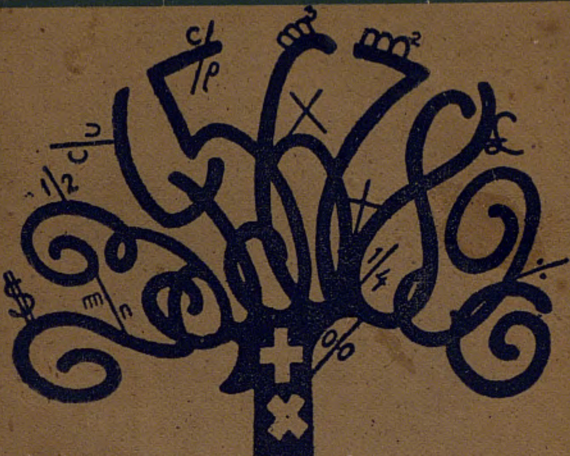

LO

DO

ADES

ATURAS

DOS PALABRAS

Son estas páginas un puñado de perlas, entresacadas, al azar, de las innumerables que atesora mi libro, "Flores Selectas de Aritmética", del cual, sin narcisismos, pero sí con legítima satisfacción, diré que grandes alabanzas fueron hechas por quienes lo leyeron, siendo estimado como una verdadera golosina, lo mismo en el terreno de lo útil que en el de lo curioso. Brevedad asombrosa, comprensión absoluta, claridad meridiana, en la solución de los cálculos más intrincados, lo definen.

Pídalo en librerías importantes, o, contra reembolso de 6 pesetas, a D. Francisco Franco, calle París, 109, 1.° Barcelona.

EL AUTOR

Adquiera el libro

«Flores Selectas de Aritmética»,

del cual son estas páginas

minúsculo retazo.

Pídalo en Librerías importantes, o, contra

reembolso de 6 ptas., a

D. Francisco Franco. - París, 109, 1.°

BARCELONA

ADICION

SUMA DE DECIMALES CON MENOR ERROR DE UN ORDEN. — Se desprecian en cada sumando los órdenes inferiores al diez veces menor que el dado, si los sumandos son menos de diez, y se efectúa la suma con las cifras restantes, reforzando en 1 el orden de la aproximación y prescindiendo de su inferior. Si los sumandos son más de 10 y menos de 100, los órdenes que se desprecien serán los cien veces menores que el dado. Ej.:

Hallar la suma, en menos de un céntimo, de

$$
\begin{array}{r}
8'456395 \\
+\ 4'56824 \\
+\ 2'253864 \\
\hline
15'277
\end{array}
$$

Res. 15'28

SUBSTRACCION

RESTA DE DECIMALES CON MENOR ERROR DE UN ORDEN.—Se desprecian los órdenes inferiores al dado y se efectúa la substracción de los demás. Ej.:

Hállese la diferencia, con menor error de un céntimo, de

$$\begin{array}{r} 84'2854 \\ -19'8439 \\ \hline \text{Res.}\quad 64'44 \end{array}$$

Esta diferencia es por defecto, ya que en el minuendo se ha despreciado más que en el substraendo. En caso contrario, sería por exceso.

SUBSTRACCION RAPIDA EN EL CALCULO DE DESCUENTOS. — Puede abreviarse la operación de restar en el cálculo de descuentos, adquirida práctica en el multiplicar, añadiendo a la derecha de la cantidad, objeto del descuento, uno, dos, tres, etc., puntos, según que el descuento sea por diez, ciento, mil, etc., y colocando la primera cifra del resultado debajo del último punto y efectuando la resta directamente. Ej.:

Hemos de pagar un recibo de 14,685'75 pts., del que se nos descuenta el 9 por 100. ¿Qué cantidad se ha de abonar?

$$\begin{array}{rr|l} & 14685'75 & .. \\ \times\, 9 & -1321'71 & 75 \\ \hline \text{Liquido} & 13364'04 & \text{pts.} \end{array}$$

MULTIPLICACION

PRODUCTOS BINARIOS DE LOS 20 PRIMEROS NUMEROS. — Para formarlos, se añaden a un factor las unidades del otro, se multiplica por 10 el resultado y al producto se añade el de las unidades de ambos.

