MANUAL COMPLETO

DE

INSTRUCCION PRIMARIA

ELEMENTAL Y SUPERIOR.

MANUAL COMPLETO
DE
INSTRUCCION PRIMARIA
ELEMENTAL Y SUPERIOR.

para uso de los aspirantes á MAESTROS, *y especialmente de los alumnos de las* ESCUELAS NORMALES DE PROVINCIA,

REDACTADO

con el mismo método del que con igual objeto escribió en francés

M. EM. LEFRANC,

POR

D. JOAQUIN AVENDAÑO,

ex-maestro de la Escuela normal central del Reino y director de la de ZARAGOZA.

SEGUNDA EDICION.

TOMO II.

MADRID:

Imprenta de D. DIONISIO HIDALGO, *calle de la Flor baja, núm.* 24.

—

1844.

MATERIAS QUE COMPRENDE:

PRIMER TOMO.

Psicologia.
Moral.
Religion.
Lectura.
Escritura.
Gramática castellana.
Retórica.
Poética.
Literatura española.
Aritmética.

SEGUNDO TOMO.

Geometria.
Dibujo lineal.
Agrimensura.
Física.
Química.
Historia natural.
Geografía universal.
Id. de España.
Historia universal.
Id. de España.
Educacion.
Métodos de enseñanza.
Disposiciones legislativas acerca de la instruccion primaria.

CAPITULO I.

GEOMETRIA.

PRIMERA PARTE.=GEOMETRIA PLANA.

1.ª SECCION.=DE LAS LINEAS.

§. I. *Nociones preliminares.*

1. Qué es geometria? Qué significa esta palabra?–2. Qué es extension?–3. Qué se entiende por cuerpo?–4. Qué es superficie?–5. Qué es línea?–6. Qué es punto?–7 De cuántas maneras se puede considerar el cuerpo, la superficie y la línea?–8. Cómo se designan las diferentes partes de una figura?–9. Qué son figuras equivalentes, semejantes, iguales?–10. Cómo se designa el punto?–11. Principales proposiciones y cuestiones que se consideran en la geometria.-12. Qué es axióma?-13. Teorema, razonamiento, demostracion, partes que se distinguen generalmente en la enunciacion de un teorema.–14. Qué se entiende por reciproca?–15. Qué es corolario?–16. Problema; qué es resolver un problema y como se llama el resultado que se obtiene?–17. Principales métodos de resolucion: qué se entiende por sobreposicion de figuras? Qué es lo que se llama reduccion ad absurdum?-18. Signos principales y abreviaciones que se usan en la geometria?

1. La *geometria* es una ciencia, que tiene por objeto la medida de la extension.

Si atendemos á su etimología, esta palabra significa literalmente *medicion de la tierra*, habiendo merecido este nombre por la aplicacion que desde muy temprano se hizo de esta ciencia á la medicion de los terrenos.

2. Llamamos *extension* á todo lo que se compone de las tres dimensiones que comunmente se conocen con los nombres de *longitud*, *latitud* y *profundidad*.

3. Llámase *cuerpo* considerado geométricamente, todo aquello que ocupa un lugar en el espacio. El cuerpo reune siempre las tres dimensiones. En efecto, por pequeño, tenue y sútil que sea un cuerpo, siempre tendrá algo de largo, de ancho y de profundo ó grueso.

4. Pero nuestro entendimiento puede prescindir de una de estas dimensiones de la profundidad p. ej.; en cuyo caso queda el cuerpo sola-

mente con su longitud y latitud, ó lo que es lo mismo, con la parte exterior que lo limita y encierra en un lugar determinado. Á esto llamamos *superficie*. De suerte que *superficie* es el límite de un cuerpo, ó lo que resultaria en el cuerpo, desentendiéndonos de una de sus dimensiones. Si nosotros nos figuramos una barra de hierro, en la cual vaya su grueso disminuyendo mas y mas hasta que llegue á O, nos formaremos idea de la superficie.

5. Si en la superficie concebimos que una de sus dimensiones p. ej. la latitud va decreciendo incesantemente, hasta que se haya reducido á O, ó lo que es lo mismo, hasta que hayamos llegado á los bordes que limitan la superficie, conoceremos de algun modo lo que se llama *línea*. Entendemos pues por *línea* el límite de la superficie, ó lo que quedaria de esta, prescindiendo de su latitud.

6. Figurémonos tambien que en la línea desaparece la longitud, ó que solamente fijamos nuestra atencion en los extremos que limitan la línea, y habremos concebido lo que se llama *punto geométrico*. Así pues, *punto geométrico* es el límite de la línea, ó lo que nos quedaria de la línea, si no tuviésemos en cuenta su longitud. No debemos confundir el punto geométrico, con lo que ordinariamente se llama punto. En las artes se da varias veces el nombre de punto á las porciones de superficie muy pequeñas. Tales son los puntos de la escritura, los de las líneas puntuadas en el dibujo geométrico; etc. Tal es tambien el punto de costura de los sastres etc. Estos puntos por pequeños que se hagan, siempre tienen las tres dimensiones enumeradas.

La misma consideracion podemos hacer respecto de las líneas. Llamamos ordinariamente líneas á las rayas que trazamos con el yeso, lapicero etc., tambien llamamos líneas á los renglones de la escritura; sin embargo, tanto estas como aquellas tienen las tres dimensiones.

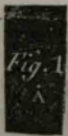
7. Bajo dos puntos de vista podemos considerar el espacio, la superficie y la línea: 1.º segun sus diferentes formas, llamadas comunmente figuras; 2.º segun la relacion de su magnitud, es decir, segun su extension.

La extension recibe el nombre particular de *volúmen*, *area* ó *longitud*, segun que esta extension es la magnitud de un espacio, de una superficie ó de una línea.

8. Para distinguir las diferencias de una figura geométrica, hacemos uso de las letras del alfabeto.

9. Llámanse *equivalentes* aquellas figuras que tienen la misma magnitud, sin tener la misma forma; *semejantes*, las que tienen la misma forma, pero diferente magnitud; é *iguales*, las que tienen á la vez la misma magnitud y figura.

10. El punto, como que carece de figura y de extension, no puede ser medido ni comparado, asi como medimos y comparamos los volúmenes, las superficies y las líneas. Para señalar el punto haremos uso de una sola letra (fig. 1.)



Cuando entre varios puntos existe una analogía cualquiera, generalmente son designados por unas mismas letras que podemos distinguir entre sí ó por el carácter diferente de escritura ó por medio de un acento colocado sobre la letra á su derecha en la forma siguiente: A', A'', A'''...; y se leen de este modo: A *prima*, A *segunda*, A *tercera* etc.

11. Las proposiciones principales y cuestiones que se consideran en la geometría, son las siguientes: el *axioma*, el *teorema*, la *recíproca*, el *corolario* y el *problema*.

12. Entiéndese por axioma una proposicion tan clara y evidente, que basta su enunciacion para reconocer inmediatamente su verdad.

13. De este género son las siguientes proposiciones:

1.ª Dos cantidades respectivamente iguales ó una tercera son iguales entre sí.

2.ª El todo es mayor que una de sus partes.

3.ª El todo es igual á la suma de todas sus partes.

13. El *teorema* es una proposicion, que no siendo evidente por sí misma, recibe su claridad y evidencia por medio de un *razonamiento* llamado *demostracion*.

Dos partes se distinguen en la enunciacion de un teorema:

La *hipótesis* ó suposicion que se hace; y la *conclusion*, consecuencia de la hipótesis.

14. Entendemos por recíproca de una proposicion, otra proposicion formada en sentido inverso de la primera.

El axioma, *el todo es mayor que cada una de sus partes*, *tiene por recíproca este* otro axióma *cada parte es menor que el todo*.

15. El *corolario* es una consecuencia inmediata de una proposicion precedente.

16. El *problema* tiene por objeto determinar una cantidad desconocida por medio de otras conocidas que tienen con aquella una relacion expresada en el enunciado de la cuestion.

Resolver un problema es determinar la cantidad desconocida: y el resultado obtenido se llama *resolucion* del problema.

17. Los métodos principales de resolucion, son la *sobreposicion de las figuras* y la *reduccion ad absurdum*.

Consiste el primer método en manifestar que las figuras *coinciden* entre sí; es decir, que una de ellas se puede aplicar exactamente sobre la otra quedando de este modo confundidas.

La *reduccion ad absurdum*, se verifica cuando suponemos que la proposicion no es verdadera; y despues por medio de ciertas deducciones sacadas de los principios ya reconocidos, resulta una contradiccion, ó con uno de estos principios ó con la suposicion misma que nosotros hemos hecho.

18. Los principales signos y abreviaciones de que haremos uso en la geometría, son:

= que significa *igual*
$>$ *mayor*
$<$ *menor*
$+$ *mas ó aumentado en*
$-$ *menos, ó restado de*
$\times$ *multiplicado por*
$\div$ *partido por*
fig. *figura*
L. Q. Q. D. *lo que queria demostrar.*

§. II. *De las diferentes especies de líneas.—Aplicaciones de la linea recta.—De la superficie plana ó del plano.*

1. Cuántas especies hay de líneas?–2. Qué es línea recta? Consecuencia de esta definicion: cómo se señala la línea recta? qué se entiende por *punto* de *concurso*, de *encuentro* ó de *interseccion*?–3. Qué es línea poligonal?–4. Qué es línea curva?–5. Aplicaciones de la recta á las artes industriales.–6. Qué se entiende por plana ó superficie plana; y qué por curva?

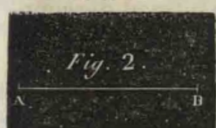
1. Distinguimos tres especies de líneas: *recta, poligonal* y *curva.*

2. Entiéndese por línea recta, el camino mas corto de un punto á otro.

Infiérese de esta definicion que:

por dos puntos dados solamente se puede tirar una recta, y que dos puntos determinan completamente su posicion.

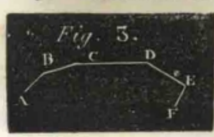
Por esta razon una recta se señala generalmente con dos letras A, B. (fig. 2) colocadas en sus extremidades.



Asimismo resulta de lo dicho que *dos rectas solamente pueden tener un punto comun.*

Llámase punto de *concurso*, de *encuentro* ó de *interseccion*, el punto en que dos líneas se cortan.

3. Llámase línea poligonal la línea compuesta de otras rectas que tienen dos á dos una extremidad comun, por ejemplo, la línea A B C D E F (fig. 3).



4. Llámase *curva* la línea que ni es recta, ni se compone de rectas, por ejemplo la línea A B C (fig. 4).

5. Son infinitas las aplicaciones de la línea recta. Para trazarla nos

Fig. 4.

valemos de la regla, instrumento muy conocido para que nos detengamos en su descripcion; pero si la regla está mal hecha tambien lo estará la línea que con ella se quiera trazar. Será pues muy conveniente el saber comprobar una regla; y por lo mismo presentaremos el siguiente medio tan exacto como sencillo:

Trácese la línea á lo largo de una arista; vuélvase la regla invirtiendo sus extremos y colóquese sobre la línea trazada la arista primitiva, por donde ha corrido el lapicero. Si esta línea queda cubierta en toda su longitud, es un indicio cierto de su rectitud y de que la regla es exacta.

Hay ocasiones en que las rectas exigen tal longitud que su trazado no se puede verificar por medio de la regla. Los jardineros, y los albañiles hacen uso de una cuerda atada á dos estacas.

Los carpinteros, y los ebanistas usan de un cordel que frotado con almazarron ó con negro de humo disuelto en aceite, aplican sobre dos puntos de la recta que quieren trazar, y estirándole fuertemente y levantándole por su mitad, le dejan caer sobre el cuerpo donde queda marcada la recta pedida.

6. Entendemos por *superficie plana ó por plano* aquella superficie sobre la cual puede aplicarse exactamente una línea recta en todos sentidos. Tal es la superficie de un tablero pulimentado etc. Llamáse *superficie curva* la que ni es plana ni se compone de superficies planas: tal es la superficie del cristal de un reloj, llamándose *convexidad* la curvatura exterior, y *concavidad* la interior.

§. III. *De la circunferencia y del circulo.—De las aplicaciones del circulo.—Teoremas relativos á la circunferencia y al circulo.*

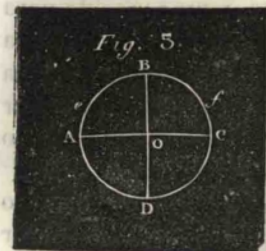
1. Qué es circunferencia?—2. Qué se entiende por círculo?—3. Radio y diámetro.—4. Qué es arco, y como se señala? Idea de la cuerda, del segmento, de la secante y de la tangente.—5. Division antigua y moderna de la circunferencia.—6. Qué es cuadrante? —7. Aplicaciones del círculo á las artes industriales y á los usos de la vida. Cómo se traza el círculo?

