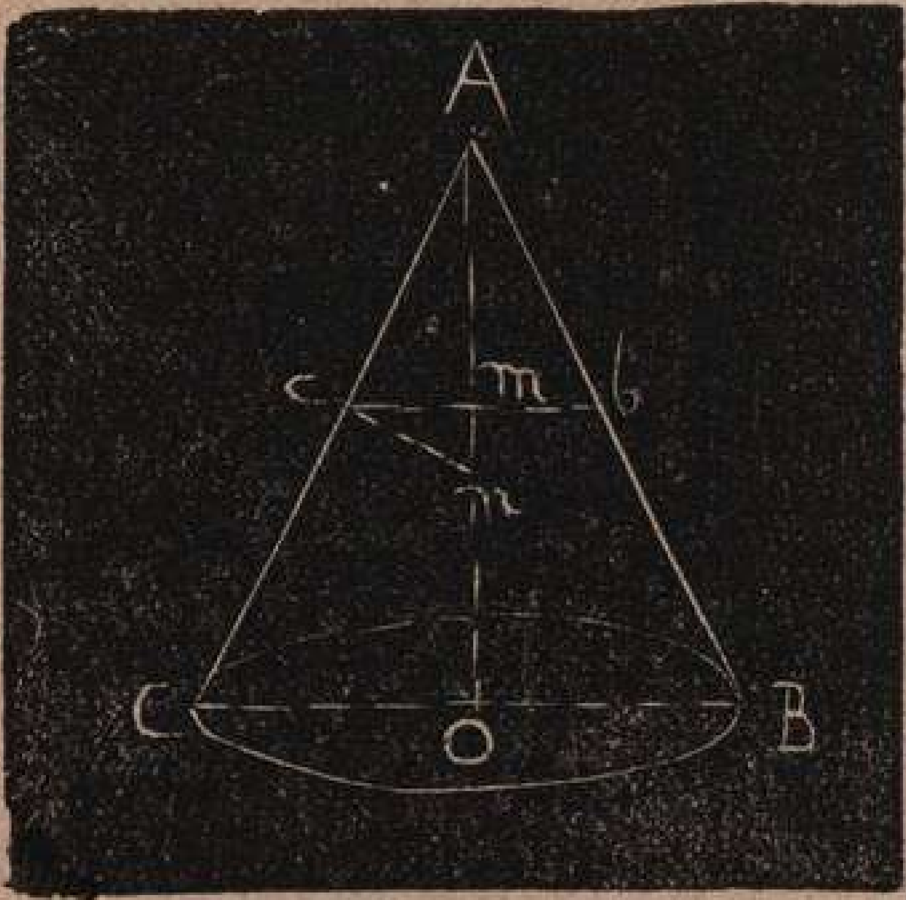


Fig. 184.

De ser semejantes los dos triángulos rectángulos AOC y Amc, resultará que:

$$Ac : AC :: cm : CO;$$

pero siendo $Ac = {}^1/_2 AC$, resultará que $cm = {}^1/_2 CO$ y por tanto $CO = 2cm$.

Y si segun el teorema precedente el área de

$$AOCB = \pi \times CO \times CA,$$

en ella, sustituyendo $2cm$ por CO, resultará que área $AOCB=2\pi\times cm\times CA$, igualdad que demuestra la proposicion anterior.

2.° *El área lateral de un cono de revolucion tambien se puede determinar diciendo que es igual al producto del eje por una circunferencia cuyo rádio esté comprendido por el punto medio del lado perpendicular al mismo y limitado por el eje.*

En efecto, en la misma figura anterior, si por el punto medio c del lado AC se traza la recta cn perpendicular á este, resultará que los triángulos cmn y el AOC son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, y por tanto

$AC:cn::AO:cm$, de donde $AC\times cm=AO\times cn$.

Si en la fórmula final del corolario anterior sustituimos

$cm\times CA$ por $cn\times AO$,

tendremos que área $AOCB=2\pi\times cn\times AO$.

3.° *Las áreas laterales de dos conos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus rectas homólogas.*

En efecto, sean A y A' las áreas de dos conos semejantes; siendo R y R' los rádios de sus bases y L y L' sus lados homólogos, desde luego tendremos que $A=\pi RL$, $A'=\pi R'L'$, de donde $A:A'::\pi RL:\pi R'L'$, y por tanto $A:A'::RL::R'L'$. Mas como los triángulos rectángulos generadores son semejantes, resultará que $R:R'::L:L'$, y tambien $RL:R'L'::L^2:L'^2$; y por último, de esta y la anterior resultará que $A:A'::L^2:L'^2$.

4.° *Como las áreas se determinan numéricamente por el producto de dos factores lineales, resultará que las áreas laterales de dos conos semejantes serán tambien proporcionales á las áreas de sus bases.*

5.° *Si el cono dado fuese equiláctero, su área lateral será igual á dos veces el área de un círculo de igual rádio que el del círculo base del cono.*

En efecto:

su área $lateral=2\pi R\times{}^1/_2 2R=2\pi R^2=\pi R^2+\pi R^2$.

6.° *El área total de un cono es igual á la lateral, mas el área de la base*, y por tanto á $\pi RG+\pi R^2=\pi R(G+R.)$

El área total de un cono equiláctero son los ${}^3/_2$ de su área lateral.

En efecto, es igual á $2\pi R^2+\pi R^2=3\pi R^2$.

298. Teorema. *El área lateral de un cono truncado* *de bases paralelas es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus bases.*

En efecto, segun lo demostrado en el teorema 233, la superficie curva de un cono truncado, recto, de bases paralelas, se desarrolla sobre un plano en un trapecio circular; el área de un trapecio circular, segun el teorema 189, lo hemos determinado multiplicando la semisuma de los arcos por la diferencia de los rádios. Ahora bien: como los dos arcos del mismo forman las dos circunferencias de las bases del cono, y como la diferencia de los rádios es el lado del cono, resultará que llamando R y r á los rádios de las circunferencias de las bases, y G y g á los lados del cono total y del deficiente, resultará, siendo $G-g=L$ lado del cono truncado (fig. 185) $AB'=AA'\times 2\pi\times\frac{AR+A'O'}{2}$ y en tésis general el área lateral del cono truncado

$$=L\times{}^1/_2(2\pi R+2\pi r)=L(\pi R-\pi r).$$

Corolario 1.° *El área de la superficie curva de un cono truncado recto de bases paralelas, es tambien igual al producto de un lado, por la circunferencia de una seccion recta, dada en el punto medio de su lado.*

En efecto, si por el punto medio B'' del lado BB' del cono truncado BA' (Fig. 185) se traza una seccion recta, cuyo diámetro sea A''B'', resultará segun el Teorema 118 que $A''O''={}^1/_2\,(A'O'+AR)$ cuyo valor sustituido en la fórmula precedente nos dará que: Ar. lat. cono truncado$=2\pi\times A''O''\times AA'$

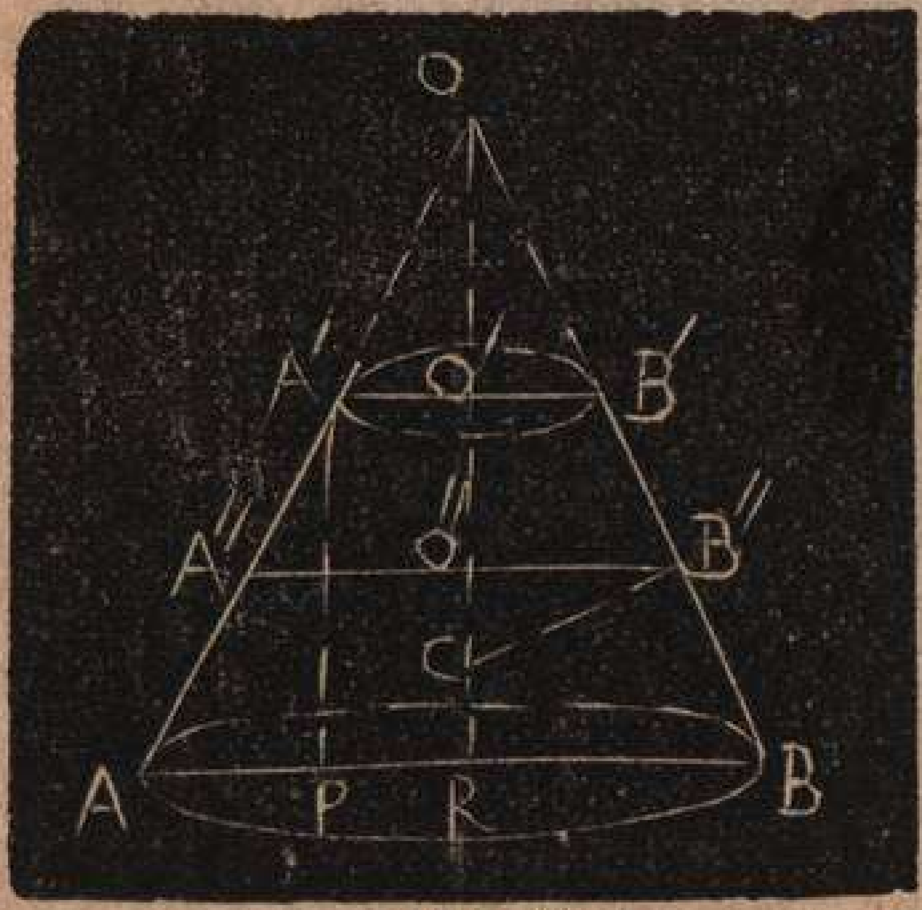


Fig. 185.

2.° *El área lateral de un cono truncado recto de bases paralelas, será tambien igual al producto de su eje por una circunferencia, cuyo rádio sea la perpendicular levantada en el punto medio de su lado y limitada por el eje.*

En efecto, si en la figura anterior se trazan por los puntos A' y B'' las perpendiculares A'P y B''C la primera á la base del cono, y la segumda al lado BB', resultará que los triángulos rectángulos AA'P y B''C O'' serán semejantes (T eorema 94), luego tendremos que:

A'P : O''B'' : : AA' : B''C, de donde y siendo A'P=O'R y O''B''=A''O'' resultará que: $O''B'' \times AA' = B''C \times O'R$, cuyo valor sustituido en la fórmula del precedente corolario nos dará que:

Area lateral cono truncado$=2\pi \times B''C \times O'R$.

3.° Para determinar el área de la superficie curva de cualquier otro cono truncado que no sea recto ó no tenga sus bases paralelas, se desarrollará dicha superficie sobre un plano, determinándose luego el área de la superficie resultante.

De las relaciones métricas que existen entre un tronco de cono, con el cono total, se desprende la resolucion del siguiente:

299. Problema. *Conocido un cono truncado recto de bases paralelas, hallar su altura, la del cono total y la del deficiente.*

1.° Para hallar la altura del cono truncado, determinaremos en el mismo los centros de los dos círculos de sus bases, y formando sobre un plano un triángulo rectángulo que tenga por cateto la recta AP (fig. 185) y por hipotenusa el lado AA' del cono, determinaremos el otro cateto A'P que será igual á la altura O'R.

2.° y 3.° Si construimos un trapecio isósceles A'B'BA sobre un plano que tenga por lados paralelos los dos diámetros de las bases y por altura la ya hallada para el cono truncado, prolongando los lados no paralelos se encontrarán en O y las distancias OR y OO' serán las alturas del cono total y del deficiente.

Por la semejanza de los triángulos ORA y OO'A' se pueden tambien obtener de la siguiente manera:

$$OR : OO' :: RA : O'A'$$

de donde $OR - OO' : OR :: RA - O'A' : RA$

que equivale á $O'R : OR :: AP : RA$,

de donde $OR = \frac{O'R \times RA}{AP}$. De la proposicion primera tambien resulta que $OR - OO' : OO' :: RA - O'A' : O'A'$ que equivale á $O'R : OO' :: AP : O'A'$

de donde $OO' = \frac{O'R \times O'A'}{AP}$.

El área total de un trozo de cono de bases paralelas, será igual al área lateral, mas la suma de las áreas de sus dos bases.

Su fórmula será:

Area Total cono Truncado$=L(\pi R-\pi r)+\pi(R^2+r^2)$.

300. Teorema. *El volúmen de un cono de revolucion es igual al tercio del producto del área de su base por su altura.*

En efecto, hemos considerado al cono como á la pirámide (redonda) de infinito número de caras laterales; por consiguiente el volúmen de esta se determinará como el de aquella, y segun los corolarios del teorema 288, espuestos en el número siguiente, *el volúmen de una pirámide es igual al área de su base por el tercio de su altura*, y como la base de una pirámide es un polígono regular, y el límite de estos es el círculo que sirve de base al cono; siendo constante la altura, resultará que el volúmen de un cono es igual al área del círculo de su base por el tercio de su altura.

Si representamos por V el volúmen del mismo, por B y A su base y altura respectiva, tendremos que $V={}^1/_3B\times A$.

Si llamamos ahora R al rádio del círculo de su base, tendremos que $V^n={}^1/_3\pi R^2\times A$.

Corolarios: 1.° *Si el cono fuese equiláctero,* su volúmen lo determinariamos despejando su altura en el triángulo rectángulo generador del mismo, el cual tendrá de hipotenusa el lado ó sean *dos rádios* y de catetos la espresada altura y el *rádio* del círculo de su base, de aquí que la altura$=R\sqrt{3}$ y por tanto, el volúmen del mismo es igual

$$\text{á } {}^1/_3\pi R^2\times R\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3.$$

2.° *Los volúmenes de dos conos semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.*

Supongamos que sean V y v los volúmenes de dos conos semejantes, siendo R y r los rádios de los círculos de sus bases y A y a las alturas respectivas, tendremos que: $V={}^1/_3\pi R^2A$, $v={}^1/_3\pi r^2a$, partiendo la primera igualdad por la segunda, se tiene que: $\frac{V}{v}=\frac{R^2A}{r^2a}$ y como los dos conos son semejantes, se tiene que: $\frac{R}{r}=\frac{A}{a}$ ó tambien $\frac{R^3}{r^3}=\frac{A^3}{a^3}$ multiplicando ordenadamente los dos miembros, resultará

$$\frac{{}^1/_3\pi R^2A}{{}^1/_3\pi r^2a}=\frac{A^3}{a^3} \quad \text{y} \quad \frac{{}^1/_3\pi R^2A}{{}^1/_3\pi r^2a}=\frac{R^3}{r^3}$$

De donde $V:v::A^3:a^3::R^3:r^3$.

301. Teorema. *El volúmen de un cono truncado de bases paralelas, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases mayor, menor y de una media proporcional entre ambas bases.*

En efecto, la misma relacion que existe entre las pirámides regulares y el cono, existe tambien entre las pirámides truncadas y el cono truncado; así que á este le podremos considerar como una pirámide regular truncada de bases paralelas y de un número infinito de caras laterales; y como el volúmen de este tronco de pirámide de bases paralelas es igual al tercio de su altura por la suma de sus bases mayor, menor y media proporcional entre las mismas, (segun hemos visto en el teorema 290), y siendo además segun el tercer corolario del mismo teorema, el cono truncado de bases paralelas, equivalente en volúmen á la suma de los volúmenes de tres conos, todos de la misma altura que el tronco dado, y que tengan respectivamente por bases la mayor, la menor y una media proporcional entre estas, resultará que llamando A á la altura, R y r á los rádios de los círculos de sus dos bases respectivas, el volúmen del cono truncado de bases paralelas, será:

$$V = {}^1/_3 A(B + b + \sqrt{Bb})$$

y por tanto, $V = {}^1/_3 A(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r) = {}^1/_3 \pi A(R^2 + r^2 + Rr)$

* Corolario. A importantísimas aplicaciones se prestan estas fórmulas para la determinacion de los aforos de toneles, pipas, bocoyes, etc., considerándolos como dos conos truncados de bases paralelas, y unidos por sus bases mayores, teniendo en cuenta el error que se comete para dar á la fórmula que represente el volúmen de cada uno de ellos, toda la aproximacion que sea posible.

Del cilindro.

Conocida la determinacion de un cilindro, las condiciones de igualdad de dos cilindros, las de semejanza de los mismos, las relaciones métricas que existen entre estos, pasemos á determinar sus áreas y volúmenes respectivamente.

302. Teorema. *El área lateral de un cilindro de revolucion es igual al producto de la circunferencia de su base por su lado.*

En efecto, el área lateral del cilindro se refiere solo á

NOTA. Para determinar el volúmen de algunos otros cuerpos de fácil trasporte y de figura muy irregular, se debe tener en cuenta el llamado PRINCIPIO DE ARQUIMEDES, por el cual sabemos que todo cuerpo sumergido en un líquido desaloja una cantidad del mismo que es igual en volúmen al del cuerpo sumergido; si determinamos el volúmen de dicho líquido desalojado, tendremos el del cuerpo sumergido.

la de la superficie cilíndrica que lo limita lateralmente, y como dicha superficie se desarrolla sobre un plano en un paralelógramo rectángulo, segun hemos demostrado en el teorema 236, cuya altura es el lado del cilindro recto, y su base la circunferencia rectificada del círculo de su base; y siendo el área de un rectángulo (145) igual producto de su base por su altura, resultará que llamando R al rádio de su base y G á su generatríz, ó lado, ó altura del mismo, será:

Area lateral cilindro recto$=2\pi R\times G$.

Corolario. *1.° El área total de un cilindro será igual á la lateral mas las áreas de sus dos bases*: luego

Area total$=2\pi RG+2\pi R^2=2\pi R(G+R)$

2.° Si el cilindro fuese equiláctero sería $G=2R$, *y su área lateral sería* $2\pi R\times 2R=4\pi R^2$

3.° El área total de un cilindro equilátero será:

$$4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$$

4.° Las áreas laterales de dos cilindros semejantes son entre sí como los cuadrados de sus aristas homólogas.

5.° El área lateral de un cilindro cualquiera será igual al producto de la circunferencia de su seccion recta por su lado, de acuerdo con lo demostrado en el Teorema 280, puesto que un cilindro es un prisma redondo, ó el límite de los prismas.

303. Teorema. *El volúmen de un cilindro recto de revolucion es igual al producto del área del círculo de su base por su lado.*

En efecto, el cilindro es el límite de los prismas regulares, bien sea el superior ó el inferior, segun que aquellos sean inscriptos ó circunscriptos á este, y como el volúmen de un prisma es igual al producto del área de su base por su altura (2.° colorario del teorema 286), resultará si llamamos R al rádio del círculo de su base, y L á su lado ó altura: volúmen cilindro$=\pi R^2\times L$.

Corolarios: *1.° El volúmen de un cilindro equiláctero,* en el cual $L=2R$, será: $\pi R^2\times 2R=2\pi R^3$.

2.° Los volúmenes de dos cilindros semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.

En efecto, llamando V y v á sus volúmenes respectivos, R y r á los rádios de los círculos de sus bases, L y l á sus lados ó alturas, tendremos que: $V=\pi R^2L$ y $v=\pi r^2l$, de donde $\frac{V}{v}=\frac{R^2L}{r^2l}$, y como de la semejanza de los dos cilindros se desprende la de los dos rectángulos generadores, tendremos que: $\frac{R}{r}=\frac{L}{l}$, ó bien $\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}$

que dará $\frac{R^2L}{r^2l}=\frac{L^3}{l^3}$; luego $\frac{V}{v}=\frac{L^3}{l^3}$.

3.° *El volúmen correspondiente á un cilindro cualquiera es igual al área de una seccion recta dada al mismo, multiplicada por su lado.*

De la Esfera.

Conocida la determinacion de una esfera, las condiciones de igualdad de dos esferas, las propiedades de los planos secantes á la esfera, etc., etc., pasemos á determinar las áreas y volúmenes de la esfera y de las diferentes partes de la misma, las cuales tienen denominaciones especiales.

304. Teorema. *El área de una superficie descripta por la línea quebrada* ABCD (fig. 186) *de un sector poligonal* ABCDO, *el cual gira al rededor de su diámetro* AM, *es igual al producto de una circunferencia, cuyo rádio es la apotema* OT, *por la proyeccion* AD' *de la base sobre el eje.*

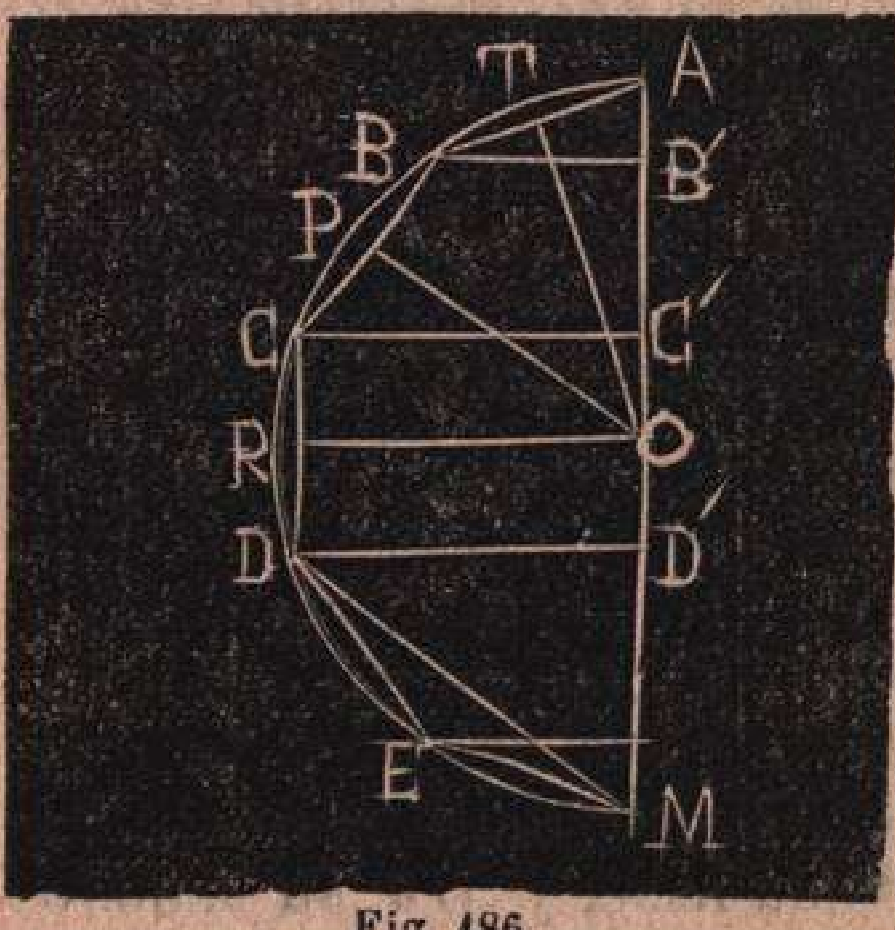


Fig. 186.

En efecto, el lado AB describe la superficie curva de un cono recto y circular cuyo eje es AB', y cuyo rádio es BB'. El lado BC, la de un cono circular truncado de bases paralelas cuyo eje es B'C', siendo los rádios de sus bases BB' y CC', y por último, el lado CD describe una superficie cilíndrica que tiene por eje C'D'. Por tanto:

Area superficial descripta por AB$=2.\pi.OT\times AB'$
(2.° corolario. Teorema 297.)
Area superficial descripta por BC$=2.\pi.OP\times B'C'$
(2.° corolario. Teorema 298.)
Area superficial descripta por CD$=2.\pi.DD'\times CD$
(Teorema 302.)

Si sumamos miembro á miembro estas dos igualdades, advirtiendo que CD=C'D'; tambien que OT=OP=OR, y que DD'=OT, resultará que:

Area descripta por $ABCD=2.\pi.OT\times AD'$.

305. Zona esférica *es la parte de superficie esférica descrita por un arco cualquiera de la semicircunferencia generatriz de la misma.*

Bases de una zona son las circunferencias descritas por los estremos del arco generador de la zona: y Altura es la proyeccion de dicho arco sobre el eje.

La zona esférica puede tener una ó dos bases, segun que uno de los estremos del arco generador coincida ó no con el eje.

Es frecuente llamar *casquete esférico* á la zona de una sola base.

Teorema. *El área de una zona esférica es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

En efecto, la zona es el límite del área descrita por una una línea quebrada, regular, poligonal, cuando sea infinito el número de sus lados. Si por tanto llamamos Ar. al área de la zona, R al rádio del arco generador, ó sea al de la esfera, A á la proyeccion de dicho arco sobre el eje, ó sea la altura, resultará que á medida que el área descripta por la línea quebrada tienda hácia el area de la zona, el rádio de la circunferencia inscripta en la misma, tenderá tambien hácia el rádio R; y como la proyeccion sobre el eje es constante, resultará que en su límite será:

Area de la zona$=2\pi R\times A$.

