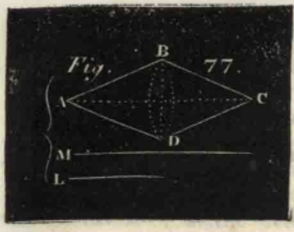
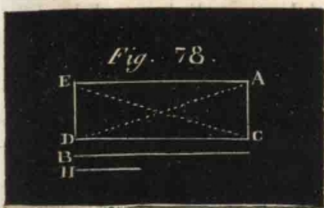
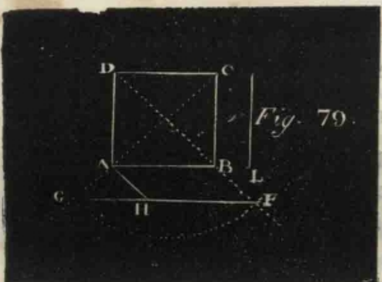


El *rombo* se diferencia del anterior, en que tiene iguales todos sus lados; como ABCD (fig. 77).



El *rectángulo* tiene los lados consecutivos desiguales, pero iguales todos sus ángulos; tal el ACDE (fig. 78).



El *cuadrado* tiene iguales sus ángulos y sus lados; como ABCD (fig. 79).

3. *La suma de los ángulos de un cuadrilátero, es igual á 4 rectos.*

Para convencernos de esta verdad tirarémos en el cuadrilátero una diagonal; y de este modo quedará dividido en dos triángulos; pero la suma de los ángulos de estos triángulos, identica á la suma de los ángulos del cuadrilátero, es igual á 4 rectos: luego, etc.

4. *La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos iguales.*

Esta igualdad se conocerá tan pronto como reparemos en que los triángulos tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados.

5. *Construir un trapecio simétrico, conocidas la base mayor B la altura H, y la longitud L de los lados no paralelos*, (fig. 76).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; levantarémos sobre esta recta una perpendicular EF, igual á la altura H; por el punto F tirarémos una paralela á CD; desde los puntos C, y D, con un rádio igual á L, describiremos dos arcos, cada uno de los cuales cortará en dos puntos á esta paralela; uniendo ahora á los extremos de la base CD las intersecciones A, H, mas próximas al punto F, tendrémos formado el trapecio simétrico AHCD.

6. *Construir un romboide conociendo la base B, la altura H y la longitud* L *de los lados que encuentran á la base* (fig. 76).

Trazarémos una recta CD, igual á la base B; en un punto cualquiera E levantarémos una perpendicular EF igual á la H. Por el punto F tiraremos una paralela á CD; trazaremos despues desde los puntos C, D, con un rádio L, dos arcos, cada uno de los cuales cortará á la paralela en dos puntos; finalmente uniendo á los C, D, las intersecciones A,B, ó H, I, tendrémos los dos paralelogramos ABCD, CDIH que satisfarán á las condiciones del problema.

7. *Trazar un rombo conociendo un lado L y una diagonal M,* (fig. 77).

Tiraremos una recta AC igual á M; desde los puntos A, C, con un rádio L, trazarémos dos arcos que se cortarán en dos puntos B, D; dirigiendo ahora los cuatro rádios, determinados por las intersecciones, nos resultará el rombo ABCD.

Esta figura tiene muchas aplicaciones en las artes, los dibujos de las telas, la ebanisteria etc. nos ofrece este ejemplo á cada paso.

8. *Formar un rectángulo dada la base B y la altura H,* (fig. 78).

Trazaremos una recta CD, igual á la base B; en el punto C ó en el D, levantaremos una perpendicular DE igual á H; por el punto E tirarémos una paralela á CD. y por C otra paralela á DE, la interseccion A de las paralelas determinará el rectángulo ACDE.

Son muy numerosas las aplicaciones del rectángulo: el sítio de un edificio es ordinariamente rectangular; en la agrimensura ocurre con frecuencia medir ó construir rectángulos.

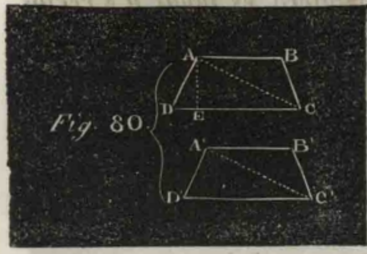


Fig. 80.

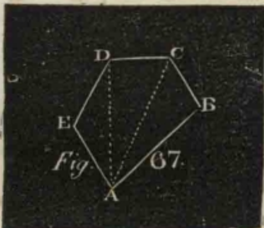
9. *Construir un cuadilátero igual á otro dado* ABCD (fig. 80).

Para esta construccion no hay mas que tirar la diagonal AC, y formar sobre una recta A′C′=AC, dos triángulos A′B′C′, A′C′D′. respectivamente iguales á los triángulos ABC, ACD.

§. V. *De los poligonos de cualquier número de lados,—De los poligonos regulares inscritos y circunscritos.*

1. La suma de los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos; determinar el valor de cada uno de los ángulos en el polígono regular.—2. La suma de los ángulos exteriores de un polígono, vale 4 rectos.—3. Que entendémos por centro del polígono regular? Qué es rádio, apotema y ángulo del centro?—4. Cómo se determina el ángulo del centro?—5. Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.—6. Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados. —7. Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados.—8. Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados.-9. El lado del hexágono regular es igual á su rádio.—10 Inscribir el hexágono regular; la circunferencia vale mas de tres diámetros; inscribir el triángulo equilátero.—11. Inscribir un cuadrado.—12. Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro: la circunferencia vale menos de cuatro diámetros.—13. Determinar la relacion de la circunferencia con el diámetro: relacion hallada por Arquimedes: relacion de Mecio.

1. *La suma de los angulos de un polígono cualquiera* ABCDE (fig. 67). *vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*



Para convencernos de esta verdad, desde un mismo vértice A, dirigirémos diagonales á los demas vértices; estas diagonales dividirán el polígono en tantos triángulos, como lados tiene menos dos; luego la suma de los ángulos de estos triángulos será tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos; pero esta suma es idéntica á la de los ángulos del polígono; luego etc.

Si se nos pide, p. ej., el valor de los ángulos de un polígono de 20 lados, quedará determinado de este modo: valor:$=(20-2)\times 2$ rectos$=20\times 2$ rectos-2×2 rectos $=40$ rectos -4 rectos. Cuyo resultado nos dice que para determinar el valor de los ángulos de un polígono, duplicarémos el número de sus lados, de este producto restarémos 4 rectos; y la diferencia que resulte, expresará el número de ángulos rectos, que valen los del polígono.

Corolario. El teorema precedente nos conduce á la determinacion de cada uno de los ángulos en el polígono regular. Este polígono, como ya sabemos, tiene todos sus ángulos iguales; de consiguiente dividiendo el valor de todos sus ángulos por su número, obtendrémos el valor de cada uno; pero el número de ángulos es igual al de los lados; podemos pues dividir por el número de lados. Si queremos, p. ej., hallar el ángulo del decágono regular dirémos: ángulo$=\dfrac{20R-4R}{10}=\dfrac{16R}{10}=1{,}6$ de R,$=144.^{\circ}$

2. *Si prolongamos los lados del polígono* **ABCDE**, *la suma de los ángulos exteriores que resultan, es igual á 4 rectos.* (fig. X).

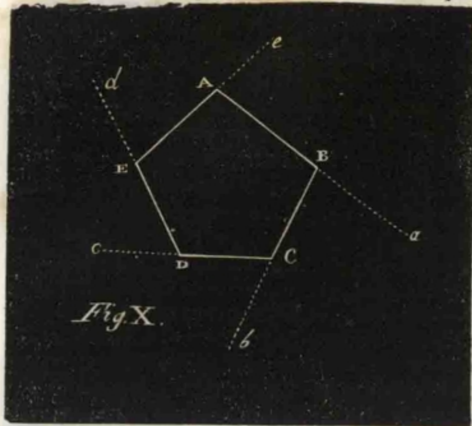


Fig. X.

En efecto, $eAB+BAE=2R$
$aBC+CBA=2R$
$bCD+DCB=2R$
. . . . ;

Donde vemos claramente que la suma de los ángulos interiores y exteriores del polígono vale tantas veces dos rectos, como lados tiene el polígono. Asi pues, la suma total excede á la de los ángulos interiores en 4 rectos; luego la suma de los exteriores será igual á 4 rectos.

3. Llámase *centro* de un polígono regular inscrito **ABCDE** (fig. 84), el centro mismo O del círculo.

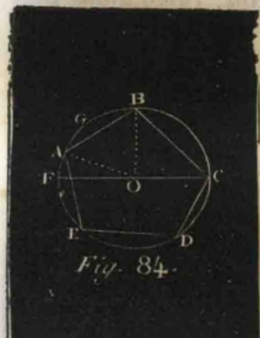


Fig. 84.

Entendemos por *rádio* del polígono regular el rádio del círculo circunscrito; y se dice *apotema* la distancia del centro á cualquiera de los lados, ó sea el rádio del círculo inscrito. De donde se infiere que en el polígono regular son iguales sus rádios y sus apotemas.

Se llama *ángulo del centro* el ángulo AOB, formado por dos rádios AO, OB, dirigidos á dos vertices contiguos.

4. Si consideramos que todos los triángulos formados por los rádios y lados del polígono, son iguales, como lo manifiesta la igualdad respectiva de los lados de este triángulo, conocerémos que todos los ángulos del centro son iguales entre sí. Luego para determinar el ángulo del centro, dividirémos por el número de lados del polígono los 4 rectos ó 360.°, valor de todos los angulos que al rededor de un punto se pueden formar.

Si queremos p. ej. hallar el ángulo del centro en el pentágono regular procederémos del modo siguiente: ángulo del centro$=\frac{360.°}{5}=72.°$: este ángulo pues, tendrá por medida el arco AGB, que será la quinta parte de la circunferencia.

5. *Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir al círculo.*

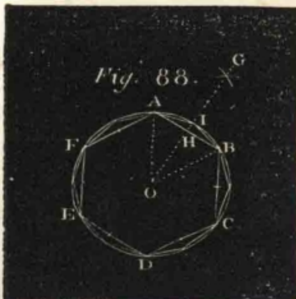
1.° Porque en el polígono regular son iguales los rádios; luego si con el radio del polígono trazamos una circunferencia, esta circunferencia pasará por todos los vértices del polígono.

2.° Los apotemas son iguales; luego si con el apotema describimos una circunferencia, esta será tangente á todos los lados del polígono regular.

6. *Inscribir un polígono regular de cualquier número de lados.*

Fórmese el ángulo del centro; descríbase la cuerda de su arco; esta cuerda será el lado del polígono que nos proponemos inscribir.

7. *Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados* (fig. 88).



Divídase el arco correspondiente tal como el AIB, en dos arcos iguales AI, IB; desde el punto I tírense las cuerdas IA, IB; cada una de estas cuerdas será el lado del polígono pedido.

8. *Dado un polígono regular inscrito, circunscribir otro de igual número de lados,*

Por todos los vértices del polígono inscrito tirarémos tangentes á la circunferencia; estas tangentes determinarán el polígono que queremos circunscribir.

9. *El lado del hexágono regular es igual á su rádio* (fig. 88).

Formarémos el triángulo AOB, el cual no puede menos de ser equiángular, como resulta de las consideraciones siguientes. El ángulo del centro $AOB=\frac{4}{6}$ de recto$=\frac{2}{3}=60.°$; luego la suma de los otros dos ángulos A y B valdrá 120.° ; pero estos dos ángulos son iguales, por ser iguales los lados AO, BO; luego cada uno de estos ángulos valdrá la mitad de 120.°, ó sea 60.° Asi pues, este triángulo es equiangular y por consiguiente equilátero. Luego $AB=AO=BO$.

10. *Inscribir el hexágono regular* (fig. 88).

Tómese el rádio OA, y desde el punto A lo colocarémos seis veces sobre la circunferencia; uniendo los seis puntos asi determinados, obtendrémos el hexágono regular ABCDEF, cuyo perímetro, por consiguiente, sera igual á seis rádios ó tres diámetros del círculo circunscrito.

1.° Corolario. De donde se infiere que, siendo la circunferencia mayor que el polígono inscrito *toda circunferencia será mayor que tres diámetros.*

2.° Para inscribir un triángulo equilateral podemos hacer la construccion siguiente.

Trácese el diámetro AB (fig. 85), y desde el punto B, con una abertura de compas igual al rádio, descríbase un arco que corte la circunferencia en los puntos C, D; la línea DC será el lado del triángulo equilátero que nos proponemos inscribir.

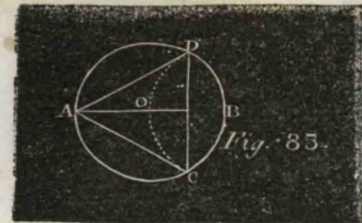


Fig. 85.

11. *Inscribir un cuadrado.*

Tirénse los diámetros AB, CD perpendiculares entre sí; despues, por medio de las rectas DB, DA, CB, CA, únanse los cuatro puntos A, C, B, D; quedará de este modo inscrito el cuadrado pedido.

12. *Dado un cuadrado inscrito circunscribir otro cuadrado.*

Sea el cuadrado ACBD (fi. 86): desde los puntos B y D, con un rádio cualquiera, mayor que la mitad de BD, trazarémos dos arcos que se corten en F; uniendo este punto con el centro O, la línea FO determinará el punto G; hágase lo mismo con los demas puntos tomados dos á dos; tirando ahora cuatro tangentes á la circunfencia por los puntos determinados de este modo, tendrémos el cuadrado circunscrito PERS.

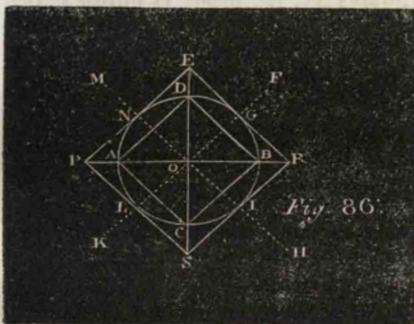


Fig. 86.

A primera vista se percibe que el perímetro de este cuadrado es igual á cuatro diámetros.

De aqui resulta que, siendo el polígono circunscrito mayor que la circunferencia inscrita, *el valor de esta no llegará á cuatro diámetros.*

13. *La determinacion del perímetro del círculo consiste en hallar una línea recta, igual en longitud á la circunferencia, para compararla con el rádio ó con el diámetro.*

Para resolver este problema no tenemos otros medios que los de aproximacion; aproximacion que podemos llevar hasta tal punto que equivalga á la exactitud.

