u u
us

Bonshoill

M
m
Madid

M Muerto
Muerto
Na

Sax

REMARQUES DE M. ROLLE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES

Touchant

LE PROBLESME GENERAL DES TANGENTES.

A PARIS,
Chez JEAN BOUDOT, Libraire, Imprimeur du Roy, & de l'Academie Royale des Sciences, ruë Saint Jacques, au Soleil d'Or.

MDCCIII.

APPROBATION.

J'AY lû par ordre de Monsieur l'Abbé BIGNON *ces Remarques* dont les pages sont 1. 2. 13. jusqu'à 108. par M. Rolle ; Je n'y ay rien trouvé qui empêche qu'elles ne soient imprimées, l'Auteur neanmoins pourra retrancher. FAIT à Paris le quatorze May 1703.

TH. GOUYE, S. J.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Baillifs, Sénechaux, Prevôts, Juges, leurs Lieutenans, & à tous autres nos Justiciers & Officiers qu'il appartiendra : SALUT. L'Academie Royale des Sciences, Nous a trés-humblement fait remontrer que suivant le nouveau Reglement que Nous luy avons donné, Elle redoublera ses soins pour publier divers Ouvrages tant de Remarques ou Observations journalieres, & des Relations annuelles de ce qui aura été fait dans ses Assemblées, que d'autres Memoires, Livres & Traitez faits par les Academiciens qui la composent, Nous suppliant de luy vouloir aussi accorder toutes Lettres & Privileges necessaires pour faire imprimer, vendre & debiter par tel Libraire qu'Elle choisira, tous & tels Ouvrages qu'Elle aura approuvés. A CES CAUSES, & nôtre intention étant de procurer à ladite Academie en Corps & à chaque Academicien en particulier, toutes les facilités & tous les moyens qui peuvent contribuer à rendre leur travail utile au Public, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par nos presentes Lettres, de faire imprimer, vendre & debiter en tous les lieux de nôtre Royaume par tels Libraires qu'Elle jugera à propos de choisir : *Les Remarques ou Observations journalieres, & les Relations annuelles de ce qui aura été fait dans les Assemblées de ladite Academie*, & generalement tout ce qu'Elle voudra faire paroître en son nom, comme aussi les autres Ouvrages, Memoires, Traitez ou Livres des Particuliers qui la composent, lorsqu'aprés les avoir examinez, approuvez aux termes de l'article trente dudit Reglement, Elle les jugera dignes d'être imprimez. FAISONS trés-expresses deffenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité qu'elles soient, & nommément à tous autres Libraires & Imprimeurs, que celuy ou ceux que l'Academie aura choisis, d'imprimer, vendre ou débiter aucuns desdits Ouvrages en tout ou en partie & sous quelque prétexte que ce puisse être, à peine contre les Contrevenans de confiscation au profit dudit Libraire, de tous les Exemplaires contrefaits & de trois mil livres d'amende, applicable un tiers à Nous, l'autre tiers à l'Hôpital du lieu où la contravention aura été faite, & l'autre tiers au Dénonciateur, à condition qu'il sera mis deux Exemplaires desdits Ouvrages dans Nôtre Bibliotheque publique, un en celle du Cabinet de nos Livres en nôtre Maison du Louvre, & un en celle de nôtre trés-cher & feal Chevalier Commandeur de nos Ordres, le sieur Boucherat, Chancelier de France, avant que de les exposer en vente; & à la charge aussi que lesdits Ouvrages seront imprimez sur de beau & bon papier & en beaux caracteres, suivant les derniers Reglemens de la Librairie & Imprimerie, & de faire enregistrer ces Presentes sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, le tout à peine de nullité des Presentes; du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons faire joüir & user ladite Academie & ses Ayans-cause pleinement & paisiblement, cessant & faisant cesser tous troubles & empêchemens contraires. Voulons qu'en mettant au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, l'Extrait des Presentes, elles soient tenuës pour dûëment signifiées, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos Amez & feaux Conseillers Secretaires, foy soit ajoûtée comme à l'Original: Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'execution des presentes tous Exploits, saisies & autres Actes necessaires sans autre provision: CAR tel est nôtre plaisir. DONNÉ à Versailles le sixiéme jour d'Avril, l'an de grace mil six cens quatre-vingt-dix-neuf, & de nôtre Regne le cinquante-six. Signé, LOUIS. *Et plus bas*, Par le Roy, PHELYPEAUX.

Registré sur le Livre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires, conformément aux Réglemens, à Paris le huitiéme Mars 1699.

C. BALLARD, *Syndic.*

Collationné à l'Original, par Nous Conseiller Secretaire du Roy, Maison Couronne de France & de ses Finances.

L'Academie a cedé le droit du present Privilege au sieur JEAN BOUDOT, Libraire à Paris, & son Libraire ordinaire, pour en joüir luy seul & à l'exclusion de tous autres, dans toute son étenduë, suivant les conditions du Traité fait entre ladite Academie & luy, le onziéme Juillet 1699.

REMARQUES

REMARQUES
DE
M. ROLLE
DE L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES,

Touchant le Problême general des Tangentes.

POUR SERVIR DE REPLIQUE à la Réponse que l'on a inserée, sous le nom de M. Saurin, dans le Journal des Sçavans du 3. Aoust 1702.

ART. I. LA Methode des Tangentes & celle *de Maximis & Minimis*, sont des premieres qui se presentent, quand on veut s'instruire de la Science generale des Lignes courbes, & ces deux Methodes sont des principes pour les grandes recherches qui regardent

De l'Origine & du progrés de la Methode ordinaire des Tangentes.

cette Geometrie. Il eſt aiſé de tirer la Methode des Tangentes de celle *de Max. & Min*; plus facile encore de tirer celle *de Max. & Min.* de la Methode des Tangentes, & l'on peut les former chacune ſeparément.

Meſſieurs Deſcartes & de Fermat, ſont les premiers qui ont entrepris de trouver des Regles generales pour ces deux Methodes. Ils ont d'abord réduit ce Problême de lignes courbes, à un Problême de lignes droites, & celuy-cy en Problême d'Algebre. Pour cela, ils ont ſuppoſé deux abſciſſes avec leurs appliquées, & que la *difference* de ces abſciſſes eſt indéterminée: le premier fournit une Regle pour trouver le cas où les deux abſciſſes ſont *entierement égales*. Le ſecond en fournit une autre pour faire que la *difference* de ces deux abſciſſes ſoit *entierement détruite*. Ainſi, les premiers principes en ſont les mêmes; & de-là il réſulte une Egalité dans chacune de ces deux Methodes, qui fournit toutes les Tangentes ordinaires des lignes geometriques de tous les genres, lorſque le point propoſé eſt donné ſur la courbe. Delà auſſi s'ouvre un moyen pour trouver les Tangentes extraordinaires de ces lignes, & les Tangentes des autres lignes qu'on appelle Méchaniques ou *tranſcendantes*. Mais ces deux Methodes ſont d'ailleurs un peu differentes dans la figure, plus differentes dans le calcul; & M. Deſcartes a marqué dans une Lettre à M. de Beaune, que la ſienne en certains cas n'étoit pas auſſi ſimple que celle de M. de Fermat. Cependant M. Deſcartes luy-même dans une autre Lettre à M. Hardy explique & perfectionne la Methode de M. de Fermat. Il deſigne la *difference* des abſciſſes par un ſegment de ligne dans la figure, & il la deſigne encore par la lettre *e* dans le calcul, comme l'avoit déja fait M. de Fermat luy-même. Outre cela il ſuppoſe une droite qui rencontre la courbe en deux points, & qui doit devenir Tangente lorſque la *difference* indéterminée des abſciſſes eſt priſe pour un *zero abſolu*. Il pourſuit ſelon les Regles ordinaires de la Geometrie & de l'Algebre, & ſelon les idées de l'Auteur dont il explique la Methode.

Lettres de M. Deſcartes, tom. 3. Lettre 61.

Ensuite, M. Hudde donna une Regle fort ingenieuse pour resoudre les questions *de Max. & Min.* avec laquelle on abrege la Methode des Tangentes qui est particuliere à M. Descartes. Cette Methode de M. Hudde est la plus simple que l'on puisse souhaiter pour les problemes *de Max. & Min.* Mais tous les secours que l'on a en tiré pour la Methode de M. Descartes, n'ont pas empêché que celle de M. de Fermat n'ait prévalu.

D'autres Auteurs ont cultivé cette Methode de M. de Fermat; ils l'ont abregée, & ils en ont fait l'application aux lignes transcendantes. C'est ce qu'il faut marquer icy selon l'ordre des dattes pour ma défense : Mais auparavant il faut distinguer deux choses dans leurs recherches.

1°. La maniere de former la Methode, d'en faire voir l'origine, & d'en donner la démonstration.

2°. La maniere de retrancher toutes les operations qui ne sont pas necessaires pour la pratique, quoique necessaires pour la démonstration. C'est à dire, de trouver un canon, une formule ou une égalité qui donne les Tangentes que l'on demande, de la maniere la plus courte & la plus facile.

Pour mieux distinguer ces deux choses, il est bon d'apporter icy pour exemple l'égalité generatrice que j'ay marquée en *A* dans le Journal du 13 Avril, & que l'on peut voir icy en *C*.

$$C \ldots \quad \begin{matrix} y^4 - 8y^3 - 12xyy + 48xy + 4xx = 0. \\ \quad\quad\quad + 16yy \quad\quad\quad - 64x \end{matrix}$$

Si la difference des y est nommée e, & que la difference des x soit appellée a, comme l'avoit supposé M. Barou avant que l'on eût parlé du calcul differentiel, il n'y a qu'à multiplier chaque terme par son exposant, & mettre chaque difference, au lieu d'une des dimensions de son inconnuë. C'est-là tout ce qu'il faut faire pour trouver la formule ordinaire des Tangentes; & cette formule dans l'exemple proposé est telle qu'on la voit icy en *D*.

$$D \ldots 4y^3e - 24yye - 12yya - 24yxe + 32ye + 48ya + 48xe + 8xa - 64a = 0.$$

Quand on a cette formule on trouve tout d'un coup l'Egalité qui détermine les Tangentes ſur chacun des Axes de la Courbe. Si l'on veut par éxemple l'Egalité des Tangentes ſur l'Axe des y, & que l'on prenne $ſ$ pour l'expreſſion des Soûtangentes; il ſuffit de ſubſtituer $ſ$ au lieu de e dans l'Egalité D, & d'y ſubſtituer x au lieu de a. Delà il reſultera celle que l'on voit icy en E, pour l'Exemple propoſé.

$$E \ldots 4y^3ſ - 24yyſ - 12yyx - 24yxſ + 32yſ + 48yx + 48xſ + 8xx - 64x = 0$$

Et ſi l'on dégage $ſ$ à l'ordinaire, on aura cette même Egalité ſous la forme qui eſt marquée icy en F.

$$F \ldots ſ = \frac{12yyx - 48yx - 8xx + 64x}{4y^3 - 24yy - 24yx + 32y + 48x}$$

Si l'on aimoit mieux la Soûtangente des x, & qu'on la nommât t, il n'y auroit qu'à ſubſtituer t au lieu de a, & y au lieu de e.

Ainſi, la maniere de former une de ces trois Egalités D, E, F, eſt auſſi la maniere de former les deux autres; puiſque les ſubſtitutions ne ſont pour l'Operation que des changemens de noms, & que chacun de ces noms eſt deſigné par une ſeule lettre.

Cela poſé, il ſera facile de ſçavoir que la formule fondamentale du Calcul differentiel n'eſt autre choſe que la formule ordinaire des Tangentes, & qu'elle étoit publique avant que l'on eût rien fait paroître des premiers projets de ce Calcul.

Voir ſur cela M. Neuventiit dans ſon Analyſe des Infinis. Chap. I. art. 5. 6. 7. 8.

En l'année 1674. M^r. Barou donna au public ſes Leçons Geometriques : Où l'on peut voir page 80. qu'il propoſe un Canon abrégeant pour trouver les Egalitez $C.E.F.$ & qu'il marque comment on peut y venir & en donner la Demonſtration. On a reconnu dans la Préface de l'Analyſe des Inf. petits que M^r Barou avoit travaillé en cela ſur les Idées de M^r. de Fermat.

Mr de Tſchirnhaus propoſa auſſi la Régle la plus abrégeante pour trouver l'Egalité des Tangentes ſous la forme qu'on l'a marquée icy en *F*; dans les Journaux de Leipſic du mois de Décembre 1682. Il ſe propoſe auſſi bien que Mr Barou d'en faire l'application aux Lignes méchaniques; & aprés cela il ajoûte: *Demonſtrationem horum omnium ſuo loco exhibebo; quam tamen unuſquiſque vel levitér in Analyticis verſatus ex hactenus exhibitis Methodis Carteſii, Fermatii, Sluſii &c. facilè poterit elicere.*

Ainſi, les Défenſeurs de l'Analyſe des Inf. petits ne peuvent pas nier que Mrs Barou & de Tſchirnhaus ne ſe fuſſent ſervis des Idées de Mr de Fermat pour trouver l'Egalité ou la formule ordinaire des Tangentes qu'ils nomment *Egalité differentielle*, & l'on y peut voir que la maniere de la trouver ne conſiſte qu'à multiplier tous les termes des deux Inconnües de la propoſée, chacun par ſon Expoſant, & à faire les changemens de noms que nous avons marquez icy.