Ej.: $17 \times 12 = (17 + 2) \times 10 + (7 \times 2) = 204.$

CURIOSA OBSERVACION. — Para multiplicar por 11 un número de dos cifras cuya suma de valores absolutos sea igual o menor que 9, se forma el producto con estas dos cifras y la suma de las mismas entre ellas. Si la suma de los valores de las cifras es superior a 9, en el producto resulta la cifra de las unidades de esta suma, entre las otras dos, aumentada la primera de la izquierda en 1.

Ejemplos:

$45 \times 11 = 495$; $26 \times 11 = 286$; $89 \times 11 = 979.$

CUANDO EL MULTIPLICADOR ES DE DOS CIFRAS Y UNA DE ELLAS LA UNIDAD. — Puede abreviarse la multiplicación del siguiente modo: Si la unidad es la primera cifra de la izquierda, se multiplica sólo la otra, añadiendo, además de la llevada, la cifra inmediata de la derecha del multiplicando. Acabada la multiplicación, se sumará a la primera cifra del multiplicando la llevada de haber multiplicado la misma.

El primer producto es igual, pues, en menos de 1 céntimo, a 152'83, y el segundo a 27'58.

Si la suma de los valores absolutos de las cifras del multiplicador fuese superior a 100, el error por defecto podría ser igual o superior a 1 céntimo; pero habiendo añadido este céntimo, sería menester que la suma de valores absolutos fuese superior a 200 para que pudiera el defecto del producto se~ igual o superior a 1 centésima.

PARA MULTIPLICAR DE UN GOLPE. — Llamando, de derecha a izquierda, a las cifras del multiplicando a, b, c, d, etc., y a las del multiplicador a', b', c', d', etc., se obtiene así el producto.

1.ª cifra: a. a' (y se escriben las unidades).

2.ª cifra: a. b' + b. a' + las decenas que se llevan.

3.ª cifra: c. a' + a. c' + b. b' + las decenas que se llevan.

4.ª cifra: d. a' + a. d' + c. b' + b. c' + las decenas que se llevan.

5.ª cifra: e. a' + a. e' + d. b' + b. d' + c. c' + las decenas que se llevan.

Si el orden más elevado del multiplicando fuese e, tendríamos:

6.ª cifra: e. b' + b. e' + d. c' +c. d' + la llevada.

7.ª cifra: e. c' + c. e' + d. d' + la llevada.

8.ª cifra: e. d' + d. e' + la llevada.

9.ª cifra: e. e' + la llevada.

10.ª cifra: la llevada.

Ejemplo:

8673	d c b a
× 9235	8 6 7 3
	9 2 3 5
80095155	d' c' b' a'

Como se ve, una vez multiplicadas las unidades de ambos factores, van formándose los productos en cruz de decenas, centenas, etc., por unidades, y los productos en cruz de las cifras intermedias que van siendo contiguas, acabando por el producto vertical de las cifras que ocupan el medio, si es impar el número de las que hay entre el orden superior que se multiplica y las unidades. A la suma de productos obtenida en cada caso, se agregan las decenas de la suma anterior.

Este procedimiento, que tiene aplicación universal, resulta empero difícil y complicado, por la enorme retención que exige, cuando los factores son de muchas cifras. No obstante, adquirida práctica, rinde ventajas en infinidad de casos de uso frecuente.

MULTIPLICACION SIN LLEVADAS. — Original y curiosa resulta la multiplicación, por el siguiente método, siendo a la vez, en muchos casos, de alto valor estenorítmico.

Para multiplicar dos cantidades de igual número de cifras:

a) Se suman los productos en cruz de las cifras extremas y se escribe esta suma.

b) Se efectúan los productos cruzados de las primeras cifras de la derecha por las segundas de la izquierda y se escribe la suma debajo de la anterior, desplazada un lugar a la derecha. A la izquierda se coloca la de los productos cruzados de las segundas cifras de la derecha por las primeras de la izquierda.

c) Se efectúan los productos en cruz de las primeras cifras de la derecha por las terceras de la izquierda, escribiendo su suma debajo de la anterior columna, corrida un lugar a la derecha. A la izquierda se van colocando las sumas de los productos cruzados de las segundas cifras de la derecha por las segundas de la izquierda, de las terceras de la derecha por las primeras de la izquierda.

d) Se efectúan los productos en cruz de las primeras notas de la derecha por las cuartas de la izquierda... y así sucesivamente.