Teoremas relativos á los círculos. Demostrar que:

8. Los rádios de un círculo son todos iguales. Cuales son las aplicaciones de este principio?—9. Dos circunferencias trazadas con un mismo radio, son iguales.—10. Los diámetros de un mismo círculo son todos iguales.—11. El diámetro divide la circunferencia y el círculo en dos partes iguales.—12. En un mismo círculo, ó en círculos formados con un mismo rádio, á iguales arcos corresponden cuerdas iguales; y recíprocamente, á cuerdas iguales arcos iguales.—13. Consecuencias de este teorema.

1. La *circunferencia* es una línea curva trazada sobre un plano,

cuyos puntos distan todos igualmente de otro que se llame centro. Tal es la curba A B C D (fig. 5.)

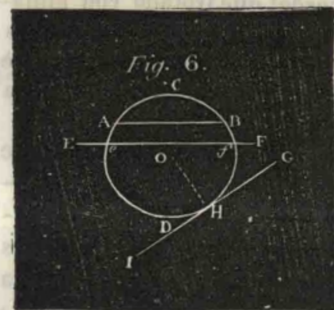


2. El *círculo* es la porcion de plano limitado por la circunferencia. Asi pues, la circunferencia es una línea; y el círculo una superficie; á pesar de esta diferencia se suelen confundir ordinariamente, llamando círculo á la circunferencia.

3. Llamase *rádio* la línea tirada del centro á la circunferencia. Tales son las rectas OA, OB, OC, OD. (fig. 5.)

Entendemos por *diámetro* la recta que pasando por el centro del círculo, termina por sus dos extremos en la circunferencia: p. ej. AC, BD (fig. 5.)

4. Por *arco* se entiende una parte cualquiera de la circunferencia, como ACB, ó ADB (fig. 6.)



Para la anotacion de un arco, necesitamos poner tres letras. En efecto si solamente lo designáramos con las letras AB, no se podria saber si hablabamos de la porcion ADB de la circunferencia, ó de la mas pequeña ACB.

Llamase *cuerda* la línea que une las extremidades de un arco, como AB. *Segmento* es la parte de círculo comprendido entre el arco y la cuerda.

Entiéndese por *secante* una cuerda prolongada por sus dos extremos la cual por esta razon cortará en dos puntos á la circunferencia, como la línea EF. Si concebimos en la secante confundidos en uno solo los dos puntos en que corta á la circunferencia, nos habremos formado idea de la *tangente:* por esta razon se dice que la *tangente* es una recta que toca en un solo punto á la circunferencia; tal es la GHI (fig. 6.) Este punto comun H, se llama punto de tangencia ó de contacto.

5. La circunferencia se suele dividir comunmente en 360 partes iguales que se llaman *grados*; cada uno de estos en 60 partes tambien iguales, llamadas *minutos*; cada minuto en 60 *segundos*. Para la indicacion de los grados nos valemos de este signo °, colocado á la derecha del número un poco mas alto; para los minutos de un acento ′; para los segundos de dos ″. Queremos p. ej: expresar un arco de 35 grados, 8 minutos, 25 segundos; lo haremos en la forma siguiente: 35° 8″ 25″.

La circunferencia, en el sistema decimal, se divide en 400 grados; cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos.

Cuando un autor hace uso de esta division, ordinariamente lo suele advertir en el prólogo; y á falta de esta advertencia la anotacion diferente de esta division nos servirá para distinguirla de la otra; pues en la centrimal los grados se señalan con la inicial g. Apesar de las ventajas que por su armonia con el sistema decimal ofrece, esta division ha conservado la supremacia la division antigua de la circunferencia en 360 grados.

Es muy sencillo pasar de una á otra division. Si queremos p. ej. convertir los grados centecimales en los de la division antigua, multiplicaremos los grados que se nos den, por 0,9: y si al contrario, por $\frac{10}{9}$. El fundamento de esta pràctica es el siguiente: Se quiere p. ej. saber á cuantos grados de la division antigua corresponden 25 centecimales; formariamos esta proporcion:

$100:90::25:x$; y simplificando la primera razon, resulta: $10:9::25:x$; de donde x; número de grados que corresponden á la otra division, $=\frac{25\times9}{10}=25\times0{,}9$.

Para resolver el problema inverso invertiriamos los términos de la razon primera.

6. Llámase *cuadrante* la cuarta parte de la circunferencia, AEB, BfC (fig. 5). Asi un cuadrante vale 90 ó 100 grados, segun la division á que estos correspondan.

7. El círculo es en las artes de un uso casi tan comun como la línea recta. Las ruedas de las máquinas, las muelas de los molinos, los cuadrantes de los péndulos etc. son verdaderos círculos. Las cazuelas, los barreños, los cántaros, los toneles etc. tienen sus aberturas circulares. Es pues de la mayor importancia saber cómo se describe el círculo.

El instrumento de que ordinariamente se hace uso para trazar el círculo, es el *compas*, instrumento que todos conocen. Se compone de dos brazos terminados en punta por una de sus extremidades, y unidos en la otra por medio de una articulacion, la cual permite se separe mas ó menos, segun el radio que al círculo queremos.

Para describir un círculo sobre el papel, se apoya ligeramente una de las puntas del compas abierto, haciendo que la otra gire al rededor de la primera, de modo que vaya dejando en pos de sí cierta señal: este rastro que la punta ha dejado en su revolucion, será el círculo que se pedia.

Si queremos trazarle sobre el terreno, haremos uso de una vara larga ahugereada por una de sus extremidades. Introduciendo despues en el ahugero una estaquita, harémos que esta gire al rededor de la otra extremidad fijo siempre en un mismo punto. La línea que de este modo hayamos formado, será la circunferencia deseada.

Si el círculo es tan grande que la pértiga no alcance, podemos sustituirla con una cuerda, teniendo cuidado de que conserve siempre la misma tirantez durante la vuelta que para nuestro objeto ha de dar uno de sus extremos.

8. **Teoremas.** *Los radios de un mismo circulo son todos iguales.*

La verdad de este teorema se infiere inmediatamente de la definicion del círculo y del radio. En efecto, los radios midan las distancias del centro á cada uno de los puntos de la circunferencia; es así que estas distancias son todas iguales, segun resulta de la definicion de la circunferencia: luego los radios de un mismo círculo todos son iguales.

Por este principio, las ruedas de un carruaje deben ser círculos descritos con radios iguales; sino fuera asi, el carruaje se ladearia por uno ú otro lado.

9. *Dos circunferencias trazadas con un mismo radio son iguales.*

Para hacer ver la verdad de este teorema, tomaremos uno de los círculos y lo colocaremos sobre el segundo, de modo que sus centros coincidan; en este caso las dos circunferencias, como que han sido trazadas con un mismo radio, deben confundirse en toda su extension.

10. *Los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

El diámetro no es otra cosa que la reunion de dos rádios opuestos; estos son iguales, segun acabamos de demostrar; luego tambien lo serán aquellos.

11. *El diámetro divide al circulo y á la circunferencia en dos partes iguales* (fig. 5.)

Para demostrar este teorema, doblaremos el círculo de manera que la parte A B C caiga sobre la A D C. Es induvitable que el primer segmento A B C se confundirá exactamente con el otro A D C: porque si uno de ellos saliese fuera del otro, no distarian igualmente del centro todos los puntos de la circunferencia; resultado incompatible con la definicion del círculo.

Asi pues, *el diámetro divide al circulo en dos semicírculos, y á la circunferencia en dos semicircunferencias.*

12. *En un mismo circulo, ó en circulos trazados con el mismo rádio, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas.*

La sobreposicion de los arcos nos manifiesta claramente esta verdad. Siendo los arcos iguales, los podemos sobreponer de modo que sus extremos se confundan, en cuyo caso se confundirán tambien los extremos de las cuerdas que terminan en los de los arcos; luego las cuerdas se habrán confundido en toda su extension; luego serán iguales.

Reciprocamente, si las cuerdas son iguales, lo serán los arcos subtendidos.

Supongamos la cuerda AB=á la CD (fig. 7), el arco A M B será tambien igual al C N D.

Fig. 7.

Sobreponiendo las cuerdas, por ser iguales, se confundirán exactamente, y por esta razon se habrán confundido los extremos de los arcos: luego estos arcos quedarán ajustados en toda su extension.

13. De lo dicho resulta que:

En un mismo circulo á mayor arco, corresponde mayor cuerda y *reciprocamente.*

Suponemos que los arcos no son mayores que la semicircunferencia. Asi la cuerda AI del arco AMI $>$ que la AB del arco AMB; y recíprocamente el arco AMI $>$ AMB.

El teorema precedente nos suministra un medio muy sencillo de *construir un arco igual á otro dado.*

Se nos da el arco AB (fig. 8 y 9): en el punto C con un rádio igual á DA, se trazará un arco indefinido EF; tomaremos la distancia AB, cuerda del arco AB, y la colocarémos desde F hasta G: el punto G determinará el arco FHG que debe ser igual al arco AB, supuesto que ambos tienen una misma cuerda.

Fig. 8 et 9.

§. IV. *Del ángulo y de sus diferentes especies.—De la perpendicular y de la oblicua.—Teoremas relativos á las perpendiculares, á las oblicuas y á los ángulos.*

1 Qué se entiende por ángulo? Su vértice y sus lados.—2. De dónde depende la magnitud de un ángulo?–3 Cómo se designa un ángulo?–4. Cuáles son los ángulos opuestos los adyacentes? A qué llamamos la bisectriz de un ángulo?–5. Qué es línea perpendicular? oblicua? A qué punto se llama pie de la perpendicular y de la oblicua? Cuándo se dice que levantamos ó bajamos á una recta una perpendicular?–6. Cuántas especies hay de ángulos? Qué es ángulo recto, agudo y obtuso? Qué nombres reciben los ángulos segun que tienen ó no su vértice en el centro del circulo?–7 Cómo se comparan los ángulos y cuál es su indicacion?–8. Cómo se miden los áugulos?

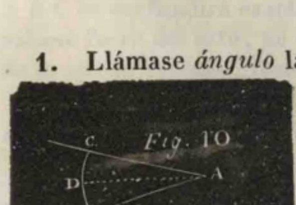
Teoremas relativos á las perpendiculares y á las oblicuas. Demostrar que:

9 1 ° Desde un punto tomado en una recta, solamente se puede levantar una perpendicular. 2. ° De un punto tomado fuera de una recta no se puede bajar mas que una perpendicular.–10. La perpendicular es la linea mas corta que podemos tirar de un punto á una recta.–11. 1. ° Dos oblicuas equidistantes del pie de la perpendicular son iguales. 2. ° Entre dos oblicuas es mayor aquella que mas se aparte del pie de la perpendicular.–12. 1. ° Cualquier punto de la perpendicular levantada sobre el medio de una recta dista igualmente de los extremos de esta recta. 2. ° Todo punto que se halle fuera de esta perpendicular, no puede estar á igual distancia de los dos extremos.–13. 1. ° Sobre un punto tomado en una recta, levantar una perpendicular á esta recta. 2. ° De un pnnto tomado fuera de una recta, bajar una perpendicular á la recta.

Teoremas relativos á los ángulos. Demostrar que:

14. Si se prolonga uno de los lados del ángulo recto, el otro formará con la prolongacion otro ángulo recto.–15. Todos los ángulos rectos son iguales.–16. Toda linea que cae sobre otra oblicuamente, forma con ella dos ángulos adyacentes, cuya suma es igual á dos rectos.–17. 1. ° Cuánto vale la suma de todos los ángulos consecutivos que se pueden formar en un punto y á un lado de una recta? 2. ° Cuánto vale la suma de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se cortan? Cuánto vale la suma de todos los ángulos consecutivos formados en un plano al rededor de un punto? 18.–Si dos rectas se cortan entre si, los ángulos opuestos por el vértice son iguales.–19. Aplicaciones de los ángulos.

1. Llámase *ángulo* la porcion de plano comprendido entre dos rectas que se encuentran; tal es la parte de plano que comprenden las dos rectas AB, AC, (fig, 10).



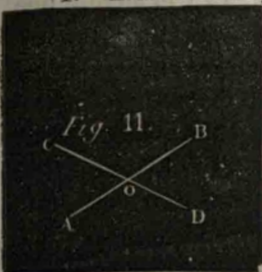
Vértice del ángulo es el punto A, en el que se encuentran ó se cortan las dos rectas, y *lados* del ángulo son las líneas AB, AC, que forman el ángulo.

2. La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de su mayor ó menor separacion. Efectivamente, los lados

del ángulo, asi como otra cualquier línea, los debemos considerar indefinidos; esta prolongacion indefinida de los lados nada altera su abertura que es la que constituye el ángulo.

3. La anotacion del ángulo se hace ordinariamente con tres letras, debiendo interponer la del vértice, siempre que lo queramos nombrar. Asi decimos indiferentemente CAB ó BAC. Algunas veces basta para la designacion de un ángulo la letra de su vértice, teniendo lugar esta abreviacion cuando el vértice no sea comun á muchos ángulos.

