

11-2º fin Mayo 26/71

ACADEMIA DE ARTILLERÍA.

CURSO

DE

MECANICA APLICADA Á LAS MAQUINAS

RESISTENCIA DE MATERIALES.

LECCIONES ORALES ESPLICADAS

por

D. ARTEMIO PEREZ,

COMANDANTE DE INFANTERÍA Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.

18.166
Dic 1867

SEGOVIA.

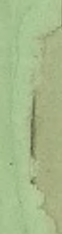
IMPRESA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1871.

5357

LXL-B

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF TORONTO



L47-3530

ACADEMIA DE ARTILLERÍA.

CURSO

DE

MECANICA APLICADA Á LAS MAQUINAS.

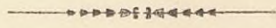
RESISTENCIA DE MATERIALES.

LECCIONES ORALES ESPLICADAS

por

D. ARTEMIO PEREZ,

COMANDANTE DE INFANTERÍA Y CAPITAN DE ARTILLERÍA.



5357

SEGOVIA.

IMPRENTA DE D. PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 42.

1871.

P. A.
Pedro Añero

Estas lecciones han sido declaradas de texto
para nuestra Academia, por resolución del
Excmo. Sr. Director general del Cuerpo del 18
de Noviembre último.

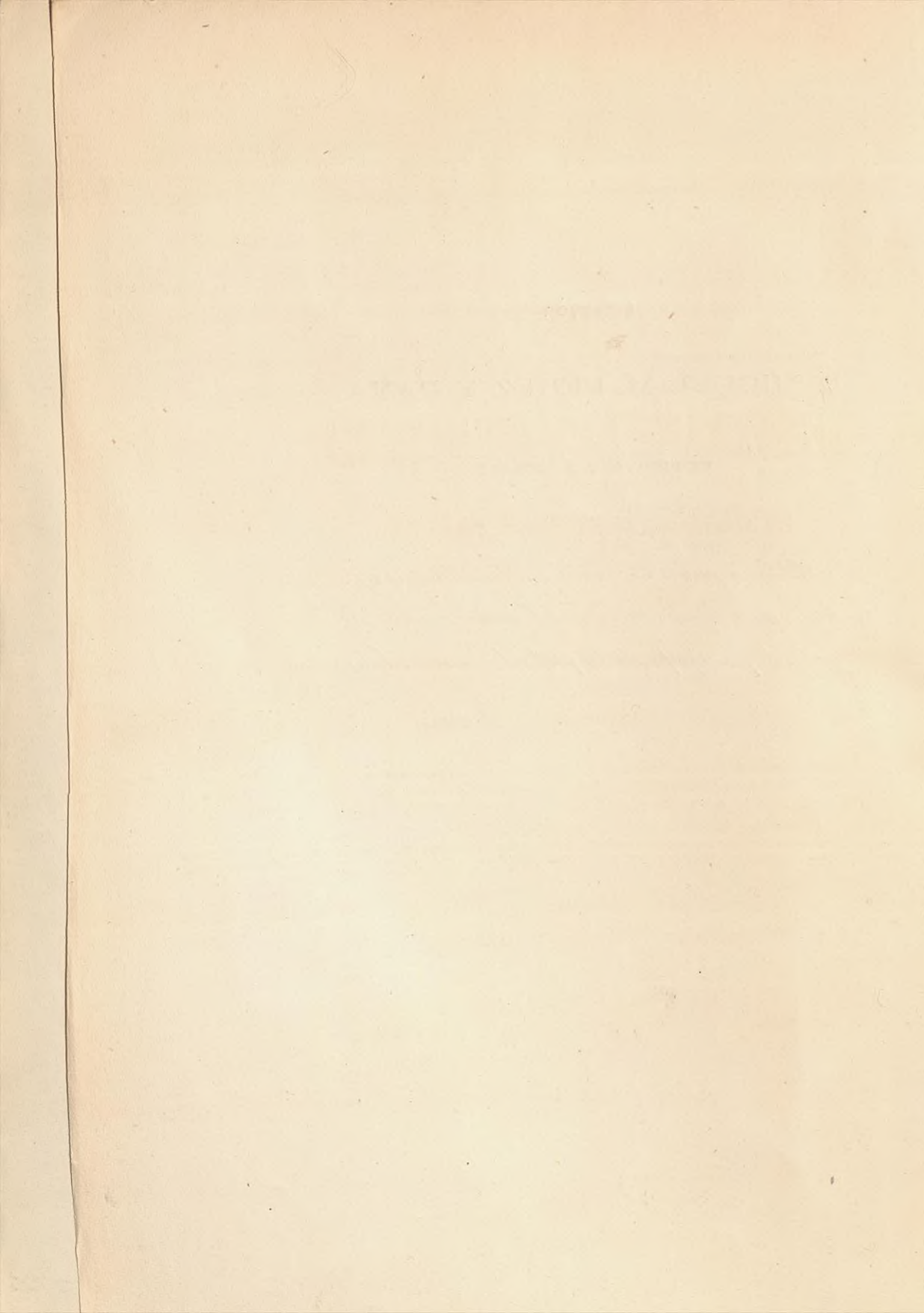
AL SEÑOR

D. MIGUEL M. PEREZ Y PAYÁ,

EX-DIPUTADO Á CÓRTEZ.

Dignese querido tío, aceptar este modestísimo trabajo, como ligero testimonio del cariño, respeto y gratitud que siempre os ha profesado vuestro sobrino

Artemio.



CURSO

DE

MECÁNICA APLICADA A LAS MÁQUINAS.

—••••—

RESISTENCIA DE MATERIALES.

LECCION 1.ª

PRELIMINARES.

SUMARIO.

Materiales de construccion.—Objeto de la resistencia de materiales.—Hipótesis sobre la formacion de los cuerpos.—Ligeras consideraciones sobre el modo de conducirse los cuerpos sometidos á fuerzas exteriores.—Rotura.—Límite de elasticidad.—Idea de la magnitud de los esfuerzos permanentes á que deben someterse los materiales de construccion.—Efecto de un esfuerzo con relacion al tiempo.—Coeficiente ó módulo de elasticidad.—Nuevas hipótesis para facilitar la teoría.

§ 1. Materiales de construccion.—Algunos metales, piedras y maderas; y otros cuerpos sólidos, en reducido número, vienen á formar la casi totalidad de los *materiales de construccion* que se emplean en aquellas

obras, que teniendo que estar sometidas á fuerzas exteriores, deben ser colocadas en condiciones tales, que puedan resistir á su accion indefinidamente.

De aquí pues, el ser fácil determinar *á priori*, las *obras ó construcciones* que especialmente exigen el conocimiento de aquella parte de la *mecánica aplicada*, conocida por *teoría de la resistencia de materiales*.

§ 2. **Objeto de la resistencia de materiales.**- Aunque solo vamos á considerarla bajo el punto de vista concreto de su aplicacion á las *máquinas*, diremos que su principal objeto se resume en el estudio de estas dos cuestiones.

Primera. Conocer los esfuerzos interiores que en un *cuerpo*, ó con mas generalidad, en una *construccion* cualquiera, se desarrollan á consecuencia de las fuerzas que actúen sobre ella.

Segunda. Determinar las dimensiones mínimas que hayan de asignarse á un *cuerpo*, á fin de que los esfuerzos interiores que se originen por la accion de las fuerzas exteriores, no excedan ó traspasen los límites aconsejados por la experiencia.

§ 3. **Hipótesis sobre la formacion de los cuerpos.**- Como ya sabemos, *cuerpo* es todo cuanto tiene una existencia material, y afecta en su consecuencia, mas ó menos directamente, á alguno de nuestros sentidos. Sobre la formacion de los *cuerpos* suele admitirse: 1.º, que están compuestos de partes extremadamente ténues, de elementos diremos, infinitamente pequeños, á los cuales se dá el nombre de *átomos*; y 2.º,

que fuerzas atractivas y repulsivas inherentes á estos, y cuyas acciones simultáneas se ejercen en direccion de las rectas que unen á cada uno de ellos con todos los demás, los obligan á que se mantengan entre sí á distancias solo comparables á sus dimensiones.

§ 4. **Ligeras consideraciones sobre el modo de conducirse los cuerpos sometidos á fuerzas exteriores.**-Cuando un cuerpo se somete á fuerzas exteriores, el equilibrio de las *moléculas ó átomos* desaparece; alteradas las distancias, cesa la igualdad entre las acciones atractivas y repulsivas, y toman entonces como dependientes de aquellas, nuevos valores en que preponderan unas ú otras segun los casos. Si las fuerzas aplicadas se mantienen dentro de ciertos límites, que mas adelante designaremos, se observa; que pasado breve tiempo, adquiere aquel nueva posicion de equilibrio; y si en esta situacion se suprimen las fuerzas, acontecerá una de estas dos cosas: que las moléculas no recuperen sus posiciones primitivas, ó que vuelvan á tomar exactamente las mismas que tenian; se cumplirá lo primero, cuando el cuerpo haya estado bajo la accion de un esfuerzo cualquiera, por pequeño que sea, con tal de no haber recibido antes la de otro; y se realizará lo segundo, cuando despues de sometido á un esfuerzo dado y suprimido este, experimente de nuevo la accion de uno igual ó menor.

Aunque parezca inútil indicarlo prevendremos, que en este último caso por *posiciones primitivas* de las moléculas, entendemos las que tenian al dar principio el

nuevo esfuerzo; ó de otro modo, las que tomaron cuando dejó de obrar el primero á que el cuerpo se sometió.

Estas conclusiones son la generalizacion de otras análogas deducidas por el distinguido ingeniero y físico Mr. Hodgkinson de sus delicadas experiencias con el hierro dulce y colado. (*)

Como vemos, ellas vienen á destruir siquiera parcialmente, la idea admitida de que los cuerpos sólidos carecian de perfecta elasticidad; toda vez que por el solo hecho de someterlos á un esfuerzo, llegan á adquirirla cumplidamente, respecto á otro nuevo de intensidad igual ó menor á la de aquel.

Este resultado no debe sorprendernos si reflexionamos que es análogo al producido por ciertas operaciones mecánicas que—como el *martillado* y *laminado* á que se someten algunas materias—modifican sus propiedades físicas, entre las cuales la elasticidad no es la que menos alteracion experimenta.

§ 5. **Rotura.**—Prescindiendo de cuanto pueda tener carácter excepcional; supongamos que sometemos un cuerpo sólido á un esfuerzo dado que vaya aumentan-

(*) Sin que la experiencia lo comprobase, parece no debiéramos aplicar resultados obtenidos con un sólido de formas determinadas y sobre el cual actúa un esfuerzo determinado tambien, á aquellos casos en que estas circunstancias varien: pero la razon induce á creer que si bien podrán cambiar los límites en que los fenómenos se realicen; y haber dificultad en su estudio y apreciacion, sin embargo dada la manera de ser de los cuerpos sólidos, un esfuerzo, cualquiera que este sea, habrá de producir efectos análogos á los encontrados en aquel caso particular.

Esta observacion ha de tenerse en cuenta tambien muy en breve, cuando de nuevo volvamos á generalizar ciertos hechos que se refieren á las citadas experiencias.

do en proporcion conocida; y distingamos para mayor claridad los efectos máximos producidos mientras aquel está en accion, de los que se revelan cuando deja de obrar.

Si tenemos en cuenta lo observado por Mr. Hodgkinson; lo que la experiencia de todos los dias nos dice, y las ideas admitidas acerca de la elasticidad de los cuerpos, podremos establecer en el primer caso: que la *deformacion* (*)—que llamaremos *total*—es creciente con los esfuerzos, adquiriendo las moléculas para cada uno de ellos una nueva posicion de equilibrio; y por otra parte, que tan luego como los esfuerzos alcanzan un valor determinado, las acciones interiores van siendo tan violentas y las deformaciones tan visibles que llega un momento en que el equilibrio no puede existir y se produce la *rotura*: en el segundo caso—esto es, cuando despues de haber dejado obrar á cada esfuerzo el tiempo necesario, se le retira y observa su efecto, antes de someter el cuerpo á otra accion mayor—los resultados pueden resumirse así: 1.º, todo esfuerzo produce una *deformacion permanente*: 2.º, las *deformaciones permanentes* como las *totales* crecen con los esfuerzos; y 3.º, que mientras estos no traspasen ciertos límites, las *deformaciones permanentes* son despreciables por su magnitud, pudiendo con-

(*) Aunque las deformaciones que experimentan los cuerpos han de ser estudiadas mas adelante en un sentido muy restrictivo, indicaremos que por *deformacion*, debe entenderse el efecto aparente ó nó, que sobre un *material de construccion* pueden producir las distintas acciones á que se halla sometido.

templarse á los cuerpos dentro de estos mismos límites, como gozando de perfecta elasticidad.

§ 6. **Límite de elasticidad.**—El *límite de elasticidad* debería quedar determinado por aquel grado de deformación en que los átomos ó moléculas no vuelvan á ocupar exactamente las posiciones primitivas: tomadas las cosas con este rigor físico—y prescindiendo naturalmente del caso ya conocido en que el cuerpo haya experimentado dos acciones sucesivas en relación determinada—semejante *límite* no existe; pero guiados por la consideración de las dos agrupaciones que pueden establecerse respecto á la magnitud de las deformaciones permanentes, el *límite de elasticidad* que podríamos llamar *práctico*, corresponde á la línea de separación que parece existir entre aquellas.

Como la magnitud de las *deformaciones permanentes* que toman el carácter de *despreciables*, es variable con la naturaleza de los cuerpos, y modo de ejercerse los esfuerzos; y como por otra parte la línea divisoria antes indicada carece de una precisión matemática, los ingenieros han tenido que fijar para cada caso el *esfuerzo máximo* pasado el cual los cuerpos se hallan fuera del *límite de elasticidad*: para muchos de aquellos, dicho esfuerzo y este límite son sinónimos.

§ 7. **Idea de la magnitud de los esfuerzos permanentes á que deben someterse los materiales de construcción.**—Todos los ingenieros convienen en que la intensidad de los esfuerzos—ó la *carga*, expresión muy admitida—á que de un modo permanente

se sometan los materiales de construccion, debe ser tal, que estos puedan ofrecer una resistencia indefinida; pero, si conformes en este principio, no lo estan respecto á considerar un mismo esfuerzo como *tipo* de comparacion á que referir el que haya de obrar de un modo *permanente*: unos toman como base el que produce la *rotura*; otros, el que corresponde al *limite de elasticidad*.

Admitiendo que, si para cada cuerpo y en los distintos casos que puedan ofrecerse existe una estrecha dependencia entre ambos fenómenos, debe haberla tambien entre los esfuerzos que á ellos corresponden, es evidente, que si al fijar el esfuerzo á que se ha de someter el cuerpo, se ha tenido en cuenta aquella relacion ó dependencia, el resultado definitivo habrá de ser idéntico; pero no acontecerá lo mismo, si se prescinde, al tomar como punto de partida el esfuerzo de *rotura*, del correspondiente al *limite de elasticidad*; ó inversamente del primero, en el caso de referirlo al segundo: esto último, á igualdad de circunstancias, ofrece en nuestra opinion mas garantias de acierto; y lo fundamos, en el riesgo que se correria de someter un material desconocido á un esfuerzo, para el cual quedase profundamente alterada su elasticidad hasta el punto quizás de que una causa accidental pudiese iniciar la *rotura*.

Los que parten de este fenómeno, lo hacen principalmente por que niegan la existencia del *limite de elasticidad*, en lo que no ven otra cosa, dicen, que una mera *concepcion*; y si algo de *realidad* le conceden, es añadiendo que su determinacion ofrece suma vaguedad; que no es

posible fijarlo con exactitud, y que cada cual le da un valor distinto; olvidando en cuanto á la magnitud de los esfuerzos, la irregularidad con que se produce la *rotura* á cuyo fenómeno le conceden una fijeza que no tiene.

Acerca de esta divergencia de pareceres nos limitaremos á decir, que unos y otros citan en su apoyo los resultados de las mismas experiencias; que las fórmulas deducidas admitiendo la existencia del *límite de elasticidad*, satisfacen cumplidamente las exigencias de las aplicaciones, en comprobacion de lo cual se pueden citar numerosos hechos; y que solo cuando nos separamos de las condiciones en que fueron obtenidas, se vé la falta de correspondencia entre los resultados prácticos y los teóricos.

Sin embargo de esto, no dejaremos de indicar, que cuando por la extremada *rigidez* de algunos materiales se dificulta la determinacion del *límite de elasticidad*, conviene y suele referirse el esfuerzo *permanente*, al que produce la *rotura*.

§ 8. Efecto de un esfuerzo con relacion al tiempo.—Es un hecho comprobado por la experiencia que el efecto producido por una fuerza, depende en parte del *tiempo* durante el cual ejerce su accion; pero trascurrido cierto período, su influencia se debilita hasta anularse, aun cuando el esfuerzo se separe muy poco del que produzca la *rotura*.

Tambien al parecer depende en cierto grado el *límite de elasticidad*, del tiempo que están obrando las fuerzas, resultando mas pequeños á medida que se prolonga su accion.

La duracion del tiempo tiene un límite, pasado el cual, el de *elasticidad* permanece inalterable.

Cuando un esfuerzo no ha producido todo su efecto se denomina *pasajero*.

§ 9. Coeficiente ó módulo de elasticidad.-

La *cantidad* que entra en la mayor parte de las fórmulas que mas adelante obtendremos, y cuyo valor—dependiente tan solo de la naturaleza de los materiales y del modo de actuar las fuerzas—indica la importancia de ellos con relacion á su mayor ó menor resistencia, recibe el nombre de *coeficiente ó módulo de elasticidad*.

§ 10. Nuevas hipótesis para facilitar la teoria.- Los *sólidos* que han de someterse á la accion de esfuerzos determinados con el objeto de deducir las fórmulas correspondientes á los casos que por lo comun se presentan en las aplicaciones, serán considerados como sensiblemente prismáticos, y siempre con un plano de simetría en sentido longitudinal; se denominarán *prismas, sólidos prismáticos* y tambien *sólidos de resistencia* ó simplemente *sólidos*; y mientras otra cosa en contrario no se prevenga, los contemplaremos, bajo un punto de vista mecánico, como *homogéneos*; es decir, como presentando la materia en todos sus puntos la misma *resistencia* á esfuerzos iguales y de *direccion* determinada, por mas que al cambiar esta, varíe tambien aquella.

Con el objeto de facilitar la teoria supondremos, en conformidad, con la experiencia, que los *sólidos prismáticos* estan compuestos de *rebanadas* separadas entre si por pequenísimos *resortes* prontos á ceder á la menor

accion; y de tal manera, que cada una de ellas venga á constituir como una especie de *disco* de forma invariable, y en el que los *átomos* no puedan recibir ningun movimiento.

Como una consecuencia de esto, cuando un prisma se someta á la accion de un esfuerzo moderado—como así debe ser y acontece en la práctica—cada *disco* se moverá cual si fuera de una sola *pieza*, tomando respecto de los contiguos la posicion que su equilibrio exija.

Tambien admitiremos, que los *átomos* están dispuestos de tal modo, que unidos por *resortes*, los de cada rebanada con los homólogos de las contiguas, resulten formadas lo que llamaremos las *fibras del sólido*; verdaderos prismas cuyas bases semejantes á las totales y semejantemente dispuestas, son infinitamente pequeñas respecto á sus dos dimensiones.

Si suponemos que las *rebanadas* no tienen espesor, lo que resulte será una *seccion* del prisma, superficie que contendrá los centros de gravedad de los pequeñísimos prismas ó *elementos de fibra* correspondientes á cada una de aquellas.

La *línea* que contiene el centro de gravedad de todas las *secciones*, recibe el nombre de *eje medio*, *línea* ó *fibra media*; y acerca de ella, estableceremos la hipótesis de ser perpendicular á las mismas, aun despues de ligeramente deformado el sólido.



LECCION 2.ª

SUMARIO.

Consideraciones generales sobre el equilibrio de un sólido sometido á la acción de fuerzas exteriores.—Posición mas general que en un prisma puede tener una sección cualquiera con relación á la inmediata.—Clasificación de las deformaciones simples, en que ha lugar á considerar descompuesta la que nace de la posición mas general que puede tomar en un prisma, una sección cualquiera.—Principio relativo á la independencia de efectos producidos por esfuerzos simultáneos; correspondencias entre estos y aquellos.—Resistencia de los prismas á la extensión.—Resultados de las experiencias con el hierro dulce sometido á la extensión.—Resultados de las experiencias con el hierro colado sometido á la extensión.—Resultados de las experiencias con la madera sometida á la extensión.—Tabla n.º 1 que contiene los principales datos sobre la resistencia á la extensión de algunos materiales.—Cuestión que permite comprender la conveniencia de que las cargas de seguridad sean mucho menores que los esfuerzos correspondientes al límite de elasticidad.—Resistencias vivas de elasticidad y rotura.—Resistencias de los prismas á la compresión ó contracción.—Resultados de las experiencias con el hierro colado sometido á la compresión simple.—Tabla n.º 2 que contiene los principales datos sobre la resistencia á la compresión de algunos materiales.

§ 11. Consideraciones generales sobre el equilibrio de un sólido sometido á la acción de fuerzas exteriores.—Sea SS' fig. 1.ª (lám. 1.ª) un sólido cualquiera sobre el que están actuando las fuerzas F, F', F'', \dots

Para la resolución de la mayor parte de las cuestiones de que nos vamos á ocupar—y que se hallan comprendidas en las dos mas generales enunciadas en el § 2— conviene que recordemos el modo de introducir en el

:

cálculo las *fuerzas interiores* ó bajo otro nombre las *fuerzas elásticas*, (1) al establecer las ecuaciones de equilibrio.

Si el sólido SS' fuese *perfectamente duro* ó *perfectamente rígido*, ó de otro modo, un sólido *invariable de forma*, entonces bastaría que las fuerzas dadas satisficiesen á las seis ecuaciones generales de equilibrio: tres de traslacion, y las otras tres de rotacion al rededor de los ejes coordenados en cuyas direcciones se verifican aquellas; pero como los cuerpos destinados á las construcciones son *sólidos naturales* y constituyen lo que en Mecánica racional hemos llamado *sistemas materiales*, dichas seis ecuaciones entre las fuerzas exteriores F, F', F'', \dots no bastan para establecer el equilibrio; es necesario además hacer ver, que este existe para todas las partes del sistema dado, y en nuestro caso, para una porcion cualquiera del sólido SS' , con lo cual todas sus secciones permanecerán inmóviles.

Como al formular el equilibrio para un trozo Saa —el cual se considera como un sistema rígido, invariable—hay que tener en cuenta á mas de las fuerzas F, F'' , las que nacen de las reacciones moleculares en la seccion aa , y esto mismo se repite para otro cualquiera Sbb, Scc, \dots queda con esto recordado el modo de introducir facilmente en el cálculo las *fuerzas interiores*.

Sometido un prisma á esfuerzos exteriores cuyo efecto inmediato es el desarrollo de las acciones moleculares,

(1) A las fuerzas que se desarrollan en el interior de los cuerpos, las denominaremos indistintamente *fuerzas interiores* ó *elásticas*, *acciones* ó *reacciones interiores*, *acciones* ó *reacciones moleculares*.

generalmente distintas en todas las secciones, es evidente, que en una de estas por lo menos alcanzarán aquellas el máximo de intensidad: la seccion en que esto se verifique ha sido llamada por Poncelet *seccion peligrosa*.

En la posibilidad de establecer el equilibrio para cualquier trozo de un prisma que se nos dé, no es menos evidente que, si lo obtenemos en buenas condiciones de resistencia para aquel que termine por la seccion en que el efecto de las fuerzas exteriores sea un *máximum*, estaremos seguros de que en ninguna region del sólido existirá un desarrollo de acciones moleculares, excesivo é inconveniente.

§ 12. **Posicion mas general que en un prisma puede tener una seccion cualquiera con relacion á la inmediata.**—Dado un prisma S fig. 2.^a (lám. 1.^a) en el que A y B representan dos secciones contiguas, la posicion mas general que B puede tomar respecto de A, será la producida por el *movimiento elemental mas general*; es decir, por una traslacion igual al movimiento elemental de uno de los puntos de B, y una rotacion al rededor de cierto eje pasando por el; ambos movimientos han de ser simultáneos, debiendo observar, que para el primero de estos se ha considerado el correspondiente al centro de gravedad de dicha seccion B.

Ocioso parece indicar que al tomar esta última la posicion *d*—de propósito exagerada en la figura—el prisma experimenta una deformacion: tratemos de analizarla.

§ 13. **Clasificacion de las deformaciones simples, en que ha lugar á considerar descom-**

puesta la que nace de la posicion mas general que puede tomar en un prisma, una seccion cualquiera.

Para conocer estas deformaciones simples, descompongamos el movimiento general que acaba de ocuparnos, en otros mas sencillos, eligiendo los producidos por ciertos esfuerzos á que, ya solos ó combinados, suelen estar sometidos los materiales de construccion, y tendremos:

1.º Una *traslacion* de la seccion paralelamente á sí misma de B á a ; este movimiento no puede verificarse sin que el cuerpo experimente una deformacion particular que recibe el nombre de *extension ó alargamiento simple*: la fuerza á que se puede considerar debido, se llama *esfuerzo de traccion longitudinal*.

2.º Una *rotacion* al rededor del eje medio ee ; cuyo movimiento origina una *torsion simple*: el esfuerzo que lo causa se llama de *torsion simple*.

3.º Otra *traslacion* de b á c , en virtud de la cual se verifica un *resbalamiento ó cizallamiento simple*, el cual es ocasionado por un esfuerzo que se denomina de *cizallamiento simple*.

4.º Rotacion de la seccion c al rededor del eje $e'e'$ contenido en su plano y que pasa por su centro de gravedad; produce una *flexion simple*, y el esfuerzo correspondiente recibe el nombre de *flexion simple*, ó solamente *esfuerzo de flexion*, suprimiendo el calificativo, lo que suele hacerse respecto de los esfuerzos anteriores, y tambien al designar las deformaciones.

Cuando el esfuerzo de *traccion longitudinal* cambia de

signo, la seccion B se aproxima á la A, y se verifica una *contraccion simple*; y en tal supuesto, aquel se denomina *esfuerzo de compresion*.

§ 14. Principio relativo á la independenciam de efectos producidos por esfuerzos simultáneos; correspondencia entre estos y aquellos.

Cuando un prisma cualquiera sea sometido á uno solo de los esfuerzos simples, se determinará en cada caso—apoyándonos en leyes experimentales, que si no tienen carácter de absolutas, ofrecen toda la aproximacion necesaria—la relacion entre el esfuerzo y las reacciones moleculares correspondientes, deduciendo de la intensidad de estas, si el sólido se halla ó nó en buenas condiciones de resistencia.

Pero si dos ó mas esfuerzos simples obran simultáneamente, admitiremos que la reaccion mas compleja que en este caso oponga una molécula cualquiera puede ser considerada como la resultante de las parciales producidas por cada una de aquellos.

Por lo dicho en el § 13 ha lugar á considerar tambien, que las fuerzas que actúan sobre un prisma, producen en el caso mas general dos traslaciones y dos rotaciones, lo que nos hace ver que solo son reductibles á dos que no estén en el mismo plano; y como cada una de estas fuerzas puede ser reemplazada por otra y un *par*,—descomposicion que emplearemos con frecuencia—el sistema primitivo quedará reducido á *dos fuerzas y dos pares* que corresponderán á las traslaciones y rotaciones en que se descompuso el movimiento elemental mas general que

puede tomar una seccion del prisma respecto de su inmediata.

§ 15. **Resistencia de los prismas á la extension.**—Sea SS' fig.^a 3.^a (lám. 4.^a) un prisma recto homogéneo cuyo extremo S , por un medio cualquiera, hacemos

que permanezca inmóvil: prescindiendo de su peso y despues de prevenir—lo que se habrá de tener presente para en adelante, si otra cosa en contrario no se indicara—que adoptamos el metro cúbico, cuadrado y lineal como unidades para valorar los volúmenes, superficies y longitudes y que el kilogramo será la unidad para pesos, representemos por

n la seccion recta

N resultante de las fuerzas iguales é igualmente repartidas sobre la seccion recta

Δ distancia entre dos secciones contiguas

δ aumento que Δ ha tenido por efecto de la fuerza N

R resultante de las reacciones parciales de todas las moléculas correspondientes á una seccion

L longitud total del prisma

l *alargamiento total* del mismo producido por N

e *módulo ó coeficiente de elasticidad longitudinal* dependiente de la naturaleza de la materia referido á la seccion recta

$E = \frac{e}{n}$... valor del módulo con referencia al metro cuadrado.

Experiencias directas—encaminadas á observar la ley

de la deformacion particular que nos ocupa—han demostrado que el *alargamiento total*, dentro de ciertos límites, está en razon directa con N y L y en razon inversa de ω .

Segun esto si queremos establecer las ecuaciones de equilibrio para un trozo cualquiera S'aa bastará que encontremos, fundados en la ley anterior, la única ecuacion á que en el caso presente se reducen las seis correspondientes al mas general, es decir

$$R = N:$$

tratemos de conocer R.

Esta cantidad solo depende del alargamiento por metro $\frac{\delta}{\Delta}$, afectado de un coeficiente variable con la materia: esto es cierto, como resultado de la experiencia; de manera que

$$R = e \frac{\delta}{\Delta} = N$$

es la solucion que conviene al problema propuesto; y por tanto

$$\frac{R}{\omega} = E \frac{l}{L}; \text{ de donde } R = \frac{\omega E l}{L} = N \dots (1)$$

$$\text{ó bien } R = \omega E i = N,$$

despues de haber hecho $\frac{l}{L} = i$.

La constancia de N hace ver que el sólido, en el supuesto de que se desprecie su peso, y en el de ser homo-

géneo, no tiene *seccion peligrosa* propiamente dicha; y que la rotura, si á este extremo se llegara, se verificaria indistintamente por cualquiera de ellas.

La ecuacion ((1)) encierra la solucion de varios problemas fáciles de enunciar.