Si las cifras de la izquierda que corresponde multiplicar por las primeras de la derecha son sus contiguas, se siguen efectuando de derecha a izquierda todos los productos cruzados de cada dos pares de cifras contiguas, escribiendo su suma en la forma indicada y dando a cada una dos lugares, para lo cual, si sólo tuvieren una nota, se pondrá un cero a su izquierda, y si tuvieren tres, se agregará la centena a la suma siguiente.

e) Por último, se efectúan, comenzando por la derecha, los productos verticales, que se escriben en la forma que se hizo con las sumas de productos cruzados y han de ocupar cada uno dos lugares, menos el último, si tiene centena.

La suma de las columnas obtenidas arrojará el producto total.

Para saber por dónde se va operando, téngase presente que, si hay obtenidas, por ejemplo, tres columnas, se ha operado ya con las tres primeras cifras de la derecha y de la izquierda.

Este procedimiento es aplicable a todos los casos, como se verá en los ejemplos y, por lo tanto, al de que los factores no sean del mismo número de cifras, bastando suponer ceros en los lugares vacantes.

Si los factores están formados por dos cifras significativas separadas por igual números de ceros, se escribirá en medio la suma de los productos en cruz, y entre esta suma (que se ha de suponer de dos cifras) y los productos verticales de las cifras extremas, tantos ceros, menos uno, como haya en un factor. Si la suma escrita en medio tuviere tres cifras, se pondrá un cero menos a la izquierda.

Ejemplos:

1.°		2.°		3.°	
	48		23		98
	×		×		×
	59		0'42		98
	76		16		144
	2072		806		8164
	2832		9'66		9604

En el primer ejemplo, v. gr., se dirá: 36 (4 × 9), más 40 (5 × 8), son 76, que escribo; 72, producto vertical de las cifras de la derecha, lo escribo corrido un lugar a la derecha, debajo de 76, y a su izquierda 20, producto vertical de las cifras de la izquierda.

Se hace preciso para esta manera de cálculo conocer bien la tabla pitagórica y adquirir mucha práctica en la suma mental de cantidades de dos cifras, conseguido lo cual, se ahorra, en la generalidad de los casos, la mitad del tiempo empleado por método ordinario.

Sube de punto la ligereza con que se obtiene el resultado, cuando se trata del producto de un número por sí mismo, como sucede en las potencias, pues entonces los productos cruzados son idénticos y las sumas mentales intuitivas.

Ejemplos con números de más cifras:

4.°

485
638

62
6079
242440

309430

5.°

8673
9235

67
8736
703244
72122115

80095155

6.°

752436
547253

51
5039
343748
59263124
5343322639
352014081518

411772858308

7.°

89·354
725

40
1645
561843
634133
211020

64781·650

8.°

409
706

288754

9.°

70004
80009

5600950036

10.°

7000000000000008
6000000000000009

42000000000000111000000000000072

Los últimos ejemplos, de ceros intermedios, muestran de una manera singular las enormes ventajas, que supone este procedimiento sobre el ordinario.

CURIOSIDAD. — Para multiplicar dos números de una misma decena, cuando las unidades suman 10, se multiplica la decena común por su número inmediato superior y a la derecha de este producto se escribe el de las unidades. Ejemplos:

$34 \times 36 = 1224$. A la derecha de 3×4, hemos colocado 4×6.

$92 \times 98 = 9016$. A la derecha de 9 (decena común) $\times$ 10 (número inmediato superior) hemos colocado el producto de las unidades 2×8.

CURIOSIDAD. — Producto de un número de dos cifras por 99. A la derecha del número, disminuido en 1, se escribe lo que le falta a dicho número para valer 100. Ejemplos:

$85 \times 99 = 8415$. Hemos dicho: $85 - 1 = 84$, a cuya derecha se ha puesto 15, que es lo que falta a 85 para 100.

$58 \times 99 = 5742$.

Un número de tres cifras por 99. Se restan a dicho número sus centenas, más 1, y a la derecha del resto se coloca lo que falta para 100 al número formado por las decenas y unidades.

Ejemplos:

$285 \times 99 = 28215$. Hemos dicho: $285 - 3$ (o sea, 2 centenas que tiene el número, más 1)

= 282; y a la derecha hemos puesto la diferencia entre 85 y 100, que es 15.