Supongamos, inscrito uno, y circunscrito otro, dos polígonos regulares de un número indefinido de lados, p. ej. de 32768 lados, no cometerémos un error muy grande, si tomamos uno de estos polígonos por el círculo. En este caso el perímetro se habrá convertido en la circunferencia, y el apotegma en el rádio.

El polígono de 32768 lados inscrito á un círculo cuyo rádio es un pié, tiene un perímetro representado por 6,2831852. La relacion de este número con el diámetro que vale dos rádios, será 3,1415926. Asi pues, la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro está expresada por el número

3,1415926, número que no difiere del verdadero en una diezmillonésima; es decir que la circunferencia contiene la diezmillonésima parte del diámetro, mas de 31415926, veces y menos de 31415927 veces.

Esta relacion se designa generalmente en los tratados de Geometría con la letra π del alfabeto griego.

Como la relacion de la circunferencia con el diámetro es de un uso tan frecuente, en lugar del número 3,1415926, poco accesible á la memoria, se suele tomar la razon menos exacta, pero mas sencilla, 22: 7. Este número, convertido en decimales, produce la fraccion 3,142 etc. y conviene con el anterior 3,1415 etc. hasta centésimas inclusive. Bastarà, pues, en los casos ordinarios tomar para circunferencia de una figura circular 3 veces el diámetro mas un $\frac{1}{7}$. El descubrimiento de esta relacion se debe á Arquímedes.

La relacion encontrada por Mecio es mas aproximada que la de Arquímedes, y al mismo tiempo muy facil de conservar en la memoria. Esta razon está expresada por el número $\frac{355}{113}$ que muy pronto reproduciremos, si retenemos en la memoria el número 113355, que resulta del conjunto de las cifras del denominador y del numerador.

§. VI. *De las líneas proporcionales y de los polígonos semejantes.*

1. Razon de dos lineas.–2. Medida comun de dos lineas, y como se determina su relacion.–3. Qué son lineas comensurables é incomensurables.–4. Cuándo se dicen proporcionales cuatro lineas?–5. Qué son triángulos semejantes? Qué son polígonos semejantes?–Qué son lineas homólogas?–6. Si dos rectas son cortadas por paralelas, y los segmentos de la una son iguales entre si, tambien lo son los de la otra.–7. Si dos rectas concurrentes en un punto son cortadas por dos paralelas, los segmentos de la una so proporcionales á los de la otra.–8. Si en un triángulo tiramos una recta paralela á uno de sus lados, resulta un otro triángulo semejante al primero.–9. Dos triángulos semejantes son equiangulares, y reciprocamente.–10. Dos triángulos que tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.–11. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos, son semejantes.–12. Dos polígonos son semejantes cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales: dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.–13. Propiedades del triángulo rectángulo.–14. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.–15. Dividir una recta en partes iguales.–16. Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas–17. Construir un triángulo semejante á otro dado, y por consecuencia un polígono semejante á otro.

1. Cuando comparamos entre si dos líneas ó dos números el resultado de esta comparacion se llama *razon.*

2. Entendemos por *medida comun* de dos líneas, una tercera línea contenida exactamente en las dos primeras.

Para hallar la razon de dos lineas AB, CD (fig. 51) se coloca la mas pequeña CD sobre la mayor AB, tantas veces como puede ser contenida; si cabe un número exacto de veces, la razon entre las dos líneas tendrá por expresion un número entero, y la operacion quedará terminada.

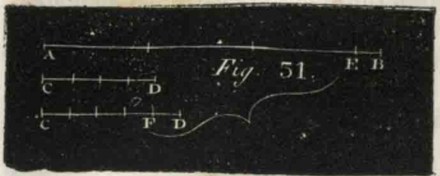


Fig. 51.

Pero supongamos que la línea AB contiene tres veces á la CD, quedando el residuo EB; sobrepondrémos este resíduo EB à la CD, y si cabe p. ej. exactamente 4 veces, la línea AB igual á tres veces la línea CD, mas el resíduo EB, contendrá 13 veces la EB; de donde resulta que la razon de CD á AB será $\frac{4}{13}$, pudiendo formar la siguiente proporcion: AB:CD :: 13:4.

La línea EB, que cabe 4 veces en la CD, y 13 en la AB, es la *comun medida* de estas dos líneas.

3. Llámanse *líneas comensurables entre sí* aquellas cuya razon se puede expresar numéricamente, como las líneas AB, CD del ejemplo precedente.

Por el contrario, se llaman *incomensurables* aquellas cuya razon no se puede expresar numéricamente, ó en otros términos, aquellas que no tienen una medida comun. Sin embargo, podemos valuar la relacion de estas lineas hasta tal grado de aproximacion, que equivalga á la exactitud.

En efecto, supongamos la línea AB (fig. 51) dividida en un número cualquiera de partes iguales, y que una de estas partes se coloca sobre la CD tantas veces como sea susceptible: en esta division claro es que nos quedará un resíduo, por ser las líneas incomensurables; pero este resíduo, menor que una de las divisiones de AB, será tanto mas pequeño é inapreciable, cuanto mayor sea el número de partes en que la línea AB haya sido dividida. Si se divide la línea AB en un millon de partes iguales p. ej. y si CD contiene 456546 de estas divisiones, la razon de CD á AB será 0,456546, aproximada hasta menos de una millonésima, es decir que CD contendrá la millonésima parte de AB mas de 456546 veces, y menos de 456547 veces.

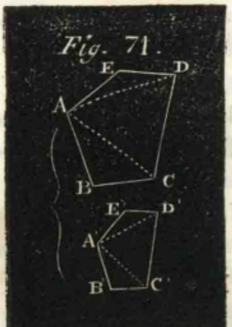
4. Cuando la razon de dos líneas A y B es igual á la razon de otras dos líneas C y D, de modo que podamos formar la proporcion A:B::C:D, se dice que las cuatro líneas A,B,C,D, son *proporcionales*.

5. Entendemos por triángulos *semejantes*, aquellos que tienen sus

lados proporcionales, de modo que podamos decir (fig. 70) $AB : A'B' :: BC : B'C' :: CA : C'A'$.

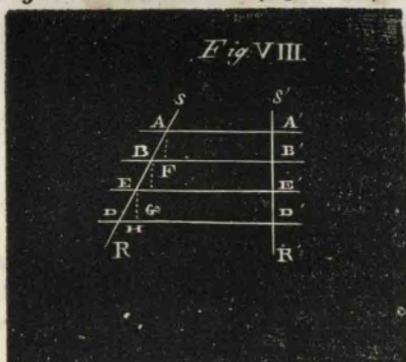
Dos polígonos se dicen *semejantes* siempre que se puedan descomponer en igual número de triángulos respectivamente semejantes y colocados en el mismo órden; como los de la fig. 71.

En los polígonos semejantes se llaman *líneas homólogas* las líneas



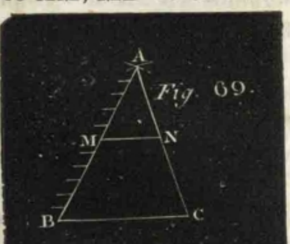
que unen los *puntos correspondientes* de estos polígonos. Para conocer en los triángulos semejantes cuales son los lados homólogos, tomarémos en consideracion sus ángulos respectivamente iguales, y los lados opuestos á estos ángulos, serán los homólogos.

6. *Si tenemos dos rectas cualesquiera* SR, S′R′, *cortadas por un número cualquiera de paralelas* AA′, BB′, CC′, DD′, *siendo iguales entre sí los segmentos de la una, lo serán tambien entre sí los segmentos de la otra* (fig. VIII).



Para manifestar esta verdad, tirarémos las rectas AF, BG. EH... paralelas á la S′R′. Los triángulos ABF. BEG... serán iguales, porque tienen un lado igual, AB=BE..., adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, BAF=EBG..., y ABF=BEG...: de donde AF=BG..., por consiguiente A′B′=B′E′.

7. *Si se nos dan dos rectas* AB, AC, *concurrentes en un punto* A, *cortadas por dos paralelas* MN, BC *los segmentos* AM, MB *de la una son proporcionales á los segmentos* AN, NC *de la otra* (fig. 69.)



Supongamos para esto que la razon entre AM y MB sea $\frac{5}{6}$, es decir que MB se haya dividido en 6 partes iguales, y que AM contenga 5 de estas partes: si por los puntos de division de la AB dirigimos paralelas á la BC, dividirán la AC en partes iguales, segun acabamos de demostrar. AN contendrá 5 de estas partes y NC 6; la razon pues entre estas dos rectas, será tambien $\frac{5}{6}$, resultando por consiguiente la proporcion:

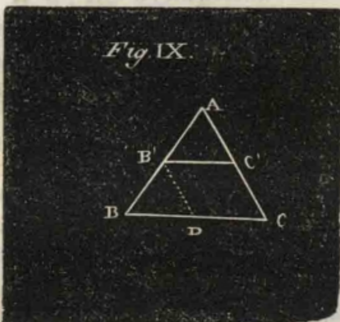
AM:MB:.AN:NC.   L. Q. Q. D.

Asi mismo, conteniendo la AM 5 de las 11 partes iguales en que AB está dividida, y AN otras 5 de las 11 partes iguales de AC, podemos formar la proporcion:

AM:AB::AN:AC, y por la misma razon
MB:AB::NC:AC, y dividiendo la primera por la segunda.
AM:MB::AN:NC.

Cualquiera puede conocer que tambien es verdadera la recíproca, es decir *que si la línea* MN *divide á las rectas* AB, AC *en partes proporcionales*, la MN *será paralela á la* BC.

8, *Toda recta* B′C′ *tirada en el plano de un triángulo* ABC *paralelamente à uno de los lados* BC, *forma un segundo triángulo* AB′C′ *semejante al primero*, de suerte que resultará (fig. IX.)



AB:AB′::AC:AC′::BC:B′C′.

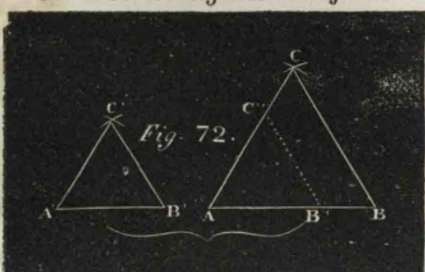
En efecto resulta de lo dicho

AB:AB′::AC:AC′.

Si ahora dirigimos la B′D paralela á la AC, tendrémos.

AB:AB′::BC:CD, pero CD=B′C′;
asi AB:AB′::BC:B′C′; luego etc.

9. *Dos triángulos semejantes* ABC, A′B′C′ (fig. 72) *son equiangulares entre sí, y reciprocamente dos triángulos equiangulares entre sí, son semejantes.*



1.° Supongamos AB>A′B′. Tómese sobre AB una longitud AB″,=A′B′, y por el punto B″, diríjase la B″C″ paralela á BC; habrémos formado de este modo un triángulo AB″C″ semejante al ABC; pero segun nuestra suposicion el ABC es semejante al A′B′C′: luego los dos triángulos AB″C″ y A′B′C′ son semejantes entre sí, é iguales al mismo tiempo, porque teniendo el lado AB″=A′B′, los otros lados tendrán entre sí la misma relacion de igualdad; asi pues, los triángulos AB″C″ y A′B′C′, ademas de ser semejantes, son tambien iguales. Los triángulos ABC, AB″C″ son equiangulares entre sí; tambien lo serán pues ABC y A′B′C′, y por consiguiente A=A′, B=B′, C=C′.

2.° Siendo ABC y A′B′C′ equiangulares entre sí, AB″C″ y A′B′C′ lo serán tambien. Pero AB′′=A′B′; luego AB′′C′′ y A′B′C′ que tienen gual un lado y todos sus ángulos, serán iguales; asi pues, ABC y A′B′C′ son semejantes.

Corolario 1.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes.*

2.° *Dos triángulos isósceles son semejantes, cuando tienen iguales los ángulos de la base ó los del vértice.*

3.° *Dos triángulos rectángulos que tienen igual un ángulo agudo, son semejantes.*

10. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual,* A=A′, *comprendido entre lados proporcionales, AB: A′ B′ :: AC: A′ C′ (fig, 72.)*

Para demostrar este teorema, harémos la misma construccion que en el caso anterior. Los triángulos semejantes ABC, AB″C″ nos dan la siguiente proporcion AB: AB″:· AC: AC″. Combinando esta proporcion con la supuesta en el teorema, resulta A′B′: AB″:: A′C′: AC″, y como A′B′=AB″, tambien A′C′=AC′′. Asi pues, los triángulos A′B′C′, AB′′C′′ son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido: luego ABC y A′B′C′ serán semejantes.

11. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares ó paralelos son semejantes.*

Los triángulos que se hallan en este caso, no pueden menos de tener sus ángulos respectivamente iguales, como vamos á manifestar.

Los ángulos de estos triángulos ó son iguales ó suplementarios, segun demostramos en otra parte; veamos si los 6 ángulos de los dos triángulos, tomados dos á dos, pueden ser suplementarios. Si asi fuese, los ángulos de estos triángulos valdrian 6 rectos; lo cual es imposible. Tampoco pueden ser suplementarios 4 de estos ángulos tomados dos á dos, porque la suma de los 6 pasaria de 4 rectos.

Asi pues, dos ángulos por lo menos de un triángulo son respectivamente iguales á dos del otro. Luego etc.

12. *Dos polígonos son semejantes, cuando tienen sus lados proporcionales y sus ángulos respectivamente iguales*, de suerte que A=A′, B=B′, etc.; y al mismo tiempo A′B: ÀB′:: BC: B′C... (fig. 71).

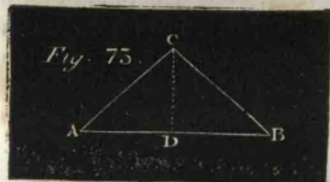
La demostracion de este teorema se reduce á descomponer de un modo cualquiera los dos polígonos en igual número de triángulos, manifestando al mismo tiempo la semejanza de estos triángulos, tomados dos á dos, del modo siguiente.

Los dos triángulos ABC, A′B′C′ p. ej. que tienen un ángulo B=B′, y proporcionales los lados que lo forman, serán semejantes. De donde resulta que las diagonales AC, A′C, tienen entre sí la misma relacion que los lados homólogos de los polígonos; y que los ángulos ACD, A′C′D son iguales, como diferencias de los ángulos iguales ACB, A′C′B. Luego los triángulos ACD, A′C′D′ son tambien semejantes, por tener el ángulo C=C′, formado por lados proporcionales.