Si en el siguiente valor general sacado de la misma

$$E = \frac{NL}{l\Omega} \dots \dots \text{hacemos}$$

$$\Omega = 1, \quad l = 1, \quad L = 1 \dots \dots \text{obtendremos}$$

$$E = N;$$

resultado que nos dice, que si el prisma determinado por los valores anteriores, fuese susceptible de alargarse sin romperse, hasta adquirir una longitud total, doble de la primitiva, y en este aumento progresivo no abandonara la ley de proporcionalidad anteriormente indicada, E representaria la fuerza necesaria para conseguir tan considerable alargamiento.

Este modo de definir á E—que no es otro en el fondo que el primero—pone mas en evidencia su *naturaleza* y la circunstancia de que solo depende de la del material.

Si el prisma estuviese compuesto de fibras, que aunque homogéneas consideradas aisladamente, no lo fuesen las unas con relacion á las otras, tambien seria aplicable á este caso particular la fórmula ((1)).

En efecto, si representamos por $d\Omega$ la seccion recta de una fibra cualquiera; y por r la resistencia debida á su fuerza elástica, tendremos

$$r = \frac{d\Omega El}{L},$$

siendo E el valor del módulo correspondiente á la fibra que se considere, y para toda la seccion

$$R = \frac{l}{L} \int E d\omega:$$

la cantidad $\int E d\omega$ se llama *resorte longitudinal* del prisma.

En estas lecciones consideraremos siempre los materiales como *homogéneos* en el sentido explicado § 10; al separarnos ahora de este supuesto, solo nos ha guiado el dar una ligera idea del modo de someter al cálculo, el caso en que no lo son.

§ 16. **Resultados de las experiencias con el hierro dulce sometido á la extension.**—El hierro dulce, por sus excelentes propiedades, es uno de los materiales de construccion mas aceptables: de todas las experiencias relativas á la *extension*, las de Mr. Hodgkinson se distinguen por lo numerosas, y muy principalmente, por la precision con que han sido ejecutadas; empleó —por la union de otras de menos longitud—barras de unos 15 metros y de 135 milímetros cuadrados de seccion proximamente.

He aqui las principales consecuencias que de ellas se desprenden y que á nuestro propósito conviene que citemos.

1.ª Toda carga, por pequeña que sea, produce un *alargamiento permanente*.

2.^a Los *alargamientos totales, permanentes y elásticos* (*) crecen proporcionalmente á las cargas; los dos primeros hasta los 15 kilogramos, poco mas ó menos, por milímetro cuadrado; y los *elásticos* hasta muy cerca de la rotura.

3.^a El *alargamiento permanente* para la carga de 15 kilogramos por milímetro cuadrado es tan solo 0,01 de milímetro por metro, ó sea próximamente $\frac{1}{76}$ ^a parte del *total*: dicha carga ó fuerza de 15 kilogramos, corresponde al *límite de elasticidad*:

4.^a El valor encontrado para el *coeficiente ó módulo de elasticidad longitudinal*, refiriendolo al metro cuadrado, es muy aproximadamente

$$E = 20 \times 10^9.$$

5.^a La carga de rotura por extension—á la que algunos llaman valor de la *tenacidad absoluta*—es, con ligeras diferencias, de unos 37 kilogramos por milímetro cuadrado.

Apesar de estas interesantes conclusiones—que no todos los materiales presentan en igual grado y de una manera tan marcada—conviene dejar consignado, que si la procedencia ó fabricación del hierro varían, aquellos resultados habrán de variar también, entre límites dependientes de una y otra causa: esta observacion debe hacerse extensiva á los demás materiales.

Por punto general, los hierros dulces al carbon vegetal, resisten mas que los hierros al cok.

(*) El *alargamiento elástico* es igual á la diferencia entre el *total* y el *permanente*.

Tambien acontece, que cuanto mas trabajados están los hierros, mayor es la resistencia que ofrecen; como se observa en los que se llaman *finos*, respecto de los de *dimension media*, y en estos, con relacion á los hierros *gruesos*.

En vista de tales indicaciones, las cifras que se consig- nan en la tabla del § 18 han de contemplarse solo como *valores medios*, que puedan servirnos de guia en los principales casos que ocurran; debiendo prevenir que siempre que sea posible, se ha de procurar obtener por experiencia propia cuantos datos contribuyan á formar una idea exacta del material que se emplee, sobre todo, si nos es desconocido.

§ 47. **Resultados de las experiencias con el hierro colado sometido á la extension.**—Se deben igualmente á Mr. Hodgkinson notables experiencias sobre el hierro colado sometido á la extension, en las que hizo uso tambien de barras cuya longitud, por la reunion de otras mas cortas, era de 15 metros proxima- mente y la seccion de 645 milímetros cuadrados.

Los resultados que dedujo, fueron análogos á los del hierro dulce con las diferencias naturales debidas á las que tienen entre sí las materias: los que mas pueden interesarnos son estos:

1.º El *limite de elasticidad* corresponde á la carga de 5 á 6 kilogramos por milímetro cuadrado.

2.º El valor medio que puede asignarse al *módulo de elasticidad* es:

$$E = 9 \times 10^9.$$

3.º La carga de rotura, como término medio, puede fijarse de 11 á 12 kilogramos por milímetro cuadrado.

La discordancia entre los resultados que presentan los hierros colados comparados entre sí, es mucho mayor que la que ofrecen los hierros dulces; pues á mas de influir el ser al cok ó al carbon vegetal, obtenidos al aire caliente ó al aire frio, la naturaleza de los minerales, etc., lo hacen tambien de una manera notable la forma y las dimensiones de las piezas fundidas: en el concurso de todas estas causas debe buscarse la poca armonia entre las cifras obtenidas, hasta por un mismo experimentador.

§ 48. **Resultados de las experiencias con la madera sometida á la extension.**—Entre las mas recientes—y que han sido ejecutadas en gran escala y con suma escrupulosidad—citaremos las de MM. Chevandier y Werthein, limitándonos á trasladar los siguientes resultados.

1.º El *límite de elasticidad* de las maderas no ofrece aquel grado de precision que presentan otros materiales, tales como el hierro dulce y aun el hierro colado.

2.º Para la carga correspondiente á dicho límite, los citados experimentadores han tomado la que produce un alargamiento permanente igual á 0,05 de milímetro.

3.º Para el olmo, roble y pino ensayados, las cargas de rotura son respectivamente, refiriéndolas á un milímetro cuadrado.

6,1⁵99; 5,1⁵66; 4,1⁵18.

4.º Los módulos de elasticidad de estas tres maderas

por el orden en que quedan indicadas, tienen los valores aproximados.

$$1,2 \times 10^9; \quad 0,9 \times 10^9; \quad 1,1 \times 10^9.$$

Los datos que acabamos de consignar se refieren á la resistencia de la madera cuando el esfuerzo es paralelo á las fibras, y solo tiende á romper los prismas por una seccion perpendicular á el.

Los mismos experimentadores se han ocupado en determinar el *módulo de elasticidad y carga de rotura* á la extension dirigiendo los esfuerzos normalmente á las fibras; los valores obtenidos en este supuesto, son bastante significativos por su inferioridad respecto de los anteriores, para que procuremos evitar toda disposicion en que la madera haya de resistir de un modo tan poco ventajoso.

Como desde luego se comprenderá, multitud de causas influyen tambien en la resistencia de las maderas; forman parte de ellas, entre otras, la constitucion geológica del terreno, exposicion, edad, grado de desecacion, etc.

En la carencia para la mayor parte de los materiales de datos precisos tanto del *módulo* como del *límite de elasticidad*, ya por lo difícil, en algunos, de tal determinacion, ya por haber dirigido en un principio las experiencias solo á conocer las *cargas de rotura*, nos limitaremos á reunir en la siguiente tabla las cifras mas importantes que pudiéramos necesitar en la mayor parte de las aplicaciones relativas á la extension. En ella debe observarse que los *esfuerzos permanentes*, ó como fre-

cuentemente se dice las *cargas de seguridad*, se han sujetado á que sean $\frac{1}{6}$ de las de *rotura* en los metales, y $\frac{1}{10}$ en las maderas por su prematuro deterioro: para las cuerdas á consecuencia de lo mucho que se alargan antes de romperse, dicha relacion se eleva á $\frac{1}{2}$. Esto es lo mas admitido en la práctica.

Tambien es de hacer notar, que comparadas las cargas permanentes, con los esfuerzos que corresponden al límite de elasticidad, las primeras son por lo general algo inferiores á la mitad de los segundos, en casi todos los materiales de que se tiene este dato.

OBSERVACIONES.

1.^a Los números que contiene la tabla anterior deben mirarse como aproximados; y si bien habrá casos en que haya necesidad de consultar las de otras más completas, y quizás hacer algunas experiencias, tales como son, dan una idea de los valores más generalmente aceptados en las aplicaciones á las máquinas.

2.^a La resistencia del hierro colado procedente de las piezas de Artillería suele alcanzar valores muy superiores á los consignados en la tabla n.º 4, llegando hasta 19 y 20 kilogramos por milímetro cuadrado.

3.^a En lugar de la cifra 2,2—alargamiento del acero fundido de superior calidad correspondiente al límite de elasticidad—algunos suelen tomar el valor 0,22. Aunque creemos sea un error de impresión, lo advertimos porque está bastante generalizado.

4.^a Respecto al bronce de cañones obsérvase la irregularidad de ser la carga permanente, muy superior al esfuerzo que corresponde al límite de elasticidad. Tredgold ha encontrado para este último el valor 7,83 en vez de 2^k que es el admitido comunmente. La notable diferencia entre estas dos cifras, refiriéndose á un mismo material, induce á sospechar la existencia de algun error.

5.^a Los números comprendidos dentro de paréntesis corresponden á maderas de roble, pino y olmo, de calidad diferente á la de las empleadas por MM. Chevandier y Wertheim; pues no habiendo determinado estos los alargamientos á que se refieren dichos números, hemos preferido para dar idea de ellos, tomar las cifras obtenidas por otros experimentadores. De una manera análoga se ha procedido respecto de algunos de los demás materiales, al tratar de llenar las columnas que contiene la tabla en cuestion.

6.^a Para las cargas de seguridad de las *correas* hemos adoptado la cifra 0,82 único dato que respecto de ellas existe en la mayor parte de las obras que hemos tenido á la vista. Pero la circunstancia de que para su admision en la Fábrica de Trubia se exigen próximamente 2,8 por milímetro cuadrado, y la de que segun Morin—Mecánica industrial de Poncelet, 2.^a edicion, página 329,—las *correas de cuero negro* pueden resistir sin temor de que se altere su constitucion elástica el esfuerzo de 2^k por igual unidad superficial, hacen suponer muy pequeño el valor 0,82. Si consideramos que las *correas* se alargan mucho, antes de romperse, el esfuerzo de seguridad á que se deban someter podrá alcanzar, como acontece con las *cuerdas*, un valor bastante crecido relativamente al de la carga de rotura.

7.^a Adoptando tambien el metro cúbico para fijar el peso de las *correas*, el valor 909 es el *minimum* asignado para su admision á las empleadas en la fábrica de Trubia.

§ 49. **Cuestion que permite comprender la conveniencia de que las cargas de seguridad, sean mucho menores que los esfuerzos correspondientes al límite de elasticidad.**—Las relaciones $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{2}$ entre las cargas permanentes y las de rotura, están sancionadas por una larga experiencia debida á las numerosas y variadas construcciones á que se han aplicado.

Cuando el *límite de elasticidad* sirve de norma para fijar las *cargas de seguridad*, pareceria natural—teniendo presente cuanto hemos dicho y se relaciona con esto—que solo debiera exigirse que la última fuese igual ó algo menor que el esfuerzo correspondiente á dicho límite, y no próximamente la mitad como se admite en la práctica: para justificar esto, entremos en otro orden de consideraciones que las expuestas hasta aquí.

Sea A B fig. 4.^a (lám. 4.^a) un prisma, fijo por el extremo superior, en la disposicion que se ve y por el que puede resbalar sin rozamiento el peso P: el reborde *m* tiene por objeto detenerlo cuando llegue á la parte inferior.

Supongamos, para los efectos que vamos á indicar, que sea despreciable la influencia de la masa del prisma, y que el peso P haya sido colocado sin velocidad sobre el reborde *m*: en tal supuesto, y pasado el primer instante, el prisma se irá alargando poco á poco, adquiriendo el peso P al par que descende, una cierta fuerza viva; cuando el extremo B haya llegado al punto B', que es el que hubiera alcanzado por la sola accion estática de

:

P, es decir, sin haber influido en este resultado su fuerza viva, es evidente, que el prisma continuará alargándose hasta que el trabajo de los pequeños resortes, que separan á cada dos discos contiguos, sea igual á la mitad de la fuerza viva total adquirida por P: hé aquí la primera faz del fenómeno.

Consumida ya toda la fuerza viva, y siendo el peso P inferior á las reacciones moleculares de una seccion cualquiera, el extremo B" tiende á recuperar la posicion B' correspondiente á la accion estática; pero no se detiene en ella, lejos de esto, continúa ascendiendo hasta la restitution completa del trabajo que absorbieron los resortes en el descenso; el segundo período queda terminado cuando el prisma vuelve á su posicion primitiva A B: ya en esta, da de nuevo principio al descenso el extremo B para ascender otra vez despues de haber alcanzado el fin de su curso, cumpliéndose de este modo una série de oscilaciones en número indefinido, si el problema se considera bajo el punto de vista mas abstracto.

Conocido de una manera general el fenómeno en el caso mas sencillo, ninguna dificultad ofreceria su interpretacion en los supuestos de tener el prisma un peso despreciable con relacion á P, y de caer este de determinada altura, comprendiendo el quedar ó no fijo al extremo B: para el objeto que nos proponemos basta que se le estudie en el supuesto mas sencillo.

Refiriéndonos á la fig. 4.^a, el problema queda pues reducido á encontrar lo que el prisma A B se alargará de mas, por efecto de la fuerza del peso P, con relacion

al alargamiento estático que este mismo peso produce.

A este fin representemos por

- Ω La seccion del prisma
- L La longitud del mismo
- P El peso colocado sin velocidad al extremo B
- x La variacion que experimente L por la accion del peso P
- l El alargamiento estático producido por una traccion igual á P.

Como al alargamiento x corresponde la tension $\frac{\Omega E x}{L}$

de signo contrario á P, la ecuacion diferencial del movimiento en direccion del eje B x , tomando el punto B como origen de abscisas, será

$$\frac{P}{g} \times \frac{d^2 x}{dt^2} = P - \frac{E \Omega}{L} x \dots\dots\dots \text{ó bien}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

despues de haber sustituido por P su valor $\frac{\Omega E l}{L}$.

Para simplificar esta última ecuacion trasládese el origen B al punto B' distante de él la longitud l , y se tendrá

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{g}{l} x.$$

Si se integra, suponiendo que á $x=0$ corresponde $v=v_0$, se llegará fácilmente á este resultado

$$\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = - \frac{1}{2} \frac{g}{l} x^2 \dots\dots\dots (2)$$

ecuacion que nos permite encontrar la velocidad del peso en un punto cualquiera de su trayectoria, en funcion de la abscisa correspondiente y del valor particular v_0 .

Como á $x = -l$ corresponde $v = 0$, introduciendo estos valores en la ecuacion ((2)) se tendrá

$$v_0^2 = gl \dots \dots \dots (3)$$

Combinadas las ((2)) y ((3)) llegaremos á la siguiente, en la que v_0^2 aparece eliminada,

$$v^2 = \frac{g}{l} (l^2 - x^2) \dots \dots \dots \text{ de donde}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - x^2)} \dots \dots \dots (4)$$

Analizada esta ecuacion observamos

1.º El valor de v abraza el período descendente y el ascendente, positivo durante el primero y negativo en el segundo.

2.º Que solo conviene para valores de x comprendidos entre $+l$ y $-l$ á cuyos límites corresponde $v = 0$; y en su consecuencia que el *alargamiento total* por efecto de la velocidad adquirida por el peso, es doble del *alargamiento estático*.

3.º La máxima velocidad corresponde á $x = 0$, abscisa perteneciente al extremo del prisma, cuando se ha estirado una cantidad igual al alargamiento estático.

4.º Las velocidades son iguales para puntos de la trayectoria equidistantes del origen B'.

La segunda deducción justifica, como habiamos anunciado, la conveniencia de dar á las cargas de rotura

valores algo menores que la mitad de los que correspondan á los esfuerzos pertenecientes al *limite de elasticidad*; y por tanto, que la prudencia aconseja disminuirlos mas y mas, á medida que aumenten en intensidad y número los choques y vibraciones á que las obras están expuestas.

Con el objeto de hacer notar cierta particularidad, vamos á encontrar la ecuacion propiamente dicha del movimiento, es decir, una relacion finita entre x y t ; para lo cual bastará sustituir $\frac{dx}{dt}$ en vez de v , é integrar despues de haber despejado dt ; siguiendo esta marcha conocida tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - x^2)} \dots \dots \dots \text{de donde}$$

$$t = \int_{x=+l}^{x=-l} \frac{dx}{\sqrt{\frac{g}{l}(l^2 - x^2)}} \dots \dots \dots \text{y por lo tanto}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \text{arc.} \left(\text{sen.} = \frac{x}{l} \right) + C.$$

Descríbase la semicircunferencia BCB" con el rádio l , y teniendo presente que á $x=-l$ corresponde $t=0$, resultará

$$C = \sqrt{\frac{l}{g}} \times \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots \text{y por consiguiente}$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \text{arc.} \left(\text{sen.} = \frac{x}{l} \right) + \frac{\pi}{2} \right\} = \sqrt{\frac{l}{g}} \times \varphi \quad (\text{v})$$

El tiempo para recorrer el trayecto $BB'' = 2l$, será pues

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

igual al empleado en una oscilacion pequeña por el péndulo circular simple de longitud l : coincidencia notable que indica un medio teórico para determinar el coeficiente de elasticidad de los distintos materiales.

Si observamos que $x = -l \cos. \varphi$, se tendrá, sustituyendo por φ su valor sacado de la ecuacion ((5))

$$x = -l \cos. t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ecuacion de movimiento que buscábamos y que ofrece la singularidad de ser la proyeccion de otro uniforme, correspondiente á un punto que marcha por la semicircunferencia BCB'' .

§ 20. **Resistencias vivas de elasticidad y rotura.**—Cuanto acabamos de exponer viene tambien, en cierto grado, á darnos la medida del muy distinto modo que los materiales de construccion tienen de resistir los choques; lo que ha de tenerse presente para la eleccion mas acertada de ellos, en armonia con las aplicaciones á que se destinen.

Si suponemos que un prisma ha experimentado una extension cualquiera x , pero menor que el alargamiento correspondiente al límite de elasticidad, el valor de R será

$$R = \frac{E\Omega x}{L};$$

y el trabajo elemental,

$$dT = \frac{E\Omega x}{L} dx \dots\dots\dots \text{ y por tanto}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{E\Omega x^2}{L} = \frac{E\Omega \times \frac{1}{2} l}{L} \times l \dots\dots (6)$$

el que se desarrolla durante aquel alargamiento. Poncelet ha llamado á este trabajo *resistencia viva de elasticidad*: como se ve es igual, lo que no debe sorprendernos,

al que produciria la fuerza constante $\frac{E\Omega \times \frac{1}{2} l}{L}$ durante el camino l .

En el caso de que quisiéramos conocer la cantidad total de trabajo desde que se inician los alargamientos hasta que la rotura se presenta—*trabajo total* á que el mismo Poncelet ha dado tambien el nombre de *resistencia viva de rotura*—apelariamos al método de Simpson por sernos desconocida en toda aquella extension la ley entre esfuerzos y alargamientos.

Entendiendo que los cuerpos son tanto mas *rigidos* cuanto mayor es el esfuerzo que exigen para una deformacion determinada (*), sucede por punto general, que los materiales en que esta propiedad se halla desarrollada en su mas alto grado, son los menos á propósito para

(*) Segun esto, si en la expresion $N = \frac{E\Omega l}{L}$, consideramos N y l como variables, es evidente que $\frac{dN}{dl} = \frac{E\Omega}{L}$ dará la medida de la *rigidez*.

resistir el efecto de los choques; por esto los *hierros suaves* ofrecen bajo este aspecto, ventajas sobre los *duros*; en cambio cuando solo han de experimentar unos y otros la accion de cargas permanentes sin choques, sacudidas ó esfuerzos violentos, los segundos son preferibles á los primeros. Estas consecuencias se desprenden de la comparacion entre sí de los valores correspondientes á las *resistencias vivas de elasticidad y de rotura*.

El fenómeno de que los prismas presenten notables diferencias al contraerse trasversalmente por efecto de un esfuerzo longitudinal, debe considerarse tambien como una consecuencia de la mayor ó menor rigidez de la materia de que están formados. La contraccion, aunque despreciable siempre en los materiales de construccion dentro de los límites en que se encierran los esfuerzos, aparece muy sensible en algunos cuando se les somete á cargas superiores á la del *limite de elasticidad*; en hierros muy suaves, como se alargan mucho antes de romperse, la seccion se ve disminuir notablemente; en los duros sucede lo contrario, se estiran poco y conservan por lo tanto casi la misma seccion, aun en los momentos anteriores á la rotura.

§ 21. **Resistencia de los prismas á la compresion ó contraccion.**—En los prismas sometidos á esfuerzos de compresion, ha lugar á considerar dos casos: 1.º cuando solo se produce una *contraccion simple*; 2.º cuando este fenómeno se complica con el de la *flexion*: por ahora únicamente nos ocuparemos del primero.

La resistencia de los prismas susceptibles solo de experimentar una compresion simple, parece que debiera ser ilimitada; y en verdad lo seria, si no añadiéramos que desamparadas las partes laterales, tienden á dilatarse, tomando un cierto *bombeo*—mas ó menos pronunciado, segun los materiales y dimensiones de los sólidos—que puede considerarse como precursor de la degradacion de ellos.

La relacion ((1)) § 15 y cuanto se dijo al ocuparnos de los prismas sometidos á un esfuerzo de *traccion longitudinal* es aplicable á la *compresion*, con tal que el esfuerzo sea moderado, y se tomen las precauciones necesarias para que el sólido no se doble ó encorve: como es natural hay que cambiar en dicha ecuacion los signos de *N* y *l*, cuando de no hacerlo pudiera resultar alguna confusion.

§ 22. **Resultado de las experiencias con el hierro dulce sometido á la compresion.**—Los resultados de las experiencias ejecutadas por Mr. Hodgkinson con el hierro dulce sometido solo á un esfuerzo de *compresion*, son análogos á los obtenidos por este fisico en las correspondientes á la *extension* de la misma materia: nos limitaremos á indicar los dos mas importantes.

1.º El *limite de elasticidad* corresponde próximamente á un esfuerzo de 15 kilogramos por milímetro cuadrado.

2.º El *coeficiente ó módulo de elasticidad* es, como término medio mas general, de 16×10^9 á 17×10^9 kilogramos por metro cuadrado.

La pequeña diferencia que se observa entre esta última cifra y la que corresponde al caso de ser alargado el hierro—diferencia que merece comprobacion por nuevas experiencias—no impide se contemplen como iguales, con lo cual sin que la práctica se resienta, se consigue facilitar la teoría.

Los constructores que para el cálculo de las cargas de seguridad, toman como base las de rotura, admiten que el hierro forjado rompe á los 25 kilogramos por milímetro cuadrado.

§ 23. Resultados de las experiencias con el hierro colado sometido á la compresion.—Las cifras mas notables obtenidas por Mr. Hodgkinson de las experiencias sobre la compresion simple del hierro colado, son las siguientes:

1.^a El límite de elasticidad corresponde próximamente á un esfuerzo de 40 á 42 kilogramos por milímetro cuadrado, hasta el cual las *contracciones permanentes* son despreciables.

2.^a El *coeficiente de elasticidad* difiere poco de 9×10^9 kilogramos por metro cuadrado: este valor como sabemos, es el admitido para el hierro colado sometido á la *extension*.

3.^a La carga de rotura puede valorarse en unos 63 kilogramos por milímetro cuadrado.

De la comparacion del *hierro dulce* al *colado* bajo el punto de vista de la resistencia á la compresion, el segundo parece preferible al primero; y así es en efecto, para aquellos que fundan en la de rotura, el cálculo de

las cargas de seguridad, pero no cuando sirve de norma el esfuerzo perteneciente al *límite de elasticidad*.

Respecto á las maderas y demás materiales, no existen experiencias que den á conocer el *coeficiente y límite de elasticidad* relativos á la *compresion simple*.

La tabla n.º 2—que se completará cuando nos ocupemos del segundo caso de la compresion de los prismas—contiene los principales datos que pueden sernos mas necesarios.

En ella ha de observarse que las cargas de seguridad son, como en la extension, $\frac{1}{6}$ ó $\frac{1}{10}$ de las de rotura, segun se trate de metales, ó de otro material cualquiera.

A los materiales con que se construyen las *fundiciones* de las máquinas, se les aplica tambien la relacion $\frac{1}{10}$, si bien muchas veces, se hace descender á $\frac{1}{15}$ y $\frac{1}{20}$.

NÚM. 2.

Tabla que contiene los principales datos sobre la resistencia á la compresion de algunos materiales.

MATERIALES.	Peso	Coefficien-	Límite		Carga	Alargamiento	
	de un	te ó mó-	de	Carga	de se-	total por metro	
	metro	dulo de	de	de	guri-	al límite	á la
cúbico	elasticidad.	elasticidad.	rotura	dad.	de elasti-	de elasti-	guri-
	Kilóg.	Kilóg. por metro cuadrado.	Kilóg. por milímetro cuadrado.			Milímetros.	
Hierro colado.	»	9×10°	41	63,0	40,50	1,30	1,20
Hierro dulce.	»	16,5×10°	15	25,0	4,17	0,92	0,25
Laton.	»	»	»	116,0	19,33	»	»
Plomo fundido.	11352	»	»	5,4	0,90	»	»
Roble.	»	»	»	4,2	0,42	»	»
Pino.	»	»	»	4,2	0,42	»	»
Olmo muy seco.	»	»	»	7,0	0,70	»	»
Granito de Guadarrama.	2500	»	»	3,5	0,35	»	»
Caliza azul de Metz. . . .	2600	»	»	3,0	0,30	»	»
Ladrillo rojo ó encarnado	2170	»	»	0,6	0,06	»	»
Mort. ^o ord. ^o de cal y arena	1600	»	»	0,35	0,035	»	»

OBSERVACIONES.

- 1.^a En esta tabla no se han incluido los pesos de los materiales comprendidos en la de la página 29.
- 2.^a Respecto á los valores del *módulo de elasticidad á la compresion*, solo se han puesto los determinados por experiencias directas; para los materiales en que sea desconocido dicho módulo, se tomarán los correspondientes á la traccion longitudinal.
- 3.^a Aunque generalmente se refieren las cargas de seguridad y de rotura de los metales al milímetro cuadrado, y las de los demás materiales al centímetro cuadrado, hemos tomado la primera unidad para todos, con la idea de simplificar la tabla incluyendo bajo un solo epigrafe los números de cada columna.

LECCION 3.^a

SUMARIO.

Resistencia de los prismas á la torsion.—Resultados de las experiencias sobre la torsion—Tabla n.º 3, que contiene los principales datos sobre la resistencia á la torsion de algunos materiales.—Resistencia de los prismas al cizallamiento.—Resultados de algunas experiencias sobre la resistencia del hierro dulce al cizallamiento.—Resistencia á la flexion simple.—Prisma sometido á fuerzas situadas de cualquier modo en su plano de simetría.—Curvatura del eje medio deformado.—Ecuacion del eje medio deformado.

§ 24. Resistencia de los prismas á la torsion.

Cuando un prisma fig. 5.^a (lám. 4.^a), ó mas bien, con objeto de facilitar la explicacion, un cilindro SS' —forma comun de los sólidos expuestos á la torsion—fijo por uno de sus extremos, se somete á la accion de un par $(P, -P.)$ cuyo plano es normal al eje ee , todas las secciones á partir de la S que suponemos inmóvil, hasta la correspondiente al extremo libre, girarán al rededor de él, siendo sus centros de rotacion respectivos o, o', \dots y obedeciendo, cuando el esfuerzo es moderado y el peso del prisma sin influencia alguna, á las leyes siguientes:

1.^a La longitud y demás dimensiones del prisma no varian; y las secciones A, A', \dots permanecen planas y normales al eje durante la rotacion al rededor de él, moviéndose cual si fueran de una *pieza*.

2.^a Los ángulos θ, θ', \dots llamados de *torsion* y descritos en el mismo tiempo por los ródios $oa, o'a', \dots$, son proporcionales á las longitudes L, L', \dots .

De aquí se deduce, que el camino recorrido por un elemento cualquiera, es proporcional á su distancia al eje del prisma y á la que le separa del extremo fijo ó invariable del mismo, y por tanto, que los puntos a, a', \dots en línea recta antes de la torsion, vienen á constituir despues de ella una hélice b, b', \dots .

Para encontrar relaciones entre las fuerzas exteriores é interiores, bastará establecer, siguiendo la marcha ya conocida, las condiciones de equilibrio para un trozo cualquiera AA'' .

A este fin, despues de haber cesado el movimiento del prisma y considerada como fija la seccion A, determinaremos las acciones moleculares que se desarrollen en esta y obren sobre su inmediata que, para mayor claridad supondremos lo sea A' ; dichas acciones vienen á ser otras nuevas fuerzas exteriores que con el par $(P, -P)$ proporcionan el equilibrio al trozo AA'' .

Desde luego se deja ver, que las fuerzas elásticas que se desarrollan en A y se hacen sentir en A' , nacen tan solo de que retrasándose en su movimiento los puntos m, n, \dots respecto de los m', n', \dots , todos los elementos de fibra mm', nn', \dots tienen que alargarse forzosamente.

Para mas fácil inteligencia representemos aparte el trozo AA' , fig. 6.^a (lám. 4.^a).

La tendencia con que una fibra cualquiera sq' trata de recuperar la posicion ss' , está determinada por el

momento respecto al eje del prisma, de la fuerza resistente que se origina por el solo hecho de ser alargada. Dicha fuerza depende de la seccion de la fibra, del camino que con relacion á s , recorre el punto situado á la unidad de longitud; y de la materia ó naturaleza del sólido.