Corolarios: 1.° *El área de un casquete esférico es equivalente al área de un círculo que tenga por rádio la cuerda de su arco generador.*

En efecto, el área del casquete esférico, cuyo arco generador sea MED (fig.186) será $MD'\times2\pi.MO=\pi.MD'\times MA$; pero como $MA\times MD'=\overline{MD}^2$ (segun el 3.er teorema 98), resultará que: Area del casquete esférico propuesto$=\pi.\overline{MD}^2$.

2.° *Las áreas de dos zonas de una misma esfera son directamente proporcionales á sus alturas.*

Llamando á dichas áreas Ar. y *ar*, R al rádio, A y *a* á las alturas respectivas, resultará que:

$Ar=2\pi R\times A$ y $ar=2\pi R\times a$, de donde $Ar:ar::A:a$.

306. Teorema. *El área de la esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.*

En efecto, el área descripta por el arco $AD=2\pi R\times AD'$ (fig. 186); el área descripta por el arco $DM=2\pi R\times D'M$, sumándolas diremos: el área descripta por el arco

$$ADM=2\pi R(AD'+D'M)=2\pi R\times 2R=4\pi R^2.$$

Escolio. Siendo $4\pi R^2$ el área de la esfera, y πR^2 la de un círculo máximo de la misma, resultará que *el área de la superficie esférica es cuádrupla de la de un círculo máximo de la misma.*

Corolario. *Las áreas de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus diámetros ó de sus rádios.*

En efecto, $Ar=4\pi R^2$ y $ar=4\pi r^2$, de donde $\frac{Ar}{ar}=\frac{R^2}{r^2}$

y tambien $\frac{Ar}{ar}=\frac{4R^2}{4r^2}=\frac{(2R)^2}{(2r)^2}=\frac{D^2}{d^2}$.

307. **Huso esférico** *es la parte de superficie esférica comprendido entre dos semicircunferencias máximas.*

El área de un huso esférico se determinará, conocido el ángulo que forma dichas dos semicircunferencias máximas por la proporcion siguiente. Llamando G al número de grados del ángulo, tendremos que: $360^\circ : 4\pi R^2 :: G : x$.

308. **Teorema.** *El volúmen de una esfera es igual al producto del área de la misma por la tercera parte del rádio*

En efecto, hemos dicho que á la esfera la podemos considerar como un poliedro regular redondo, y como el volúmen de un poliedro regular lo hemos determinado (Teorema 291) diciendo: «es igual al producto de su área total por la tercera parte de la apotema,» y como la apotema de la esfera considerada como poliedro es el rádio y el área de este es la total de aquella, resultará que si llamamos R á su rádio, será: Volúmen Esfera$=4\pi R^2\times {}^1/_3 R={}^4/_3\pi R^3$.

309. **Sector esférico** *es la parte de esfera engendrada por un sector del semicírculo generador.*

El volúmen de un sector esférico es igual á la tercera parte del producto de la área de la zona correspondiente al mismo, multiplicado por la tercera parte del rádio.

Segmento esférico *es la parte de esfera comprendida entre dos planos secantes á la misma.*

Si uno de los dos planos es tangente, tendremos el segmento de una sola base, si los dos son secantes tendremos el de dos bases.

El volúmen de un segmento esférico de una sala base *y menor que la semiesfera, es igual al volúmen del sector esférico correspondiente, menos el del cono excedente.*

El volúmen de un segmento esférico de una sola base mayor que la semiesfera, es igual al del sector esférico correspondiente, mas el del cono complementario.

El volúmen de su segmento esférico de dos bases, es igual á la diferencia entre los volúmenes de los dos segmentos anteriores.

Corolario. Los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de sus rádios ó de sus diámetros. En efecto, sean $V={}^4/_3\pi R^3$ y $v={}^4/_3\pi r^3$ tendremos que $V:v::{}^4/_3\pi R^3:{}^4/_3\pi r^3$ luego $V:v::R^3:r^3$.

El volúmen de una esfera en funcion del diámetro será:

$$4\pi R^2\times{}^1/_3R=2\pi R\times 2R\times{}^1/_3R=\pi D\times D\times{}^1/_6D={}^1/_6\pi D^3.$$

Luego por tanto, llamando V y v sus volúmenes respectivos, tendremos que: $V={}^1/_6\pi D^3$ y $v={}^1/_6\pi d^3$ de donde $V:v::{}^1/_6\pi D^3:{}^1/_6\pi d^3$ luego $V:v::D^3:d^3$.

* Relaciones entre los volúmenes de los cuerpos redondos equilácteros, inscriptos los unos á los otros.

310. *Determinar la relacion entre los volúmenes de una esfera y de dos cilindros equilácteros, uno inscripto y otro circunscripto á la misma.*

Los tres cuerpos cuyos volúmenes vamos á determinar se representan en la adjunta (fig. 187).

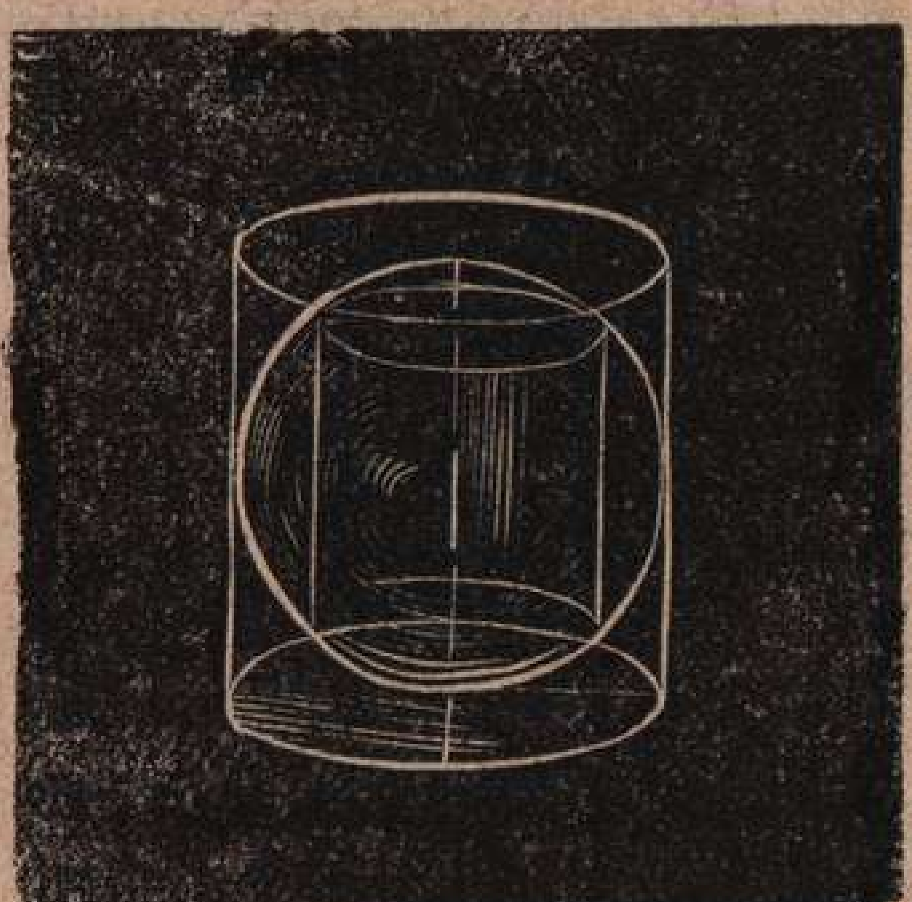


Fig. 187.

En esta figura observaremos que el rádio de la esfera es igual al de las bases del cilindro equiláctero circunscripto. El rádio del cilindro equiláctero inscripto será igual á la mitad del lado del cuadrado inscripto, que segun sabemos (teorema 165), es $R\sqrt{2}$: por tanto, los volúmenes serán:

Vol. cilin. circuns. $=2\pi R^3$.

Vol. esfera $={}^4/_3\pi R^3$.

Vol. cilin. inscrip. $={}^1/_2\pi R^3\sqrt{2}$;

por tanto, diremos:

Vol. cil. cir : *Vol. esf.* $::3:2$.

Vol. esf. : *Vol. cil. ins.* $::8:3\sqrt{2}$, *Vol. cil. cir.* : *Vol. cil. ins.* $::4:\sqrt{2}$

311. *Determiuar la relacion entre los volúmenes de una esfera y de dos conos equiláteros, uno inscripto y otro circunscripto á la misma.*

Sean dichos cuerpos los que representamos en la (fig. 188). Desde luego tendremos que el rádio AQ del círculo de la base del cono circunscripto es doble que el PO del cono inscripto, y este rádio PO será la mitad del lado del triángulo regular inscripto en un círculo, pues que así se observa en proyeccion, por tanto, $PO = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$ (Teorema 164) y $QA = R\sqrt{3}$, y como la altura CO del cono inscripio es igual á $3/2R$, segun resulta de aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo COP, la altura BA del cono circunscripto será 3R, resultando que los volúmenes respectivos serán:

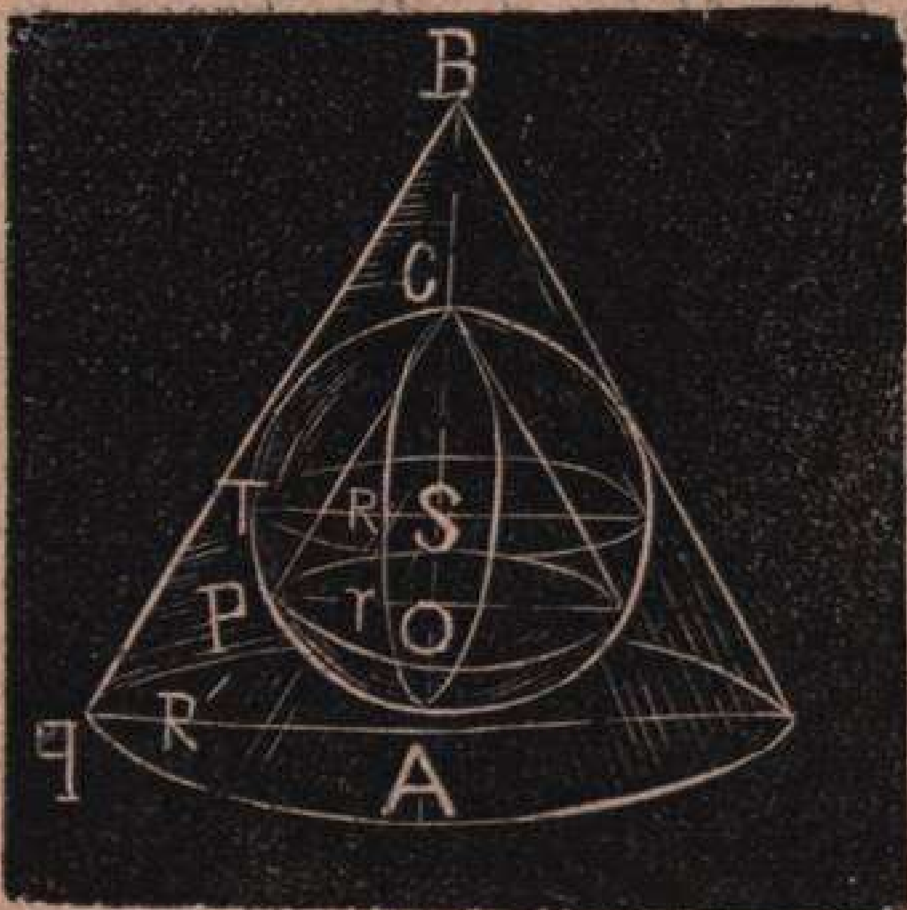


Fig. 188.

$$Vol.\ con.\ cir. = \pi(R\sqrt{3})^2 \times \tfrac{1}{3}3R = 3\pi R^3.$$
$$Vol.\ esfera = \qquad = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$
$$Vol.\ con.\ ins. = \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2}R) = \tfrac{3}{8}\pi R^3.$$ Por tanto:

$Vol.\ con.\ cir. : vol.\ esf. :: 9 : 4.$

$Vol.\ con.\ cir. : vol.\ con.\ ins. :: 8 : 1 :: 2^3 : 1^3.$

$Vol.\ esf. : Vol.\ con.\ ins. :: 32 : 9.$

312. *Determinar la relacion entre los volúmenes de una esfera, un cono y un cilindro equiláteros, inscriptos estos dos últimos en aquella.*

Segun las fórmulas anteriores, tendremos que:

$Vol.\ esfera = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$

$Vol.\ cilindro = \tfrac{1}{2}\pi R^3\sqrt{2}.$

$Vol.\ cono = \tfrac{3}{8}\pi R^3$ de donde tendremos que

$Vol.\ esfera : vol.\ cilindro :: 8 : 3\sqrt{2}$

$Vol.\ esfera : vol.\ cono :: 32 : 9$

$Vol.\ cilindro : vol.\ cono :: 8\sqrt{2} : 6$

313. *Determinar la relacion entre los volúmenes de una esfera y de un cono y de un cilindro, ambos equiláteros y circunscriptos á dicha esfera.*

En la (figura 189) representamos estos tres cuerpos: conforme hemos espuesto en los números anteriores, tendremos:

Fig. 189.

Volúmen esfera $= {}^4/_3\,\pi R^3$
Volúmen cilindro $= 2\pi R^3$
Volúmen cono $= 3\pi R^3$ de donde
Vol. esfera:vol. cilindro::4:6::2:3

Luego la esfera tiene un volúmen equivalente á las dos terceras partes del cilindro.

Vol. esf. : vol. cono : : 4 : 9

Luego la esfera tiene un volúmen equivalente á las cuatro novenas partes del cono.

Vol. cil. : vol. cono : : 2 : 3

Luego el cilindro tiene un volúmen equivalente á las dos terceras partes del cono.

Escolio. Los volúmenes del cilindro y cono equiláctеros circunscriptos á la esfera y el volúmen de esta, son entre si como las áreas totales respectivas, lo cual resulta de la comparacion de las áreas de dichos cuerpos.

Las proposiciones últimas fueron descubiertas por ARQUÍMEDES, siendo á su juicio tan importantes que mandó se grabasen sobre su sepulcro cerca de Siracusa, y por ellas reconoció Ciceron, dos siglos despues, la tumba del eminente Geómetra.

314. *Con aplicacicn de todas las fórmulas correspondientes á los volúmenes de los cuerpos, es fácil determinar el peso de los mismos.*

La Física nos enseña que el peso de un cuerpo está determinado por el producto de su volúmen por su densidad.

Densidad de un cuerpo, es el peso de su unidad de volúmen comparado con otro volúmen igual de agua destilada en su máximum de concentracion, eligiéndose este término de medida, por ser el agua el elemento mas general en todos los paises.

Si llamamos P al peso de un cuerpo,
V á su volúmen respectivo.
D á su densidad, tendremos que:

$$P = V \times D \qquad V = P : D \qquad D = P : V.$$

A continuacion expondremos para facilitar estos cálculos la siguiente tabla, que nos expresa los pesos específicos de algunos cuerpos.

Platino batido ...	23,000	Cobre fundido.....	8,788	Marfil................	1,917
» forjado..	20,336	Acero..................	7,816	Agua de mar......	1,026
Oro forjado........	19,362	Hierro en barra.,	7,788	Agua pura..........	1,000
Oro fundido.......	19,258	Hierro fundido....	7,207	Aceite de olivas..	0,915
Mercurio...........	13,598	Mármol...............	2,960	Madera haya.....	0,852
Plomo fundido...	11,352	Granito...............	2,716	Hielo..................	0,630
Plata fundida.....	10,474	Coral..................	2,680	Corcho...............	0,240

El poliedro que tiene mayor volúmen de todos los que tengan igual área total es la esfera.

El poliedro que tiene menor área total de todos los que tengan igual volúmen es la esfera.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES AL LIBRO SEGUNDO

DE LA SEGUNDA PARTE DE LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

QUE SE OCUPA DE LOS CUERPOS REDONDOS.

I. Sabido que el rádio terrestre es igual á 6;366,198 metros, determinar el área de la superficie terrestre en metros, decámetros, hectómetros, kilómetros y miriámetros cuadrados.

II. Determinar asimismo el volúmen de la esfera terrestre.

III. Determinar numéricamente el área lateral y la total de un cilindro y de un cono equiláctero, teniendo 10 metros el lado de estos.

IV. Calcular con los datos anteriores sus respectivos volúmenes.

V. Determinar el lado de un cilindro equiláctero que tenga respectivamente la capacidad de un litro, de un decálitro, de un hectólitro ó de un kilólitro.

VI. Relacion entre las áreas totales de una esfera y un cono y un cilindro equiláctero, equivalentes en volúmen.

VII. Determinar la relacion entre los volúmenes de una esfera, un cono y un cilindro equiláctero que todos tengan las mismas areas totales.

VIII. Siendo equivalentes las áreas de una esfera y de una zona de una base, y siendo conocida la altura ó el rádio de la base de esta, determinar su rádio ó la altura.

IX. Determinar el rádio de una bala de plomo que pese 6 kilógramos.

X. Qué longitud deben tener los rádios de tres esferas macizas, una de oro, otra de plata y otra de cobre, teniendo todas el mismo peso.

XI. Calcular los tres lados de un triángulo, siendo conocidos los volúmenes que engendra este triángulo al girar al rededor de cada uno de sus tres lados.

XII. Demostrar que el área total ó el volúmen del cilindro equiláctero, inscripto ó circunscripto á una esfera, es la media proporcional entre el área ó el volúmen de esta esfera y el área total ó el volúmen del cono equiláctero inscripto ó circunscripto á la misma.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

1. Trigonometría *es la ciencia que trata de la resolucion de los triángulos por medio del cálculo.*

Su objeto *loconstituye el perfecto conocimiento de todas las fórmulas trigonométricas, por medio de las cuales establecemos las convenientes y necesarias relaciones entre sus diferentes elementos.*

Sus medios *son las líneas trigonométricas, el cálculo algebráico y las construcciones gráficas.*

El fin *que se propone es la resolucion de todos los triángulos en sus diferentes casos, mediante la aplicacion de las fórmulas necesarias.*

La Trigonometría se propone, pues, la resolucion de todos los triángulos, sean estos *rectilíneos ó esféricos*: de aquí su division en Rectilínea ó plana, y Esférica.

Para la resolucion numérica de los triángulos se necesitan conocer tres de sus seis elementos, siendo necesario que entre los tres datos ó elementos conocidos haya cuando menos un lado, tratándose de los triángulos rectilíneos, (1) pues de otro modo no estará determinado el triángulo mas que en su *figura*, y necesitamos determinarlo en su *magnitud*, toda vez que la *posicion* es un tercer aspecto fácilmente adquirible sin cambiar los dos primeros.

La Trigonometría rectilínea la podemos considerar, para su estudio, dividida en dos partes:

Primera: Relaciones entre las líneas trigonométricas.

Segunda: Resolucion numérica de los triángulos rectilíneos.

Podrá creerse por los principiantes que el estudio de la Trigonometría carece de importancia, puesto que por medios geométricos y puramente gráficos hemos dado resolucion á cuantos problemas sobre triángulos puedan proponerse (Geometría plana, problemas correspondientes al num. 88); pero es aquí necesario reconocer el grave error de semejante juicio, atendiendo: 1.° A las grandes inexactitudes que en aquellas resoluciones siempre se cometen por la falta de exactitud y precision en los instrumentos, y tambien en su manejo. 2.° Por la falta de relaciones fijas entre los elementos lineales de los triángulos. 3.° Por la falta de relaciones fáciles entre los lados y los ángulos opuestos de los mismos. Sabemos únicamente: «en un solo triángulo, que á iguales lados se oponen iguales ángulos; y que á mayor ó menor lado

(1) Un triángulo esférico está determinado, conociendo los valores de sus tres ángulos, puesto que sus lados tienen precisamente en su longitud los grados correspondientes á sus ángulos opuestos.

se opone mayor ó menor ángulo (Teorema 85); mas ni hay proporcionalidad entre los lados y los ángulos, ni mucho ménos existe para todos los triángulos en general.»

Verdad es que pudiéramos establecer directamente relaciones que ligasen los ángulos con los lados; pero esto se haria por medio de ecuaciones de gran complicacion y dificultad, lo cual se evita por medio de las llamadas «líneas trigonométricas,» que son los términos intermedios entre los lados y los ángulos de los triángulos; cuyos valores dependen del que tengan respectivamente los ángulos y al contrario; y por medio de ellas se establecen relaciones tan fáciles y sencillas que excluyen de una vez y para siempre todo otro estudio, mediante el cual diésemos resolucion á los triángulos.

«La necesidad é importancia de la Trigonometria» se reconoce desde luego sabiendo que por medio del triángulo, considerado aquel bajo el concepto de las relaciones armónicas de sus diferentes elementos, se resuelven y determinan todas las distancias incógnitas «accesibles é inaccesibles,» y tambien aquellas que en los tiempos primitivos se consideraban como «insondables.»

Por medio del triángulo se determina la Paralaje de los astros, su distancia de nosotros, su magnitud, su luz, etc.

Por medio del triángulo, bajo el concepto de ser este la superficie cerrada por el menor número posible de líneas, es decir, el «elemento superficial,» se determina el área ó superficie de cualquier extension poligonal, tenga la forma que quiera.

Por medio del triángulo se levantan, resuelven, determinan y forman los planos topográficos, las cartas hidrográficas ó marinas, los mapas murales, continentales, etc., etc.: con razon puede y debe ser la Trigonometria una de las ciencias de mas importantes y trascendentales aplicaciones, mas luminosa para consolar al alma en las contemplaciones del espacio infinito, y de mas resultados prácticos, porque sintetiza gran parte de los estudios matemáticos; aplicándose como lo está, á la resolucion de problemas de verdadera é innegable importancia, en los que entran varios ó un solo triángulo, el cual, bajo el concepto de servir de norma, de medida, de base en fin, para la resolucion de tantos problemas, podemos considerarle como la llave del espacio.

Para verificar el estudio de la Trigonometria convendrá fijarse en el siguiente cuadro, en el que exponemos la division que hacemos de la misma para proceder con el más ordenado método.

- La Trigonometria, que trata de la resolucion de los triángulos por medio del cálculo, se divide en
  - ***Rectilínea*** si los triángulos que resuelve son rectilíneos,
    - 1.ª parte. Relaciones entre las líneas trigonométricas.
      - Preliminares.
      - Líneas trigonométricas de varios arcos particulares.
      - Relaciones entre las líneas de un arco.
      - Relaciones entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma y diferencia de los mismos.
      - Fórmulas trigonométricas correspondientes á los arcos múltiplos.
      - Fórmulas trigonométricas correspondientes á los arcos sub-múltiplos.
      - Trasformar en productos la suma ó diferencia de varias líneas trigonométricas.
      - Construccion de las Tablas trigonométricas.
      - Disposicion y uso de dichas Tablas.
    - 2.ª parte. Resolucion numérica de los triángulos rectilíneos.
      - Relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos.
      - Resolucion de los triángulos rectángulos.
      - Relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos oblicuángulos.
      - Resolucion de los triángulos oblicuángulos.
      - Aplicacion de la resolucion de los triángulos á varios casos particulares.
      - Areas de las superficies poligonales trigonométricamente.
  - y
  - ***Esférica***, si los triángulos que resuelve son esféricos, de la que no nos ocupamos.

PRIMERA PARTE.

RELACION ENTRE LAS LINEAS TRIGONOMÉTRICAS

Preliminares.

2. Las líneas trigonométricas correspondientes á un arco ó á un ángulo, son cuatro: *seno*, *tangente*, *seno-verso* y *secante*.

A todo *ángulo* corresponde su *co-ángulo*, el cual se determina complementando aquel.

Se llaman co-líneas trigonométricas de un ángulo, á las líneas de su complemento ó sea de su co-ángulo respectivo.

Las co-líneas trigonométricas son: *co-seno*, *co-tangente*, *co-senoverso* y *co-secante*.