Lo mismo podemos decir de todos los triángulos formados al rededor del punto A. Luego etc.

Corolario. *Dos poligo os regulares del mismo número de lados son semejantes*; y considerando el círculo como un polígono regular de infinitos lados, estamos autorizados para decir que *todos los círculos son semejantes entre sí.*

13. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC (figura 73), *bajamos una perpendicular CD sobre la hipotenusa AB:* 1.° *los dos triángulos ADC, CDB son semejantes al triángulo* ABC; 2.° *los otros triángulos* ADC, CDB *son semejantes entre sí;* 3.° *la perpendicular CD es media proporcional entre los dos segmentos AD, BD de la hipotenusa.*



4.° *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.*

1.° El ángulo A es comun á los dos triángulos ADC, ABC; ademas, cada uno de ellos tienen un ángulo recto; luego son semejantes: luego el ángulo ACD=CBD.

Lo mismo sucede con los triángulos CDB, y ACB.

2.° Los dos triángulos ADC, CBD tienen cada uno un ángulo recto, y ademas, el ACD del uno igual al CBD del otro; luego son semejantes.

3.° Si comparamos los lados homólogos de los triángulos semejantes ACD, CDB, nos resultará la proporcion AD: CD:: CD: DB; á la línea CD que está contenida en la AD, tantas veces como ella contiene á la DB, la llamamos medio proporcional entre AD y DB; luego etc.

4.° La comparacion de los triángulos semejantes ACB, ADC, nos da la proporcion AD: CA:: CA:: AB.—Del mismo modo la comparacion de los triángulos semejantes CDB y ACB nos darán la proporcion DB: CB:: CB: AB; luego cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

Llámanse *cuestiones numéricas* todas las cuestiones de geometría que se pueden resolver por medio de las reglas de aritmética.

14. *En un triángulo rectángulo* ABC (73), *el cuadrado del valor numérico de la hipotenusa* AB *es igual á la suma de los cuadrados de los valores numéricos de los catetos.*

En efecto, si con las dos últimas proporciones:

AD: CA:: CA: AB, y DB: CB:: CB: AB, formamos el producto de medios igual al de los extremos, resultará:

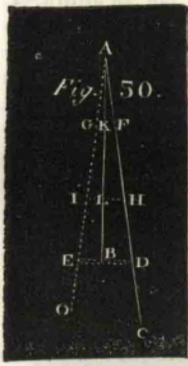
$$CA \times CA \text{ ó } CA^2 = AD \times AB, \text{ y } CB \times CB \text{ ó } CB^2 = DB \times AB.$$

Sumando estas dos igualdades, tendrémos:

$CA^2 + CB^2 = (AD + DB) \times AB$; pero $AD + DB = AB$; luego $CA^2 + CB^2 = AB \times AB = AB^2$ L. Q. Q. D.

Sea la hipotenusa $AB = 10$ pies, $AC = 6$ pies, y $CB = 8$ pies, resultará 10×10 ó $10^2 = 6^2 + 8^2$, es decir, $100 = 36 + 64$.

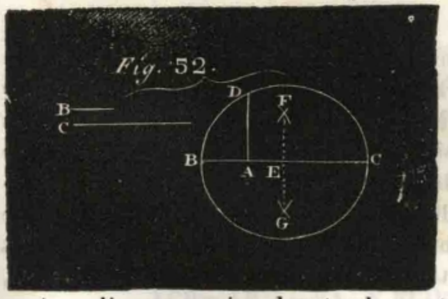
15. *Dividir una recta A B en un número cualquiera de partes iguales.* (*fig*. 50).



Supongamos que se quiere dividir en tres partes.

Tirarémos por una de sus extremidades una recta cualquiera AC, tomando en ella una longitud, tal que la suma AD de tres partes iguales á esta longitud, sea sensiblemente mayor que AB; unirémos el punto D al B; desde el punto A, con un radio AD, trazarémos un arco que corte á la prolongacion de DB en el punto E, y uniendo el punto A con el punto E, tendríamos A E=A D; por consiguiente podrémos colocar exáctamente sobre AC las tres partes de AD. Uniendo ahora los puntos de division F y G, H é I por medio de rectas, estas rectas, que dividen las líneas AD, AE en partes iguales serán paralelas entre sí, y las divisiones AK, KL, LB, formadas por las paralelas, serán iguales.

16. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas b, c.* (fig. 52).



Sobre una recta BC colocarémos las dos dadas, b, c, la primera desde B hasta A, y la segunda desde A hasta C; sobre la recta BC, como diámetro, describirémos una semi-circunferencia; levantando sobre el punto A una perperdicular que corte en D á la semi-circunferencia, esta perpendicular será medio proporcional entre las rectas b y c.

17. *Construir un triángulo semejante á otro triángulo dado ABC, sobre una recta A' B', dada como homóloga al lado AB.*

Podemos resolver este problema de muchos modos, haciendo aplicacion de los casos de semejanza entre los triángulos. Una de las construcciones podrá ser la siguiente. Trácense sobre los estremos de la recta A'B' dos ángulos A' y B', respectivamente iguales á los ángulos A y B del triángulo dado; la interseccion de las nuevas rectas que forman los ángulos, determinará un triángulo semejante al dado.

Corolario. Para construir un polígono semejante á otro dado, bastará descomponerlo en triángulos, y trazar sucesivamente un número igual de triángulos semejantes y colocados en el mismo órden.

§. 7. *De las superficies de las figuras planas.*

1. Qué se entiende por área? 2. Qué es medir una superficie, y qué unidad se elije generalmente?–3. Un rectángulo se mide por el producto de su base por su altura.–4. Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura.– 5 Todo triángulo es igual á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura: de donde el área del triángulo tiene por espresion la mitad del producto de su base por su altura.– 6. El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura.– 7. Un polígono cualquiera se puede medir descomponiéndolo en triángulos.– 8. El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.– 9. La superficie del círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por 3,14159.— 10. Problema de la cuadratura del círculo.

1. Llámase *área* la superficie de una figura.

2. Medir una superficie es indagar cuantas veces cabe en ella otra que se toma por unidad.

Generalmente se elige por unidad el cuadrado construido sobre la unidad lineal que podrá ser la pulgada, el pie, la vara, etc.

3. Cualquiera que sea la unidad de superficie que elijamos, un rectángulo la contendrá tantas veces como nos indica el producto de su base por su altura, midiendo esta base y altura con la base y altura de la unidad elegida.

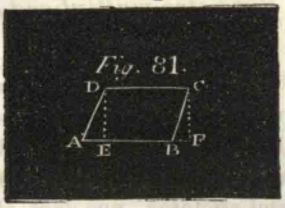
En efecto, supongamos que la unidad sea un pie cuadrado, y que con ella queremos medir el rectángulo A B C D (fig. 83); si el lado del cuadrado cabe 6 veces en la base C D, obtendrémos 6 fajas rectangulares, tirando las paralelas á CD por los puntos de division; y si el mismo lado está contenido 8 veces en la altura AD, quedará dividida cada una de estas fajas en 8 cuadros iguales, por medio de las paralelas á AB dirigidas por las divisiones de AD. Pero es indispensable que para obtener el número total 48 de cuadrados que hay en el rectángulo, basta multiplicar 8, longitud de la altura AD, por 6, longitud de la base CD.

Si se quiere, pues, medir en pies cuadrados la superficie de un rectángulo, ABCD, bastará medir su base y su altura con el pie lineal, y formar el producto de los números que resulten de esta medicion.

Lo mismo sucederá si tomamos por unidad la pulgada, la vara, etc.; de donde podemos deducir la espresion general.

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

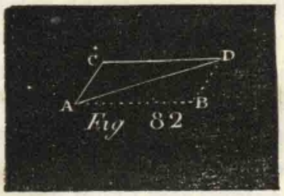
4. *Todo paralelógramo* **ABCD** *es equivalente á un rectángulo de la misma base y de la misma altura* (fig. 81).



Esta verdad se hará muy perceptible, si bajamos sobre la base AB y sobre su prolongacion las perpendiculares DE, CF; de cuya construccion nos han resultado los dos triángulos iguales DAE, CBF, por tener sus ángulos y sus lados respectivamente iguales. Si á cada uno de los dos triángulos añadimos el trapecio DEBC, tendrémos; el triángulo DAE mas el trapecio DEBC=al triángulo CBF mas el mismo trapecio DEBC; pero el primer triángulo y el trapecio componen el paralelógramo ABCD; el segundo triángulo y el mismo trapecio forman el rectángulo DEFC de la misma base y altura que el paralelógramo; luego etc.

Como en el cuadrado la base y la altura son iguales, estamos autorizados para decir que el área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.

5. *Todo triángulo* **ADC** (fig. 82) *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y de la misma altura.*



Por los puntos A y D dirigirémos las líneas AB, DB respectivamente paralelas á CD, AC; habrémos formado de este modo el paralelógramo ABCD, dividido por la diagonal AD en dos triángulos iguales ADC, ADB; luego el triángulo ADC es la mitad del paralelógramo ABCD que tiene la misma base y altura.

De donde se infiere *que el área del triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

6. *El área del trapecio es igual á la semi-suma de sus bases, multiplicada por su altura* (fig. 80).

Descompondrémos para esto el trapecio en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene por base uno de los lados paralelos, y por altura, la misma del trapecio. De aqui resultará:

$$ACB=AB\times\frac{1}{2}EA, \text{ y } ACD=DC\times\frac{1}{2}EA, \text{ y sumando:}$$

$ACB+ACD=(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA$, ó lo que es lo mismo trapecio $ABDC=$

$$(AB+DC)\times\frac{1}{2}EA.$$

7. Para medir un polígono cualquiera, podemos descomponerlo en triángulos y hallar la superficie de cada uno de estos triángulos; la suma total será igual á la superficie del polígono.

8. *El área del polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad del apotema.*

Para demostrar este teorema, descompondrémos el polígono regular en triángulos que tengan un vértice comun en el centro. Todos estos triángulos tienen por altura el apotema del polígono, y por base uno de los lados. El producto, pues, de la suma de los lados por la mitad del apotema, ó lo que es lo mismo, el perímetro multiplicado por la mitad del apotema, nos dará el área del polígono regular.

9. Considerado el círculo como un polígono regular de infinitos lados, cuyo apotema se ha convertido en el rádio, y el perímetro en la circunferencia, podemos decir que:

La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.

Luego si llamamos r al rádio, C á la circunferencia, y S á la superficie del círculo, se podrá expresar esta del modo siguiente:

$$S=C\times\frac{1}{2}r.$$

Y si en lugar de C sustituimos su valor con respecto al rádio, resultará la expresion:

$$S=2r\times3,14159\times\frac{1}{2}r=\frac{2r^2\times3,14159}{2}=r^2\times3,14159.$$

Luego la superficie del círculo es igual al cuadrado del rádio multiplicado por el número 3,14159.

10. El *problema de la cuadratura del circulo* tiene por objeto hallar un cuadrado que tenga la misma superficie que el círculo. Han sido inútiles hasta el presente todos los esfuerzos que se han hecho para resolver este problema.

SEGUNDA PARTE,—DE LOS PLANOS Y DE LAS LINEAS RECTAS EN EL ESPACIO.

§ I. *De los planos en general.*

1. Por dos puntos, pueden pasar muchos planos; por tres puntos que no están en línea recta, solamente puede pasar un plano: dos líneas que se cortan, determinan la posicion de un plano: dos paralelas están siempre en un mismo plano.–2. Cuándo se dice que una recta y un plano son paralelos? ¿Cuándo dos planos son paralelos entre sí?–3. Cuándo una línea es perpendicular á un plano? ¿Y cuándo oblícua?–4. Qué entendemos por ángulo diedro? ¿Cómo se designa?–5. Qué es ángulo poliedro? ¿Qué entendemos por vértice del ángulo poliedro?–6. Qué es ángulo triedro, tetraedro, pentaedro, etc?–7. Si una recta es perpendicular en el plano á otras dos dirigidas por su pié, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se puedan describir en el plano; de donde se infiere que si una recta es perpendicular á otras dos tiradas por su pié, en un plano, lo será tambien á este plano.–8. La perpendicular es la línea mas corta que desde un punto podemos bajar al plano.–9. Si desde un punto bajamos al plano una perpendicular y diferentes oblícuas, resultará: 1.° que las oblícuas equidistantes del pie de la perpendicular serán iguales; 2.° que de dos oblícuas que no disten igualmente del pié de la perpendicular, será mayor la que mas se aparte; de donde se infiere que, si tomamos un punto cualquiera de la perpendicular al plano, puede servir este punto para trazar en el plano una circunferencia cuyo centro será el pié de la perpendicular.

1. Asi como un punto no determina la posicion de una recta, del mismo modo dos puntos tampoco son suficientes para determinar la posicion de un plano; y asi como por un punto pueden pasar infinitas rectas, del mismo modo por una recta pueden atravesar infinitos planos. En efecto, si suponemos que un plano gira al rededor de una línea como eje, las infinitas posiciones que el plano tenga en esta vuelta, serán otros tantos planos que pasarán por aquella recta.

Pero asi como dos puntos determinan la posicion de una recta, del mismo modo tres puntos, que no esten en línea recta, determinan la posicion de un plano; de manera *que por tres puntos no situados en línea recta solamente puede pasar un plano.*

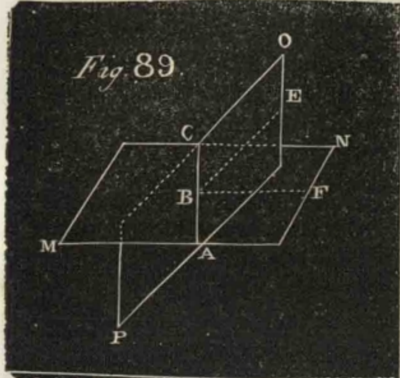
De donde se infiere: 1.° *que dos líneas, que se cortan, determinan exactamente la posicion de un plano*; 2.° *que dos paralelas estan siempre en un mismo plano*, como resulta de su misma definicion.

2. Una recta y un plano se dice que son *paralelos entre sí* cuando, prolongados indefinidamente, no se pueden encontrar; del mismo modo, dos planos son *paralelos* cuando en su prolongacion indefinida no se encuentran.