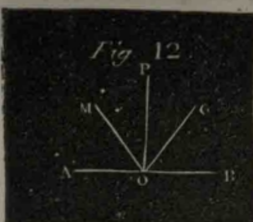
4. Llámanse *ángulos opuestos verticalmente* dos ángulos, cada uno de los cuales está comprendido entre las prolongaciones de los lados del otro, como AOC y BOD, AOD y BOC (fig. 11).



Llamamos *ángulos adyacentes* á dos ángulos consecutivos que tienen un lado comun, siendo los otros dos prolongacion el uno del otro; en este caso se encuentran los ángulos AOC y COB, COB y BOD, BOD y DOA, DOA y AOC, tomados dos á dos.

Llámase *bisectriz* de un ángulo la recta que lo divide en dos ángulos iguales, como AD (fig. 10).

5. Entendemos por *perpendicular* aquella recta que encuentra á otra línea, formando con ella dos ángulos adyacentes iguales, como la línea PO (fig. 12). Recíprocamente la linea AB es perpendicular á la PO.



No debemos confundir la perpendicular con la vertical. La *vertical* está muy bien representada por la direccion de la plomada libremente suspendida; de manera que si nosotros concebimos una recta tirada de un punto cualquiera al centro de la tierra, nos formaremos idea de la vertical. Si nos figuramos una recta perpendicular á la vertical, conoceremos la linea *horizontal*, llamada tambien línea de nivel.

Dícese *oblicua* aquella línea que cae sobre otra formando con ella dos ángulos adyacentes desiguales: tales con las líneas GO. MO.

Llámase *pié de la perpendicular* ó *de la oblicua* el punto en que estas líneas se encuentran con otra, p. ej. el punto O.

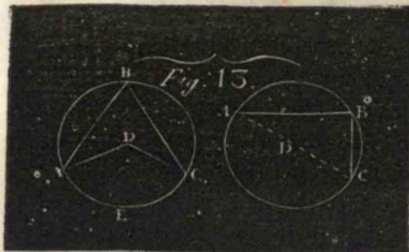
Cuando se construye la perpendicular sobre un punto O, tomado sobre una recta AB, se dice que *levantamos* una perpendicular sobre la recta; y cuando se traza desde un punto C, tomado fuera de la recta AB, la perpendicular se dice *bajada* á la recta.

6. Distinguimos tres clases de ángulos, *ángulo recto, agudo y obtu-*

so. Dícese *ángulo recto*, todo ángulo formado por dos líneas perpendiculares entre sí: como los ángulos AOP, POB (fig. 12).

Entiéndese por *ángulo agudo* todo ángulo menor que el recto, como GOB; y por *obtuso* el que es mayor que el recto, como MOB. A primera vista se conoce que los ángulos *agudo* y *obtuso* son formados por líneas oblicuas entre si.

El ángulo cuyo vértice está en el centro, y cuyos lados son rádios del círculo se llama ángulo del centro, como ADC, (fig. 13:) el ángulo que formado por dos cuerdas tiene su vértice en la circunferencia, se llama ángulo inscrito como ÀBC.



7. Supongamos que al lado AB del ángulo ABC, (fig. 10 y 13), se coloca sobre el lado BC, y que en seguida se separa de esta recta, girando al rededor del punto B, hasta que forme el ángulo ABC. En este movimiento semejante en un todo al de la pértiga que en otra ocasion presentamos para la construccion del círculo, es induvitable que la extremidad A de AB no ha podido pasar de C al punto A, sin describir al mismo tiempo un arco de círculo CA cuyo centro se halla en B. Asimismo es incuestionable que al paso que aumenta ó disminuye el ángulo ABC, es decir, segun que AB se aproxima ó aparta de BC, aumenta ó disminuye el arco en la misma proporcion.

Para presentar esta verdad con todo el rigor y claridad de que es susceptible, nos valdremos de la siguiente construccion.

Supongamos (fig. I.) dos ángulos AOB, COD, cuyos arcos correspondientes hayan sido trazados con un mismo rádio. Si sobreponemos el ángulo COD al AOB, de modo que el lado OD del primero coincida con el OA del segundo el lado OC estará representado por el OF; de este modo el arco correspondiente CD se confundirá con el AF; el ángulo pues COD ha sido una vez sobrepuesto al ángulo AOB, asi como su arco correspondiente CD al AFB del segundo ángulo. Supongamos que el ángulo COD, despues de haber sido sobrepuesto dos veces al ángulo AOB, deje un residuo GOB, menor que COD, el arco CD tambien quedará sobrepuesto otras dos veces al arco AB, dejando un residuo GB menor que CD; de donde resultará:

$$AOB = 2\ CODD + GOB, \qquad AB = 2\ CD + GB.$$

Colocaremos ahora el ángulo GOB sobre el COD, y supongamos que cabe exactamente dos veces, el arco GB, cabrá tambien dos veces sobre el CD; de donde tendremos:

COD=2 GOB, CD=2 GB.

Las dos ecuaciones anteriores se habrán convertido en estas:

AOB=5 GOB, AB=5 GB.

Asi pues, el ángulo GOB está contenido cinco veces en el AOB, y dos veces en el COD; del mismo modo el arco GB cabe cinco veces en el AB, y dos veces en el CD. La relacion, pues, entre los ángulos AOB, COD, y entre los arcos correspondientes AB, CD está expresada por la fraccion impropia $^5/_2$, y por consiguiente será una verdad que:

ángulo AOB: *ángulo* COD:: *arco* AB: *arco* CD.

Luego los ángulos son proporcionales á los arcos descritos con un mismo rádio. L. Q. Q. D. Esto mismo se puede decir de los sectores circulares.

De donde resulta que un ángulo será la mitad, la tercera parte, el duplo de otro, si su arco de indicacion es la mitad, el tercio, el duplo del arco de dinicacion delotro, construidos ambos arcos con un mismo rádio.

Esta dependencia constante y recíproca que entre los arcos y los ángulos acabamos de manifestar, nos autoriza para tomar la *indicacion* de un ángulo en su arco correspondiente; pero es preciso que no olvidemos que para que esta sustitucion sea legítima, el ángulo ha de tener su vértice en el centro de círculo.

Si queremos, pues medir un ángulo, compararemos su arco con el arco del ángulo que tenemos por unidad.

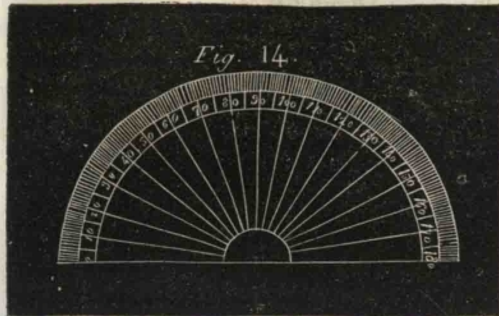
8. Si reflexionamos que los ángulos presentan una superficie indefinida, desde luego conocerémos que no se pueden medir con la unidad superficial de que nos servimos para medir otras superficies limitadas; la medida pues del ángulo debe ser otro ángulo. El que se ha adoptado como unidad, tiene por arco de indicacion la 360.ª parte de una circunferencia cualquiera, construida sobre el vértice como centro. Este ángulo se llama ordinariamente *ángulo de un grado*.

Asi, cuando se dice un ángulo de 10 grados, de 90 grados etc., se dice, no solamente, que el arco de indicacion contiene 10 veces, 90 veces etc. la 360.ª parte de la circunferencia; se expresa ademas, que el ángulo es 10 veces, 90 veces etc. mayor que el ángulo de un grado. La indicacion, pues, de un ángulo en grados, nos hace conocer á un mismo tiempo el nombre y la magnitud de este ángulo.

Segun esto, el ángulo recto será igual á 90 ángulos de un grado; y de consiguiente tendrá por medida la cuarta parte de la circunferencia.

Si queremos referir los ángulos al ángulo recto como unidad, dividiremos la medida de aquellos por la del último; asi un ángulo de 30°, diremos que vale $\frac{30}{90}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ de ángulo recto.

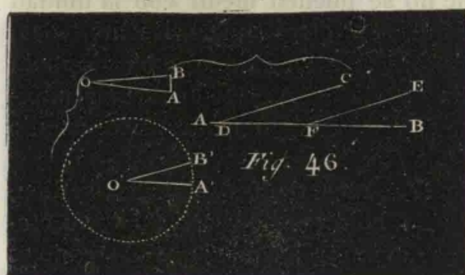
En la práctica para medir un arco y por consecuencia el ángulo, hacemos uso de un instrumento llamado *trasportador* (fig. 14). Consiste en un semicírculo que tiene un *limbo* ó su borde dividido en 180 grados. Para verificar esta medicion se coloca el centro del semicírculo en el vértice del ángulo; el arco comprendido entre sus lados nos indicará la magnitud del ángulo.



Tambien podemos aplicar este instrumento á la construccion de un ángulo, cuya medida se nos dé. Se nos pide, p. ej., construir un ángulo de 25.° Trazaremos una recta; en uno de sus extremos fijarémos el centro del semicírculo, sobreponiendo el diámetro á la recta; en esta disposicion marcaremos en el papel el punto correspondiente al número 25.° y uniendo este punto con el extremo de la recta donde estaba el centro del semicirculo habrémos obtenido el ángulo pedido.

Podemos sin necesidad de este instrumento construir un ángulo igual á otro dado.

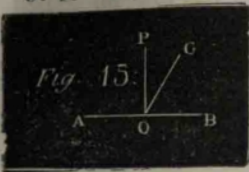
Sea el ángulo AOB (fig. 46), al cual se nos pide formar otro igual. Tirarémos ante todo una recta A'O'; sobre uno de los extremos de esta recta hemos de construir el ángulo pedido de la manera siguiente. Sobre el punto O como centro y con un rádio arbitrario OA trazarémos el arco AB; sobre el pnuto O' como centro y con el mismo rádio describirémos un arco indefinido A'B'; tomarémos la distancia AB, y con esta distancia como radio, formarémos desde el punto A' como centro, un arco de círculo que corte al precedente en B', y finalmente tirarémos la recta O'B'.



El ángulo A'O'B' será igúal al propuesto, porque sus arcos correspondientes trazados con un mismo radio, tienen iguales sus cuerdas; de consiguiente tambien lo serán sus arcos.

Teoremas relativos á las perpendiculares y á las oblicuas.

9. 1.° *Sobre un punto O (fig. 15) tomado en una recta AB, no se puede levantar mas que una perpendicular.*



En efecto si sobre la AB se pudiesen levantar las dos perpendiculares OP, OG, resultaria que cada una de estas dos rectas OP, OG, formaria con la línea AB, dos ángulos adyacentes iguales, y asi tendriamos:

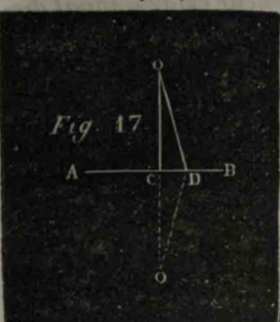
$$AOP=AOG, \qquad BOG=BOP.$$

absurdo incompatible con un axioma.

2.° *De un punto O (fig. 16.) tomado fuera de una recta AB, solamente se puede bajar una perpendicular.*

De la suposicion contraria nos resulta tambien un absurdo, como vamos á ver. Si OG fuese perpendicular á la AB, GO' formaria con GO una misma línea recta, por ser estas dos rectas perpendiculares á la AB. Pero al mismo tiempo las PO y PO' componen tambien una misma recta. Ya se vé pues, desde luego un *contraprincipio*, á saber, que desde el punto O al O' se podrian dirigir dos rectas diferentes, OGO', OPO'.

10. *La perpendicular OC (fig. 17) bajada desde el punto O á la recta AB, es la distancia mas corta de dicho punto á la recta.*



Este teorema se reduce á demostrar que la perpendicular OC es mas corta que cualquiera oblicua OD. Para presentar claramente esta verdad, haremos girar la parte de figura OCD al rededor de la AB como eje, de modo que venga á caer sobre O'CD; en cuyo caso tendremos:

$$O'C=OC, \qquad O'D=OD;$$

Ademas, siendo OCO' una linea recta, resultará: $OC+CO'<OD+DO'$, y por la igualdad de O'C y OC, de O'D y OD, tendremos:

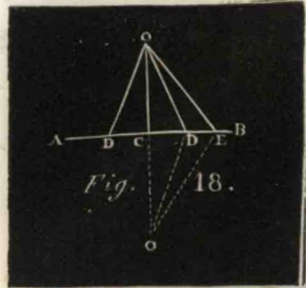
$$2\,OC<2\,OD\,.$$

Tomando la mitad en los dos miembros de esta desigualdad, concluirémos que:

$$OC<OD: \text{L. Q. Q. D.}$$

11. 1.° *Dos oblicuas* OD, O'D *equidistantes del pié de la perpendicular* OC, *son iguales* (fig. 18).