Se llama Seno *de un arco, la perpendicular trazada desde uno de sus estremos al rádio ó diámetro que pasa por el otro estremo.*

Se llama Tangente *de un arco, á la parte de tangente geométrica trazada por uno de sus estremos y limitada por el segundo lado del ángulo prolongado.*

Se llama Senoverso *de un arco, á la parte de rádio comprendido entre el pié del seno y el orígen del arco.*

Se llama Secante *de un arco, á la distancia comprendida entre el extremo de la tangente y el centro ó vértice del ángulo central correspondiente á aquel.*

Entendemos por *coseno. cotangente, cosenoverso y cosecante* de un arco, al *seno, tangente, senoverso y secante* del complemento de referido arco.

De las 4 líneas, se usan solo generalmente el *seno y tangente.*

De las 4 colíneas, se usan solamente el *coseno y cotangente.* Abreviadamente se representan por *sen. cos. tang.* y *cotg.*

De las definiciones anteriores se desprende:

1.° De todas las líneas no empieza ninguna en el centro mas que la secante.

2.° De las colíneas no empiezan en el centro mas que el coseno y la cosecante.

3.° El seno, coseno, senoverso y cosenoverso, tendrán una magnitud que no podrá esceder de la del rádio.

4.° La tangente y cotangente pueden tener cualquier magnitud.

5.° La secante y cosecante tienen que ser mayores que el rádio.

6.° Los senos y las tangentes de un mismo arco, son siempre paralelos entre sí y á la vez perpendiculares al diámetro qne determina el orígen de los arcos.

7.° Los cosenos y las cotangentes, son siempre paralelos al diámetro que determina el orígen de los arcos, y por tanto, respectivamente perpendiculares á los senos y á las tangentes.

3. Si suponemos (fig. 190) que sea TOP el ángulo dado, su arco respectivo será TP y en él tendremos llamándole *a* que:

Fig. 190.

Sen. *a*=PL.
Tang. *a*=TC.
Senver. *a*=LT.
Sec. *a*=OC.

Cos. *a*=OL.
Cotg *a*=EQ.
Cosver. *a*=ER.
Cosec. *a*=OQ.

Si el ángulo dado fuese el EOT, su arco correspondiente seria el cuadrante TPE y en él tendriamos, llamándole *b*, que:

Sen. *b*=EO=Rádio Tang.=∞ cos. *b*=0 Cotg. *b*=0.

4. *Es general tomar por punto comun de orígen de todos los arcos, un punto de la circunferencia, el cual es el estremo T de la derecha del diámetro horizontal y en el que se consideran positivos los arcos que empezando en referido punto van hácia arriba en el sentido TPE.... y negativos en el contrario TNM....*

Se establece como punto de oríjen de los arcos complementarios el estremo E del cuadrante TPE, en el cual se consideran como positivas todas las líneas Trigonométricas:

los complementos de los arcos positivos se toman en el sentido EP...: los de los arcos negativos en el EB... (1) *Las líneas Trigonométricas pueden afectar cualidad diferente, así que unas y otras pueden ser positivas ó negativas. Si consideramos dividida la circunferencia por dos diámetros perpendiculares entre sí, uno horizontal y otro vertical en cuatro cuadrantes, segun se manifiesta en los grabados de la* (fig. 191) *resultará segun los mismos, que considerándose como positivas las líneas trigonométricas del primer cuadrante y como negativas las que afecten posiciones contrarias por concebirse originadas por generacion contraria, resultará que los senos serán positivos, perteneciendo á ángulos comprendidos en el primero ó en los dos primeros cuadrantes. Los cosenos serán positivos en el primero y cuarto cuadrante. Las tangentes y cotangentes serán positivas en el primero y tercer cuadrante.*

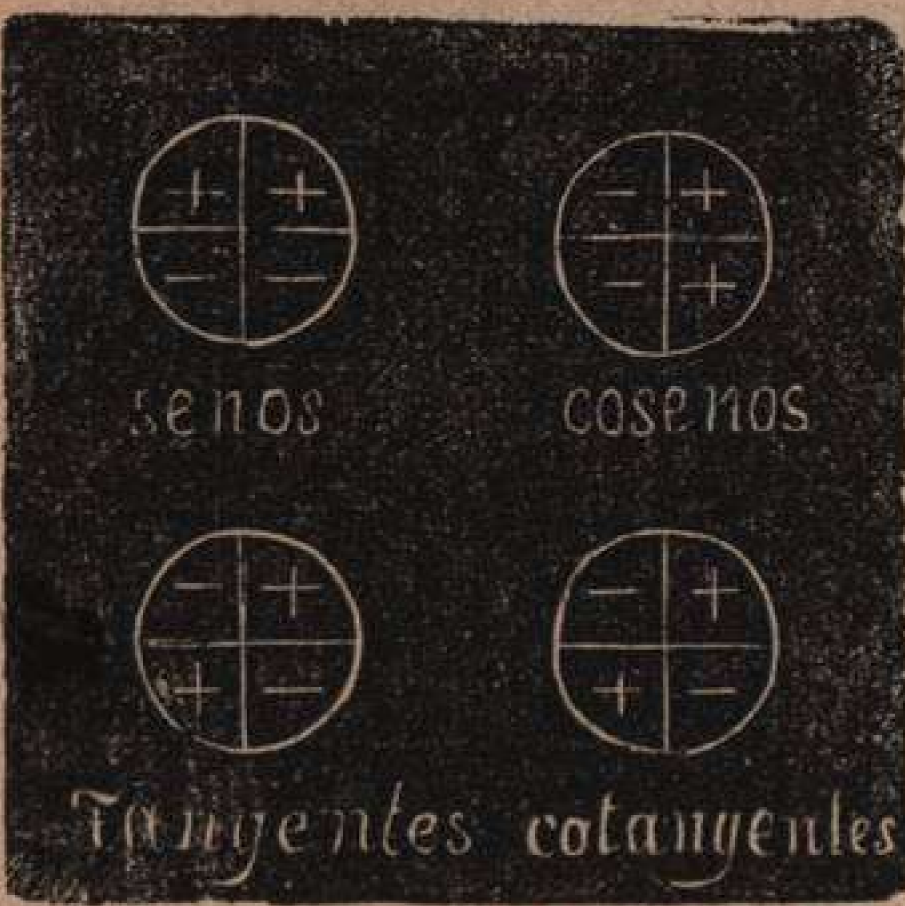


Fig. 191.

Si nos referimos ahora á la figura anterior 190, resultará que los senos son positivos situados sobre el diámetro AT, y negativos hallándose situados debajo de referido diámetro.

Los cosenos serán positivos, hallándose situados á la derecha del diámetro EM, y negativos hallándose situados á la izquierda del mismo.

Las tangentes serán positivas si se hallan comprendidas desde el punto T, orígen de las mismas, hácia la parte superior C, y negativas las comprendidas en la direccion TH...

Las cotangentes serán positivas si se hallan comprendidas desde el punto E, orígen de las mismas, hácia la dere-

(1) Apesar de ser innecesario el estudio del concepto negativo de las líneas trigonométricas para la resólucion trigonométrica de los triángulos, y por tanto, del Teorema de Descartes, como tienen una continua aplicacion para los estudios ulteriores de las Matemáticas, nos creemos en el deber de no dispensarnos en el estudio de estas líneas de dicho concepto, admitiendo desde luego en su existencia los dos diferentes, bajo los cnales debemos en rigor considerarlas.

cha Q, y negativas las comprendidas desde dicho punto E hácia la izquierda en la direccion ED...

5. De lo espuesto anteriormente se desprende:

1.° Que el seno de un arco menor que la semicircunferencia, es la mitad de la cuerda del arco duplo.

En efecto, siendo PL el seno del arco TP, si le prolongamos llegará al punto N, y como sabemos que todo diámetro TA perpendicular á una cuerda PN la divide en dos partes iguales PL=LN, lo mismo que á los arcos TP=TN que dicha cuerda subtiende, será evidente la proposicion.

2.° Siendo el arco igual á cero, su seno será tambien cero.

3.° A medida que un arco crece de cero á 90°, crecerá el seno y la tangente y disminuirá el coseno y la cotangente.

4.° Si el arco tiene 90° su seno alcanzará el límite máximo y será el rádio positivo. Su coseno será cero. Su tangente infinita. Su cotangente será cero.

5.° Si el arco crece desde 90° á 180°, menguarán el seno y la tangente y aumentarán el coseno y la cotangente, verificándose que el seno será positivo, la tangente negativa, el coseno negativo y la cotangente tambien negativa.

6.° Si el arco tiene 180°, su seno será cero positivo, su coseno será el rádio negativo, su tangente será cero negativo, su cotangente será infinita negativa.

7.° Si el arco crece de 180° (valor de los dos primeros cuadrantes) *á 270* (valor de los tres primeros cuadrantes) *se verificará que en magnitud vuelven á crecer el seno y la tangente y á disminuir el coseno y la cotangente.*

8.° Si el arco llega á tener 270°, su seno será el rádio negativo, su coseno será cero negativo, su tangente será infinita negativa y su cotangente será cero positivo.

9.° Si el arco crece de 270° á 360° disminuirán el seno y la tangente, y crecerán el coseno y la cotangente, de tal manera que cuando el arco llegue á valer 360°, ó sea una circunferencia, su seno será cero negativo, su coseno el rádio positivo, su tangente cero negativo y su cotangente infinita negativa.

10. El arco á quien corresponda un seno mayor que el rádio ó menor que el rádio negativo, se llamará imaginario.

6. Determinemos ahora en la (fig. 190) las líneas trigonométricas correspondientes á sus diferentes arcos.

Fig. 190.

Arco TPEB=a.	Arco TPEBA=a.
Sen.a=+BF.	*Sen.a=+—O*
Cos.a=—FO.	*Cos.a=—R.*
Tang.a=—TH	*Tang.a=—O.*
Cotg.a=—DE.	*Cotg.a=—∞.*

Arco TPEBAZ=a.	Arco TPEBAZM=a.	Arco TPEBAZMN=a.	Arco TPEBAZMNT=a.
Sen.a=—ZF.	*Sen.a=—R.*	*Sen.a=—NL.*	*Sen.a= O.*
Cos.a=—FO.	*Cos.a=—0.*	*Cos.a=+OL.*	*Cos.a=+R.*
Tng.a=+TC.	*Tang. a=+∞.*	*Tang.a=—TH*	*Tang.a=—0.*
Cotg.a=+EQ	*Cotg.a=+0.*	*Cotg.a=—ED.*	*Cotg.a=—∞.*

Las líneas trigonométricas correspondientes á un arco de mayor número de grados que la circunferencia, como de 390°, serán las mismas que las del arco 390°—360°, es decir, serán las del arco de 30°. Así, con cualquier otro arco cuyo valor exceda del de la circunferencia ó de cierto número de veces, el de la misma.

7. Determinemos la cuestion inversa, es decir, dada una línea trigonométrica, determinar su arco correspondiente.

1.° Dado el seno, hallar el arco. (Fig. 190.)

El seno dado puede ser positivo ó negativo; en cualquiera de los dos casos la longitud del rádio con que ha sido trazado el arco, debe exceder á la del seno dado.

Supongamos que dicho seno sea positivo colocándolo desde el centro O sobre el rádio OE; supongamos que llega á R trazando por este punto la paralela BP, tendremos que el arco pedido será el TP á quien corresponde de seno la línea recta PL, que será igual á la RO; mas como la paralela BP, trazada al diámetro que pasa por el punto de orígen, corta tambien en B al arco y el TPEB tiene de seno la recta BF, que es igual á la RO, resultará que el seno dado puede corresponder indistintamente á los arcos TP y TPEB. *Luego el seno no determina distintamente el arco,* porque á cualquier seno corresponden dos arcos: sin embargo, como dichos dos arcos son suplementarios, si expresamos que el seno dado corresponde á un ángulo agudo ú obtuso, tendremos expuesto el problema con toda claridad.

Si el seno dado fuese negativo se hará análoga construccion por la parte inferior al diámetro TA.

2.° *Dado el coseno, hallar el arco.* (Fig. 190.)

El coseno dado puede ser positivo ó negativo en cualquiera de los dos casos, su longitud no puede exceder del rádio con el cual hubiese sido trazado el arco.

Supongamos positivo el coseno dado, tomando su longitud sobre el rádio OT, á partir del centro O; supongamos que llega á L, trazando por este punto la perpendicular PN á dicho rádio, el punto P en que corta á la circunferencia limitará el arco TP, que será el pedido, por tener su coseno una longitud igual á la recta dada. Sin embargo, la recta PN corta tambien á la circunferencia en el punto N, y resultará otro arco positivo TEAMN, que tendrá el mismo coseno OL. Por tanto, *el coseno no determina completamente el arco*; mas como los dos arcos á quien corresponde un mismo coseno completan una circunferencia, será fácil distinguir cuál de los dos es el pedido.

Si el coseno dado fuese negativo, verificaríamos análoga construccion á la izquierda del diámetro EM.

3.° *Dada la tangente, hallar el arco.* (Fig. 190.)

La tangente dada puede ser positiva ó negativa, mas en cuanto á su magnitud puede tener la que se quiera.

Supongamos que la tangente dada sea positiva, tomando su longitud á partir del punto T hácia arriba; supongamos llega á C: si unimos este punto con el centro O quedará limitada la circunferencia en el punto P, y por tanto el arco TP será el pedido; sin embargo, prolongando la recta CO cortará á la circunferencia en el punto Z, y por tanto el arco TEAZ tiene tambien una tangente igual á la recta dada; luego *la tangente no determina completamente tampoco al arco*; pero como dichos dos arcos son el uno suplemento negativo del otro, fácilmente podremos determinar el arco.

Si la tangente dada fuese negativa, verificaríamos igual construccion, á partir del punto T hácia la parte inferior H.

4.° *Dada la cotangente hallar el arco.* (Fig. 190.)

La cotangente dada puede ser positiva ó negativa, y en cuanto á su magnitud puede tener la que se quiera.

Supongamos que dicha cotangente sea positiva, tomando su longitud sobre la tangente ilimitada DQ, á partir del punto E hácia la derecha; supongamos que llega á Q, uniendo dicho punto con el centro O, el punto P de interseccion de la circunferencia limitará el arco TP que será el pedido; sin embargo, prolongando la recta QO limita tambien á la circunferencia en el punto Z, y por tanto, tambien al arco TEAZ corresponde una cotangente de longitud igual á la recta dada; luego *la cotangente no determina completamente al arco*, mas como los dos arcos que tienen igual cotangente son los mismos que tienen igual tangente, se distinguirán fácilmente.

Si fuese negativa la cotangente dada, hariamos análoga construccion en el sentido de la izquierda, es decir, tomando la cotangente dada á partir de el punto E hácia la izquierda D...

De lo espuesto en los cuatro problemas anteriores inferiremos que á cada línea trigonométrica corresponden dos arcos: uno precisamente menor que 90.° y otro que será su suplementario, dándose el seno: uno menor que 90.° y otro aumentado su valor en 180.° dándose la tangente ó cotangente: uno menor 90.° y otro que con el anterior compongan juntos 360.° dándose el coseno.

Fig. 190.

En la resolucion de los triángulos no puede haber ambigüedad mas que en el caso del seno, porque siendo cualquier ángulo de un triangulo menor que 180°, sus arcos correspondientes serán menores que una semicircunferencia: sin embargo, conviene tener en cuenta las líneas trigonométricas correspondientes á arcos mayores de 180° y tambien los de arcos mayores que 360° por las numerosas cuestiones que pueden proponerse. En definitiva, son de la mayor importancia y necesarios para el estudio ulterior de las matemáticas examinar, determinar y reconocer los diferentes conceptos de la «cantidad,» de la «cualidad,» de la «relacion» y «modalidad» de las líneas trigonométricas correspondientes á un arco.

Las fórmulas que espresen estas relaciones constituyen la teoría de las *Funciones circulares*.

8. **Teorema.** *Las líneas trigonométricas de dos arcos iguales, pero de signo contrario, son iguales en magnitud, pero tienen signo contrario, escepto el coseno que en ambos es positivo.*

En efecto, sean TP y —TN (fig. 190) los dos arcos iguales, el primero positivo y el segundo negativo, á quienes representaremos respectivamente por a y $-a$.

Si tenemos en cuenta lo espuesto anteriormente, tendremos que:

Sen. a=PL=—sen.(—a)	*Sen.(—a)=NL=—Sen.a*
Tag.a=TC=—tan.(—a)	*Tag.(—a)=TH=—Tag.a*
Cos.a=OL=cos. (—a)	*Cos.(—a)=OL=Cos.a*
Cotg.a=EQ=—cotg.(—a)	*Cotg.(—a)=ED=—Cotg.a*

que es como se espresan en Algebra, manifestándose claramente la igualdad de dichas líneas por la de los triángulos rectángulos que las comprenden.

9. Teorema. *Las líneas trigonométricas de dos arcos* TP y TPEBAZ, *tales, que teniendo comun uno de sus estremos*, el T, *los otros dos* P y Z *son estremos de un mismo diámetro, son iguales en longitud y solo se diferencian en que el seno y el coseno tienen signo contrario en dichos dos arcos*. (Fig. 190.)

En efecto, la tangente y cotangente es respectivamente para ambos arcos las líneas TC y EQ. Ahora bien, siendo iguales los triángulos rectángulos OLP y OFZ, evidentemente serán iguales en magnitud los senos PL y ZF, así como los cosenos OL y OF, cuya cualidad, segun hemos visto en la (fig. 191.) es diferente.

Si los arcos fuesen TPEB y TPEBAZMN, se verificaria lo mismo por corresponder á entreambos la tangente TH y la cotangente ED; y como los triángulos rectángulos OFB y OLN son iguales, resultará que los senos son iguales entre sí, lo mismo que los cosenos, pero unos y otros de diferente signo.

Supongamos ahora que se nos dan los dos arcos TPEB y TN, el primero positivo y negativo el segundo, ambos tienen tambien la misma tangente y cotangente; el seno y coseno de cada uno serán iguales, pero de signo contrario, por ser iguales los mismos triángulos anteriores.

Si llamamos a á uno de los arcos, el otro será $(180.°+a)$ y por tanto, para esponer estas propiedades algebráicamente, tendremos que:

$$Tang.(180°+a)=+tang.\ a$$
$$Cotg.(180°+a)=+cotg.\ a$$

evidentemente $\left.\begin{matrix} sen(180°+a)=-sen.a \\ cos(180°+a)=-cos.a \end{matrix}\right\}$ segun lo demostrado.

Siendo conocida la relacion de magnitud y cualidad entre las líneas trigonométricas de dos arcos tales, que teniendo un estremo comun los otros dos terminan en las estremidades de un diámetro; y no alterándose expresada relacion porque al mayor de dichos dos arcos se le resten 180°, resultarán los dos *corolarios* siguientes:

1.° Las líneas trigonométricas de un arco tienen la misma magnitud aun cuando se le reste aquel una semicircunferencia; lo que sucede es que el seno y el coseno del arco-diferencia tendrán cualidad ó signo diferente.

2.° Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales en valor absoluto pero de signo contrario, excepto el seno.

Esta proposicion es efectivamente cierta, porque mudando el signo á la a en las fórmulas obtenidas en el teorema anterior, y teniendo en cuenta que si un arco cambia de signo lo cambian tambien sus líneas trigonométricas, excepto el coseno, segun hemos visto (8), resultará que:

$Tang.(180°-a)=-tang.a$	$Sen.(180°-a)=+sen.a.$
$Cotg.(180°-a)=-Cotg.a$	$Cos.(180°-a)=-cos.a.$

10. Si tenemos en cuenta lo establecido en las definiciones de las líneas trigonométricas, tendremos que:

$$Sen.\ (90°-a)=cos.\ a.$$
$$Tang.\ (90°-a)=cotg.a.$$
$$Cos.\ (90°-a)=sen.\ a.$$
$$Cotg.\ (90°-a)=tag.\ a.$$

Segun lo expuesto oportunamente, tendremos que:

$$Sen.\ (90°+a)=cos.\ (-a)=cos.\ a.$$
$$Tang.\ (90°+a)=cotg.\ (-a)=-cotg.\ a.$$
$$Cos.\ (90°+a)=sen.\ (-a)=-sen.\ a.$$
$$Cotg.\ (90°+a)=tang.\ (-a)=-tang.\ a.$$

Si al arco $180°-a$ llamamos $90°+(90°-a)$, resultará que:

$$Sen.\ (90°+(90°-a))=cos.\ (-(90°-a))$$
$$=cos.\ (90°-a)=sen.\ a.$$
$$Tang.\ (90°+(90°-a))=cotg.(-(90°-a))$$
$$=-cotg.\ (90°-a)=-tang.\ a.$$
$$Cos.\ (90°+(90°-a))=sen.\ (-(90°-a))$$
$$=-sen.\ (90°-a)=-cos.\ a.$$
$$Cotg.\ (90°+(90°-a))=tang.\ (-(90°-a))$$
$$=-tang.\ (90°-a)=-cotg.\ a.$$

11. Las líneas trigonométricas de un arco positivo ó negativo, el cual esceda en número de grados al de una circunferencia, serán las mismas que las del arco-diferencia que resulte de restar del arco dado todas las circunferencias que contenga, porque este último arco y el propuesto tendrán los mismos estremos.

De lo espuesto en el párrafo precedente comprenderemos que un arco dado, no tiene respectivamente mas que un solo seno, coseno, tangente ó cotangente: pero una sola línea trigonométrica puede pertenecer á una multitud de arcos.

Tratándose de arcos menores que media circunferencia resultará que toda línea trigonométrica corresponde á dos arcos suplementarios. Si la línea trigonométrica dada es el *coseno*, *tangente ó cotangente*, y estas son positivas, en cada caso el arco correspondiente pertenece á un ángulo agudo: si dicha línea es negativa, corresponderá á un arco mayor que un cuadrante.

El seno de un ángulo no determina si el arco correspondiente es mayor ó menor que un cuadrante, y cualquiequiera de las otras tres líneas trigonemétricas determinan el ángulo.

12. De lo espuesto en los números precedentes se deduce que *todo arco dado se puede reducir á otro menor que se halle contenido en el primer cuadrante.*

En efecto, si el arco dado es negativo, se convierte en positivo, con lo cual no variará el valor absoluto de sus líneas trigonométricas (8).

Si el arco es mayor de 360.° resténsele todas las circunferencias que contenga, y el resto y el arco dado tendrán las mismas líneas trigonométricas (11).

Si el arco fuese mayor que una semicircunferencia, dedúzcasele esta de aquel, y el resto y el arco dado tendrán líneas trigonométricas de igual magnitud (9).

Si el arco fuese mayor que un cuadrante, tómese su suplemento y determínense las líneas de este (2.° corolario, Teorema 9).

Valor de cada una de las líneas trigonométricas que corresponden á varios arcos particulares.

13. Sabido que *el seno de un arco* menor que media circunferencia *es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo*, y teniendo en cuenta la *Teoría de polígonos regulares en el círculo* espuesta en la Geometria plana, y tambien lo esplicado en el 4.° corolario del núm. 139, que nos determina el valor del ángulo formado en el centro de un polígono regular por dos rádios trazados á los estremos de un lado, tendremos que:

Arco de 30.°

Sen. 30.°=*cos.* 60.°=$^1/_2$ cuerda del arco de 60.°=$^1/_2$R
Cos. 30.°=*sen.* 60.°=$^1/_2$ cuerda del arco de 120°=$^1/_2$R$\sqrt{3}$
Tang. 30.°=*cotg* 60.°=$^1/_2$ tangente del arco de 60.°=

$$^1/_2\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{R}{\sqrt{3}}=\frac{R\sqrt{3}}{3}$$

Cotg. 30.°=*tg.*60.°=$^1/_2$ tang.del arco 120°=$^1/_2$2R$\sqrt{3}$=R$\sqrt{3}$

Arco de 45.°

Sen. 45.°=*cos.*45°=$^1/_2$ cuerda de arco 90.°=$^1/_2$R$\sqrt{2}$
Tang. 45.°=*cotg.* 45.°=$^1/_2$ tang. de arco 90.°=$^1/_2$2R=R.

Arco de 90.°

Sen. 90°=R. *Cos.* 90.°=0. *Tang.* 90°=∞ *Cotg.* 90.°=0.

Arco de 120.°

Sen. 120.°=*sen.* 60.°=$^1/_2$R$\sqrt{3}$
Cos. 120.°=−*cos.* 60.°=−$^1/_2$R.
Tang. 120.°=−*tang.* 60.°=−R$\sqrt{3}$
Cotang. 120.°=−*cotg.* 60.°=−$^1/_3$R$\sqrt{3}$

Arco de 135.°

Sen. 135°=*sen.* 45.°=$^1/_2$R$\sqrt{2}$
Cos. 135.°=−*cos.* 45.°=−$^1/_2$R$\sqrt{2}$
Tang. 135.°=−*tang.* 45.°=−R.
Cotg. 135.°=−*cotg.* 45.°=−R.