3. Llámase *perpendicular* á un plano aquella recta que lo sea á todas las que en el plano pasan por su pie; por el contrario, dícese *oblí-*

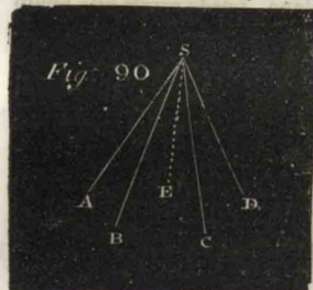
cua aquella que no sea perpendicular á todas las que situadas en el plano pasen por su pié.

4. Llámase *ángulo diedro* el espacio ilimitado, comprendido entre dos planos MNOP (fig. 89) que se cortan. La interseccion de los dos planos se llama *arista*: y los planos, *caras* del ángulo diedro.



Asi como el angulo plano lo designábamos con la letra del vértice cuando este no era comun á otros ángulos, del mismo modo anotaremos en igual caso el ángulo diedro con dos letras correspondientes á la arista; pero cuando esta arista sea comun á otros diedros, añadirémos dos letras que designarán respectivamente las dos caras del ángulo, interponiendo siempre, cuando queramos expresarlo verbalmente, las letras de la arista.

5. Entendemos por ángulo *poliedro* ó ángulo *sólido*, la porcion indefinida de espacio comprendido entre tres ó mas planos que se cortan en un mismo punto *S* (fig. 90).



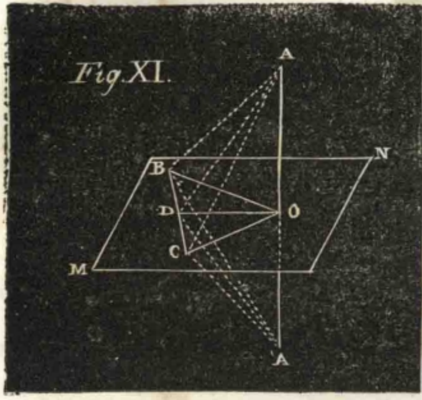
Llámase *vértice* del ángulo poliedro, el punto comun S de interseccion; *cara*, cada uno de los ángulos planos ASB, BSD, ASD, etc., que forman el ángulo poliedro.

El ángulo poliedro se designa por medio de la letra de su vértice.

6. Si querémos indicar el número de caras del ángulo poliedro, sustituirémos á esta denominacion general, la de ángulo *triedro*, *tetaedro*, *pentaedro*, etc., segun que el número de sus caras sea *tres*, *cuatro* ó *cinco* etc.

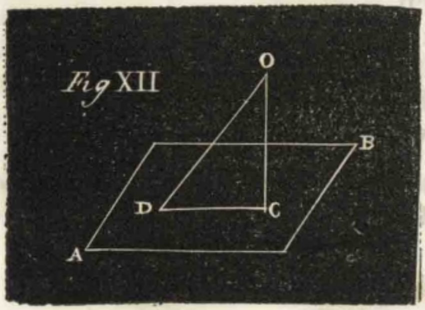
El *ángulo triedro* es el mas sencillo de los ángulos poliedros.

7. *Si una recta OA es perpendicular á otras dos OB, OC tiradas por el punto O, pie de esta perpendicular, lo será á todas las rectas que por el mismo punto se pueden trazar en el plano M N de las dos primeras.* (fig. XI).



Supongamos que OD sea una de estas rectas; el teorema quedará demostrado, si manifestamos que OA es perpendicular á OD. Para esto prolongarémos la OA por la otra parte del plano en una cantidad OA′=OA; sobre las dos rectas OB OC, tomarémos dos puntos cualesquiera, B, C; tirarémos la BC, y sea D el punto de interseccion de BC con OD; finalmente tirarémos las rectas AB, AC, AD, A′B, A′C, A′D. Esta construccion nos manifiesta la igualdad de los triángulos ABC y A′BC, segun vamos á ver. El lado BC es comun á los dos triángulos; el AB=A′B por ser oblicuas equivalentes del pie O de la perpendicular; por la misma razon AC=A′C. Luego estos dos triángulos son iguales entre sí, de manera que en la sobreposicion las rectas AD y A′D coincidirán exactamente; por consiguiente OD será perpendicular á OA y recíprocamente.

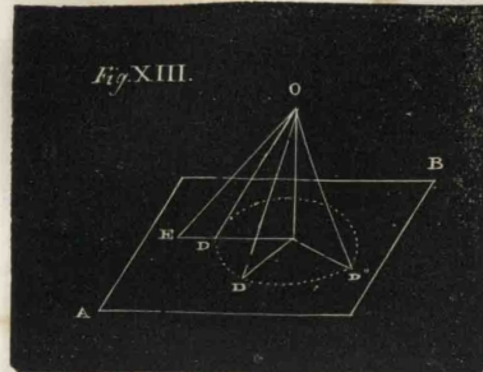
Corolario. *Si una recta es perpendicular á otras dos rectas tiradas por su pie en un plano, lo será tambien á este plano.*



8. *La perpendicular OC (figura XII) al plano AB desde un punto exterior O, es el camino mas corto de este punto al plano.*

Supongamos una oblícua cualquiera OD bajada desde el punto O al plano AB. Tirando la recta CD, formarémos un triángulo rectángulo OCD, cuya hipotenusa será la oblicua OD; de donde se infiere que OC < OD.

Corolario. *La perpendicular bajada de un punto á un plano mide la verdadera distancia del punto al plano.*



9. Si desde el punto O, (figura XIII) que suponemos fuera del plano AB, bajamos la perpendicular OC, y diferentes oblícuas, OD, OD′, OD″... ..... OE.

1.° *Las oblícuas OD, OD′ equivalentes del pie de la perpendicular, son iguales.*

2.° *De dos oblícuas OD, OE que no distan igualmente del pie de la perpendicular, la que mas se apartará, á saber, la OE, es mayor que la segunda.*

1.° Resulta de la suposicion que hemos hecho, que $CD=CD'=CD''$; y de aqui la igualdad de los triángulos OCD, OCD′, OCD″; cuya igualdad nos dice que

$$OD=OD'=OD'';$$

y *generalmente*: Si desde el punto C, como centro y con un radio igual á CD, trazamos una circunferencia en el plano AB, todas las oblícuas que unen el punto O con los diferentes puntos de la circunferencia, serán iguales.

2.° Si suponemos en línea recta los tres puntos C, D, E, resultará

$$CE > CD,$$

y por consecuencia $\quad OE > OD.$

Si los tres puntos C, D, E, no se hallasen en línea recta, obtendríamos el mismo resultado, reemplazando la oblícua OD con otra OD′ que tenga la misma distancia del pie de la perpendicular.

Corolario. *Desde un mismo punto podemos tirar á un plano una infinidad de rectas iguales*, (con tal que sean mayores que la perpendicular).

Ademas, equidistando estas rectas del pie de la perpendicular, se infiere que

Un punto cualquiera O de la perpendicular OC al plano, puede servir para trazar en este plano una circunferencia, cuyo centro será el pie de la perpendicular.

§. 2.º *De la interseccion de los planos, del ángulo diedro y del triedro.*

1. Qué entendemos por interseccion de dos planos?—2 La interseccion de dos planos es una recta— 3 Qué entendemos por ángulo correspondiente á un ángulo diedro?— 4 El ángulo diedro se mide por su ángulo correspondiente.—5 En todo ángulo triedro una de sus caras es menor que la suma de las otras dos.—6 En todo ángulo triedro la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos: de donde se infiere: 1.º con los ángulos del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos sólido de 3, 4, y 5 caras; 2.º que con los del cuadrado uno de tres caras, 3.º y con los del pentágono otro.

1. Entendemos por *interseccion de dos planos* la série de puntos que están situados á la vez sobre dos planos.

2. *La interseccion de dos planos MN, OP (fig. 89) es una linea recta.*

Los puntos A, B, C, etc. comunes á los dos planos MN, OP, pertenecen necesariamente á una misma recta; porque si el punto C no estuviese situado en la recta que une el punto A con el B, resultaria que los dos planos MN, OP, que tienen comunes tres puntos no situados en la línea recta, formarian un solo plano.

3. Si sobre la arista AC del ángulo diedro (fig. 89) tomamos un punto B, y sobre él levantamos una perpendicular en cada una de sus caras, resultará el *angulo plano* EBF: este ángulo se llama *ángulo correspondiente* al diedro PACN: así pues entendemos por *ángulo correspondiente á un ángulo diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, levantadas respectivamente en cada una de sus caras desde uno de sus puntos.*

4. Para medir el ángulo diedro, nos valemos de su ángulo correspondiente, autorizándonos para esta sustitucion la proporcion que siempre existe entre los ángulos driedros y sus ángulos correspondientes.

5. *En todo ángulo triedro, S, una de sus caras es menor que la suma de las otras dos*. (fig. XIV).

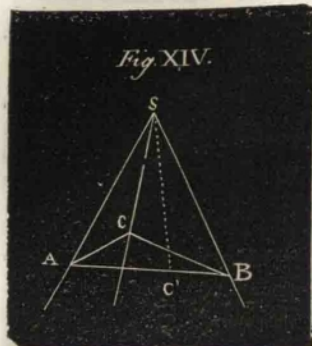


Fig. XIV.

Para manifestar la verdad de este teorema supondrémos que la cara $ASB > ASC$, y que la misma cara $ASB > BSC$; en una palabra, que ASB sea mayor que cualquiera de las otras dos, tomadas separadamente. Nos proponemos demostrar que $ASB < ASC + BSC$. Para esto tirarémos una recta AB desde un punto cualquiera A de la arista SA á otro punto B de la arista SB: Despues, desde el punto S, y en el plano ASB, trazarémos la recta SC' que forme un ángulo $BSC' \pm BSC$, y que corte á la AB en un punto C': sobre la arista SC tomarémos una lonjitud $SC = SC'$. Finalmente tirarémos las rectas AC y BC.

Segun esta construccion, los triángulos BSC y BSC' serán iguales por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido; luego $BC = BC'$. Pero en el triángulo ABC tenemos que

$$AB < AC + CB, \text{ ó } AC' + C'B < AC + CB;$$

luego
$$AC' < AC;$$
y por consiguiente
$$ASC' < ASC.$$

Añadiendo á los dos miembros de esta inecuacion, al uno la cantidad BSC, y al otro la BSC', tendrémos:

$$ASC' + BSC' < ASC + BSC, \text{ ó } ASB < ASC + BSC. \text{ L. Q. Q. D.}$$

6. *En todo ángulo triedro, S, la suma de sus tres caras es menor que cuatro ángulos rectos*. (fig. XV).

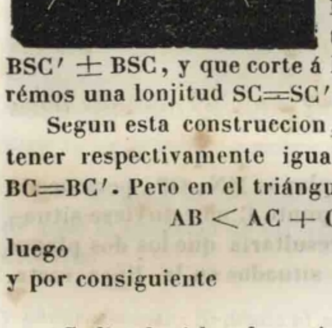


Fig. XV.

Para demostrar este teorema tirarémos un plano que corte las caras segun las líneas AB, AC, BC; despues desde un punto cualquiera O, tomado en el triángulo ABC, dirijirémos las rectas OA, OB, OC. Habrémos formado tres triángulos que tendrán respectivamente por bases las rectas AB, AC, BC, y el punto S por vértice comun. Con la construccion precedente habrán resultado otros tres triángulos, que tendrán respectivamente las mismas bases, y su vértice en el punto O. El ángulo CAB, compuesto de la suma de los ángulos OAC y OAB, es menor que la suma de los ángulos SAC y SAB, segun el teorema precedente; por la misma razon $ABC < SBA + SBC$, y $BCA < SCB + SCA$: así pues, la suma de los ángulos de la base, en los triángulos que tienen su vértice en O, es menor que la suma de los ángulos de la base en los triángulos que tienen su vértice en S. Pero la suma de los ángulos de los tres triángulos es la misma en los dos casos; luego la suma de los ángulos en S es menor que la de los ángulos en O; y como esta vale cuatro rectos, se infiere que la primera es menor que cuatro ángulos rectos L. Q. Q. D.

Esta proporcion es igualmente aplicable á cualquier ángulo poliedro.

Corolario. 1.° *No se pueden formar con los ángulos de un triángulo equilátero sino ángulos sólidos de tres, cuatro y cinco caras.*

Segun el teorema precedente, si queremos formar ángulos poliedros de ángulos planos iguales, debemos atender al número de estos y al valor de cada uno de ellos. Cada ángulo del triángulo equilátero vale $^2/_3$ R; (designando con la letra R el ángulo recto); y el ángulo sólido de 3, 4, 5 caras que haya de tener cada ángulo del vértice igual al del triángulo equilátero, ha de satisfacer al principio anterior que se acaba de establecer; lo cual solamente se verifica en las tres primeras inecuaciones que siguen; $3 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $4 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $5 \times {}^2/_3 R < 4 R$; $6 \times {}^2/_3 R = 4 R$; $7 \times {}^2/_3 R > 4 R$; por consiguiente pasa de 4 R la suma de mayor número de ángulos planos, iguales al del triángulo equilátero.

2.° *Con los ángulos del cuadrado solo se puede formar el ángulo sólido de tres caras.*

Porque el valor del ángulo del cuadrado es R; y $3 \times R < 4 R$: $4 \times R = 4 R$; $5 \times R > 4 R$; excediendo de 4 R las sumas de un número mayor de ángulos del cuadrado.

3.° *Con los ángulos del pentágono regular solamente se puede formar el ángulo poliedro de tres caras.*

El ángulo del pentágono regular vale $^6/_5$ R; por consiguiente $3 \times {}^6/_5 R < 4 R$; $4 \times {}^6/_5 R > 4 R$.

4.° *Con los ángulos del exágono regular no puede formarse ángulo sólido, y lo mismo sucede con los ángulos de los polígonos que tengan mas lados.*

En efecto, el ángulo del exágono es $^4/_3$ R; y resulta que $3 \times {}^4/_3 R = 4 R$; $4 \times {}^4/_3 R > 4 R$; de suerte que ni aun se puede formar el triedro, que es el ángulo sólido mas sencillo. El ángulo del heptágono es mayor; de consiguiente tampoco con él podemos formar ningun ángulo sólido: y con mas razon se puede asegurar lo mismo de los ángulos de polígonos regulares, que tengan mayor número de lados.