Sur cela, il faut obſerver que les *differences* telles que *a* ou *e*, ſont toûjours indéterminées dans l'hypotéſe de Mr de Fermat: qu'elles ne reçoivent aucun changement ni aucune détermination dans ſa Méthode, juſqu'à ce qu'elles ſe trouvent dans la derniere Egalité qui réſulte de l'Evanoüiſſement des Inconnües, & que dans cette Egalité il ſubſtituë des zeros abſolus au lieu de ces differences pour avoir la formule ou l'Egalité des Soûtangentes. C'eſt ainſi que Mr Deſcartes en a usé pour l'explication de cette Méthode dans ſa Lettre à Mr Hardy, & cela eſt neceſſaire pour en donner une véritable Démonſtration. De maniere que les Differences *a* & *e* n'ont aucune valeur dans la formule des Soûtangentes. Ce qui ſera prouvé dans la ſuite par bien d'autres Voyes.

Alors, ces lettres *a* & *e* ne ſont dans cette formule que des Expreſſions qui peuvent ſervir à comparer des rapports; & ſi l'on veut leur attribüer de l'étenduë de la diviſibilité & des Configurations, il faut regarder & conduire ces ſuppoſitions comme de fauſſes hypoteſes.

En l'année 1684. Mr de Leibniz donna dans les Journaux de Leipsic des Exemples de la formule ordinaire des Tangentes, & il imposa le nom d'*Egalité differentielle* à cette formule. Parmi ces Exemples, il y en a qui ont des Signes radicaux; & il ajoûte qu'il n'est point necessaire de faire évanoüir ces Signes pour y appliquer les Régles dont il se sert. On y voit aussi qu'il propose toutes les formules dont il parle comme l'effet d'une nouvelle Logistique ou d'un *Algorithme* nouveau auquel il donne le nom de *Calcul differentiel*. C'est ce prétendu Algorithme qui a esté comme le berceau de la Géometrie transcendante, & l'on voudroit aujourd'huy qu'il fût aussi le tombeau de la véritable Géometrie.

Mr de Leibniz n'entreprend point d'expliquer l'Origine de ces formules dans ce premier Projet, ni d'en donner aucune Démonstration. Les *differences* dont il se sert ne marquent aucune quantité réelle; ce sont des expressions qui peuvent servir à comparer des rapports, comme dans la formule que l'on a marquée icy en *D*; & on le verra encore mieux dans la suite.

Au lieu de l'*a* & de l'*e*, il prend dx & dy. Ce qui est souvent commode dans la pratique lorsque l'on y est accoûtumé; mais ces nouvelles expressions dy, dx sont tres-incommodes dans l'Operation & dans les raisonnemens lorsqu'il s'agit de faire voir l'origine de la Methode ou d'en donner la Démonstration; & il est évident que des changemens d'expression ne sont pas des principes de connoissance.

Mr de Leibniz a donné plusieurs Mémoires en divers temps pour soûtenir ce Projet, & pour le rendre recommandable. Il a supposé une suite de quantitez *incomparablement* plus petites les unes que les autres, & delà se forme une espece de Systeme pour expliquer les Methodes que l'on attribüe au Calcul differentiel.

Enfin l'on a réüni dans l'Analyse des Inf. petits tout ce qui avoit esté fait de plus considerable jusques là pour celebrer le Calcul differentiel. Au lieu des *Incomparables* de Mr Leibniz, on a introduit des *Infiniment petits* dans cette Analyse, qui ont des conditions differentes de celles des *Incomparables*, mais pleines de paradoxes.

D'abord l'on propose dans cette Analyse les premieres définitions & les suppositinns de l'Infini qui ont quelque vray-semblance, & l'on entreprend d'en tirer une *Egalité differentielle*. On ne dit pas en y proposant cette Egalité qu'elle n'est autre chose que la formule ordinaire des Tangentes; & l'on en parle au contraire comme si elle étoit particuliere au Calcul differentiel. On la fait descendre du nouveau Systéme de l'Infini, & l'on propose une Logistique nouvelle pour appuïer cette nouvelle généalogie. On y suppose une *Addition*, une *Soustraction*, une *Multiplication*, & une *Division*. Mais tous ces mots ne sont d'aucun usage dans cette Occasion. L'on voit aussi qu'ils ne reviennent jamais dans la suite du Livre, ni dans le détail du Calcul que prescrivent les Methodes; & que l'on ne peut les y introduire sans faire paroître une affectation qui en feroit remarquer les inutilitez.

Il ne s'agit pour former cette Egalité differentielle que de multiplier tous les termes de chaque inconnuë chacun par son exposant, & de substitüer l'expression des differences détruites, comme l'avoient déja fait plusieurs Auteurs, & comme je l'ay marqué icy. On ne fait que cela aussi sur cette formule dans l'Analyse des Inf. petits; ou s'il y a du changement, ce n'est que pour écrire dx & dy au lieu de a & de e. Mais l'on y seroit porté à croire que toutes ces Operations ne se font qu'en consequence du nouveau Systéme de l'Infini, quoiqu'elles fussent réglées sur de bons principes avant que l'on eût parlé du Calcul differentiel, & que le manége que l'on fait en cela dans cette Analyse, ne soit qu'un deguisement des Régles qui avoient déja paru sur ce sujet; comme je l'ay fait voir dans des Memoires que j'ay communiquez à differentes personnes. Et s'il étoit vray que les suppositions de l'Infini fussent des principes de connoissance, on n'auroit pas pû dire delà comme on l'a dit dans le

Journal du 3. Aouſt, que je n'ay pû tirer les Régles que j'ay propoſées dans le Journal du 13. Avril que du Calcul differentiel ſeulement, ni m'accuſer en cela d'*Injuſtice*, puiſque je ne me ſers point de ces Suppoſitions, mais ſeulement des principes & des voyes ordinaires qui étoient en uſage avant qu'on eût parlé de ce Calcul.

ART. II. On pourra voir icy par des effets, que les Régles dont je me ſuis ſervi pour de nouvelles Tangentes dans le Journal du 13. Avril ſont fort differentes de toutes les Régles de l'Analyſe des Inf. petits. Mais avant que d'en venir à l'experience, on pourroit encore s'aſſûrer en pluſieurs manieres, que je ne me ſuis point ſervi pour former ces Régles, ni des principes, ni du tour qu'on a pris dans cette Analyſe. Non ſeulement je ne me ſuis point ſervi en cela de tout ce que l'on y propoſe pour principe d'invention, de Theorie & de Démonſtration; mais il ne ſe trouvera point auſſi dans la premiere maniére de trouver les formules, que les operations dont je me ſers ſoient ſemblables à celles dont on ſe ſert dans l'Analyſe des Inf. petits. C'eſt principalement de cette premiere maniére dont il s'agit : Car la génération de l'Egalité *B* que j'y ay marquée eſt en cela un principe neceſſaire pour faire voir comment ces formules conduiſent aux nouvelles Tangentes; en quoi l'on n'a pas beſoin de la ſeconde maniére que je propoſe pour trouver ces formules, & cela n'eſt pas reciproque. Car l'on ne ſçauroit démontrer les Régles que j'ai propoſées par la ſeconde maniére ſans ſuppoſer la premiére; enſorte que la premiere peut ſuffire pour la Theorie & pour la Pratique, & que la ſeconde ne peut ſervir que pour abréger, en certains Cas, les Operations Analytiques.

Que les *differences* de l'Analyſe des Inf. petits, ſont infiniment differentes de celles

C'eſt cette premiere maniére la ſeule importante icy, que l'on n'a touchée qu'en paſſant dans le Journal du 3. Aouſt. On y ſuppoſe 1°. que nz, nv dont je me ſuis ſervi pour marquer les differences, ſont la même choſe que le dx & le dy du Calcul differentiel. 2°. Que c'eſt encore la même choſe pour trouver l'Egalité *B* dans le Journal

Journal du 13. Avril, d'y substituer $y + dy$ au lieu de y, & $x + dx$ au lieu de x, que d'y substituer $y + nz$ au lieu de y, & $x + nv$ au lieu de x. dont je me suis servi dans le Journal du 13. Avril.

Il y a plusieurs remarques considerables à faire sur ce sujet.

D'abord on peut observer qu'il y a de tres-grandes differences entre les dx, dy du Calcul differentiel, & les nz, nv dont je me suis servi.

1°. nz & nv marquent toûjours des differences finies & réelles; au lieu que dans le Dictionnaire du Calcul differentiel les dx & dy marquent toûjours des *Infinis*, & que ces expressions ne designent effectivement aucune quantité réelle, dans l'égalité differentielle.

2°. Chacune des expressions nz, nv marque toûjours le produit de deux quantitez; ce qui n'arrive jamais à dx ni à dy, selon l'Analyse des infiniment petits.

3°. La lettre n commune à nz & nv désigne toûjours un commun diviseur de ces deux differences; mais la lettre d commune aux deux differences dy, dx ne marque jamais de commun diviseur.

4°. La lettre n ne se trouve jamais dans l'égalité qui résulte des triangles semblables ni dans les formules des Tangentes; mais la lettre d se trouve toûjours dans cette égalité, & se trouve encore dans les formules des Tangentes.

5°. En effaçant la lettre commune d des differences dx, dy, il en résulte l'expression des appliquées & de l'abscisse; & en effaçant n de nz, nv, il ne resulte rien moins que l'abscisse & l'appliquée. Delà aussi l'on peut voir que n, z, v, se peuvent separer & se placer au commencement, au milieu, ou à la fin du monome auquel elles appartiennent: mais pour dx, il faut non seulement que ces deux lettres soient inseparables, mais aussi que d soit la premiere, & que les deux ensemble soient placées à la fin de chaque monome. Il en est de même de dy, & de toutes les differences du nouveau systême de l'Infini.

Ainſi, l'on peut voir que la ſignification de nz, nv eſt infiniment differente de celle des dx, dy. On peut encore voir delà qu'elles ſont differentes dans l'uſage, & on le peut voir auſſi par d'autres raiſons tres-conſiderables en cette occaſion. Car il arrive toûjours qu'en prenant $n = 0$ dans la réduite du Probléme, toutes les differences s'évanoüiſſent à la fois : ce qui détermine la ſecante indéterminée à devenir une tangente; & c'eſt là non ſeulement un principe d'invention pour former la Régle, mais encore un moyen pour en donner la Démonſtration. Rien de ſemblable ne ſe fait & ne ſe peut faire dans le Calcul differentiel par le moïen des dx & dy. De plus, on a toûjours $nz : nv :: z : v$. Ainſi les differences réelles des Abſciſſes & des Appliquées ſont toûjours dans le rapport de z à v : de maniere que z & v ne ſont pas les differences mêmes ; elles ſont ſeulement des expreſſions pour en marquer le rapport. Ce qui ſera expliqué plus amplement dans la ſuite.

Si j'avois dû citer quelque Auteur pour les Triangles GEF, FHC, & pour avoir marqué les differences par des lettres, ce ſeroit plûtoſt M. Barrou & les autres qui s'étoient ſervi de l'a & de l'e & de ces Triangles, que de citer le Calcul differentiel; puiſque cet a, cet e & ces Triangles avoient ſervi pour l'expreſſion de ces differences avant que l'on ſe fût ſervi de dx ni de dy: Et s'il y avoit quelque *Injuſtice* en cela, elle ſeroit premierement de ce Calcul ; de n'y avoir pas dit que ce dx & ce dy ne déſignent dans l'égalité differentielle que l'a & l'e dont on s'étoit ſervi auparavant. Ainſi le reproche que l'on me fait dans le Journal du 3. Aouſt ſur nz, nv, & ſur les Triangles GEF, FHC, retomberoit ſur l'Analyſe des Inf. petits, ou ſur Mr de Leibnitz. Comme on ne pouvoit citer dans ce Journal la Theorie de cette Analyſe, & que l'on vouloit neanmoins faire croire que j'en avois tiré les Régles que j'ay propoſées ; on a eſté obligé d'attribuer l'origine de ces Régles & leurs effets à des Expreſſions purement arbitraires: car l'on n'entreprend pas de raiſonner dans le Journal du 3. Aouſt ſur les dx & les dy en conſequence des idées que l'on y a attachées dans l'Analyse des Inf. petits.

Suite & Confirmation du précedent article.