Arco de 150°.

Sen. 150°=*sen.* 30°=$^1/_2$R.
Cos. 150°=−*cos.* 30°=−$^1/_2$R$\sqrt{3}$.
Tang. 150°=−*tang.* 30°=−$^1/_3$R$\sqrt{3}$.
Cotg. 150°=−*cotg.* 30°=−R$\sqrt{3}$.

Arco de 180°.

*Sen.*180°=0. *Cos.*180°=−R. *Tg.*180°=0. *Ctng.*180°=−∞

Arco de 270°.

Sen. 270°=−*R.* *Cos.* 270°=0. *Tg.* 270=∞. *Cotg.* 270=0.

Arco de 360°.

Sen. 360°=0. *Cos.* 360°=R. *Tg.* 360°=0. *Ctg.* 360°=−∞.

De lo espuesto comprenderemos que cuando el seno es igual al rádio, el coseno es igual á cero y recíprocamente.

Que cuando la tangente es igual al infinito, la cotangente es igual á cero y recíprocamente.

Que la magnitud del seno y el coseno se halla comprendida entre la longitud del rádio como límite máximo y el cero como límite mínimo, pudiendo tambien adquirir todos estas mismas magnitudes en el sentido negativo.

Que la magnitud de la tangente y de la cotangente se halla comprendida entre cero y el infinito, pudiendo tener todos los valores lineales que se quiera, no solo con el carácter positivo, sino tambien con el negativo.

Relaciones entre las líneas trigonométricas de un arco.

14. Si llamamos *a* al arco TP (fig. 190) el cual es positivo y menor que un cuadrante.

En el triángulo rectángulo OPL tendremos:

$\overline{PL}^2+\overline{OL}^2=\overline{OP}^2$ y sustituyendo $Sen.^2\, a+cos.^2\, a=R^2$ (1.ª)

Por la semejanza de los triángulos OLP y OTC, tendremos:

OL:LP::OT:TC; sustituyendo resultará:

$cos.\ a : sen.\ a :: R : Tang.\ a$ (2.ª)

Por la semejanza de los triángulos ORP y OEQ, tendremos:

OR:RP::OE:EQ; sustituyendo resultará:

$Sen.\ a : cos.\ a :: R : cotg.\ a$ (3.ª)

Estas fórmulas, traducidas al lenguaje vulgar, nos dicen que:

1.° *El cuadrado del rádio es igual á la suma de los cuadrados del seno y coseno de un mismo arco.*

2.° *La* tangente *de un arco es igual al rádio por el seno y partido por el coseno del mismo arco.*

3.° *La* cotangente *de un arco es igual al rádio por el coseno y partido por el seno del mismo arco.*

Las fórmulas 1.ª, 2.ª y 3.ª se llaman *fundamentales,* y aunque fueron halladas en la suposicion de ser el arco positivo y menor que 90°. *son generales.*

Probemos la generalidad de las dos primeras fórmulas de dichas tres fundamentales.

En efecto, supongamos que se trate del arco *a'* sea este positivo ó negativo y el cual sea menor que una circunferencia ó mayor que un número justo de circunferencias. Siendo T el punto de orígen de dicho arco *a* y no siendo este múltiplo del cuadrante, ó estará comprendido entre T y E como en P, ó entre E y A como en B, ó entre A y M como en Z, ó entre M y T como en N.

1.er caso. Siendo el 2.° estremo del arco *a'* el punto P y habiendo llamado *a* al arco TP, resultará que los dos arcos a y a' tienen los mismos estremos, y por tanto iguales líneas trigonométricas, luego las fórmulas 1.ª y 2.ª de las fundamentales son ciertas para los dos arcos.

2.° caso. Siendo el segundo estremo del arco a' el punto B, dicho arco a' y el TB, toda vez que tienen los mismos estremos, tendrán tambien iguales líneas trigonométricas; mas como los valores absolutos de las líneas trigonométricas del arco TB, son iguales á los valores absolutos de las líneas trigonométricas de su arco suplementario TP$=a$ positivo y menor que un cuadrante, (2.° corolario núm. 9,) tendremos:

$$Sen.\ a' = sen.\ \text{arc. TB} = sen.\ a.$$
$$Cos.\ a' = cos.\ \text{arc. TB} = -cos.\ a.$$
$$Tang.\ a'\ \ tang.\ \text{arc. TB} =\ \ tang.\ a.$$

Pero ya sabemos que para el arco a son ciertas las fórmulas generales 1.ª y 2.ª, sustituyendo en ellas los valores de $sen.\ a$, $cos.\ a$ y $tang.\ a$ en funcion de $sen.\ a$,' $cos.\ a'$ y $tang.\ a'$, resultará: $sen.^2\ a' + (-cos.\ a')^2 = R^2$ y

$$Cos.\ a' : sen.\ a' :: R : t-ang.\ a'$$

las que nos dán que: $Sen.^2\ a' + cos^2\ a' = R^2$ y

$$Cos.\ a' : sen.\ a' :: R : tang.\ a'$$

Por tanto, las fórmulas fundamentales 1.ª y 2.ª son ciertas para todo arco positivo ó negativo que empezando en T termine en B.

3.er caso. Siendo el segundo estremo del arco a' el punto Z, dicho arco a' y el TEAZ, teniendo los mismos estremos, tendrán tambien iguales líneas trigonométricas; pero los valores absolutos de las líneas trigonométricas del arco TEAZ son evidentemente los mismos que los de las líneas trigonométricas del arco TP$=a$ positivo y menor que un cuadrante (9.° Teorema) luego por tanto, tendremos que:

$$Sen.\ a' = sen.\ \text{arc. TEAZ} = -\ sen.\ a.$$
$$Cos.\ a' = cos.\ \text{arc. TEAZ} = -cos.\ a.$$
$$Tang.\ a' = tang.\ \text{arc. TEAZ} = tang.\ a.$$

Si como en el caso anterior sustituimos los valores de $sen.\ a$, $cos.\ a$ y $tang.\ a$, en las fórmulas fundamentales 1.ª y 2.ª, tendremos:

$$(-Sen.\ a')^2 + (\ \ cos.\ a')^2 = +R^2 \quad \text{y}$$
$$-Cos.\ a' : -sen.\ a' :: R : tang.\ a'$$

las cuales equivaldrán á

$$Sen.^2\ a' + cos.^2 a' = R^2 \qquad Cos.\ a' : sen.\ a' :: R : tang. a'$$

Luego la fórmula 1.ª y 2.ª son ciertas para todo arco positivo ó negativo, que empezando en T termine en Z.

4.° caso. Siendo, por último, el segundo estremo del arco a' el punto N, tendremos que dicho arco a' y el TEAMN por tener los mismos estremos, tendrán tambien iguales líneas trigonométricas; pero los valores absolutos de las líneas trigonométricas del arco TEAMN son evidentemente los mismos que los de las líneas trigonométricas del arco TP$=a$ (9.° Teorema), por lo cual:

$$Sen.\ a'=sen.\ \text{arc. TEAMN}=-sen.\ a.$$
$$Cos.\ a'=cos.\ \text{arc. TEAMN}=cos.\ a.$$
$$Tang.\ a'=tang.\ \text{arc. TEAMN}=-tang.\ a.$$

Sustituyendo los valores de *sen. a, cos. a* y *tang. a* en las fórmulas fundamentales 1.ª y 2.ª ciertas para el arco a, resultará:

$$(-Sen.\ a')^2+cos.^2\ a'=R^2 \quad \text{y}$$
$$Cos.\ a':-sen.\ a'::R:-tang.\ a',$$

de donde:

$$Sen.^2\ a'+cos.^2\ a'=R^2 \quad \text{y} \quad Cos.\ a':sen.\ a'::R:tang.\ a'$$

Luego estas fórmulas son tambien generales para todo arco positivo ó negativo que empezando en T termine en N.

Si suponemos que el arco a' es un múltiplo del cuadrante, el segundo estremo de dicho arco se hallará ó en E, ó en A, ó en M, ó en T.

Si en efecto, el 2.° estremo se hallase en E, ya sabemos que su seno igual al rádio; coseno igual cero; tangente igual infinito.

Si estos valores los sustituimos en las fórmulas fundamentales 1.ª y 2.ª, tendremos que coseno igual cero, y tangente igual infinito; lo cual prueba desde luego su generalidad, probándose de la misma manera si terminase en alguno de los otros puntos que arriba hemos indicado.

Probemos ahora la generalidad de la 3.ª de las tres fórmulas fundamentales. Cualquiera que sea el arco a, se verificará segun lo demostrado, que:

$Cos.\ (90.°-a):sen.(90.°-a)::R:tang.(90.°-a)$ Mas como

$$Cos.\ (90.°-a)=sen.\ a; \quad sen.\ (90.°-a)=cos.\ a;$$
$$tang.(90.°-a)=cotg.\ a$$

resultará que: $Sen.\ a:cos.\ a::R:cotg.\ a$, que es lo que nos proponíamos demostrar.

15. En las tres fórmulas generales:

$$\left.\begin{array}{l} Sen.^2\ a+cos.^2\ a=R^2 \\ Cos.\ a:sen.\ a::R:tang.\ a \\ Sen.\ a:cos.\ a::R:cotg.\ a \end{array}\right\}$$ entran cuatro cantidades

además del rádio: por tanto, podremos proponernos determinar el valor de tres de estas cantidades, conocida una cualquiera de las cuatro, produciéndose los problemas siguientes:

1.° *Determinar el coseno, tangente y cotangente de un arco, conocido el seno y rádio de dicho arco.*

De la ecuacion 1.ª de las fundamentales, tendremos que $Cos.^2\, a = R^2 - sen.^2\, a$ luego $cos.\, a = \pm\sqrt{R^2 - sen.^2\, a}$, cuyo valor sustituido en las otras dos, nos dá que

$$Tang.\, a = \pm \frac{R \times sen.\, a}{\sqrt{R^2 - sen.^2\, a}}$$

y $$Cotang.\, a = \pm \frac{R\sqrt{R^2 - sen.^2\, a}}{sen.\, a}$$

2.° *Determinar el seno, tangente y cotangente de un arco conocido el rádio y el coseno de dicho arco.*

De la primera fórmula general tendremos que:

$$Cos.^2\, a = R^2 - sen.^2\, a$$

de donde $Sen.\, a = \pm\sqrt{R^2 - cos.^2\, a}$ cuyo valor sustituido en la 2.ª y 3.ª de las tres generales nos dará que:

$$Tang.\, a = \pm \frac{R\sqrt{R^2 - cos.^2\, a}}{cos.\, a} \quad \text{y} \quad Cotg.\, a = \pm \frac{R \times cos.\, a}{\sqrt{R^2 - cos.^2\, a}}.$$

3.° *Determinar el seno, coseno y cotangente de un arco, conocido el rádio y la tangente del mismo.*

De la 2.ª de las tres fórmulas generales tendremos que: $Cos.^2\, a : sen^2\, a :: R^2 : tang.^2\, a$ de donde resultará que: $Cos.^2\, a + sen.^2\, a : sen.^2\, a :: R^2 + tang.^2\, a : tang.^2\, a$, sustituyendo el primer término de esta proporcion, segun la 1.ª de dichas fórmulas generales, resultará que:

$$R^2 : sen^2\, a :: R^2 + tang.^2\, a : tang.^2\, a \quad \text{de donde}$$

$$Sen.\, a = \frac{R \times tang.\, a}{\pm\sqrt{R^2 + tang.^2\, a}}$$

Siendo tambien $R^2 : cos.^2\, a :: R^2 + tang.^2\, a : R^2$

tendremos que: $$Cos.\, a = \frac{R^2}{\pm\sqrt{R^2 + tng.^2\, a}}$$

La 2.ª y 3.ª fórmula de las generales son:

$$Tang.\, a = \frac{R \times sen.\, a}{cos.\, a} \quad \text{y} \quad Cotang.\, a = \frac{R \times cos.\, a}{sen.\, a}$$

multiplicándolas miembro á miembro resultará que: $Tang.\, a \times cotang.\, a = R^2$ de donde tendremos que:

$$Cotang.\, a = \frac{R^2}{Táng.\, a}$$

De esta fórmula se deducirá que el rádio de un arco es media proporcional entre su tangente y cotangente respectiva.

4.° *Determinar el seno, coseno y tangente de un arco, conocida la cotangente y rádio del mismo arco.*

De la 3.ª de las fórmulas generales, tenemos que:
$Sen.^2 a : cos.^2 a :: R^2 : cotang.^2 a$, y de esta resultará que: $sen.^2 a + cos.^2 a : sen.^2 a :: R^2 + cotang.^2 a : R^2$; donde sustituyendo el primer término por su valor, segun la 1.ª fórmula de las 3 generales, resultará que:

$$R^2 : sen.^2 a :: R^2 + cotg.^2 a : R^2,$$

de donde $sen. a = \dfrac{R^2}{\pm\sqrt{R^2 + cotg.^2 a}}$. La proporcion anterior hubiéramos podido establecerla diciendo:

$$R^2 : cos.^2 a :: R^2 + cotg.^2 a : cotg.^2 a,$$

de donde $cos. a = \dfrac{R \times cotg. a}{\pm\sqrt{R^2 + cotg.^2 a}}$. Despejando la tangente de la última fórmula del problema anterior, resultará que:

$$Tang. a = \frac{R^2}{cotg. a}.$$

Segun las consideraciones expuestas en el número 4, de estos dobles signos se tomarán los que correspondan, segun el arco de que se trate.

16. Para que las fórmulas trigonométricas que relacionan las líneas de un mismo arco se presenten simplificadas en cuanto posible sea, podremos suponer que el rádio de las mismas sea igual á la unidad, en cuyo caso las 15 fórmulas obtenidas, tres generales y las otras 12 correspondientes, 3 á cada uno de los 4 problemas indicados, producirán otras 15 fórmulas, que con las anteriores será fácil presentar en un cuadro.

Recíprocamente. Dada una fórmula trigonométrica en el supuesto de ser el rádio igual á la unidad, fácilmente se restablece á su forma primitiva sin mas que hacer *homogénea* referida fórmula.

Una fórmula se llama *homogénea* cuando sus términos tienen el mismo número de factores literales.

Para restablecer el rádio en una fórmula cualquiera trigonométrica, en el supuesto de ser en ella el rádio igual á la unidad, tendremos presente la siguiente Regla: *no habrá mas que sustituir cada línea trigonométrica por la razon que la misma tenga con el rádio; es decir, poner en vez de cada línea, la misma dividida por el rádio.*

En efecto, sea CAB (fig. 192) un ángulo cualquiera, si desde su vértice A, trazamos con distinto rádio, los dos arcos BC y B'C', y bajamos á los mismos sus senos correspondientes BQ y B'Q' observaremos que por ser semejantes los dos triángulos AQB y AQ'B' resultará que:

$$AB:BQ::AB':B'Q'$$

de donde $\frac{AB}{BQ}=\frac{AB'}{B'Q'}$ y tambien que $\frac{BQ}{AB}=\frac{B'Q'}{AB'}$

Si suponemos ahora que $AB=1$ y que $AB'=R$, llamando a á cualquiera de los dos arcos BC ó B'C' pues que ambos tienen el mismo número de grados, tendremos que $\frac{sen.\ a}{1}=\frac{sen.\ a}{R}$.

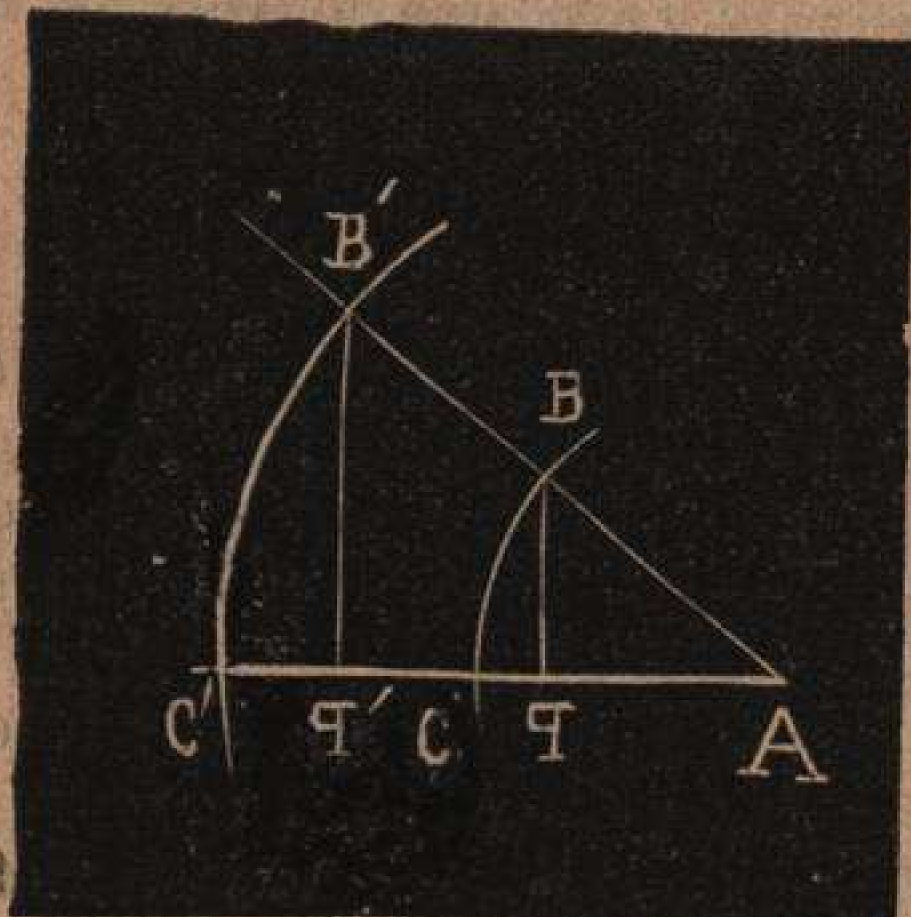


Fig. 192.

Igual demostracion podriamos dar para cualquiera de las otras líneas trigonométricas.

Restablezcamos el rádio en la 1.ª fórmula de las 3 generales $sen.^2\ a+cos.^2\ a=1$, en la cual, aplicando la regla anterior, resultará que $\left(\frac{sen.\ a}{R}\right)^2+\left(\frac{cos.\ a}{R}\right)^2=1$ en donde elevando al cuadrado las dos fracciones y multiplicando ambos miembros por R^2 resultará que $sen^2\ a+cos.^2\ a=R^2$.

Restablezcamos ahora el rádio en una de las fórmulas que parezca de mayor dificultad, por ejemplo en la del coseno, en funcion de la cotangente que dice:

$$cos.\ a=\frac{cotg.\ a}{\pm\sqrt{1+cotg.^2 a}}$$ aplicando la regla anterior tendremos que: $$\frac{cos.\ a}{R}=\frac{\frac{cotg.\ a}{R}}{\pm\sqrt{1+\frac{cotg.^2 a}{R^2}}}$$

en la cual, multiplicando por $R=\sqrt{R^2}$ los dos términos del segundo miembro, ó sea del segundo quebrado, resultará que: $\frac{cos.\ a}{R}=\frac{cotg.\ a}{\pm\sqrt{R^2+cotg.^2\ a}}$ de donde por fin, tendremos despejando, $cos.\ a = \frac{R \times cotg.\ a}{\pm\sqrt{R^2 + cotg.^2\ a}}$ que es la fórmula primitiva á que deseabamos llegar. Luego las fórmulas que resultan restableciendo el rádio son perfectamente homogéneas, habiendo tenido en cuenta que para que desaparezcan los denominadores, hay necesidad de multiplicar cada término por la potencia necesaria del rádio R, y todos ellos por la misma cantidad.

Relacion entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma y diferencia de los mismos.

17. Senos y cosenos. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, propongámonos determinar el seno y coseno del arco-suma y del arco-diferencia de los mismos.*

Supongamos para esto (fig. 193) que sean los arcos dados $CD = a$ y $BD = b$ verificándose que arco CD mas arco $DB = a + b < 90°$.

Desde luego tendremos que $CD + DB = a + b = CB$; siendo tambien $CD - DB = CD - DA = a - b = CA$.

Segun las definiciones dadas de las líneas trigonométricas, tendremos que:

$Sen.\ a = DP.$ $\qquad Sen.\ b = BE.$

$Cos.\ a = OP.$ $\qquad Cos.\ b = OE.$

$Sen.\ (a+b) = BT = BN + NT = ER + BN.$

$Cos.\ (a+b) = OT = OR - TR = OR - NE.$

$Sen.\ (a-b) = AQ = MR = ER - EM = ER - BN.$

$Cos.\ (a-b) = OQ = OR + RQ = OR + MA = OR + NE.$

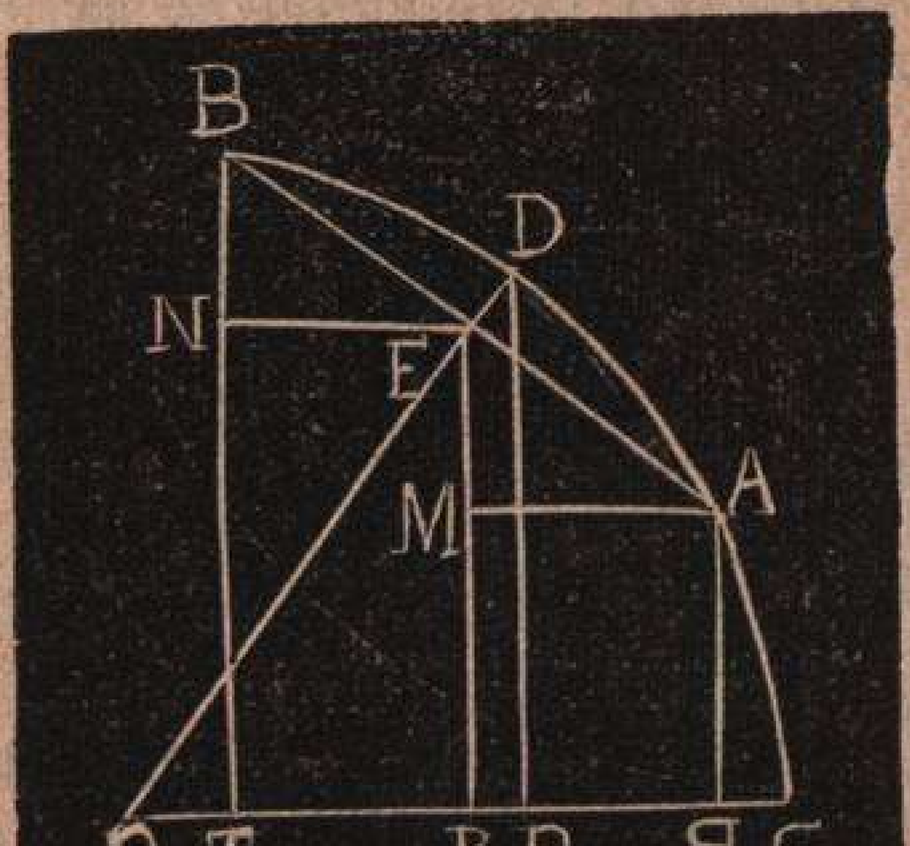


Fig. 193.

Las sustituciones hechas en las igualdades anteriores, las hacemos en virtud á ser iguales las rectas paralelas comprendidas entre paralelas, y tambien atendiendo á ser iguales los triángulos BNE y EMA, y por tanto, $BE = EA$, $BN = EM$, $NE = MA$.

Si observamos detenidamente dichas igualdades, notaremos que los senos y cosenos de la suma y diferencia de los dos arcos a y b están dados en funcion de las cuatro rectas OR, RE, EN y NB.

las cuales podremos despejar; las dos primeras, de la semejanza de los triángulos ORE y OPD, que son triángulos rectángulos que tienen comun el ángulo agudo O.