Representando por

f la resistencia que presenta la fibra distante r del eje y cuya seccion es $d\Omega$;

G cantidad dependiente de la naturaleza del prisma, ó sea el *coeficiente ó módulo de elasticidad á la torsion*;

$\bar{\theta}$ ángulo de torsion á la distancia Δ ;

θ idem á la unidad de longitud,

tendremos:

$$f = G \frac{\bar{\theta}}{\Delta} r d\Omega = G \theta r d\Omega;$$

y por tanto, la ecuacion

$$Pp = G \theta \int r^2 d\Omega = G \theta Y \dots \dots \dots (1)$$

—cuyo primer miembro expresa el momento del par (P, —P), y el segundo el de las fuerzas elásticas correspondientes á la seccion A—es la única, necesaria y suficiente para establecer el equilibrio del trozo AA' en el caso que nos ocupa. La cantidad $Y = \int r^2 d\Omega$ ha sido llamada por Persy *momento de inercia polar*.

Si representamos por F el valor que tome f referido á la unidad superficial, se tendrá

$$\frac{f}{d\Omega} = F = G \theta r \dots \dots \dots (2)$$

y si hacemos $\theta = 1$ y $r = 1$ en esta ecuacion, se obtiene

inmediatamente el resultado $G=F$ que nos permite definir el *coeficiente de elasticidad* y conocer su naturaleza.

Para comprender bien su significacion representemos por SS' fig. 7.^a (lám. 4.^a) un cilindro cuyas dimensiones sean las acotadas. Si se tiene en cuenta que θ no es otra cosa que el arco $ab=1$ metro, G —refiriéndolo á las unidades adoptadas en estas lecciones—expresará en kilogramos la resistencia que en semejante cilindro opondría una *fibra ficticia* de un metro cuadrado por efecto del alargamiento, que obedeciendo á las leyes del § 24, experimentase al recorrer su extremo libre un metro de longitud. (*)

Como la accion de las fuerzas exteriores es igual para todas las secciones, síguese, como en el § 15, que no existe *seccion peligrosa*, en los cilindros sometidos á una *torsion simple*.

En el que hemos considerado fig. 5.^a—como en todo prisma regular, bajo la accion de un par paralelo al $(P, -P)$ —se comprende fácilmente, á consecuencia de la simetría, que el eje de figura ee sea el de rotacion; pero cuando el prisma fuere irregular, fácil es ver tambien que esta, se habrá de verificar al rededor de la recta que pasa por los centros de gravedad de las secciones.

En efecto, sea S fig. 8.^a (lám. 4.^a) una seccion cualquiera, y su o centro de rotacion. Si trazamos en su plano los dos ejes coordenados x é y , sistema rectangular, y obser-

(*) Desde luego se comprenderá, que en vez de considerar al módulo G como una resistencia, se hubiera podido definir contemplándolo como esfuerzo igual y contrario á ella.

vamos que las fuerzas elásticas que se desarrollan en ella equilibran la acción de un par—en cuyo caso, la suma de sus proyecciones sobre una línea cualquiera ha de ser nula—es evidente, que proyectadas sobre ox , se tendrá:

$$G \theta \int r \operatorname{sen.} \varphi \times d\Omega = G \theta \int y d\Omega = 0$$

ecuación que solo puede quedar satisfecha siendo

$$\int y d\Omega = 0 \dots\dots\dots \text{es decir,}$$

pasando el eje de las x por el centro de gravedad: y como esto mismo habria de verificarse con otro sistema coordinado—rectangular tambien y origen en o —queda probado que la recta conteniendo los centros de gravedad de todas las secciones, se confunde con el eje de rotación del prisma.

Si quisiéramos encontrar el ángulo α , fig. 5.^a (lám. 4.^a) correspondiente á la hélice formada por una fibra cualquiera despues de la torsion, fácilmente lo obtendriamos por la ecuación

$$\operatorname{tang.} \alpha = r \theta \dots\dots\dots (3)$$

en la que r continúa representando la distancia de la fibra al eje, y θ el ángulo de torsion á la unidad de longitud.

Las ecuaciones ((1)), ((2)) y ((3)) permiten resolver interesantes problemas, de que nos ocuparemos en la parte consagrada á las aplicaciones.

§ 25. **Resultados de las experiencias sobre la torsion.**—Las llevadas á cabo para determinar los valores de G y F en algunos materiales, han dado los resultados que se expresan en la tabla núm. 3, página 49.

:

Se admite—y esto se observá respecto á la mayor parte de los materiales que se consignan en dicha tabla— que los valores de G, guardan aproximadamente con los de E, correspondientes á la traccion longitudinal, la relacion $\frac{1}{3}$; y que si algunos, como acontece al hierro colado y al roble, se separan mucho mas de ella, debe atribuirse principalmente á las variaciones ó diferencias que suele presentar un mismo cuerpo.

Tambien se expresan en la tabla indicada, los límites prácticos mas convenientes á F. Todos están contestes en que el asignado al hierro colado, produce sólidos de exagerada resistencia, añadiendo algunos, que con los del hierro dulce y acero acontece otro tanto: por esto muchos creen que 1,5 á 2 kilogramos por milímetro cuadrado para el primero, y 6 para los dos últimos, son valores que pueden emplearse sin riesgo de caer en el extremo opuesto. Si se consulta la tabla n.º 4 pág. 29, se observará que dichas cifras no se apartan mucho de las que, como cargas de seguridad á la traccion longitudinal, se asignan á aquellos materiales.

Aunque nuestro parecer no se separe mucho del anterior, hemos de prevenir sin embargo, que los árboles de máquinas y trasmisiones expuestas á la torsion, deben de ser á la par que resistentes, bastante rígidos, para que el ángulo de torsion no alcance valores que alteren la regularidad de los movimientos y aumenten las resistencias pasivas; y que en esta doble condicion ha de verse el fundamento de los límites tan pequeños asignados á F.

NÚM. 3.

Tabla que contiene los principales datos sobre la resistencia á la torsion de algunos materiales.

MATERIALES.	Valores de G.	Valores de F.
	<i>Kilógramos por metro cuadrado</i>	
Hierro colado.	2×10^9	1334000
Hierro dulce.	6×10^9	4002000
Acero de Alemania.		
Acero fundido muy fino.	10×10^9	.
Cobre.	$4,37 \times 10^9$.
Bronce	$1,1 \times 10^9$.]
Roble.	$0,4 \times 10^9$	266000
Pino.	$0,43 \times 10^9$	288811

OBSERVACION.



Cuando los árboles hayan de ser muy fuertes, en el sentido de mas rígidos —como conviene respecto á los de máquinas motrices, ciertas trasmisiones de movimiento y en algunos otros casos— los valores que se tomen para F suelen ser mitad de los que se fijan en esta tabla.

§ 26. **Resistencia de los prismas al cizallamiento.**—A pesar de que el resbalar una seccion sobre otra, sea fenómeno que no se produzca ni se presente aisladamente en las aplicaciones, pueden citarse multitud de casos—entre ellos los ejes de las poleas, remaches de las calderas etc.—en los que la principal resistencia que los materiales oponen á los esfuerzos exteriores, es debida al resbalamiento de una seccion sobre la contigua; resistencia comparable por la manera de ejercerse, y de aquí sin duda su denominacion, á la que ofrece el rozamiento que se origina, cuando un cuerpo resbala sobre otro, tomando la de *resistencia al cizallamiento* por la analogía que tambien presenta el fenómeno con el de *cortar ó cizallar* los metales; y la de *resistencia transversal* por la direccion en que se ejerce.

De cualquier modo, preséntese ó no el hecho en toda su pureza, las ecuaciones de equilibrio, correspondientes á un trozo del sólido, entre las fuerzas exteriores que tiendan á trasladar una seccion en su mismo plano y las reacciones que se originen de este movimiento, se reducen á una sola.

Sean A y B fig. 9.^a (lám. 4.^a) dos secciones contiguas del prisma dado; para que la última, en el supuesto de permanecer fija la primera, pase á la posicion B' (*) es preciso un esfuerzo dirigido segun su plano.

Los hechos justifican que el valor del esfuerzo es pro-

(*) En la figura 9.^a, B' se encuentra situada á la derecha de B, pero entiéndase que ambas deben estar confundidas. Esta pequeña licencia que nos hemos permitido, para mayor claridad, aparece tambien en otras figuras.

porcional á la seccion recta del sólido; al resbalamiento por unidad de longitud contada sobre la normal á la seccion que se considera fija; y por último, dependiente tambien de la naturaleza de la materia.

Segun esto, designando por F la resistencia al cizallamiento correspondiente á la seccion Ω , ó bien, el esfuerzo necesario para vencerla, tendremos:

$$F = G' \Omega \frac{e}{\Delta} = G' \Omega i' \dots \dots \dots (4)$$

haciendo $\frac{e}{\Delta} = i'$. En este valor de F,

G' representa lo que pudiéramos llamar *módulo de elasticidad al resbalamiento trasversal ó al cizallamiento*, variable con la materia.

e el camino recorrido por la seccion B en su mismo plano; y

Δ la distancia entre las secciones contiguas A y B.

Si en la ecuacion ((4)) hacemos $\Delta=1$, $e=1$ y $\Omega=1$, se obtiene $G'=F$, valor particular que nos da á conocer á G' , cuya significacion es idéntica, se puede decir, á la que tiene G en el § 24; lo que no ha de extrañarnos, si se reflexiona que, cuando se somete un prisma á un esfuerzo de torsion, todas las secciones, al girar al rededor de sus centros respectivos, resbalan unas sobre otras, oponiendo una resistencia de igual naturaleza que la de los sólidos al ser cortados ó cizallados.

En apoyo de esta manera de ver el hecho de la torsion de los prismas, existe el haber llegado á deducir mediante ciertas consideraciones teóricas la relacion

$G' = \frac{2}{3} E$, partiendo del supuesto de ser *isótropos* los cuerpos, es decir, verdaderamente homogéneos, ó de otro modo, que la disposicion molecular de ellos—y por tanto la resistencia que opongan—sea igual en todos sentidos. Dicha relacion se separa poco de la $G = \frac{1}{3} E$ obtenida de experiencias directas sobre la torsion, ejecutadas con sólidos que carecian de la homogeneidad absoluta.

§ 27. **Resultados de algunas experiencias sobre la resistencia del hierro dulce al cizallamiento.**—Lo que acabamos de decir, hubiera debido evitar toda experiencia directa para conocer las cargas de seguridad correspondientes á los prismas sometidos á esfuerzos de cizallamiento; no obstante esto se han hecho algunas, si bien en escaso número, cuyos resultados son nueva corroboracion de la paridad admitida, entre aquel fenómeno y el de la torsion. De ellas aparece que son iguales la resistencia transversal y longitudinal del hierro dulce; aunque muchos limitan la primera á ser $\frac{4}{5}$ de la segunda, relacion teórica obtenida por Navier.

En vista pues de esto, y faltos de experiencias completas, admitiremos que las cargas de seguridad al cizallamiento sean $\frac{4}{5}$ de las correspondientes á la extension y que nos son conocidas por la tabla n.º 1 pág. 29.

§ 28. **Resistencia á la flexion simple.**—La flexion simple es otra de las deformaciones elementales consideradas en el § 13, cuando se descompuso el movimiento mas general que puede tomar una cualquiera de las secciones de un prisma.

Al estudiarla, nos limitaremos á establecer las ecuacio-

nes de equilibrio, entrando en algunas consideraciones que nos han de ser útiles siempre que haya *flexion*, ya se presente ó no, acompañada de cualquiera de las deformaciones conocidas. Ciertas cuestiones que se derivan de todo sólido sometido á ella, se irán estudiando en aquellos casos que mas generalmente se presentan en las aplicaciones.

Para que una seccion de un prisma no tenga otro movimiento, respecto de la inmediata, que el de rotacion al rededor de un eje situado en su plano y pasando por su centro de gravedad, preciso es, que todas las fuerzas exteriores existentes desde ella al extremo libre, se reduzcan á un par. Por consecuencia de la accion de este sobre cada una de las secciones, el prisma tendrá que doblarse necesariamente.

Ahora bien, si dado un prisma SS' fig. 10 (lámina 2.^a) en cuyo plano de simetría esté situado el par $(P, -P)$, queremos hallar las ecuaciones de equilibrio para la porcion $S'A$, es indudable que las fuerzas elásticas que se desarrollen en la seccion A , deben reducirse á otro par, cuya accion resistente destruya á la de aquel.

Antes de proceder á formular el valor de dichas fuerzas interiores, convengamos, en que despues de la deformacion que experimente el prisma, se imprima al sistema un pequeño movimiento, el necesario para que A vuelva á ocupar la posicion que tenia antes de la accion del par; no olvidando que todas las secciones, encorvado el prisma, continuarán siendo normales al *eje medio* y por tanto al plano de simetría denominado *plano de flexion*.

Esto admitido, representemos por B' la posición que tome B contigua á la A , por consecuencia de la acción del par $(P, -P)$ y obsérvese:

1.º Que las fibras del pequeño prisma AB continuarán siendo normales á A , por no existir acción que tienda á separar en sentido trasversal una de otra, las dos secciones A y B .

2.º Que de dichas fibras, unas se alargan al par que otras se acortan; no pudiendo ser que todas se estieran ó contraigan solamente, porque no sería nula su acción como debe serlo en sentido longitudinal.

Repetidas experiencias han comprobado esto mismo.

3.º Como consecuencia de lo que se acaba de indicar, en el prisma AB deben existir forzosamente fibras que conserven su longitud primitiva, por cuya razón se las ha llamado *fibras neutras ó invariables*.

Consideremos también, que si o indica la intersección con A de la *fibra neutra* que se encuentra en el plano de simetría, la línea xx perpendicular á este, podrá representar la de todas las fibras invariables, que vienen á constituir una capa de ténue espesor proyectada en ab .

Tomemos á dicha línea como eje de las x , y su perpendicular en el punto o para el de las v ; y pasemos á establecer la única ecuación que en el presente caso basta para el equilibrio del trozo $S'A$, calculando antes los valores de las fuerzas elásticas que se desarrollan en la sección A .

Si nn' es el aumento de longitud que ha tenido una fibra cualquiera mn , es evidente, por lo dicho en el § 15, que

$$\frac{E \cdot nn' \cdot d\Omega}{oD} = \frac{E\delta \cdot d\Omega}{\Delta}$$

representará la fuerza elástica que se desarrolle en m . Esta expresion conviene asimismo para todos los prismas elementales que arranquen de A , ya se contraigan ó se estiren, con tal de que se sustituya en vez de nn' , el alargamiento ó contraccion correspondiente.

Si prolongamos la seccion B' hasta su encuentro con A tambien prolongada, en C estarán proyectados los centros de curvatura pertenecientes á aquellos puntos de las *fi- bras neutras* que se hallan en el plano de la seccion A ; y la semejanza de los triángulos oCD y Dnn' , dará

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{nD}{oC} = \frac{v}{\rho}$$

designando por ρ el rádio de curvatura.

Segun esto,

$$\int \frac{E\delta \cdot d\Omega}{\Delta} = \frac{E}{\rho} \int v \cdot d\Omega$$

expresará la suma de todas las acciones que la parte del prisma situada á la izquierda de A , ejerce sobre la de la derecha; y como dicha suma ha de ser nula, se tendrá

$$\int v \cdot d\Omega = 0:$$

ecuacion que nos dice que la línea ox pasa por el centro de gravedad de la seccion A , hallándose situado este, por efecto de la simetría, en el punto o ; resultado que se pudo prever.

La fibra, ó con mas rigor, la línea invariable que pasa

ó no, segun el caso que se considere, por el centro de gravedad de las secciones, es conocida por eje neutro.

Si se toman los momentos de las fuerzas elásticas respecto al eje x , la ecuacion de equilibrio que buscamos, será

$$\frac{E}{\rho} \int v^2 \cdot d\Omega = \frac{EY}{\rho} = M;$$

en la que Y representa el momento de inercia con relacion á dicho eje, y M el momento del par $(P, -P)$.

La expresion $\frac{E}{\rho} \int v^2 \cdot d\Omega$ ó su igual $\frac{EY}{\rho}$, se llama *momento de elasticidad*; así como M recibe mas particularmente la denominacion de *momento de flexion* ó *momento de rotura*.

Si representamos por R el esfuerzo permanente de traccion ó compresion por unidad superficial en un punto cualquiera tal como el m , se tendrá

$$R = \frac{E\delta}{\Delta} = \frac{Ev}{\rho}, \dots \dots \dots (5)$$

de donde

$$\frac{E}{\rho} = \frac{R}{v}; \text{ y por tanto}$$

$$\frac{EY}{\rho} = \frac{RY}{v} = M, \dots \dots \dots (6)$$

Si en la igualdad ((5)) se introduce el máximo valor de v correspondiente á la seccion A , obtendremos el mayor, que en esta podrá tener R .

Como por otra parte $R = Ei$, siendo i el alargamiento por metro, se tendrá también

$$\frac{EiY}{v} = M, \text{ de donde}$$

$$i = \frac{Mv}{EY};$$

cuyo valor formular nos permite conocer i , cuando lo sean las cantidades que entran en el segundo miembro.

De la ecuación de equilibrio $\frac{EY}{\rho} = M$, se desprende desde luego una consecuencia: que siempre que sean constantes E , Y é M , lo será igualmente el radio de curvatura; y por tanto, el eje medio se encorvará afectando la forma circular en toda la extensión del sólido en que se verifiquen estas condiciones.

Es de observar, que mientras M permanezca constante, no habrá *sección peligrosa* propiamente dicha.

§ 29. **Prisma sometido á fuerzas situadas de cualquier modo en su plano de simetría.**—Terminado cuanto nos habíamos propuesto respecto de la *flexión simple*, pasemos á estudiarla combinada con otras deformaciones, como ordinariamente se presenta en la práctica.

Sea SS' fig. 11 (lám. 2.^a), un prisma sometido á las fuerzas F' , F'' situadas en el plano de simetría, ó satisfaciendo la resultante de cada dos á esta condición; y $S'AA$ el trozo en que tratamos de determinar las condiciones de equilibrio.

Supongamos, que las fuerzas dadas tengan una resultante F ,—el caso de reducirse á un par ha sido tratado antes—y que sea descompuesta como indica la figura, normal y paralelamente á la seccion A . Si á su vez se descompone T en un par, cuyo momento sea $T \times KH$ y una fuerza situada en A , se tendrá:

1.º Que la componente normal N viene á constituir lo que se llama *esfuerzo de compresion ó extension* debido á las fuerzas F' , F''

2.º Que T es el esfuerzo que se denomina de *cizallamiento, esfuerzo trasversal ó esfuerzo cortante*.

3.º Que el momento $T \times KH = F \times K'H = M$ respecto de la línea proyectada en H , es lo que se dió á conocer en el § 28, por *momento de flexion ó de rotura*.

Para que el trozo $S' A$ esté en equilibrio, preciso es que formen un sistema, que lo esté tambien, las fuerzas N , T , el par $(T, -T)$ y las reacciones moleculares que se originen en la seccion A .

Llegaremos á conocer estas últimas tan luego como, siguiendo el principio citado en el § 44, determinemos las que con independencia unas de otras, se desarrollen en la misma seccion A , por efecto de N , T y $(T, -T)$; procediendo de esta manera encontraremos:

$$\begin{array}{l}
 (a) \dots \int E \frac{\delta}{\Delta} d\Omega = E\Omega i \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Para las reacciones moleculares} \\ \text{desarrolladas en la seccion } A, \text{ por efecto de la} \\ \text{componente } N. \end{array} \right. \\
 (b) \dots \int E \frac{\delta'}{\Delta} d\Omega \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Idem..... por efecto del par} \\ \text{(T, -T.)} \end{array} \right.
 \end{array}$$

(c).... $G'\Omega i'$ } Para las reacciones moleculares desarrolladas por efecto de la componente T, situada en el plano de la seccion A.

Conocidas ya las componentes de las fuerzas elásticas desarrolladas en A, si observamos que las (a) y (b) deben sumarse, fácil será establecer las ecuaciones que siguen, necesarias y suficientes para el equilibrio del trozo S' A.

$$N - \int E \frac{\delta + \delta'}{\Delta} d\Omega = 0 \dots\dots (a')$$

$$T - G'\Omega i' = 0 \dots\dots\dots (b')$$

$$M - M' = 0 \dots\dots\dots (c')$$

En esta última ecuacion, M y M' expresan respectivamente los momentos de las fuerzas exteriores é interiores con relacion á la línea proyectada en H.

Prescindiendo de la ecuacion (b') por ser los *esfuerzos cortantes* de muy escasa influencia (*) en la mayor parte de los casos que hemos de considerar, obsérvese en la figura que

(*) En efecto; refiriéndonos á la fig. 12 (lám. 2.^a), la resistencia por unidad superficial de A, debida al *esfuerzo cortante* T, se deduce de la fórmula ((4)) § 26 $F = \frac{G'\Omega e}{\Delta}$, y su valor será

$$\frac{G'e}{\Delta} = \frac{T}{\Omega} \dots\dots\dots (1)$$

La que se origina por el par (T,—T) en un punto cualquiera de la misma seccion A, y por unidad superficial tambien, se obtiene de la ecuacion

$$\delta + \delta' = \frac{V-v}{V} \times \delta;$$

siendo v , la distancia de un punto cualquiera de la seccion **A** al eje que, pasando por el centro de gravedad de ella, se halla proyectado en **H**, y teniendo en cuenta, que miramos como positivas las que estén por encima de él; V representa la distancia que separa la capa de fibras neu-

cion ((6)) $M = \frac{EY}{\rho}$ § 28, despues de substituir por M el valor particular $T \times p$, y por ρ el que resulta de comparar los triángulos $C o D$, $D n n'$; segun esto se tendrá:

$$T \times p = \frac{EY}{v} \times \frac{\delta}{\Delta} \text{ de donde}$$

$$\frac{E\delta}{\Delta} = \frac{T \times p v}{Y}.$$

El máximo valor de esta última resistencia corresponderá á $v = \frac{1}{2}h$, y en el caso de un prisma de seccion rectangular, será

$$\frac{E\delta}{\Delta} = \frac{6Tp}{bh^2} = \frac{6T\rho}{h\Omega} \dots \dots \dots (2)$$

Comparados los valores ((1)) y ((2)) se obtiene

$$\frac{\frac{G'e}{\Delta}}{\frac{E\delta}{\Delta}} = \frac{h}{\rho p};$$

resultado que nos hace ver, que la resistencia elástica originada por T está con la máxima correspondiente al par $(T, -T)$ en razon directa de h , é inversa de la distancia p ; y como consecuencia de esto, el que se pueda prescindir de los *esfuerzos cortantes* al calcular las dimensiones trasversales en la mayor parte de los casos relativos á la flexion de los prismas de seccion constante y longitud algo considerable.

Aunque apoyados en lo que acabamos de demostrar y conformándonos con la práctica general, omitamos el ocuparnos de la resistencia al eizallamiento al establecer las ecuaciones de equilibrio, procuraremos sin embargo, determinar casi siempre el valor del esfuerzo que la ocasiona; pues, como mas adelante veremos, no puede prescindirse de él al calcular las dimensiones trasversales de ciertos prismas, ya por exigirlo la forma especial de su seccion, ya porque siendo de corta longitud prepondere el *esfuerzo cortante*.

tras del eje H. Sustituido en ((a')) el valor de $(\delta + \delta')$ se tendrá:

$$N - \int \frac{E d\Omega}{\Delta} \times \frac{V-v}{V} \times \delta = N - E i \int d\Omega + \frac{E i}{V} \int v d\Omega,$$

de donde $N = E\Omega i, \dots \dots \dots (7)$

por ser $\int v d\Omega = 0.$

Para obtener el valor de M' , basta considerar que

$-E i \int d\Omega + \frac{E i}{V} \int v d\Omega$ representa la suma de todas

las fuerzas elásticas correspondientes á la seccion A, y por consiguiente

$$M' = -E i \int v d\Omega + \frac{E i}{V} \int v^2 d\Omega = \frac{E i Y}{V},$$

el que sustituido en ((c')) dará

$$M = \frac{E i Y}{V} \dots \dots \dots (8)$$

Si nos fijamos en que $\frac{E i (V-v) d\Omega}{V}$ representa la fuer-

za elástica correspondiente al elemento $d\Omega$, el valor de ella por unidad superficial en un punto cualquiera de la seccion A, será, designándola por R,

$$R = E i \frac{V-v}{V} \dots \dots \dots (9)$$

Las ecuaciones ((7)), ((8)) y ((9)) encierran la solución de importantes problemas relativos á la flexión de los prismas.

§ 30. **Curvatura del eje medio deformado.**

Admitido que la seccion B cuando se halle en B', despues de encorvado el prisma, continúe sensiblemente normal al eje medio Hx, prolónguese hasta su encuentro con la A en el punto C, y comparemos los triángulos CHD' y o' D D'; con arreglo á esto se tendrá

$$\frac{HC}{HD'} = \frac{Do'}{DD'}, \text{ ó bien}$$

$$\frac{\rho}{(1+i)HD} = \frac{V}{i \times HD};$$

como el factor (1+i) se le puede considerar igual á la unidad, se llegará á obtener mediante la ecuacion ((8)),

$$\rho = \frac{V}{i} = \frac{EY}{M} \dots \dots \dots (10)$$

La cantidad $\frac{1}{\rho}$ mide la curvatura del eje medio deformado.

§ 31. **Ecuacion del eje medio deformado.**

Suponiendo el prisma encorvado, representemos su ecuacion por $y=f(x)$. Si consideramos que por ser muy pequeño $\frac{dy}{dx}$, puede despreciarse su cuadrado, con relacion á la unidad, la expresion formular del rádio de curvatura

$$\rho = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{2/3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

se simplificará quedando reducido á

$$\epsilon = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion ((10)), se obtiene

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EY},$$

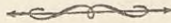
la que integrada dos veces sucesivas producirá las siguientes;

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + C' \dots \dots \dots (11)$$

$$y = f(x) + C \dots \dots \dots (12)$$

Esta última es la ecuacion de la curva que buscábamos; y la ((11)) da á conocer la tangente en un punto cualquiera de ella.

Formuladas las principales cuestiones que nos propusimos estudiar en un prisma sometido á la flexion por fuerzas situadas de un modo cualquiera en su plano de simetría, procederemos á ocuparnos de ellas, en los casos mas concretos que comunmente se presentan en las aplicaciones á las máquinas.



LECCION 4.^a

SUMARIO.

Prisma descansando horizontalmente sobre dos apoyos, y sometido á la accion simultánea, de un peso en cualquier punto de su longitud, y una carga uniformemente repartida.—Observacion.—Ecuacion de la fibra media deformada.—Casos particulares.—Prisma horizontal descansando sobre dos apoyos, y sometido á la accion, de una carga uniformemente repartida, y á la de varios pesos obrando en distintos puntos de su longitud.—Ecuacion de la fibra media deformada.—Observacion.—Prisma horizontal empotrado por un extremo, y sometido á una carga compuesta, de un peso obrando en el extremo libre, y de otro igualmente repartido por toda su longitud.—Ecuacion de la fibra media deformada.—Particularidad que conviene hacer notar.—Observacion.—Otra observacion.—Prisma horizontal empotrado por sus dos extremos, y sometido á la accion, de un peso que obra en el centro, y á la de una carga uniformemente repartida.—Casos particulares.—Sólido horizontal empotrado por un extremo, y descansando por el otro sobre un simple apoyo.—Experiencias relativas á la flexion de los prismas.—Trabajo desarrollado durante la flexion de los prismas.—Sólidos de igual resistencia.—Prisma horizontal descansando sobre dos apoyos, y sometido á la accion, de un peso en el medio, y una carga uniformemente repartida.—Prisma empotrado por un extremo, y con un peso suspendido en el otro.—Sólidos cuyas secciones trasversales son semejantes.—Observaciones.—Ságitas correspondientes á los sólidos de igual resistencia.—Determinacion sencilla de las ságitas, del ángulo que forma un elemento cualquiera de las *elásticas* y trazado aproximado de estas curvas.

§ 32. Prisma descansando horizontalmente sobre dos apoyos, y sometido á la accion simultánea, de un peso en cualquier punto de su longitud, y una carga uniformemente repartida.

Si representamos fig. 43 (lám. 2.^a) por

$2D$ la distancia entre los apoyos A y B

- p peso por unidad de longitud de la carga uniformemente repartida,
 $2 P$ peso obrando en la seccion que pasa por el punto C,
 l, l' distancias de este, á los apoyos A y B,
 x la que media entre A y una seccion cualquiera, es evidente, que los apoyos darán lugar á dos reacciones P', P'' , que podemos considerar como otras fuerzas exteriores obrando tambien sobre el prisma.

La reaccion en A, se determinará por la ecuacion de momentos al rededor de B; así

$$P' = \frac{Pl' + pD^2}{D};$$

y de un modo análogo, tomándolos con relacion á A, tendremos

$$P'' = \frac{Pl + pD^2}{D}.$$

Para establecer las ecuaciones de equilibrio del trozo Am comprendido en la parte AC, se reemplazará cada fuerza de las que actúan sobre él, por otra igual á ella, situada en el plano de la seccion m , y el par correspondiente; prescindiendo—lo que no habremos de olvidar en adelante—de la ligerísima inclinacion que pueda tomar m .

Tambien conviene tener presente, respecto á los momentos de las fuerzas, que apreciaremos como positivos, los que tiendan á disminuir los ródios de curvatura al doblarse el sólido; en el supuesto de mirar la parte cóncava hácia el eje de ordenadas, y en el de considerar

region positiva de este, la que se encuentra por encima del de las x .