Segun la suposicion que hacemos en el teorema CD=CD'; si doblamos



pues la figura á lo largo de la perpendicular OC' los puntos D y D' se confundirán y tambien las oblicuas OD, O'D; luego OD=O'D.

2.º *De dos oblicuas* OD, OE *que no están á igual distancia de la perpendicular, es mayor la que mas se aparta de su pié.*

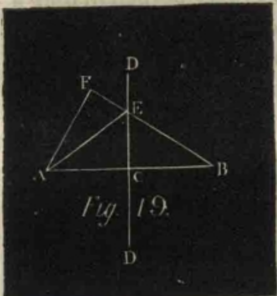
Para hacer palpable esta verdad, doblarémos la figura á lo largo de la recta AB: de este modo, habremos obtenido que:

O'D=OD, O'E=OE;

pero OD+O'D<OE+O'E, ó lo que es lo mismo; 2 OD< 2 OE, y dividiendo; por 2 la última desigualdad, se verá que:

OD<OE. L. Q. Q. D.

12. 1.º *Cualquier punto* E (fig. 19) *de la perpendicular* CD *levantada sobre el medio de la recta* AB, *dista igualmente de los dos extremos.*



En efecto, tirando las rectas AE, BE, tendrémos que:

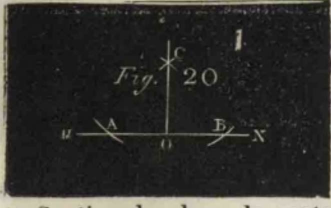
AE=BE, supuesto que AC=BC.

2.º *Todo punto* F, *que esté fuera de la perpendicular anterior, no puede estar á igual distancia de los dos extremos.*

Para demostrar este teorema, harémos la siguiente construccion. Tirarémos las rectas AF, BF; y por el punto E en que BF corta á CD, dirijirémos la AE. Esta construccion nos dará:

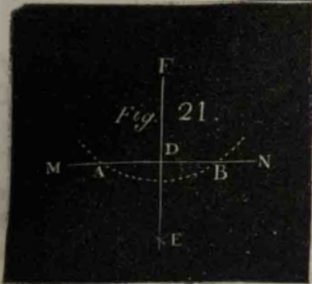
AF<AE+EF, ó lo que es lo mismo: AF<BE+EF; y por fin; AF<BF.

13. 1.º *Levantar sobre el punto* O (fig. 20) *de la recta* M N, *una perpendicular á esta recta.*



Para resolver este problema, sobre la recta M N tomarémos OA=OB. Desde los puntos A y B como centros, y con un mismo radio arbitrario, pero siempre mayor que OA, describirémos dos arcos que se cortarán en un punto C; tirando ahora la recta OC, esta será la perpendicular pedida, puesto que el punto C equidista de los puntos A y B.

2.° *Desde un punto* C (fig. 21) *tomado fuera de una recta, bajar una perpendicular á esta recta.*

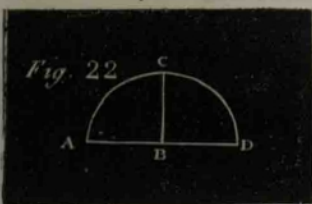


Una construccion análoga á la anterior, nos conducirá á la resolucion de este problema.

Del punto C como centro y con un radio cualquiera, pero siempre mayor que la perpendicular CD, trazarémos un arco de círculo que cortará la recta M, N. en dos puntos A, B. Ademas, desde los puntos A y B como centros y con un mismo radio, arbitrario mayor que la mitad de la AB, describirémos dos arcos que se cortarán en un punto tal como E; tirando la recta CE, esta será la perpendicular deseada; supuesto que los puntos C, D, E, etc. están á igual distancia de los puntos A y B.

Teoremas relativos á los ángulos.

14. *Si prolongamos uno de los lados* AB *de un ángulo recto* ABC (fig. 22), *el otro lado* BC *formará con la prolongacion* BD, *otro ángulo recto* CBD.

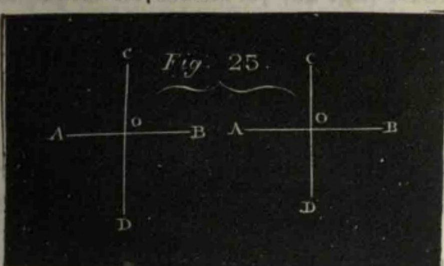


En efecto, si sobre el punto B describimos una semicircunferencia que termine en el diámetro AD, el arco AC será la medida del ángulo ABC, y como este ángulo es recto, A C será la cuarta parte de la circunferencia ó la mitad de la semicircunferencia ACD. Asi pues, el arco CD será la otra mitad ó la cuarta parte de la circunferencia, y como el arco CD es la medida del ángulo CBD, este ángulo será recto.

De aqui se infiere que una recta no puede formar con otra un ángulo recto, sin formar otro segundo ángulo recto con su prolongacion.

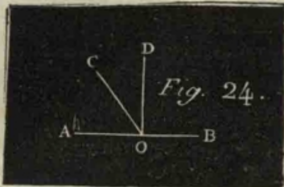
15. *Los ángulos rectos son todos iguales.*

Para comprender la verdad de este teorema, debemos considerar, (fig. 23) que la recta AB divide el plano de las dos rectas AB, CD, en dos mitades que por la sobreposicion quedarán confundidas: ademas, los ángulos AOC BOC son iguales, segun resulta de las definiciones del ángulo recto y de la perpendicular. Considerémos al mismo tiempo, que la recta CD divide igualmente el plano en otras dos mitades susceptibles de una exacta sobreposicion; de aqui la igualdad de los ángulos AOD, BOC; y por consecuencia la igualdad de los cuatro ángulos rectos que tienen comun el vértice O.



Esta proposicion tiene lugar en todos los ángulos rectos posibles aunque no tengan el vértice comun.

16. *Toda linea recta* CO (fig. 24) *que cae sobre otra* AB *oblicuamente, forma con ella dos ángulos adyacentes* AOC, COB, *cuya suma vale dos rectos.*

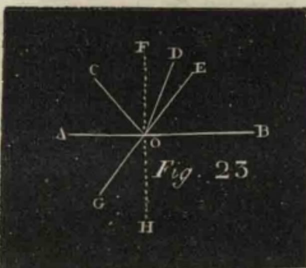


La verdad de este teorema se presentará con toda claridad, si en el punto O, se levanta sobre AB, la perpendicular OD, que formará dos ángulos rectos, cuya suma es idéntica con la suma de los dos ángulos AOC, COB.

Llámanse ángulos *suplementarios*, aquellos ángulos que juntos valen dos rectos; asi el ángulo AOC es el *suplemento* del COB, y recíprocamente, porque cualquiera de ellos es puntualmente lo que falta al otro para valer dos rectos ó 180 grados.

Se dicen ángulos *complementarios*, aquellos cuya suma es igual á un recto.

17. Corolario 1.° La suma de todos los ángulos consecutivos AOC, COD, DOE, EOB (fig 25) que se pueden formar en un punto y á un mismo lado de la recta AB, es siempre igual á dos ángulos rectos.

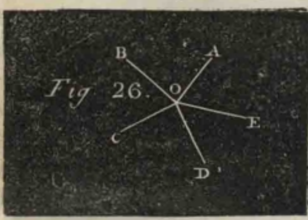


Para demostrarlo, bastará levantar sobre AB la perpendicular OF.

Corolario 2.° *La suma de los 4 ángulos formados por dos rectas* AB, EG *que se cortan entre si, es equivalente á 4 rectos.*

Si se quiere ver esta verdad, bajese la perpendicular F H (fig. 25).

Corolario 3.° *La suma de todos los angulos consecutivos* AOB, BOC, COD, (fig. 26) *formados en un plano al rededor de un mismo punto O, es siempre igual á cuatro ángulos rectos.*



Este corolario es una consecuencia de los dos precedentes.

18. *Si dos rectas* AB, CD (fig. 11) *se cortan entre si, los ángulos opuestos verticalmente* AOC y BOD, AOD y BOC *son iguales dos á dos.*

Efectivamente, los ángulos adyacentes AOC y BOC, BOC y BOD valen espectivamente dos ángulos rectos; pero dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí; luego:

AOC+BOC=BOC+BOD.

Ahora, si de los dos miembros de esta igualdad quitamos el ángulo comun BOC, nos quedará AOC=BOD.

Del mismo modo podriamos demostrar la igualdad de los ángulos BOC y AOD.

19. Son muy comunes los ángulos en las artes y en los usos de la vida, pues tienen lugar en la arquitectura, en la jardineria y en todas las artes industriales que se trabajan en la madera y en la piedra.

Los canteros trasportan sobre la piedra, el ángulo que forman los cimientos de dos paredes.

§. V, *De las paralelas y de las secantes.*

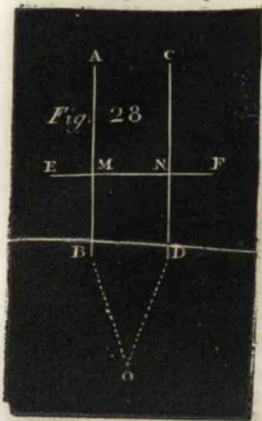
1. Qué son líneas paralelas, y cómo se puede manifestar su posibilidad? Qué se entiende por zona de las paralelas?–2. Qué es línea secante?–3. Nombres que reciben los diferentes ángulos formados por una secante que corta á dos rectas paralelas ó no paralelas.

Teoremas relativos á las paralelas. Demostrar que:

4. Por un punto dado solamente se puede tirar una paralela á una recta.–5. Dos rectas, paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.–6. Dos rectas son paralelas, cuando forman con una secante: 1.º los ángulos alternos, internos iguales; 2.º los alternos externos; 3.º los correspondientes.–7 Si dos paralelas son cortadas por una secante los angulos alternos internos, los alternos externos y los correspondientes, son respectivamente iguales.–8. Dos rectas paralelas tienen comunes sus perpendiculares.–9. Dos paralelas equidistan por todas partes y recíprocamente si dos rectas tienen por todas partes igual distancia son paralelas.–10. Partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.–11. 1.º Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirijidos en un mismo sentido, son iguales; 2.º Dos ángulos son iguale cuando tienen sus lados respectivamente paralelos y en direccion contraria; 3.º son suplementarios cuando tienen un lado en la misma direccion, y el otro en direccion contraria.–12. Si los tienen respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.–13. Por un punto dado fuera de una recta, tirar una paralela á esta recta.–14. Aplicaciones de las paralelas.

1. Llámanse *paralelas* las rectas que situadas en un plano, jamás pueden encontrarse, aunque se prolonguen indefinidamente, como AB, CD (fig. 27.)

Para hacer ver la posibilidad de estas líneas, supongamos en un plano dos líneas distintas AB, CD, (fig. 28.) perpendiculares á una tercera E F en los puntos respectivos M y N. Es claro, que por mas que se prolonguen estas líneas, jamás podrán encontrarse; porque

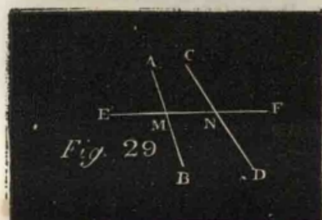


si esto sucediera en un punto tal como O, resultarian dos perpendiculares AB, CD, bajadas de un punto sobre una misma recta EF, lo cual es un absurdo. Asi pues, estas dos líneas, por ser perpendiculares á una tercera, son paralelas entre sí.

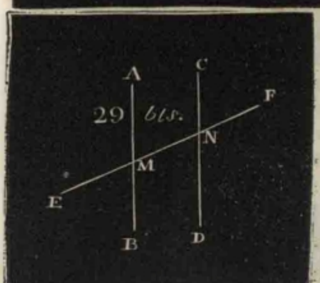
Entendemos por *zona* la porcion de plano comprendido entre dos paralelas. La *zona* es menor que un ángulo cualquiera, porque aquella cabe en un plano un número ilimitado de veces, al paso que el ángulo, si se sobrepone al plano, cabrá solamente un número limitado de veces.

2. Llámase *secante* toda recta que corta ó atraviesa de cualquier modo un sistema de otras rectas, paralelas ó no paralelas.

3. Cuando dos rectas cualesquiera AB, CD (fig. 29) son cortadas por



una secante EF, resultarán formados al rededor de los dos puntos de interseccion M, N, ocho ángulos, que considerados separadamente, ó combinados dos á dos, reciben las denominaciones siguientes:



Considerados separadamente. 1.º Los cuatro ángulos AMF, BMF, CNE, DNE, cuya abertura está dentro de las rectas AB, CD se llaman *ángulos internos*;

2.º Los otros cuatro AME, BME, CNF, DNF, colocados fuera de las rectas, se llaman *ángulos internos*.