Las otras dos rectas EN y NB, de la semejanza de los triángulos OPD y BNE que teniendo sus lados respectivamente perpendiculares, tendrán sus ángulos iguales, siendo por tanto, semejantes. De la comparacion de estos triángulos y de los anteriores tendremos, siendo el Rádio=1, que

OD:OP::OE:OR	$1:cos.\ a::cos.\ b$:OR	OR$=cos.\ a\ .\ cos.\ b$
OD:DP::OE:ER	$1:sen.\ a::cos.\ b$:ER	ER$=sen.\ a\ .\ cos.\ b$
OD:DP::BE:NE	$1:sen.\ a::sen.\ b$:NE	NE$=sen.\ a\ .\ sen.\ b$
OD:OP::BE:NB	$1:cos.\ a::sen.\ b$:NB	NB$=cos.\ a\ .\ sen.\ b$

Si sustituimos estos valores obtenidos en las fórmulas que dicen:

$Sen.\ (a+b)=ER+BN \quad sen.(a-b)=ER-BN$

$Cos.\ (a+b)=OR-NE \quad cos.(a-b)=OR+NE$; tendremos que:

$$Sen.\ (a+b)=sen.\ a.cos.\ b+cos.\ a.sen.\ b$$
$$Cos.\ (a+b)=cos.\ a.cos.\ b-sen.\ a.sen.\ b$$
$$Sen.\ (a-b)=sen.\ a.cos.\ b-cos.\ a.sen.\ b$$
$$Cos.\ (a-b)=cos.\ a.cos.\ b+sen.\ a.sen.\ b$$

fórmulas que nos dan el seno y coseno de la suma y de la diferencia de los dos arcos dados.

18. * Hemos demostrado estas fórmulas en el supuesto caso de ser a y b arcos positivos, siendo su suma menor que un cuadrante: probemos ahora la generalidad de estas fórmulas para todos los casos que pudieran ocurrir.

Si suponemos en primer lugar que los arcos a y b son positivos, pero siendo su suma mayor que un cuadrante, llamando a' y b' á sus complementos respectivos, será $a'+b'$ el suplemento de $a+b$, verificándose que $a'+b'<90°$ y por tanto: $Sen.\ (a'+b')=sen.\ a'.\ cos.\ b'+cos.\ a'.\ sen.\ b'$

$$Cos.\ (a'+b')=cos.\ a'.\ cos.\ b'-sen.\ a'.\ sen.\ b'$$

si ahora sustituimos en vez de a' y b' sus complementos a y b, será: $Sen.\ (a+b)=cos.\ a.sen.\ b+sen.\ a.cos.\ b$

$$Cos.\ (a+b)=-sen.\ a.sen.\ b+cos.\ a.cos.b$$

Habiendo sido exactas las fórmulas anteriores para los arcos a y b, demostremos ahora que lo son tambien para los mismos arcos, aumentados en uno ó mas cuadrantes. Si añadimos 90° al arco a, tendremos:

$$Sen.(a+90°+b)=cos.-(a+b)=cos.(a+b)$$
$$=cos.\ a.cos.\ b-sen.\ a.sen.\ b$$

mas como $cos.\ a=sen.(90°-a)=sen\ (90°+a)$

y $-sen.a=-cos.(90°-a)=cos.(90°+a)$

Si sustituimos en la fórmula anterior, resultará que:
$Sen(a+90^\circ+b)=sen.(90^\circ+a).cos\,b+cos.(90^\circ+a).sen.b.$

Verificándose de igual modo que:
$Cos.(a+90^\circ+b)=-sen.(a+b)=-sen.a.cos.b-cos.a.sen.b$
$=cos.(a+90^\circ)cos.b-sen.(a+90^\circ)sen.b.$

Por tanto, si las fórmulas son verdaderas para los arcos a y b positivos y mayores que un cuadrante, para los arcos $a+90^\circ$ y b; $a+180^\circ$ y b; $a+270^\circ$ y b.... etc., serán tambien generales para todos los casos que puedan ocurrir; pues este aumento de 90°, 180°, 270°, etc., que puede asignársele al arco a, puede tambien aumentarse al arco b; así mismo como podrá tambien deducirse de ellos uno ó mas cuadrantes, siendo ya evidente la generalidad de estas fórmulas para los arcos positivos a y b, cuya suma alcance cualquier número de grados; así como tambien para el caso en que uno de ellos sea positivo y el otro negativo.

Corolario. Si supusiésemos el arco a positivo y el b negativo, tendríamos que:
$Sen(a-b)=sen(a+(-b))=sen.a.cos(-b)+cos.a\,sen(-b)$
lo cual daria $=sen\,a.\,cos\,b-cos.a.sen.b.$

Y tambien:
$Cos(a-b)=cos.(a+(-b))=cos.a.cos(-b)-sen.a.sen(-b)$
es decir, que $=cos.a.\,cos\,b+sen.a.\,sen.b.$

Fácilmente podríamos haber deducido una de otra las fórmulas anteriores del seno y coseno de la diferencia de dos arcos, haciendo las convenientes sustituciones y aun de una sola fórmula mas general que comprendiese á todas.

19. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las tangentes de la suma y diferencia de dichos arcos.*

De la 2.ª fórmula de las 3 generales, tenemos que siendo R=1.

$$Tang(a+b)=\frac{sen\,(a+b)}{cos\,(a+b)}=\frac{sen.\,a.\,cos.\,b+cos.\,a.\,sen.\,b}{cos.\,a.\,cos.\,b-sen.\,a.\,sen.\,b}:$$

si partimos numerador y denominador de este quebrado por $cos.a.\,cos.b$, tendremos que:

$$Tang(a+b)=\frac{\dfrac{sen.a.\,cos.b}{cos.a.\,cos.b}+\dfrac{cos.a.\,sen.b}{cos.a.\,cos.b}}{\dfrac{cos.a.\,cos.b}{cos.a.\,cos.b}-\dfrac{sen.a.\,sen.b}{cos.a.\,cos.b}}$$

cuya fórmula, simplificada, nos dá que:

$$Tang(a+b)=\frac{tang.a+tg.b}{1-tg.a.\,tg.b}.$$

De la misma manera tendremos que:

$Tang\,(a-b)=\dfrac{tg.a-tg.b}{1+tg.a.\ tg.b}$, cuya fórmula es tambien fácil de obtener de la anterior, porque:

$$Tg(a-b)=tg(a+(-b))=\frac{tg.a+tg(-b)}{1-tg.a.\ tg(-b)}$$

y por ser $tg(-b)=-tg.b$, resultará tambien que:

$$Tg(a-b)=\frac{tg.a-tg.\ b}{1+tg.a.\ tg.b}.$$

20. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las cotangentes de la suma y diferencia de dichos arcos.*

De la 3.ª fórmula de las 3 generales, siendo R=1 resulta que:

$$Cotag.\ (a+b)=\frac{cos.\ (a+b)}{sen.\ (a+b)}=\frac{cos.\ a\ cos.\ b.-sen.\ a\ sen.\ b}{sen.\ a\ cos.\ b+cos.\ a\ sen.\ b.}$$

partiendo ambos miembros por $cos.\ a\ cos.\ b$, será;

$$Cotag.\ (a+b)=\frac{\dfrac{cos.\ a\ cos.\ b}{cos.\ a\ cos.\ b}-\dfrac{sen.\ a\ sen.\ b}{cos.\ a\ cos.\ b}}{\dfrac{sen.\ a\ cos.\ b}{cos.\ a\ cos.\ b}+\dfrac{cos.\ a\ sen.\ b}{cos.\ a\ cos.\ b}}$$ lo cual simplificando y sustituyendo nos dá que:

$$Cotg.(a+b)=\frac{1-tg.\ a\ tg.b}{tg.\ a+tg.\ b}$$

teniéndose de igual manera que:

$$Cotg.\ (a-b)=\frac{1+tg.\ a.\ tg.\ b}{tag.a-tang.\ b}$$

21. La suma ó diferencia de las tangentes ó cotangentes de dos arcos se puede espresar por un producto de líneas trigonomètricas; así tendremos que:

$$Tang.\ a\pm tang.\ b=\frac{sen.\ a}{cos.\ a}\pm\frac{sen.\ b}{cos.\ b}=\frac{sen.\ (a\pm b)}{cos.a.\ cos.b}$$

$$Cotg.\ a\pm cotg.\ b=\frac{cos.\ a}{sen.\ a}\pm\frac{cos.\ b}{sen.\ b}=\frac{cos.(a\pm b)}{sen.a\ sen.b}$$

Fórmulas trigonométricas correspondientes á los arcos múltiplos.

22. Para obtener las fórmulas trigonométricas de las líneas correspondientes á los arcos múltiplos de otro dado,

en funcion de las líneas de este, tendremos presente que:

Si en las ya conocidas

$$Sen.\ (a+b)=sen.\ a\ cos.\ b+cos.\ a\ sen.\ b$$

$$Cos.\ (a+b)=cos.\ a\ cos.\ b-sen.\ a\ sen.\ b$$

$$Tg.\ (a+b)=\frac{tg.\ a+tg.\ b}{1-tg.a\ tg.\ b} \qquad cotg.(a+b)=\frac{cotg.\ a\ cotg.\ b-1}{cotg.\ b-cotg.\ a}$$

hacemos $a=b$, resultará que $(a+b)=2a$, de donde:

$$Sen.\ 2a=2\ sen.\ a\ cos.\ a \qquad tg.\ 2a=\frac{2tg.\ a}{1-tg.^2 a}$$

$$Cos.\ 2a=cos.^2 a-sen.^2 a \qquad cotg.\ 2a=\frac{cotg.^2\ a-1}{2\ cotg.\ a}$$

Si quisiésemos que las fórmulas del *sen.* y *cos.* de $2a$ fuesen dadas en funcion de una sola de estas líneas, como sabemos que $cos.\ a=\sqrt{1-sen.^2\ a}$ y $sen.\ a=\sqrt{1-cos.^2 a}$ seria $sen.\ 2a=\pm 2sen.\ a\sqrt{1-sen.^2 a}=\pm 2cos.a\sqrt{1-cos.^2 a}$

$$Cos.\ 2a=1-2sen.^2 a=2cos.^2 a-1.$$

Cuyas fórmulas espresan los valores de las líneas trigonométricas de un arco *duplo*.

Si nos propusiésemos ahora hallar las líneas trigonométricas correspondientes á un arco *triplo* en las fórmulas que espresan el valor de las líneas del arco $a+b$, hariamos $b=2a$, siendo entónces $a+b=3a$, teniéndose que:

$$Sen.3a=sen.a\ cos.2a+sen.2a\ cos.a \qquad tang.\ 3a=\frac{tg.\ a+tg.\ 2a}{1-tg.a.tg.2a}$$

$$Cos.3a=cos.a\ cos.2a-sen.a\ sen.2a$$

Si sustituimos ahora por *sen.* $2a$, *cos.* $2a$, *tang.* $2a$ sus valores, segun las fórmulas halladas para el duplo de un arco, tendriamos que: $sen.\ 3a=3\ sen.\ a-sen.^3\ a$

$$cos.\ 3a=4\ cos.^3\ a-cos.\ a$$

$$tg.\ 3a=\frac{3\ tg.\ a-tg.^3\ a}{1-3\ tg.^2\ a}$$

$$cotg.\ 3a=\frac{cotg.^3\ a-3\ cotg.\ a}{3\ cotg.^2\ a-1}$$

Para hallar las fórmulas trigonométricas correspondientes á las lineas de un arco *cuádruplo*, *quíntuplo* etc. de otro dado, haríamos $b=3a$, $b=4a$, $b=$ etc., en las fórmulas primitivas, y sustituyendo así, fácilmente las obtendríamos.

* *Observacion:* Conociendo los valores del seno y coseno de los arcos $(n-1)a$ y $n.a$ en funcion del *sen.* a y *cos.* a, fácilmente se hallarán los valores del seno y coseno de

$(n+1)a$, sin mas que sustituir $n.a$ en vez de b en las fórmulas

$$Sen.\ (a+b)+sen.\ (a-b)=2\ sen.\ a.\ cos.\ b$$
$$Cos.\ (a+b)+cos.\ (a-b)=2\ cos.\ a\ cos.\ b$$

lo cual nos dará las fórmulas generales llamadas de Simpson, que dicen:

$$Sen.\ (n+1)a=2\ sen.\ a\times cos.\ n.a+sen.(n-1)a$$
$$Cos.\ (n+1)a=2\ cos.\ a\times cos.\ n.a-cos.(n-1)a$$

Fórmulas trigonométricas correspondientes á los sub-múltiplos de un arco.

Para hallar las fórmulas trigonométricas correspondientes á los arcos sub-múltiplos, nos fijaremos en las dos fórmulas siguientes: 1.ª $R^2=sen.^2\ a+cos.^2\ a$ y 2.ª $cos.\ (a+b)=cos.a\ cos.\ b-sen.\ a\ sen.\ b$ considerando en la 1.ª el $R=1$; y tratándose del arco $\frac{a}{2}$ en vez del arco a será: $1=sen.^2\ \frac{a}{2}+cos.^2\ \frac{a}{2}$; siendo en la 2.ª $a=b$ será $a+b=2a$ y tratándose del arco a será:

$$cos.\ a=cos.^2\ \frac{a}{2}\ sen.^2\ \frac{a}{2}$$

sabemos por tanto, que la suma de $sen.^2\ \frac{a}{2}$ y de $cos.^2\ \frac{a}{2}$ es 1; siendo la diferencia de los mismos $cos.\ a$; por tanto, siendo *seno* < *coseno* será $sen.^2\ \frac{a}{2}=\frac{1-cos.\ a}{2}$

$$\text{y}\quad cos.^2\ \frac{a}{2}=\frac{1+cos.\ a}{2}$$

de donde $sen.\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos.\ a}{2}}$ $cos.\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos.\ a}{2}}$

y como

$$Tg.\frac{a}{2}=\frac{sen.\frac{a}{2}}{cos.\frac{a}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-cos.\ a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+cos.\ a}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{1-cos.\ a}{1+cos.\ a}}$$

$$\text{y}\quad cotag.\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cos.\ a}{1-cos.\ a}}$$

Fórmulas que nos determinan el valor de las líneas trigonomótricas de la mitad de un arco en funcion del coseno del mismo arco.

24. Si nos propusiésemos obtener las fórmulas trigonométricas correspondientes á cada una de las líneas de la mitad del arco en funcion del seno del mismo arco, seria: $R^2 = sen.^2\, a + cos.^2 a$ y $sen.(a+b) = sen.a\, cos.b + cos.a\, sen.b$, en la primera haciendo $R=1$ será $1 = sen.^2\, a + cos.^2\, a$; y de ser $a=b$, será $a+b=2a$ y tratándose del arco a será:

$sen.\, a = 2\, sen.\, \frac{a}{2}\, cos.\, \frac{a}{2}$ las que si sumamos ordenadamente primero, restándolas despues, tendremos:

$$1 + sen.\; a = \left(sen.\, \frac{a}{2} + cos.\, \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{y } 1 - sen.\; a = \left(sen.\, \frac{a}{2} - cos.\, \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{por tanto: } sen.\, \frac{a}{2} + cos.\, \frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + sen.\; a}$$

$$\text{y } sen.\, \frac{a}{2} - cos.\, \frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - sen.\; a}$$

de donde tendremos que:

$$Sen.\, \frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+sen.a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-sen.a}$$

$$Cos.\, \frac{a}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+sen.a} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-sen.a}$$

De cuyas fórmulas podremos separar los cuatro valores correspondientes ya al *seno* ó ya al *coseno*, pudiéndose discutir despues cual de cada uno de los mismos corresponde á cada uno de los arcos que fuesen propuestos, lo cual ha de depender necesariamente del número de grados correspondiente al mismo, toda vez que la magnitud del seno del arco a, por ejemplo; es la misma que la de los arcos $-a$, $\pi - a$, $-(\pi - a)$ segun hemos demostrado.

Convendrá tener en cuenta, que al desarrollar los 4 valores del seno y los 4 del coseno, cada uno de aquellos debe corresponder á cada uno de estos en un mismo arco, lo cual comprobaremos observando si el producto es $\frac{sen.\; a}{2}$ puesto que siendo $sen.\,(a+b) = sen.a\;\; cos.b + cos.a\;\; sen.\; b$, y siendo $b=a$, y tratándose del arco $^1/_2$ a, resultará que: *sen.* $a=2$ *sen.* $^1/_2\, a$ *cos.* $^1/_2\, a$, y por tanto, partiendo por 2 ambos miembros, resultará ser:

sen. $^1/_2 a \times$ *cos.* $^1/_2 a = \frac{sen.\ a}{2}$, *y no originando este producto no se referirán al mismo arco.*

Las fórmulas de la tangente y cotangente de la mitad de un arco en funcion del seno del mismo arco, podriamos obtenerla fácilmente con el conocimiento prévio de las transformaciones anteriores.

25 * Si nos propusiésemos, determinar la *tangente* y *cotangente* de los divisores de un arco en funcion de la tangente del mismo arco, diriamos, en el supuesto de ser a, $^1/_2 a$, la fórmula *tang.* $2a=\frac{2\ tg.\ a}{1-tg.^2 a}$ seria $tg.a=\frac{2\ tg.\ ^1/_2\ a}{1-tg.^2\ ^1/_2\ a}$ en esta ecuacion observaremos que la incógnita es *tg.* $^1/_2\, a$ siendo el dato *tg.a*; transformándola convenientemente, de ser dividendo igual al producto del divisor por cociente, y pasando los términos del 2.° miembro al primero, resultará la ecuacion de 2.ª grado siguiente:

$Tang.^2\ ^1/_2\ a+\frac{2}{tg.a}\,tg.\ ^1/_2\ a-1$, en la cual despejando la incógnita con aplicacion de la regla dada en el Algebra (118) seria $tg.\ ^1/_2\ a=\frac{-1\pm\sqrt{1+tg.^2\ a}}{tang.\ a}$ y en ella tendremos dos valores para *tag.* $^1/_2\, a$ que serán *recíprocos* de signo contrario puesto que su producto debe ser—1; su tercer término (Algebra 121).

Para decidir cual de los dos valores es el efectivo correspondiente al arco, bastará saber á cual de las dos medias circunferencias corresponde, y en todo caso tendrá el problema dos soluciones como fácilmente pudiera demostrarse.

Para obtener la fórmula correspondiente á la contangente, la deduciriamos de la general ya conocida que nos dice que *tangente*$\times$*cotangente*$=1$.

Las fórmulas trigonométricas correspondientes al tércio *de un arco, en funcion del seno ó coseno del mismo arco dependen de la resolucion de varias ecuaciones del tercer grado*, por que en efecto, si se quisiese determinar el valor de *sen.* $\frac{a}{3}$ y *cos.* $\frac{a}{3}$ en funcion de *sen.* a y *cos.* a, necesitariamos sustituir en las fórmulas que nos dan *sen.* $3a$ y *cos.* $3a$, el valor a por $^1/_3$ a teniéndose que:

$$sen.\ a=3\ sen.\frac{a}{3}-4\ sen^3\ \frac{a}{3}$$

$$y\ cos.\ a=4\ cos.^3\frac{a}{3}-3\ cos.\ \frac{a}{3}$$

que como veremos son dos ecuaciones del tercer grado las que resueltas, nos darán los valores que se buscan.

Las fórmulas que expresen las líneas trigonométricas correspondientes al arco $\frac{a}{m}$, siendo conocidas las del arco a, podemos decir en general que son dependientes de ecuaciones del grado m ó del grado $2m$, segun que el número m sea impar ó par, tratando de determinar estas fórmulas en funcion del *sen.a*; si por el contrario nos propusiésemos determinarlas en funcion del *cos.a*, el valor de $cos\frac{a}{m}$ será dependiente de una ecuacion del grado m.

* 26. *Convertir la suma y la diferencia de dos senos ó de dos cosenos en productos.*

Si sumamos primero y restamos luego las dos fórmulas

$$Sen(a+b)=sen.a\ cos.b+cos.a\ sen.b$$

$$sen(a-b)=sen.a\ cos.b-cos.a\ sen.b,$$ tendremos que:

$$Sen(a+b)+sen.(a-b)=2sen.a\ cos.b$$

$$sen(a+b)-sen(a-b)=2cos.a\ sen.\ b:$$ si en estas formulas hacemos $a+b=A$, $a-b=B$, será $a=\frac{A+B}{2}$ y $b=\frac{A-B}{2}$, en las que sustituyendo tendremos que:

$$Sen\ A+sen\ B=2\,sen\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}\quad (1.^a)$$

$$Sen\ A-sen\ B=2cos\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2}\quad (2.^a)$$

De las fórmulas $cos\ (a+b)=cos.a\ cos.\ b-sen.a\ sen.b$ y $cos(a-b)=cos.a\ cos.b+sen.a\ sen.b.$ tendremos que sumándolas primero y restándolas despues,

$$Cos(a+b)+cos(a-b)=2cos.a\ cos.b$$

$$Cos(a+b)-cos(a-b)=-2sen.a\ sen.b.$$

Si como en las anteriores hacemos $a+b=A$, $a-b=B$, será $a=\frac{A+B}{2}$, $b=\frac{A-B}{2}$,

de donde $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (3.ª)

$$\text{Cos } A-\cos B=-2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\frac{A-B}{2} \quad (4.ª)$$

Tanto en esta última fórmula como en la 2.ª, que expresa la diferencia de los dos senos, es A el minuendo; pero en la 1.ª de aquellas y en la de estas es indiferente que el minuendo sea A ó B, puesto que $\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{B-A}{2}$.

* 27. *Convertir en un producto la diferencia* $\cos(b-c)-\cos.a$.

Aplicando la última de las fórmulas anteriores, tendremos: $\cos(b-c)-\cos.a=-2\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\frac{b-c-a}{2}$.

Segun la ya expuesta, tendremos que:

$$\text{Sen}\,\frac{b-c-a}{2}=-\text{sen}\,\frac{a+c-b}{2};$$

luego $\cos(b-c)-\cos.\,a=2\,\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen}\,\frac{a+c-b}{2}$.

* 28. *Convertir en producto la suma* $\text{sen}.a+\cos.b$.

Desde luego tenemos que:

$$\text{Sen}.a+\cos.b=\text{sen}.a+\text{sen}(90^\circ-b).$$

Y como $\text{sen}.\,A+\text{sen}.\,B=2\,\text{sen}.\,\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,

sustituyendo será:

$$\text{Sen}.\,a+\text{sen}.(90^\circ-b)=2\,\text{sen}.\frac{a+90^\circ-b}{2}\cos.\frac{a+b-90^\circ}{2},$$

ó lo que es lo mismo:

$$\text{Sen}.a+\cos.b=2\text{sen}.\left(45^\circ+\frac{a-b}{2}\right)\cos.\left(45^\circ-\frac{a+b}{2}\right).$$

La suma ó diferencia de dos tangentes ó de dos cotangentes tambien se transforma fácilmente en otras espresiones bien dispuestas para el cálculo logarítmico, segun hemos visto en el núm. 21.

* 29. *Transformar en un producto la suma ó la diferencia de los senos de los tres ángulos de un triángulo.*

Si llamamos A, B y C á los tres ángulos de un triángulo, tendremos que $A+B+C=180^\circ$ y por tanto $A+B=180^\circ-C$ teniéndose que:

$$sen.A+sen.B+sen.C=2sen.\frac{A+B}{2}cos.\frac{A-B}{2}+sen.(A+B) \text{ ó}$$

$$senA+senB+senC=2sen\frac{A+B}{2}cos.\frac{A-B}{2}+2\,sen.\frac{A+B}{2}cos.\frac{A+B}{2}$$

separando el factor comun del segundo miembro, tendremos

$$sen.A+sen.B+sen.C=2sen.\frac{A+B}{2}\left(cos.\frac{A-B}{2}+cos.\frac{A+B}{2}\right)$$

ó $sen.\ A+sen.B+sen.C=2cos.\frac{C}{2}.cos.\frac{A}{2}cos.\frac{B}{2}$ tendremos

por fin que: $sen.A+sen.B+sen.C=4cos.\frac{A}{2}cos.\frac{B}{2}cos.\frac{C}{2}$.

Procediendo de igual modo tendriamos que:

$sen.A+sen.B-sen.C=4sen.\frac{A}{2}sen.\frac{B}{2}sen.\frac{C}{2}$ y tambien que:

$$sen.A-sen.B-sen.C=-4cos.\frac{A}{2}sen.\frac{B}{2}sen.\frac{C}{2}$$

la cual tambien podriamos deducir de la anterior.

* 30. *Transformar en producto la suma de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo.*

Siendo $A+B+C=180^\circ$ tendremos que $A+B=180^\circ-C$ de donde $tg.(A+B)=-tg.C$ y como $\frac{tg.A+tg.B}{1-tg.A\,tg.B}=-tg.C$, siendo dividendo=divisor por cociente, será tambien: $tg.A+tg.B=-tg.C+tg.A\,tg.B\,tg.C$ y por último tendremos que $tg.A+tg.B+tg.C=tg.A\,tg.B\,tg.C$.