Con arreglo á estas observaciones y á lo consignado en los §§ 29 y 30, la ecuacion necesaria para el equilibrio del trozo A m será

$$M = P'x - \frac{1}{2} p x^2 = \frac{R Y}{v}, \dots\dots\dots (1)$$

ó bien,

$$\frac{1}{2} p x (2 \frac{P'}{p} - x) = \frac{E Y}{\rho} \dots\dots\dots (2)$$

Si se quiere conocer el esfuerzo de cizallamiento obtendremos para él,

$$T = P' - p x; \dots\dots\dots (3)$$

valor, como puede observarse, igual á la derivada respecto á x del momento de flexion, es decir,

$$T = \frac{dM}{dx}. (*)$$

Analizadas las ecuacioness ((1)) y ((2)) resulta:

$$1.^{\circ} \dots \text{ á } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} M = 0 \\ y \\ \rho = \infty \end{array} \right.$$

2.^o los momentos de flexion siguen la misma ley que las ordenadas de la parábola

$$y = P'x - \frac{1}{2} p x^2;$$

(*) Este hecho analítico puede demostrarse fácilmente, para cualquiera número de fuerzas situadas en el plano de simetría, y perpendiculares á la longitud del sólido.

Aunque ninguna dificultad ofrezca fijar el signo del *esfuerzo de cizallamiento*, se ha de tener presente el cambio que experimenta, segun se consideren las fuerzas situadas en el trozo de la derecha ó en el de la izquierda, de los dos en que queda dividido el prisma por la seccion, respecto de la cual se quiere conocer dicho esfuerzo.

de manera, que el máximo valor de ellos corresponderá á la que pase por el punto C, en el caso de ser, como acontece en la figura,

$$AC < D + \frac{P l'}{p D}; \text{ y en el de}$$

$$AC = \text{ó} > D + \frac{P l'}{p D}, \text{ á la que resulta de hacer}$$

$$x = D + \frac{P l'}{p D}, \text{ valor que hubiéramos ob-}$$

tenido aplicando la teoría de máximos y mínimos.

3.º.... si se describe una semicircunferencia con el

rádío $\frac{P'}{p}$, los valores de los momentos

de flexion serán tambien proporcionales á los cuadrados de sus ordenadas, pues representando estas por v se tiene

$$v^2 = \frac{1}{2} p x \left(2 \frac{P'}{p} - x \right)$$

Si de un modo análogo quisiéramos representar geoméricamente los esfuerzos de cizallamiento, bastaría construir la recta $y = P' - p x$, teniendo en cuenta, que el mayor valor de x no puede exceder de los indicados anteriormente.

Cuando la seccion se encuentra en n , esto es, entre C y B

$$M = P' x - 2 P (x - l) - \frac{1}{2} p x^2 \dots \dots \dots (4)$$

será la ecuacion de equilibrio, y como lo es tambien de una parábola, sus ordenadas representarán los momentos de flexion en toda la parte CB.

El mínimo valor de estos corresponde á $x=2D$, en que se verifica $M=0$, y la curvatura, nula como en el punto A; y el máximo, á la distancia

$$x = D + \frac{Pl'}{pD} - \frac{2P}{p} = D - \frac{Pl}{pD}$$

si $AC = \text{ó} < D + \frac{Pl'}{pD} - \frac{2P}{p}$; y en el supuesto

$$AC > D + \frac{Pl'}{pD} - \frac{2P}{p},$$

dicho valor se obtendrá haciendo $x=l$.

La ecuacion que diera á conocer la ley de los esfuerzos cortantes en la parte CB, sería evidentemente

$$y = P' - 2P - px \dots \dots \dots (5)$$

La sola inspeccion de la figura hace comprender desde luego, que el máximo valor de M corresponderá á una seccion situada entre el medio del prisma y el punto de aplicacion de la carga 2 P.

Esto mismo se desprende fácilmente de la ecuacion ((4)); de aquí el que haya de verificarse la desigualdad

$$l < D - \frac{Pl}{pD},$$

si este valor teórico ha de responder á la cuestion.

La construccion de los lugares geométricos pertenecientes á las ecuaciones ((1)), ((3)), ((4)) y ((5)), manifestaria

visiblemente cuanto dejamos dicho en la discusion que precede, y ningun medio mas apropiado, para de una sola ojeada conocer los momentos de flexion y esfuerzos de cizallamiento en cada punto del prisma.

La determinacion del mayor valor de R —que como ya sabemos representa la resistencia á la extension ó compresion que por unidad de superficie opone una fibra cualquiera al ser deformado el prisma á que pertenece—no ofrece dificultad alguna; pues conocida la seccion en que mas vivamente se haya hecho sentir el efecto producido por las fuerzas exteriores, que será aquella en que M tenga el máximo valor, se introducirá este en la ecuacion $R = \frac{Mv}{Y}$, poniendo por v el correspondiente á la fibra mas distante de dicha seccion.

El valor que en estas condiciones se obtenga para R , no debiera exceder de los que se fijan como permanentes en las tablas n.ºs 1 ó 2, páginas 29 y 42.

§ 33. **Observacion.**—La notable diferencia entre los límites de elasticidad á la traccion y compresion en el hierro colado, y sobre todo, entre las cargas de rotura correspondientes á uno y otro esfuerzo; han sido causa de numerosas experiencias, sometiendo á la flexion sólidos de esta materia. Hé aquí los principales resultados obtenidos:

- 1.º.... el módulo de elasticidad E alcanza por término medio el valor $42^k \times 10^9$.
- 2.º.... el de R correspondiente á la rotura es 32 kilogramos por milímetro cuadrado.

3.º . . . para piezas fijas que no estén expuestas á choques, ni fuertes vibraciones, $7^{\frac{1}{2}}$ por milímetro cuadrado es valor que se puede adoptar sin riesgo alguno.

Estos resultados, á ser ciertos, autorizan á suponer que en todo prisma de hierro colado sometido á la flexion, la parte que se comprime protege con su mayor resistencia á la mas débil, á la que se alarga.

Algunos ingenieros, entre ellos Mr. Hodgkinson, apoyados en la diferencia antes indicada, han hecho construir *vigas* de forma particular con sujecion á la idea de que la parte comprimida sea menor que la que se alarga: las experiencias han demostrado la ineficacia de este proceder, en tanto las cargas no alteren el límite de elasticidad de la materia, pero á proporcion que se aproximan mas y mas á las de rotura, las ventajas á favor de él llegan á ser muy ostensibles.

Las experiencias á la flexion ejecutadas con otros materiales, han hecho ver la posibilidad de servirse sin inconveniente de los valores de R consignados en la tabla n.º 4; lo que no debe sorprendernos, si se atiende á la menor diferencia que—comparados con el hierro colado—existe al parecer entre sus límites de elasticidad á la extension y compresion.

§ 34. **Ecuacion de la fibra media deformada.**

Para encontrarla, nos valdremos § 31 de la relacion

general
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EY},$$

que aplicándola á los dos trozos que hemos considerado, obtendremos las siguientes ecuaciones diferenciales:

:

$$\text{De A á C... EY } \frac{d^2 y}{dx^2} = P'x - \frac{1}{2} px^2$$

$$\text{De C á B... EY } \frac{d^2 y}{dx^2} = (P' - 2P)x - \frac{1}{2} px^2 + 2Pl$$

Integrando una y otra hasta obtener las correspondientes relaciones finales entre x é y se tendrá

$$\text{De A á C.. } \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{2} P'x^2 - \frac{1}{6} px^3 \right\} - C' \dots \dots \dots (6) \\ y &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{6} P'x^3 - \frac{1}{24} px^4 \right\} - C'x - C \dots \dots \dots (7) \end{aligned} \right.$$

$$\text{De C á B.. } \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{2} (P' - 2P)x^2 - \frac{1}{6} px^3 + 2Plx \right\} - \bar{C}' \dots \dots (8) \\ y &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{6} (P' - 2P)x^3 - \frac{1}{24} px^4 + Plx^2 \right\} - \bar{C}'x - \bar{C} \dots \dots (9) \end{aligned} \right.$$

Siendo los valores (*) de las constantes,

$$C' = - \frac{1}{EY} \left\{ Pl^2 - \frac{S + \frac{1}{3} Pl^3}{2D} \right\}$$

$$C = 0$$

$$\bar{C}' = \frac{1}{EY} \frac{S - \frac{1}{3} Pl^3}{2D}$$

$$\bar{C} = - \frac{1}{EY} \cdot \frac{Pl^3}{3}$$

(*) Para determinar las constantes C' , C , \bar{C}' , \bar{C} se tienen cuatro ecuaciones: dos, que provienen de introducir respectivamente en las ((7)) y ((9)) los valores $x=0$ y $x=2D$, para los que resulta en ambas $y=0$; y otras dos que nacen, una de igualar entre sí los segundos miembros de las ((6)) y ((8)) despues de haber hecho $x=l$; y la otra, de igualar también los valores de y deducidos de las ((7)) y ((9)) previa la introducción del mismo valor particular $x=l$.

S representa la cantidad

$$\frac{1}{6} (P' - 2P)(2D)^3 - \frac{1}{24} p(2D)^4 + Pl(2D)^2$$

Las ecuaciones ((6)) y ((7)) responden á dos cuestiones; á la forma de la curva que afecta la fibra media correspondiente al trozo AC, y á la inclinacion de la tangente en un punto cualquiera de ella. Dicha curva recibe el nombre de *curva elástica* ó *elástica* simplemente.

Las ((8)) y ((9)) tienen respecto de CB análoga significacion.

§ 35. **Casos particulares.**—Si en las fórmulas obtenidas anteriormente para el prisma § 32 hacemos $l=l'=D$, las que resulten, corresponderán al caso particular (*) de obrar el peso $2P$ en medio del prisma.

Como debia suceder las reacciones de los apoyos son iguales entre sí, y tienen el valor

$$P' = P + pD = P''$$

El momento de flexion máximo corresponde á la seccion que pasa por el centro del prisma, siendo su valor

$$M = D \left\{ P + \frac{1}{2} pD \right\}; \dots\dots\dots (10)$$

y la curva elástica resulta simétrica respecto á la vertical que contiene dicho centro; de aquí se deduce, que haya de ser horizontal la tangente en este punto, y que la or-

(*) Como via de ejercicio, los alumnos deberán encontrar directamente todas las fórmulas relativas á este y demás casos que se deriven del mas general § 32. Esta observacion habrá de tenerse presente, siempre que haya lugar á aplicarla.

denada—conocida mas particularmente por *ságita* ó *flecha*—tenga el mayor valor absoluto.

$$\bar{r} = \frac{4}{3} \times \frac{D^3}{EY} \left\{ P + \frac{5}{8} p D \right\} \dots\dots (11)$$

De su exámen se desprende, que las *ságitas* son:

- 1.º ... Directamente proporcionales á los cubos de las distancias entre los apoyos,
- 2.º ... Están en razon inversa del producto EY,
- 3.º ... Crecen en la directa de la suma compuesta del peso colocado en el medio, y $\frac{5}{8}$ del uniformemente repartido.

Puede haber circunstancias, en que reducida la carga uniformemente repartida al peso del prisma, se prescinda de ella por su escasa importancia con relacion á la que se coloque en un punto cualquiera de su longitud; las fórmulas correspondientes á este caso quedarán conocidas introduciendo en las de los §§ 32 y 34 el valor particular $p=0$.

Si la carga 2P obrase además en el centro, habría que añadir la condicion $l=l'=D$.

El valor de la *flecha* sería bajo este doble supuesto

$$f = \frac{4}{3} \times \frac{D^3}{EY} \times P \dots\dots\dots (12)$$

De un modo análogo, para conocer las fórmulas pertenecientes al caso de una carga uniformemente repartida, bastará hacer $P=0$, en las ya citadas de los §§ 32 y 34 ó en las obtenidas para otro cualquiera en que estuviese comprendido aquel.

Limitándonos á conocer el valor de la *ságita* se tendrá para ella

$$f = \frac{4}{3} \times \frac{D^3}{EY} \times \frac{5}{8} pD \dots\dots\dots (13)$$

De la comparacion de este valor con el ((12)) se desprende, suponiendo que las cargas sean iguales, que las *flechas* están en la razon de 5: 8; y de aquí la ventaja que ofrece el repartir aquellas por toda la longitud de los prismas. Esta última consecuencia pudo haberse deducido de la fórmula ((11)), y tambien de comparar entre sí los valores pertenecientes á los máximos momentos de flexion. (*)

§ 36. **Prisma horizontal descansando sobre dos apoyos, y sometido á la accion de una carga uniformemente repartida y á la de varios pesos obrando en distintos puntos de su longitud.**—La marcha general para resolver este problema no ofrece dificultad. Concretándonos á uno de los casos que por lo comun se presentan en las aplicaciones, reduciremos á dos los pesos, suponiéndolos iguales y simétricamente dispuestos respecto de la vertical que pasa por el centro del prisma.

Con arreglo á esto las reacciones en A y B, fig. 44 (lám. 2.^a) serán,

$$P' = P + pD = P''; \dots\dots\dots y$$

(*) Los casos particulares que acabamos de señalar, por la sencillez de las fórmulas que les pertenecen como por la facilidad que presentan de poder verificar los resultados, son los que principalmente han servido y sirven para la ejecucion de las experiencias encaminadas á determinar el coeficiente ó módulo de elasticidad E.

las ecuaciones de equilibrio, tildando la x y M para mayor claridad,

$$M = (P + pD)x - \frac{1}{2} p x^2 \dots \dots \dots (14) \text{ de A á C}$$

$$M' = (P + pD)x' - P(x' - l) - \frac{1}{2} p x'^2 \dots \dots (15) \text{ de C á C'}$$

$$M'' = (P + pD)x'' - P(x'' - l) - P(x'' - 2D + l) - \frac{1}{2} p x''^2 (16) \text{ de C' á B.}$$

Los esfuerzos de cizallamiento tendrán los valores

$$\frac{dM}{dx} = P + pD - px \dots \dots \dots (17) \text{ de A á C}$$

$$\frac{dM'}{dx'} = P + pD - P - px' \dots \dots (18) \text{ de C á C'}$$

$$\frac{dM''}{dx''} = P + pD - 2P - px'' \dots \dots (19) \text{ de C' á B.}$$

De estas ecuaciones se desprenden análogas reflexiones á las consignadas en el § 32.

Para conocer el mayor valor que pueda tener R , procederemos como se indicó en dicho párrafo.

El máximo momento de flexion para el caso presente es

$$M = \frac{1}{2} p D^2 + P l;$$

del que se deduce, que la disposicion de repartir el peso $2P$ como indica la fig. 44, es preferible á la de hacerle actuar en medio del prisma; por esto se la ve aplicada ventajosamente á las ruedas hidráulicas, vagones y toda clase de carruages, etc.

§ 37. Ecuacion de la fibra media deformada.

Basta seguir la marcha conocida y aplicada en el § 34; y tener en cuenta al determinar las constantes, que en el

punto C, la ordenada y tangente son las mismas para AC y CC'; sucediendo otro tanto en el C', respecto de CC' y C'B.

Segun esto se tendrá:

$$\text{De A á C.. EY } \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ (P + pD)x - \frac{1}{2} px^2 \right\} \dots\dots (20)$$

$$\text{De C á C'.. EY } \frac{d^2y'}{dx'^2} = \left\{ pDx' + Pl - \frac{1}{2} px'^2 \right\} \dots\dots (21)$$

$$\text{De C' á B.. EY } \frac{d^2y''}{dx''^2} = \left\{ (pD - P)x'' + 2PD - \frac{1}{2} px''^2 \right\} \dots (22)$$

Integrando dos veces sucesivas cada una de estas tres ecuaciones, se obtienen las siguientes para las tangentes y curvas de los trozos ó partes consideradas:

$$\text{De A á C.} \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} + C &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{2} (P + pD)x^2 - \frac{1}{6} px^3 \right\} \dots\dots (23) \\ y &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{6} (P + pD)x^3 - \frac{1}{24} px^4 \right\} - Cx - \bar{C} \dots\dots (24) \end{aligned} \right.$$

$$\text{De C á C} \left\{ \begin{aligned} \frac{dy'}{dx'} + C' &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{2} pDx'^2 + Plx' - \frac{1}{6} px'^3 \right\} \dots\dots (25) \\ y' &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{6} pDx'^3 + \frac{1}{2} Plx'^2 - \frac{1}{24} px'^4 \right\} - C'x' - \bar{C}' \dots (26) \end{aligned} \right.$$

$$\text{De C' á B.} \left\{ \begin{aligned} \frac{dy''}{dx''} + C'' &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{2} (pD - P)x''^2 + 2PDx'' - \frac{1}{6} px''^3 \right\} \dots (27) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} y'' &= \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{6} (pD - P)x''^3 + PDx''^2 - \frac{1}{24} px''^4 \right\} - C''x'' - \bar{C}'' \dots (28) \end{aligned} \right.$$

siendo los valores de las constantes

$$C = \frac{1}{EY} \left\{ S + S' - S'' - \frac{1}{2} P l^2 \right\}$$

$$C' = \frac{1}{EY} \left\{ S + S' - S'' \right\}$$

$$\bar{c} = 0$$

$$\bar{c}' = - \frac{1}{EY} \times \frac{P l^3}{6}$$

$$C'' = \frac{1}{EY} \left\{ S' - S'' \right\}$$

$$\bar{c}'' = \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{3} P(l+l')^3 - \frac{1}{6} P l^3 - P(D - \frac{1}{2} l)(l+l')^2 \right\}$$

en los que S, S', S'', expresan respectivamente las cantidades

$$P(l-2D)(l+l') + \frac{1}{2} P(l+l')^2$$

$$\frac{1}{6} (pD - P)(2D)^2 + 2PD^2 - \frac{1}{24} p(2D)^3$$

$$\frac{\frac{1}{3} P(l+l')^3 - \frac{1}{6} P l^3 - P(D - \frac{1}{2} l)(l+l')^2}{2D}$$

La ordenada ó ságita correspondiente al medio del prisma, se obtiene haciendo $x=D$ en la ecuacion ((26)).

Segun esto, su valor formular será

$$f = \frac{1}{EY} \left\{ \frac{1}{8} p D^4 + \frac{1}{2} P l D^2 + \frac{1}{24} P l^3 - (S + S' - S'') D \right\} \dots (29)$$

Si en esta expresion se hace $p=0$, resultará

$$f = \frac{4}{EY} \left\{ \frac{1}{2} P l D^2 + \frac{1}{24} P l^3 - \frac{4}{3} P l D^3 - (S - S'') D \right\}; \quad (30)$$

y si $P=0$, obtendremos de nuevo el valor particular

$$\frac{5}{24} p \frac{D^4}{EY}$$

encontrado en el § 35.

Comparadas entre si la ságita ((29)), y la ((11)) obtenida cuando el peso $2 P$ cargaba directamente sobre el centro del prisma, se llega á la consecuencia que se dedujo en el § 36 de la consideracion de los valores de M .

§ 38. **Observacion.**—Todos los problemas en que la carga esté constituida por dos ó mas pesos obrando en distintos puntos, ya aumentada ó no, con otro igualmente repartido por toda su longitud, pueden resolverse apoyándonos en el principio relativo á la independencia de efectos citado en el § 14.

El procedimiento es sencillo: redúcese á subdividir el problema propuesto, en tantos como fuerzas existan; á encontrar las soluciones de ellos, y componer por último los efectos correspondientes á cada punto.

Las fuerzas repartidas con uniformidad por toda la longitud del prisma deberán constituir un solo problema.

§ 39. **Prisma horizontal empotrado por un extremo, y sometido á una carga compuesta de un peso obrando en el extremo libre, y de otro igualmente repartido por toda su longitud.**—Se dice que un sólido está empotrado en un muro ó en un apoyo cualquiera, cuando su enlace con él es tal, que la fibra neutra no puede variar de inclinacion en una

:

extension determinada, por lo menos en un *elemento*. Esta invariabilidad constituye el *empotramiento perfecto*; tomando la denominacion de *imperfecto*, cuando el sólido puede separarse en la parte empotrada de su direccion primitiva, aunque no tanto como en el caso de estar simplemente apoyado. Nosotros únicamente nos ocuparemos del primero.

Sea, fig. 15 (lám. 2.^a), S'S el prisma dado. Como hasta aquí, trataremos ante todo de encontrar la ecuacion de equilibrio para un trozo S'm; de este modo llegarán á ser conocidas las fuerzas elásticas que se desarrollen en una seccion cualquiera *m*. A la *n* se le dá el nombre de *seccion de empotramiento* (*) ó *de encastre*.

Despues de reemplazar cada fuerza, por otra igual á ella situada en la seccion que se considera, y un par, tendremos para la ecuacion que buscamos

$$M = -P(D-x) - \frac{1}{2} p (D-x)^2 \dots \dots \dots (31)$$

perteneciente á una parábola cuyas ordenadas representarán los momentos de flexion.

Analizada, resulta:

1.º . . . que corta al eje de las *x* á las distancias

$$x=D \text{ y } x=D + \frac{2}{p} P;$$

2.º considerados en su valor absoluto, el menor momento de flexion $M=0$, corresponde á $x=D$; y el mayor $M=PD + \frac{1}{2} p D^2$, á $x=0$; de aquí pues, que *n* sea la *seccion peligrosa*.

(*) Solo por acomodarnos al uso, nos serviremos tambien de las denominaciones *seccion de encastre*, *sólido encastrado*, etc.

Los esfuerzos cortantes serán dados por la ecuacion de la recta

$$T = P + p(D - x) = \frac{dM}{dx} \dots\dots\dots (32)$$

El máximo valor de R estará en la seccion de encastre, y corresponderá á la fibra mas distante del eje neutro.

§ 40. **Ecuacion de la fibra media deformada.**
Recurriremos á la ecuacion diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M'}{EY} = \frac{1}{EY} \left\{ -\frac{1}{2} px^2 + (P + pD)x - PD - \frac{1}{2} pD^2 \right\}$$

que integrada dos veces sucesivas, y teniendo presente que las constantes son nulas por serlo tambien la tangente y la ordenada para el valor particular $x = 0$, se llega á estas relaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EY} \left\{ -\frac{1}{6} px^3 + \frac{P + pD}{2} x^2 - (PD + \frac{1}{2} pD^2)x \right\} \dots (33)$$

$$y = \frac{1}{EY} \left\{ -\frac{1}{24} px^4 + \frac{P + pD}{6} x^3 - \frac{PD + \frac{1}{2} pD^2}{2} x^2 \right\} \dots (34)$$

Si en la última se hace $x = D$, y se prescinde del signo, se tendrá

$$f = \frac{1}{3} \times \frac{D^3}{EY} \left\{ P + \frac{3}{8} pD \right\}; \dots\dots\dots (35)$$

en la que haciendo sucesivamente $p = 0$ y $P = 0$, resultan los valores particulares

$$f' = \frac{1}{3} \times \frac{D^3}{EY} P \dots \dots \dots (36)$$

$$f'' = \frac{1}{3} \times \frac{D^3}{EY} \times \frac{3}{8} p D \dots \dots \dots (37)$$

que comparados entre sí, dan la relacion

$$\frac{f'}{f''} = \frac{8}{3} \times \frac{P}{p D} = \frac{8}{3}$$

en el supuesto $P = p D$; resultado que traducido al lenguaje ordinario dice, que si se carga un prisma empujado por uno de sus extremos con un peso uniformemente repartido por toda su longitud; y, despues de retirado este, con otro igual á el, pero colocado en el extremo libre, la ságita en el segundo caso aumenta respecto á la del primero en la razon de 8 : 3; ó aproximadamente en la de 3 : 1. Esto mismo se desprende del simple exámen del valor general ((35)).

§ 41. **Particularidad que conviene hacer notar.**-Si la fuerza P obrase en sentido contrario al que indica la fig. 15 (lám. 2.^a), habria que cambiar su signo en la ecuacion ((31)) y en todas las que se deriven de ella.

M sería nulo con el valor

$$x = D - \frac{2 P}{p};$$

y siempre que se verifique la desigualdad

$$D > \frac{2 P}{p},$$

el sólido presentará un punto de inflexion á la distancia

$$x = D - \frac{2 P}{p}.$$

Aunque la sola inspeccion de la figura hace comprender la posibilidad de que exista este punto singular en la extension del prisma SS' , el análisis, como facilmente puede comprobarse, no deja de ello duda alguna.

§ 42. **Observacion.**-Tan luego como se compara un prisma, descansando horizontalmente sobre dos apoyos, con otro tambien horizontal empotrado por uno de sus extremos, se deja ver que cada mitad del primero, cuando las acciones son simétricas respecto á la vertical que pasa por el centro, puede ser considerada como un sólido empotrado por la parte mas baja.

Semejante observacion subsiste tambien en el supuesto de faltar en la carga la simetría indicada; la diferencia solo aparece en la magnitud de los trozos.

Fundados en esto, las fórmulas correspondientes al primer caso son aplicables al segundo, y reciprocamente; toda la cuestion queda reducida á determinar las acciones á que han de someterse para que haya paridad de efectos. Los valores ((42)) y ((36)) son una comprobacion de esta verdad.

§ 43. **Otra observacion.**-Fijémonos en la fig. 16 (lám. 2.^a); solo actúa sobre el sólido SS' , el peso P .

Si suponemos libre el extremo fijo, y descansando el prisma sobre el apoyo A , es evidente, que no permanecerá horizontal si no se verifica la igualdad

$$Q \times q = P \times p.$$

Como se puede reemplazar por Q , otra fuerza igual á ella obrando en la seccion n y el par $(Q, -Q)$, y en lugar del apoyo A introducir la fuerza $F = P + Q$,

queda con esto probado, que el *empotramiento* es equivalente á un par y á una fuerza, cuyos valores son en el presente caso $(Q, -Q)$ y $F - Q$.

A medida que la parte empotrada es mas corta, las reacciones que tienden á manifestarse desde el primer instante en B y A fig. 17 (lám. 2.^a) aumentan notablemente, siendo iguales á Q y $Q + P$, cuyos valores no deben exceder del límite fijado á la resistencia del material de que esté formado el hueco *ab*, ó el medio de que se disponga para empotrarlo.

§ 44. Prisma horizontal empotrado por sus dos extremos y sometido á la accion de un peso que obra en el centro, y á la de una carga uniformemente repartida. Casos particulares.

Aunque pudiéramos habernos propuesto resolver esta cuestion con alguna mas generalidad, suponiendo que el peso obrara en un punto cualquiera de la longitud; sin embargo, guiados por la consideracion de que así trata- da basta á evidenciar las ventajas que los prismas empotrados por sus extremos ofrecen sobre los que descansan en dos apoyos; guiados tambien por las necesidades de las aplicaciones á las máquinas, y últimamente por la idea de que bien comprendido el espíritu de cuanto dejamos consignado en los párrafos anteriores, serian allanadas las mayores dificultades debidas á la falta de simetría de la carga respecto de los encastres, guiados por todo esto, repetimos, solo nos ocuparemos del caso concreto que queda enunciado, no sin indicar antes la marcha de la resolucion en otro supuesto mas general.

Representemos por SS' fig. 18 (lám. 2.^a), el prisma fijo por ambas extremidades; y sea $2P$ el peso obrando en un punto cualquiera de su longitud.

Si suponemos conocido el sistema de fuerzas capaz de producir el mismo efecto que una cualquiera de las porciones empotradas AS ó BS' , el caso actual podrá ser tratado como el de un sólido fijo por un extremo.

Segun esto, expresemos por \bar{P} y $\bar{\mu}$ la fuerza y el par equivalentes § 43, á la parte encastrada BS' ; y en tal concepto, y en el de referirnos á la seccion m , se obtendrán las tres ecuaciones.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, \bar{\mu}, \bar{P}) \dots \dots \dots (38)$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, \bar{\mu}, \bar{P}) \dots \dots \dots (39)$$

$$y = \psi(x, \bar{\mu}, \bar{P}) \dots \dots \dots (40)$$

Considerando la seccion m' tendremos análogamente

$$\frac{d^2 y'}{dx'^2} = f'(x', \bar{\mu}, \bar{P}) \dots \dots \dots (41)$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \varphi'(x', \bar{\mu}, \bar{P}, C) \dots \dots \dots (42)$$

$$y' = \psi'(x', \bar{\mu}, \bar{P}, C') \dots \dots \dots (43)$$

Igualando entre si los segundos miembros de las ((39)) y ((42)) por una parte, y los de las ((40)) y ((43)) por otra, despues de haber introducido el valor particular $x = x' = l$, se obtienen estas dos relaciones

$$\bar{\varphi}(\bar{\mu}, \bar{P}) = \bar{\varphi}'(\bar{\mu}, \bar{P}, C) \dots \dots \dots (44)$$

$$\bar{\psi}(\bar{\mu}, \bar{P}) = \bar{\psi}'(\bar{\mu}, \bar{P}, C') \dots \dots \dots (45)$$

Además, si en las ecuaciones ((42)) y ((43)) se hace $x=2D$, los primeros miembros serán nulos, y tendremos otras dos relaciones

$$\overline{\varphi}(\overline{\mu}, \overline{P}, C) = 0 \dots \dots \dots (46)$$

$$\overline{\psi}(\overline{\mu}, \overline{P}, C') = 0, \dots \dots \dots (47)$$

que con las ((44)) y ((45)), podremos llegar á conocer los valores de $\overline{\mu}$, \overline{P} , C y C' ; y por lo tanto, en disposicion de resolver todas las cuestiones de que nos hemos ocupado en los casos de prismas descansando simplemente sobre dos apoyos, ó empotrados por un extremo.

Para conocer $\overline{\mu}'$ y \overline{P}' —fuerzas equivalentes al encastre A S—puede adoptarse, en vez de determinarlos siguiendo el procedimiento indicado para $\overline{\mu}$, \overline{P} , otro medio mas sencillo que consiste en introducir los valores de estos últimos en las siguientes ecuaciones,

$$\overline{P} + \overline{P}' - 2P - 2pD = 0 \dots \dots \dots (48)$$

$$\overline{\mu} - \overline{\mu}' + \overline{P}' \times 2D - 2P \times l' - 2pD^2 = 0 \dots \dots (49)$$

que es permitido establecer entre todas las fuerzas que obran sobre el prisma, contando entre ellas las equivalentes á los encastres.

Pasando á ocuparnos ya del caso en que el peso $2P$ obre en el centro del prisma—refiriéndonos á la misma figura 18—obsérvese, que por la simetría de las acciones respecto de la vertical que pasa por este punto se verifica

$$\overline{\mu} = \overline{\mu}'$$

$$\overline{P} = \overline{P}'.$$

Siguiendo la marcha indicada anteriormente hallaremos la ecuacion de momentos

$$M = EY \frac{d^2 y}{dx^2} = \bar{P}x - \frac{1}{2} px^2 - \bar{\mu} \dots \dots \dots (50)$$

referida á una seccion cualquiera m .