§. 3.° *De los poliedros en general.*

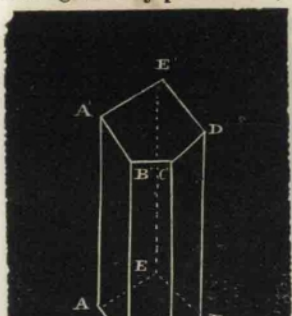
1. Qué se entiende por poliedro?– 2. Qué es prisma?– Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? Cuándo será recto y cuando oblicuo? Que se entiende por tronco de prisma? 3. Qué se entiende por paralelepipedo? Cuándo se llama recto y cuándo rectangular? Qué es cubo ó exaedro regular?– 4. Qué es pirámide?– 5. Cuándo se dice triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.? – 6. A qué se llama tronco de la pirámide?– Qué se entiende por poliedro regular, y cuántos son? Qué entendemos por tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo, y dodecaedro?

1. Entiéndese por *poliedro* un espacio enteramente circunscrito, ó en otros términos, un sólido terminado por muchos planos que se cortan dos á dos (fig. 91).

El poliedro, pues, está limitado por una serie de polígonos que reciben el nombre de *caras*, y cuyo conjunto constituye la superficie del poliedro; los lados de estas caras son las *aristas* del poliedro; y los puntos de interseccion de las aristas se llaman *vértices*.

2. Entre los poliedros merecen particular atencion el *prisma* y la *pirámide*.

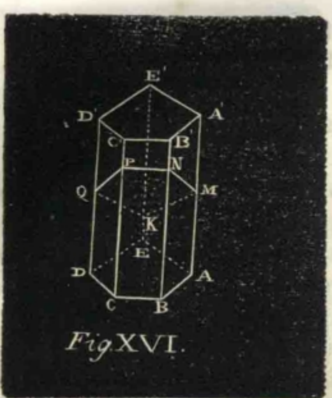
Entendemos por *prisma* un poliedro que tiene por caras dos polígonos iguales y paralelos, y una serie de paralelógramos igual en número á los lados de cada polígono (fig. 92); los paralelógramos AB', CD', DE', EA', constituyen las *caras laterales* del prisma, y todas ellas la superficie lateral.



Llámanse *bases* del prisma los dos polígonos ABCDE, A'B'C'D'E'; y *altura* la distancia de las bases ó la perpendicular comun á sus planos.

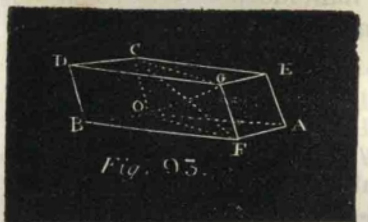
Un prisma será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base sea un triángulo, un *cuadrilátero*, un *pentágono*, etc. Si estas bases son polígonos regulares, el prisma se dice *regular*.

Un prisma se llama *recto*, cuando sus aristas laterales son perpendiculares al plano de las bases; en cuyo caso cada arista será igual á la altura del prisma, y las caras serán rectángulos: en el caso contrario el prisma se dice *oblicuo*.



Llámase *tronco de prisma* ó *prisma truncado* cada uno de los trozos que resultan por medio de un plano MNPQR, que no sea paralelo á las bases (fig. XVI).

3. Entendemos por *paralelepipedo* un prisma que tiene por bases dos paralelógramos.

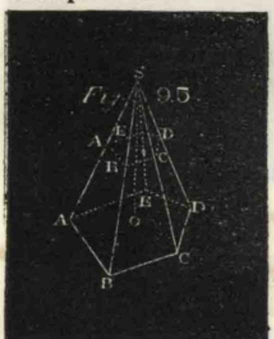


Resulta de esta definicion que el paralelepípedo tiene por caras 6 paralelógramos (fig. 93.)

Llámase *recto* el paralelepípedo cuyas caras son perpendiculares á la base, y *rectangular*, el que tiene todas sus caras rectangulares.

Entendemos por *cubo ó exaedro regular* un prisma cuyas caras todas son cuadrados; el cubo, pues, será un sólido terminado por seis cuadrados iguales; tales son los dados de jugar.

4. La *pirámide* es un poliedro que tiene por caras un polígono de cualquier número de lados, y una série de triángulos, cuyo vértice es comun á todos (fig. 95).



Si queremos obtener la pirámide, unirémos por medio de rectas los vértices de un polígono ABCDE á un punto cualquiera S, colocado fuera de su plano.

Los triángulos formados de este modo constituyen las *caras laterales* de la pirámide; el polígono será su *base*; el vértice comun de los triángulos se llama *cúspide* de la pirámide; y *altura*, la perpendicular SO bajada al plano de la base (figura 95).

Una pirámide se dice *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., segun que su base es un *triángulo*, *cuadrilátero*, *pentágono*, etc.: se llama *regular* cuando su base es un polígono regular.

6. Si por medio de un plano entre el vértice y la base cortamos todas las aristas laterales de una pirámide SABCDE (fig. 95), la figura que-

dará dividida en dos trozos; uno, S'A'B'C'D'E', es una segunda pirámide, y el otro, ABCDE, A'B'C'D'E', se llama *tronco de pirámide* ó *pirámide truncada*.

7. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son todas polígonos regulares é iguales entre sí.

Es muy reducido el número de poliedros regulares, porque, segun hemos visto, con el ángulo del triángulo equilátero solamente se pueden formar ángulos poliedros de tres, de cuatro, y de cinco caras; con el del cuadrado, únicamente un ángulo de tres caras; é igualmente con el ángulo del pentágono.

Por esta razon solamente se pueden concebir cinco cuerpos regulares, que son: el *tetraedro*, el *octaedro* y el *icosaedro*, cuyas caras en todos son triángulares; el *exaedro* ó *cubo*, limitado por seis cuadrados; y el *dodecaedro*, cuyas caras son pentagonales.

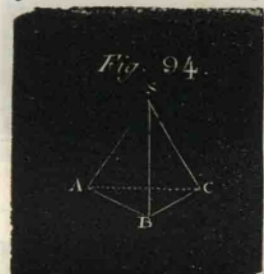


Fig. 94.

El *tetraedro regular* es un poliedro que tiene cuatro caras triangulares SAB, SAC, SBC, ABC, regulares é iguales entre sí. (fig. 94).


FigXVI.

Entiéndese por *octaedro* un sólido terminado por 8 triángulos regulares é iguales (fig. XVI).

Llámase *icosaedro* el poliedro terminado por veinte triángulos iguales y equiláteros (fig. XVII).

Entendemos por *cubo ó exaédro regular* un sólido limitado por seis cuadrados iguales. (figura XVIII).

Entiéndese por *dodecaedro* un poliedro formado por doce pentágonos regulares é iguales entre sí. (fig. XIX).

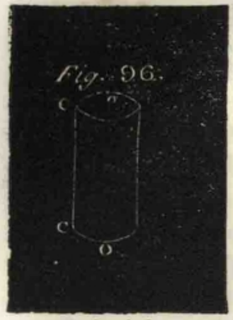
§. 4.º *De los cuerpos redondos.*

1. Qué son cuerpos redondos? Cuerpos redondos que considera la geometría elemental.— 2. Qué es cilindro?– 3. Qué es tronco de cilindro?– 4. Qué es un cono– 5. Qué se entiende por tronco de cono?– 6. Qué es la esfera?– 7. Qué son emisferios, círculos máximos y círculos menores?– 8. Aplicaciones de la esfera á las artes.

1. Llámanse generalmente *cuerpos redondos* los sólidos terminados por superficies curvas.

En la geometría elemental solo tres figuras redondas se toman en consideracion: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera*.

2. Entendemos por *cilindro* un sólido producido por la revolucion de un rectángulo CO, CO′ (fig. 96) al rededor de uno de sus lados OO′.

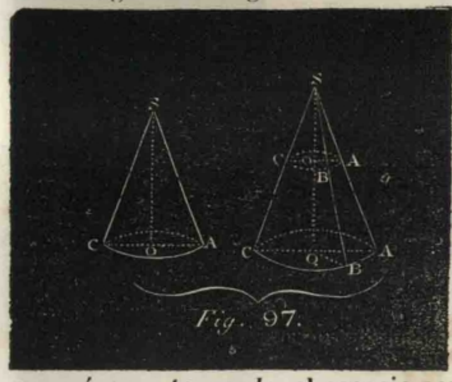


Supongamos inmovil el lado OO′, y hagamos girar el lado CC′; este lado CC′ describirá en su revolucion una superficie curva que se llama cilíndrica; y el espacio cerrado por dicha superficie y los planos en que se mueven las líneas OC, O′C′, recibe el nombre de *volúmen cilíndrico.*

Los planos circulares trazados por los lados CO, C′O′ se llaman *bases* del cilindro; finalmente el lado inmovil OO′ es la *altura* ó el *eje* del cilindro. Si la recta OO′ pasa por los centros de los círculos, el cilindro será *recto*; en otro caso será *oblicuo*.

3. Llámase *tronco de cilindro, ó cilindro truncado,* el espacio limitado por una superficie cilíndrica y por los dos planos no paralelos.

4. Entendemos por *cono*, un sólido engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo COS al rededor uno de sus catetos SO (figura 97).



El lado inmovil SO es el *eje* ó la *altura* del cono; el plano circular, producido en la revolucion por el otro lado CO se llama *base* del cono; la superficie engendrada por la hipotenusa SC, se denomina *superficie cónica*; y el espacio cerrado por esta superficie y por la base se llama *volúmen cónico*.

5. Entiéndese por *tronco de cono, ó cono truncado*, el espacio comprendido entre la superficie cónica, la base y otro plano que corte á todo el cono. Llámanse *bases* del tronco los planos que lo limitan. Si estos planos son paralelos, el tronco se llama de *bases paralelas*.

Un tronco de cono de bases paralelas CA′ (fig, 97) lo podemos considerar como engendrado por la revolucion de un trapecio OA′ rectángulo en O y en O′, que gira al rededor del lado OO′, como eje.

6. La *esfera* es un sólido formado por la revolucion de una semicircunferencia GAK (fig. 98) al rededor del diámetro GK. Cada punto de la semicircunferencia describirá en esta vuelta un círculo, cuyo radio será la distancia del punto al diámetro inmovil GK. Este diámetro se llama *eje* de la esfera, y sus dos extremos G, K, reciben el nombre de *polos.*

Fig. 98.

La esfera es en el espacio, relativamente á las superficies curvas, lo que el círculo con respecto á las curvas planas.

Así, se llama *centro* el punto interior O, del cual equidistan todos los puntos de la superficie esférica; *radio,* la distancia constante del centro á la superficie; y *diámetro*, toda recta que, pasando por el centro, termina por sus extremos en la superficie. Las dos porciones en que un plano divide la superficie esférica se llaman *casquetes esféricos*: los dos tozos de la esfera, *segmentos esféricos*; y la parte de su superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, *zona esférica.*

7. Todo plano que pasa por el centro de la esfera, la divide en dos partes iguales, que se llaman *emisferios.* Esta interseccion produce un *círculo máximo* que tendrá el mismo centro y el mismo rádio de la esfera; los círculos GIKL, AIEL, serán, segun esto, dos círculos máximos.

Si el plano no pasa por el centro, la seccion será un *círculo menor*, que tendrá un radio mas pequeño que el de la esfera: tal es el círculo CDFG (fig. 98).

8. Son muy numerosas las aplicaciones de la esfera en las artes del tornero, del ebanista, etc. Las bolas del villar son unas esferas de marfil; la luz de los quinqués se hace inofensiva á nuestra vista por medio de esferas de cristal deslustrado, etc.

§. V. *De las superficies de los poliedros.*

1. Cómo se puede determinar el área de un poliedro?–2 La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de su base por una de sus aristas: de donde se infiere: 1.° la superficie total de un prisma regular; 2.° la superficie lateral de un cilindro recto; 3.° la superficie total de un cilindro circular recto.–3. La superficie lateral de un prisma oblícuo es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del primero; de donde se deduce que el área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas multiplicado por su longitud.–4. La superficie lateral de una pirámide, cuya base sea un polígono regular, tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales. ¿Cuál es el área total de una pirámide cuya base sea un polígono regular? ¿Cuál la del cono circular? ¿Cuál la superficie total? ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide de bases paralelas? ¿Cuál es la superficie lateral de un tronco de cono circular de bases paralelas?–5. Cómo se determina la superficie de la esfera?

1. Siendo el *área* de un poliedro igual á la suma de las áreas de las diferentes caras que lo terminan, bastará para determinar aquella hallar sucesivamente la superficie de cada una de las caras. Por esta razon nos contentarémos con demostrar algunos teoremas necesarios para la ilustracion de esta materia.

2. *La superficie lateral de un prisma recto tiene por medida el producto del perímetro de su base por una de sus aristas.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de rectángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun una de las aristas y cuyas bases componen el perímetro de la base del prisma.

Corolarios. 1.° *La superficie total de un prisma regular tiene por medida el producto del perímetro de su base por la suma de una arista y de la apotema de esta base.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, estamos facultados para decir que:

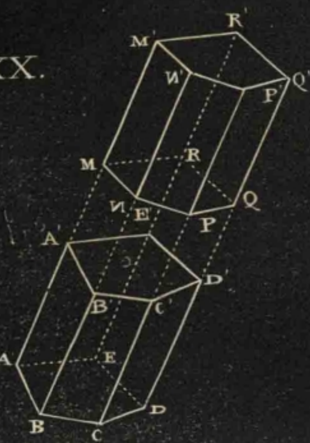
La superficie lateral de un cilindro recto es equivalente á la de un rectángulo que tenga por base la circunferencia de la base del cilindro, y su arista por altura.

Por consiguiente.—*La superficie lateral del cilindro recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por una arista.*

3.° *La superficie total de un cilindro circular recto tiene por medida el producto de la circunferencia de su base por la suma de su arista y el rádio de esta base.*

3. *La superficie lateral de un prisma oblícuo ABCDE A′B′C′D′E′ es equivalente á la de un prisma recto que tenga por base una seccion MNPQR, perpendicular á las aristas del prisma oblícuo, y las aristas iguales á las del perímetro* (fig. **XX**).

Fig. XX.



Para manifestar esta verdad, prolongarémos indefinidamente en un mismo sentido las aristas laterales AA′, BB′, CC′, DD′; cortarémos estas prolongaciones con un plano perpendicular MNPQR; despues tomarémos en la misma direccion las líneas MM′, NN′, PP′, QQ′, RR′ iguales entre sí y á las aristas del prisma oblícuo: la figura MNPQRM′N′, P′Q′R′ determinada de este modo será un prisma recto de las mismas aristas laterales que el prisma propuesto, y que tendrá por base la seccion perpendicular á las aristas.

Pero los paralelógramos AB′, BC′, CD′.... tienen respectivamente las mismas bases y alturas que los rectángulos MN′, NP′, PQ′,....: luego aquellos paralelógramos, tomados uno á uno, son equivalentes á los rectángulos: *luego* etc.