ART. III. Les Substitutions ordinaires dont je me suis servi dans le Journal du 13. Avril, page 240. ont deux avantages considerables. 1°. Elles produisent à la fois la formule ordinaire des Tangentes avec les autres formules qui peuvent servir au Probléme. 2°. L'Egalité qui résulte de cette substitution, & qui renferme toutes ces formules, est une des principales choses pour faire voir l'origine des Régles que j'ay proposées sur les Tangentes, & pour en donner la Démonstration. Rien de cela n'est proposé, ni même indiqué dans l'Analyse des Inf. petits. M. de Fermat dans sa Méthode, M. Descartes dans sa Lettre à M. Hardy, & d'autres Auteurs encore, avoient fait de semblables substitutions & trouvé des égalitez équivalentes, avant qu'on eût parlé du Calcul differentiel. Mais les principales voyes qu'ils ont tenuës, sont celles que l'on a voulu éviter dans ce Calcul : & neanmoins on veut faire croire dans le Journal du 3. Aoust que la maniére de faire ces substitutions, d'en tirer à la fois toutes les formules des Tangentes, & d'en régler l'Usage, ne se peut trouver que dans les principes de l'Analyse des Inf. petits. On ne le dit pas toûjours en termes exprés ; mais on en tire presque par tout des consequences, comme si on l'avoit déja prouvé. Voici ce que l'on a dit dans ce Journal du 3. Aoust sur la fin de la page 526. & au commencement de la page 527. où M. Saurin parle de moy en cette maniere : *Son Egalité B qui comprend une suite d'Egalitez differentielles, & qu'il forme par la substitution, est-elle differente en quelque chose aux noms prés, de celle qui seroit formée par la substitution de* $y + dy$ *au lieu de* y, *& de* dx *au lieu de* $x + dx$? Et delà on a conclu au même endroit que pour tirer de l'Analyse des Inf. petits les Régles que j'ay proposées dans le Journal du 13. Avril, je n'ai fait autre chose que changer dx & dy en nz & nv : Mais l'on y peut voir, comme je l'ay déja marqué ici, que ce prétendu rapport de dx, dy, à nv, nz, est une ſuppoſition fauſſe dans le recit ; & rien ne ſe trouve dans cette Analyſe qui marque la ſubſtitution qui fournit l'égalité *B* ; il ne s'y trouve aucune Régle qui donne à la fois toutes les formules que fournit cette Egalité, ni par des ſubſtitutions, ni autrement ; & ſi on l'y avoit miſe, alors il faudroit reconnoître que cela vient des Auteurs qui avoient precedé le Calcul differentiel, ſelon ce que je viens de dire. De plus, les Expreſſions dx, dy ſeroient trés-incommodes dans cette occaſion, ſoit pour l'opération, ſoit pour les preuves, quand même on voudroit en changer les idées.

On peut voir auſſi que Mr Saurin abandonne cette ſuppoſition en la propoſant, & qu'il ſe retranche dans les Régles de ſurcroît. Il faut le ſuivre.

Que dans les operations de ſurcroît je n'ay pû tirer de l'Analyſe des Inf. petits ni du Calcul differentiel les Régles que j'ay propoſées dans le Journal du 13. Avril.

ART. IV. La ſeconde maniére que j'ay propoſée dans le Journal du 13. Avril page 241. pour trouver l'Egalité qui eſt marquée en *B* dans ce Journal, ne ſeroit pas plus courte que la premiere maniére, ſi l'on avoit beſoin de tous les termes de cette Egalité, ou des formules que chacun fournit ; mais l'uſage en eſt d'autant plus grand, qu'elles ſont plus proches du dernier terme : Ainſi, c'eſt abréger l'operation, que de les trouver ſucceſſivement, & de voir où il faut s'arreſter pour ne point former celles qui ſont inutiles ; Et c'eſt dans cette generation ſucceſſive, que conſiſte la ſeconde maniére de former l'Egalité *B*. Mais ſi l'on vouloit démontrer qu'elle fournit toûjours les Tangentes dont il s'agit, il faudroit des preuves de deux ordres bien differens. Il faudroit prouver que la premiere maniére donne ces Tangentes, & prouver auſſi que les formules qu'elle fournit ſont les mêmes que dans la ſeconde maniére. On n'avoit garde de rien entreprendre de ſemblable ni rien d'équivalent dans le Journal du 3. Aouſt : M. Saurin auroit été obligé d'abandonner les principes qui ſont particuliers à l'Analyſe des Inf. petits, de rentrer dans les voyes naturelles, & de convenir que l'on a trouvé ou rencontré dans ces voyes ce qu'il y a de vrai dans cette Analyſe. Il n'en faudroit pas davantage pour déſabuſer ceux qui ne cherchent en cela que la verité, & qui veulent en être persuadez : Mais ils peuvent l'être encore, s'ils prennent la peine d'éxaminer ce qui suit.

Il faut d'abord distinguer deux choses dans la seconde maniére de trouver les formules que j'ay proposées dans le Journal du 13. Avril, page 241. La premiere n'est autre chose que la formule ordinaire des Tangentes, & il ne faut pas qu'elle soit confonduë avec les autres. On a déja marqué ici que cette formule, la maniére abregée de la trouver, & la maniére de l'appliquer aux Tangentes, étoient déja communes & publiques avant que l'on eût rien publié du Calcul differentiel. On a marqué aussi dans le premier Article que l'abregement & l'usage de cette formule nous sont venus premierement de M. de Fermat. Ainsi, j'ai eu raison de dire dans le Journal du 13. Avril, que j'avois suivi les idées de cet Auteur : & delà on peut voir que loin d'avoir fait en cela une *Injustice* à l'Analyse des Inf. petits, j'aurois eu tort de dire que ce sont des principes particuliers à cette Analyse, & de supposer que *ce ne sont pas les Idées de M. de Fermat.*

Dans cette premiere formule & dans toutes les autres qui se forment par le moïen des Régles abrégeantes que j'ai proposées ; on y multiplie tous les termes des Inconnuës chacun par son exposant. On fait de semblables multiplications dans l'Analyse des Inf. petits ; & sur cela on a voulu faire croire dans ce Journal du 3. Aoust, que la maniére de trouver toutes ces formules ne pouvoit se tirer que de cette Analyse. Mais il faut observer 1°. Que M. Hudde long-temps avant qu'on eût parlé du Calcul differentiel, avoit donné le moïen le plus court de former une suite d'égalitez pour les problemes de *Max. & Min.* & pour abréger la Methode des Tangentes ; que pour cet effet il multiplie tous les termes, chacun par son exposant ; & que ces formules ont esté prises pour une suite d'*Egalitez differentielles* dans l'Analyse des Inf. petits, Sect. 10. De plus, Mrs Barrou, Tschirnhaus, Huguens, & d'autres aussi qui ont cultivé les idées de M. de Fermat, avoient multiplié tous les termes des inconnuës chacun par son exposant pour la premiere formule des Tangentes. Ainsi, l'on peut voir que cette multiplication ne nous vient pas de l'Analyse des Inf. petits, & que je n'ai point fait d'*injustice* à cette Analyse de ne l'avoir point citée sur cela. 2°. Il ne s'agit pas ici de cette multiplication en elle-même : il s'agit de la maniére de l'appliquer pour trouver les nouvelles Tangentes que j'ai proposées : il s'agit encore de sçavoir si l'on a proposé des Régles pour faire cette application dans l'Analyse des Inf. petits, & si je me suis servi de ces Régles. Or il ne se trouve dans cette Analyse ni précepte qui prescrive la maniére de regler cette application, ni aucune observation qui la puisse indiquer, ni un seul mot pour donner occasion d'en faire la recherche. On y traite fort au long les Tangentes ordinaires, mais l'on n'y parle point de ces Tangentes extraordinaires ; & neanmoins l'on s'étoit proposé dans ce Livre *d'être court sur les choses qui sont déja connües, & de s'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.* 3°. Mais il y a bien plus ici pour ma défense. Car les secondes formules, & les autres ensuite que j'ai proposées dans le Journal du 13. Avril, sont tres-differentes de toutes les formules que fournit l'Analyse des Inf. petits ; & cette difference suffiroit pour me justifier. Voici comment.

Loin d'avoir suivi l'Analyse des Inf. petits dans le Journal du 13. Avril, j'ai fait tout le contraire de ce qu'elle prescrit dans son Systeme & dans les Régles fondamentales qui lui sont particulieres.

Il y a deux sortes de Régles dans cette Analyse pour trouver les formules ou les égalitez differentielles.

Les Régles de la premiere sorte sont dans la 1e. Section, & n'ont été faites que pour tirer la difference d'une Egalité qui n'a point encore été differentiée.

Les Régles de la 2e. sorte sont dans la 4e. Section art. 95. pages 58. 59. Elles ont été faites pour avoir la difference des Egalitez déja differentiées, *ou composées de differences quelconques.*

Les Régles de la seconde sorte ne consistent que dans la maniere d'appliquer celles de la premiere sorte ; & les quantitez proposées ne pouvant être que *differentiées* ou *non differentiées*, il n'y a pas lieu d'hesiter un moment pour sçavoir de laquelle de ces deux Régles il faut se servir pour differentier une égalité proposée, quand on veut suivre les Methodes de l'Analyse des Inf. petits.

Or la quantité de $4y^3dy - 12yydx$ &c. dont M. Saurin a voulu prendre la difference dans le Journal du 3. Aoust page 527. est une quantité déja *differentiée*. Elle est *composée des differences* dy, dx. Ainsi, il auroit dû suivre dans ce Journal les Régles de la seconde sorte que l'on propose dans l'Analyse des Inf. petits pour les quantitez qui sont *composées de differences quelconques* Sect. 4e. art. 65. s'il étoit vrai qu'il eût tiré de cette Analyse la maniere de former les secondes formules qu'il nomme de *secondes égalitez differentielles*. On peut se servir en cela des Régles de la premiere Section; mais il faut les appliquer comme on l'a prescrit dans la 4e. Section, (puisqu'elle n'a été faite que pour régler cette application) quand on veut suivre l'Analyse des Inf. petits; & l'on y peut voir qu'elle ne ne permet pas de *differentier* une seconde fois, comme l'a fait M. Saurin. Car l'on a dit dans la Régle generale de cette 4e. Section art. 65. de *prendre pour constante une des differences telles que* dx *ou* dy, *& de prendre toutes les autres pour des quantitez variables*. Cela est marqué en termes exprés dans l'énoncé de la Régle : cela se soûtient dans tous les exemples & dans tout le détail du Systéme & des Methodes; & c'est combattre le Systéme & les Methodes, que de differentier comme l'a fait M. Saurin.

On peut nommer *Egalitez differentielles* toutes les formules des Tangentes que j'ai proposées, & que Mr. Saurin auroit voulu tirer de l'Analyse des Inf. petits dans le Journal du 3. Aoust page 527. Mais si l'on veut leur donner ce nom, il faut convenir premierement qu'elles sont tres-differentes de celles de cette Analyse, & qu'elles seroient contraires à ses Méthodes, & même à la nature des Courbes. Car 1°. Dans ces *secondes Egalitez differentielles* il n'y auroit jamais de *secondes differences*; & dans les *troisiémes égalitez differentielles* il ne se trouveroit *jamais de troisiémes differences* : c'est-à-dire, que jamais les proprietez spécifiques qui doivent constituer cette sorte d'égalitez, ne s'y trouveroient ; jamais de *d d x* ni de *d d y* ; jamais d'Infini de l'Infini, ni de toutes les autres eſpeces d'Infinis qui viennent enſuite dans le Syſtéme. On ſe ſert des Régles que j'ai propoſées pour réformer l'Analyſe des Inf. petits ; & cependant on veut faire croire que cette Analyſe ſert pour réformer ces Régles.

2°. En prenant toutes les differences pour des quantitez conſtantes comme l'a fait M. Saurin, c'eſt ſuppoſer que toutes les Courbes ſoient des lignes droites : Car il n'y a que la ligne droite dont toutes les differences telles que *d y*, *d x*, ſoient conſtantes. Ce qui détruiroit cette ſuite infinie d'Infinis qui font le ſublime ou le myſtique de la Géometrie tranſcendante.

L'on peut voir auſſi en comparant les pieces, qu'il ne fait que déguiſer en cela l'operation des Régles que j'ai propoſées, & les operations ſeulement qui regardent les abregemens de ſurcroiſt. Car il n'entreprend pas de faire voir comment ces formules doivent être parfaitement ſemblables aux termes de l'Egalité *B*, ni de prouver que les quantitez qu'elles fourniſſent ſoient de veritables ſoûtangentes. S'écarter de l'Analyſe des Inf. petits, combatre cette Analyſe, & dire qu'en cela même on la ſuit exactement, c'eſt ce que l'on a fait dans le Journal du 3. Aouſt pour déguiſer les Régles que j'ai données dans le Journal du 13. Avril.

Il eſt vrai que M. Saurin cite dans la page 527. la premiere Section de l'Analyſe des Inf. petits. Mais cette Section n'a eſté faite que pour les premieres formules déja ordinaires : & ſi l'on veut ſuivre cette Analyſe pour appliquer cette premiere Section, & en tirer de ſecondes formules, il faut ſe ſervir de la 4. Section, comme je l'ai déja dit ; puiſque c'eſt dans cette quatriéme Section que l'on a reglé cette application. C'eſt au contraire ce que l'on a évité dans le Journal du 3. Aouſt. Ne citer dans ce Journal que la premiere Section pour les égalitez dont il s'agit, ce n'eſt citer que les formules ordinaires, ou la Régle ordinaire que l'on avoit auparavant pour les trouver

ver. En faire l'application comme au Journal du 3. Aoust, c'est se servir de cette régle pour copier en quelques exemples, ce qui étoit déja fait dans le Journal du 13. Avril page 241. Les petites divisions qui se font dans cet endroit par une progression arithmetique, sont necessaires pour voir le rapport des formules qui en resultent aux termes de l'égalité *B*, & non seulement ces divisions n'ont jamais esté prescrites par aucune régle dans l'Analyse des Inf. petits, mais on ne sçauroit en marquer les raisons par le moïen de cette Analyse, ni de son Systéme; & neanmoins M. Saurin ne laisse pas d'en parler comme si elles s'y trouvoient effectivement.