31. * Por las importantísimas aplicaciones que tiene en trigonometria esférica. *Dispongamos* para el cálculo logaritmico el binomio $m\ sen.\ a+n\ cos.\ a$ cuyo primer término contiene el seno de un ángulo y cuyo segundo término contiene el coseno del mismo ángulo.

Separando como factor comun uno de los 2 coeficientes, tendremos que: $m\ sen.\ a+n\ cos.\ a=m(sen.\ a+\frac{n}{m}cos.\ a)$. Visto lo cual observaremos que sea cualquiera la cantidad $\frac{n}{m}$ existe un ángulo que tiene por tangente á dicha cantidad.

Si llamamos á este ángulo ψ, tendremos: $\frac{n}{m}=tang.\ \psi$ (que tambien pudiera igualarse á *cotg.* ψ) y por tanto:

$$m\ sen.\ a+n\ cos.\ a=m(sen.\ a+tg.\ \psi\ cos.\ a)=$$

$$\frac{m}{cos.\psi}(sen.\ a\ cos.\ \psi+sen.\psi cos.a)$$ y por último

$$m\ sen.\ a+n\ cos.\ a=\frac{m}{cos.\psi}(sen.\ a+\psi)$$

espresion que se halla ya bien dispuesta para el cálculo logarítmico. Para calcularla, hallaremos por la ecuacion $\frac{n}{m}=Tg.\psi$ el ángulo auxiliar ψ, á cuyo fin restableceremos el rádio, en cuyo supuesto caso esta ecuacion se convierte en $Tang.\ \psi=\frac{nR}{m}$ y aplicándole los logaritmos será: $Log.\ Tang.\psi=Log.\ n+comp.\ log.\ m$ obteniéndose inmediatamente que:

$$Log.(m\ sen.a+n\ cos.a)=log.\ m+log.sen.(a+\psi)-log.cos.\psi$$

32. Teorema. *La suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de dichos arcos es á la tangente de la semi-diferencia de los mismos.*

Para la demostracion de este teorema deberemos tener en cuenta las fórmulas obtenidas en el numero 26. Si dividimos la 1.ª por la 2.ª tendremos que:

$$\frac{sen.A+sen.B}{sen.A-sen.B}=\frac{2sen.{}^1/_2(A+B)cos.{}^1/_2(A-B)}{2cos.{}^1/_2(A+B)sen.{}^1/_2(A-B)}$$

$$=\frac{sen.{}^1/_2(A+B)}{cos.{}^1/_2(A+B)}:\frac{sen.{}^1/_2(A-B)}{cos.{}^1/_2(A-B)}$$

Este último miembro, resultado de partir por dos ambos términos del anterior, considerándole á la vez como el cociente verificado de los dos quebrados que forman el tercer miembro, el cual como sabemos, para ser obtenido se multiplican en cruz. Ahora bien, siendo el seno partido por el coseno del mismo arco igual á la tangente, en el supuesto de ser el rádio igual á 1 (2.ª fórmula de las tres generales) tendremos que:

$$\frac{sen.A+sen.B}{sen.A-sen.B}=\frac{Tg.{}^1/_2(A+B)}{Tg.{}^1/_2(A-B)}$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

* Si dividimos la 1.ª por la 3.ª, la 1.ª por la 4.ª, la 2.ª por la 3.ª, la 2.ª por la 4.ª y la 3.ª por la 4.ª, tendriamos respectivamente que:

$$\frac{sen.A+sen.B}{cos.A+cos.B}=Tg.\frac{A+B}{2} \qquad \frac{sen.A+sen.B}{cos.A-cos.B}=-cotg.\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{sen.A-sen.B}{cos.A+cos.B}=Tg.\frac{A-B}{2} \qquad \frac{sen.A-sen.B}{cos.A-cos.B}=-cotg.\frac{A+B}{2}$$

$$\frac{cos.A+cos.B}{cos.A-cos.B}=-cotg.\frac{A+B}{2}.cotg.\frac{A-B}{2}.$$

Fórmulas que aunque no tan interesantes como las anteriormente espuestas, se pueden traducir al lenguaje vulgar, sirviendo al menos de ejercicio para los alumnos.

Construccion de las Tablas trigonométricas.

33. Para la resolucion trigonométrica de los triángulos, y por no existir relaciones fijas que liguen los lados con los ángulos, ya se sabe que nos valemos de las líneas trigonométricas, las cuales, aunque sea indirectamente, ligan los lados con los ángulos en los triángulos; ahora bien: es necesario que con el menor trabajo posible al dársenos una cualquiera de las líneas trigonométricas, sepamos determinar el valor del ángulo correspondiente; é inversamente, que dado un ángulo sepamos determinar una cualquiera de sus líneas trigonométricas, lo cual conseguiremos con aplicacion de las *Tablas.*

Llamamos *Tablas trigonométricas* á una série de cuadros correlativos, en los que inmediatamente despues de cada arco se exponen los valores de sus líneas correspondientes, *sen., cos., tg., ctg.*, prescindiéndose de las otras cuatro de no imprescindible necesidad, pues que en todo caso no fuera difícil determinarlas por sus relaciones con las anteriores.

Como las magnitudes correspondientes á cada línea desde su *mínimum* á su *máximum* se hallan comprendidas en arcos correspondientes al primer cuadrante, es suficiente determinar las líneas trigonométricas que correspondan á arcos menores de 90°, pues que las correspondientes á arcos mayores pueden solo variar en el signo.

Como además tenemos que las líneas correspondientes á cada arco son las colíneas de su arco complementario y recíprocamente, resultará que se puede reducir el arco á su mitad, ó sea á 45°, pues *seno* 80°=*cos.* 10°, etc., etc.

Las tablas trigonométricas contienen al lado de los ángulos que crecen de minuto en minuto, ó de 10'' en 10'', ó de 1'' en 1'', etc., los valores de las líneas trigonométricas correspondientes al mismo. Por lo espuesto comprenderemos que para la formacion de estas tablas es necesario que se calculen los valores de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos comprendidos desde 0.° á 45.°, creciendo sucesivamente de 10'' en 10'', ó de 1' en 1'.

Como las relaciones entre las líneas trigonométricas correspondientes á un mismo arco nos facilitan los valores de cada una en funcion de las otras, bastará que sea conocido el de una de ellas para determinar el de las demás.

Segun lo demostrado, (1.° del número 5) sabemos que *el seno de un arco menor que la semicircunferencia es la mitad de la cuerda del arco duplo*; en tal supuesto, si suponemos que el rádio es igual á la unidad, igual al lado del exágono inscripto, resultará (13) que

$$Sen.\ 30^\circ = cos.\ 60^\circ = {}^1/_2$$

$$Cos.\ 30^\circ = sen.\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Tag.\ 30^\circ = cotg.\ 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Cotg.\ 30^\circ = tag.\ 60^\circ = \sqrt{3}$$

Si el arco tiene 45.° el seno y coseno serán iguales y valdrán cualquiera de ellos la mitad del lado del cuadrado inscripto, ${}^1/_2\sqrt{2}$. De igual manera, la tangente y cotangente serán iguales, y cualquiera de ellas valdrá la mitad del lado del cuadrado circunscripto, es decir 1.

Si suponemos el arco de 18.° será su seno la mitad de la cuerda de 36.°, es decir, la mitad del lado del decágono regular inscripto, cuyo valor sabemos es: ${}^1/_2 R(\sqrt{5}-1)$ (Geom. Pl. Teor. 166), y por tanto, siendo

$$R=1 \quad \text{será} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{luego} \quad sen.\ 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$Cos.\ 18^\circ = sen. 72^\circ = \sqrt{1 - sen.^2\ 18^\circ} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Si hiciésemos ahora aplicaciones de las fórmulas (23) que determinan el seno y coseno de la mitad de un arco, en funcion del seno y coseno de dicho arco, tendriamos que:

$$Sen.\ 9^\circ = cos.\ 81^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5\sqrt{-5}}}{4}$$

$$Cos.\ 9^\circ = sen.\ 81^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$$

Haciendo ahora aplicacion de las fórmulas que nos dan el seno y coseno del duplo de un arco (22) en funcion del seno y coseno del mismo arco, tendremos que:

$$Sen.\ 36^\circ = 2\ sen.\ 18^\circ\ cos.\ 18 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$Cos.\ 36^\circ = cos.^2\ 18^\circ - sen.^2 18^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Por las mismas fórmulas, observando que:
Sen. 54°=*cos.* 36° y *cos.* 54°=*sen.* 36° tendremos que:

$$Sen. 27^\circ = cos. 63^\circ = \frac{\sqrt{1+sen\ 54^\circ}}{2} - \frac{\sqrt{1-sen. 54^\circ}}{2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$$

$$Cos. 27^\circ = sen. 63^\circ = \frac{\sqrt{1+sen. 54^\circ}}{2} + \frac{\sqrt{1-sen. 54^\circ}}{2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}$$

Hemos determinado los senos y cosenos de todos los arcos múltiplos de 9.°, y comprendidos entre 0.° y 90°: para obtenerlos con cuanta aproximacion se quiera, se estraerán las raices correspondientes, conforme hemos indicado en la Aritmética.

Si tenemos en cuenta las fórmulas del núm. 17, y sabiendo que *Sen.* 30.°=*cos.* 60.°$=\frac{1}{2}$
y que *Cos.* 30.°=*sen.* 60.°$=\frac{1}{2}\sqrt{3}$
pudiéramos hallar los senos y cosenos de todos los arcos múltiplos de 3.° comprendidos entre 0.° y 90.°

* SIMPSON espone un método general para obtener las líneas trigonométricas de un arco, una vez conocidas las de los dos arcos consecutivos que le anteceden inmediatamente, la cual se funda en la siguiente regla: *Conociendo los senos de dos arcos consecutivos* a—1‘ *y* a, *se hallarán el del arco* a+1‘ *multiplicando el seno del mediano por la cantidad constante, y conocida* 2 cos. 1‘, *y restando del producto el seno del menor,* la cual deduce de sumar las fórmulas

$$Sen.\ (a+1') = sen.\ a\ cos.\ 1' + cos.\ a\ sen.\ 1'$$
$$Sen.\ (a-1') = sen.\ a\ cos.\ 1' - cos.\ a\ sen.\ 1'$$

teniéndose $Sen.\ (a+1') + sen.\ (a-1') = 2\ sen.\ a\ cos.\ 1'$

de donde $Sen.\ (a+1') = sen.\ a \times 2\ cos.\ 1' - sen.\ (a-1')$.....

cuya fórmula, traducida al lenguaje vulgar, nos dá la regla precedente. Segun ella, conociendo el seno de 0° y el de 1‘, se podrá hallar el de 2‘; conociendo el seno del arco de 1‘ y el de 2‘, se podrá hallar el de 3‘, etc. y así sucesivamente.

La fórmula de *Simpson* ha sido modificada en época posterior, ateniéndose á ser cos. 1‘ casi igual á 1, y por tanto á ser 2 cos. 1‘ poco distinto de 2.

Para la determinacion del seno correspondiente al arco menor por el que empezamos la construccion de las tablas son necesarios los dos teoremas siguientes:

34. Teorema. *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Vamos á demostrar (fig. 194) que el arco CE es mayor que su seno CD y menor que su tangente CA.

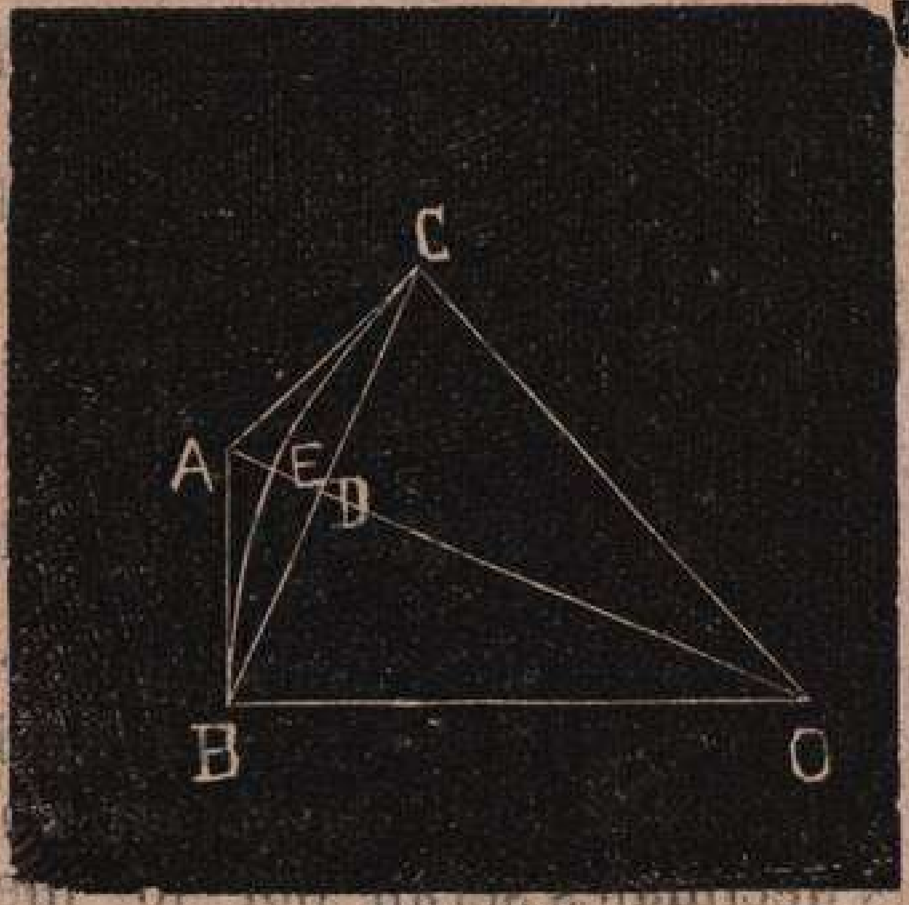


Fig. 194.

En efecto, prolongando el seno CD hasta que encuentre en B al arco, y trazando los rádios OB, OE y OC, asimismo como la tangente AB, tendremos que doblando la figura por AO será: DC=DB, EC=EB, AC=AB; por tanto: cuerda BC<arco BEC<BAC, partiendo por 2 quedará demostrado el teorema, siendo

arco CE>Seno DC y arco CE<Tangente AC.

35. Teorema. *El seno de un arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que la diferencia que hay entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco.*

En efecto, llamando a al arco CE, segun la demostracion anterior, tendremos que Tang. $^1/_2\, a > {}^1/_2\, a$ y por tanto

$\frac{sen.\, ^1/_2\, a}{cos.\, ^1/_2\, a} > {}^1/_2\, a$, multiplicando ambos miembros por $cos.\, ^1/_2\, a$, será: $sen.\, ^1/_2\, a > {}^1/_2\, a \times cos.\, ^1/_2\, a$ multiplicando ambos miembros por $2 cos.\, ^1/_2\, a$, será:

$$2 sen.\, ^1/_2\, a\ cos.\, ^1/_2\, a > a\ cos.^2\, ^1/_2\, a;$$ siendo:

$sen. 2\, a = 2 sen. a\ cos. a$, será $sen. a = 2 sen.\, ^1/_2\, a\ cos.\, ^1/_2\, a$: sustituyendo en la anterior tendremos que:

$sen. a > a\ cos.^2\, ^1/_2\, a$; mas como $cos.^2\, ^1/_2\, a = 1 - sen.^2\, ^1/_2 a$, sustituyendo en el 2.° miembro de la anterior, tendremos que $sen. a > a(1 - sen.^2\, ^1/_2 a.)$

Si sustituimos en vez de $sen.\, ^1/_2 a$ el arco $^1/_2 a$, que es mayor que el seno, segun el teorema 34, el sustraendo de 2.° miembro aumenta; luego el resto, ó sea el 2.° miembro, disminuirá, y por tanto, con mayor razon tendremos que:

$$Sen. a > a(1 - (^1/_2 a)^2)$$

es decir. que $sen. a > a(1 - {}^1/_4 a^2)$

ó bien $sen. a > a - {}^1/_4 a^3$,

que es lo que queríamos demostrar.

Si sumamos ahora á ambos miembros de la desigualdad anterior $^1/_4 a^3$—*sen.a*, tendremos que:

$$^1/_4 a^3 > a - sen.a,$$

es decir, que *la diferencia entre un arco del primer cuadrante y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco* (1).

36. Propongámonos hallar ahora el valor del seno de un arco de 10'', suponiendo el rádio igual á la unidad.

Segun lo expuesto, el valor del arco de 10'' no puede exceder al de su seno en la 4.ª parte del cubo del arco, y siendo arco $180° = \pi = 3{,}14159265358979.......$ y tambien siendo $180° = 180° \times 60' = 10800' = 10800' \times 60'' = 648000''$ será tambien $10'' = \dfrac{\pi}{64800''} = 0{,}0000484813681 1.....$; por tanto $10'' < 0{,}00005$; y como el cubo de esta fraccion será otra que tenga doce ceros entre la coma y la 1.ª cifra decimal significativa, su cuarta parte las tendrá tambien; por tanto las doce primeras cifras decimales serán por lo menos comunes para expresion del arco de 10'' y para seno de 10''. Luego el $sen.\ 10'' = 0{,}0000\ 4848\ 1368......$

Para obtener el valor de $cos.\ 10'' = \sqrt{1 - sen.^2 10''}$ y sustituyendo el arco en vez del seno en la fórmula $cos.a = 1 - 2sen.^2 \dfrac{a}{2}$ nos dará que:

$$cos.\ 10'' = 1 - \frac{10''^2}{2} = 0{,}9999\ 9999\ 8824....$$

Si hiciésemos aplicacion de las fórmulas del número (22) tendriamos que:

$Sen.20'' = 2\,sen.10''cos.10''$ y $cos.20'' = cos.^2 10'' - sen.^2 10''$

$Sen.(20'' + 10'') = sen 30'' = sen\, 20''cos 10'' + sen\, 10''cos\, 20''$

$Cos.(20'' + 10'') = cos 30'' = cos.20''cos.10'' - sen.20''sen\, 10''$

etc. etc. La tangente y cotangente de cada uno de estos arcos, fácilmente serán obtenidos aplicando las fórmulas de

$$Tg.\ a = \frac{sen.\ a}{cos.a} \quad \text{y} \quad cotg.\ a = \frac{cos.\ a}{sen.\ a}.$$

En la práctica es sin embargo preferible hacer aplicacion de las fórmulas de Simpson, de las cuales hemos dado idea al final del número 33.

(1) En el enunciado de este teorema hemos supuesto el rádio igual á uno; si así no fuera lo enunciaríamos diciendo: «el seno de un arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que la diferencia que hay entre el arco y la cuarta parte del cubo del arco, dividida por el cuadrado del rádio.»

37. Obtenidos de la manera que acabamos de indicar los valores correspondientes á cada una de las líneas trigonométricas, suponiendo el rádio igual á la unidad llegariamos á formar las llamadas Tablas trigonométricas naturales; mas como los procedimientos que se emplean son ejecutados mediante la aplicacion de cálculos logarítmicos que tanto abrevian las operaciones, resulta que estas Tablas quedan desde luego transformadas en otras, en las que al lado de cada arco aparecen los logaritmos de sus correspondientes líneas trigonométricas, siendo estas nuevas Tablas las que son conocidas con el nombre de artificiales, ó mas comunmente con el de Tablas trigonométricas, porque de ellas se hace uso esclusivo en la práctica.

Siendo el rádio igual á la unidad, y tratándose de arcos comprendidos entre 0° y 45°, resultará que los senos y cosenos de estos son menores que el rádio, así mismo como el valor de la tangente de todo arco menor de 45.°, y como los valores de las cotangentes correspondientes á arcos comprendidos entre 45.° y 90.° son asimismo menores que el rádio, resultará que sus logaritmos respectivos serian negativos, como correspondientes á fracciones propias, y á fin de evitar todos los inconvenientes que en tal supuesto se originarian, se ha convenido en igualar al rádio á *diez mil millones*; es decir $R=10^{10}$ bajo cuyo supuesto todas las líneas trigonométricas de que pueda hacerse aplicacion, tienen *positivos* sus respectivos logaritmos, no complicando en nada los cálculos, antes bien facilitándolos estraordinariamente, pues que en todo caso bastaría restablecer el rádio en las nuevas fórmulas halladas, teniendo en cuenta que en ellas $R=10^{10}$, siendo 10 su logaritmo respectivo al cual de nuevo queremos asignarle el valor de $R=1$.

Siendo el $R=1$, aun cuando resultasen ser negativos los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á todo arco menor de 45.°, podría dárseles la forma de característica negativa y mantisa positiva, verificándose con tales logaritmos todos los cálculos que fuesen necesarios, pero los autores de Tablas trigonométricas no aceptan estos logaritmos negativos.

Si suponemos que $R=10.^{10}$ para proceder á hallar los los logaritmos de los senos y cosenos, habrá necesidad de multiplicar sus valores numéricos respectivos por $10.^{10}$ si estaban hallados en el supuesto de ser $R.=1$, puesto que valuando ahora el rádio $10.^{10}$ en vez de 1, la unidad nueva será 10000.000000 veces mayor, siéndolo tambien asímismo los valores numéricos de los senos y cosenos.

Teniéndose los logaritmos de los senos y de los cosenos se hallarán fácilmente los de las tangentes y cotangentes de la manera siguiente:

$$Tang.\ a = \frac{10.^{10}\ sen.\ a}{cos.\ a}\ ,\quad Cotag.\ a = \frac{10.^{10}\ cos.\ a}{sen.\ a}$$

y tomando los logaritmos, será:

$$Log.\ Tg.\ a = 10 + log.\ sen.\ a - log.\ cos.\ a$$
$$= log.\ sen.\ a + comp.\ log.\ cos.\ a$$
$$Log.\ cotg.\ a = 10 + log.\ cos.\ a - log.\ sen.\ a$$
$$= log.\ cos.\ a. + comp.\ log.\ sen.\ a$$

Disposicion y uso de las tablas trigonométricas.

38. Disposicion. Hallándose ya determinados los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente que corresponden á cada uno de todos los arcos que las tablas han de contener, se colocarán aquellos en línea horizontal correspondiéndose con su arco respectivo, y colocando los arcos sucesivamente en columna vertical, resultarán tambien colocados de igual manera los logaritmos de todos los senos, de todos los cosenos, de todas las tangentes y de todas las cotangentes; por consecuencia aparecerán 5 columnas, una, para los arcos y otras 4 para las líneas trigonométricas de aquellos: además de estas columnas aparecerán otras tres con destino á colocar las diferencias entre cada dos logaritmos consecutivos, de aplicacion importante para obtener los logaritmos correspondientes á líneas trigonométricas que se refieran á arcos que no espresan las tablas, pero que se hallarán comprendidos entre dos consecutivos de aquellos.

De las tres columnas que espresan diferencias, ó mejor, *partes proporcionales*, una es para los senos, otra para los cosenos, y la otra para las tangentes y cotangentes, puesto que *la diferencia de los logaritmos de las tangentes de dos arcos, es igual á la diferencia de los logaritmos de las cotangentes de los mismos arcos.*

En efecto, siendo a y a' dos arcos, tendremos que:

$$tg.\ a = \frac{R^2}{cotg.a}\quad \text{y}\quad tang.\ a' = \frac{R^2}{cotg.a'}$$

$$\text{de donde}\quad \frac{tg.\ a}{tg.\ a'} = \frac{cotg.\ a'}{cotg.\ a}$$

y por tanto $log.\ tg.\ a - log.\ tg.\ a' = lg.\ cotg.\ a' - lg.\ cotg.\ a.$

Estas tablas contendrán los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos incluidos en las mismas é inferiores á 90°. (conforme hemos indicado) y que podrán crecer de minuto en minuto, como las usuales del Sr. Vazquez Queipo que tenemos adoptadas; ó de 10" en 10"; ó de 1" en 1".