POTENCIACION

Da resultados admirables, en esta operación, la multiplicación sin llevadas que anteriormente hemos tratado.

CASO ORIGINAL. — Para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termine en 5, se multiplica el número de las decenas por su inmediato superior y, a la derecha, se escribe 25, número en que siempre acaba el cuadrado de las cantidades terminadas en 5. Así:

$65^2 = 4225$. Hemos dicho: 6 (decenas) $\times$ 7 (número inmediato superior) $= 42$, a cuya derecha ponemos 25.

DIVISION

COCIENTE ABREVIADO DE DOS NUMEROS EN MENOS DE UNA UNIDAD DE ORDEN DADO. — Se toman para divisor, de la izquierda del mismo, tantas cifras, más dos, como haya de tener el cociente, despreciando las otras, y de la izquierda del dividendo tantas cifras como tenga el divisor adoptado, o una más, si el número que resulta es menor que el divisor, despreciando también las demás cifras, o supliendo con ceros las que falten, y se efectúa la división del modo ordinario. El primer resto es el segundo dividendo, siendo el divisor el mismo, despreciada su última cifra; el segundo resto es el tercer dividendo, etc.

Si algún dividendo parcial fuese diez veces mayor que su divisor respectivo, se termina la operación, reforzando en 1 la última cifra del cociente y poniendo a la derecha tantos ceros como cifras falten. El cociente expresará unidades del orden deseado, con menor error de 1.

Ejemplos:

Hállense los cocientes 168'598764835: 3'1415926535...., y 37: 1'7348979865, con menor error de 0'01.

1.°

168'598764835	3'1415926535...	
11 5192	53'66	Cociente
2 0947		
2101		
217		

2.°

370000	1'7348979865	
23022	21'32	Cociente
5674		
472		
126		

En el primer ejemplo, por ser cuatro las cifras del cociente, tomo para divisor, de la izquierda de éste, cuatro más dos, o sean seis cifras, y de la izquierda del dividendo, siete, por ser el número que forman las seis primeras menor que el divisor. En el segundo ejemplo, suplo con cuatro ceros las cifras que faltan del dividendo.

RADICACION

He aquí un ingenioso método, admirable por lo sencillo y por lo breve.

Para la raíz cuadrada

Se dispone la operación en la forma ordinaria; se divide el radicando en períodos de dos cifras, comenzando por la derecha, se extrae la raíz cuadrada de cada período, a partir de la izquierda, colocándolas una a continuación de otra dentro de la galera. Se divide el radicando por el número que forman las raíces, se suma el cociente con el divisor, se halla la mitad de esta suma y tendremos la raíz aproximada (alguna vez la exacta). Mas, para estar seguros, dividiremos el radicando por la mitad hallada, cuando ésta no sea igual al divisor, y la mitad de la suma del nuevo cociente con el segundo divisor será la raíz exacta, cuando sea exacta la segunda división y su cociente y divisor iguales, o la raíz entera, en menos de una unidad, en caso contrario.

Cuando el residuo de la segunda división sea la mitad del divisor, aproximadamente, se continuará la división hasta obtener dos o tres decimales.

Ejemplos:

$\sqrt{18,49}$	47
439	39
16	

$1/2 \times 86 = 43$, raíz aproximada.

```
1849    | 43
129     |----
        | 43
00      1/2×86=43, raíz exacta.
```

Hemos dicho: raíz cuadrada de 18 es 4, y de 49, 7; en 47 tenemos el primer divisor que, sumado con el cociente 39, da 86, cuya mitad 43 será el segundo divisor que, sumado con el cociente, da 86, cuya mitad es la raíz.

Huelga decir que, siendo iguales divisor y cociente, es innecesaria la suma y obtención de la mitad, pues el mismo cociente es la mitad de la suma.

```
√ 41.37          | 66
   177           |----
    45           | 62
            1/2×128=64
```

```
41.37       | 64
 297        |------
  410       | 64,64
   260   1/2×128'64=64'32
     4
```

Hemos dicho: raíz cuadrada de 41,6 y de 37,6; en 66 tenemos el primer divisor que, sumado con su cociente, 62, da 128, cuya mitad 64 será el segundo divisor, y la mitad de la suma de éste con su cociente (que, por ser iguales, es el mismo cociente) **será la raíz buscada que hemos** aproximado hasta los céntimos.