On peut se servir du mot de *differentier* pour marquer la multiplication de chaque terme par son exposant avec les changemens de nom qui se font pour la generation de chaque formule. On peut encore se servir des $d\,x$ & des $d\,y$ dans les formules, au lieu de z & de v dont je me suis servi dans le Journal du 13. Avril. Mais il faut distinguer dans tous ces mots & dans tous ces caracteres les diverses choses qu'ils signifient, & ne pas vouloir faire croire que des Méthodes fort differentes soient partout les mêmes, de cela seul que l'on se sert des mêmes termes dans les unes & dans les autres.

Je me servirai de ces termes autant que je le pourrai pour entrer dans les desseins que l'on a marquez sous le nom de M. Saurin dans le Journal du 3. Aoust; & je me servirai aussi dans l'occasion des Propositions de l'Analyse des Inf. petits qui se trouvent conformes à la véritable Géometrie; mes devoirs ne permettent pas que j'en fasse davantage pour satisfaire en cela des personnes que j'honore.

Pour les Journaux de Paris & de Leipsic que cite M. Saurin dans sa Réponse, il ne s'y trouve ni régles ni principes pour former celles que j'ai proposées. On voit seulement dans celui de Paris de l'année 1692. une proprieté particuliere dans un point de la Courbe que l'on y propose. Comme ce point lie deux parties de cette Courbe qui sont parfaitement semblables, on peut conclurre de cette ressemblance, qu'il y a deux Tangentes absoluës en ce point, outre la Tangente relative sans avoir besoin pour cela d'une Methode generale. Mais si l'on pouvoit dire de cet Exemple que la Methode que j'ai proposée sur ce sujet est *une chose réellement executée* dans ces Journaux, comme on le veut faire croire dans le Journal du 3. Aoust page 520. on pourroit bien plûtost dire que toutes les Methodes que l'on a données jusques à present sur les Tangentes depuis Euclide sont des choses *réellement executées* dans le 3^e^. Livre des Elemens de cet Auteur : Car il donne dans ce Livre une Methode pour toutes les Tangentes d'une Courbe : il marque l'origine de cette Methode, & il en donne une veritable démonstration. Rien de cela ne se trouve pour les Tangentes dont il s'agit aux endroits des Journaux que l'on cite dans celui du 3. Aoust. Il y a seulement dans celui de Paris une proprieté particuliere d'une Tangente dans un seul point de la Courbe que l'on y propose, comme je viens de le dire; Proprieté que l'on y propose sans en marquer ni l'origine, ni la démonstration, & qui a pu se rencontrer en cherchant toute autre chose. Ainsi, ce n'est pas seulement un exemple particulier, mais un exemple qui ne peut donner aucune idée pour former une Methode de quelque étenduë sur ce sujet, & c'est neanmoins d'une Methode generale dont il s'agit. Ainsi, tout ce qu'on fait dire à M. Saurin *d'un ton si ferme & si décisif* sur ces Journaux de Paris & de Leipsic, ne conclud rien pour le principal dessein que l'on a eu dans le Journal du 3. Aoust. Cela ne serviroit qu'à faire voir que si l'on ne peut pas faire trouver dans l'Analyse des Inf. petits les Régles que j'ai proposées, on veut du moins faire croire que je n'y ay point eu de part.

Il est facile de traiter l'Algebre & la Géometrie sans y introduire des signes radicaux; & l'on peut toûjours aussi les faire évanoüir quand on les a introduits. Mais l'on suppose dans l'Analyse des Inf. petits que *ces signes sont indifferens & souvent commodes*, quand on se sert des Methodes du Calcul differentiel. C'est sur cette supposition que l'on n'a point reçû parmi les Methodes de cette Analyse celles que Mrs Descartes, de Fermat, Barou, & beaucoup d'autres, avoient proposées.

Il paroît aussi que M. de Leibniz est le premier qui s'est proposé des Régles pour trouver les formules des Tangentes dans une égalité qui a des signes radicaux; & que l'on a cultivé cette idée dans les Journaux de Leipsic sur ses projets, mais plus encore dans l'Analyse des Inf. petits. Ainsi, l'on peut dire que les Régles de cette Analyse sont en quelque maniere particulieres au Calcul differentiel quand il se trouve des signes radicaux dans l'égalité qui doit fournir des Courbes, & il faut voir si ces Régles ont pû servir de modéle pour former celles que j'ai proposées.

ART. V. La Methode que l'on a proposée dans l'Analyse des Inf. petits pour trouver les Tangentes des Lignes géometriques qui se forment sur un Axe Sect. 2. page 11. est la plus considerable de celles que cite M. Saurin pour faire croire que j'ai tiré de cette Analyse les Régles que j'ai proposées dans le Journal du 13. Avril; mais l'on va voir qu'elle ne pouvoit point me servir dans cette recherche.

Que la Methode que l'on cite dans le Journal du 3. Aoust n'est pas toûjours veritable.

Soit proposé la courbe que fournit l'égalité qui se voit icy en *N*.

$$N \,.\; y = 2 \pm \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}.$$

Cette égalité est la même que celle qui est en *A* dans dans le Journal du 13. Avril, & je la propose premierement sous une forme que l'on demande dans l'Analyse des Inf. petits, quand on veut marquer l'excellence du Calcul differentiel.

Pour trouver les Tangentes de cette Courbe selon cette Analyse, il faut prendre la difference de cette égalité *N* suivant la Methode qu'on y a proposée Sect. 2. page 11. & former cette difference selon la même Analyse page 9. & 10. ce qui donnera l'égalité *F*.

$$F \ldots dy = \frac{dx\sqrt{x} + dx\sqrt{4 + 2x}}{\sqrt{4x + 2xx}}.$$

Si l'on prend s pour l'expreſſion des Soûtangentes, & que l'on faſſe ce qui eſt preſcrit dans cette Methode, on aura l'égalité G.

$$G \ldots s = \frac{x\sqrt{x} + x\sqrt{4+2x}}{\sqrt{4x+2xx}}.$$

Pour avoir la valeur des Soûtangentes dans le point que deſignent $y = 2$ & $x = 2$, que l'on s'eſt propoſé dans le Journal du 13. Avril; il faut ſubſtituer ces deux Valeurs dans l'Egalité G, & la ſubſtitution donnera l'Egalité que l'on voit ici en H.

$$H \ldots s = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{8}}{\sqrt{16}}.$$

Faiſant l'extraction des Racines dans le dénominateur, & réüniſſant les parties du numerateur à l'ordinaire, on auroit $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ pour la valeur d'une Soûtangente.

En, cela il faut bien obſerver qu'on ne reconnoît point de racines differentes dans une égalité ſuivant l'Analyſe des Inf. petits, lorſqu'il s'y trouve des ſignes radicaux ou des incommenſurables, comme il paroît dans cette Analyſe, art. 189. page 164.

Ainſi l'Egalité G ne fourniroit que $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ & cette Expreſſion ne marqueroit qu'une ſeule Soûtangente.

D'où il ſuit que l'on n'auroit qu'une ſeule Tangente dans le point propoſé, lorſqu'il y a des ſignes radicaux ou des incommenſurables dans l'égalité qui fournit la Courbe.

Que l'Analyſe des Inf. petits ſeroit contraire à la pluralité des Tangentes qu'on a marquée dans

Si l'on ſçavoit d'ailleurs qu'il peut y avoir pluſieurs Tangentes en ce point, on ſeroit peut-être tenté de faire évanoüir les ſignes radicaux ou les incommenſurables de l'égalité generatrice pour tâcher de remedier à ce premier inconvenient. Mais l'Analyſe des Inf. petits s'y oppoſe. Loin de délivrer cette égalité de ces ſignes, on affecte dans cette Analyſe de les introduire. C'eſt en cela que l'on fait consister un de ses principaux avantages, suivant ce qui en a esté dit dans la Préface & dans la derniere page de ce Livre. le Journal du 13. Avril, & qui a été reconnuë dans le Journal du 3. Aoust.

Ainsi, les Régles qui sont particulieres à la Géometrie transcendante donneroient l'exclusion à la pluralité des Tangentes dans le point proposé, loin de la faire connoître & de la découvrir. Mais il y a de plus grands inconveniens dans cette Geometrie, que l'on va voir ici.

ARTICLE VI. Il y a deux Valeurs de s dans l'égalité $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ qu'on a trouvées suivant les Régles de l'Analyse des Inf. petits. Mais ni l'une ni l'autre de ces Valeurs ne peut satisfaire au Problême, quoiqu'elles soient réelles, & qu'en cela elles aïent l'apparence des veritables valeurs. Celles qui peuvent satisfaire sont de l'égalité $2ss = 1$. ou $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$ qu'on a donnée au Journal du 13. Avril, & l'on est convenu dans le Journal du 3. Aoust que ces valeurs sont les seules qui peuvent résoudre la Question. Ainsi, il faut convenir que celles de l'égalité $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ne sont pas veritables, & que les Régles de l'Analyse des Inf. petits se trouvent fausses dans l'exemple même dont il s'agit.

Que les valeurs que fournit l'Analyse des Inf. petits pour les Soûtangentes, ne satisfont point au Problême, & qu'elles imposent.

Si l'on consulte le Systême, on trouvera qu'il confirme dans l'erreur; qu'il s'applique aux fausses Soûtangentes $s = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ de même qu'aux Soûtangentes où la Methode réüssit; qu'il les feroit regarder comme si elles étoient véritables; & qu'il feroit regarder les véritables comme si elles étoient fausses.

Ainsi l'on pourra voir que la Methode même que l'on cite dans le Journal du 3. Aoust se trouve insuffisante & même fausse dans l'exemple qu'on y propose, lorsque l'on prend dans cette Methode les Régles qui sont particulieres à l'Analyse des Inf. petits, & que je n'ai pû en tirer celles que j'ai proposées dans le Journal du 13. Avril ni les former par le moïen du Systême.

Ces derniers inconveniens ne regardent pas ſeulement les points des Courbes qui ſont capables de pluſieurs Tangentes ; ils regardent preſque tous les points de chaque Courbe, & ils deviennent plus conſiderables à meſure qu'il y a un plus grand nombre de ces ſignes radicaux, dont l'expoſant eſt un nombre pair. Mais je ne fais cette derniere obſervation qu'en paſſant, ne voyant pas qu'elle ſoit preſentement neceſſaire pour ma défenſe, & c'eſt par la même raiſon que je ne parlerai point beaucoup d'autres inconveniens de l'Analyſe des Inf. petits. Je dois même obſerver ici qu'il a des points auſquels conviennent pluſieurs Tangentes, & que l'on pourroit en trouver une par le moïen de l'Analyſe des Inf. petits ; mais il faut pour cela qu'il y ait un ſigne radical dans l'égalité generatrice, & que rien ne ſe détruiſe lorſqu'on y ſubſtituë les valeurs de l'appliquée & de l'abſciſſe ſelon ce qui a eſté dit dans le Journal du 13. Avril. Avec cela il faut encore d'autres conditions ; & pour chaque exemple de cette nature, il y en a une infinité qui ſeroient l'écuëil de toutes les Methodes qu'on a données dans cette Analyſe ſur les Tangentes.

Je propoſerai encore ici l'égalité *A* ſous la forme que je lui ay donnée au Journal du 13. Avril ; Mais il faut premierement voir ce que l'on doit croire des Methodes qui ſont particulieres au Calcul differentiel pour les Tangentes dont il s'agit.

ART. VII. De ſçavans Géometres ont fait ſervir les Queſtions *de Max. & Min.* pour trouver les Tangentes des lignes géometriques, lorſque ces lignes ſont réduites à un Axe avec les conditions que j'ai marquées dans le Journal du 13. Avril. Ainſi l'on pourroit dire que les Régles qui ſont particulieres à l'Analyſe des Inf. petits pour ce genre de Queſtions, ſeroient auſſi des Régles pour trouver les nouvelles Tangentes que j'ai propoſées dans le Journal du 13. Avril, & l'on voit auſſi dans la 10e. Section de cette Analyſe que l'on s'eſt ouvert une voye pour paſſer des Queſtions de *Max. & Min.* à celles des Tangentes. En cela il y auroit plusieurs observations à faire: Mais il faudroit du moins que ces Régles *de Max. & Min.* fussent véritables en elles-mêmes pour servir aux Tangentes, & l'on va voir ici par l'exemple dont il s'agit, qu'elles sont encore plus défectueuses que les Régles dont j'ai parlé dans l'article precedent.

Soit donc pour exemple, l'exemple même que j'ai proposé dans le Journal du 13. Avril, & que j'ai marqué ici en *N.* art. 5. Si l'on veut y appliquer les Régles *de Max. & Min.* qui sont particulieres à l'Analyse des Inf. petits Sect. 3. page 41. 42. &c. pour avoir une valeur de y qui soit la plus grande ou la plus petite de toutes ses semblables. Alors il faudra faire deux tentatives l'une au défaut de l'autre, sur l'égalité differentielle qu'on a marquée ici en *F* dans le 2^e^. article. La premiere de ces deux tentatives se fait dans le zero absolu, selon cette Analyse page 42. Et si elle donne une valeur réelle pour l'inconnuë, on estime que la Question est résoluë.

Lorsque cette premiere tentative ne fait rien connoître, on en fait encore une seconde dans l'infiniment grand, suivant la même Analyse page 42. Et il ne s'en fait point d'autre.