Corolario. *El área de la superficie lateral del prisma oblícuo tiene por medida el producto del perímetro de una seccion perpendicular á las aristas, multiplicado por la longitud de una de estas.*

4. *La superficie lateral de una pirámide regular tiene por medida la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema de los triángulos laterales.*

En efecto, esta superficie no es otra cosa que una série de triángulos adyacentes dos á dos, que tienen por altura comun el *apotema* de la pirámide, ó sea la distancia de la cúspide á los lados de la base, componiendo la suma de sus bases el perímetro de la base de la pirámide.

Colorarios. 1.° *El área total de una pirámide regular tiene por medida la mitad del perímetro de su base por la suma de las apotemas respectivas de la pirámide y de la base.*

2.° Considerando el cono circular como una pirámide regular de infinitas caras, podemos decir que:

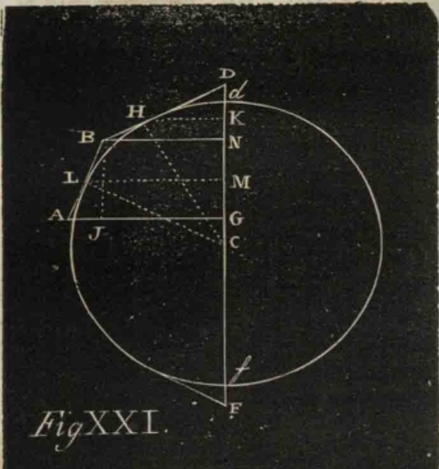
La superficie lateral del cono circular tiene por medida la mitad del *producto de su arista por la circunferencia de su base; ó el producto de su arista por una seccion equidistante de la base y de la cúspide.*

3.° *La superficie total de un cono circular recto tiene por medida la mitad del producto de la circunferencia de su base por la suma de una arista y del radio de la base.*

4.° *El área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas tiene por medida el producto de la semi-suma de los perimetros de sus bases por su apotema;* ó lo que es lo mismo, *el producto del perímetro de una seccion hecha á igual distancia de las bases, multiplicado por la apotema.*

5.° *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas tiene por medida el producto de su arista por la semi-suma de las circunferencias de las bases; ó el producto de su arista por la circunferencia dada perpendicularmente al eje á igual distancia de las bases.*

5. *La superficie de la esfera es igual al producto de la circunferencia del circulo máximo por su diámetro y cuadruple de la de su circulo máximo.* (fig. XXI).



FigXXI.

Si suponemos que el semipolígono regular DBA...F′, circunscrito al semicírculo dHL....f, gira al rededor del diámetro d f, no hay duda que en esta revolucion engendrará tantas figuras cónicas como lados tiene, y la superficie total será la suma de estas figuras. El lado BD producirá un cono cuya superficie, suponiendo HK una perpendicular bajada al diámetro desde H, punto medio de BD, será; s= BD×*circ.* HK. Dirigiendo ahora el rádio HC, perpendicular necesariamente al lado tangente BD, resultarán los triángulos HCK y BND, semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares; cuya semejanza nos dará la siguiente proporcion:

HC:HK::BD:DN.

Por otra parte, las circunferencias trazadas con los rádios HC y HK son proporcionales á estos rádios; y sustituyendo, la proporcion anterior se convertirá en la siguiente:

Circ. HC: *Circ.* HK :: BD : DN; de donde

Circ. HC×DN=*Circ.* HK×BD ; y colocando la primera cantidad en lugar de la segunda en la expresion de la superficie cónica engendrada por BD será s=*Circ.* HC×DN.

La superficie del tronco cónico engendrado por BA será tambien s′=*circ.* LM×AB, suponiendo la LM perpendicular bajada al diámetro desde L, punto medio de AB. Tirando el rádio LC, por la misma razon anterior, los triángulos semejantes LCM y ABJ dan esta proporcion :

circ. LC : *circ.* LM :: AB : BJ ; de donde
circ. LC×BJ=*circ.* LM×AB. Sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta la expresion de la superficie producida por AB, que será

s′=*Circ.* LC×BJ ; ó lo que es lo mismo :
s′=*Circ.* LC×NG.

Del mismo modo se demuestra, que cada figura redonda, engendrada por la revolucion de cada lado, tiene por medida el producto de la circunferencia trazada con el rádio de la esfera, por la parte de diámetro igual á la altura del cuerpo engendrado. La suma de todas estas superficies parciales compone la superficie total de la figura engendrada por la revolucion del semipolígono circunscrito, y como este semipolígono se puede aproximar cuanto se quiera al semicírculo, podremos tomar el cuerpo engendrado por aquel, como si fuera producido por la revolucion de una semicircunferencia: es decir, podemos considerar como una esfera, sin peligro de grande equivocacion, el cuerpo originado por el semipolígono.

Si reunimos, pues, las superficies parciales de los diferentes conos producidos en la revolucion, la suma total representará la superficie de la esfera: y asi, sumando ordenadamente las ecuaciones anteriores

s=*Circ.* HC×DN
s′=*Circ.* LC×NG
. . . .
tendrémos s+s′=*Circ.* HC×DN+*Circ.* LC×NG
ó lo que es lo mismo s+s′=*Circ.* HC (DN+NG).

Y llamando S á la suma de las superficies parciales s+s′...., C á la circunferencia del círculo máximo, 2r al diámetro de la esfera, ó á la suma DN+NG...., nos resultará :

$$S=C\times 2r$$

y sustituyendo en esta ecuacion el valor de $C=2r\pi$, se habrá convertido en esta expresion

$$S=4r^2\pi$$

Esta fórmula nos dice que, para determinar la superficie de la esfera, debemos cuadruplicar el producto del cuadro de su rádio por π y al mismo tiempo nos manifiesta, que el área de la esfera es cuadrupla de la del círculo máximo, supuesto que esta es igual á $r^2\pi$.

§. VI. *De los volúmenes.*

1. ¿Cuál es la unidad de medida para los volúmenes?—2. ¿Cómo se determina el volumen de un paralelepípedo rectangular? ¿Cuál es el volumen del cubo?—3. ¿Cuál es la expresion del volumen de cualquier paralelepípedo?—4. ¿Cuál es el volumen de un prisma cualquiera? ¿Cuál es el volumen del cilindro?—5. ¿Cómo se determina el volumen de una pirámide? ¿Cuál es el volumen del cono?—6. ¿Cuál es la expresion del volumen de la esfera?

1. Asi como para medir las superficies planas tomamos el cuadrado por unidad, del mismo modo para medir los volúmenes nos servirá de unidad el cubo construido sobre una arista, igual á la unidad lineal.

2. ***El volumen de su paralelepípedo rectangular es igual al producto de la superficie de su base multiplicada por la altura*** (fig. **XXII.**)

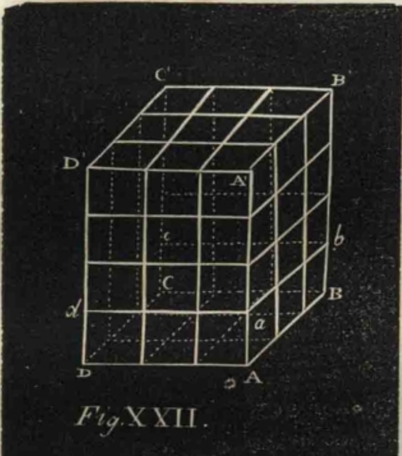


Fig. XXII.

En efecto, supongamos que la altura AA' contiene cuatro veces á la altura de la unidad de medida. Si cortamos el paralelepípedo por todos los puntos de division y paralelamente á la base, quedará dividido en cuatro primas de la misma base y altura; por consiguiente del mismo volumen. Todos estos primas, pues, contendrán la unidad de medida el mismo número de veces, y para determinar la medida del prisma total, será suficiente multiplicar este número por el número 4 de los prismas pequeños que han resultado. Pero el primero Ac contiene á la unidad de medida tantas veces como su base, que es la base A B C D del prisma grande, puede contener á la base cuadrada de esta unidad, es decir, tantas veces como designa la superficie del prisma AC.' Asi, pues, el volumen de un paralelepípedo rectangular se obtiene multiplicando la superficie de la base por la altura. En el caso presente es 9; y el volumen será por consiguiente $9 \times 4 = 36$ pies cúbicos.

Corolarios. 1.° ***El volumen de un paralelepípedo rectangugular es igual al producto de tres aristas adyacentes, ó que forman un ángulo triedro.***

2.° Siendo iguales en el cubo todas las aristas,

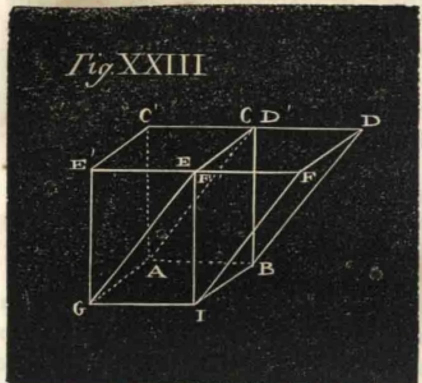
El volúmen del cubo es igual á la tercera potencia de una de sus aristas.

Por esta razon se llama *cubo* la tercera potencia de cualquier cantidad.

3. *Todo paralelepípedo AF, recto ú oblicuo, tiene el mismo volúmen que un paralelepípedo rectangular de base equivalente y de la misma altura.*

Sean AD y GF las caras opuestas que tomamos por bases, y las aristas AG, BI, CE, DF, perpendiculares á las bases, en el paralelepípedo recto AF (fig. XXIII). Tirarémos por las rectas AG, BI, dos planos perpendiculares á los planos paralelos AI, CH. Los planos tirados de este modo cortarán respectivamente las caras laterales AD, GF segun las rectas AC′ y BD′, GE′ é IF′, y suponiendo estas rectas terminadas en el plano de la cara opuesta CF, resultará un nuevo paralelepípedo AF′. Pero este paralelepípedo es rectangular, porque AC′ y sus paralelas son perpendiculares á los planos AI, CF, y por consiguiente á las rectas AB, CD′; de donde resulta que las caras AD′, GF′, que podemos tomar por bases, serán rectángulos; y ademas las aristas laterales AG, BI, son perpendiculares á los planos de estas bases.

Fig. XXIII



Ahora bien, los dos paralelepípedos AF, AF′ que tienen sus bases equivalentes AD, AD′ y una misma altura AG, serán iguales en volúmen.

En efecto, los dos prismas determinados, el uno por las aristas laterales AG, CE, C′E′, y el otro por la BI, DF, D′F′, son iguales luego, restándolos separadamente de la figura total AGBI DFC′E′, obtendrémos dos diferencias iguales.

Pero una de estas rectas es el paralelepípedo AF, y la otra el paralelepípedo AF′. Luego etc.

Corolario. *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

4. *El volúmen de un prisma cualquiera tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.*

Acabamos de demostrar este teorema general relativamente á los paralelepípedos, y las reflexiones siguientes nos harán conocer que es igualmente aplicable á todos los prismas.

En efecto, si en un paralelepípedo cualquiera tiramos un plano diagonal que pase por dos aristas laterales, nos resultarán dos prismas triángulares, que, por tener una misma base y altura, serán iguales en volúmen. Así pues, cada uno de ellos será la mitad del primitivo; pero el primitivo tiene por expresion de su volùmen el producto de su base por la altura: luego el volúmen de cada uno de ellos será igual al producto de la mitad de la base del paralelepípedo por la misma altura; pero la mitad de la base del paralelepípedo primitivo es puntualmente la base de cada uno de los dos que han resultado: luego el volúmen del prisma triangular será equivalente al producto de su base por la altura.

Como todos los prismas se pueden dividir en triangulares por medio de planos diagonales, se infiere que el volúmen total del prisma tomado en consideracion será igual á la suma de los volúmenes parciales de los prismas triangulares. Teniendo cada uno de estos por expresion de su volúmen el producto de su base por la altura comun, resulta que la suma de estas bases, ó sea la base total del prisma multiplicada por su altura, expresará su volúmen total.

Corolarios. 1°. *Dos prismas que tienen bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes en volúmen.*

2.° Considerando el cilindro como un prisma de infinitas caras, podemos decir que:

El volúmen del cilindro tiene por medida el producto de la superficie de su base por la altura.

5. *Toda pirámide es equivalente á la tercera parte de un prisma de la misma base y altura* (fig. XXIV).

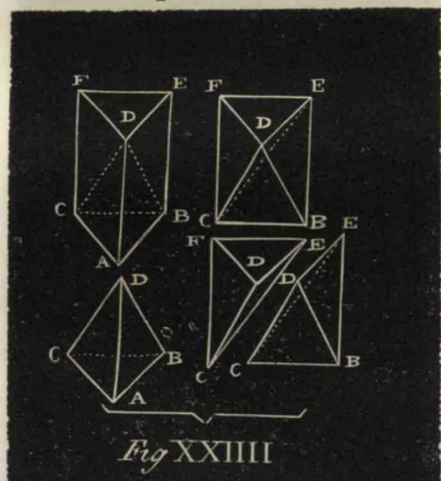


Fig XXIIII

Supongamos que la pirámide en cuestion sea un tetraedro ABCD ; y el prisma de la misma base y altura el triangular ABCDEF. Tirarémos las rectas DB, DC, y por ellas harémos pasar un plano CDEB, cuya seccion nos dará dos pirámides, una triangular ABCD, y otra cuadrangular CBEFD. En la cuadrangular CBEFD tirarémos un plano CDE, determinado por las aristas CD, DE, de cuya seccion resultarán otras dos pirámides triangulares que tendrán una altura comun y las bases iguales. Quedará, pues, descompuesto el prisma triangular en tres tretraedros equivalentes, á saber; el ABCD=DEFC, por tener iguales la base y la altura, que son puntualmente las del prisma. Si en la pirámide DEFC, consideramos como base el triángulo EFC, y como cúspide el punto D, esta pirámide será equivalente á la CBED, por tener iguales la base y altura: así, pues, la pirámide DEFC= ABCD=CBED. Luego cada una de ellas es la tercera parte del prisma primitivo.

Ademas, pudiendo dividir toda pirámide en tetraedros de la misma altura que este, y que tengan respectivamente por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.º *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.º Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras, esta consideracion nos conducirá á decir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

6. *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de su superficie multiplicada por el radio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de poliedros planos infinitamente pequeños; de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el radio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el radio de la esfera; luego el conjunto de todas ellas, ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del rádio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con R el radio, resultará la expresion:

$$V = S \times \frac{r}{3};$$

pero $S = 4\, r^2\, \pi$

luego $V = \frac{4}{3} \pi\, r^3$

Ademas, pudiendo dividir toda pirámide en otras, de la misma altura que esta, y que tengan respectivamente por bases los triángulos parciales en que su base queda descompuesta, la proposicion es igualmente aplicable á cualquier pirámide.