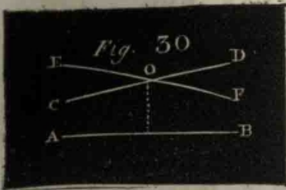
Comparados dos á dos: 1.º Los ángulos internos AMF y DNE, CNE y BMF se llaman *alternos-internos*; alternos, por estar situados á diferente lado de la secante: internos, porque su abertura está dentro de las dos rectas;

2.º Los ángulos externos AME y DNF BME y CNF, se llaman *alternos-externos*; alternos, por estar formados á diferente lado de la secante; y externos, porque se hallan fuera de las dos rectas;

3.º Los ángulos AME y CNE, AMF y CNF, BME y DNE, BMF y DNF, se llaman *ángulos correspondientes*, por estar colocados dos á dos á un mismo lado de la secante.

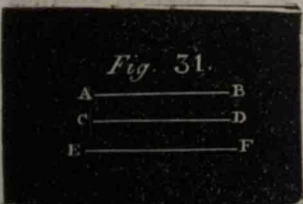
Teoremas relativos á las paralelas. Demostrar que:

4. *Por un punto dado, O, solamente se puede tirar una paralela á la recta AB (fig. 30).*



En efecto, para trazar en el punto O, dos paralelas CD, EF á la recta AB, es necesario que el ángulo DOF pueda ser contenido dentro de la zona ABCD, ó el ángulo COE en la zona ABEF; esto es imposible, porque, como hemos dicho, cualquier ángulo es mayor que la zona de las paralelas; luego tambien es imposible la suposicion que hemos hecho, á saber, que por el punto O se puedan tirar dos paralelas á la recta AB.

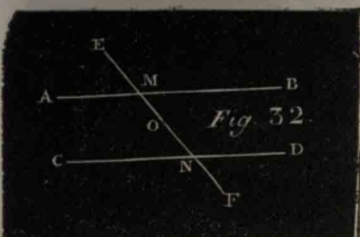
5. *Dos rectas AB, CD respectivamente paralelas á una tercera EF, son paralelas entre si (fig. 31).*



Porque si estas rectas pudiesen encontrarse en algun punto, tendriamos en este punto trazadas dos paralelas AB, CD á una misma recta EF, lo cual es un absurdo.—De aqui se infiere que:

Dos rectas respectivamente paralelas, tienen comunes sus paralelas.

6. *Dos rectas AB, CD son paralelas, cuando cortadas por una secante EF, forman con esta los ángulos alternos-internos iguales* (fig. 32).



Antes de entrar en la demostracion debemos observar que no pueden ser iguales entre sí dos ángulos alternos- internos, sin que los otros dos ángulos alternos-internos, BMN, MNC, suplementos respectivos de los primeros, sean tambien iguales entre sí.

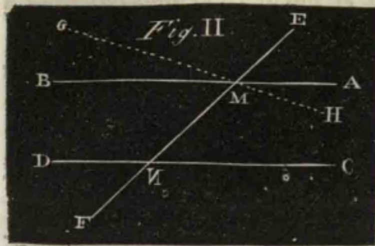
Supongamos ahora que llegaran á encontrarse las porciones indefinidas de recta MA, NC; en esta suposicion, hágase girar la porcion de plano AMNC al rededor del punto O, mitad de MN, de modo que OM venga á ocupar el lugar de ON; en cuyo caso MA tomará la posicion ND, y NC la MB.

Pero encontrándose todavia en esta nueva posicion las MA y NC, resulta que tambien se encontrarán las MB y ND, que en la sobreposicion se han confundido con las anteriores; siguiéndose de aqui que las rectas AB, CD tendrian dos puntos comunes, lo cual es imposible.

7. *Dos paralelas AB, CD cortadas por una secante MN, forman con esta iguales respectivamente los ángulos alternos-internos, los alternos-externos y los correspondientes.*

Demostrada la igualdad de los alternos-internos, la inspeccion de la figura bastará para conocer la igualdad respectiva de los alternos-externos y de los correspondientes; por esta razon nos concretaremos á los primeros.

Supongamos (fig. II) que en el caso propuesto no fuesen iguales los ángulos alternos-internos CNE, BMF, podriamos tirar por el punto M otra recta tal como GH que formase con la secante un ángulo igual al CNE; en cuyo caso esta nueva recta seria paralela á la CD, segun el teorema anterior, teniendo en consecuencia dirigidas por el punto M dos paralelas á la recta CD, lo cual es imposible.



Hemos dicho que mirando detenidamente la figura, conoceriamos desde luego la igualdad de los alternos-externos y de los correspondientes.

En efecto, si queremos demostrar la igualdad de los ángulos alternos externos, tales como FND, AME, procederiamos del modo siguiente: FND=ENC, porque son opuestos verticalmente; pero ENC=FMB, por ser alternos-internos; luego FND=FMB; pero FMB=AME, por opuestos verticalmente; luego:

FND=AME.

La igualdad de los ángulos correspondientes, tales como CNE, AME, se hace ostensible del modo siguiente: segun hemos visto, AME=FND por ser alternos-externos; pero FND=CNE por opuestos verticalmente; luego:

AME=CNE. L.Q.Q.D.

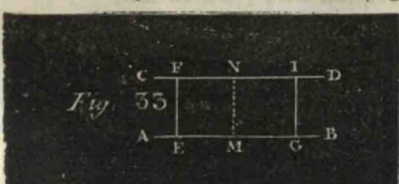
8. *Dos paralelas* AB, CD. (fig. 28). *tienen comunes sus perpendiculares.*

Supongamos dos paralelas AB, CD y otra recta EF, perpendicular á una de ellas, p. ej., á la CD, tambien lo será á la otra AB.

Infiérese esta verdad de lo dicho acerca de la igualdad de los ángulos alternos-internos, alternos-externos y correspondientes. Tomando en el caso presente los ángulos correspondientes CNF, AMF, la igualdad de estos ángulos nos dará por resultado que el ángulo AMF es recto, por serlo su correspondiente CNF; luego la línea EF, que forma con la AD un ángulo recto, será perpendicular á esta línea.

9. *Dos paralelas* AB, CD (fig. 33), *equidistan por todos sus puntos.*

Por de contado, la perpendicular EF ó GI, comun á las dos rectas AB, CD, es la línea mas corta que desde el punto E ó G podemos tirar á la CD: esta perpendicular, pues, medirá para los puntos E ó G, la distancia de las dos paralelas. Asi pues, la cuestion queda reducida á demostrar la igualdad de las perpendiculares EF, GI.

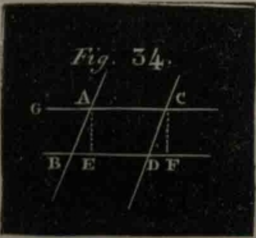


Para hacer palpable esta demostracion, levantarémos sobre el punto M punto medio de EG, la perpendicular MN, la cual lo será tambien en el punto N á la paralela CD. Doblando el plano por la linea MN, sobrepondrémos la porcion B M N D á la A M N C; siendo rectos todos los ángulos de la figura, la línea MG tomará la direccion ME; y como MG=ME, el punto G vendrá á caer sobre el punto E. Entretanto GI tomará la direccion EF, y NI la direccion NF; luego el punto I debe estar á la vez en la línea EF y en la NF; luego se confundirá con la interseccion de estas dos líneas, á saber, con el punto F, asi, pues, GI y EF se han confundido exactamente; luego GI=EF.-L. Q. Q. D.

Recíprocamente *si dos rectas están por todos sus puntos á igual distancia, dichas rectas serán paralelas.*

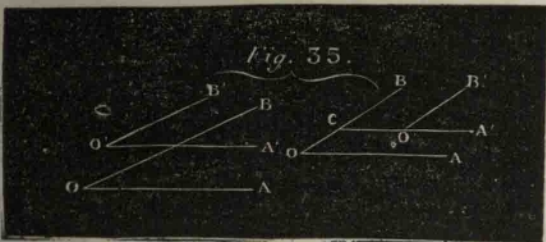
Porque las rectas que se hallen en este caso, jamás podrán encontrarse; luego serán paralelas.

10. *Partes de paralelas* AB, CD, *comprendidas entre paralelas* AC, BD, *son iguales.* (fig. 34).



Segun acabamos de ver, este teorema no ofrece dificultad alguna respecto de las perpendiculares AE, CF. Nos concretaremos, pues, á las oblicuas AB, CD. Para esto tendrémos en consideracion que los ángulos GAE, GCF son ángulos rectos; y que los GAB, GCD son iguales por correspondientes. Si quitamos, pues, de los dos ángulos rectos GAE, GCF los correspondientes iguales entre sí GAB, GCD, BAE=DCF; y si colocamos CF sobre su igual AE, CD caerá sobre AB, FD sobre EB, y el punto B quedará confundido con el D. Asi pues, AB y CD, partes de paralelas oblicuas, son iguales, asi como las AE y CF.

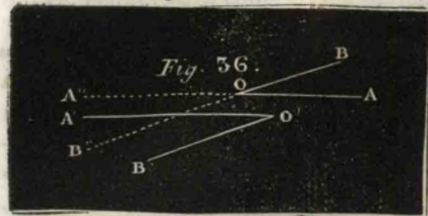
11. 1.° *Dos ángulos* AOB, A′O′B′ (fig. 35) *que tienen sus lados respectivamente paralelos, y dirigidos en un mismo sentido, son iguales.*



Esta verdad se hace palpable prolongando, si es necesario, el lado A′O′, hasta que se encuentra con el lado OB en un punto tal como C, en cuyo caso nos resultará por la propiedad de los ángulos correspondientes.

AOB=A′CB; pero A′CB=A′O′B′; luego AOB=A′O′B′.

2.° *Dos ángulos* AOB, A′O′B′ (fig. 36) *que tienen sus lados respectivamente paralelos y en direccion contraria son iguales.*

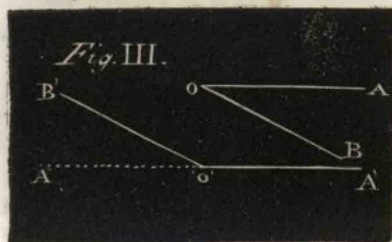


En efecto, supongamos que OA′′ sea la prolongacion del lado OA; y OB′′ la prolongacion de OB, tendrémos en este caso que:

AOB=A′′OB′′ y A′′OB′′=A′O′B′, luego AOB=A′O′B′.

3.° *Dos ángulos son suplementarios, cuando los lados del uno son respectivamente paralelos à los del otrò, pero no dirigidos á la vez en el mismo sentido, ni en sentido contrario.*

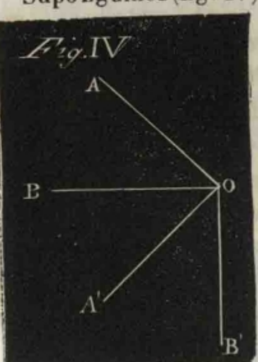
Supongamos fig. III) el lado OA en la misma direccion que O A′; y OB en direccion contraria á O′B′. Prolongaremos uno de los cuatro lados: sea p. ej. O′ A′′ la prolongacion de O′A′; los ángulos A′O′B′, A′′O′B′ serán suplementarios; pero este último A′′O′B′ es igual al AOB por tener sus lados en direccion contraria; luego etc.



De lo dicho podemos inferir que *los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó son iguales ó suplementarios.*

12. 1.° *Los ángulos de una misma especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son iguales.*

Supongamos (fig. IV) que los dos sean agudos, tales como los AOB, A′O′B′ y que tengan un vértice comun.



Esta suposicion nos dará:

AOB=1 recto−A′OB, y A′OB′=1 recto−A′OB; asi pues, AOB=A′OB′.

2.° *Los ángulos de diferente especie que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son suplementarios entre si.*

Sean los ángulos (fig. V) BCD, GCH, el primero obtuso, y agudo el segundo.

Los ángulos BCH, DCG valen dos rectos; luego los dos restantes BCD, GCH valdrán igualmente dos rectos, porque todos los ángulos formados en un plano al rededor de un punto, valen cuatro rectos. Asi pues, los ángulos BCD, GCH que valen dos rectos, serán suplementarios entre sí.

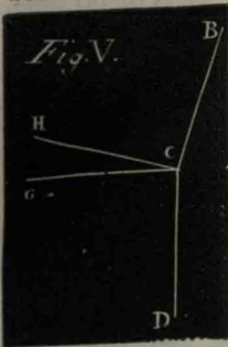


Fig. V.

De donde se infiere *que los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, ó son iguales ó suplementarios.*

13. *Por un punto* C *dado fuera de una recta* **AB**, *tirar una paralela á esta recta* (fig. 37).

Para verificar esta construccion, desde el punto C tiraremos una recta á un punto cualquiera E de la AB; desde el punto E como centro y con un radio igual á EC, describirémos un arco CF, que corte en F á la AB; igualmente desde el punto C como centro, y con el mismo radio EC, trazarémos el arco ED; desde el punto C como centro, y con un radio igual á la cuerda del arco CF, formaremos un arco pequeño de círculo que corte al arco ED en un punto D; finalmente tirarémos la recta CD.