La premiere de ces deux tentatives dans l'égalité *F* fournit celle-ci $dx\sqrt{x} + dx\sqrt{4 + 2x} = 0$. & la résolution de cette égalité donne $x = -4$. ainsi il faudroit prendre 4 fois l'unité dans l'axe négatif des x pour avoir le *Max. & Min.* selon la Methode. Car l'on peut voir dans tous les exemples de cette Methode qu'on ne cherche plus rien lorsque la valeur de x est réelle; & il n'y a rien non plus dans l'énoncé qui indique d'autres recherches, lorsque cela arrive.

Premier inconvenient de la Methode *de Max. & de Min.* dans l'Analyse des Inf. petits.

Cependant cette valeur de x ne satisfait point. Car toutes les valeurs de y sont imaginaires, quand on substituë -4 au lieu de x dans l'égalité generatrice, & cela se voit d'abord quand on prend cette Egalité sous la forme qu'on a marquée en *N.* Mais il ne seroit pas si facile de s'en appercevoir en d'autres exemples; Et pour reconnoître ce premier inconvenient dans tous les exemples, il faut une Methode generale qui sépare dans l'égalité generatrice toutes les résolutions réelles de celles qui sont imaginaires. Ce qui supposeroit ce qui est en question. Car une Methode qui distingue generalement le réel de l'imaginaire dans chaque égalité renferme toûjours une Methode generale pour *Max. & Min.*.

Que toutes les tentatives prises ensemble ou separement, comme on voudra, ne donnent aucune résolution du Probléme; Qu'elles imposent en deux manieres, & que le Sistême impose aussi.

ART. VIII. Supposons neanmoins que l'on a une methode generale pour reconnoître parmi les valeurs réelles que fournit la premiere tentative, celles qui ne satisfont point au Problême. Alors l'Analyse des Inf. petits nous renvoïera à une seconde & derniere tentative. Ainsi aïant appris que $x = -4$ est la seule valeur réelle que fournit la premiere tentative; & que cette valeur ne satisfait point au Problême, il faudra en faire une dans l'infini selon les Régles qui sont particulieres à cette Analyse pages 42. 43. &c. Cette seconde tentative donnera l'égalité $\sqrt{4x + 2xx} = 0$. dont les racines sont $x = 0$. & $x = -2$. La premiere ne fait rien connoître selon l'Analyse même des Inf. petits page 43. art. 49. La seconde ne donne que des valeurs imaginaires pour y. Ainsi, l'on n'est pas plus heureux dans la seconde tentative que dans la premiere, & de toutes les valeurs que fournissent l'une & l'autre, il n'y en a aucune qui puisse satisfaire aux conditions du Problême.

Cependant la Question est possible, comme on le verra ici; & delà on verra aussi que la Methode impose en deux manieres. Elle impose en ce qu'elle donne des quantitez réelles sans faire connoître qu'elles ne satisfont pas; elle impose aussi en ce que cette connoissance, feroit croire que la Question est impossible, si on s'en rapportoit à la Methode.

Pour le Systême, il ne serviroit en cela qu'à retenir dans l'erreur. Il s'applique dans cet exemple de même qu'à d'autres exemples où la Methode réüssit, & même l'on l'on peut voir dans ce genre de Question de nouveaux inconveniens du Systême. Si l'on prend le Problême de l'Analyse des Inf. petits art. 49. page 43. qui est le second Exemple de la Methode dont il s'agit, on y verra qu'on a supposé dy ou Rm égal à l'Infini. Mais si l'on délivre l'égalité proposée des fractions qui designent des signes radicaux, on l'aura sous cette forme:

$y^3 - 3ayy + 3aay = axx - 2aax + 2a^3$. Et si l'on y applique la Methode; Alors dy ou Rm sera égal à 0. Ainsi le même dy ou Rm seroit égal à 0 & à l'Infini, toutes choses d'ailleurs étant les mêmes. Car le changement des expressions dans l'égalité proposée ne change rien dans l'état de la Question, ni dans la valeur de Rm. Ce qui marqueroit la plus énorme de toutes les contradictions. Car le zero est en cela un zero absolu, & l'Infini seroit de ceux qui sont plus grands qu'aucune quantité donnée; & quand on voudroit rappeller le *rapport* qu'on suppose de dx à dy dans les discours ordinaires, il marqueroit encore une contradiction fort notable. Car il faudroit que dx fût infiniment grand par rapport à dy, & qu'il fût infiniment petit par rapport au même dy selon les differentes expressions de l'égalité proposée. On va voir ici des inconveniens encore plus sensibles que découvrent ces differentes expressions.

ART. IX. Lorsque l'on fait évanoüir les signes radicaux de l'égalité qu'on a designée ici par *N* dans l'art. 5. on la trouve sous la forme qui est marquée en *A* dans les Journaux du 13. Avril & du 3. Aoust. Si l'on applique à cette égalité *A* la Methode qu'on a donnée dans l'Analyse des Inf. petits Sect. 3. pages 41. 42. &c. pour avoir une valeur de y qui soit la plus petite ou la plus grande de ses semblables, on trouvera $x = 2$. Et comme cette Methode n'est qu'un déguisement de la Methode ordinaire, lorsqu'il n'y a point de signes radicaux, on ne peut pas douter que cette valeur de x ne soit celle qui doit résoudre le Problême. On la trouve aussi par la Methode de M. Hudde, & l'on a reconnu dans l'Analyse des Inf. petits Sect. 10. que cette Methode est infaillible. Mais on a pû voir ici dans les derniers articles que la Methode generale de cette Analyse Sect. 3. donneroit $x = -4$ ou $x = -2$; & que ces valeurs sont contradictoires pour le Problême. Ainsi, l'on peut voir que l'Analyse des Inf. petits produit des effets differens & même opposez, selon que l'égalité generatrice se trouve sous la forme *N* qu'on a marquée ici, ou sous la forme *A* qui est dans les Journaux; qu'elle fournit de fausses résolutions du Problême lorsque l'on se sert des régles de cette Methode qui sont particulieres au calcul differentiel, & qu'elle donne les veritables résolutions quand on se sert des régles de cette Methode qui lui sont communes avec les Methodes ordinaires. Cependant l'égalité proposée & les autres conditions du Problême sont les mêmes; ses racines sont toûjours les mêmes racines sous ces differentes expressions; la courbe qui en resulte est toûjours la même courbe; le point que l'on demande est toûjours le même point, & la question est toûjours la même question. Rien ne change que l'expression de l'égalité generatrice, & neanmoins les effets sont opposez.

Que l'on applique le Sistême à l'une & à l'autre maniere d'operer, le succés paroîtra également probable. N'est ce pas une preuve manifeste que l'on n'a point de Theorie generale dans la Géometrie transcendante? Et un peu d'attention fera voir que les mauvais effets ne viennent que des principes qui sont particuliers à cette Géometrie.

Que la Methode est incapable de supplément.

On peut faire des retranchemens dans cette Methode, mais on ne sçauroit y faire un supplément general. Car si l'on entreprenoit de former des régles pour retenir les signes radicaux dans l'Analyse des Inf. petits, il faudroit que l'on pût distinguer par leur moyen tous les cas où la Methode peut réüssir de ceux où elle échouë; & delà on apprendroit seulement quelle est la mesure de l'erreur; ou plûtost on verroit que l'erreur est immense.

Si l'on retranche generalement ces ſignes, il faut retrancher auſſi les tentatives dans l'Infini. Elles ne ſeroient alors que de deux ſortes, ou fauſſes, ou inutiles.

Elles ſont ſeulement inutiles lorſqu'elles fourniſſent les mêmes réſolutions que celles que fournit la tentative dans le zero : ce qui eſt rare en comparaiſon des réſolutions fauſſes. Cela n'arrive que dans les cas où les deux inconnües ont des *Max.* ou *Min.* réciproques. Inutilitez de la Methode.

Les tentatives dans l'Infini ſont toûjours fauſſes, lorſqu'elles ſont differentes de celles qui ſe font dans le zero; & cela arrive tres-ſouvent. Le faux de la Methode.

Les inconveniens que j'ai marquez ici ne ſe bornent pas à un certain nombre d'exemples. Il y en a une infinité, & l'on en peut trouver autant qu'on voudra. On n'a qu'à prendre pour former des courbes les égalitez qui ont trois ſignes radicaux diſtincts, ou qui en ont davantage, comme Pour avoir des exemples autant qu'on voudra, des inconveniens que l'on vient de marquer.

$$y = a + \sqrt{bx + cc} + \sqrt{ex + nn} + \sqrt{fx + gg} +, \&c.$$

& qui renferment du moins une des inconnües, ou même de ceux qui renferment d'autres ſignes radicaux, pourveu qu'il y en ait auſſi de ceux qui ſont diſtincts. Alors on verra que les inconveniens augmentent à meſure qu'on augmente le nombre de ces ſignes.

Au reſte, l'on ſçait que les Methodes des Tangentes, & celles *de Max. & Min.* ſont les deux Methodes auſquelles ſe rapportent d'autres Methodes qui regardent les lignes courbes, ſoit dans les voyes ordinaires, ou dans la nouvelle Analyſe. Et, l'on peut voir d'abord que les inconveniens qu'on a marquez ici ſur ces deux Methodes ſe communiquent aux autres Methodes de l'Analyſe des Inf. petits. Mais ſi l'on y regarde de prés, l'on verra que ces inconveniens ſe multiplient & s'impliquent en differentes façons avec d'autres inconveniens de differens ordres dans les Methodes de cette Analyſe qui paſſent pour les meilleures, & que ces Methodes ſont d'autant plus défectueuſes qu'elles ſont plus composées.

Si l'on prend pour exemple la Methode qu'on y a proposée pour trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement Sect. 4^e. qui eſt la premiere qui ſe preſente aprés celle de *Max. & Min.* on y verra qu'elle ne fournit point de régles generales, ni rien qui en approche pour ſçavoir s'il y a de ces points dans une courbe propoſée; ni pour ſçavoir ſi les valeurs qu'elle fournit ſont pour un point d'inflexion, ou pour un point de rebrouſſement, & l'on y verra encore d'autres inconveniens qui ſont particuliers à cette Methode. Mais avec cela elle ſe trouve chargée des inconveniens que l'on a marquez ici. Car la queſtion ſe réduit à celle des Tangentes ou à celle des *Max. & Min.* On voit d'ailleurs qu'on y ſuppoſe auſſi deux tentatives, l'une dans le *zero*, & l'autre dans *l'Infini* de *l'Infini*, Sect. 4. pages 63. 68. 69. 75. &c.

Les developpées rappellent ces trois Methodes avec tous leurs inconveniens, & en ont de particuliers. On y fait des tentatives dans *l'Infini de l'Infini de l'Infini*, lorſque celle du zero ne produit rien. Ce qui ſe peut voir dans cette Analyſe Sect. 5. pages 75. 78. 79. 80. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 103. &c. Et ſi l'on va à la ſource de cet inconvenient, on verra qu'il augmente à meſure que les tentatives s'éloignent du premier Infini. Car l'on a pû voir ici les changemens que font les ſignes radicaux dans la premiere égalité differentielle; qu'ils chaſſent ſouvent les veritables réſolutions, & qu'ils en ſubſtituënt de fauſſes: Et il eſt évident que les ſecondes égalitez differentielles écartent bien davantage ces veritables réſolutions; qu'elles les écartent encore bien plus dans les troiſiémes differences, &c.

La Methode des cauſtiques ſuppoſe celle des developpées. Ainſi, elle eſt chargée de tous les inconveniens dont on a parlé; & delà on peut voir qu'ils ſe répandent ſur toutes les Methodes qui paſſent pour les *meilleures* de l'Analyſe des Inf. petits, ſuivant ce qui en a eſté dit dans la Préface de cette Analyſe.

Delà auſſi on peut voir qu'on n'a pû tirer de toutes ces Methodes les régles que j'ai propoſées dans le Journal du 13. Avril ; & un peu d'attention fera encore voir que l'on ne peut en tirer beaucoup d'autres qui manquent à la Géometrie.

Il y auroit bien ici des obſervations à faire. M. Saurin dit dans le Journal du 3. Aouſt page 533. que je me ſuis *renfermé dans le ſeul cas où les égalitez qui expriment la nature des courbes ſont délivrées des ſignes radicaux* ; que je *promets de parler amplement de celles qui en ſont affectées.* En cela il fait pluſieurs ſuppoſitions tout à fait fauſſes, comme beaucoup d'autres dont ce Journal eſt rempli. Enſuite, il continuë à parler de moi, & il dit : *Il lui ſeroit aiſé de tourner à ſon uſage les Methodes du calcul differentiel en changeant encore* d y *en* n z *&* d x *en* n v. *On ſçait parfaitement de quelle maniere on pourroit déguiſer nos differentiations à l'égard des incommenſurables.* Où l'on voit que M. Saurin a voulu prévenir ce que l'on pourroit faire pour marquer dans les voyes ordinaires la veritable origine des égalitez differentielles lorſque celles d'où on les tire ſont affectées de ſignes radicaux. Mais l'on a pû voir ici que la plûpart des inconveniens dont j'ai parlé viennent de ces ſignes ou des moyens qu'on a donnez dans l'Analyſe des Inf. petits pour en faire l'application aux lignes courbes ; & que ſi j'étois capable de vouloir faire des déguiſemens ſur cela, j'aurois lieu de changer de deſſein à la vûë de tous ces inconveniens & de beaucoup d'autres qui ſont attachez à ces ſignes. Je pourrois faire voir neanmoins par des voyes démonſtratives le rapport qui ſe trouve entre les égalitez propoſées qui ont des ſignes radicaux & les égalitez differentielles que l'on en tire. Delà on verroit l'étenduë de l'erreur qui vient de ces ſignes, & qui ſe trouve dans les Methodes de l'Analyſe des Inf. petits. Delà on verroit auſſi qu'on ne peut remedier à une partie de ces inconveniens, qu'en faiſant évanoüir ces ſignes. Mais l'on croit dans cette Analyſe qu'une égalité generatrice change de nature quand on la délivre d'incommenſurables, & delà on tombe en d'autres erreurs.