Para la raíz cúbica

Se dispone la operación en la forma ordinaria; se divide el radicando en períodos de tres cifras, comenzando por la derecha, y se extrae la raíz cúbica de cada período, a partir de la izquierda, colocándolas una a continuación de otra dentro de la galera. Se divide el radicando por el número que forman las raíces, y el cociente que resulte se vuelve a dividir por el mismo divisor. Se suma luego el cociente último con el duplo del divisor y se halla el tercio de la suma. Se hace dos veces más la misma operación, cambiando el primitivo divisor por el tercio obtenido. Se suma de nuevo el cociente último con el duplo del divisor último y el tercio de esta suma será la raíz buscada.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{4.170.208}$	155	
1070	26904	155
1402	1140	173
708	554	
88	89	

Suma del último cociente con el duplo del divisor:

$155 \times 2 = 310 + 173 = 483 : 3 = 161$, segundo divisor

4170208	161	
950		
1452	25901	161
308	980	
147	141	160, segundo cociente

Suma del último cociente con el duplo del divisor: $161 \times 2 = 322 + 160 = 482$, cuyo tercio, 160, es el divisor.

4170208	160	
970	26063	160
1020	1006	
608	463	162, tercer cociente.
128	143	

Este tercer cociente, sumado con el duplo del divisor 160, nos da 482, cuyo tercio 160 es la raíz buscada.

GRANOS DE ORO

I

SI AL PRODUCTO DE DOS NUMEROS IMPARES CONSECUTIVOS SE SUMA 1 UNIDAD, SE OBTIENE UN CUADRADO PERFECTO. — La razón es porque, añadiendo 1 unidad al menor y quitándola al mayor de dichos factores, se igualan y su producto es su cuadrado. Pero esto equivale a sumar al producto de dichos números 1 unidad (véase mi "Flores Selectas de Aritmética", en Granos de Oro, VI); luego es cierto el enunciado.

Así: $(3 \times 5) + 1 = 4 \times 4 = 16$, cuadrado

II

SIENDO PROPORCIONAL EL PRECIO DE UN DIAMANTE AL CUADRADO DE SU PESO, DIVIDIDO EN DOS TROZOS, HABRA DEPRECIACION, Y ESTA ES LA MAXIMA CUANDO LOS TROZOS SEAN IGUALES.

En efecto; el precio total del diamante sería la suma de los precios de cada trozo y el cuadrado del peso total es mayor que la suma de los cuadrados de los pesos parciales, pues la suma de los cuadrados de dos números es menor que el cuadrado de la suma de los mismos. Sean éstos a y b; $a^2 + b^2 < (a + b)^2$, pues el segundo miembro, desarrollado, da $a^2 + b^2 + 2ab$, y, por lo tanto, excede al primero en 2ab y existe depreciación. Para demostrar que ésta es la máxima cuando los dos trozos sean iguales, supongamos que el peso sean, por ejemplo, 8 g. $= 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2 = 7 + 1 = 8 + 0$, y veamos que $4^2 + 4^2 < 5^2 + 3^2 < 6^2 + 2^2 < 7^2 + 1^2 < 8^2$, pues al añadir una unidad a uno y quitarla a otro de los sumandos, la suma de los cuadrados de ambos tiende o se aproxima al cuadrado de la suma de los mismos, y, en consecuencia, se va haciendo mayor, hasta llegar, en el ejemplo anterior, a 8^2.

III

TODA CANTIDAD, RESTADA DE SU INVERTIDA, DA 9 O MULTIPLO DE 9.

En efecto; al invertir una cantidad (véase mi "Flores Selectas de Aritmética", en Granos de Oro, XXI), ésta aumenta o disminuye en un múltiplo de 9; luego la diferencia entre la cantidad y su invertida es ese múltiplo de 9.

Con esto es sencillo resolver la bonita cuestión siguiente:

Pon la cantidad que quieras,
réstala de su invertida,
tacha a tu gusto y medida
una cifra de la resta.
Si me dices las restantes
y está bien hecha la cuenta,
te diré seguidamente
la que tú tachaste antes.