Corolario. 1.° *La pirámide tiene por medida el tercio del producto de su base por su altura.*

2.° Si consideramos el cono como una pirámide de infinitas caras, esta consideracion nos conducirá á decir que:

El volúmen del cono se mide por la tercera parte del producto de su base por la altura.

3.° *El volúmen de una esfera tiene por medida el tercio del producto de la superficie multiplicada por el radio.*

Podemos considerar la superficie esférica como compuesta de una infinidad de polígonos planos infinitamente pequeños: de donde resulta que la esfera se puede concebir como compuesta de pirámides, que tengan por bases cada uno de los planos del polígono, y por altura el radio de la esfera. Pero cada una de estas pirámides tiene por medida la tercera parte del polígono de su base por el radio de la esfera: luego el conjunto de todas ellas, ó sea la esfera, tendrá por medida el tercio del radio por la suma de todos los polígonos que componen la superficie esférica.

Corolario. Si designamos con la letra V el volúmen de la esfera, con S la superficie, y con R el radio, resultará la expresion:

$$V = S \times \frac{r}{3}$$

pero, $S = 4\pi r^2$

luego $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

CAPITULO II.

DIBUJO LINEAL.

1.ª SECCION.=DEL DIBUJO LINEAL.

§ 1.º *Definicion, utilidad y aplicaciones del dibujo lineal.*

1. Qué se entiende por dibujo lineal?– 2. Orígen del dibujo lineal.– 3, En qué se diferencia del trazado geométrico y del dibujo académico?– 4 Utilidad del dibujo para las clases industriosas.– 5. Division del dibujo lineal.– 6. En qué consiste el dibujo lineal á ojo?– 7. En qué consiste el dibujo lineal gráfico?– 8. Por qué debe el principiante ejercitarse antes en el dibujo sin instrumentos?

1. *El dibujo lineal*, tomado en un sentido general, es el arte de imitar los contornos de los cuerpos y de sus diferentes partes, por medio de simples delineamientos y sin el auxilio de sombras ni de colores.

2. Si retrocedemos al orígen del dibujo lineal, le encontrarémos en el nacimiento de las artes industriales. En todos los tiempos el gefe de un taller, para hacerse entender de sus oficiales, y los oficiales igualmente para entenderse entre sí, se han valido de diseños mas ó menos exáctos, con el objeto de prepararse para el trabajo, ó de practicar lo que habian concebido.

3. No debemos confundir el dibujo lineal con el *trazado geométrico* que se ejecuta con el compas y con la regla, ni con el *dibujo académico* que rara vez suele conciliar la exactitud con la elegancia. El dibujo lineal es la reunion del uno y del otro.

4. El dibujo lineal, útil á casi todas las profesiones, lo es principalmente para aquellas cuyos trabajos consisten en la imitacion de las figuras. Los carpinteros, los albañiles, los ebanistas, los aserradores, los torneros, los grabadores sobre metales y madera, con particularidad los

oficiales que se dedican á la construccion de máquinas é instrumentos, si no conocen á fondo este arte, con dificultad darán un paso en su profesion, porque no podrán comprender ni transmitir sus ideas á los obreros. Si cualquier hombre, en la posicion social mas elevada, tiene en muchas ocasiones necesidad de transmitir claramente su pensamiento por medio de una figura al artesano de que se sirve, el artesano á la vez debe entender el arte del dibujo para comprender los objetos que se le piden, y al mismo tiempo dibujarlos para comunicar sus ideas á los obreros subalternos. Así, el albañil, el carpintero de ribera, el de taller, el ebanista, el aserrador, etc., en una palabra, un artesano cualquiera no puede hacer con perfeccion una pieza de su arte, si antes no se ha dado cuenta por medio de un diseño de las dimensiones de todas las partes. El dibujo lineal, pues, es de primera necesidad para las clases inferiores de la sociedad.

5. Hay dos especies de dibujo lineal: *dibujo lineal á pulso ó sin instrumentos, y dibujo lineal gráfico* ó *con instrumentos*.

A esto podemos añadir las nociones sobre el *método general* del dibujo, sobre las *proyecciones*, sobre la *arquitectura* y sobre la *perspectiva*.

6. El *dibujo lineal* que se hace á *pulso* consiste en representar los objetos que hay á nuestra vista con una precision, no matemática, sino aproximativa, que en muchos casos es suficiente.

El dibujo á pulso, practicado por algun tiempo, dá al ojo aquel tino de que tanto necesita, soltura á los dedos y gracia á los contornos.

7. *El dibujo lineal gráfico* consiste en representar los objetos con una exactitud rigorosa, como se requiere en la aplicacion. Pero esto no se puede conseguir sin el auxilio de ciertos instrumentos geométricos, como la regla, el compas, la escuadra, el semicírculo, etc.

8. Antes de entrar en el dibujo gráfico, debe el discípulo ejercitarse en el dibujo sin instrumentos. Este dibujo parece á primera vista mas difícil que el dibujo con instrumentos; pero la experiencia no tarda mucho tiempo en manifestar lo contrario. Los discípulos se ven en los primeros dias muy embarazados en el dibujo sin instrumentos; pero muy pronto quedarán sorprendidos de la facilidad con que en breve tiempo trazan las figuras mas complicadas. Adiestrados en este dibujo, habrán conseguido aquel desembarazo en los dedos, tan necesario para hacer el uso conveniente del compas, la regla, y demas instrumentos matemáticos.

Si se quiere conciliar los dos métodos, el discípulo deberá trazar el dibujo, primero á ojo, y despues con instrumentos. De este modo podrá rectificar las inexactitudes que en el primero haya cometido.

Cualquiera que sea el dibujo de que hagamos uso, su aplicacion será siempre á las figuras que en último análisis se reducen á dos elementos, la *linea recta* y la *linea curva*, aisladas ó combinadas entre sí.

§ 2.º *Aplicaciones de la línea recta en el dibujo lineal á pulso.*

1. Qué es linea vertical y horizontal? Qué es plomada?— 2. Construccion de la linea horizontal y vertical en la pizarra. Cómo se comprueban la vertical y la horizontal?— 3. Que se entiende por escala de proporcion?— 4. Cuáles son los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la linea recta?— 5. Concluidos estos elementos ¿qué deben dibujar los discipulos?— 6. Dibujar una ensambladura de carpintería.— 7. Escuadras.— 8. Alineacion de un camino.— 9. Pilastra.— 10. Jamba.— 11. Persianas.— 12. Estrado.— 13. Escalera.— 14. Chimenea.— 15. Reja.— 16. Ventana de seis tableros.— 17. Puerta de dos tableros. 18. Puerta de tableros desiguales.— 19. Embaldosados.- 20. Enrejado.— 21. Tresbolillo. 22.- Pared formada de piedra de silleria.

1. Llámase *linea vertical* la recta que en su descenso describe un cuerpo, obedeciendo á la fuerza de gravedad. Esta línea está muy bien representada por el hilo de la plomada: entiéndese por *plomada* un hilo sostenido por uno de sus extremos, y que por el otro tiene un pesito ordinariamente de plomo.

Llámase *horizontal* á la recta perpendicular á la vertical.

2. La construccion de la línea horizontal no ofrece dificultad alguna: no sucede lo mismo con la vertical, á causa del hábito que tenemos de dar á la escritura alguna inclicacion de derecha á izquierda.

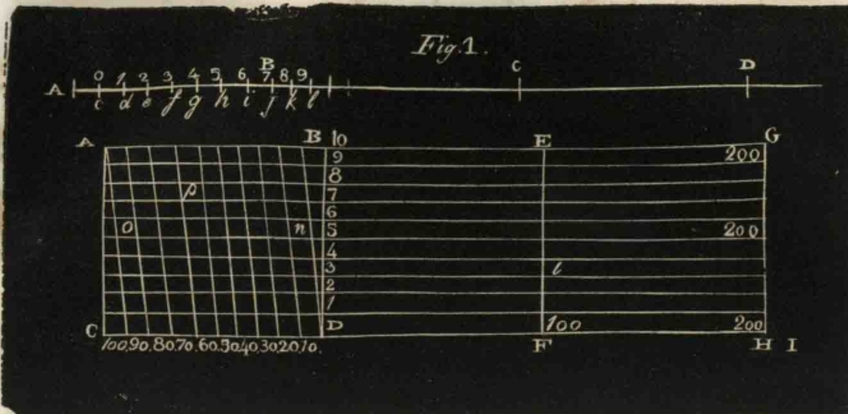
Si dibujamos sobre la pizarra ó sobre un tablero, la horizontal debe ser paralela al borde superior ó al inferior; y la vertical, á uno de los bordes laterales.

Si queremos formar estas líneas con la regla, tomarémos dos puntos equidistantes, ó del borde horizontal ó del lateral, tirando una recta por estos puntos.

Para comprobar la línea horizontal, medirémos las distancias desde sus extremos al borde superior ó inferior; si esta distancia es igual por ambos extremos, la horizontal estará bien construida.

Si queremos conseguir una verificacion mas precisa, harémos uso de la plomada, que deberá confundirse con la línea en toda su longitud, si la vertical está trazada.

3. Llámase *escala de proporcion* una línea AD (fig. 1), dividida en

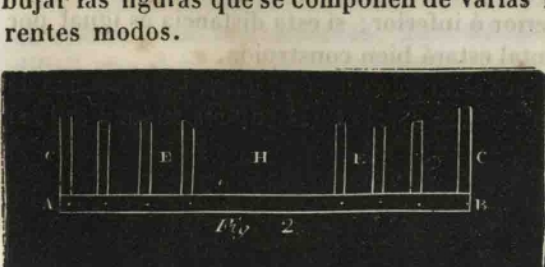


partes iguales, cada una de las cuales representa la longitud que se le quiera atribuir; de modo que la figura que representa el objeto tenga con esta escala la misma proporcion que el objeto mismo tiene con su medida real.

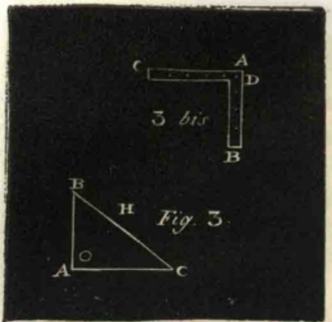
4. La construccion de la horizontal y de la vertical pertenece á los elementos geométricos del dibujo lineal, relativos á la línea recta.

Estos elementos comprenden todo lo que dice relacion con el trazado de la línea recta en sus diferentes posiciones, la division de esta línea en muchas partes, la construccion de los ángulos y su division, la formacion de los polígonos, es decir, de los triángulos, del trapecio, del rombo, del rectángulo, del cuadrado, la representacion de la pirámide del prisma, del paralelepípedo, del cubo, etc.; construcciones que en su mayor parte se hallan ya indicadas en las nociones de geometría que preceden á este tratado.

5. Terminados los elementos geométricos, los discípulos entran á dibujar las figuras que se componen de varias rectas combinadas de diferentes modos.

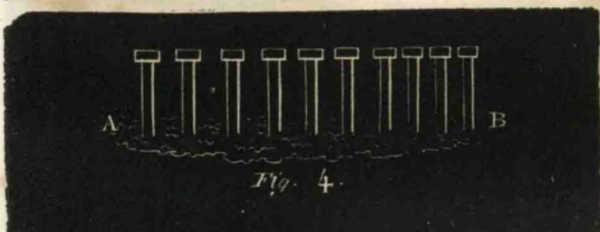


6. **Ensambladura de carpintería.** Divídese en partes iguales la solera AB (fig. 2), y levántanse perpendiculares segun el grueso y la distancia de los maderos.

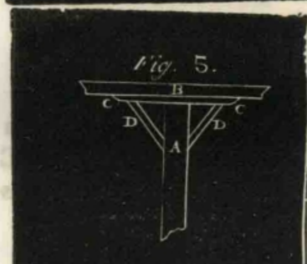


7. **Escuadras.** Para dibujar la *escuadra ordinaria*, trazarémos el lado AC, sobre este levantarémos la perpendicular AB, y finalmente tirarémos la hipotenusa BC (fig. 3).

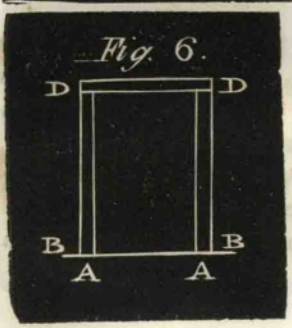
La escuadra representada en la fig. 3, se dibuja tirando paralelas á AB y AC, segun la anchura D que se quiere dar al hierro ó á la madera, de que se compone el instrumento.



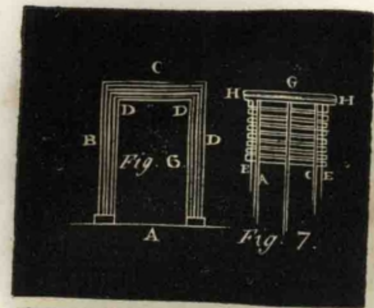
8. **Alineacion de un camino.** Levántese sobre una base AB varias verticales igualmente separadas. Estas líneas figuran unas estacas que se llaman *jalones* (fig. 4),



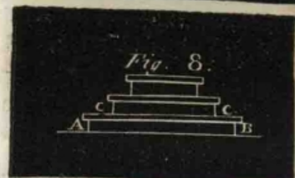
9. **Pilastra**. Se tirarán líneas verticales, horizontales y oblicuas, segun el grueso de la pilastra A, de la viga B, del capitel C, y de los puntales D. (fig. 5).



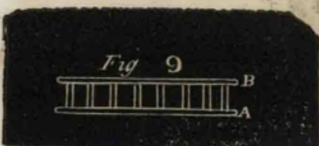
10. **Jamba**. Tómese una base A de la anchura de la puerta; levántense las perpendiculares BD, de una altura que con poca diferencia sea doble de la anchura, y únanse por medio del dintel D. (fig. 6).



11. Persianas. Consisten en paralelas equidistantes, dispuestas de dos en dos, para representar de este modo la anchura de las varillas, (fig. 7).



12. Estrado. Se tirarán paralelas á la base AB, haciéndolas sucesivamente mas cortas, segun se vayan apartando de la misma. (figura 8).