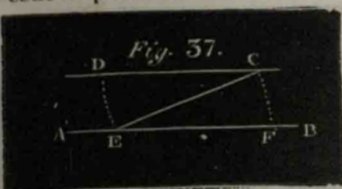


Fig. 37.

La recta CD será la paralela pedida; supuesto que la secante EC forma con las dos rectas EF, CD, los ángulos alternos-internos iguales.

14 Son inumerables las aplicaciones de las paralelas en las artes industriales.

Los carpinteros hacen uso todos los dias en la construccion de puertas, ventanas y persianas; los pizarrreros, en la disposicion de las tejas ó de las pizarras; los impresores en las líneas; el labrador forma los surcos en líneas paralelas; el grabador, cuando quiere representar superficies planas en que una parte se aleja del espectador, tambien emplea plumadas rectas paralelas; la música hace uso igualmente de las paralelas para poner las notas de que se vale, etc.

§. VI. *Del circulo y de las perpendiculares, de las secantes, de las tangentes, de los ángulos y de las paralelas consideradas con relacion al circulo.*

Teoremas relativos al circulo, á las perpendiculares, etc. Demostrar que: 1. Una recta no puede cortar á la circunferencia en mas de dos puntos–2. La perpendicular á una cuerda en su punto medio, pasa por el centro del círculo y por el medio del arco subtendido por la cuerda.–3. Dividir un arco en dos partes iguales.–4. Determinar el centro de una circunferencia ó de un arco de circulo.–5. Hacer pasar una circunferencia por tres puntos que no estén en linea recta.–6. La tangente no puede encontrar á la circunferencia mas que en un punto. El radio es la línea mas corta que podemos tirar del centro á la tangente.–7. La perpendicular levantada sobre el extremo del radio es tangente en este punto á la circunferencia, y recíprocamente.–8. Por un punto tomado en la circunferencia, tirar una tangente al círculo.–9. 1.° El ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo del centro que corresponde al mismo arco. 2.° Cuál es en consecuencia la medida del ángulo inscrito?–10. El ángulo inscrito en el semicirculo, es recto.–11. Por un punto dado en una recta ó fuera de ella, tirar otra recta que forme con la primera un ángulo igual á otro dado.–12. Levantar una perpendicular sobre el extremo de una recta.–13. Describir sobre una línea un segmento capaz de un ángulo dado.–14. Dos paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.

1. *Una recta y una circunferencia no se pueden cortar en mas de dos puntos.*

Supongamos por un momento que la recta cortase á la circunferencia en tres puntos, tirando tres radios á los puntos de interseccion, tendriamos tres rectas iguales bajadas desde un mismo punto á una recta; lo cual no puede verificarse, sin que se atraviese uno de estos inconvenientes, á saber, ó que tengamos dos oblicuas iguales á un mismo lado de la perpendicular, ó que una oblicua sea igual á la perpendicular; ambas consecuencias son incompatibles con los teoremas demostrados.

2. *Toda perpendicular* CN *á una cuerda* AB *en su mitad pasa por el centro del círculo y por la mitad del arco subtendido por esta cuerda* (fig. 38).

Fig. 38.

Efectivamente, toda vez que CN es perpendicular á AB en su mitad, el punto C equidistará de los puntos A y B; pero AC y CB son iguales, por ser radios del mismo círculo; luego esta perpendicular pasará por el centro, punto equidistante de A y de B.

Por otra parte, perteneciendo el punto N á la perpendicular CN, se hallará á igual distancia de los A y B, resultando AN=NB: de donde AN y NB serán dos cuerdas iguales; luego tambien serán iguales los arcos subtendidos AON,NPB. Asi pues, la perpendicular pasa por el medio del arco subtendido por la cuerda AB, dividiéndole por consiguiente en dos partes iguales.

3. *El radio perpendicular á la cuerda* AB, *divide á esta y al arco subtendido en dos partes respectivamente iguales* (fig. 38).

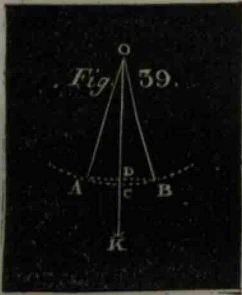
La demostracion de esta verdad se funda en una propiedad característica de las perpendiculares. Por esta propiedad, si la línea CN tiene un punto equidistante, de los puntos A y B de la linea AB, los tendrá todos á igual distancia de A y de B; pero el punto C de la línea CN equidista de A, y de B; luego tambien M que pertenece á la misma recta, equidistará de A y de B; luego AM=BM.

Por la misma razon el punto N equidistará de A y B; luego las cuerdas AN, BN serán iguales; luego tambien lo serán los arcos subtendidos AON-BPN.

Recíprocamente *el radio* CN, *que divide la cuerda* AB *en dos partes iguales* AM, BM, *será perpendicular á la cuerda* AB (fig. 38).

Porque tendrá dos puntos C, M equidistantes de A y de B.

4. *Dividir un ángulo* AOB *y un arco* ACB *en dos partes iguales* (fig. 39.)

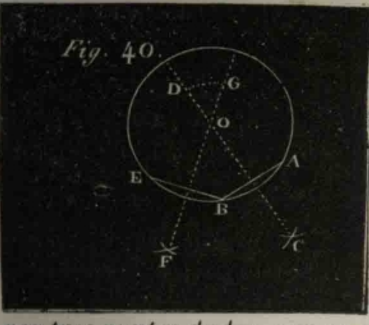


Desde el vértice O como centro y con un rádio arbitrario OA, trazarémos el arco ACB, que corte á los dos lados del ángulo en A y en B; marcarémos un punto cualquiera K á igual distancia de los puntos A y B; finalmente tirarémos la recta OK.

Está recta será la bisectriz deseada.

En efecto, si tiramos la cuerda AB, la recta OK será perpendicular sobre su mitad. Por consiguiente, esta recta divide el arco ACB y el ángulo correspondiente en dos partes iguales.

5. *Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco de círculo.* (fig. 40)



Tomarémos sobre la circunferencia tres puntos A, B, E que unirémos por medio de las cuerdas AB, EB; levantarémos sobre sus mitades dos perpendiculares respectivamente, tales como CD, FG; el punto O de interseccion será el centro del círculo, supuesto que por este punto deben pasar ambas perpendiculares.

6. *Hacer pasar una circunferencia por tres puntos dados, que no se hallen en una misma recta.*

Supongamos los tres puntos A, B, E (fig. 40). Harémos con estos tres puntos lo mismo que hemos hecho en la construccion anterior. Unirémos estos puntos por medio de dos rectas, y sobre sus mitades levantaremos dos perpendiculares respectivamente; el punto O de interseccion será el centro de la circunferencia. Para trazarla, tómese como rádio la distancia AO, ó BO, ó EO. Estas tres distancias son iguales efectivamente; porque el punto O, como perteneciente á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda AB, se halla á igual distancia de A y de B; pero correspondiendo tambien el mismo punto á la perpendicular levantada sobre la mitad de la cuerda BE, equidistará de B y de E. Luego AO=BO=EO.

7. *La tangente* IG *no puede encontrar á la circunferencia en mas de un punto* (fig. 6).

Esta verdad se infiere de la misma definicion de la tangente, la cual es una línea que toca á la circunferencia en un punto solo.— Dedúcese de aqui:

El rádio OH *es la recta mas corta que desde el centro podemos tirar á la tangente.*

8. *La perpendicular* IG *levantada sobre la extremidad de un rádio OH, es tangente á la circunferencia de este punto.*

Facilmente nos convencerémos de esta verdad, si consideramos que cualquier otro punto de la perpendicular está mas distante del centro que el punto H; de consiguiente, esta perpendicular no tiene mas que un punto comun con la circunferencia; luego será tangente.

Reciprocamente la tangente es perpendicular al rádio que termina en el punto de tangencia.

En efecto, otro punto cualquiera de la tangente está mas distante del centro que el punto de tangencia; luego este rádio es la distancia mas corta del centro á la tangente; esta propiedad pertenece exclusivamente á la perpendicular; luego etc.

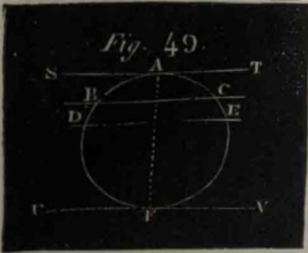
9. *Tirar una tangente por un punto dado en la circunferencia.*

Para resolver este problema, tirarémos un rádio que termine en el punto dado, levantarémos sobre este punto una perpendicular al rádio; esta línea está, segun lo que acabamos de demostrar, la tangente pedida.

10. *Dos paralelas interceptan sobre la circunferencia arcos iguales.*

Tres casos nos puede presentar este teorema.

Primer caso. Si las paralelas son dos secantes BC, DE, (fig. 49), el diámetro que sea perpendicular á estas rectas, cortará la circunferencia en dos puntos A, F, equidistantes de los puntos B y C por una parte, y por otra, de los D, y E. De donde résultará: *arco* AD=*arco* AE, y *arco* AB=*arco* AC; restando estas igualdades, tendremos: *arco* AD—*arco* AB=*arco* AE—*arco* AC; y finalmente *arco* BD=*arco* CE.

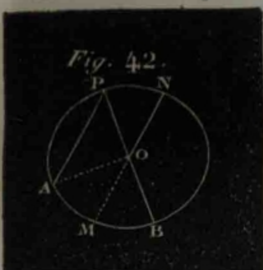


Segundo caso. Si entre las paralelas, la una es tangente como ST, ó UV, y la otra secante, como BC, el diámetro AF pasará por el punto de tangencia A ó F y cortará el arco BAC ó BFC en dos partes iguales. De donde se infiere que:

AB=AC, ó FB=FC.

Tercer caso. Si las paralelas son dos tangentes, ST, UV, la recta AF, que pasa por los puntos de tangencia será un diámetro; de consiguiente los arcos ABDF, ACEF, iguales á la semicircunferencia, son iguales entre sí.

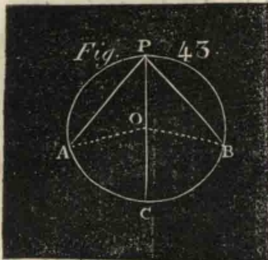
11. *Todo ángulo inscrito APB es igual á la mitad del ángulo del centro que corresponde al mismo arco de círculo* (fig. 42.)



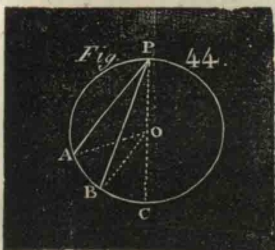
Supongamos para esto que uno de los lados PB pasa por el centro; tirando un diámetro MON paralelo á la cuerda AP, nos resultará el MOB, igual al ángulo propuesto APB, por ser su correspondiente; pero el ángulo MOB es puntualmente la mitad del AOD, como vamos á manifestar.

El ángulo MOB=PON, por ser verticalmente opuesto; PON=AOM, por ser iguales sus arcos correspondientes PN, AM, como interceptados por paralelas; luego MOB=AOM; luego MOB será igual á la mitad de AOB; pero MOB es igual al ángulo inscrito; luego el ángulo inscrito es igual á la mitad del ángulo en el centro, que comprende entre sus lados el mismo arco. L. Q. Q. D.

Si ninguno de los lados pasa por el centro tiraremos un diámetro auxiliar PC (fig. 43 y 44), cuya construccion nos dice que el ángulo inscrito es igual á la suma ó la diferencia de los ángulos APC, BPC, de donde sacaremos el mismo resultado, como muy sencillamente vamos á exponer.



El ángulo APC (fig. 43)$=\frac{AOC}{2}$; el ángulo BPC $=\frac{BOC}{2}$; sumando estas dos ecuaciones, tendremos la suma siguiente:



$$APC+BPC=\frac{AOC+BOC}{2} \text{ ó } APB=\frac{AOB}{2}$$

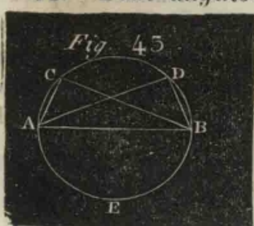
Lo mismo tendrá lugar con el ángulo APB (fig. 44), porque el ángulo APC$=\frac{AOC}{2}$; el BPC$=\frac{BOC}{2}$: y restando estas igualdades nos resultará.

$$APC-BPC=\frac{AOC-BOC}{2}, \text{ ó lo que es lo mismo: } APB=\frac{AOB}{2}.$$

2.° Supuesto que el ángulo del centro tiene por medida el arco interceptado por sus lados;

El ángulo inscrito tendrá por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

12. *Todo ángulo* ACB, ADB *inscrito en un semicírculo es recto,* (fig. 45).



Este teorema se infiere inmediatamente del anterior. El angulo que tomamos en consideracion, tiene por medida la mitad del arco interceptado por sus lados; pero este arco es la semicircunferencia, que vale 180°, luego el valor de este ángulo será de 90°, es decir, será recto.