ART. X. Voici un Problême de l'Analyſe des Inf. pe-

Inconveniens tres-considerables du Problême de l'Analyse des Inf. petits qu'on a voulu faire servir dans le Journal du 3. Aoust pour reformer cette Analyse.

tits, où il ne s'agit point des Tangentes; il n'y a rien de semblable dans ce Problême. Mais l'on a voulu faire croire dans le Journal du 3. Aoust que si on le faisoit concourir avec la Methode dont j'ai parlé ici art. 5. les deux ensemble pourroient donner les nouvelles Tangentes dont je me suis proposé la recherche. On a voulu faire croire aussi que la maniere de les joindre étoit déja une chose établie & reçûë dans la Géometrie transcendante, quoi qu'il n'y ait jamais eu rien de semblable dans cette Géometrie, & l'on a encore supposé dans ce Journal page 531. que je me suis servi de ce Problême dans le Journal du 13. Avril pour former les Régles que j'y ay proposées. Ainsi il est necessaire pour ma défense que l'on sçache en quoi il consiste. C'est celui de l'article 163. de cette Analyse page 146.

La premiere marque d'insuffisance dans ce Problême est tres-sensible dans le premier exemple qu'on y propose. On ne découvre pour $x = a$ qu'une seule valeur de y, & l'on ne pourroit en trouver d'autres par toutes les voyes qui sont de l'Analyse des Inf. petits. Cependant $x = a$ fournit 3. valeurs de y (outre celle que l'on donne dans ce Problême) qui désignent 3. points dans la courbe du premier exemple qu'on y propose. Car $x = a$ donne dans cet exemple $y = -a$ valeur réelle qui marque une appliquée effective. Le même $x = a$ donne $y = 0$, ce qui détermine un point où la courbe rencontre l'axe. Cet $x = a$ donne enfin $y = \frac{-2a}{0}$, qui désigne un asymptote. Ainsi la Régle est fort insuffisante, & en cela elle est tout à fait incapable de supplément.

Les secondes causes d'insuffisance dans ce Problême se voyent dans une infinité d'autres exemples où la valeur de x ne donne aucune valeur de y. quoi qu'il y en ait plusieurs. On pourra voir aisément cet inconvenient, & une des causes qui le produisent, dans des exemples assez simples, comme la courbe que fournit l'égalité P. Elle se réduit au second dégré:

$$P..y = \frac{n\sqrt[2]{ax - xx} + b\sqrt[2]{ac - cx}}{\sqrt[2]{ra - xr}}$$

On verra d'abord que $x = a$ détruit le numerateur & le dénominateur, comme on le demande dans ce Problême. Mais l'on verra aussi que l'on ne sçauroit donner aucune valeur de y par le moïen de l'Analyse des Inf. petits. Cependant l'on y trouvera toutes les valeurs de y dans le cas proposé, si l'on se sert des Methodes ordinaires dans cet exemple & dans tous les autres pour lesquels on a proposé ce Problême.

En cela j'ai supposé les conditions que l'on suppose dans cette Analyse, & non les conditions que l'on suppose sur ce problême dans le Journal du 3. Aoust. Au lieu de deux inconnuës, on a esté obligé d'en supposer quatre dans ce Journal, parmi lesquelles il y a deux Inf. petits. Au lieu d'une courbe on y suppose toute autre chose. On en parlera encore ici.

Des divers changemens que l'on a faite à l'Analyse des Inf. petits pour y faire un supplément particulier sur les Tangentes.

Art. XI. Pour persuader dans le Journal du 3. Aoust que j'ai tiré de l'Analyse des Inf. petits les régles que j'ai données sur les Tangentes, on a fait concourir deux Methodes de cette Analyse, l'une de l'art. 9. l'autre de l'art. 163. dont j'ai parlé ici art. 5. 6. 10. En cela on peut observer qu'il n'est fait aucune mention de ces Tangentes dans l'une ni dans l'autre de ces Methodes, ni dans aucun endroit de l'Analyse des Inf. petits, & neanmoins l'on y a fait un grand détail sur les Tangentes les plus ordinaires. Cependant on s'étoit *proposé* dans cette Analyse *d'être court sur les choses qui sont déja connuës, & de s'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.* Ce sont les propres termes de la Préface.

On a pû voir ici ce que l'on doit croire de chacune de ces deux Methodes considerées en soi; mais il est encore necessaire de marquer une partie des changemens que l'on a faits dans l'une & dans l'autre pour déguiser les régles que jai données.

Je dis premierement que l'on n'a point ſuivi dans le Journal du 3. Aouſt l'art. 9. de l'Analyſe des Inf. petits, comme on le ſuppoſe dans ce Journal. Il eſt vrai qu'ayant pris $ſ$ au lieu de PT de cette Analyſe, on auroit toûjours $ſ = \frac{xdy}{dx}$. C'eſt une formule de la Methode ordinaire ſous des expreſſions du calcul differentiel. Mais ſi l'on avoit ſuivi d'ailleurs cet article 9. pour trouver les Tangentes de l'égalité qui eſt marquée en *A* dans les Journaux du 13. Avril & du 3. Aouſt, on auroit trouvé l'égalité qui eſt ici en *T*.

$$T \ldots ſ = \frac{3yyx - 12xy - 2xx + 16x}{y^3 - 6yy - 6yx + 12x + 8y}$$

Alors on auroit vû que tout ſe détruit en y ſubſtituant 2 au lieu de x, & 2 au lieu de y. Ainſi la Methode n'auroit point donné les Tangentes au point de la Courbe que ces valeurs déterminent, & il auroit eſté inutile de rappeller l'article 163. on ne trouveroit avec cet article que des abſurditez pour le Problême.

Mais l'on avoit pour guide & pour modéle dans le Journal du 3. Aouſt celui du 13. Avril ; & ne voulant que déguiſer les operations ſans apporter aucune preuve, on voyoit les differens tours que l'on pouvoit prendre pour ce déguiſement.

Dans cette vûë, on a dit dans ce Journal du 3. Aouſt page 521. de *prendre la difference de l'égalité* qui eſt marquée en *A* dans ce Journal, *afin d'avoir la valeur de* $\frac{dy}{dx}$, & *de la ſubſtituer dans la formule* $\frac{xdy}{dx} = ſ$.

En cela, on a marqué une ſubſtitution qu'il faut faire pour la Methode de l'art. 9. de cette Analyſe. Mais on ne ſuit point cet article, & l'on fait en cela pluſieurs operations qu'il ne preſcrit point. Au lieu de faire cette ſubſtitution,

Premiers retranchemens & ad- ſuivant cet article, on dégage les Infinis pour avoir $\frac{dy}{dx}$ dans un membre de l'égalité ; dégagement qui n'avoit

jamais

jamais esté fait pour aucune Methode des Tangentes. ditions de plusieurs sortes pour déguiser le Journal du 13. Avril.

Ce retranchement & cette addition n'ont esté faits dans ce Journal du 3. Aoust, que pour *differentier* une seconde fois; de maniere que les dx & dy n'y fussent point comprises; & en cela il faut faire deux observations. 1°. Jamais on n'avoit differentié une seconde fois pour aucun Problême de Tangentes, & jamais cela ne fût prescrit par aucune régle de Tangentes. 2°. Jamais on n'avoit differentié une égalité differentielle, comme on l'a fait dans cette occasion, & en cela on combat les régles fondamentales de l'Analyse des Inf. petits Sect. 4. article 65.

Les seconds changemens pour la réforme de l'Analyse des Inf. petits.

Outre ces changemens, on en peut voir bien d'autres dans cette reforme. On y voit une seconde substitution qui n'a jamais eu d'exemple dans l'Analyse des Inf. petits, & qui ne se fait point en consequence d'aucune régle de cette Analyse. On y voit un second dégagement, & une troisiéme substitution; on y quarre les deux membres de la formule $s = \frac{x\,dy}{dx}$. Ce qui n'a encore esté ni pratiqué dans la Géometrie transcendante, ni indiqué par aucune régle dans cette Géometrie.

Les troisiémes changemens pour faire des supplémens à l'Analyse des Inf. petits.

Pour l'art. 163. de l'Analyse des Inf. petits que l'on rappelle au même endroit de ce Journal, il a quelque rapport aux operations, mais les conditions sont infiniment differentes; on l'a déja marqué. Aucune des hypoteses de cet article, ni aucun des raisonnemens ne conviennent à l'égalité dont il s'agit dans ce déguisement: il en sera encore parlé ici. Mais comme on n'entreprend pas dans ce Journal du 3. Aoust de prouver que les operations que l'on y fait menent à des Tangentes, ni même d'en donner aucune explication sistêmatique, & que l'on se contente de faire une operation qui conduise à des égalitez déja formées dans le Journal du 13. Avril; & une operation déja faite dans ce Journal; on peut y venir en plusieurs manieres, citer des régles ordinaires qui ayent quelque rapport aux operations; supposer qu'elles ſont particulieres à l'Analyſe des Inf. petits. C'eſt auſſi ce que l'on a fait dans le Journal du 3. Aouſt ; & l'on y a encore adopté ce qui eſt particulier au Journal du 13. Avril.

ART. XII. Les ſupplémens que l'on a voulu faire à l'Analyſe des Inf. petits dans le Journal du 3. Aouſt ne conviennent pas aux trois exemples *A. D. V.* dont je m'étois ſervi dans le Journal du 13. Avril. Non ſeulement on y voit que cette Analyſe eſt inſuffiſante ; mais l'on y voit auſſi que ces ſupplémens ſont fort défectueux. Celui qui convient aux deux premiers exemples *A*, *D*, ne convient pas au 3ᵉ. *V*. Et les ſupplémens du 3ᵉ. ſeroient des principes d'erreur dans les deux autres. Mais l'on va voir ici qu'il faudroit faire bien d'autres ſupplémens à cette Analyſe pour donner aux régles qu'on y propoſe, toute l'étenduë qu'on leur attribuë.

Soit pour exemple l'égalité que j'ai marquée icy en *A A*.

$$A\,A \ldots x^4 - ayxx + by^3 = \theta.$$

Et que l'on veüille en trouver les Tangentes dans le point que déſignent $x = \theta$ & $y = \theta$, on commencera à voir que la réforme qu'on a voulu faire à l'Analyſe des Inf. petits dans le Journal du 3. Aouſt eſt fort défectueuſe.

Selon ce Journal pages 521. & 522. il faut prendre la difference de cette égalité, & en tirer une valeur de $\frac{dy}{dx}$; ce qui donne une autre égalité que l'on voit ici en *BB*.

$$B\,B \ldots \frac{4x^3 - 2ayx}{axx - 3byy} = \frac{dy}{dx}$$

Enſuite, la réforme veut que l'on ſubſtituë les valeurs de x & de y dans cette égalité ; & il arrive que la ſubſtitution détruit tout. Alors, on differentie les deux termes de la fraction qui exprime la valeur de $\frac{dy}{dx}$, & l'on ſubſtituë encore les valeurs des inconnuës dans les termes differentiez, ſuivant la réforme. Ces differentiations donnent $12xxdx - 2aydx - 2axdy$ pour le numerateur, & $2axdx - 6bydy$ pour le dénominateur, où il faut ſubſtituer $x = \theta$ & $y = \theta$. Cette ſubſtitution détruit encore tous les termes, & il n'y a rien dans la réforme qui preſcrive ce qu'il faut faire lorſqu'il ſe fait une ſeconde deſtruction. Mais comme l'on a dans le Journal du 13. Avril ce que l'on fait ſemblant de chercher dans le Journal du 3. Aouſt; on pourra chercher de nouveaux ſupplémens à ce dernier Journal à meſure que l'on découvrira de nouveaux inconveniens: mais cette recherche n'auroit point de bornes dans l'Analyſe des Inf. petits.