Integrada dos veces sucesivas teniendo presente que las constantes son nulas, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EY} \left(\frac{\bar{P}x^2}{2} - \frac{1}{6} px^3 - \bar{\mu}x \right) \dots \dots \dots (51)$$

$$y = \frac{1}{EY} \left(\frac{\bar{P}x^3}{6} - \frac{1}{24} px^4 - \frac{\bar{\mu}x^2}{2} \right) \dots \dots \dots (52)$$

Como la ecuacion $2\bar{P} - 2P - 2pD = 0$ nos dá el valor de \bar{P} , para tener el de $\bar{\mu}$ basta introducir aquel en la ((51)), y hacer $x = D$, á cuya distancia corresponde

$\frac{dy}{dx} = 0$; segun esto

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} PD + \frac{1}{3} pD^2.$$

Conocidas $\bar{\mu}$ y \bar{P} , ninguna dificultad puede ofrecer la resolucion de cuantas cuestiones han sido estudiadas en los casos anteriores.

Si queremos encontrar la flecha correspondiente al centro del prisma, hágase $x = D$ en la ecuacion ((52)) y tendremos para el valor absoluto de y , que designaremos por f ,

$$f = \frac{D^3}{24EY} \left\{ pD + 2P \right\} \dots \dots \dots (53)$$

:

De la comparacion de esta ságita con la ((41)) § 35, se obtiene

$$\frac{\bar{f}}{f} = 8 \frac{P + \frac{5}{8} p D}{2P + p D},$$

de donde $\bar{f} > 4f$; resultado que patentiza el menor efecto de las cargas en los sólidos empotrados por sus extremidades, relativamente al que experimentan cuando están sobre dos simples apoyos.

La ecuacion ((50)) perteneciente á una parábola, expresa la ley que siguen los momentos de flexion del sólido que se está considerando.

El máximo valor de ellos

$$M = \frac{D}{2} \left\{ P + \frac{1}{3} p D \right\} \dots\dots\dots (54)$$

corresponde al punto medio; teóricamente aparece á la distancia $x = D + \frac{P}{p}$.

El mínimo $M = 0$ es dado por la abscisa

$$x = \frac{1}{p} \left\{ \bar{P} - \sqrt{P^2 + \frac{1}{3} p^2 D^2 + P p D} \right\} < D,$$

haciéndonos ver que á esta distancia de las secciones de encastre se hallan los dos puntos de inflexion que claramente presenta el sólido SS'.

De la inferioridad del valor ((54)) respecto del ((40)) § 35, se desprende la misma consecuencia que se ha deducido de la comparacion de las flechas \bar{f}, f .

Los esfuerzos de cizallamiento estarán representa-

dos por las ordenadas de la línea cuya ecuacion es

$$y = \bar{P} - px = \frac{dM}{dx}.$$

Si en las ecuaciones que se refieren al sólido SS' , hacemos sucesivamente $p=0$ y $P=0$, obtendremos las correspondientes á los casos particulares que indican estos supuestos; ofreciendo los momentos de flexion y los valores de las ságitas, reflexiones semejantes á las hechas repetidas veces en la presente leccion.

§ 45. Sólido horizontal empotrado por un extremo, y descansando por el otro sobre un simple apoyo.—Las pocas aplicaciones que de semejante disposicion presentan las máquinas, nos dispensan de ocuparnos de ella; y esto con tanto mas motivo, quanto que si hubiera necesidad de resolver alguna de las cuestiones tratadas antes, nada difícil debería sernos—bien penetrados de lo dicho en el § 44—hallar los valores de las tres indeterminadas que contiene el presente caso.

§ 46. Experiencias relativas á la flexion.—Numerosas han sido las verificadas: unas veces, con el objeto de comprobar la exactitud de las fórmulas obtenidas en los distintos casos estudiados; otras, para justificar las hipótesis en que nos hemos apoyado al establecer la teoría de la flexion; y muchas en fin, como observamos en la nota 2.^a § 35, para determinar los valores del *módulo de elasticidad*, correspondientes á distintos cuerpos.

Los resultados obtenidos por notables experimentadores—entre los que debemos mencionar muy especialmente

al general Morin—nada dejan que desear dentro de los límites y aun mas allá, de las cargas moderadas adoptadas en la práctica.

Los valores que se asignan al hierro colado, como los referentes á los materiales mas en uso cuando aquel y estos se someten á esfuerzos de flexion, quedan justificados, en cuanto cabe, por lo dicho en el § 33.

§ 47. **Trabajo desarrollado durante la flexion de los prismas.**—Para calcularlo se buscará la expresion del trabajo elemental correspondiente al esfuerzo que la produzca, y se integrará entre los límites que convenga.

Consideremos un prisma empotrado por uno de sus extremos y sometido á la accion de un peso P pendiente del otro. El valor general de la flecha en este caso es como sabemos,

$$f = P \frac{D^3}{3EY} \text{ de donde } P = \frac{3EY}{D^3} f;$$

y por tanto el trabajo elemental,

$$P df = \frac{3EY}{D^3} f df;$$

que integrado entre los límites f y 0 dará por resultado

$$\text{Trabajo total } T = \int_{f=0}^{f=f} \frac{3EY}{D^3} f df = \frac{3}{2} \times \frac{EY}{D^3} f^2 \dots (55)$$

Si en lugar de la accion estática de P , única tenida en cuenta, hubiere experimentado—como acontece con fre-

cuencia en la práctica—la de un peso durante el camino f , el trabajo contrareestado por el sólido sería

$$\bar{T} = P \times f = \frac{3 E Y}{D^3} f^2 = 2 T;$$

doble del desarrollado antes.

Esto conduce á una observacion análoga á la que fué consignada en el § 49, respecto á la conveniencia de limitar las cargas y evitar los choques en los materiales que no estén expuestos á ellos, por las condiciones especiales de la construccion de que formen parte.

Como se comprenderá desde luego, á esta misma conclusion hubiéramos llegado cualquiera que hubiere sido la situacion del prisma.

§ 48. Sólidos de igual resistencia.—Todo sólido de los considerados hasta aquí, sometido á la flexion, presenta en sus secciones—respecto á la intensidad de las fuerzas elásticas que se desarrollan—notables diferencias; y estas no solo aparecen al pasar de una á otra, sino que las hay dentro de ellas mismas, segun las fibras se separan mas ó menos, de las neutras ó invariables de longitud.

La teoría de los sólidos de igual resistencia, mirada en su verdadera acepcion y desde un punto el mas general y abstracto, debería proponerse y resolver el problema de determinar las dimensiones de cualquier cuerpo sometido á la accion de un número dado de fuerzas, de manera que las tensiones moleculares fueren iguales en todos sus puntos sin traspasar, bien entendido, la resistencia máxima que la materia pudiera oponer

Al limitarnos á estudiar los casos sencillos que por lo comun se presentan en la práctica—y que se refieren á prismas sometidos á la flexion por fuerzas normales á su longitud y situadas en su plano de simetría—debemos prevenir que si bien las soluciones que demos, dejan teóricamente consideradas, no poco que desear, permiten sin embargo obtener sólidos, que sin disminuir su resistencia, son mas ligeros, ventaja no despreciable en muchos casos, y mas económicos, casi siempre por la menos materia que entra en ellos.

§ 49. **Prisma horizontal descansando sobre dos apoyos y sometido á la accion de un peso en el medio, y una carga uniformemente repartida.**—La ecuacion de equilibrio correspondiente á este caso es § 32,

$$\frac{R Y}{v} = x \left\{ P + pD \right\} - \frac{1}{2} p x^2 = M, \dots\dots\dots (56)$$

y la cuestion que nos proponemos resolver queda limitada á encontrar las dimensiones trasversales en toda la longitud del sólido, de manera que el máximo valor de R sea el mismo en todas sus secciones. Los sólidos así determinados son los que impropriamente se llaman de *igual resistencia*.

La condicion de que sea constante

$$R = \frac{M v}{Y}, \dots\dots\dots (57)$$

puede ser satisfecha de varios modos, dependientes de las que se impongan á las variables Y, v; y del valor que tenga M.

Supongamos que el sólido sea de sección rectangular; si representamos por b y h respectivamente la base y altura de esta, se tendrá:

$$Y = \frac{1}{12} b h^3, \quad v = \frac{1}{2} h; \quad \text{y por tanto}$$

$$\frac{M \times \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} b h^3} = R \quad \text{ó} \quad R \times \frac{1}{6} b h^2 = M \dots \dots \quad (58)$$

Si suponemos b constante, y expresamos por y las alturas, la ecuación ((58)) ó su igual

$$y^2 = \frac{6}{bR} \left\{ x(P + pD) - \frac{1}{2} p x^2 \right\}, \dots \dots \quad (59)$$

pertenece á una elipse cuyo eje mayor es

$$2 \left(D + \frac{P}{p} \right)$$

y el prisma afectará la forma que demuestran sus dos proyecciones fig. 19 (lám. 3.^a).

Como en lugar de la variable y puede ponerse $2y'$, la nueva ecuación que resulte, de una elipse también, dará origen al sólido que se ve en la fig. 20. (*)

En el supuesto de ser h constante, la ecuación ((58)) se convertirá, representando por z la indeterminada b , en esta,

$$z = \frac{6}{R h^2} \left\{ x(P + pD) - \frac{1}{2} p x^2 \right\}, \dots \dots \quad (60)$$

que pertenece á una parábola; el prisma tomará en su

(*) El sólido, como se comprenderá desde luego, podría tener también la posición S' simétrica de S (fig. 19). Esta observación se tendrá presente en los demás casos que vayamos considerando.

consecuencia una de las formas indicadas en las figuras 21 y 22 (lám. 3.^a)

Si en las ecuaciones ((59)) y ((60)) hacemos sucesivamente $P=0$ y $p=0$, los nuevos sólidos que se obtengan no resultarán con la arista viva mm que aparece en los anteriores. En el caso de pasar la ((60)) á ser ecuacion de una recta, el prisma se proyectará horizontalmente segun un triángulo.

§ 50. **Prisma empotrado por un extremo y con un peso suspendido en el otro.**—Si al aplicar la ecuacion ((57)) al presente caso, suponemos como en el anterior que el sólido sea de seccion rectangular tendremos;

$$\frac{4}{6} R. b h^2 = P(D - x).$$

Si b es constante, la ecuacion que resulte pertenecerá á una parábola, y el sólido tomará la forma de las figuras 23 ó 24 (lám. 3.^a); y si lo fuere h , las figs. 25 y 26 responderian á la cuestion.

Si la carga, en vez de obrar al extremo libre del sólido, estuviera igualmente repartida por toda la longitud, fácil seria tambien determinar la forma de él en este supuesto. (*)

(*) Como via de ejercicio los alumnos deberán ocuparse de resolver estos y otros casos; no olvidando el de un sólido empotrado por un extremo, y sometido á la accion de un peso en el otro y una carga uniformemente repartida.

§ 51. **Sólidos cuyas secciones transversales son semejantes.**—Aunque nada difícil hubiera sido introducir en los sólidos de igual resistencia de que nos hemos ocupado anteriormente, la condición de ser entre sí semejantes las secciones normales á su longitud, lo que no habría alterado la forma esencial de ellos, nos limitaremos á considerar, por las aplicaciones que de él suele hacerse, el caso en que sean circulares.

Tomando pues el prisma empotrado por un extremo § 50, y teniendo presente que

$$Y = \frac{1}{4} \pi r^4, \quad \text{la ecuacion} \quad R = \frac{Mv}{Y}$$

aplicada á este caso particular se convertirá en

$$P(D-x) = R \cdot \frac{1}{4} \pi r^4 \times \frac{1}{r} \quad \text{ó bien}$$

$$P(D-x) = \frac{1}{4} \pi r^3;$$

que nos dice que la generatriz aS' , fig. 27 (lám. 3.^a) tiene por ecuacion una parábola cúbica. El sólido, como lo indican sus dos proyecciones, es de revolución y producido por la superficie aSS' girando al rededor de SS' . De un modo análogo se resolvería cualquier otro caso.

Observaciones. 1.^a Cuando una sola ecuacion no comprenda la longitud del sólido, para que este resulte de igual resistencia en toda ella, se calcularán las secciones transversales correspondientes á cada trozo de los que se consideren siguiendo la marcha que ya conocemos.

:

2.^a Para el cálculo de las dimensiones transversales de los *sólidos de igual resistencia* hemos prescindido, como siempre, de los esfuerzos de cizallamiento; tal omision, de escasa importancia en los de seccion constante y longitud algo considerable, no lo es en el presente caso, toda vez que algunas secciones no podrían soportar dichos esfuerzos, como se puede comprender á la simple inspeccion de las figs. 19 á 27 (lám. 3.^a).

Para salvar este inconveniente sin necesidad de complicar los cálculos, al tomar aquellos en consideracion, en la práctica se procede de esta suerte: se conserva la seccion máxima calculada, y se dá al sólido la longitud necesaria para obtener en los puntos débiles, secciones que satisfagan la relacion $\frac{P}{\Omega} = F$; siendo respectivamente ambos miembros, el esfuerzo cortante y el de seguridad al cizallamiento.

Si el prisma está sobre dos apoyos, se le dá un aumento por cada extremo, igual á la altura que haya resultado para su seccion en el centro; y si empotrado por uno de ellos, dicho aumento lo recibe únicamente por el extremo libre; esta regla práctica proporciona secciones suficientes para resistir los esfuerzos antedichos.

3.^a Cuando los sólidos son de madera, las ventajas de construirlos bajo los principios de la teoría que precede, decrecen visiblemente; pues, por efecto de la constitucion de este material, queda debilitada la resistencia que nace de la cohesion de las fibras entre sí; y además, por el escaso valor de los residuos procedentes de la labra.

§ 52. **Ságitas correspondientes á los sólidos de igual resistencia.**-Nos limitaremos á encontrar la que corresponde á un sólido de longitud D y seccion rectangular, empotrado por uno de los extremos, y bajo la accion en el otro de un peso P . Para conseguirlo procederemos como al tratar de este punto en los §§ 34, 37, 40 y 44 admitiendo, con el objeto de fijar las ideas, que b sea constante y h variable.

La ecuacion diferencial perteneciente al caso propuesto es,

$$EY \frac{d^2 y}{dx^2} = P(D-x) \text{ ó bien } \frac{RY}{v} = P(D-x); \dots (61)$$

y como $Y = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{P(D-x) \frac{1}{2} h}{R}$, de donde

$$h = \sqrt{\frac{6P(D-x)}{Rb}} \text{ y por tanto } Y = \frac{1}{12} b \left(\sqrt{\frac{6P(D-x)}{Rb}} \right)^3,$$

solo restará sustituir este valor en la ecuacion ((61)) é integrarla dos veces sucesivas.

Con arreglo á estas indicaciones se llega á la relacion

$$y = \frac{4R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} \left(x\sqrt{D} + \frac{2}{3}(D-x)^{3/2} - \frac{2}{3}D\sqrt{D} \right)$$

teniendo presente que á $x=0$, corresponde $\frac{dy}{dx} = 0$ é $y=0$.

Si hacemos $x=D$ en el valor general de y , el correspondiente á la *ságita* en el extremo libre será

$$\bar{f} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} \times D\sqrt{D}$$

Comparando esta espresion con la que se obtuvo en el § 40,

$$f' = \frac{1}{3} \frac{PD^3}{EY}$$

despues de poner por Y el valor que resulte á $\frac{1}{12} bh^3$, haciendo $x=0$ en el de h , se llega á esta relacion

$$\bar{f} = 2 f',$$

que fácilmente traduciríamos al lenguaje comun.

De un modo análogo hubiéramos encontrado el valor de la ságitas en cualquiera de los prismas considerados §§ 49-50-51. En todos ellos observaríamos que los sólidos de igual resistencia son menos rígidos que los de seccion constante, circunstancia que si bien es utilizada en determinadas construcciones—como en los dinamómetros, muelles de carruajes etc.—perjudica á otras que requieren gran estabilidad.

§ 53. **Determinacion sencilla de las ságitas, del ángulo que forma un elemento cualquiera de las elásticas y trazado aproximado de estas curvas.**—Los cálculos prólijos que por lo general son necesarios para la determinacion de las ságitas y tangentes de las *elásticas*, nos deciden á indicar otra manera de obtener sus valores fundada en sencillas consideraciones, debidas principalmente al ilustre Poncelet.

Sea AB' fig. 28 (lám. 3.^a), la fibra media antes de encorvarse de un prisma empotrado por uno de sus extremos, y AB la *elástica*, ó sea la posicion que tome aquella despues de la flexion; nos proponemos conocer CB .

A este fin trácese la *evolvente* BB' de la *elástica* y tomando de esta un elemento $ds = mm'$, tírense las tangentes $m'n'$ y mn . Como CB se compone de la suma de todas las ságitas elementales análogas á $nk, n'k', \dots$, tratemos de buscar el valor de una de estas, tal como la $n'k'$.

De la comparacion de los triángulos semejantes $nn'k', mm't$ resulta

$$k'n' = df = nn' \times \frac{dx}{ds};$$

y como $nn' = mn \cdot d\alpha$, y en vez de $mn = mB$, podemos tomar la proyeccion $qC = D - x$ cuando las flexiones son muy pequeñas—en cuyo supuesto estamos razonando—tendremos:

$$df = (D - x) d\alpha = \frac{dx}{ds} = (D - x) dx \frac{1}{\rho}, \dots \quad (62)$$

despues de introducir por $d\alpha$ su igual $\frac{ds}{\rho}$;

$$\text{pero } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EY} = \frac{P(D-x)}{EY} \quad \text{por tanto}$$

$$CB = f = \int_{x=0}^{x=D} \frac{P(D-x)^2}{EY} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{PD^3}{EY}.$$

Si se quiere obtener la ságitá en otro caso cualquiera, bastará sustituir en la expresion de df , el valor que corresponda á $\frac{1}{\rho}$ —dependiente solo de M , á igualdad de todas las demás circunstancias—é integrar dentro de límites conocidos.

Para hallar el ángulo que forma un elemento mm' de la *elástica* se tiene, refiriéndonos á la misma figura 28,

$mm' = ds = \rho d\alpha$, y como $mt = dx = ds \cos \alpha$, se obtendrá de la multiplicacion de estos dos valores

$$ds \cdot dx = \rho d\alpha \cdot ds \cos \alpha \quad \text{de donde}$$

$$\cos \alpha \cdot d\alpha = d \sin \alpha = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M}{EY} dx; \dots \quad (63)$$

y por tanto integrando despues de haber sustituido por M su valor, $P(D-x)$ en el presente caso, resulta;

$$\text{sen. } \alpha = \int \frac{P}{EY} (D-x) dx = \frac{P}{EY} \left(Dx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Si se desea conocer la inclinacion en B, tendremos,

$$\text{sen. } \alpha = \frac{1}{2} \frac{P}{EY} D^2 = \frac{3}{2} \frac{f}{D}.$$

Cuando el sólido fuere de igual resistencia, hay que cuidar de poner Y en funcion de la variable x , en las dos expresiones elementales ((62)) y ((63)) de un modo semejante á lo hecho en el § 52.

El procedimiento para el trazado de las *elásticas* consiste en determinar mediante el valor general $\rho = \frac{EY}{M}$, los *rádios de curvatura* correspondientes á distintas secciones del sólido; ir describiendo arcos de círculos que no excedan de 1.º á 2.º y por último trazar la *envolvente* de todos ellos.

Si algunos rádios fuesen tan grandes que no pudieran tomarse sobre el plano en que se haga el trazado, se apelaría á la construccion de los *ángulos de contingencia*; adaptando sucesivamente sobre los lados que resulten, magnitudes iguales á los arcos anteriores; y trazando despues la *envolvente* de ellos.

LECCION 5.^a

SUMARIO.

Prismas verticales cargados en direccion de sus ejes.—Resultados de las experiencias con prismas de hierro colado susceptibles de doblarse, á la par que se contraen, por efecto solamente de un esfuerzo de compresion.—Resultados de experiencias análogas á las anteriores con el hierro dulce.—Resultados de experiencias análogas á las anteriores con la madera.—Resistencia de los prismas al resbalamiento longitudinal de sus fibras.—Prismas inclinados sometidos á la accion de fuerzas situadas en su plano de simetria.—Prismas cuya seccion es una doble T.—Manera de aumentar la resistencia de un prisma de gran longitud.—Influencia de los choques en las máquinas.—Sólidos en movimiento.—Determinacion de las secciones trasversales de los prismas.—Momentos de inercia de las secciones mas usuales.

§ 54. **Prismas verticales cargados en direccion de sus ejes.**—Dado á conocer cuanto á nuestro propósito convenia respecto á la *flexion*, vamos á ocuparnos de la *compresion de los prismas* en el caso de doblarse, á la par que se contraen, por el solo efecto de fuerzas que obran en direccion de sus ejes.

Representemos por AB, fig. 29 (lám. 3.^a), la *fibra media* de un prisma colocado verticalmente. Si se supone fijo el extremo inferior B y que un esfuerzo N obre en aquella direccion, es evidente que todas las *rebanadas* irán transmitiéndose unas á otras, la presion que reciba la primera; en tal supuesto no es posible que la flexion se produzca. Para que este fenómeno se presente, necesaria es una nueva causa, que bien puede provenir de la falta de ho-

mogeneidad del sólido, ó de la accion momentánea de una fuerza exterior.

Sea lo que fuere, iniciada la flexion—así lo demuestran los hechos—esta tiende por lo general á ser mas y mas sensible, sin detenerse hasta la rotura del prisma por pequeño aumento que reciba el esfuerzo; á veces, aun permaneciendo este inalterable.

Admitido esto, y para precisar las ideas, consideraremos el prisma de seccion rectangular y con flexion, aunque ligerísima, en un plano vertical, habiendo girado naturalmente cada seccion al rededor de su eje respectivo de menor momento de inercia. En tal estado vamos á determinar el valor del esfuerzo N para que el sólido se mantenga en equilibrio.

Sean m y n dos secciones cualesquiera, pero contiguas. Representando por ds , ds' las distancias entre sí, antes y despues del esfuerzo N —cuya componente paralela á m puede despreciarse—y por θ el ángulo pequeñísimo que la seccion m forma, encurvado el prisma, con un plano horizontal, las ecuaciones de equilibrio para el trozo Am serán:

$$N = E_{\Omega} \frac{ds - ds'}{ds}, \dots\dots\dots (1)$$

$$E Y \frac{d^2 y}{dx^2} = N y \quad \text{ó bien}$$

$$E Y \frac{d\theta}{ds} = N y, \dots\dots\dots (2)$$

si se atiende á que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Como la curva AB dá la ecuacion

$$dy = -ds' \operatorname{sen} \theta, \dots \dots \dots (3)$$

si se combina con las ((1)) y ((2)) podemos eliminar y, s' , y obtener otra entre θ y N .

A este fin, se diferenciará la ((2)) respecto á s , sustituyendo por $\frac{dy}{ds}$ su valor deducido de las ((1)) y ((3)), con lo cual

$$EY \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -N \left(1 - \frac{N}{E\Omega} \right) \operatorname{sen} \theta;$$

de la que, multiplicada por $2d\theta$ é integrada, teniendo presente al determinar la constante que en el punto A

θ y $\frac{d\theta}{ds}$, toman los valores particulares

$$\theta = \theta_0 \text{ y } \frac{d\theta}{ds} = 0, \text{ resulta}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos. \theta - \cos. \theta_0)}} = ds \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega} \right)} \dots \dots (4)$$

Para determinar θ_0 , se integrará el segundo miembro de esta ecuacion entre los limites 0, y H altura del prisma; y el primero, entre $-\theta_0$ y $+\theta_0$. En su consecuencia

$$\int_0^H ds \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega} \right)} = H \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega} \right)}; \text{ é}$$

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos.\theta - \cos.\theta_0)}} = \int_{-\theta_0}^{+\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} \left(1 + \frac{\theta^2 + \theta_0^2}{24}\right),$$

despues de haber sustituido en lugar de $\cos.\theta$ y $\cos.\theta_0$, sus desarrollos en funcion de los arcos respectivos y haber tomado de cada uno, solamente los tres primeros términos.

Antes de hallar y definir esta última integral conviene observar, que el resultado que obtengamos es aplicable tanto al caso indicado en la fig. 29, como al de la fig. 30 en que aparece la fibra media cortando en varios puntos su primitiva direccion, y en la que los ángulos $\theta, \theta', \theta'' \dots$ son iguales entre sí.

Segun esto, si representamos por n el número de segmentos AC, CD se tendrá,

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos.\theta - \cos.\theta_0)}} = n\pi \left(1 + \frac{\theta_0^2}{46}\right), \text{ y por tanto}$$

$$n\pi \left(1 + \frac{\theta_0^2}{46}\right) = H \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega}\right)};$$

de donde

$$\theta_0^2 = 16 \left\{ -1 + \frac{H}{n\pi} \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega}\right)} \right\} \dots \quad (5)$$

ecuacion que nos proponiamos encontrar.

Todo valor de θ imaginario, indica que el prisma no es susceptible de encorvarse cualquiera que sea su altura. Si despues de admitir que tal resultado debe atribuirse á ser N insuficiente para producir la flexion,

suponemos que vaya recibiendo aumentos sucesivos hasta alcanzar uno N_0 con el que se verifique

$$-1 + \frac{H}{n\pi} \sqrt{\frac{N_0}{EY} \left(1 - \frac{N_0}{E\Omega}\right)} = 0, \text{ y por tanto } \theta_0 = 0,$$

es evidente, que á partir de este valor N_0 , los de θ_0 habrán de ser reales, teniendo la precaucion de tomar la mas pequeña de las raices, por ser la única que satisface á la cuestion, es decir

$$N_0 = \frac{4}{2} E\Omega \left\{ 1 - \sqrt{1 - Y \frac{4n^2\pi^2}{H^2\Omega}} \right\} \dots \quad (6)$$

Bajo el supuesto pues de dar al esfuerzo un valor superior á N_0 , tratemos de encontrar el de la ságita correspondiente al punto medio de los segmentos.

Para conseguirlo, sustitúyase en la ecuacion ((2)) por $\frac{d\theta}{ds}$ su valor deducido de la ((4)), y poniendo en lugar

de $\cos.\theta_0$ los dos primeros términos $1 - \frac{\theta_0^2}{2}$ de su desarrollo, introdúzcase la condicion $\theta = 0$; hecho esto, y representando por f el valor absoluto de la ságita tendremos,

$$Nf = \sqrt{EYN \left(1 - \frac{N}{E\Omega}\right)} \times \sqrt{16 \left\{ -1 + \frac{H}{n\pi} \sqrt{\frac{N}{EY} \left(1 - \frac{N}{E\Omega}\right)} \right\} \dots} \quad (7)$$

ecuacion, cuyo segundo miembro es nulo con $N = N_0$.

Si en lugar de N ponemos $N_0 + \Delta N_0$, expresando por ΔN_0 un ligero incremento, dicha ecuacion ((7)) podrá tomar la forma

$$f = \frac{\sqrt{E}}{N} K, \dots\dots\dots (8)$$

en la que K representa una cantidad esencialmente positiva.

Este valor ((8)) hace ver que N_0 debe considerarse como un límite que no es prudente traspasar, pues al mas ligero aumento, la ságitá tiende á tomar grandes proporciones por la presencia del factor $\frac{\sqrt{E}}{N}$.

No ha mucho se dijo que siempre que se verificara $N < N_0$, la flexion no era posible, cualquiera que fuese la longitud ó altura del sólido; ahora vamos á demostrar que para esta dimension tambien existen límites dentro de los cuales por grande que N sea, el prisma no puede encorvarse. En efecto, fijémonos en la expresion ((6)) y obsérvese que cuando $H < 2n\pi\sqrt{\frac{Y}{\Omega}}$, N aparece imaginario, y por consecuencia θ lo será tambien; resultado que viene á patentizar la imposibilidad de la flexion, siendo preciso para que se produzca el que se verifica que $H > 2n\pi\sqrt{\frac{Y}{\Omega}}$.

Como de hacer $H = 2n\pi\sqrt{\frac{Y}{\Omega}}$ se obtiene $\frac{N_0}{\Omega} = \frac{E}{2}$, presion enorme que aplastaria al prisma produciendo inevitablemente su rotura, deducese de aquí, que la sola

condicion $H > 2n\pi \sqrt{\frac{Y}{\Omega}}$ no es suficiente para obtener la flexion.

A vista pues de esto, y admitiendo que N tenga el mayor valor posible sin traspasar el límite de elasticidad de la materia, tratemos de determinar la máxima altura que puede darse al prisma.

Si representamos por F la carga correspondiente á dicho límite y combinamos la ecuacion $\frac{N_0}{\Omega} = F$ con la

$$\frac{N_0}{\Omega} = \frac{1}{2} E \left\{ 1 - \sqrt{1 - Y \frac{4n^2\pi^2}{H^2\Omega}} \right\},$$

se llegará al resultado

$$H = n\pi E \sqrt{\frac{Y}{\Omega(FE - F^2)}};$$

igualdad cuyo segundo miembro es la altura máxima que debe darse al prisma para que, cerca ya de la flexion, pueda resistir el esfuerzo N, sin que llegue á iniciarse y sin que quede alterada la elasticidad de la materia.

De un modo análogo se determinaría la altura del prisma en el caso de ser el esfuerzo, equivalente á la carga de seguridad de que la materia es susceptible.

Del valor de N_0 , ecuacion ((6)), se desprende que la resistencia de los prismas verticales aumenta con el número de segmentos.

Para que un prisma corte á la direccion primitiva de su fibra media, basta obligarle á que pase por apoyos convenientemente situados á uno y otro lado de él.

Si en el sólido fig. 30 suprimimos las partes $A m$, $B m'$, é imaginamos fijos los elementos verticales correspondientes á los puntos m , m' , la curva $m n m'$ permanecerá inalterable; y por tanto todo prisma vertical encastrado por sus extremos y sometido á un esfuerzo que tienda á comprimirlo en direccion de su eje tomará una disposicion semejante á la $m n m'$.