Podemos considerar como *límite* de los ángulos inscritos el ángulo CBA,

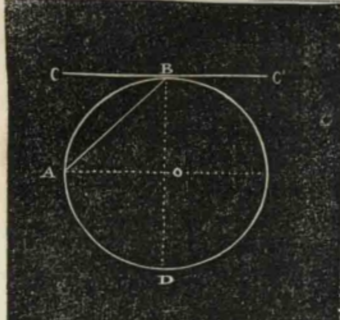


Fig. 45.

formado por la tangente CC' y la cuerda AB, que se cortan en el punto B de tangencia; el teorema precedente es igualmente aplicable á este ángulo, como vamos á manifestar.

Si la cuerda propuesta fuese un diámetro, la propiedad enunciada seria evidente. Supondremos pues el caso contrario; y tiraremos el diámetro BOD y el rádio OA; el ángulo recto CBD valdrá la semisuma de los ángulos suplementarios BOA, DOA; pero segun hemos dicho, $ABD=\frac{AOD}{2}$; luego $CBA=\frac{BOA}{2}$.

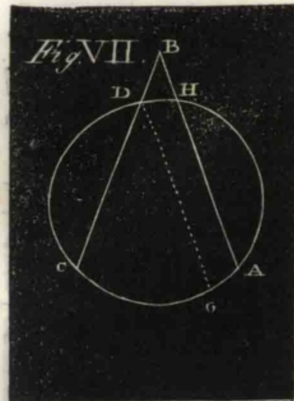
Lo que decimos del ángulo agudo CBA, se puede aplicar al obtuso C'BA: Asi pues, *el ángulo inscrito, formado por una cuerda y una tangente, tiene tambien por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

13. *Todo ángulo ACB, formado por dos cuerdas* AG, BD, *que se cortan en el circulo, tiene por medida la semisuma de los arcos AB, GD, comprendidos entre sus lados.*

Fig. VI.

Para convencernos de esta verdad, tiraremos (fig. VI) la cuerda DH, paralela á la GA, cuya construccion nos dará el ángulo inscrito BDH, que tiene por medida la semisuma de los arcos BA, AH; pero AH=GD; luego este ángulo y por consiguiente el ACB, tiene por medida la semisuma de los arcos AB, GD.

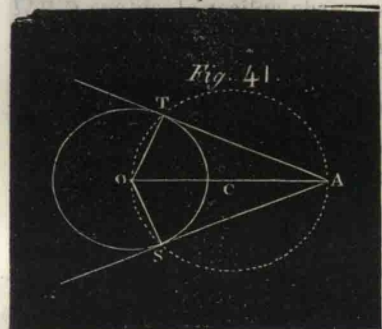
14. *El ángulo* ABC, *formado por dos secantes como* BA, BC, *tiene por medida la mitad*



de la diferencia de los arcos **HD, AC,** *intercep-lados por sus arcos.*

Tirando la cuerda DG (fig. VII) paralela á la secante BA, nos resultará el ángulo inscrito GDC, que tiene por medida el arco $\frac{CG}{2}$; pero CG=AC—AG; luego su medida será la mitad de la diferencia de los arcos AC, AG, ó lo que es lo mismo, la mitad de la diferencia de los arcos interceptados AC, HD.

15. *Por un punto* **A** *dado fuera del círculo, tirar una tangente al círculo* (fig. 41).

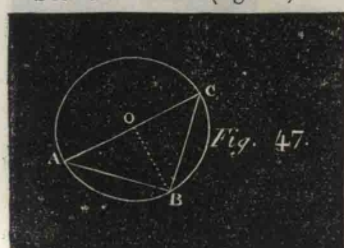


La resolucion de este problema exige la siguiente construccion. Uniremos el punto dado y el centro del círculo por medio de la recta AO ; sobre esta recta como diámetro construiremos una circunferencia que cortará al círculo dado en dos puntos, tales como S, T ; en el círculo trazaremos dos radios que terminen respectivamente en los puntos de interseccion S, T ; uniremos estos puntos con el dado por medio de las rectas SA, TA ; estas dos rectas satisfarán á las condiciones del problema.

En efecto, los ángulos OSA, OTA son rectos, como inscritos en la semicircunferencia del círculo AO ; luego estas rectas son respectivamente perpendiculares á los radios OT, ON ; serán, pues, tangentes al círculo dado.

16. *Levantar una perpendicular sobre el extremo de una recta.*

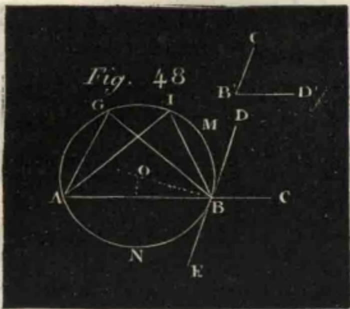
Sea la recta AB (fig. 47). Tómese fuera de esta recta un punto arbitrario O, y con el radio OB se trazará un círculo que corte á la recta AB en un punto A. Tírese ahora el diámetro AOC y la cuerda BC.



La recta BC será la perpendicular pedida; porque el ángulo ABC, como inscrito en la semicircunferencia, será recto ; y la BC por consiguiente perpendicular á AB.

17. *Describir sobre una línea un segmento capaz de un ángulo dado* **C′B′D′** (fig. 48).

(Llámase *segmento capaz de un ángulo dado*, un segmento tal, que todos los ángulos que puedan ser inscritos, sean iguales al ángulo dado).



Sea AB la línea sobre la que nos proponemos describir el segmento. La prolongaremos hácia C, y formaremos el ángulo CBD=al ángulo C'B'D'. Trazaremos la BO perpendicular á la BD, y la HO perpendicular á AB en su mitad. Del punto O de interseccion de las dos perpendiculares, como centro, y con un radio OB describiremos un círculo: ANB será el segmento pedido.

En efecto, el ángulo C'B'D'=CBD=ABE; este último, como formado por una cuerda y una tangente, tiene por medida la mitad del arco ANB. Pero esta es exactamente la medida de todos los ángulos AGB, AIB etc., inscritos en el segmento. Luego etc.

2.ª SECCION.=DE LAS FIGURAS PLANAS FORMADAS POR MAS DE DOS LÍNEAS.

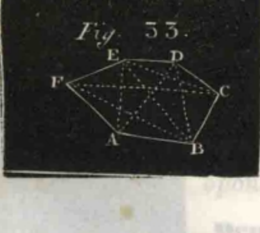
§. I. *De los polígonos en general.*

1. Qué es polígono? Lados, vértices, ángulos, diagonales y perímetro de un polígono.—2. Cuántas rectas se necesitan para limitar un plano?—3. Qué es triángulo?—4. Qué es cuadrilátero, pentágono, exágono, heptágono, octágono etc?—5. Qué es polígono equilateral, equiangular, regular, irregular?—6. Cuándo se dice un polígono inscrito y circunscrito?

1. Llámase *polígono*, la porcion de plano limitado por mas de dos rectas, que se cortan dos á dos.

Las rectas que forman el polígono, se llaman *lados* del polígono; sus puntos de interseccion *vértices*; y sus ángulos, *ángulos* del *polígono*.

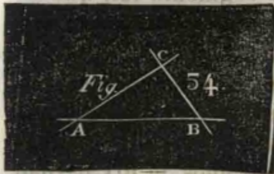
Entendemos por *diagonales* las rectas AC, AD, BD, BE, CE (fig. 53,) que unen dos á dos los vértices de los ángulos no adyacentes á un mismo lado.



El conjunto de los lados se llama *pirímetro* ó *contorno* del polígono.

2. Para limitar un plano, son necesarias; por lo menos tres rectas; así es que un polígono no puede tener menos de tres lados.

3. El *triángulo* es el polígono mas sencillo de todos: se compone de

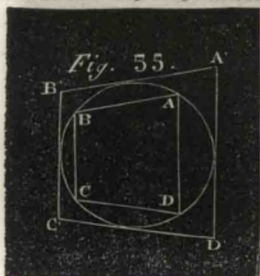


tres lados y de tres ángulos, tal es la figura ABC (fig. 54).

4. El polígono de cuatro lados se llama *cuadrilátero*; *péntágono* el de 5 lados; *hexágono* el de 6; *heptágono* el de 7, *octágono* el de 8, *decágono* el de 10; en fin polígono de 11, 12, 13 etc. lados.

5. Se dice un polígono *equilateral*, cuando tiene iguales todos sus lados; *equiangular*, el que tiene iguales sus ángulos; *regular*, el que tiene iguales todos sus ángulos y lados; *irregular*, cuando le falta uno de estos dos requísitos.

6. Un polígono ABCD (fig. 55) se dice *inscrito* á un círculo, cuando



todos sus lados son cuerdas del círculo, y recíprocamente el círculo se dice en este caso circunscrito al polígono.

Un polígono A′B′C′D′ se dice *circunscrito* á un círculo, cuando todos sus lados son tangentes al círculo, y recíprocamente el círculo se dice inscrito al polígono.

§. II. *Del triángulo y de sus diferentes especies.*

1. Condicion fundamental del triángulo.-2. De cuántos modos se puede considerar un triángulo?-3. Qué es triángulo acutángulo, obtusángulo, rectángulo?-4. Qué es triángulo escaleno, isóceles, equilateral?.5. Qué se entiende por altura y base del triángulo?

Teoremas relativos al triángulo.—Demostrar que:

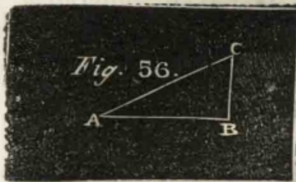
6. La suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos rectos, ó á 180 grados.
7. A qué es igual el ángulo externo de un triángulo? Cuál es el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo? Triángulos simétricos; aplicaciones en las artes.

1 Siendo la recta la línea mas corta que de un punto á otro podemos tirar, *cualquiera de los lados de un triángulo será menor que la suma de los otros dos.*

2. De dos modos podemos considerar el triángulo: 1.º segun la relacion del valor de sus ángulos; 2.º segun la magnitud relativa de sus lados.

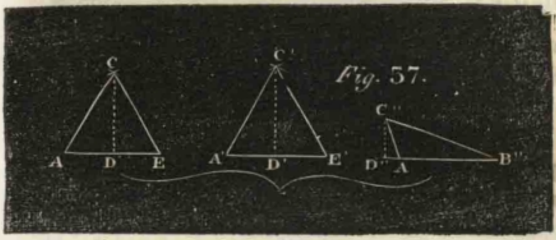
3. Un triángulo se dice *acutángulo*, *obtusángulo*, *rectángulo*, segun que el mayor de sus ángulos sea agudo, obtuso, ó recto.

En un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) el lado AC opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*, y los lados que forman el ángulo recto, reciben el nombre de *catetos*.



4. Llámase *escaleno* el triángulo en el que los tres lados, comparados dos á dos, son desiguales; p. ej. A''B'' C'' (fig. 57).

Isósceles ó *simétrico*, es aquel que tiene dos lados iguales, como el A'E'C' (fig. 57).



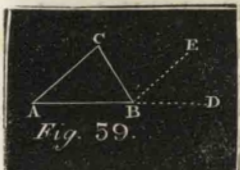
Dícese *equilateral*, el triángulo que tiene iguales sus tres lados, tales el AEC, (fig. 57).

5. Entendemos por *altura* de un triángulo la perpendicular bajada desde uno de sus vértices al lado opuesto que se prolongará si es necesario; tales son CD, C'D', C''D'' (fig 57).

Se llama *base* del triángulo el lado opuesto al vértice, de donde se baja la perpendicular. En el triángulo isósceles se llama *base* el lado desigual, y *lados* de este triángulo los dos lados iguales.

Teoremas relativos á los triángulos. Demostrar que:

6. *La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera* ABC (fig. 59.) *es igual á dos ángulos rectos.*



Para demostrar este teorema, prolongaremos uno de los lados AB, p. ej., formando el ángulo exterior CBD; en este ángulo tiraremos la recta BE paralela á AC cuya construccion nos dará:

CBE=BCA por alternos internos, y DBE=CAD por correspondientes; de donde ABC+BCA+CAB=ABC+CBE+EBD=2 rectos.

Corolario 1.º El ángulo exterior CBD de un triángulo ABC es igual á la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes DAC y ACB.

Corolario 2.º Los dos ángulos agudos A, C, de un triángulo rectángulo ABC (fig. 56) valen 90 grados ó un ángulo recto.

7. *Cuando los dos lados* AE,BE *de un triángulo* ABE (fig. 60) *son iguales, los ángulos opuestos son tambien iguales; ó en otros términos, en un triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Demostracion. Sobre el punto medio C del tercer lado AB, levantaremos una perpendicular. Como los dos lados AE, BE, son iguales, la perpendicular pasará por el vértice E, formando dos triángulos CEB, CEA, los cuales se confundirán exactamente, si doblamos la figura por la perpendicular CE, ajustándose en esta sobreposicion el lado BC con el AC, y el EB con el EA, y en consecuencia el ángulo B con el ángulo A: de donde resulta la igualdad de los dos ángulos A y B, opuestos á los lados iguales EB, EA.