Soit encore pour exemple l'égalité generatrice que j'ai marquée ici en CC.

$$CC \ldots y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}.$$

& qu'il ſoit propoſé de trouver les Tangentes de la courbe que fournit cette égalité au point que déſigne $y = \theta$. Alors, on aura ſelon la réforme une valeur de $\frac{dy}{dx}$, comme on la voit ici en DD.

$$DD \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{by}}{2\sqrt{abxy} - b\sqrt{ax}}$$

La ſubſtitution de $x = \theta$ & $y = \theta$ détruit tous les termes; & dans ce cas la réforme veut que l'on differentie ſéparement le numérateur & le dénominateur. La difference du numerateur eſt $\frac{abdy}{d\sqrt{by}}$, & celle du dénominateur eſt $\frac{abxdy + abydx}{\sqrt{abxy}} - \frac{badx}{2\sqrt{ax}}$

& ſubſtituant dans ces deux differences les valeurs des inconnuës ſuivant la réforme, la premiere ſubſtitution donne $\frac{abdy}{\theta}$, & ce réſultat doit être un dividende. L'autre ſubſtitution donne $\frac{0}{0}$ — $\frac{badx}{0}$ pour le diviſeur. Ce qui ſeroit abſurde. Ainſi, les ſupplémens qu'on a voulu faire à l'Analyſe des Inf. petits dans le Journal du 3. Aouſt demanderoient d'autres ſupplémens de differens ordres ; & la ſuite fera voir qu'il faut rentrer dans les voyes ordinaires pour remedier aux inconveniens des Methodes de cette Analyſe.

Il eſt aiſé de former les courbes de ces deux exemples, & d'en trouver les Tangentes par les Methodes dont je me ſers ; il ſuffit pour cela d'avoir quelque connoiſſance de ces Methodes ; & il me paroît neanmoins que ces exemples pourroient ſuffire pour faire voir que je n'ai pû tirer de l'Analyſe des Inf. petits les régles que j'ai propoſées dans le Journal du 13. Avril ; mais pour mieux convaincre de cette verité ceux qui la combattent, ou plûtoſt pour faire voir qu'ils doivent en être convaincus, je propoſerai ici encore un exemple où ſe réüniſſent les inconveniens que j'ai déja marquez, & beaucoup d'autres dont le détail ſeroit ennuyeux.

Soit propoſé l'égalité que l'on peut voir ici en *F F*.

$$FF..\ xy = ab + \sqrt[2]{cxyy - abcy} - \sqrt[2]{fx^3 + fy^3 - pfyy}.$$

Et ſoit encore propoſé l'égalité qui eſt ici en *G G*.

$$GG..\ y^6 - py^5 + a^3b^3 = 0.$$

Dans l'une & dans l'autre x & y expriment des inconnuës, & toutes les autres lettres ne marquent que des quantitez connuës.

Ainſi l'égalité *F F* exprime une courbe géometrique, & les racines réelles de l'égalité *G G* ſont des valeurs de y pour la génération de cette courbe.

Cela poſé, on demande les Tangentes à tous les points que déſignent ces valeurs de y, priſes dans *G G* & ſubſtituées en *F F*.

En cela, je ne m'écarte nullement de mon ſujet ; &

neanmoins je ne mets pas ici ce Problême pour prier que l'on veüille en donner la résolution par le moïen des régles qui sont particulieres à l'Analyse des Inf. petits ou au calcul differentiel, & à toute l'algebre que l'on y suppose. Je sçai que cela n'est pas possible : Je le propose pour faire voir à ceux qui voudroient entreprendre de le résoudre que cette Analyse ni ce calcul ne sont pas des moïens aussi generaux que les voyes ordinaires pour perfectioner la Géometrie ; & afin que delà on puisse s'appercevoir que ce ne seroit pas une grande *Injustice* d'avoir dit que les Methodes de l'Analyse des Inf. petits sont insuffisantes. Ce qui servira encore pour montrer que je n'ai pû déguiser ces Methodes pour les proposer sous le nom de nouvelles régles dans le Journal du 13. Avril, comme on l'a supposé dans le Journal du 3. Aoust.

Si l'on veut des exemples plus simples que FF, & plus composez que CC, on peut prendre celui que l'on voit ici en HH.

$$HH \ldots x = y + a + \sqrt[2]{xx - ax + yy - by} + \sqrt[2]{xx + 2xy - yy - ay - bx}.$$

On verra que cette exemple est encore un écuëil des Methodes de l'Analyse des Inf. petits, & des supplémens qu'on y a voulu faire dans le Journal du 3. Aoust. Pour cela il suffit de chercher les Tangentes au point que désignent $x = \frac{b + a}{2}$ & $x = \frac{b - a}{2}$.

ART. XIII. Pour faire croire dans le Journal du 3. Aoust que l'on peut trouver par le moïen de l'Analyse des Inf. petits, les Tangentes de l'exemple que j'ai marqué en V dans le Journal du 13. Avril, on attribuë à cette Analyse quelques operations des Methodes ordinaires, & l'on y forme de nouvelles régles qui ont de grands inconveniens, comme on le va voir ici. Inconveniens particuliers des réformez qu'on a voulu faire à l'Analyse des Inf. petits.

1o. Dans ce troisiéme exemple la préparation que l'on y fait de l'égalité generatrice n'empêche point que la soûtangente ne soit anéantie. Dans le second supplément que l'on fait dans ce Journal pour cet exemple, il arrive que la Tangente, la soûtangente, & l'appliquée sont anéanties. Elles font un triangle dont chaque costé est 0. Ainsi on n'auroit pû déterminer la position de la Tangente, si l'on n'avoit point sçû d'ailleurs comment elle devoit se faire.

2°. Dans l'un & dans l'autre de ces deux supplémens, on est obligé de faire deux tentatives; de chercher séparement toutes les Tangentes que chacun des axes peut former, & de dire que celles de l'un & de l'autre conviennent au point proposé.

3° On substituë dans les formules la valeur d'une des deux inconnuës, & l'on se sert de l'autre pour diviser le résultat de la substitution avant que d'y substituer sa valeur.

Ce sont trois principes dont on n'a pû voir les consequences dans cet exemple, à cause que l'on n'y faisoit toutes ces operations que pour déguiser une chose déja connuë dans le Journal du 13. Avril. Mais l'on verra que toutes les differentes voyes que l'on ouvre en cela sont des voyes d'erreur, si l'on en fait l'application à des exemples qu'on a marquez ici. On auroit même pû voir une partie de ces inconveniens dans les autres courbes du Journal du 3. Aoust.

Si l'on prend pour exemple celui qui est en *D* dans ce Journal, & que l'on veüille trouver la pluralité des Tangentes dans le point que désigne $y = 0$; alors on trouvera que $z = p$, selon le Journal du 13. Avril art. 8. Ce qui s'abrege beaucoup à cause que l'on connoît la valeur d'une des inconnuës. Ensuite on trouvera les deux Tangentes qui convienent au point que désignent $y = 0$ & $z = p$, comme on l'a dit dans ce Journal. Mais si l'on vouloit se servir de la régle qu'on propose dans le Journal du 3. Aoust pour l'exemple marqué *V* dans ce Journal, on ne trouveroit jamais ces Tangentes, & même la régle jetteroit dans l'erreur sans la faire connoître. Car ſi l'on prend l'égalité des ſoûtangentes pour l'exemple *D* ſur l'axe des z, elle ſera comme on la voit ici en *Q*.

$$Q \ldots s = \frac{2zyy}{12pz - yy - 3zz - 9pp.}$$

& ſubſtituant premierement p au lieu de z on aura $s = \frac{2pyy}{-1yy.}$ Alors il faudroit diviſer les deux termes de la fraction par yy ſuivant le Journal du 3. Aouſt avant que d'y ſubſtituer θ. Et la diviſion donneroit $s = -2p$. Delà on concluroit qu'il n'y a qu'une ſeule ſoûtangente, & que cette ſoûtangente eſt $-2p$. Deux concluſions entierement fauſſes, puiſque l'inconnüe s doit avoir deux valeurs, & que chacune de ces deux valeurs eſt fort differente de $-2p$ ſuivant le Journal.

Si l'on eût ſubſtitué premierement θ au lieu de y dans l'égalité *Q*, ou bien que l'on ſe fût ſervi des ſoûtangentes de y, & que l'on y eût ſubſtitué θ & p, on auroit trouvé que la régle jette toûjours dans des inconveniens, & qu'elle ne donne point les Tangentes. Ainſi les ſupplemens qu'on a voulu faire à l'Analyſe des Inf. petits dans ce Journal ne ſeroient pas ſeulement inſuffiſans, comme on l'a vû aux articles précedens; on peut voir qu'ils ſeroient encore des principes d'erreur.

Que les voyes dont on voudroit ſe ſervir dans le Journal du 3. Aouſt pour démonſtrer ce que l'on y propoſe, ſont tres-mal fondées.

ART. XIV. Si les principes dont on s'eſt voulu ſervir dans le Journal du 3. Aouſt pour former les régles que j'avois propoſées dans le Journal du 13. Avril, étoient véritablement des principes pour trouver ces régles, ils pourroient encore ſervir pour les démontrer; & c'eſt auſſi ce que l'on ſuppoſe dans ce Journal du 3. Aouſt; mais on ne voudroit pas avoir entrepris de ſoûtenir cette ſuppoſition par des raiſons. Voici tout ce que l'on y propoſe pour cette démonſtration page 526. *Il eſt évident qu'en concevant une courbe qui ait pour appliquées* $\frac{dx}{dy}$ *de la propoſée, le cas eſt réduit à celui de la Section 9. & par conſequent l'on obtient ce que l'on cherche en differentiant l'un & l'autre terme de la fraction qui exprime la valeur de* $\frac{dx}{dy}$ *&*

divisant la difference de l'un par celle de l'autre. Ainsi, l'on a dans l'Analyse des Inf. petits la régle, & la démonstration de la régle.

C'est là tout ce que l'on a fait dire à M. Saurin dans ce Journal pour cette prétenduë démonstration. Où l'on peut voir que cela ne serviroit qu'à indiquer le principe dont on voudroit se servir : Principe de lui-même insoûtenable, & dont l'application seroit d'ailleurs impossible pour démonstrer les régles que j'ai proposées. Il faudroit premierement concevoir une courbe dont les appliquées fussent composées des Inf. petits dx, dy. Il faudroit que chaque appliquée $\frac{dx}{dy}$ eût son abscisse; que cette abscisse se trouvât dans le second membre de l'égalité proposée dont $\frac{dx}{dy}$ est le premier membre; & il faudroit que toutes ces fictions fussent conformes aux hypoteses & aux autres conditions qui ont esté marquées dans la Sect. 9. que l'on cite dans cet endroit. Ce sont des suppositions absolument impossibles que l'on propose comme des principes évidens dans le Journal du 3. Aoust, & si l'on vouloit croire que ces suppositions fussent véritables, ce ne seroit qu'une partie de ce qu'il faudroit pour une démonstration. Il faudroit en faire l'application pour prouver que les quantitez qui résultent des operations donnent les Tangentes que l'on demande; & comme il y auroit des *differentiations* secondes, troisiémes &c, il faudroit rappeller les suppositions de l'Infini de l'Infini de l'Infini &c. pour rapporter à cette Analyse cette prétenduë démonstration. Mais l'on a pû voir ici que ces differentiations combattent directement le systême & les régles fondamentales de cette Analyse; & l'on verroit multiplier les inconveniens dans cette recherche à mesure que l'on voudroit y faire du progrés. Ces inconveniens ne sont pas de simples difficultez; ce sont des obstacles invincibles qui suffiroient chacun séparément pour faire voir qu'il est impossible de démontrer les régles que

j'ay

j'ay proposées par le moïen de l'Analyse des Inf. petits, & même d'en donner une explication vraisemblable par le moïen de son Systême. Ce qui prouve que ces régles n'ont pû se former par les principes de cette Analyse. Car les principes qui peuvent servir pour former une régle, peuvent aussi servir pour en donner la démonstration, & c'est principalement sur cela qu'elle devroit être formée. Mais l'on n'y fait pas tant de façons dans le Journal du 3. Aoust. On propose dans ce Journal de *concevoir une courbe qui ait pour appliquée* $\frac{dx}{dy}$ *de la proposée.* C'est là tout ce que l'on propose pour la démonstration de cette régle. On propose de concevoir des appliquées tout à fait inconcevables ; on les propose comme un principe évident, & l'on ne parle point de la maniere de les appliquer: maniere où les impossibilitez & les contradictions se presenteroient en foule, si l'on entreprenoit d'y faire quelque progrés; & cela devroit suffire pour ma défense. On ne sçauroit, je le dis encore, ni donner la démonstration des régles que j'ai proposées, ni même en donner une explication sistématique par le moïen de tous les principes de la Géometrie transcendante, & il n'en falloit pas davantage pour retenir ceux qui ont fait parler M. Saurin. De cela seul on auroit dû ne pas supposer dans le Journal du 3. Aoust, que tout ce que j'ai dit des Methodes ordinaires dans le Journal du 13. Avril fût un *reproche d'insuffisance que je fais trés-injustement à l'Analyse des Inf. petits.* De cela seul on auroit dû ne pas dire dans ce Journal du 3. Aoust que mes *suppositions seroient certainement vaines & fausses, si elles n'étoient appuïées sur les principes de cette Analyse.* De cela seul encore on auroit dû ne pas supposer dans le même Journal page 526. que *dans le même temps que je combats les Methodes de ce Livre, j'en tire celle que je propose, & que c'est un fait que l'on va prouver.* Mais l'on a pû voir ici par des preuves *de fait* véritables & solides, la fausseté de toutes ces suppositions. On y a pû voir en differentes manieres par des preuves *de fait* l'insuffisance des Methodes que l'on propose dans ce Journal pour former les régles que j'ai données sur les Tangentes. On a pû voir que loin de les faire servir pour trouver ces régles, il auroit fallu que j'eusse resisté aux sentimens qu'elles inspirent. D'ailleurs n'ai je pas marqué dans le Journal même du 13. Avril les voyes dont je me suis servi, & pouvoit-on nier que ces voyes ne fussent ordinaires & publiques avant que l'on eût rien publié des premiers projets du calcul differentiel ?