Como se puede suponer que la parte $C n D$ cuya altura es $\frac{1}{2} H$, siendo $m m' = H$, pertenece á un sólido sometido á un esfuerzo vertical N en análogas condiciones al que representa la fig. 29, todas las fórmulas encontradas anteriormente son aplicables al prisma encastrado $m n m'$, con la única diferencia de poner un $\frac{1}{2} H$ en lugar de H , quedando así probado que los *prismas verticales empotrados*, ofrecen mayor resistencia respecto de los que no lo están; deducción análoga á la que obtuvimos en los prismas horizontales.

Terminaremos la parte teórica de los prismas verticales hallando otra expresion mas sencilla para el valor de N_0 ; aunque algo menos exacta permite sin embargo formarse idea mas precisa de la resistencia de dichos prismas, circunstancia que nos la hará recordar en esta misma leccion.

Si en la ecuacion

$$-1 + \frac{H}{n \pi} \sqrt{\frac{N_0}{E Y} \left(1 - \frac{N_0}{E \Omega}\right)} = 0$$

de donde procede el valor de N_0 , se observa que el factor

subradical $\left(1 - \frac{N_0}{E\Omega}\right)$, puede ser considerado igual á la unidad, tendremos

$$-1 + \frac{H}{n\pi} \sqrt{\frac{N_0}{EY}} = 0, \text{ de donde}$$

$$N_0 = \frac{EYn^2\pi^2}{H^2} \dots\dots\dots (9)$$

§ 55. **Resultados de las experiencias con prismas de hierro colado susceptibles de doblarse, á la par que se contraen, por efecto solamente de un esfuerzo de compresion.**-De las verificadas por Mr. Hodgkinson se desprende:

1.º Los prismas de hierro colado de seccion rectangular ó circular, cuya longitud sea á lo mas igual á 5 veces el diámetro ó la menor de las dimensiones trasversales, sometidos á un esfuerzo de compresion, no se doblan para romperse; lo hacen por simple *aplastamiento*, cuando aquel llega á ser próximamente de 63 kilogramos por milímetro cuadrado.

2.º Cuando la longitud se halla comprendida entre 5 y 25 veces el diámetro, los prismas se rompen por *flexion* y *aplastamiento*.

3.º De 25 veces el diámetro en adelante, la flexion es inevitable, aun para esfuerzos muy moderados respecto de los que pueden soportar los prismas cuando se rompen solo por *aplastamiento*.

Estas deducciones encuentran en la teoría explicada, una racional justificación.

El mismo físico propone, hecha la conveniente reducción de medidas, las siguientes fórmulas que contienen los resultados de sus experiencias en esta parte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Columnas de} \\ \text{hierro colado.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{llen.}^s \text{ ó mac.}^s \text{ } P=10676 \frac{D^{3.6}}{H^{4.7}} \dots\dots (10) \\ \text{huecas.... } P=10676 \frac{D^{3.6}-D'^{3.6}}{H^{4.7}} \dots (11) \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Para alturas ó} \\ \text{longitudes} \\ \text{comprendi-} \\ \text{das entre } 25 \\ \text{y } 120 \text{ veces} \\ \text{el diámetro.} \end{array} \right\}$$

P representa en kilogramos la carga que produce la rotura.

D diámetro exterior en centímetros.

D'..... id. interior id.

H..... altura ó longitud en decímetros.

Para calcular las de menor altura Mr. Hodgkinson

dá la fórmula
$$\bar{P} = \frac{P R \Omega}{P + \frac{3}{4} R \Omega} \dots\dots\dots (12)$$

siendo

\bar{P} carga que produce la rotura.

P..... carga calculada por la fórmula ((10)) ú ((11)).

R..... resistencia del hierro colado á la compresion por centímetro cuadrado.

Ω área de la seccion de la columna en cent.^s cuad.^s.

Las cargas de seguridad, siguiendo la regla establecida, serán la sexta parte de los valores dados por las fórmulas anteriores.

Con arreglo á la teoría, los exponentes debieran haber sido fórmula ((9)), 4 y 2, en vez de 3,6 y 4,7; pero

fácil es, en parte, explicarse esta diferencia y las demás que aparecen entre las fórmulas teóricas y las empíricas, si se atiende á ser P y \bar{P} cargas de rotura para las que, alterada profundamente la elasticidad, los materiales quedan fuera de las condiciones que sirvieron de base al establecimiento de aquella.

Mr. Hodgkinson ha observado tambien:

1.º Que las columnas de bases planas y perpendiculares al eje ofrecen una resistencia 3 veces mayor que las de igual longitud y seccion, pero con los extremos convexos ó redondeados; lo que se explica fácilmente, porque en el primer caso las bases producen el efecto de un empotramiento parcial, privando á las columnas de cierta libertad para doblarse.

2.º De dos columnas de igual altura y con la misma cantidad de materia, una de seccion constante y otra con una parte mas pronunciada en el medio, afectando la forma *bombada*, la última puede llegar á ser más fuerte si bien el aumento de resistencia, que por tal disposicion alcance, no excederá de $\frac{1}{7}^a$ á $\frac{1}{8}^a$ parte de la correspondiente á la primera.

3.ª Bajo el mismo supuesto de entrar en ellas igual cantidad de materia, las columnas huecas resisten mas que las llenas y las que tienen por seccion una *cruz*; diferencia debida al mayor momento de inercia de las primeras, á igualdad de seccion, respecto al de las otras dos.

Mr. Love, ingeniero distinguido, ha encontrado otras expresiones mas sencillas, que conviene conocer, para el cálculo de las columnas macizas de hierro colado.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Columnas de} \\ \text{hierro colado.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = \frac{R_{\Omega}}{1,45 + 0,00337 \left(\frac{H}{D}\right)^2} \dots (13) \\ P = \frac{R_{\Omega}}{0,68 + 0,1 \frac{H}{D}} \dots \dots \dots (14) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Para longitudes} \\ \text{de 4 á 120} \\ \text{veces el diá-} \\ \text{metro.} \\ \\ \text{Para longitudes} \\ \text{de 5 á 30 veces} \\ \text{el diámetro.} \end{array} \right.$$

Las letras tienen la misma significacion que en las fórmulas ((10)) ((11)) ((12)); H y D, ambos están ahora expresados en centímetros.

El espesor práctico de las columnas huecas de hierro colado, es dato que depende principalmente de la mayor dificultad que presentan á medida que son mas largas, para llegar á obtener un *reparto* igual de metales.

A las columnas de 2 á 3 metros de altura, no suele dárseles menos de 12 milímetros, y á las de 6 á 8 metros, unos 25 milímetros.

§ 56. **Resultados de experiencias análogas á las anteriores con el hierro dulce.**—Nos limitaremos á dar á conocer las fórmulas de Love que resumen las ejecutadas por él con columnas macizas.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Columnas de} \\ \text{hierro dulce} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = \frac{R_{\Omega}}{1,55 + 0,0005 \left(\frac{H}{D}\right)^2} \dots (15) \\ P = \frac{R_{\Omega}}{0,85 + 0,04 \frac{H}{D}} \dots (16) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Para longitudes} \\ \text{de 40 á 180} \\ \text{veces el diá-} \\ \text{metro.} \\ \\ \text{Para longitudes} \\ \text{de 5 á 30} \\ \text{veces el dia-} \\ \text{metro.} \end{array} \right.$$

Comparados los valores que dan estas fórmulas cuando la altura de las columnas llega á tener 30 veces el diámetro, con los procedentes de las ((13)) y ((14)), aparece el notable resultado, conforme con las experiencias de

Hodgkinson, que las de hierro dulce resisten mas que las de hierro colado; lo que no ha de extrañarnos si se reflexiona, que con tales dimensiones, la flexion una vez iniciada, tiende á pronunciarse mas y mas á cada aumento de esfuerzo, por pequeño que sea, tomando por consiguiente la compresion, una parte menor en la resistencia total.

Aunque Hodgkinson y Love hayan llevado sus investigaciones hasta la *rotura* de las columnas, sin preocuparse del *límite de elasticidad*, recordaremos otra vez que cuando las cargas permanentes se subordinen á este último, el hierro dulce ofrecerá ventajas sobre el colado.

§ 57. **Resultados de experiencias análogas á las anteriores, con la madera.**—Segun Rondelet, admitiendo que tanto un *cubo* de roble como de pino, se rompan por compresion con una carga de 420 kilogramos por centímetro cuadrado, la resistencia de los *postes* construidos con estas maderas referida á la del *cubo* tomada como unidad, es como sigue.

Relacion de la altura á la mas pequeña dimension transversal. } 1 — 12 — 24 — 36 — 48 — 60 — 72

Relacion entre las resistencias. } 1 — $\frac{5}{6}$ — $\frac{4}{2}$ — $\frac{4}{3}$ — $\frac{4}{6}$ — $\frac{4}{12}$ — $\frac{4}{14}$

Cargas en kilogramos por centímetro cuadrado que producen la rotura. } 420 — 550 — 210 — 140 — 70 — 57 — 47,5

Las cargas de seguridad se obtendrán tomando la $\frac{1}{10}^a$ de estos valores.

Tambien se ha ocupado Mr. Hodgkinson de la resistencia de los *postes* de madera, y aunque sus experiencias en este punto, no hayan sido muy numerosas, ha llegado sin embargo á obtener las siguientes fórmulas, reducidas ya á unidades métricas.

$$\text{Postes de seccion rectangular. } \left\{ P = k \times \frac{b^3 h}{H^2} \right\} \begin{array}{l} \text{Para longitudes de 30} \\ \text{á 45 veces el lado} \\ \text{menor.} \end{array}$$

$$\text{Postes de seccion cuadrada. } \left\{ P = k \times \frac{b^4}{H^2} \right\} \begin{array}{l} \text{Para longitudes de 30} \\ \text{á 45 veces su lado.} \end{array}$$

b.... expresa en centímetros el lado del cuadrado, ó el menor de la seccion rectangular.

h.... lado mayor de la seccion rectangular en centímet.^s.

P y *H* tienen igual significacion que en las fórmulas ((10)) y ((11)).

El coeficiente *k* toma segun las maderas distintos valores.

Roble muy fuerte ó resistente.....	2565
Roble poco resistente.....	4800
Pino fuerte ó muy resistente.....	2142
Pino poco resistente.....	4600

Las cargas de seguridad serán, como sabemos, la $\frac{1}{10}$ parte de las de rotura.

§ 58. **Resistencia de los prismas al resbalamiento longitudinal de sus fibras.**—Las experiencias del Coronel Ruso Jourawski han hecho ver, en algunos casos, la necesidad de tener en cuenta la *resistencia al resbalamiento longitudinal* de las fibras.

Para formarse idea clara de ella fijémonos en el sólido prismático *SS'* fig. 31. (lám. 4.^a) sometido á la accion de

dos esfuerzos F paralelos á su longitud, y que—iguales entre sí é igualmente repartidos sobre cada una de las respectivas secciones a y b , mitades de la total,—tienden visiblemente á separar la parte C de la C' haciendo resbalar una sobre otra. La resistencia que oponen las fibras á esta separacion tangencial, conocida por *resistencia al resbalamiento longitudinal*, es la que nos proponemos estudiar exponiendo ligeramente su teoría.

Con este objeto nos referiremos fig. 32 (lám. 4.^a), al prisma SS' empotrado por un extremo y sometido por el otro á la accion del peso P ; A y B representan dos secciones contiguas.

Siendo $R = \frac{Mv}{Y}$ la resistencia por unidad de superficie en un punto cualquiera a de la seccion A , la que corresponda á la faja infinitamente pequeña mn será,

$$R b d v = \frac{M}{Y} b v d v$$

y de un modo análogo, para la faja homóloga $m' n'$ de la seccion B se tendrá:

$$R' b d v = \frac{M'}{Y} b v d v.$$

Restando una igualdad de otra,

$$(R' - R) b d v = \frac{M' - M}{Y} b v d v = \frac{dM}{dx} dx \times \frac{b v d v}{Y},$$

ó bien $(R' - R) b d v = P dx \frac{b v d v}{Y} \dots\dots\dots (17)$

dará el valor del esfuerzo que impele á resbalar al pe-

queño prisma que hallándose comprendido entre A y B, tiene por base $b \times dx$, y dv por altura; y su integral, entre los límites 0 y $\frac{1}{2}h$, la resultante de los que tienden á arrastrar la mitad superior de la rebanada A B. Para la inferior obtendríamos otro valor igual, pero de signo contrario.

Representando por N' el valor absoluto de uno de estos esfuerzos resultantes y poniendo por Y el correspondiente al caso en cuestion, se tendrá

$$N' = \frac{P b dx}{Y} \int_0^{\frac{1}{2}h} v dv = \frac{3}{2} \times \frac{P dx}{h}.$$

De la acción simultánea de ambos esfuerzos resulta que el pequeño prisma A B tiende á romperse por $q' q$ que indica la *capa de fibras invariables*.

Si expresamos por R'' el máximo valor que por unidad superficial puede atribuirse á la resistencia al resbalamiento longitudinal tendremos:

$$R'' b dx \underset{>}{=} \frac{3}{2} \times \frac{P dx}{h}, \quad \text{ó} \quad R'' \underset{>}{=} \frac{3}{2} \times \frac{P}{2} \dots \quad (18)$$

Como el esfuerzo T de cizallamiento es igual á P, se tendrá tambien $R'' \underset{>}{=} \frac{3}{2} \times \frac{T}{\Omega}$, resultado que sin dificultad interpretariamos.

El resbalamiento longitudinal explica la notable diferencia que se encuentra entre las cargas á que pueden someterse los sólidos SS y S'S' fig. 33 (lám. 4.^a). El segundo

está compuesto de otros dos m, n , simplemente *yustapuestos*, y cada uno, mitad del primero.

En efecto, para el SS resulta:

$$P \times D = \frac{RY}{v} = \frac{Rbh^2}{6}, \text{ de donde } P = \frac{Rbh^2}{6D};$$

y para el SS'.. $P \times D = 2 \frac{RY}{v} = \frac{Rbh^2}{12}$, y por tanto $P' = \frac{Rbh^2}{12D}$.

De la comparacion de ambos valores se deduce, $P = 2P'$.

§ 59. Resultados de las experiencias sobre el resbalamiento longitudinal de las fibras.

Privados de sus indicaciones para la mayor parte de los materiales, nos limitaremos á consignar los resultados obtenidos por MM. Chevandier y Wertheim con algunas maderas, y á considerar como iguales entre sí, en el hierro colado y dulce, y metales mas comunmente empleados en las construcciones, las resistencias á los resbalamientos longitudinal y trasversal.

TABLA NÚM. 4.

MADERAS.	Coficiente ó módulo de elasticidad al resbalamiento longitudinal de las fibras.	Carga de rotura.	Carga de seguridad.
	<i>Kilógramos por metro cuadrado.</i>	<i>Kilógramos por centímetro cuadrado.</i>	
Roble	$0,1298 \times 10^9$	40,6	4,06
Pino	$0,0341 \times 10^9$	29,7	2,97
Olmo	$0,0634 \times 10^9$	36,6	3,66

§ 60. **Prismas inclinados sometidos á la accion de fuerzas situadas en su plano de simetria.**—Sea SS' fig. 34 (lám. 4.^a) un prisma inclinado, empotrado por uno de sus extremos, y sometido á la accion de las fuerzas F, F', \dots y á la de una carga uniformemente repartida.

Como cada fuerza puede descomponerse en una normal y otra paralela á la longitud del prisma, ninguna dificultad ofrecerá el hallar las ecuaciones de equilibrio y resolver cuantas cuestiones han sido estudiadas en el § 39; pudiendo decirse esto mismo respecto de otro prisma cualquiera, que estando inclinado, sea comparable á uno de los considerados en la leccion 4.^a

§ 64. **Prismas cuya seccion afecta la forma de doble T.**—Los sólidos, que teniendo por seccion una doble T, están dispuestos de modo que puedan agruparse entre los llamados de *igual resistencia*, vienen á constituir un paso mas hácia la verdadera solucion del problema enunciado en el § 48.

En efecto, fijándonos en el valor formular $R = \frac{M v}{Y}$

y en la fig. 35 (lám. 4.^a), si fuera posible que la materia de cada rebanada AB del prisma se reuniese ó condensara en los *brazos* a y b , hasta el extremo de ser despreciable la del *alma ó nervio* c , no hay duda alguna que semejante disposicion sería preferible—en concepto de diferir menos entre sí las resistencias de todos sus elementos—á la de una rebanada de seccion rectangular, pero cuya altura y cantidad de materia fuesen iguales á las de AB . El

ideal teórico se alcanzaría, cuando á la circunstancia de ser nulo el espesor de la parte *c*, fuera infinitamente pequeño el de los brazos *a* y *b*.

Las piezas prismáticas ó vigas análogas á la indicada fig. 35, suelen tener frecuente aplicacion á cierto género de máquinas y determinadas construcciones.

Se hacen por lo general de hierro dulce ó colado. Las construidas con aquel casi siempre son de seccion constante, quedando reservada ordinariamente para el hierro colado la forma de los sólidos de igual resistencia.

Las ventajas que la doble T ofrece, aun en el primer caso, se derivan del mismo valor $R = \frac{Mv}{Y}$, tanto menor, cuanto mayor Y. De aquí la conveniencia de alejar los brazos de la capa de fibras invariables, y disminuir el espesor de ellos á expensas de su ancho.

La seccion doble T ha sido objeto de serias experiencias encaminadas á fijar la importancia de repartir desigualmente la materia, en las vigas de hierro colado, teniendo en cuenta su resistencia á la extension y á la compresion. Sobre este punto ya hemos manifestado las opiniones que prevalecen.

§ 62. **Manera de aumentar la resistencia de un prisma de gran longitud.**—La necesidad de emplear en máquinas determinadas—como en las conocidas por *gruas transversales* de frecuente uso en algunos establecimientos del cuerpo—vigas de extraordinaria longitud, nos lleva á considerar la manera de darles mayor resistencia sin aumentar sus dimensiones; adoptando á

este fin una marcha que, á la par de sencilla satisfaga cumplidamente las exigencias de la práctica y pueda servir de guía en otros casos mas complicados.

Sea fig. 36 (lám. 4.^a) SS' la viga en cuestion; m, m' dos tirantes simétricamente situados respecto de la pequeña columna vertical n , sosten ó apoyo de aquella en su parte media.

Prescindiendo del peso de m, n y m' , y del rozamiento de las articulaciones que existen en los puntos a, b, A, B , de escasa influencia práctica uno y otro, supongamos que la viga está sometida á la accion de una carga $2pD$ uniformemente repartida, y de otra $2P$ que puede obrar en un punto cualquiera de su longitud.

Representemos por T , la *tension* de cada uno de los tirantes, y bajo el supuesto de que el peso $2P$ actúa en el centro, posicion la mas desfavorable, vamos á determinar el valor que debe tener aquella para que el prisma ó viga SS' padezca lo menos posible.

La ecuacion de momentos referida á la seccion del centro del prisma es

$$M = \frac{RY}{v} = PD + \frac{1}{2} pD^2 - T \times \frac{hD}{l}, \dots \quad (19)$$

de la que se deduce haciendo $M = 0$

$$T = \frac{l}{2h} \left\{ 2P + pD \right\};$$

con cuyo valor el punto a no abandonará la recta AB , situacion la mas conveniente á la resistencia de la viga en el supuesto de obrar en el medio el peso $2P$. Pero á medida que este se aproxima á uno de los extremos, el tér-

mino $P D$ de la ecuacion ((19)), decrece sin detenerse hasta llegar á ser nulo cuando $2 P$ obra directamente sobre la seccion que pasa por A ó B . En este supuesto, aquella se convierte en

$$\frac{R Y}{v} = \frac{1}{2} p D^2 - T \frac{h D}{l},$$

ó bien introduciendo el valor de T , en

$$\frac{R Y}{v} = - P D;$$

resultado que nos hace ver que la viga se encorvará en sentido contrario, siendo $-P D$ el momento de flexion.

Segun esto, la tension mas conveniente de los tirantes será la que dé lugar á dos flexiones iguales entre si y de sentido contrario; una, producida hallándose el peso en el centro; y la otra, cuando se encuentre en uno de los extremos. Para determinar el valor de dicha tension bastará hacer

$$M = P D + \frac{1}{2} p D^2 - T h \frac{D}{l} = \frac{1}{2} P D, \text{ de donde}$$

$$T = \frac{l}{2 h} (p D + P).$$

Cuando prepondere la accion de los tirantes, es decir cuando el peso $2 P$ se halle sobre el extremo B , entonces la ecuacion de momentos referida como la anterior al cèntró del prisma será

$$M = \frac{1}{2} p D^2 - \frac{T h D}{l} = - \frac{1}{2} P D.$$

Las dimensiones de la viga SS' se determinarán pues, mediante la ecuacion

$$\frac{1}{2} PD = \frac{RY}{v}, \text{ de donde}$$

$$R = \frac{PvD}{2Y},$$

y teniendo en cuenta al propio tiempo el valor de la componente horizontal $T \times \frac{D}{l}$.

Las de los tirantes, si son de hierro dulce, por la ecuación $\frac{T}{\Omega} = 6 \text{ k.}^s$; y las del apoyo n por la $2T \frac{h}{l\Omega} = 10,5 \text{ k.}^s$ en el caso de ser de hierro colado. Si la altura de dicho apoyo fuera grande de modo que hubiera temor á flexión, se recurriría á la fórmula correspondiente de Love ó de Hodgkinson.

Ω y Ω' expresan las secciones respectivas de estas últimas partes.

§ 63. **Influencia de los choques en las máquinas.**—En la primera parte de este curso se vió ya la influencia nociva de los choques en las máquinas; pues á consecuencia de la pérdida de trabajo inherente á ellos queda, digimos, mas ó menos alterada la constitucion molecular de las partes chocadas, y se destruye su buen ajuste exigiendo naturalmente mayores proporciones si se quiere evitar un deterioro prematuro.

Aunque en el § 19, guiados por otro género de consideraciones hemos podido entrever tambien sus inconvenientes, vamos ahora—utilizando una de las fórmulas encontradas entonces—si posible es, á ponerlos mas de relieve.

Con tal objeto recordemos, que de la ecuacion

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2} \times \frac{g}{l} x^2, \text{ obtuvimos } v^2 = \frac{g}{l}(l^2 - x^2),$$

en el supuesto de ser colocado el cuerpo sin velocidad al extremo de la varilla prismática AB fig. 4.^a (lám. 1.^a).

Representemos fig. 37, (lám. 4.^a) por P' y P dos pesos, é imagínese que el segundo cayendo de la altura h choque contra el primero; la varilla sin peso sensible. Si suponemos que P' no se ponga en movimiento en tanto P no termine su accion sobre él, y los consideramos como cuerpos no elásticos, es evidente que la velocidad inicial de los dos reunidos será designándola por v' ,

$$v' = \frac{P}{P' + P} \sqrt{2gh}, \dots\dots (20)$$

y por tanto $v^2 - v'^2 = gl - \frac{g}{l} x^2;$

ecuacion, en la que l representa el alargamiento estático debido al esfuerzo $(P + P')$; haciendo en ella $v = 0$, tendremos para valores de las abscisas-límites de la trayectoria rectilínea descrita por $P + P'$

$$x = \pm \sqrt{l^2 + \frac{l}{g} v'^2};$$

en su consecuencia

$$l' = l + \sqrt{l^2 + \frac{l}{g} v'^2} = BB', \text{ ó bien}$$

$$l' = \frac{P + P'}{E\Omega} L + \sqrt{\frac{(P + P')^2 L^2}{E^2 \Omega^2} + \frac{P^2}{P + P'} \times \frac{2Lh}{E\Omega}}, \quad (21)$$

despues de introducir por v' y l sus valores respectivos, será el alargamiento máximo de la varilla A B.

Para que aparezca mas sensible la diferencia entre este alargamiento y el estático, hagamos aplicacion á un caso particular dando á las cantidades que entran en la expresion ((21)) los siguientes valores;

$$P = P' = 20 \text{ kilogramos}$$

$$L = \dots 1 \text{ metro}$$

$$h = \dots 0,^m 1$$

$$E = 20 \times 10^9 \text{ kilogramos, suponiendo que la varilla sea de hierro dulce.}$$

$$\Omega = \dots 10 \text{ milímetros cuadrados.}$$

Verificadas las operaciones se obtiene proximamente $l' = 17.l$, resultado que patentiza la enorme diferencia entre las acciones estáticas y dinámicas, y la conveniencia de evitar los choques en cuanto sea posible.

La expresion ((21)) hace ver tambien lo ventajoso que es en ocasiones determinadas y dentro de ciertos límites, el aumentar la carga permanente de los sólidos que hayan de estar expuestos á choques.

El siguiente ejemplo, que trae Poncelet en su mecánica industrial (2.^a edicion pág. 164) es muy á propósito para hacer comprender la gran influencia de ellos.

Sea a b fig. 38 (lám. 4.^a) un *cubo* de materia muy dura y resistente, y con peso de 300 kilogramos. Imaginemos que cayendo al suelo desde 4.^m 30 de altura, penetra por

su cara inferior 2 centímetros; si prescindimos de las vibraciones y de cualquiera deformacion extraña á dicho efecto, es evidente, que este será debido al trabajo

$$300^k \times 1,^m 3 + 300^k \times 0,^m 02 = 396.^kms$$

desarrollado por el *cubo* durante su caída.

Si este trabajo tuviera que producirlo la sola y lenta accion de un peso P colocado sobre el terreno, se tendría

$$P^k \times 0,^m 02 = 396.^kms, \text{ de donde } P = 19800.^ks;$$

lo que nos dice, que el efecto obtenido en el ejemplo propuesto por el choque de una masa determinada, es equivalente al de un esfuerzo 66 veces mayor que el peso correspondiente á ella.

Al principio del § 63 digimos, que á consecuencia de la pérdida de fuerza viva ocasionada por los choques, quedaba mas ó menos alterada la constitucion molecular de las partes chocadas. Este efecto, variable con la naturaleza de los cuerpos, se presenta muy visible en concepto de muchos, en los ejes de carruages; pues hechos de hierro dulce de fibra larga y sedosa, se ha observado que esta se va rompiendo con las vibraciones hasta llegar á tomar el aspecto de un *hierro de grano*. (*)

Aunque el buen ajuste de las piezas que constituyen

(*) Esta observacion se ha de tener muy presente, no solo para la mas acertada eleccion de los *hierros bastos* con que se haya de construir toda pieza de hierro expuesta á continuados choques, sino tambien para procurar que las operaciones á que se vaya sometiendo aquella primera materia, sean las mas convenientes al resultado que se apetece.

las máquinas evita los choques, ó atenúa al menos sus efectos, sin embargo para el cálculo de las dimensiones de todo órgano en movimiento, faltos de experiencias, adoptaremos la regla de que la carga sea á lo mas igual á $\frac{1}{4}$ de la que corresponde al límite de elasticidad. En muchos casos, semejante relacion se tendrá todavía por excesiva.

§ 64. **Sólidos en movimiento.**-Cuando un sólido no tiene movimiento, ó que de tenerlo, es moderado, las ecuaciones de equilibrio entre las fuerzas dadas y las moleculares se establecen como queda dicho en las páginas anteriores al ocuparnos de este punto; pero si aquel forma parte de un órgano, ó es el órgano mismo, cuya velocidad sea considerable, no puede prescindirse en tal supuesto de las *fuerzas de inercia* que tan violentas reacciones provoca, particularmente si, como acontece en casos dados, ellas vienen á constituir los principales esfuerzos á que ha de oponerse la materia.

Así pues, para la determinacion de las reacciones interiores de un sólido prismático en movimiento, y por tanto para el cálculo de sus dimensiones, hay que contar con las *fuerzas reales* que lo solicitan y con las de *inercia*, procediendo en todo lo demás como si aquel estuviera inmóvil.

§ 65. **Determinacion de las secciones transversales de los prismas.**-Bajo este epígrafe vamos á hacer un ligerísimo resumen del modo de calcular las dimensiones transversales de un sólido, indicando mas concretamente, que lo hemos hecho en las lecciones pre-

cedentes, la marcha para los casos en que se desee obtener mayor grado de exactitud.

Los sólidos pueden estar sometidos á uno solo de los esfuerzos denominados *simples*, ó bien, á dos ó mas de estos obrando simultáneamente: si lo primero, recurriremos á la fórmula correspondiente al esfuerzo de que se trate; y si lo segundo, el principio relativo á la independencia de efectos (§ 14) nos traza el camino que hemos de seguir.

Con arreglo á la clasificacion hecha de los *esfuerzos simples*, las reacciones ó fuerzas elásticas producidas por ellos serán perpendiculares entre sí, ó conservarán la misma direccion, siendo fácil adivinar en que casos ocurrirá lo primero y en cuales lo segundo.

De conformidad con todo esto, si un sólido se halla expuesto á una *torsion* y *extension* simultáneas, el mayor valor que pueden tener las *tensiones* respectivas R' , R'' , se subordinará á que el de la total R , dado por la ecuacion

$$R = \sqrt{R'^2 + R''^2}, \dots\dots\dots (22)$$

quede comprendido entre los *valores máximos* asignados á R' y R'' , en el caso de obrar sobre el prisma uno solo de los esfuerzos correspondientes. Por lo comun, R se hace igual al mayor de los dos, de R' ó R'' .

Si el sólido estuviese además sometido á un esfuerzo de *flexion simple*, la reaccion provocada por este se agregaría á R'' , y así modificado su valor, aplicaríamos de un modo análogo la fórmula ((22)).

Y por último, si tambien tuviere que soportar un es-

fuerzo de cizallamiento, la tension nacida de él vendría á reforzar en toda su intensidad el valor de R' .

Despues de esto, bueno será repetir que en la práctica se procede ordinariamente de otro modo mas sencillo. Conocida la seccion peligrosa solo se tiene en cuenta, cuando los esfuerzos son perpendiculares entre sí, el mayor de ellos en el concepto de producir reacciones mas intensas; y si obran en la misma direccion se suman, aunque no pocas veces, como sea de pequeña importancia, se prescinde tambien del menor en este caso.