Ejemplo: sea la cantidad 328, cuya invertida es 823. Tendremos: 823 — 328 = 495. Si tachamos el 4, nos queda 95, cuyas cifras sumadas dan 14, y 1 + 4 = 5; luego 9 — 5 = 4, es la cifra tachada.

PROBLEMAS INGENIOSOS CON SOLUCIONES RAZONADAS

LA BOTELLA Y EL TAPON. — Una botella, con su tapón, cuesta 1'10 ptas. y la botella vale 1 pta. más que el tapón. ¿Qué valen cada uno?

Llamando x al valor del tapón y fijándonos en que el de la botella es $x + 1$ pta., se tiene:

$$2x + 1 = 1'10 \text{ ptas.}$$

Restando de ambos miembros de esta igualdad 1 pta., resulta:

$$2x = 0'10 \text{ ptas. y}$$

$$x = \frac{0'10}{2} \text{ ptas.} = 0'05 \text{ ptas.}$$

Respuesta: el tapón vale 0'05 ptas.; la botella, 1'05 ptas.

LAS AGUJAS DEL RELOJ. — ¿A qué hora, por primera vez, después de las doce, se superponen las agujas de un reloj?

A partir de las 12, podemos imaginar que la aguja mayor, con su mayor velocidad, marcha al encuentro de la menor. La distancia que las separa es de 360° en el momento de las 12, y el exceso de velocidad de la aguja mayor sobre la menor es de 360° — 30° = 330° por hora. Este exceso ha de anular la distancia de 360° que a las 12 separa las agujas, en lo cual tardará tantas horas como veces dicho exceso esté contenido en 360°.

Se trata, pues, de la siguiente división:

```
 360   | 330
  30   |-------------
× 60   | 1 h. 5′ 27″ 3/11
-----
1800
 150
× 60
-----
 9000
 2400
   90
```

Res.: A la 1, 5′, 27″ 3/11.

LA CESTA DE HUEVOS. — Cierta cortijera lleva un cesto de huevos al mercado. Vende la mitad y medio huevo; después la mitad de los que le quedan y otro medio huevo, repitiendo cuatro veces la misma operación, y se le acaban. ¿Cuántos huevos llevaba?

No existe ningún número en la serie natural cuya mitad más media unidad entera dé el número, más que el uno. Luego, si vendiendo la mitad más medio, en la cuarta operación, se le acabaron, fué 1 huevo la cantidad vendida. Como cada vez vende la mitad más medio de los que le quedan, los con que opera cada vez son mitad menos medio de la vez anterior. Luego 1 es la mitad menos medio y 1 ½ la mitad de la tercera operación. Duplicando 1 ½, tendremos el número de huevos con que opera la tercera vez. Añadiendo ½ y duplicando nuevamente, se tendrán los huevos de la segunda operación, y añadiendo, por fin, ½ y duplicando, se tiene el resultado. Así:

$$[(1\ ½ \times 2 + ½) \times 2 + ½\ ] \times 2 = 30/2 =$$
15 huevos.

Comprobación: En la primera operación vende la mitad más medio de 15, o sean 8 huevos; en la segunda, la mitad más medio de 7 que le quedan, o sean 4; en la tercera, la mitad más medio de 3 que le sobran, o sean 2; y en la cuarta, la ½ más medio de 1 que le queda y se le acaban.

CIEN ANIMALES POR CIEN DUROS. — Un ganadero compró en un mercado 100 animales, entre vacas, carneros y pollos, por la cantidad de 560 pesetas. Pagó las vacas a 25 ptas., los carneros a duro y los pollos a real. ¿Cuántos compró de cada especie?

500 ptas. × 4 = 2.000 rs.; 2.000 rs.: 100 (número de animales) = 20 rs., **precio medio.**

Conócese, pues, el precio medio y el de los distintos animales que han de integrar el conjunto 100, debiendo hallar el número de cada clase. Se trata, por consiguiente, de un problema de aligación alternada. Y como una de las tres clases de animales tiene por precio el medio, interesa averiguar únicamente el número de las otras dos clases. Así:

$$\begin{array}{r|l} 100 & \dots .\ 19 \\ & \left.\right\} 20 \\ 1 & \dots .\ 80 \end{array}$$

Rdo.: 19 vacas, 80 pollos y 100 — (19 + 80) = **100 — 99 = 1 cordero.**

IM
PARLAMENTO, 52
BARCELONA