Toutes les digressions & les incidens que l'on fait dans le Journal du 3. Aoust, feront le sujet d'un autre mémoire, & l'on y verra des observations importantes pour l'Analyse des Inf. petits. En attendant je donnerai ici des remarques sur quelques-unes de ces propositions qui sont distinguées des autres. Il y en a une qu'on ne propose qu'en passant dans le Journal du 3. Aoust, & même on ne la propose pas d'un ton affirmatif, comme les autres. Mais on n'a pas laissé de faire graver une figure exprés pour cette seule supposition, & même l'on en parle en differens endroits: ce que l'on n'a point fait pour les autres propositions accessoires de ce Journal. Voici ce qui en a esté dit dans la page 521. *La courbe exprimée par l'Egalité* A *est imparfaitement tracée par M. Rolle dans sa premiere figure. On verra dans la suite qu'on a quelque sujet de croire que M. Rolle regarde le point* G *comme un point où finissent les deux rameaux* O G, M G *de la courbe.* Et dans la page 533. *Il faut apparemment qu'il ait crû qu'elle se terminoit en* G, *& qu'ainsi* D G *ne la coupoit point, &c.* Sur cela il faut faire plusieurs observations.

1°. Il ne s'agissoit point pour le Problême que j'ai proposé dans ce Journal du 13. Avril, de tracer l'image de cette courbe dans cet exemple, mais de trouver les valeurs des soûtangentes. Et si l'on veut la marquer pour des explications, il suffit d'exprimer les parties où sont les points qui fixent la situation des Tangentes. C'est aussi ce que j'ai fait, & le reste étoit superflu pour mon deſſein. 2°. J'avois donné pluſieurs mémoires à l'Academie où j'avois tracé cette figure, le 12 Mars, & le 2 Juillet 1701. & l'on y peut voir que les rameaux dont il s'agit ne ſe terminent pas au point *G*. Ils avoient eſté enregiſtrez ces mémoires avant que l'on donnât le Journal du 3. Aouſt. 3°. J'ai encore donné deux mémoires à l'Academie pour la generation des lignes courbes, l'un du 10. Decembre 1701. l'autre du 29. Juillet 1702. & je puis dire ſans éxageration que la courbe dont il s'agit ne ſeroit qu'un petit exemple des Methodes que j'ai données dans ce mémoire. Peut-être que M. Saurin ne l'a pas ſçû ; mais il a pû ſçavoir que j'ai propoſé des régles pour la generation des courbes dans un traité que je donnay au public en l'année 1690. ſur les effections géometriques, & que j'ai donné encore au public une Methode ſur les indéterminées l'an 1699. qui ſert beaucoup pour perfectionner ces régles. Ce qui fournit differens moïens pour tracer la courbe dont il eſt queſtion. 4°. J'ai auſſi donné deux mémoires à l'Academie pour marquer pluſieurs avantages & pluſieurs inconveniens des ſignes radicaux, l'un du 6. Juin 1699. & l'autre du 9. Decembre 1699. Selon ces mémoires il eſt tres facile de tracer la courbe dont il s'agit, quand on prend ſon égalité generatrice ſous la forme que l'on a marquée ici en *N* dans le 5e. article, & c'eſt auſſi ſous cette forme que j'avois propoſé pluſieurs fois cette égalité à l'Academie. C'eſt encore la forme que l'on eſtime le plus dans l'Analyſe des Inf. petits pour les égalitez. Mais ſi on vouloit y appliquer cette Analyſe, on ne trouveroit qu'un des quatre rameaux de cette courbe. Car l'on n'y reconnoît qu'une ſeule racine dans chaque égalité qui a des ſignes radicaux ſuivant les principes que l'on y a introduits article 189. page 164. & delà on y voit auſſi pluſieurs courbes qui ſont imparfaitement tracées Je ne dis pas dans ces exemples où il n'eſt point neceſſaire de ſçavoir combien il y a de rameaux, ni d'en ſçavoir la diſtribution, comme la courbe marquée *V* dans le Journal du 13. Avril, & qui ſe trouve imparfaitement tracée dans l'Analyſe des Inf. petits article 48. page 43. planche 3. figure 35. Je parle en cela des exemples de l'Analyſe des Inf. petits, où l'on auroit évité pluſieurs inconveniens, ſi l'on avoit tracé tous les rameaux des courbes que l'on y a examinées. Par exemple, on fait l'examen d'une courbe dans cette Analyſe pages 161. 162. & d'un point de cette courbe pour ſçavoir ſi elle fait une inflexion en ce point. On ne rappelle pas ſur cela la Methode de cette Analyſe qui a eſté faite pour la recherche des points d'inflexion Sect. 4. On a eu occaſion de voir dans cet exemple, & on auroit pû le voir en mille autres exemples, que cette Methode n'eſt point Methode. On a fait concourir pour cela des Methodes qui ont eſté faites pour des ſujets fort differens, & qui ſe trouvent oppoſées ſur cela pour les effets. On ſuppoſe d'autres courbes que l'on combine avec la propoſée pour tirer de toutes ces comparaiſons les moïens de faire une induction. Mais l'on n'auroit pas eu beſoin de tous ces ſecours étrangers, ſi l'on avoit eu de bonnes régles pour tracer l'image de cette courbe, & que l'on y eût appliqué les régles que j'ai propoſées dans le Journal du 13. Avril: on auroit vû que les rameaux de cette courbe ſe croiſent en deux points oppoſez; qu'il y a deux aſymptotes oppoſées, & qu'un de ces points eſt celui que l'on a voulu examiner. On auroit vû que dans chacun il y a deux Tangentes abſoluës outre les Tangentes relatives; & la diſpoſition de ces deux Tangentes avec la generation de la courbe auroient fait voir qu'il ne ſe faiſoit aucune inflexion de la courbe dans ce point, nonplus que dans ſon oppoſé.

Bien davantage, la courbe même de l'article 164. de l'Analyſe des Inf. petits, de cet article que l'on a pris dans le Journal du 3. Aouſt pour un ſupplément à l'Analyſe des Inf. petits ſur les Tangentes qui ſont en queſtion; cette courbe, dis-je, ſe trouve fort imparfaitement tracée dans cette Analyſe. Car des quatre rameaux qui partent de l'origine, l'on n'en marque qu'un. Ce qui confirme l'erreur des principes de la Géometrie tranſcendante ; ſelon leſquels toute égalité qui a des ſignes radicaux ne peut avoir qu'une racine, & par conſequent ne produire qu'un ſeul des quatre rameaux de cette courbe. De plus, le rameau que l'on y a marqué ne demeure pas toûjours d'un même coſté de l'axe, comme on l'a figuré, & cela auroit de mauvaiſes conſequenſes pour le Problême.

Ainſi, quand on a propoſé dans le Journal du 3. Aouſt la ſeconde figure que l'on y a fait graver, on auroit pû convenir que pour former cette courbe & une infinité d'autres, il faut abandonner les principes de l'Analyſe des Inf. petits, du moins ne pas ſuppoſer que les inconveniens de cette Analyſe viennent de moi, puiſque l'on n'a aucune preuve pour cela, & que l'on a des preuves du contraire.

Il y a encore une remarque de quelque conſideration dans le Journal du 3. Aouſt page 533. au ſujet des deux Methodes que j'ai propoſées ſur les aſimptotes. Dans cette remarque, comme dans toutes les autres, on viſe à deux choſes ; la premiere de faire croire que mes Methodes ſont de l'Analyſe des Inf. petits, & la ſeconde de les faire mépriſer. Si l'on étoit bien aſſuré de l'une, on ne ſongeroit pas à l'autre. On ſuppoſe dans cette remarque que dans les Methodes que j'ai données ſur les aſymptotes *on y apperçoit aiſement les articles* 13. 14. *de l'Analyſe des Inf. petits* ; & l'on remarque enſuite que je *me ſuis ſervi* de ces deux articles, qu'ils m'ont eſté *utiles*. Il eſt vrai qu'on y propoſe deux exemples dans ces deux articles pour en trouver les aſymptotes ; mais ſi l'on veut prendre pour des Methodes ce qu'on a dit dans ces deux articles, & tout ce qui a eſté dit ailleurs dans l'Analyſe des Inf. petits ſur les aſymptotes, il eſt tres-certain qu'elles ſont tres-differentes de celles que j'ai données dans le Journal du 13. Avril, ſoit que l'on regarde ſes principes, ou ſes operations, & même ſes effets. Comme ces deux articles de l'Analyſe des Inf. petits ſont les ſeuls où l'on traite expreſſement des aſymptotes, il eſt neceſſaire d'y faire deux obſervations. La premiere eſt qu'aprés avoir donné la détermination d'un aſymptote dans l'article 13. on ajoûte ces mots : *ce que l'on ſçait d'ailleurs être conforme à la verité.* Sans doute qu'on le ſçavoit d'ailleurs : mais cela marqueroit qu'on ſe méfie de la Methode même qu'on propoſe, ou qu'on n'eſtime pas qu'elle ſoit démontrée ; & il eſt certain auſſi qu'elle ne l'eſt point. La ſeconde obſervation eſt qu'aprés avoir déterminé un aſymptote dans un ſecond exemple article 14. on dit, pour toute Methode, de *ſe régler ſur ces derniers exemples pour trouver les aſymptotes des autres lignes courbes.* Ainſi, l'on n'a fixé aucune régle. Cependant les exemples ne ſont que des lignes géometriques. Celui où les expoſans ſont conçûs en termes generaux eſt fort particulier pour la multitude des termes, & l'autre ne paſſe point ni trois dégrez ni trois termes. De plus, la maniere d'en trouver les aſymptotes n'eſt point la même dans l'un & dans l'autre ; & à tout prendre, ils ne donnent qu'une idée tres-imparfaite de ce qu'il faudroit faire en d'autres exemples.

Entre les differentes eſpeces d'infinis dont le ſiſtême eſt compoſé, il n'y en a point de plus vray-ſemblables que les aſymptotes. Car il n'eſt pas de l'Infini aſymptotique comme des autres Infinis dont nous avons parlé ici. Cet Infini eſt en quelque maniere déterminé par des conditions, & comme indiqué par des expreſſions analytiques. C'eſt là neanmoins où l'on cherche à s'aſſurer du ſuccés par d'autres voyes, & où l'on n'a point voulu riſquer l'énoncé general d'aucune régle.

Pour diminuer l'idée qu'on pourroit avoir des régles que j'ai données ſur les aſymptotes dans le Journal du 13. Avril, on a marqué dans le Journal du 3. Aouſt qu'*on étoit ſurpris que mes recherches ne ſe ſoient terminées qu'à donner les aſymptotes de l'hyperbole équilatere.* De ſemblables ſurpriſes conviendroient beaucoup mieux à M. Saurin dans l'Analyſe des Inf. petits. C'eſt là qu'on peut voir de grandes propoſitions avec peu d'exemples. Quelquefois il ne s'y trouve qu'un ſeul exemple, comme la ſpirale d'Archimede dans la 5e. propoſition des Tangentes page 20. & quelquefois il n'y en a point du tout, comme dans l'article 19. de cette Analyſe, où l'on propoſe une Methode generale pour les Tangentes. Eſt-ce par le nombre des exemples que l'on doit juger d'une Methode, & devois-je donner d'autres exemples dans le Journal du 13. Avril plûtoſt que les autres choſes qu'on y a miſes.

C'eſt, comme on l'a déja marqué ici, un des ſophiſmes les plus ordinaires dans le Journal du 3. Aouſt de prendre la partie au lieu du tout, quand il s'agit de proſcrire celui du 13. Avril; de prendre le tout pour la partie quand il s'agit de relever l'Analyſe des Inf. petits. C'en eſt encore un fort ordinaire dans ce Journal de ſuppoſer ce qui eſt en queſtion, &c.

Si l'on rappelle toutes les preuves que j'ai données ici pour ma défenſe, ſur les principales ſuppoſitions que l'on a faites dans le Journal du 3. Aouſt ſous le nom de M. Saurin; on pourra voir en differentes manieres que je n'avois point donné occaſion de m'imputer de *grandes injuſtices* & des ſupercheries, comme on l'a fait dans ce Journal; & que ſi l'on veut appliquer à l'Analyſe des Inf. petits ce que j'avois dit des Methodes *ordinaires* dans le Journal du 13. Avril, ce ſeroit en donner une mauvaiſe idée de la défendre par les voyes dont on s'eſt ſervi dans le Journal du 3. Aouſt. Réduire là, c'eſt prouver que l'on a raiſon, & je n'attends point de meilleur ſuccés des obſervations que j'ai données ici.

FAUTES A CORRIGER.

Page 3. *ligne* 5. pour, *lisez*, pour les Problêmes.
Page 13. *ligne* 31. les, *lisez*, les Problêmes *de*.
Page 14. *ligne* 35. être, *lisez*, être que.
Page 16. *ligne* 12. sont, *lisez*, font.
Page 17. *ligne* 17. dont, *lisez*, dont je.
Page 22. *ligne* 9. point, *lisez*, point de.

L'ALGEBRE
DE
ROLLE