Expuesta en el § 58 la teoría *de la resistencia al resbalamiento longitudinal de las fibras*, para concluir con estas indicaciones generales añadiremos, que al calcular las dimensiones de los sólidos no debe prescindirse de ella, especialmente en dos casos: cuando son de madera por la inferioridad dedicha resistencia respecto de las demás que hemos considerado en este material; y cuando, por la forma particular de ellos, resulta debilitada alguna de sus secciones longitudinales y paralelas á la capa de fibras neutras, como se observa en las vigas de doble T y sólidos cuyo trazado está subordinado al mismo principio que estas.

§ 66. **Momentos de inercia de las secciones mas usuales.**—El uso frecuente de los *momentos de inercia* en la resolucion de los problemas relativos á la *teoría de la resistencia de materiales*, nos decide á reunir los valores formulars de las secciones mas comunmente adoptadas para los sólidos prismáticos.

Mientras otra cosa en contrario no se prevenga, los

momentos de inercia se refieren á las líneas ó ejes, que pasando por los centros de gravedad de las secciones representan la interseccion de la capa de fibras neutras con el plano de la figura, en el supuesto de confundirse el de flexion y el de simetría.

§ 67. **El de un rectángulo fig. 39 (lám. 4.^a) respecto de las líneas $mn, m'n'$ y con relacion á su centro C.**

$$\text{Respecto á } mn.. Y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} v^2 \times b dv = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \Omega h^2.. (1)$$

$$\text{Id.... } m'n'..... Y = \frac{1}{12} b h^3 + \Omega K^2 (2)$$

$$\text{Id. al centro C.. } Y = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} \Omega D^2.. (3)$$

Si en estos valores se hace $b=h$, obtendremos los correspondientes al caso particular de ser la seccion un cuadrado.

$$\text{Respecto á } mn..... Y = \frac{1}{12} b^4 = \frac{1}{12} \Omega b^2..... (4)$$

$$\text{Id..... } m'n'..... Y = \frac{1}{12} b^4 + \Omega K^2..... (5)$$

$$\text{Id..... á su centro C... } Y = \frac{1}{6} b^4 = \frac{1}{6} \Omega b^2 (6)$$

§ 68. El de las secciones fig. 40, 41, 42, (lám. 4.^a) y 43, 44, (lám. 5.^a) compuestas de partes rectangulares.

Superficie comprendida entre dos rectángulos concéntricos y con sus lados paralelos entre sí.
$$Y = \frac{1}{12} \{ bh^3 - b'h'^3 \} \dots\dots\dots (7)$$

Sección de forma de doble T con dos ejes de simetría.
$$Y = \frac{1}{12} \{ bh^3 - 2b'h'^3 \} \dots\dots\dots (8)$$

Sección de forma de doble T con dos ejes de simetría y refuerzos angulares.
$$Y = \frac{1}{12} \{ bh^3 - 2b'h'^3 - 2b''h''^3 - 2b'''h'''^3 \} \dots\dots\dots (9)$$

Sección de forma de cruz con dos ejes de simetría.
$$Y = \frac{1}{12} \{ bh^3 + 2b'h'^3 \} \dots\dots\dots (10)$$

Sección de forma de doble T con solo un eje de simetría.
$$Y = \frac{1}{5} \{ b'y^2 - (b'-e)(y-e)^2 + b(h-y)^2 - (b-e)(h-y-e)^2 \} \dots\dots\dots (11)$$

siendo (*)
$$y = \frac{(b'-e)e'^2 + eh^2 + 2(b-e)e(h - \frac{e}{2})}{2\{(b'-e)e' + eh + (b-e)e\}}$$

§ 69. El de un triángulo y un rombo fig. 45, y 46 (lám. 5.^a)

T.º.
$$Y = \int_{-\frac{1}{2}h'}^{\frac{1}{2}h'} v^2 \cdot x dv = \int_{-\frac{1}{2}h'}^{\frac{1}{2}h'} v^2 \left\{ b' - \frac{b'}{h'}v \right\} dv = \frac{1}{36} bh^3 (12)$$

R.º.
$$Y = \int_{-\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}D} v^2 \cdot x dv = \int_{-\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}D} (D' - \frac{2D'}{D}v)v^2 dv = \frac{1}{24} \Omega D^2 (13)$$

(*) El valor de *y* puede obtenerse con suficiente exactitud dibujando á mayor escala, si necesario es, y en papel lo mas homogéneo posible, la sección dada, y despues de recortada recurrir al método práctico de colocarla sobre una arista viva. Si tuviéramos una balanza centroscópica muy sensible, tambien podría utilizarse para conocer *y*. No obstante, debemos prevenir que cuando se resuelven ejemplos numéricos, los valores de *y* é *Y* se simplifican notablemente por efecto de las muchas reducciones que se presentan.

Si el rombo se convierte en un cuadrado habrá que hacer $D=D'$, en cuyo supuesto

$$Y = \frac{1}{12} l^2 \Omega \dots \dots \dots (14)$$

§ 70. **El de un círculo respecto á uno cualquiera de sus diámetros y con relacion á su centro. El de una corona circular.**—Como los momentos de inercia respecto á todos los diámetros son iguales se tiene fig. 47 (lám. 5.^a)

$$Y = \iint v^2 . d^2 \Omega, \text{ é } Y = \iint x^2 . d^2 \Omega; \text{ y por tanto}$$

$$Y = \frac{1}{2} \iint (x^2 + v^2) d^2 \Omega = \frac{1}{2} \int_0^r 2\pi \rho d\rho . \rho^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \Omega r^2 (15)$$

Momento de inercia con } $Y = \int \rho^2 d\Omega = \frac{1}{2} \pi r^4 = \frac{1}{2} \Omega r^2 \dots (16)$
 relacion á su centro.

doble del anterior como ya se sabia.

Como una consecuencia de los valores que acabamos de deducir, se desprenden los correspondientes á una corona circular para la cual se tendrá,

$$Y = \frac{1}{4} \pi (r^4 - r'^4) = \frac{1}{4} \Omega (r^2 + r'^2) \dots \dots (17)$$

$$Y = \frac{1}{2} \pi (r^4 - r'^4) = \frac{1}{2} \Omega (r^2 + r'^2) \dots \dots (18)$$

La relacion que existe entre la superficie de un círculo de rádio a ó b , y la de una elipse cuyos ejes sean $2a$ y $2b$ nos conduce fácilmente al momento de inercia de esta última,

$$Y = \frac{1}{4} \pi b^4 \times \frac{a}{b} \dots \dots \dots (19) \text{ con relacion á } 2a$$

$$Y = \frac{1}{4} \pi a^4 \times \frac{b}{a} \dots \dots \dots (20) \quad \text{id.} \quad 2b$$

§ 71. **El de una superficie plana cualquiera.**

Sea S fig. 48 (lám. 5.^a) una superficie cualquiera á la que supondremos un plano de simetría. Para hallar su momento de inercia respecto de la linea *mn*, pase ó no por el centro de gravedad, recurriremos al conocido método de cuadraturas de Th. Simpson para las partes *abcd*, y *a'b'c'd'a'*.

Despues de dividir la altura *pq* en $2n$ partes iguales entre si, el valor aproximado del momento de inercia correspondiente á la porcion *abcd*, será

$$Y = \int_k^{k+h} x dv \times v^2 = \frac{\delta}{3} \left\{ k^2 x_0 + (k+h)^2 x_{2n} + \right. \\ \left. + 4[(k+\delta)^2 x_1 + (k+3\delta)^2 x_3 + \dots] + 2[(k+2\delta)^2 x_2 + (k+4\delta)^2 x_4 + \dots] \right\}$$

De un modo análogo procederíamos respecto de *a'b'c'd'a'*. Las partes *abb'a'a* y *d'c'c'd'd'* entran en uno de los casos recordados anteriormente.

Si la seccion dada tuviera, como indica la fig. 49 (lám. 5.^a) un hueco en su interior, habría que restar del momento de inercia de la superficie total *abca*, el perteneciente á la *a'b'c'a'*.

Inútil es prevenir que en lugar de dividir la parte *abcd* (fig. 49) en fajas horizontales, estas hubieran podido ser verticales.

LECCION 6.^a

APLICACIONES.

SUMARIO.

Observaciones preliminares.—Problemas relativos á la extension.—Problemas relativos á la compresion.—Problemas relativos á la torsion.—Problemas relativos al cizallamiento.—Problemas relativos á la flexion.—Aplicacion relativa á los prismas inclinados.—Problemas relativos á sólidos en movimiento tomando en consideracion las fuerzas de inercia.—Problemas que se proponen como via de ejercicio.

§ 72. **Observaciones preliminares.**—Como aplicacion de lo expuesto en las lecciones que preceden y con la idea de que sirva de norma, consagraremos esta última á ejemplos diversos de los principales casos que se nos pueden ofrecer en la práctica, debiendo hacer ante todo las siguientes observaciones.

1.^a En el concepto de que, con mas frecuencia que otro alguno, se habrá de ocurrir el problema de determinar las dimensiones de una máquina, órgano, ó parte de ella que haya de construirse, sobre esta cuestion recaerán por lo general las aplicaciones que proponemos.

2.^a Aunque agrupemos los problemas con arreglo á los *esfuerzos simples*, esto no será obstáculo para que nos privemos de darles mayor generalidad considerando la

accion simultánea de dos ó mas de dichos esfuerzos.

Y 3.^a A pesar de que en principio debemos conocer los principales órganos de las máquinas, algunas veces nos permitiremos ligeras explicaciones sobre ellos para facilitar la inteligencia de las cuestiones.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LA EXTENSION.

§ 73. **Calcular el diámetro de un vástago de hierro dulce para que resista un esfuerzo de traccion en sentido del eje.**—Representemos por

L.... la longitud del vástago,

D.... diámetro de id.,

P.... esfuerzo á que se ha de someter,

p.... peso de la unidad de volumen del vástago,

R.... esfuerzo de seguridad por unidad superficial correspondiente al hierro dulce.

Si el vástago tiene la posicion vertical y no se quiere prescindir de su peso, tendremos para la carga total.

$$P + \frac{D^2}{1,273} L p,$$

y de la ecuacion $P + \frac{D^2}{1,273} L p = \frac{D^2}{1,273} R$, se deducirá

el valor formular... $D = \sqrt{\frac{1,273 \cdot P}{R - Lp}}, \dots \dots \dots (1)$

ó el de cualquiera de las cantidades que entran en ella, con arreglo á los datos del problema.

En el caso particular de ser $P=0$, toma D la forma $\frac{0}{0}$; que nos indica que la resistencia del vástago es independiente del diámetro, como debe suceder.

Si en el valor $\frac{R}{p}$ que tiene L en tal supuesto, ponemos por R el correspondiente al esfuerzo de rotura, el resultado nos dirá la longitud que necesita tener el vástago para romperse por su propio peso.

El valor que en la práctica suele asignarse á R , tratándose de vástagos propiamente dichos, oscila entre 1 y 2 kilogramos por milímetro cuadrado, con lo cual no son de temer los choques, vibraciones y otras causas (*) que disminuyen su resistencia principalmente cuando la longitud es algo notable, como en los de las bombas de elevar agua, máquinas de vapor, etc.

(*) Una de las causas que mas pueden influir en la disminucion de resistencia de los vástagos sujetos á esfuerzos de traccion longitudinales, proviene de la falta de coincidencia de la resultante de estos con el eje de aquellos.

Para convencernos, sea $abcd$, fig. 30 (lám. 3.^a), la seccion de un vástago correspondiente al émbolo de una máquina de vapor; é imaginemos que el esfuerzo N á que se ha de oponer obre en direccion de la generatriz a . Si se sustituye en lugar de N una fuerza igual á sí misma obrando segun el eje o y un par cuyo momento sea Nr , tendremos para el efecto de estas dos acciones parciales (la figura solo hace ver el resultado de la accion del par)

$$N = \frac{E\Omega\delta}{\Delta} \quad \text{y} \quad Nr = \frac{E}{\Delta} \int mm' \cdot v \cdot d\Omega.$$

Si de esta última ecuacion se elimina mm' mediante los dos triángulos Hmm' , HBB' y se introduce el valor $\frac{1}{4} \pi r^4$ del momento de inercia, se tendrá

$$Nr = \frac{E\Omega\delta' r}{4\Delta}.$$

Cuando los vástagos funcionen horizontalmente y, siendo bastante largos, nada impide el que se doblen, facilmente se calcularia el aumento que exigiese D por efecto de la flexion.

§ 74. **Dado un prisma de longitud conocida sometido á una carga que no pueda alterar la elasticidad de su materia, determinar el alargamiento que experimente.**—Suponiendo que el prisma sea de seccion circular y conservando á las letras la significacion que en el problema anterior, la siguiente ecuacion nos dará á conocer lo que nos proponemos,

$$P + \frac{D^2}{4,273} Lp = \frac{D^2}{4,273} \times E \frac{l}{L}, \text{ de donde}$$

$$l \text{ (alargamiento total)} = \frac{4,273 PL + D^2 L^2 p}{D^2 E}; \dots \quad (2)$$

en cuya expresion solo resta sustituir los valores parti-

El valor de la máxima reaccion molecular corresponde evidentemente á la generatriz a , y para obtenerlo, basta sumar los efectos producidos por cada una de las acciones N y N r, de modo que

$$\frac{E\delta}{\Delta} + \frac{E\delta'}{\Delta} = \frac{N}{\Omega} + 4 \frac{N}{\Omega} = 5 \frac{N}{\Omega};$$

resultado que demuestra la notable diferencia entre las tensiones que experimenta un vástago sometido á esfuerzos de traccion longitudinales, segun la resultante coincida ó no con el eje; y como una consecuencia natural de esto, la necesidad de ir disminuyendo el valor de R á medida que aumenten las probabilidades de que suceda lo último. Así es que en las bielas, órganos que transmiten algo oblicuamente los esfuerzos, despues de calculadas las secciones extremas como queda dicho en el § 73, la correspondiente al medio recibe todavía un aumento de 0,003 á 0,004 por metro de longitud de las mismas bielas.

Las experiencias de Hodgkinson vienen á corroborar todo esto, haciendo ver que un prisma resiste mucho menos cuando se le somete á esfuerzos de traccion no dirigidos segun su eje, que en el caso de confundirse con este.

culares de las cantidades que entran en ella, no olvidando que E representa el *módulo ó coeficiente de elasticidad longitudinal* que para el hierro dulce tiene el valor 20×10^9 .

§ 75. Dado un vaso cilindrico de longitud indefinida, seccion circular y paredes delgadas respecto al diámetro, y que suponemos sometido interiormente á la constante accion de un fluido, determinar el máximo valor que esta última puede tener.—Sea fig. 54 (lám. 5.^a) el recipiente ó vaso en cuestion y tomemos de él una parte AB , cuya altura sea igual á la unidad. A este trozo AB nos referiremos en todo lo que sigue.

Desde luego se observa, que la igualdad y simetria respecto al eje oo de las acciones normales que experimentan los elementos que constituyen la superficie interior, son causa de que estos se separen ó tiendan á separarse de dicho eje permaneciendo constantemente simétricos de dos en dos. Este alejamiento simultáneo no se puede verificar sin que se alarguen ó estiendan las distintas capas concéntricas en que podemos suponer dividida la materia.

Tambien es fácil observar, que si la presion interior llegara á ser tan grande como para romper el cilindro, la rotura—contando con la homogeneidad de la materia—se habría de verificar forzosamente por cualquiera de los planos meridianos ab , cd ,...

Con arreglo á esto, el problema quedará planteado igualando entre sí la resistencia del cilindro á ser abierto

por un *meridiano*, y la suma de las componentes normales á este, debidas á las acciones interiores.

Si representamos por

p ... la *presion efectiva* por unidad de superficie, ó de otro modo, la diferencia entre la presion interior y exterior,

D diámetro interior del recipiente,

D' id. exterior id,

e espesor del recipiente,

$d\Omega$... un elemento superficial cualquiera,

R esfuerzo de seguridad por unidad superficial de la materia del recipiente,

y admitimos que durante la accion del fluido las distintas capas en que hemos supuesto dividida la materia, presentan igual resistencia á la extension, tendremos

$$\int p d\Omega \cos \alpha = \int p \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

y por tanto, $\int_{-\frac{1}{2}D}^{\frac{1}{2}D} p dx = p D = R (D' - D) = R \cdot 2e$; de

manera que $p D = 2 R e$ (3)

es la relacion que nos proponiamos encontrar y que conviene al trozo ó parte A B (*).

(*) Una sencilla consideracion basta para encontrar la resultante de las componentes normales al plano de rotura. En efecto, imaginese que $a'b'$ representa una pared muy resistente, pero de poquisimo espesor, é invariablemente unida á las del vaso cilindrico. Ahora bien, no alterándose el equilibrio por la presencia de este diafragma, la fuerza que tienda á separarlo de uno cualquiera de los dos semi-cilindros será evidentemente pD , y portanto,

$$p D = 2 R e.$$

§ 76. **Observacion.**—Como los espesores de las calderas de máquinas de vapor son por lo general pequeños (*) relativamente á su diámetro, la fórmula ((3)) puede servir para calcularlos sin gran inconveniente; no obstante, en la práctica se hace uso de otras que proporcionan un aumento de resistencia.

La adoptada por la administración francesa y comunemente por nosotros es

$$e = 1,8(n-1)D + 3^m/m, \dots\dots\dots (4)$$

(*) Cuando el espesor de un vaso cilíndrico de seccion circular sea considerable con relacion al diámetro, como sucede en los cañones de artillería—sobre todo en el *primer cuerpo*, parte que comprende la recámara ó sea la region donde se aloja la carga—no se debe, sin *fuerte coeficiente de correccion*, aplicar la fórmula ((3)) para establecer la relacion entre los esfuerzos que tiendan á abrir el recipiente por planos meridianos, y la resistencia que normalmente á estos presente la materia; resistencia que recibe, cuando se refiere á los cañones, la denominacion particular de *tangencial* así como la de *tangenciales* los esfuerzos que la provocan.

Para hacerlo ver, basta fijarse en la fig. 52 (lám. 5.^a) que representa un trozo de cañon; y observar, que si todas las capas experimentaran la misma tension por consecuencia de la presion interior, (prescindimos de la exterior por su escasa importancia) expresando por

- r el radio menor
- r' id. mayor
- Δr aumento de r debido á la presion de los gases de la polvora
- $\Delta r'$ id. de r' id.

se tendria, $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta r'}{r'}$; igualdad que para verificarse exige la condicion

$\Delta r' > \Delta r$, evidentemente absurda, pues no se concibe que el *espesor de metales* de la pieza aumente por el solo hecho de someter esta á una presion interior.

De aqui se desprende la consecuencia, que la tension de las capas vaya disminuyendo de dentro á fuera, y por tanto que la *resistencia tangencial* de los cilindros de igual diámetro interior, no sea proporcional á los espesores. La rotura, en el supuesto de *paredes gruesas* debe naturalmente iniciarse por la capa mas próxima al eje.

Si se adopta la hipótesis—tanto mas admisible cuanto mas rígidos los cuer-

en la que las letras tienen la siguiente significacion:

e espesor en milímetros de la caldera,

n presion del vapor en atmósferas,

D diámetro de la caldera en metros.

Para pasar de la fórmula ((3)) á la ((4)), basta poner la presion *p* en atmósferas; hacer *R*=2870000 kilogramos por metro cuadrado—mitad próximamente del que se ha fijado al hierro dulce en la tabla núm. 1, § 18,—y despues de despejar *e* y verificar las operaciones, añadir al re-

pos á que se aplique—de que permanezca inalterable bajo la accion, tal como se ha especificado, de un fluido cualquiera, la *seccion recta* del trozo cilindrico que se considere, *las tensiones de las capas estarán en razon inversa de los cuadrados de los rádios respectivos.*

En efecto, igualando entre si la superficie de la *seccion recta* antes y despues de experimentar los rádios de las capas extremas los aumentos Δr , $\Delta r'$, despreciando los cuadrados de estas cantidades, se llega inmediatamente á la igualdad

$$r' \Delta r' = r \Delta r \dots \text{ de donde } \frac{r}{r'} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} \dots \dots (1)$$

Si representamos por *R* y *R'* las tensiones correspondientes á las capas cuyos rádios respectivos son *r* y *r'*, se tendrá tambien

$$\frac{R'}{R} = \frac{\frac{\Delta r'}{r'}}{\frac{\Delta r}{r}} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} \times \frac{r}{r'}$$

y mediante la relacion ((1)),

$$\frac{R'}{R} = \frac{r^2}{r'^2}$$

Inútil es prevenir que en lugar de las capas extremas pudimos haber tomado otras cualesquiera, quedando por lo tanto demostrada la ley enunciada, y conocida por de Barlow.

Ahora bien, para determinar la resistencia tangencial de un tubo de paredes gruesas—las del trozo de cañon que venimos considerando—ó de otro modo,

sultado el término constante $+3^m/m$. Procediendo de esta suerte tendremos;

$$e = \frac{40333(n-1)}{5740000} \times D = 1,8(n-1)D$$

y por tanto la fórmula práctica será,

$$e = 1,8(n-1)D + 3^m/m.$$

El factor $(n-1)$ representa el número de atmósferas correspondiente á la presión absoluta del vapor dentro de la caldera, disminuido de la presión exterior.

De un modo análogo se calculan los espesores de los tubos para la conducción de aguas, cilindros de máquinas de vapor, prensas hidráulicas etc., variando en cada aplicación, con arreglo á la materia y grado de garan-

calcular el espesor que convenga darle para que pueda resistir los esfuerzos tangenciales, la ecuación que debiera establecerse siguiendo la ley anterior, sería, conservando las anotaciones conocidas y representando por x un radio cualquiera.

$$pr = \int_r^{r'} \frac{Rr^2}{x^2} dx = \frac{Rr^2}{r} - \frac{Rr^2}{r'}$$

de donde sale $r' = \frac{Rr}{R-p}$

y por tanto $e = r' - r$, conocido.

Muchos, para quienes la ley de Barlow produce un decrecimiento algo rápido en las tensiones, aceptan como buena la que hace variar á estas en razón inversa de los radios de las capas respectivas. En tal supuesto, nada más fácil que determinar el espesor de los recipientes cilíndricos de paredes gruesas.

Otra ley que se deriva de la notable teoría sobre la resistencia de los cañones debida al coronel ruso Gadolin—y que ha de ser estudiada en la parte conocida por *mecánica aplicada á la Artillería*—viene á separarse de las dos anteriores, y se halla comprendida entre ambas; aproximándose sin cesar ya á la una ya á la otra, según el espesor aumenta ó disminuye. Para los valores límites $r' = r$ y $r' = \infty$, todas tres dan idénticos resultados.

Interin la experiencia no declare cual sea la verdadera ley que rige á las tensiones de las capas que constituyen los espesores de los tubos cilíndricos sometidos á la acción de un fluido interior, no debe sorprendernos que nuevas leyes á más de las citadas, y otras que hemos omitido esencialmente empíricas, aparezcan y aun se consideren preferibles en el terreno de las aplicaciones.

tía que se desee, el valor de la carga de seguridad y la cantidad constante que se añade para responder de ciertos accidentes fortuitos.

Cuando los espesores—como acontece en alguna de las aplicaciones que acabamos de indicar—no deban ser calificados de *cortos, pequeños ó delgados*, esto constituye nuevo motivo para disminuir la carga de seguridad compensando de esta manera con el aumento que resulta para ellos la resistencia desigual, y menor de dentro á fuera, que presentan las distintas capas de que está formada la materia.

§ 77. Dado un tubo de paredes delgadas como el del problema § 75—pero cerrado por sus extremos con fondos planos—que se someta interiormente á la accion de un fluido, determinar el esfuerzo de seguridad que podrá soportar en el supuesto de resistir solo en direccion longitudinal.—Conservando las mismas anotaciones

Solo atendiendo al interés que tiene para nosotros la ley anterior hemos podido entrar en una digresion que si ligera, no es menos agra, en cierto grado, al objeto especial de las presentes lecciones.

Antes de cerrar esta nota, repetiremos, que si conveniente es, y aun necesario, el asegurarse de la resistencia de los materiales que entren en una máquina cualquiera, las piezas de artilleria lo reclaman quizás con preferencia á todas.

Ya vimos que el bronce, cuyas cualidades resistentes debieran sernos muy conocidas, presentaba la irregularidad que dejamos señalada en las observaciones de la tabla num. 1.

Tambien el *módulo de elasticidad* de este mismo cuerpo, cuyo valor se fijó en $3,2 \times 10^9$, ofrece muy serias dudas acerca de su exactitud; pues rectificado por Morin ha encontrado para él, por término medio $8,87 \times 10^9$.

Estas y otras diferencias análogas que pudieran encontrarse entre valores que deben ser iguales entre sí, justifican en parte la oportunidad de nuestra reiterada advertencia.

que en dicho problema, la ecuacion de equilibrio será,

$$p \pi \frac{D^2}{4} = R \pi \frac{D'^2 - D^2}{4}, \dots\dots\dots (5)$$

de donde
$$p = R \frac{D' - D}{D} \times \frac{D' + D}{D};$$

cuyo valor comparado con el que se desprende de la fórmula ((3)) hacer ver, que la resistencia en sentido *longitudinal* es á lo menos algo mayor del doble, que la *tangencial*. Por esta razon cuando se trata de determinar los espesores de una caldera, se hace uso de dicha fórmula ((3)), ó mas exactamente, de la ((4)) que se origina de ella. De un modo análogo se procede para calcular los de las prensas hidráulicas, cilindros de máquinas de vapor etc, debiendo añadir que al hacerlo así, se prescinde, en conformidad con lo que ya sabemos, de todas las demás resistencias que las paredes pueden oponer. (*)

§ 78. Calcular el número y diámetro de los bolones de hierro dulce necesarios para fijar el fondo ó cubierta del cilindro de una máquina de vapor.—Los cilindros de las máquinas de vapor constan principalmente; de un *cuerpo cilíndrico y*

(*) Si para los recipientes cilíndricos de paredes gruesas se admite que la resistencia en el sentido que se acaba de indicar—resistencia llamada *longitudinal* por algunos, en particular, hablando de piezas de artillería—obedece á la ley de Barlow, la ecuacion de equilibrio será

$$p \cdot \pi r^2 = \int_r^{r'} R \cdot 2\pi x dx \frac{r^2}{x^2} = R \cdot 2\pi r^2 \cdot \log. \frac{r'}{r}$$

Si hacemos $r' = 3r$ —relacion que en una pieza de artillería nos indicaría tener un diámetro ó como se dice *un calibre* de espesor—y se determinan la resistencia *longitudinal* y la *tangencial*, se encontrará que la primera es muy aproximadamente, bajo tal supuesto, triple de la segunda.

:

por lo comun de dos *platos*. Estos hacen las veces de *fondo y cubierta* y se fijan al primero por medio de pequeños *tornillos, pernos ó bolones* cuyo número y diámetro nos proponemos conocer.

Representemos por n y d respectivamente estas indeterminadas. Si admitimos que la distancia entre los centros de dos *bolones* contiguos, sea igual ó menor que una cantidad dada, el problema quedará planteado con la ecuacion de equilibrio,

$$p\pi \frac{D^2}{4} = Rn\pi \frac{d^2}{4} \dots\dots\dots (6)$$

y la de condicion $\frac{2\pi R'}{n} = kd, \dots\dots\dots (7)$

siendo

R' el rádio de la circunferencia que corta los ejes de los bolones,

k un número conocido,

p presion efectiva en el cilindro,

D diámetro del id.,

R esfuerzo de seguridad correspondiente á la materia del cilindro,

y estando p y R , ambos referidos á la misma unidad superficial.

§ 79. **Dado un vaso ó depósito esférico de paredes delgadas sometido interiormente á la accion de un fluido, calcular el mayor valor que esta puede tener en el concepto de obrar de una manera permanente.**-Por una considera-

cion análoga á la del § 75 se probaría que durante la acción del fluido y despues de ella, el recipiente, fig. 53 (lám. 3.^o) debe conservar su forma esférica.

Fácil es ver tambien que, descompuestas normal y paralelamente al círculo ab las presiones que obren sobre la zona acb , el esfuerzo total con que el trozo de corona esférica, $aa'c'b'bca$ es impulsado á separarse del centro en el sentido oc será producido únicamente por la acción de los componentes normales.

Una cosa análoga pudiera decirse respecto de cualquiera otra zona $ee'g'f'fe$; pero como la relacion entre la suma de las componentes normales y resistencia que ofrecen los respectivos trozos de corona esférica es variable, para determinar la superficie de rotura—caso de llegar á este extremo—es preciso conocer la zona en que dicha relacion adquiera el máximo valor.

Con este objeto, representemos por p la presión sobre unidad superficial; $pd^2\Omega$ será la que experimente el elemento mn , y por tanto

$$p f f d^2 \Omega \cos. \alpha = p f f d x d y = p \pi \rho^2$$

la suma de las componentes normales á la base ab , cuyo radio designamos por ρ . A este mismo resultado hubiéramos llegado aplicando el razonamiento de la nota § 75.

Si admitimos que la resistencia R de la materia del depósito sea igual en todos sentidos—hipótesis como sabemos muy admisible para los metales, en particular para los de testura cristalina—tendremos, para la que oponga el trozo de corona $aa'c'b'bca$,

se calcula en la práctica suponiendo que el esfuerzo, á que se hayan de oponer, obre por mitad sobre los dos brazos de uno cualquiera de sus eslabones; y en tal concepto la ecuacion de equilibrio es

$$F = R \times 1,5708 D^2 \dots \dots \dots (9)$$

Cuando un eslabon (fig. 54) se somete á esfuerzos de tracción suficientemente grandes, los dos brazos laterales principian por ponerse paralelos para seguir encorvándose en la disposicion (*) que demuestra la parte punteada. La consecuencia de estas variaciones sucesivas de forma, es un aumento de tension en las regiones *acb* y *a'c'b'*, las que concluyen por abrirse ó presentar grietas trasversales en los puntos C, C', si la rotura no se hubiere iniciado ya por la soldadura, lo que suele acontecer cuando esta es defectuosa.