14. Escalera. Los largueros A, B, deben ser un poco convergentes, y los escalones equidistantes. (fig. 9).

14. Chimenea. Trácense verticalmente los lados ó jambas A; el travesero B, y la cornisa C que se representan con líneas horizontales: las partes D, D se llaman *zócalos*. (fig. 10).

15. Reja. Trácense las guarniciones A, B, C, D, y unánse por medio de rectas los ángulos opuestos de la guarnicion interior, así como tambien los puntos medios de cada travesero. En la interseccion de los barrotes se ponen unos botoncitos que podrán ser de cobre dorado. El antepecho A debe estar adornado con una pequeña moldura. (fig. 11).

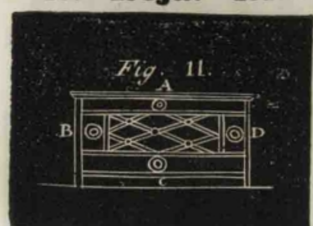
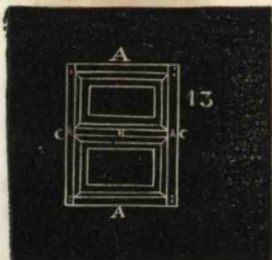



Fig. 12.

16. Ventana de seis tableros, etc. Se tirará una línea, dos ó tres veces mayor que A; se levantará una perpendicular que tenga con la primera la misma relacion que D con A; fórmese el bastidor A BCD y la armazon E; finalmente, háganse las tres divisiones de la altura y las dos de la base, y quedará representado lo restante de la ventana. (fig. 12).


13

17. Puerta de dos tableros. La altura de una puerta podrá ser con poca diferencia doble de la anchura; las líneas C representan las aristas exteriores de la armazon; los tableros son iguales y ensamblados por medio de ranuras con la armazon A, así como el traverso B; y ademas están adornados con una pequeña moldura, (figu-

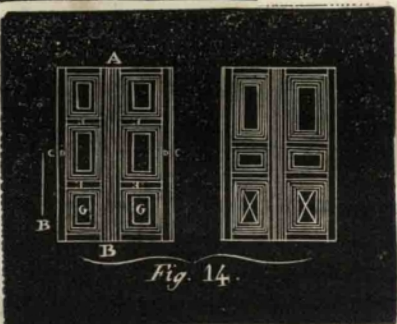


Fig. 14.

18. Puerta de tableros pequeños y grandes. Las aristas esteriores de la guarnicion están representadas por medio de las líneas C; y por AB la union de las hojas de la puerta. (fig. 14.)

19. Embaldosados. No hay mas que tres especies de polígonos regulares que se puedan ajustar exactamente, sin dejar entre sí ningun vacío; el triángulo, el cuadrángulo y el exágono. Si queremos, pues, embaldosar una pieza con ladrillos iguales que se ajusten exactamente, emplearémos uno de los polígonos mencionados. (fig. 15).


Fig. 15

Si se hace uso del obtágono, se llenan los vacíos con cuadrados, que

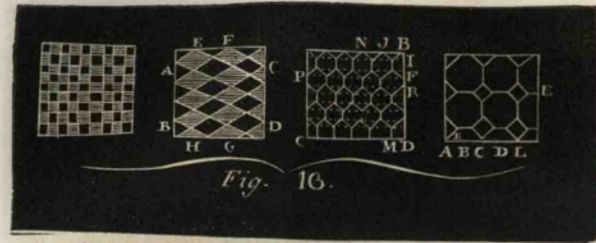


Fig. 16.

tengan su lado igual al del octágono. Cuando el embaldosado se hace con el cuadrado ó con el rombo, ordinaríamente se elijen de diferentes colores. (figura 16).

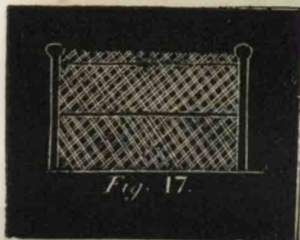


Fig. 17.

20. **Enrejados.** En los enrejados, que tienen sus agujeros cuadrados y oblícuos, todas las barras son paralelas, igualmente apartadas unas de otras, é inclinadas 45°, sobre el horizonte. (fig. 17).

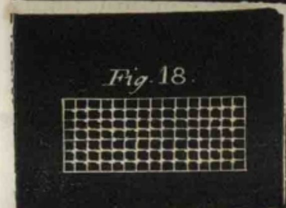


Fig. 18.

21. **Resbolillo.** Esta figura, muy comun en la jardinería, consiste en disponer los árboles de tal manera que presenten calles en todas direcciones. (fig. 18).

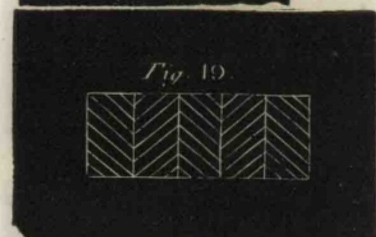


Fig. 19.

22. **Pared formada de piedra de sillería.** Las junturas de las piedras son, unas verticales, y otras horizontales. (fig. 19).

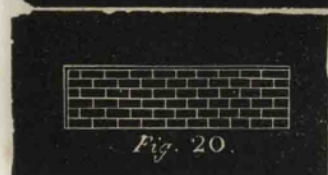


Fig. 20.

Para trazar esta figura, tirarémos líneas horizontales y verticales, de modo que se encuentren alternativamente, como se ve en la figura 20.

§ 3.º *Aplicaciones de la linea curva en el dibujo lineal á pulso.*

1. Cómo se traza á ojo un círculo? Modo de comprobarlo.– 2. Cuáles son las principales figuras curvilineas?– 3. Qué es elipse? Cómo se traza á ojo?– 4. Elipse del jardinero: asa de cesta: óvalo espiral.– 5. Objeto de los elementos geométricos del dibujo lineal.– 6. Cómo se traza una media luna?– 7. Dibujar un mapa–mundi — Construccion del trasportador.– 9. Cómo se traza una estrella de seis rayos?

1. Si se nos pide trazar á pulso un círculo sobre la pizarra ó sobre el tablero negro, podrá ser un círculo arbitrario, ó de un radio determinado, ó que tenga su centro en un punto dado.

Por medio de un ejercicio muy sostenido, consiguen los discípulos describir los círculos y marcar su centro con una exactitud que difiere muy poco de la del compás.

Si en la construccion se nos dan ciertos datos, p. ej., el centro ó el radio del círculo, será ya mas difícil que la formacion de un círculo arbitrario.

Para comprobar un círculo harémos uso del compás.

2. Las principales figuras curvilineas son: la *elipse ordinaria*, la *elipse de jardinero, el asa de cesta, el óvalo y la espiral.*

3. Entiéndese por *elipse una curva cerrada, tal que la suma de las distancias de uno de sus puntos á otros dos que se llaman focos, es siempre igual á la linea que pasa por dichos focos y que termina por sus extremos en la curva.*

Para trazar una elipse, tirarémos dos rectas perpendiculares; se tomarán dos partes iguales por arriba y por abajo, otras dos partes iguales, diferentes de las primeras, á derecha é izquierda del punto de interseccion. Estas líneas, que en el artículo son todas iguales, no lo son en la elipse sino dos á dos; llámase la una *eje mayor*, y la otra *eje menor* de la elipse. (fig. 21). Hecha esta construccion, se traza la curva, cuidando mucho de que no resulten corcobos, ni se pierda la continuidad. Los cuatro segmentos formados por los dos ejes deben ser exactamente iguales, de modo que, si se dobla la figura por uno de los ejes, los trazos de las curvas coincidan perfectamente cayendo el uno sobre el otro.

De este modo podemos construir á pulso la elipse; bien es verdad que no será con aquella exactitud reservada al trazado geométrico, de que se hablará mas adelante; contentándonos con imitar por el primer medio el contorno gracioso de esta curva.

Cuanto mas disminuya el eje menor con relacion al mayor, la elipse será mas prolongada; y cuanto mas aumente, tanto mas se aproximará al círculo. Así pues, podemos concebir una infinidad de elipses segun la mayor ó menor desigualdad de los ejes.

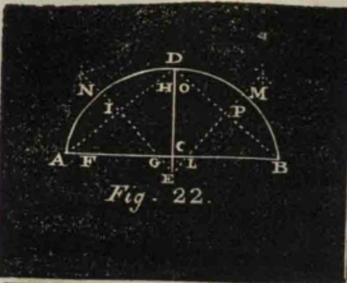


Fig. 22.

4. La *elipse del jardinero* es semejante á la elipse ordinaria; pero se construye de otra manera, como verémos mas adelante.

El *asa de cesta* es una curva formada por otras cuatro, de los cuales AN, BM son iguales. (fig. 22.)

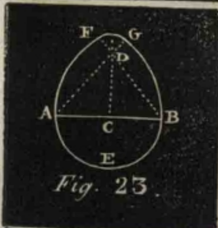


Fig. 23.

El *óvalo* es una figura circular formada por cuatro curvas, de las cuales solamente las dos, BG y AF son iguales (fig. 23).

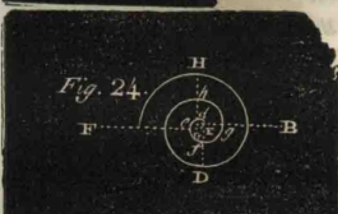


Fig. 24.

La *espiral* es una línea, que al paso que da vueltas se aparta mas de su centro. (figura 24).

5. Los elementos geométricos del dibujo lineal relativos á la línea curva, comprenden todo lo que tiene conexion con el trazado del círculo, segun los diferentes datos que para este objeto se nos den, la construccion de los arcos, de las tangentes, de los polígonos inscritos ó circunscritos, de los cilindros rectos ú oblícuos, de los conos rectos ú oblícuos, de la esfera, etc.; construcciones que en su mayor parte se han manifestado ya en las nociones de geometría.

Fig. 25.

6. **Media-luna**. Esta figura se compone de dos arcos, que pasan por dos puntos comunes A y B, y están trazados desde dos centros tomados sobre una línea perpendicular á la recta, que une los puntos A y B (fig. 25).

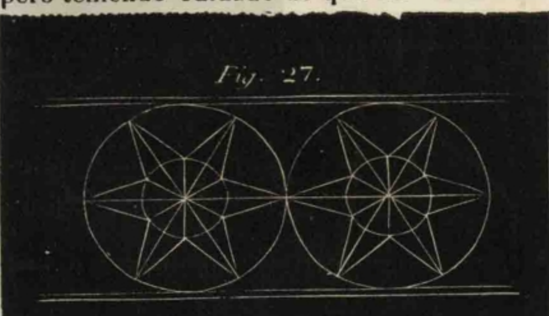
Fig. 26.

7. **Mapa-mundi.** Para hacer esta construccion trazarémos dos esferas con sus meridianos y círculos menores, que dividan la esfera en zonas. (fig. 26).

8. **Trasportador.** Consiste este instrumento, como ya en otra ocasion manifestamos, en un semicírculo, cuyo borde está dividido en 180°. Para dibujar un trasportador sobre el papel, se traza desde luego un semicírculo con su diámetro, procediendo á la division de su limbo del modo siguiente: sobre la circunferencia colocarémos tres veces su radio; y de este modo quedará dividida en tres arcos iguales, cada uno de 60°: despues dividirémos por su mitad cada uno de los anteriores, cuyo valor será de 30°; harémos con los últimos la misma operacion, de donde resultarán arcos de 15°; dividirémos cada uno de estos en tres partes iguales, y el semicírculo quedará dividido de 5 en 5 grados; finalmente cada uno de estos se dividirá en 5 partes iguales, y la operacion quedará terminada.

9. **Estrella de seis rayos.** Trácense desde luego dos círculos concéntricos, es decir, que tengan su centro comun; sus radios serán el uno la mitad del otro; tírense dos diámetros, uno vertical y el otro horizontal; colóquese seis veces desde uno á otro extremo el radio mayor sobre una circunferencia, y de este modo quedará dividida en seis arcos iguales. Hágase lo mismo con el radio menor sobre un círculo; pero teniendo cuidado de que las divisiones del uno principien desde las estremidades del diámetro vertical, y las del otro, desde el horizontal. Solo falta ya tirar los diámetros correspondientes á los puntos de division, y las oblícuas que unen alternativamente á estos puntos dos á dos. (fig. 27).

Fig. 27.



§. 4. *Aplicacion de las lineas rectas y curbas combinadas en el dibujo lineal á ojo.*

1. De qué clase de líneas se componen los dibujos usados en las artes?– 2, Qué proporciones determinan un dibujo?–3. Cuáles son las superficies mas agradables á la vista?– 4. Qué son molduras?– Cuántas clases hay?– 5. Cuáles son las principales molduras rectas?– 6. Cuáles son las principales molduras circulares?–7. Regla general para la ejecucion de la mayor parte de estos dibujos.–8. Dibujar un arco.–9. Construccion de las poleas y aparejos.– 10. Dibujo de rejas.— 11. Rejas de balcon; rejas de articutos tangentes, etc.— 12. Ruedas hidráulicas.– 13. Engranaje.– 14. Astrágalo.– 15. Cornisa. –16. Florero.– 17. Jarron.

1. Los dibujos usados en las artes se componen en su mayor parte de la línea recta y de la curva, combinadas entre sí.

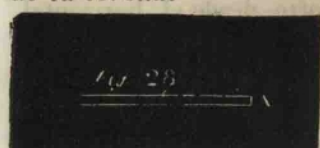
2. Para que los modelos sean graciosos y elegantes, es preciso que sus diferentes partes sean fracciones sencillas, que desde luego se puedan apreciar. La mitad, la tercera, la cuarta parte, son casi las únicas, á que nuestra vista se puede acostumbrar; saliendo de estas fracciones, entra ya la confusion, porque no podemos juzgar de las proporciones. Esta es la razon, porque el hueco de una puerta ó de una ventana debe ser con corta diferencia dos veces mas alto que ancho.

3. Las superficies llamadas de *revolucion*, como el cilindro, el cono y la esfera, son las mas agradables á la vista; cada seccion perpendicular al eje produce un círculo, curva que inmediatamente reconocerémos donde quiera que se encuentre.

4. Las molduras son las partes salientes que sirven de adorno en la arquitectura.

Hay tres clases de molduras: las rectas, las circulares y las compuestas.

5. Las principales molduras rectas son: el *filete*, el *larmica*, y la *faja de la corona*.



El *filete* es una moldura cuadrada y estrecha tal como nos la presenta la figura 28.

El *listel* es una moldura cuadrada unida inmediatamente en una curba.