En todas ellas para buscar los logaritmos de las líneas trigonométrias correspondientes á arcos menores de 45° se buscarán estos grados en la parte superior de cada página, y los minutos en la primera columna de la izquierda, de arriba abajo, buscándose por el contrario los correspondientes á los arcos mayores de 45°, en la parte inferior de cada página y los minutos en la primera columna de la derecha de abajo arriba. (1)

39. Uso de las tablas. Generalmente todas las Tablas de logaritmos de números, van acompañadas de las trigonométricas. Las mas conocidas y de empleo mas frecuente entre nosotros son las del Sr. Vazquez Queipo, última edicion, esmeradamente impresa, y que contiene los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á todos los arcos que crecen de minuto en minuto; de estas tablas nos hemos ocupado ya en otro lugar; y en este punto, debemos solo recomendarlas, asi como muy especialmente, que se estudie con el detenimiento necesario, la nutrida esplicacion que en ella se hace de esta interesante Teoria. A mas de estas tablas tenemos las de *Calvet;* las francesas de *Mr. Lalande* estendidas á siete decimales por *Mr. Marie*; las de *Callet*, publicadas por *Fermin Didot* de uso muy frecuente etc., etc. Segun tenemos indicado, en todos nuestros cálculos nos referimos á las del Sr. Vazquez Queipo.

De las tablas trigonométricas se hace aplicacion para la resolucion de los dos problemas siguientes:

1.° *Dado un arco cualquiera hallar el logaritmo correspondiente á cualquiera de sus líneas trigonométricas.*

2.° *Hallar el arco correspondiente á una línea trigonométrica dada, cuyo logaritmo sea conocido.*

Para la aplicacion de las tablas á la resolucion del primer problema debemos tener en cuenta: 1.° *que el arco dado se halle en las tablas.* 2.° *que se halle comprendido en-*

(1) La disposicion espuesta, es general para todas las Tablas Trigonométricas solo puede haber innovacion en algunos otros accidentes, que la práctica recomiende para facilitar su manejo, y como en todo caso, van las tablas precididas de un prólogo en el que se describen minuciosamente, nos creemos dispensados aquí, de dar mayor estension á esta parte de nuestros escritos.

tre dos consecutivos de las tablas. 3.° que esceda en grados al mayor de las tablas.

Primer caso. Procediendo conforme hemos indicado, hallaremos que:

Lg. sen. $41°+22'=\bar{1},820120$ *Lg. cos.* $76°+24'=\bar{1},371330$
Lg. tg. $35°+45'=\bar{1},857270$ *Lg. cotg.* $52°+39'=\bar{1},882625$.

Segundo caso. Si el arco que se nos diere para hallar el logaritmo de una de sus líneas trigonométricas, tuviese segundos, teniendo en cuenta, cuanto hemos espuesto en los números precedentes, y comparando la línea que corresponde al arco con grados y minutos con la correspondiente al mismo arco con los segundos dados, vendriamos en conocimiento, sabiendo como aquellas crecen, de si era esta mayor ó menor que aquella.

Supongamos que se pide el *log.* de *sen.* $28°+14'+37''$. Desde luego el logaritmo-seno $28°+14'=\bar{1},674919$, el cual tendrá que aumentar, porque el arco dado escede en 37" al anterior, luego deberemos formar la proposicion siguiente: admitiendo como cierto, aun cuando no lo es, que *las diferencias de los logaritmos de las líneas trigonométricas, son proporcionales á las diferencias de sus arcos*, la cual nos dá la aproximacion necesaria: $60'':37''::0,000236:x$ donde $x=0,000145$ (siendo $0,000236=$ á la diferencia entre los logaritmos de *sen.* $28°+15'$ y *sen.* $28°+14'$). Luego *log. sen.* $28°+14'+37''=\bar{1},674919+0,000185=\bar{1},675064$.

Si el logaritmo pedido fuese del mismo arco pero correspondiente al coseno ó cotangente, tendremos necesidad de disminuir ó restar, de su logaritmo respectivo, lo que hubiese obtenido de una proporcion análoga.

Las tablas de *Vazquez Queipo*, simplifican el procedimiento, puesto que en vez de tener que determinar la diferencia entre las mantisas de los dos logaritmos consecutivos entre quienes se halla comprendido el pedido, espresan dicha *diferencia ó parte proporcional, correspondiente a un solo segundo*; así que en el caso precedente, siendo la parte proporcional 3,93 multiplicándola por 37" tendremos de producto 145 millonésimas, las cuales, tratándose del logaritmo-seno de un arco comprendido entre 0° y 90° tendrán que aumentarse al logaritmo-seno del arco mas próximo al dado que dichas tablas contengan.

En estas tablas, convendrá tener en cuenta el procedimiento que se debe seguir para obtener el logaritmo correspondiente á una línea de un arco menor de 4° ó mayor de 86°. en el primer caso, se deberá reducir aquel á segundos, obtener el log. correspondiente á dicho número de segundos: y agregarle el logaritmo respectivo á dicha línea, del cual encontraremos en una de las primeras páginas su característica y las 3 primeras cifras de la mantisa, estando á la cabeza de la columna, las 3 últimas cifras enfrente del número de minutos. Si el logaritmo pedido de una línea, corresponde á arco mayor de 86°. buscaremos el de su colinea respectiva.

Tercer caso. Si el arco dado fuese mayor que un cuadrante se le restarán todos los cuadrantes que sea posible, siendo la diferencia precisamente un arco menor que un cuadrante, del cual tendremos en las tablas los valores correspondientes á los logaritmos de sus líneas trigonométricas, los cuales solo pueden (por la magnitud respectiva de los arcos, y segun lo que ya debemos saber) variar en la *cualidad ó sea en el signo.*

Problema II. Para proponernos hallar el arco correspondiente á una línea trigonométrica dada, puede dársenos: 1.° un logaritmo que esté en las Tablas: 2.° un logaritmo que no se halle en las mismas, pero sí comprendido entre dos consecutivos de ellas.

Primer caso. Por lo expuesto anteriormente, estando en las tablas el logaritmo dado, tendremos que:

$$Lg.\ sen.\ x=\bar{1},738048=36°+10'$$
$$Lg.\ cos.\ x=\bar{1},997228=6°+28'$$
$$Lg.\ tg.\ x=\bar{1},675237=25°+20'$$
$$Lg.\ cotg.\ x=0,074904=40°+5'$$

Segundo caso. Para hallar el arco correspondiente al logaritmo de una línea trigonométrica dada y el cual no se halle en las tablas, pero si comprendido entre dos consecutivos de las mismas, hay necesidad de distinguir dos casos: 1.° cuando el logaritmo dado se halle en las 4 primeras páginas y corresponda por tanto, á un ángulo menor de 4° ó mayor que 86°, y 2.° que el logaritmo de la línea trigonométrica dado, corresponda á un arco mayor de 4° y menor de 86°. no hallándose por tanto, en las 4 primeras páginas de las Tablas.

En el primer caso, el problema se resuelve sirviéndonos de las Tablas accesorias, colocadas entre las columnas *descendentes* de los senos y tangentes, es decir, entre los senos y tangentes de los ángulos menores de 4°. Para buscar el ángulo cuyo seno tiene por logaritmo un logaritmo dado, buscaré en la columna de los senos el logaritmo menor que mas se le aproxime, el cual caerá en una de las cuatro primeras planas, busco luego el logaritmo correspondiente en la columna auxiliar inmediata de la derecha, del cual restaré el logaritmo dado, su diferencia será el logaritmo del número de segundos, los cuales sabidos, reduciremos á grados, minutos, etc. Para la obtencion del arco menor de 4° correspondiente á un logaritmo dado ya pertenezca á un coseno, tangente ó cotangente, procedemos como indican las Tablas trigonométricos, segun lo espresan en sus páginas 48 y 49. (Décima sesta edicion de las del Sr. Vazquez Queipo).

En el segundo caso, es decir, para hallar el arco correspondiente al logaritmo de una línea trigonométrica dado y el cual carresponde á un arco mayor de 4° y menor que 86° el cual no se halla en las Tablas, se hallará este comprendido entre dos consecutivos de las mismas y su arco, se hallará tambien comprendido entre los que correspondan á dichos dos logaritmos: necesitamos por tanto, determinar la cantidad de arco que debe agregarse al menor de ellos, para que el problema quede resuelto. Esto lo determinaremos por la proporcionalidad entre las diferencias de los arcos y las de los logaritmos de sus líneas trigonométricas (cuya proporcionalidad aunque incierta, nos dá aproximacion). La resolucion de este fácil problema lo tenemos en las páginas 50 y 51 de referidas Tablas.

SEGUNDA PARTE.

RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS RECTILINEOS.

Relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos.

40. Despues de sabidas las relaciones geométricas que existen entre los elementos angulares de un triángulo, las que se verifican entre sus elementos lineales y las que relacionan sus elementos lineales con sus elementos angulares, pasemos á determinar *las relaciones trigonométricas entre los lados y los ángulos de los triángulos rectilíneos* en las cuales se funda la resolucion trigonométrica de los Triángulos.

Todo triángulo rectángulo se espresa por ABC poniéndose generalmente la letra A en su vértice recto y llamándose *a*, *b* y *c* á sus lados respectivamente opuesto, es decir, á la hipotenusa y los catetos.

41. **1.er Teorema ó analogía.** *En todo triángulo rectángulo se verifica que cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto á dicho cateto.*

En efecto, sea ABC (fig. 195) un triángulo rectángulo en A, si desde uno cualquiera de sus vértices, B por ejemplo, con un rádio cualquiera BR trazo el arco RE, su seno será RN, que tambien lo será del ángulo B, su tangente será PE. Si comparamos los triángulos BAC dado, y BNR, los cuales serán rectángulos semejantes, tendremos que:

$$BR : RN :: BC : CA,$$

sustituyendo será:

$$Radio : sen.B :: a : b,$$

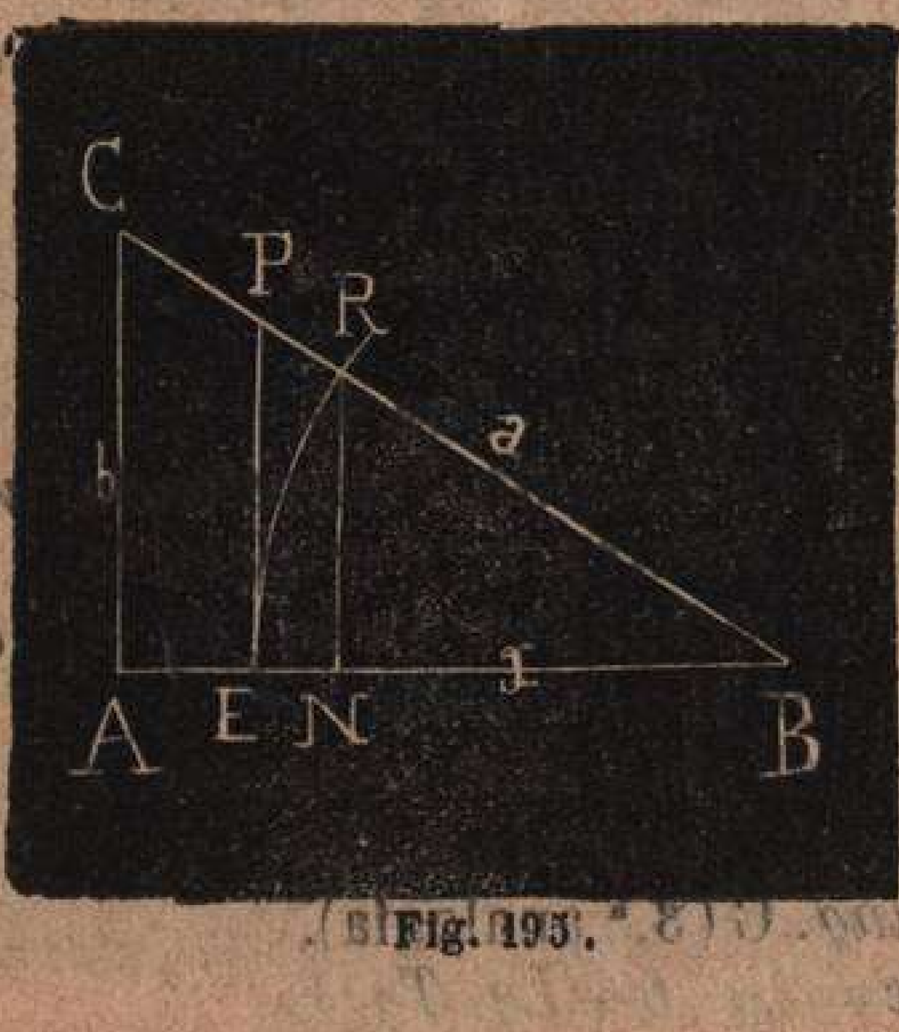


Fig. 195.

de donde *rádio de las tablas, es al seno, como hipotenusa, es al cateto opuesto*; y siendo R=1 resultará que:

$b=a \times sen.$ B y $c=a \times sen.$ C.

2.° Teorema ó analogía. En los mismos triángulos podremos decir que BR:BN::BC:BA, en donde sustituyendo cada recta por su valor resultará que:

$$Radio:cos.B::a:c,$$

de donde Rádio de las Tablas, es al coseno, como hipotenusa, es al cateto adyacente; y siendo R=1 resultará que:

$$c=a\times cos.\ B \quad y \quad b=a\times cos.\ C,$$

lo cual nos dice que *en todo triángulo rectángulo se verifica que un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa, multiplicada por el coseno del ángulo adyacente ó comprendido.*

3.er Teorema ó analogía. En la misma (fig. 195) pero entre los triángulos rectángulos semejantes BEP y BAC, si establecemos proporcionalidad entre sus lados homólogos, de esta manera BE:EP::BA:AC y sustituimos, resultará que $R:tg.B::c:b$, *de donde rádio de las tablas, es á la tangente, como un cateto, es al otro cateto*, y siendo R=1 resultará que $b=c\times Tang.\ B$ y $c=b\ tang.\ C$, lo cual nos dice que: *en todo triángulo rectángulo se verifica que un cateto, cualquiera es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero, ó por la cotangente del ángulo opuesto á este.*

Resolucion de los Triángulos rectángulos.

41. Para resolver un triángulo rectángulo se precisan conocer dos de sus elementos á mas del ángulo recto, dándose al menos uno de sus lados.

Los casos de resolucion serán por lo tanto, cuatro.

1.° *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa* **a** *y uno de los ángulos agudos* B, *por ejemplo.*

Los datos serán A, B y a; las incógnitas serán C, b, c, las cuales despejaremos diciendo: C=90°—B.

$$b=a\times sen.\ B \text{ (1.ª analogía)},$$

$$\text{de donde } Log.\ b=Lg.\ a+Lg.\ Sen.\ B.$$

$$c=a\times cos.\ B \text{ (2.ª analogía)},$$

$$\text{de donde } Log.\ c=Lg.\ a+Lg.\ Cos.\ B.$$

2.° *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo un ángulo agudo C, y uno de sus catetos, b por ejemplo.*

Los datos serán A, C, b; las incógnitas serán B, a, c, las cuales despejaremos diciendo: B=90°—C.

De ser $b=a\times cos.\ C$ (2.ª analogía), será $a=b:cos.\ C$,

y por tanto $Log.\ a=Lg.\ b+comp.\ Lg.\ Cos.\ C$;

y como $c=b\times Tang.\ C$ (3.ª analogía),

resultará que $Lg.\ c=Lg.\ b+Lg.\ Tg.\ C.$

3.° *Resolver un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* a *y uno cualquiera de sus catetos,* b *por ejemplo.*

Los datos serán A, a, b; las incógnitas serán c, B, C, las cuales resolveremos diciendo: si $a^2=b^2+c^2$, será:

$$c^2=a^2-b^2, \text{ de donde } c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

y aplicando los logaritmos será:

$$log.\ c={}^1/_2(Lg.\ (a+b)+Lg.(a-b)).$$

Siendo $b=a\times sen.$ B (1.ª analogía) será $sen.$B$=b:a$, de donde $Lg.\ sen.$ B$=Lg.\ b+compl.\ Lg.\ a.$

Siendo $b=a\times cos.$ C (2.ª analogía), será $cos.$ C$=b:a$, de donde $Lg.\ Cos.$ C$=Lg.\ b+compl.\ Lg.\ a.$

4.° *Resolver un triángulo rectángulo, conocidos los dos catetos.* Los datos serán A, b, c; las incógnitas son B, C y a.

La primera incógnita se despeja por la 3.ª analogía, que dice que: $b=c\times Tang.$ B, de donde $Tg.$ B$=b:c$, es decir, que $Lg.\ Tg.$ B$=Lg.\ b+Comp.\ log.\ c$; y C$=90°-$B.

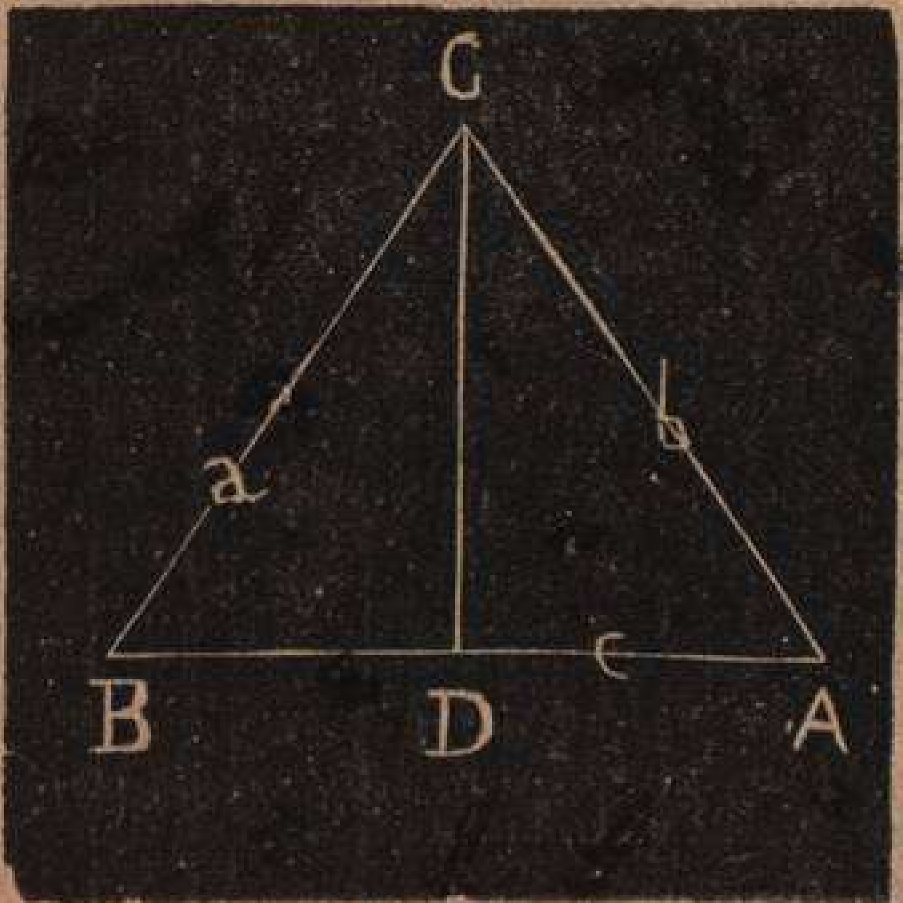
Para determinar la hipotenusa a, lo haremos despejándola de la 1.ª ó 2.ª analogía: así tendremos que $b=a\times sen.$B, de donde $a=b:\ sen.$ B, y por tanto $Lg.a=Lg.b+10-Lg.sen.$ B.

Tambien por el teorema de Pitágoras será: $a=\sqrt{b^2+c^2}$

Relacion entre los lados y los ángulos de los Triángulos oblicuángulos.

42. Teorema. (*1.ª analogía.*) *En todo triángulo oblicuángulo se verifica que los lados son directamente proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

En efecto, sea el triángulo ABC (fig. 196); si bajamos la perpendicular CD á la base desde su vértice opuesto, se habrán formado los dos triángulos rectángulos ADC y BDC, por la 1.ª analogía de las que sirven para la resolucion de los triángulos rectángulos, tendremos que la perpendicular CD en el triángulo ACD será: CD$=$AC$\times sen.$A, y en el BCD será tambien: CD$=$CB$\times sen.$ B, y siendo CD$=$CD será tambien:



(Fig. 196.)

AC$\times sen.$ A$=$CB$\times sen.$ B,

formando proporcion tendremos que CB:AC:: *sen*.A:*sen*.B.

Llamando a, b y c á los lados del triángulo, opuestos respectivamente á los ángulos A, B y C, tendremos que: $a:b::sen.\ A:sen.\ B,\quad a:c::sen.\ A:sen.\ C,\quad b:c::sen.\ B:sen.\ C.$

La 2.ª y 3.ª proporcion resultaria de bajar desde B y A las perpendiculares al lado opuesto, procediendo análogamente.

Corolario. Segun el anterior teorema 32, hemos obtenido que:

$sen.A+sen.B:sen.A-senB::tan.\frac{1}{2}(A+B):tang.\frac{1}{2}(A-B)$ sengun el teorema anterior tenemos que $a:b::sen.\ A:sen.B$ de donde $a+b:a-b::sen.A+sen.B:sen.\ A-sen.B$, y teniendo esta proporcion y la anterior, obtenida del teorema 32, una razon comun, suprimiéndola y formando proporcion con las otras dos resultará por último que:

$$a+b:a-b::tg.\tfrac{1}{2}(A+B):tg.\tfrac{1}{2}(A-B)$$

De idéntica manera obtendriamos:

$$a+c:a-c::tg.\tfrac{1}{2}(A+C):tg.\tfrac{1}{2}(A-C)$$

$$\text{y } b+c:b-c::tg.\tfrac{1}{2}(B+C):tg.\tfrac{1}{2}(B-C)$$

lo cual nos dá la segunda analogía que dice:

En todo triángulo rectilíneo se verifica: que la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos, es á la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.

Teorema. (3.ª analogía). *En todo triángulo rectilíneo se verifica que el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados mas ó menos el doble producto de ellos mismos por el coseno del ángulo comprendido entre ambos.*

Mas, decimos, si el lado está opuesto á un ángulo *obtuso*.

Menos, si el lado está opuesto á un ángulo *agudo*.

En efecto, segun los teorema 99 y 100 hemos visto que (1.ª) $b^2=a^2+c^2-2c\times BD$ y (2.ª) $a^2=b^2+c^2+2c\times AD$, llamando a, b y c á cada uno de los lados de un triángulo, opuestos respectivamente, á los ángulos A, B y C.

Ahora bien, si en el teorema 99, (fig. 79) despejamos BD, cateto del triángulo rectángulo BDC, por la 2.ª analogía ó teorema del número 40, resultará tambien que

$$BD=BC\times cos.\ B=a\times cos.\ B.$$

La cual sustituyendo en la 1.ª de las igualdades anteriores, tendremos que $b^2=a^2+c^2-2ac\times cos.\ B$.

Análogamente resultará que $a^2=b^2+c^2-2bc\ cos.\ A$ y $c^2=a^2+b^2-2ab\ cos.\ C$.

Si en la (fig. 80) del teorema 100, despejamos AD, cateto del triángulo rectángulo ADC, por la 2.ª analogía ya referida resultará que: $AD = AC \times cos.\ A = b \times cos.\ A$ la cual sustituyendo en la (2.ª) de las igualdades anteriores, resultará que: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\ cos.\ A$.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

43. Para la resolucion de un triángulo oblicuángulo se precisan conocer tres de sus seis elementos, entrando cuando menos, entre ellos, uno de sus lados. Los casos de resolucion son cuatro.

1.° *Resolver un triángulo rectilíneo oblicuángulo dados un lado y dos ángulos.* Sean estos a, A, B, las incógnitas serán C, b y c.

Desde luego tendremos que $C = 180° - (A + B)$.

De la proporcion $a:b :: sen.\ A : sen.\ B$ resultará que:

$b = \frac{a \times sen.\ B}{sen.\ A}$ y de $a:c :: sen.\ A : sen.\ C$ resultará que:

$c = \frac{a \times sen.\ C}{sen.\ A}$ las que despejadas por logaritmos nos darán que: $Lg.\ b = log.\ a + log.\ sen.\ B + comp.\ log.\ sen.\ A$

$Lg.\ c = log.\ a + log.\ sen.\ C + comp.\ log.\ sen.\ A$.

2.° *Resolver un triángulo rectilíneo oblicuángulo dados dos lados y el ángulo comprendido entre los mismos.*

Sean los datos a, b y C; las incógnitas serán c, A y B.

Desde luego tendremos que $A + B = 180° - C$, (y por tanto $sen.\ C = sen.\ (A + B) = sen.\ A\ cos.\ B + cos.\ A\ sen.\ B$.)