Por la misma razon en un *triángulo, á iguales ángulos se oponen lados iguales.*

En esta sopreposicion los ángulos BEC, AEC se han confundido tambien, de donde se infiere legítimamente que:

En un triángulo isósceles la línea bajada desde su vertice á la base sobre su mitad, es una perpendicular; que esta perpendicular divide á la base en dos partes iguales, asi como divide tambien el ángulo del vértice en dos angulos iguales; y finalmente que divide el triángulo primitivo en dos triángulos rectángulos que se confunden exactamente, sobreponiéndolos inversamente ó al reves.

Las figuras que de este modo se confunden, se llaman ***simétricas;*** y he aqui la razon, porque el triángulo isósceles se llama tambien simétrico.

En las artes se nos ofrecen ejemplos muy notables de las figuras simétricas. El grabado, la imprenta, la litografía etc., tienen por objeto formar en una lámina de madera, metal, piedra etc., figuras, cuya impresion ha de trasladarse sobre otras superficies. Es necesario observar que la figura impresa está al reves respecto de la que hay en la lámina; porque la derecha se imprime á la izquierda, y la izquierda á la derecha, Sobre la lámina pues, se debe escribir al reves, si se quiere que lo escrito se reproduzca en su sentido natural. Esta es la razon, porque los caractéres de imprenta están grabados al reves, y colocados unos despues de otros de derecha á izquierda, á fin de que en el papel estén en su forma natural, y se sigan de izquierda á derecha.

§III. *Comparacion de los triángulos.*

1. Cuántos casos presenta la comparacion de los triángulos?–2. Dos triángulos son iguales: 1.° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; 2.° cuando tienen igual un ángulo y los lados de este ángulo; 3.° cuando tienen un lado igual, adyacente á dos ángulos respectivamente iguales: corolario respecto del triángulo rectángulo.–3. Dos triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, son iguales.–4. Construir el triángulo, conociendo sus tres lados.–5. Formar el triángulo: 1.° conociendo dos lados y el ángulo de estos lados; 2.° dos ángulos y el lado adyacente. –6. Construir un triángulo isósceles, cuando se conocen: 1.° la base y la altura; 2.° la altura y la longitud de los lados iguales; 3.° la base y la longitud de los lados.

1. La comparacion de los triángulos puede presentar tres casos di-

ferentes; de igualdad, de semejanza y de equivalencia. Nos concretaremos por ahora á la igualdad.

Teoremas relativos á la igualdad de los triángulos.

2. 1.° *Dos triángulos* ABC, $A'B'C'$ *son iguales, cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales, á saber*: $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $BC=B'C'$ (fig. 68).

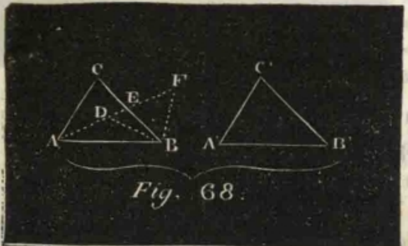


Fig. 68.

Demostracion. Aplicando el lado $A'B'$ sobre su igual AB, y el triángulo $A'B'C'$ sobre el plano ABC, de modo que sus lados iguales se correspondan; los dos triángulos coincidirán exactamente en esta sobreposicion.

Supongamos por un momento que esto no tuviera lugar; el punto C'. p. ej., ó caería dentro del triángulo ABC en el punto D, ó sobre el lado BC, en E, ó por fin fuera del triángulo en el punto F.

En el primer caso resultaria un absurdo, á saber que:

$AD+BD<AC+CB$, ó $A'C'+C'B'<AC+CB$: como vamos á manifestar del modo siguiente:

$AD+DE<AC+CE$, por ser la primera suma el lado AE, menor que la suma de los otros dos;
por la misma razon, $BD<EB+DE$;
sumando entre sí ordenadamente estas dos desigualdades, tendremos:

$$AD+DE+BD<AC+CE+EB+DE:$$

y quitada la parte DE de los dos miembros:

$$AD+BD<AC+CE+EB;$$

ó finalmente $AD+BD<AC+CB$; resultado contrario á la suposicion que hemos hecho.

En el segundo resultará el mismo inconveniente:

$$BE<BC, \text{ ó } B'C'<BC.$$

En el tercer caso tendremos que:

$$AC<CE+AE;$$
$$BF<BE+FE;$$

y sumando $AC+BF<CE+AE+BE+FE$,

ó $AC+BF<AF+BC$

ó lo que es lo mismo, $AC+B'C'<A'C'+BC$;

Resultado igualmente absurdo. Asi pues, el punto C' caerá sobre el punto C, y por consiguiente los triángulos se confundirán. L. Q. Q. D.

2.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen igual un ángulo* $A=A'$, *comprendido entre dos lados respectivamente iguales* (fig. 68)

La sobreposicion nos dará la igualdad de estos triángulos.

Colocaremos el lado A'B' sobre su igual AB y el triángulo A'B'C' sobre el plano ABC, de modo que se correspondan los lados y los ángulos iguales; siendo el ángulo A' igual al ángulo A, el lado A'C' tomará la direccion AC; y como A'C'=AC, el punto C' caerá sobre el punto C: luego los dos triángulos coincidirán perfectamente.

3.° *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual,* AB=A'B' *adyacente á dos ángulos respectivamente iguales* (fig. 68.)

Sobrepondremos el lado A'B' á su igual AB, y el triángulo A'B'C' al plano ABC, de suerte que se correspondan los ángulos iguales: como A'=A, el lado A'C' tomará la direccion AC; y como B'=B, el B'C' tomará la direccion BC. Hallándose pues á la vez el punto C' sobre AC y sobre BC coincidirá con el punto C, y los dos triángulos se confundirán exactamente.

Corolario. *Dos triángulos rectángulos serán iguales, si tienen iguales las hipotenusas y un angulo agudo.*

3. *Dos triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos, son tambien iguales.*

Por medio de la sobreposicion puede cualquiera convencerse de la igualdad de estos triángulos.

4. *Construir el triàngulo, dados sus tres lados* A,B,C, (fig. 58.)

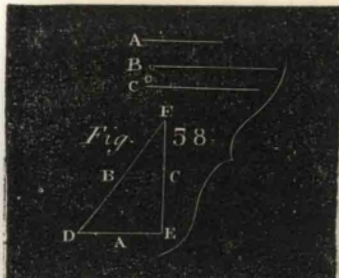


Fig. 58

Trazaremos una recta DE igual al lado A, desde el punto D con un radio B describiremos un arco, y desde el punto E con el radio C trazaremos un segundo arco que corte al primero en F; finalmente desde F tiraremos las rectas FD, FE y tendremos un triángulo DEF, cuyos lados serán las rectas dadas.

5. *Construir un triàngulo conociendo:* 1.° *dos lados* B,C, *y el ángulo* A que forman estos lados (fig 61): 2.° los dos ángulos A, B, y el lado C *adyacente á estos ángulos* (fig. 62).

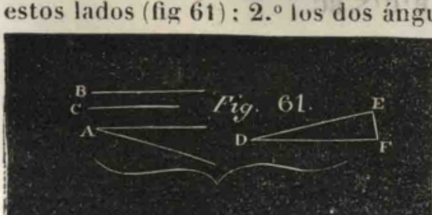
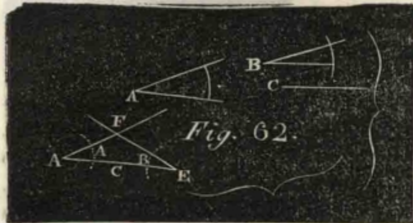


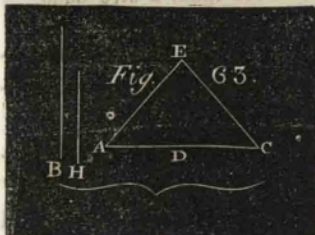
Fig. 61.

1.° Formaremos un ángulo D igual al ángulo A, dando á sus lados las longitudes B,C; tírese la recta EF; el triángulo DEF será el triángulo pedido.

2.° Trácese una recta igual á la recta dada C; sobre A E se formará en el punto E un ángulo igual á B, igualmente sobre el extremo A otro ángulo igual á A. Los otros dos lados, cortándose en el punto F, completarán el triángulo AEF, que satisface á las condiciones pedidas.

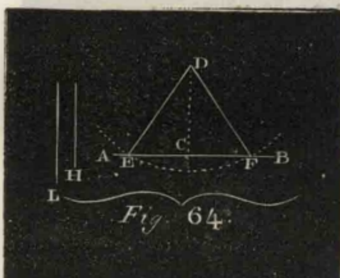


6. *Trazar un triángulo isósceles, cuando se conocen*: 1.° *la base* B *y la altura* H (fig. 63); 2.° *la altura* H *y la longitud* L *de los lados iguales* (fig. 64); 3.° *la base* B *y la longitud* L *de los lados iguales.*



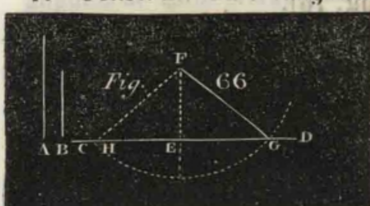
1.° Trácese una recta, igual á la base B; sobre la AC se levantará en su mitad una perpendicular igual á la altura H; finalmente uniremos el punto E con los puntos A y C; de este modo habremos formado el triángulo isósceles AEC.

2.° Sobre el medio de una recta AB levantaremos una perpendicular CD, igual á la altura H; desde el punto D con la longitud L, describiremos un arco que corte á la recta AB en dos puntos E, F; uniremos por fin el punto D con los puntos E, F, y resultará el triángulo isósceles E D F.



3.° Este caso nos presenta los tres lados conocidos; su resolucion pues, será la misma que la del núm. 4.

7. *Construir un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa* A *y un cateto* B (fig. 66).



Sobre una recta cualquiera CD levantaremos una perpendicular EF, igual en longitud al cateto dado: desde el punto F con un radio igual á la hipotenusa A, trazaremos un arco que cortará á la recta CD en dos puntos G, H; uniendo estos puntos con el F, habremos formado los dos triángulos FEG, FEH.

§. IV. *De los cuadriláteros.*

1. Qué es cuadrilatero, trapezoide y trapecio?—2. Qué es paralelógramo? Qué es romboide, rombo, rectangulo y cuadrado?—3. Valor de los ángulos de un cuadilatero.—4. La diagonal divide el paralelogramo en dos triángulos iguales.—5. Construir un trapecio simétrico, conocida la base mayor, la altura y la longitud de los lados no paralelos.—6. Construir un romboide, conocida la base, la altura y uno de los lados que cortan á la base.—7. Trazar un rombo, conociendo un lado y una diagonal.—8. Formar un rectángulo, dada la base y la altura.—9. Construir un cuadrilátero igual á otro dado.

1. Se llama *cuadrilátero* un poligono de cuatro lados. Entre los cuadriláteros hay unos que son *paralelógramos*, y otros que no lo son. Entre estos últimos se cuentan el *trapezoide* y el *trapecio*.

El *trapezoide* que es el mas irregular de todos, no tiene lados paralelos entre sí.

El *trapecio* es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos; tal es el

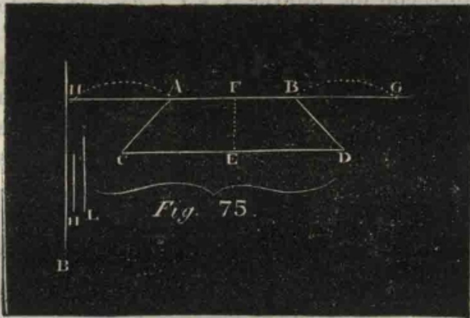


Fig. 75.

ABCD (fig, 75), en el que DC y AB son paralelos. Los dos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio; y la perpendicular EF, comun á las dos bases, es la *altura* del trapecio.

Llámase *simétrico* aquel trapecio que tiene iguales los dos lados no paralelos, AC, BD.

2. Llámanse *paralelógramos* los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos dos á dos; como

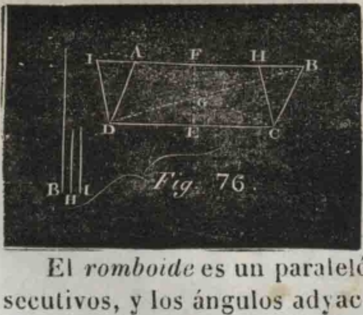


Fig. 76.

el ABCD (fig. 76).

Dos lados opuestos cualesquiera del paralelógramo ABCD, se dicen *bases*, y su perpendicular comun, EF, es la *altura* del paralelógramo.

Entre los paralelógramos se cuentan el *romboide*, el *rombo*, el *rectángulo* y el *cuadrado*.

El *romboide* es un paralelógramo que tiene desiguales los lados consecutivos, y los ángulos adyacentes á un lado; tal es ABCD (fig. 76).