Si aplicamos la 2.ª analogía que dice:

$a + b : a - b :: tg.\ {}^1/_2\ (A + B) : tg.\ {}^1/_2\ (A - B)$ observaremos que de estos cuatro términos es solo desconocido el último y por tanto despejado nos dará que:

$Lg.\ tg.\ {}^1/_2 (A - B) = Lg. (a - b) + lg. tg.\ {}^1/_2\ (A + B) - lg. (a + b)$

Ahora bien, conocida la suma y la diferencia de A y B, el mayor que será el opuesto al mayor de los dos lados dados, será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia; y el menor será igual á la semi-suma menos la semi-diferencia.

Para despejar el tercer lado c diriamos:

$$a:c :: sen.\ A : sen.\ C$$

de donde $c = \frac{a \times sen.\ C}{sen.\ A}$ despejándole por logaritmos resultará que: $lg.\ c = lg.\ a + lg.\ sen.\ C + comp.\ lg.\ sen.\ A$.

3.° *Resolver un triángulo rectilíneo oblicuángulo, conocidos dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.* (Este es el llamado caso dudoso de la Trigonometría).

Sean los datos b, c y B, las incógnitas serán C, A y a. La primera de las mismas la despejaremos de la proporcion siguiente: $b:c::sen.B:sen.C$, de donde

$$Lg.\ sen.C=Lg.c+Lg.\ sen.B-Lg.\ b;\qquad A=180^\circ-(C+B)$$

y de ser $a:c::sen.A:sen.\ C$ resultará que

$$Lg.\ a=Lg.\ c+Lg.sen.\ A-Lg.\ sen.C.$$

Discusion de este problema: El ángulo dado B puede ser *agudo*, *recto* ú *obtuso*. Supongamos que $B<90^\circ$. En tal supuesto puede ser b *menor*, *igual* ó *mayor* que c. Si $b<c$ caben dos soluciones, segun hemos visto en el 5.° problema gráfico del número 88, en su figura respectiva.

Si $b=c$ ó si $b>c$ en cualquiera de estos dos casos hay una sola solucion.

Si suponemos ahora que el ángulo dado $B=90^\circ$, observaremos que no cabe posible solucion, siendo el lado dado b *igual* ó *menor* que el c, y solo es posible resolverlo siendo el lado b mayor c, en cuyo supuesto solo cabe una solucion.

Si, por último, suponemos que el ángulo dado $B>90^\circ$, repetiremos lo que en el caso anterior, b no puede ser igual ni menor que c, solo es posible una solucion siendo b mayor que c.

4.° *Resolver un triángulo rectilíneo oblicuángulo, siendo conocidos sus tres lados.*

Los datos serán a, b y c, las incógnitas serán A, B y C, uno cualquiera de sus ángulos se despejará por la tercera analogía, segun la cual tendremos que:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ cos.\ A \quad \text{de donde} \quad cos.\ A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Estas fórmulas y las que análogamente podemos obtener para $cos.$ B y $cos.$ C no se hallan bien dispuestas para el cálculo logarítmico, mas pueden fácilmente transformarse en las logarítmicas correspondientes, sabiendo (núm. 23) que

$$1=cos.^2\frac{a}{2}+sen.^2\frac{a}{2} \quad \text{y} \quad cos.a=cos.^2\frac{a}{2}-sen.^2\frac{a}{2}$$

de donde $sen.{}^1/_2 a=\pm\sqrt{\dfrac{1-cos.\ a}{2}}$ de la cual obtendremos que $2sen.^2\ {}^1/_2\ A=1-cos.\ A$. Ahora bien, si de la unidad restamos ámbos miembros, de la ecuacion que nos despeja el $cos.$ de A, tendremos que:

$$2sen^2\frac{1}{2}A=1-cosA=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Si llamamos ahora $2p$ al perímetro del triángulo, tendremos que:

$$a+b+c=2p;\ a+b-c=2(p-c);\ a-b+c=2(p-b)$$
$$b+c-a=2(p-a),$$

verificándose por tanto que: $sen.^2\frac{1}{2}A=\frac{(p-c)(p-b)}{bc}$ y por último: $sen.\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}}$

y por un razonamiento análogo tendremos que:

$$sen.\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\qquad sen.\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

Si quisiéramos determinar el valor de las incógnitas A, B y C en funcion del coseno de su mitad, se obtendrian de una manera análoga, teniendo en cuenta que:

$$2\,cos.^2\,{}^1/_2\,A=1+cos.A$$

si entónces añadimos la unidad á ambos miembros de las igualdades que despejan los *cos.* de A, B y C, mal preparadas allí, para el cálculo logarítmico, tendriamos respectivamente que:

$$cos.\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};\ cos.\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};cos.\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

Si dividimos ahora cada una de las fórmulas anteriores por la correspondiente de esta última, resultarán las siguientes:

$$Tg.\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}:\ Tg.\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$Tg.\ \frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Si por último las dividimos inversamente, obtendriamos los valores de las cotangentes de los 3 ángulos, en funcion de las cotangentes de la mitad de dichos ángulos.

Aplicacion de la resolucion de los triángulos á varios casos particulares.

* **44.** Al empezar la Trigonometría hemos encarecido su es-

tudio, indicando el infinito número de aplicaciones que puede hacerse de la misma. Tarea árdua y prolija á la par sería la que nos propusiésemos aquí, si pensásemos hacer indicacion, siquiera fuese somera, de algunas de las mas importantes. La resolucion de los triángulos, sean estos *rectilíneos* ó *esféricos*, sean aquellos *rectángulos* ú *oblicuángulos*, cada caso, en fin, aun el mas sencillo, resuelve un número prodigioso de problemas.

Supongamos 1.º que se trate prácticamente de resolver un triángulo rectángulo en cualquiera de sus casos, por ejemplo, *dado uno de sus catetos y un ángulo agudo:* podriamos proponer el problema enunciándolo de muchas maneras, como:

1.ª *Hallar la altura de una torre*, (fig. 197).

2.ª *Determinar la anchura de un rio, etc.*, (fig. 198).

Fig. 197.

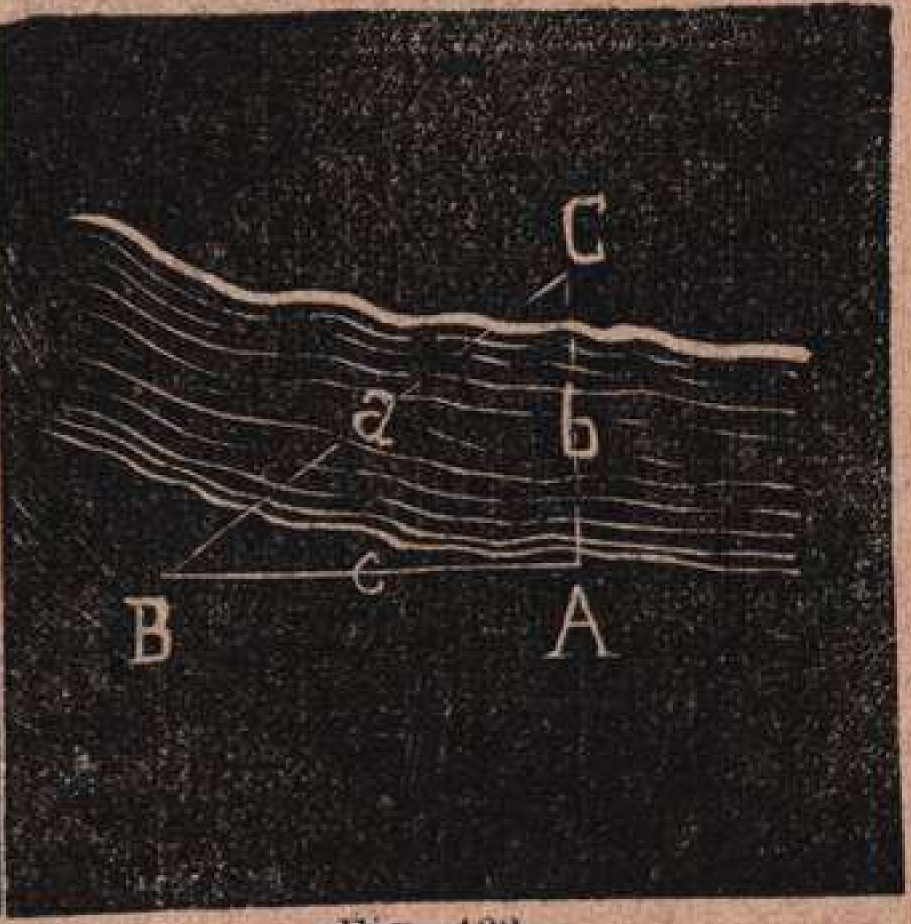


Fig. 198.

En cualquiera de éstos casos los datos serán el cateto c y el ángulo agudo B. (1) (tácitamente lo es tambien el ángulo recto A). De las incógnitas la que resuelve el problema es el cateto AC, ó sea b, el cual despejado por la 3.ª analogía del núm. 40, nos dará que $b = c \times tang.\ B$, de donde $Log.\ b = log.\ c + log.\ tang.\ B$. Si suponemos en la 1.ª que: $c = 78{,}5^m$ y $B = 44^o + 9'$ será: $Log.\ b = 1.895146 + \bar{1},987112 = 1{,}882258$, que corresponde al número 76,05 metros, el cual resuelve el problema.

Si suponemos en el 2.º que c. valga 93 metros, y que $B = 36^o + 21'$ será:

$Lg.\ b = lg. 93 + lg.\ tg.\ 36^o + 21' = 1{,}968483 + \bar{1},866829 = 1{,}835312$ que corresponde á 68,44 metros, cuyo valor resuelve el problema.

Casos hay, por el contrario, que para despejar la incógnita necesitamos resolver varios de los problemas de resolucion, cual por ejemplo el que esponemos á continuacion:

(1) Recordamos la conveniencia de que los alumnos conozcan algun goniómetro, especialmente el Grafómetro, por poderse con este instrumento medir ángulos, ya sobre un plano horizontal ó vertical, y tambien por su parecido al trasportador ó semi-circulo graduado.

Determinar la distancia comprendida entre los puntos A *y* B *lejanos é inaccesibles,* (fig. 199).

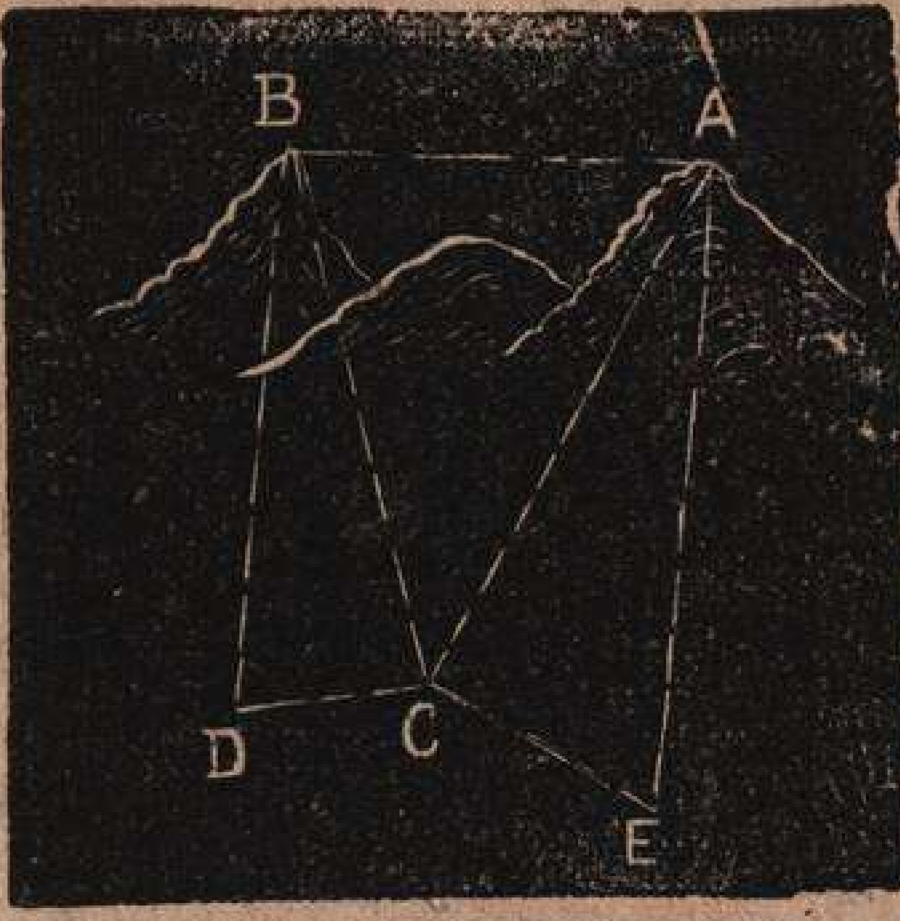


Fig. 199.

Para esto marcaremos un punto cualquiera C, con el cual formaríamos el triángulo CBA, la incógnita será la distancia AB; pero de este triángulo no podemos tener mas datos que el valor del ángulo C, el cual fácilmente podemos medir con un goniómetro: si además de este dato fuesen conocidos los dos lados CA y CB, bien sencillo sería luego resolver un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido (2.° caso 43): esto lo conseguimos trazando una recta cualquiera CE, la cual podemos medir, y si desde el estremo E dirijimos la visual EA, así se formará el triángulo rectángulo ACE en el cual conocemos el cateto CE y el ángulo agudo E que tambien mediremos; en dicho triángulo diremos

cateto CA=*cateto* CE$\times$*tang. ang.* E. (2.° caso 41).

Si luego desde un punto cualquiera D dirigimos dos visuales DB y DC, formaremos el nuevo triángulo oblicuángulo BCD, en el cual conocemos el lado CD y los dos ángulos adyacentes D y C, el cual resolveremos fácilmente despejando el valor de BC (1.er caso 43).

Ahora bien, despejados los valores de los dos lados CA y CB y del ángulo C, determinaremos el valor de la incógnita conforme ha sido espresado, necesitándose para esto resolver problemas correspondientes á varios casos, pero sin que para la misma resolucion hayamos necesitado aproximarnos á los puntos A y B, estremos de la línea incógnita.

Supongamos en el triángulo rectángulo AEC que EC=2825 ms. y que áng. E=67.°

Desde luego tendremos que: *Lg.* CA=*lg.* 2825+*lg. tg.* 67, *Lg.* CA=3,451018+0,372148=3.823166 luego CA=665,4 ms.

En el triángulo BCD, supongamos que DC=1900 ms., D=72° C=83°, desde luego B=25.° y por tanto:

BC : *sen.*D : : DC : *sen.*B de donde BC : *sen.*72.° : : 1.900 : *sen.*25.°

$$Lg.\ BC = lg.\ 1900 + lg.\ sen.\ 72 - lg.\ sen.\ 25.°$$

$$Lg.\ BC = 3,278754 + \bar{1},978206 - \bar{1},625948 = 3,631012$$

$$BC = 4276 \text{ ms.}$$

En el triángulo ABC, conocemos CB, CA y C=43.°

Aplicando á su resolucion la 2.ª analogía de las obtenidas ya (42) resultará que: B—A=15°+12' y como B+A=137.° tendremos que: B=75°+36' y A=61°+24'

luego por tanto: *Sen.* C : AB : : *sen.* B : AC

es decir, que $Sen.\ 43.^o : AB :: sen.\ 75.^o{+}36 : 6655{,}4$
luego $Lg.AB{=}lg.\ 6655{,}4{+}lg.\ sen.\ 43.^o{-}lg.\ sen.\ 75.^o{+}36'$

$$Lg.\ AB{=}3{,}816573{+}\bar{1}{,}833783{-}\bar{1}{,}986137{=}3{,}664219$$

igual á 4016 metros, valor de la incógnita.

Areas de las superficies poligonales trigonométricamente.

* 45. Hemos visto que el área de un triángulo es igual á el producto de su base por la mitad de su altura, tratándose del triángulo ABC (fig. 196). $Ar.{=}AB{\times}\frac{CD}{2}$

pero $CD{=}b{\times}sen.\ A$ luego $Ar.\ triáng.{=}c.b{\times}\frac{sen.\ A}{2}$

lo cual enunciaremos diciendo: *El área trigonométrica de un triángulo es igual al producto de dos lados por la mitad del seno del ángulo que forman.* Verificándose que

$$c{:}b{::}sen.\ C{:}sen.\ B \quad \text{y siendo} \quad c{=}\frac{b\times sen.\ C}{sen.\ B},$$

sustituyendo su valor en la anterior, será:

$Ar.\ triang.{=}\frac{b^2{\times}sen.\ A{\times}sen.\ C}{2\ sen.\ B}$. lo que nos dice que *el área de un triángulo es tambien igual al cuadrado de uno de sus lados, multiplicado por los senos de sus dos ángulos adyacentes y partido todo por el duplo del seno del ángulo opuesto á dicho lado.*

Siendo un paralelógramo duplo en área á la de un triángulo de su misma base y altura, resultará que *el área de un paralelógramo es igual al producto de dos lados contíguos por el seno del ángulo que forman.*

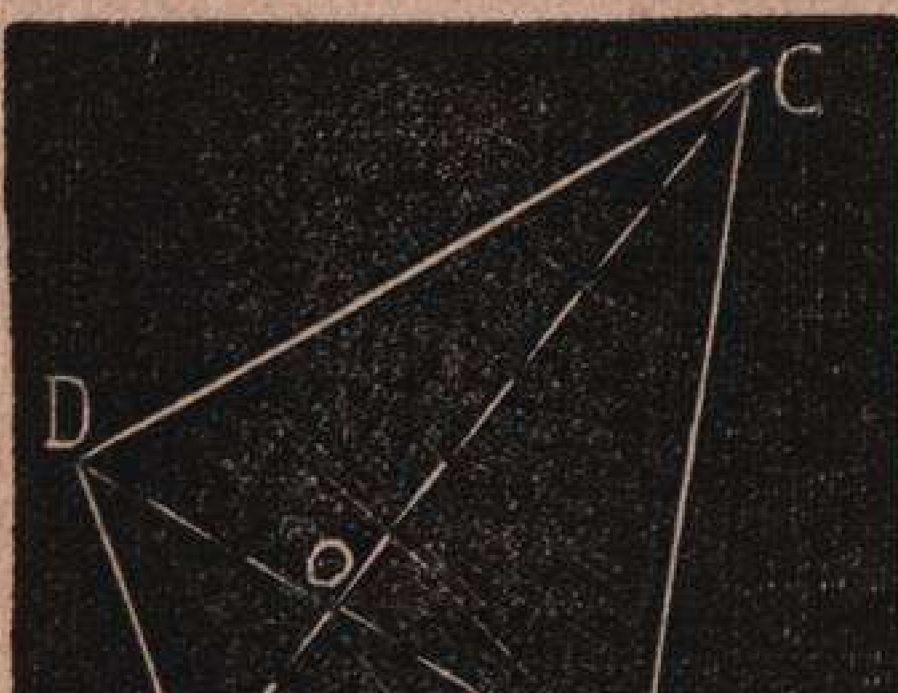


Fig. 200.

Para determinar el área de un cuadrilátero cualquiera, trazaremos en el mismo sus dos diagonales, quedando descompuesto en 4 triángulos, como se observa en la (fig. 200) en la que hemos dividido el cuadrilátero ABCD en cuatro triángulos, verificándose segun lo espuesto, que *área* $AOB = AO \times OB \times {}^1/_2$ *sen.* O

área $BOC = BO \times OC \times {}^1/_2$ *sen.* O

área $COD = CO \times OD \times {}^1/_2$ *sen.* O

área $DOA = DO \times OA \times {}^1/_2$ *sen.* O

(siendo $AO \times OB + BO \times OC + CO \times OD + DO \times OA = (AO + OC)(BO + DO)$) resultará sumando miembro á miembro las cuatro igualdades anteriores, que: *Area del cuadriláctero* $= AC \times DB \times {}^1/_2$ *sen.* O. *Es decir que el área de un cuadriláctero es igual producto de sus diagonales por la mitad del seno del ángulo que formen.*

Para determinar el área de un polígono regular, tendremos en cuenta que como este se puede descomponer en tantos triángulos como lados tiene; y como el área de cada uno de estos es igual al cuadrado de un lado por la mitad del seno del ángulo que forman, resultará que el *área de un polígono regular es igual á tantas veces como lados tenga el cuadrado del rádio del círculo que le circunscribe, multiplicado por la mitad del seno del ángulo que forman, el cual es conocido por la tabla del número 139—4.° de la Geometría plana.*

El área de un polígono irregular, será igual á la suma de las áreas de las superficies mas elementales en que se descomponga trazando diagonales.

EJERCICIOS CORRESPONDIENTES

Á LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

—Formar un cuadro en el que aparezcan las tres fórmulas trigonométricas generales; las 12 que resultan, de tres en tres, de conocer el Rádio y cada una de las líneas trigonométricas; y las 15 derivadas de aquellas, suponiendo el rádio igual á la unidad. (Total 30.)

—Restablecer el rádio en cualquiera de estas últimas.

—Hallar la expresion general de todos los arcos que tienen el mismo seno.

—Hallar la expresion general de todos los arcos que tienen un mismo coseno.

—Hallar la expresion general de todos los arcos que tienen la misma tangente.

—Hallar la expresion general de todos los arcos quo tienen la misma cotangente.

—Transformar en un producto la suma ó diferencia de los cosenos de tres arcos a, b y c, cuya suma es un cuadrante.

—Transformar en un producto la suma de las cotangentes de tres arcos a, b y c, cuya suma es un cuadrante.

—Demostrar que la diferencia entre un arco menor que un cuadrante y su tangente es mayor que el tercio del cubo del arco.

—Demostrar que en todo triángulo rectilíneo un lado cualquiera es igual á la suma de los productos de cada uno de los otros dos lados por el ángulo que forma con el primero.

—Resolver un triángulo conociendo un lado, su ángulo opuesto y la suma ó diferencia de los otros dos lados.

—Resolver un triángulo conociendo un lado, la suma ó diferencia de los otros dos y uno de los ángulos contiguos al lado dado.

—Resolver un triángulo, conociendo el perímetro y los tres ángulos.

—Resolver un triángulo, conociendo la base, la altura y la diferencia de los dos ángulos contiguos á la base.

—Resolver un triángulo, conociendo su área y los tres ángulos.

—Resolver un triángulo, conociendo sus tres alturas.

—Hallar el área de un triángulo, conociendo un lado y los dos ángulos adyacentes.

—Hallar el área de un triángulo, conociendo dos lados y el ángulo que forman.

—Hallar el área de un triángulo, conociendo sus tres lados.

—Hallar el área de un trapecio, dados sus cuatro lados.

INDICE GENERAL.

Páginas.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

FE DE ERRATAS.

Pag.	Linea.	DICE.	DEBE DECIR.
10	19	de un trazado	de su trazado
42	6	y teniendo	si tienen
46	2	una recta...	entre una recta...
80	21	(segun la 2.ª tésis del Teorema 85)	(segun el 1.er teorema del núm. 85)
80	30	(4.º del Teorema 85)	(3.º del teorema 85)
87	—7	ACD'	ECD'
87	—7	E'BC iguales BCD'	E'BC=BCD'
109	6	total de vértices	total de diagonales
110	En la tabla.	Eptágono (900° ó diez rectos) $120°+34'+17''$	Eptágono (900° ó diez rectos) $128°+34'+17''$
111	9	las proporcio-	las proposicio-
121	18	$=AD\times CD\times r$	$=AC\times CD\times r$
130	18	=lúnula CDANA+lúnula AEBMA	=lúnula CDAN+lúnula AEBM
163	14	si dos	si *representamos* dos
163	15	$c=\pi R^2$	$C=\pi R^2$
168	21	el perpendicular	el plano perpendicular
226	30	6, 5, 4, 3, etc.	3, 4, 5, 6, etc.
235	17	exágono	exágonos
235	33	arista serán	arista igual serán
289	14	*Tang. a' lang. arc.* TB= *Tang. a*	*Tang. a'=tang. arc.* TB=*—tang. a*
289	19	*cos. a' : sen. a' ::* R *: t-ang. a'*	*—cos. a' : sen. a' : :* R *: — tang. a'*
289	- 6	$(-sen.a')^2+(\ cos.a')^2=+R^2$	$(-sen.\ a')^2+(-cos.\ a')^2=+R^2$

Burillo

Matematicas

4