Para contrarrestar la tendencia á la flexion, se unen los dos brazos, como demuestra la fig. 55, con otro de hierro dulce ó colado á manera de *entretoesa* que les sea perpendicular. Con semejante adicion, el hierro de los eslabones conserva la misma resistencia que el de la barra de donde procede; y cuando no existe, solo puede contarse con unas $\frac{3}{4}$ á $\frac{2}{3}$ partes de ella.

Las cargas de seguridad, si se tienen en cuenta las fuertes y violentas sacudidas, y los choques á que están

(*) Para explicarnos como se produce la flexion de los brazos laterales de los eslabones y se verifica la rotura por los puntos mas distantes de su centro, basta considerar fig. 54 una seccion cualquiera *nmn'* y despues de hacer la descomposicion que se indica, reemplazar los dos pares $(\frac{1}{2} F, -\frac{1}{2} F)$ por otros dos (Q,—Q) que les sean equivalentes y estén situados en el mismo plano.

$R\pi\rho \frac{r'^2 - r^2}{r}$, y por consecuencia

$$\frac{p\pi\rho^2}{R\pi\rho \frac{r'^2 - r^2}{r}} = \frac{p\rho r}{R(r'^2 - r^2)}$$

la relacion que buscábamos, cuyo valor máximo se obtiene con $\rho = r$.

De aquí se desprende que

$$p.\pi r^2 = R\pi (r'^2 - r^2) \quad \text{ó}$$

$$p\pi \frac{D^2}{4} = R\pi \left(\frac{D'^2 - D^2}{4} \right), \dots\dots\dots (8)$$

sea la ecuacion de equilibrio que nos dé á conocer el valor de una cualquiera de las cantidades que entran en ella.

La identidad entre esta ecuacion y la ((5)) § 77, hace ver que la resistencia de una esfera es igual á la longitudinal de un cilindro cuyos rádios interior y exterior sean respectivamente iguales á los de aquella. (*)

§ 80. **Cálculo de la resistencia de una cadena ordinaria de hierro dulce.**—La forma del eslabon de estas cadenas es ligeramente ovalada, afectando la que se indica en la fig. 54 (lám. 5.^a)

El diámetro del hierro redondo con que se construyen,

(*) El problema que acaba de ocuparnos—con otros conocimientos que se adquirirán mas adelante—permite resolver interesantes cuestiones relativas á los proyectiles esféricos huecos: como determinar la carga mínima de pólvora necesaria para romper uno cualquiera de dimensiones dadas; averiguar entre los de igual calibre y distinto radio interior el que exija para romperse la máxima carga de pólvora, etc.

expuestas las cadenas, en ningun caso deben esceder de 2 kilogramos por milímetro cuadrado (*).

§ 81. **Resistencia á la extension de las cuerdas de cáñamo.**—Ninguna dificultad puede ofrecer el encontrar la resistencia absoluta de una cuerda de cáñamo, conocida la que tenga por milímetro cuadrado. Cuando no se tenga este dato, podremos hacer uso de la siguiente fórmula empírica tomada de la mecánica de Morin

$$N = (45 - 0,25.C) C^2 \dots \dots \dots (10)$$

que dá en kilogramos el esfuerzo de rotura de una *cuerda embreada*, siendo C su circunferencia expresada en centímetros. Tambien suele emplearse otra mas sencilla, aunque menos exacta,

$$N = 35 C^2 \dots \dots \dots (11)$$

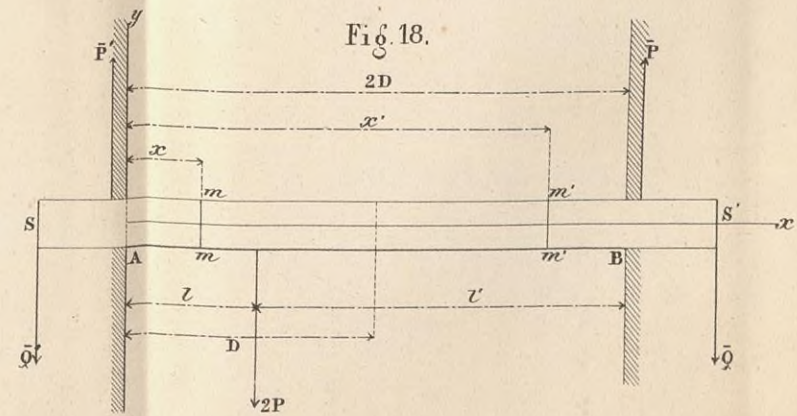
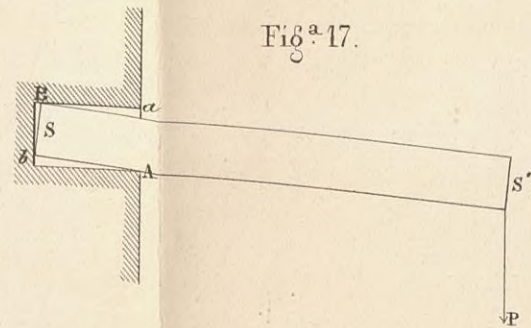
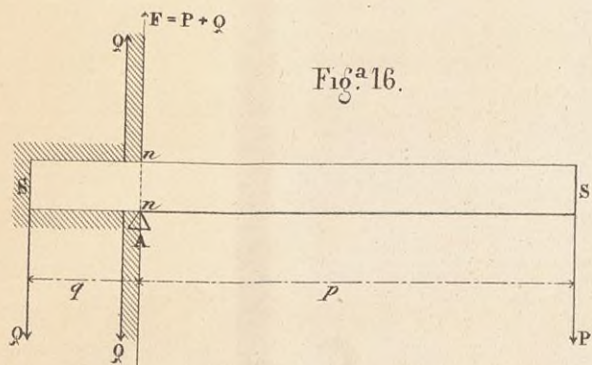
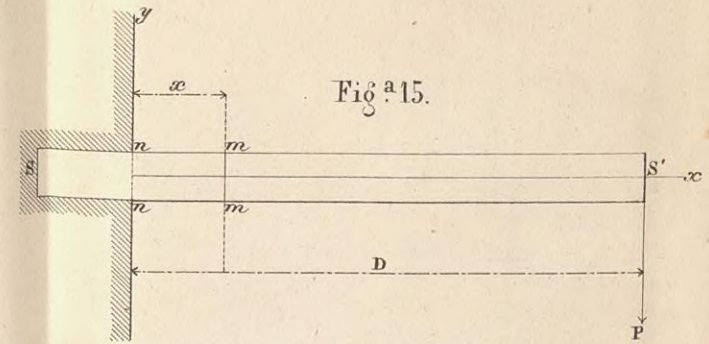
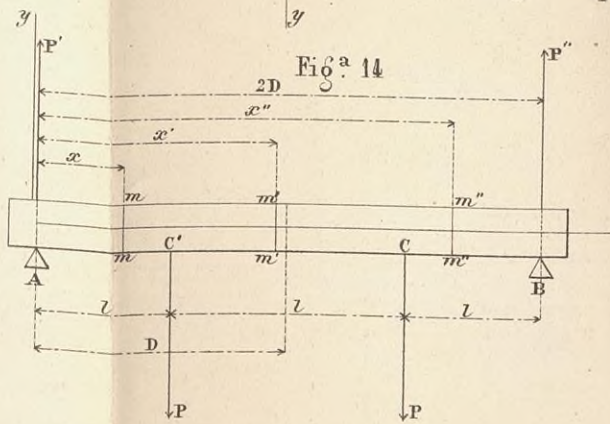
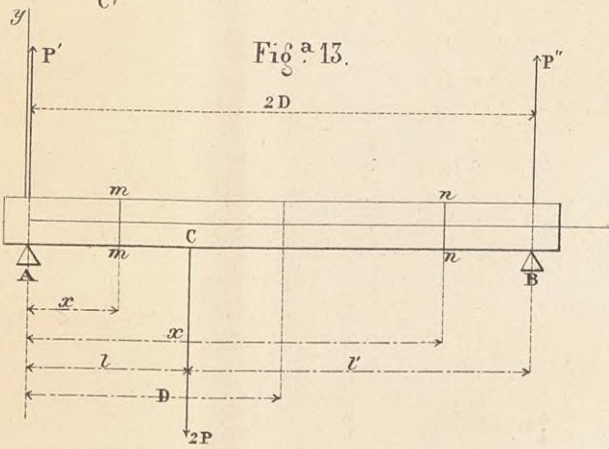
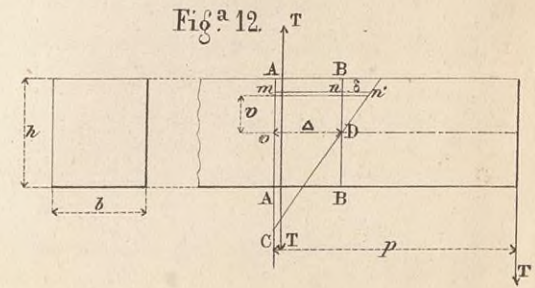
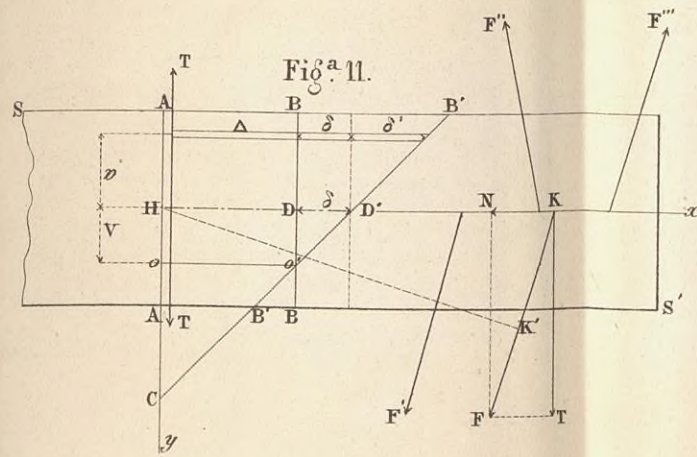
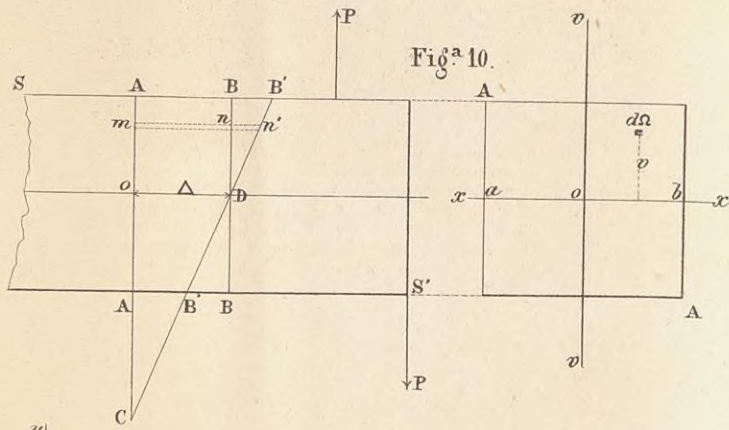
en la que C y N tienen igual significacion que en la (10).

La resistencia de una *cuerda blanca* se determina teniendo presente que guarda con la de la *embreada* de igual número de hilos *elementales* ó *simples* la relacion $\frac{3}{2}$ á $\frac{4}{3}$.

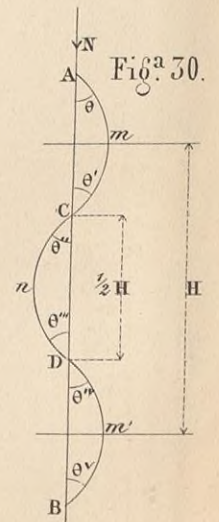
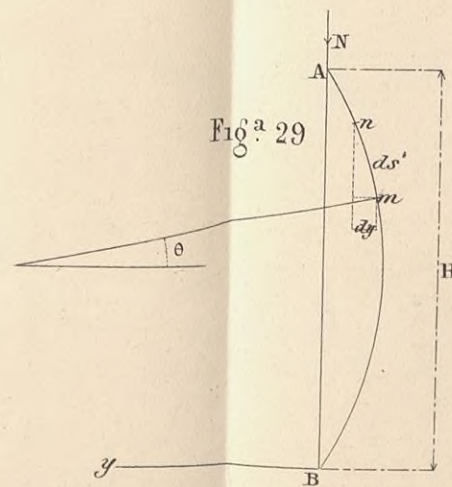
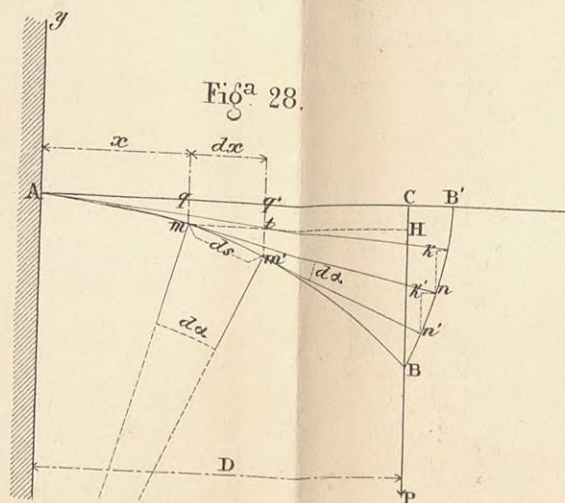
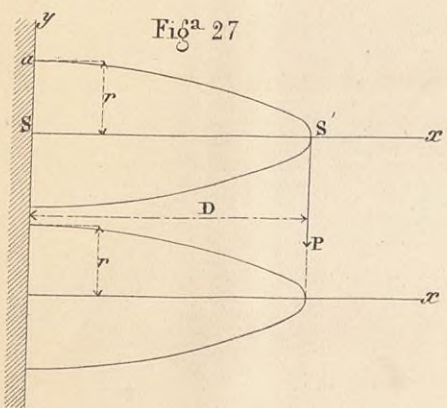
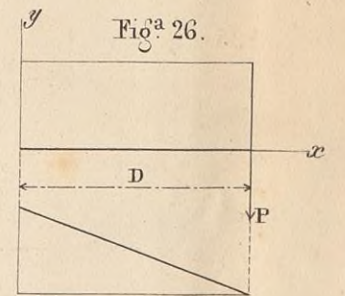
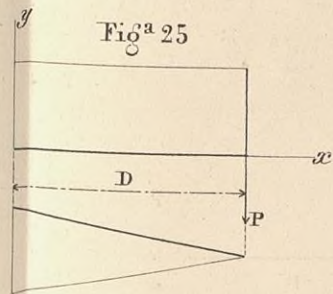
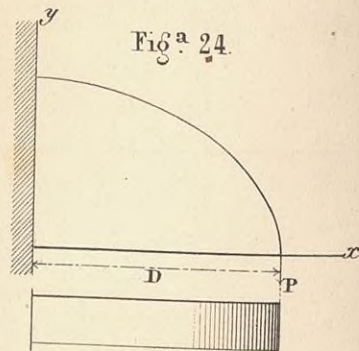
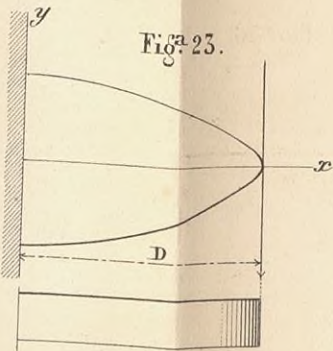
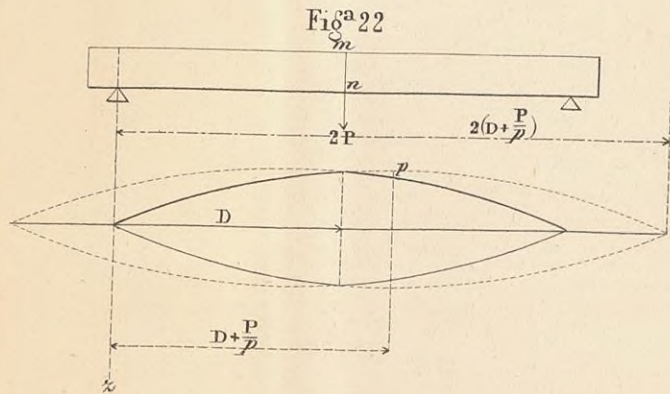
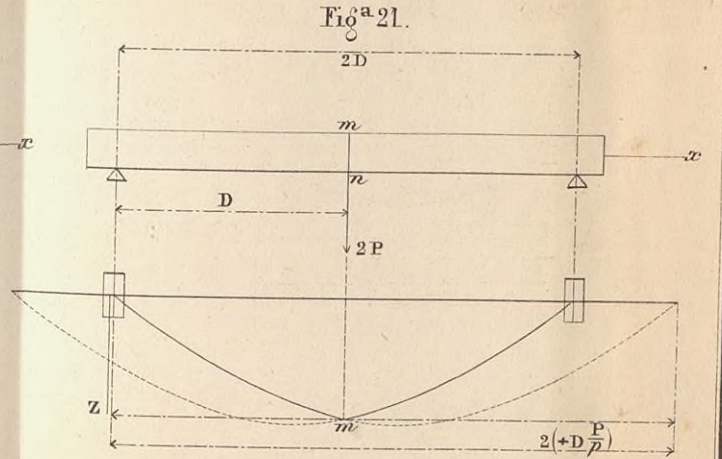
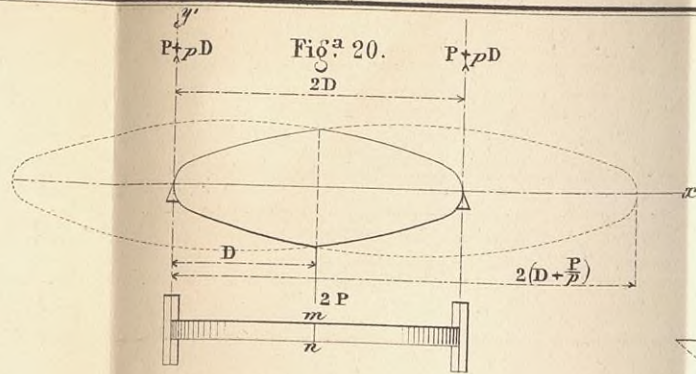
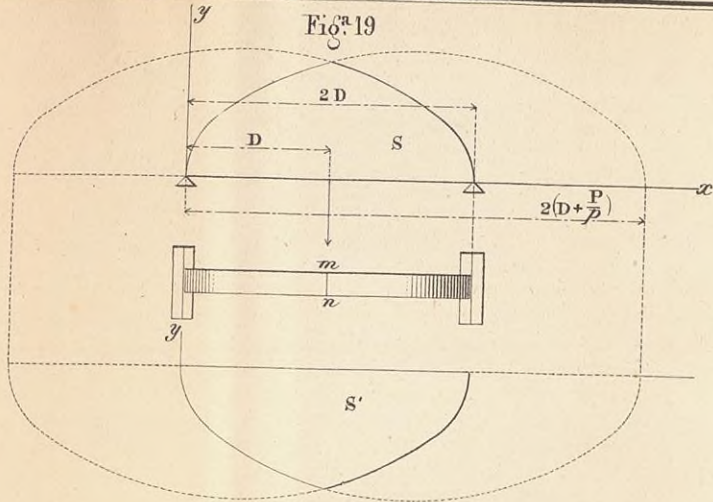
§ 82. **Observaciones.**—La humedad disminuye notablemente la resistencia de las cuerdas. Segun Duhamel el esfuerzo para romper una cuerda mojada es $\frac{1}{3}$ del necesario para romper la misma cuerda cuando está seca.

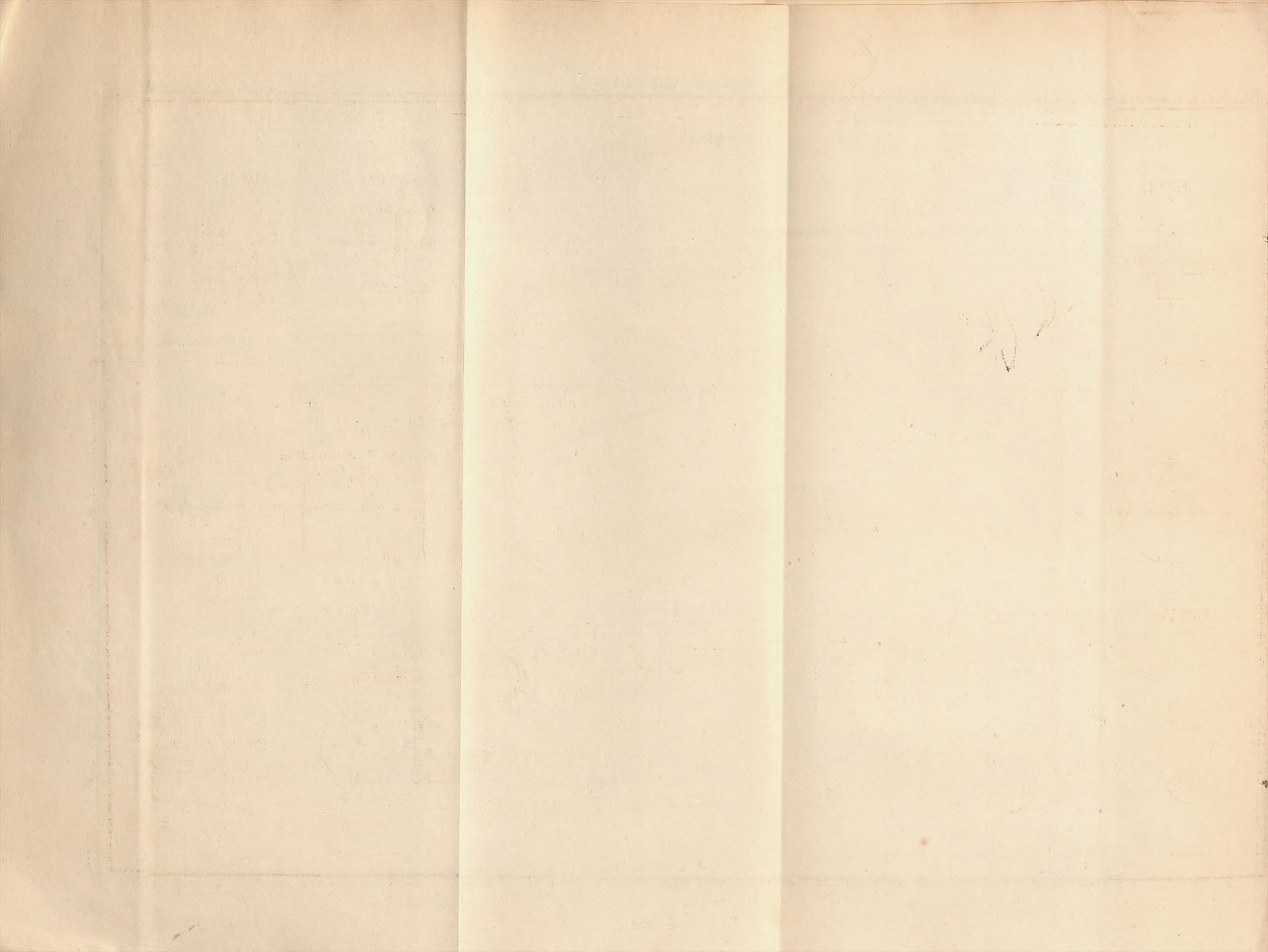
Las cargas de seguridad, como indicamos oportunamente, son mitad de las de rotura.

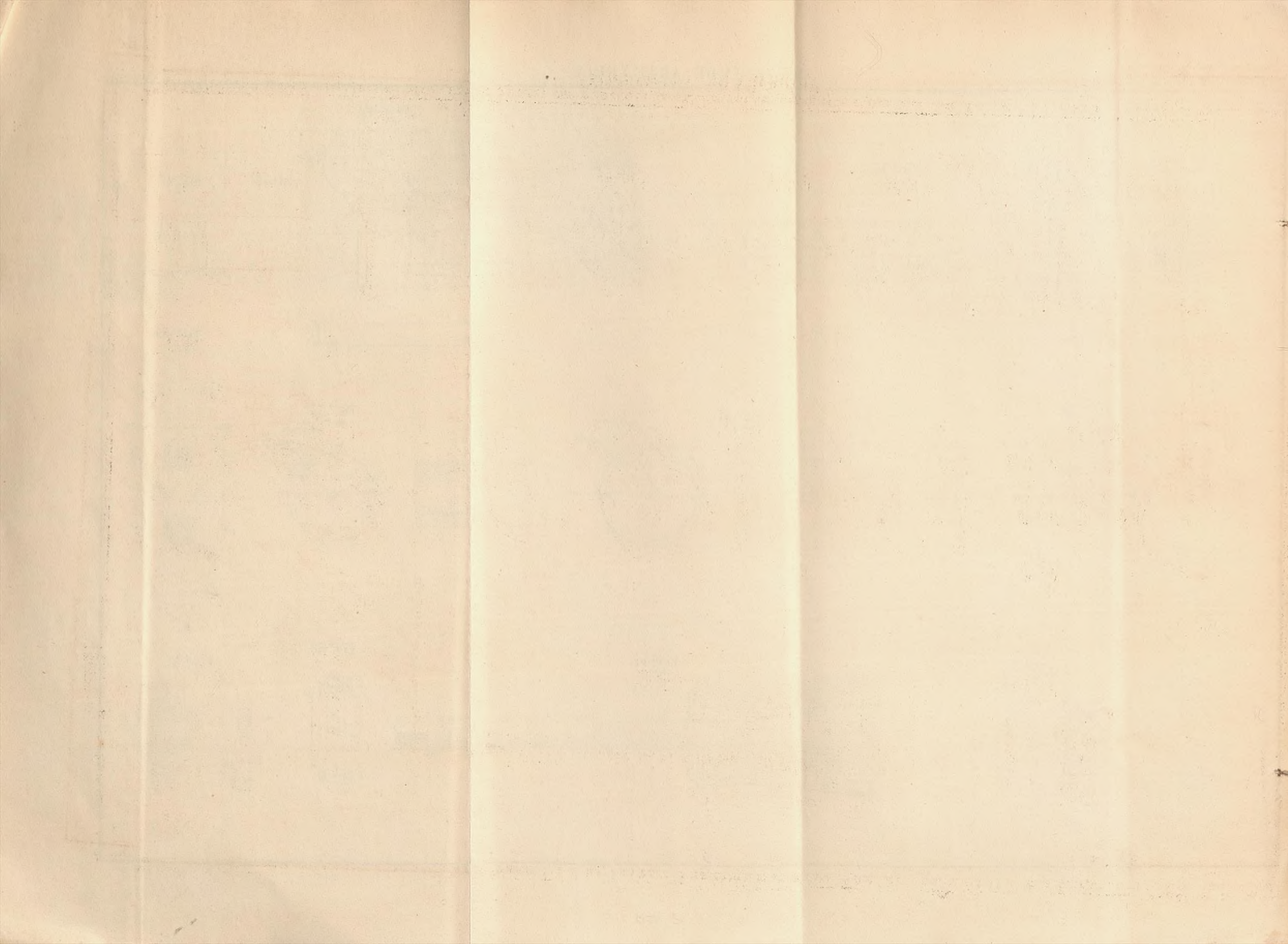
(*) Las cadenas para el servicio de la marina en Francia, se someten — como prueba que garantice su resistencia — á un esfuerzo de 17 y $1\frac{1}{2}$ kilogramos por milímetro cuadrado, segun tengan ó no los eslabones, *entretoesas* ó *estays*. Las construidas con hierro redondo de 16 milímetros ó menos de diámetro, no suelen llevar este refuerzo.











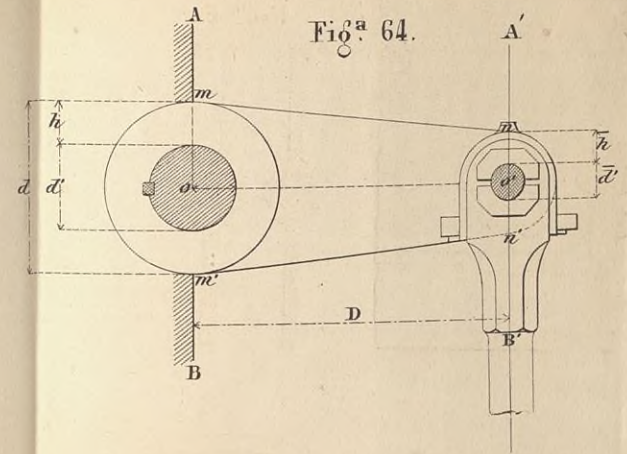
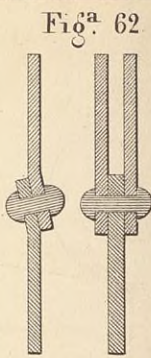
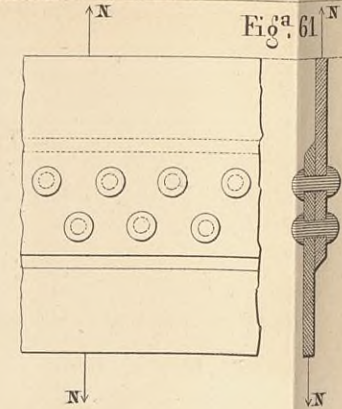
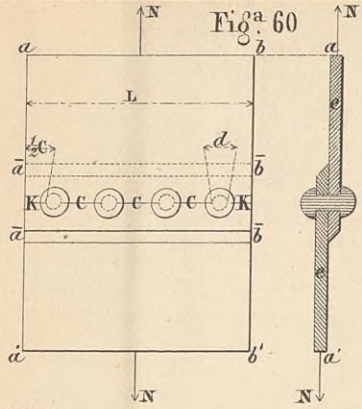


Fig. 63.

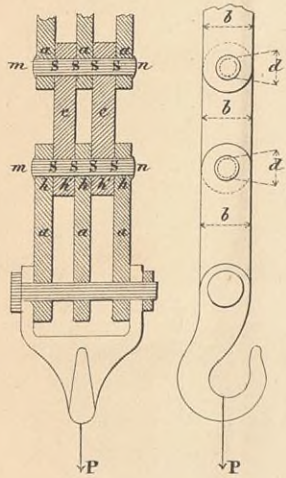


Fig. 65.

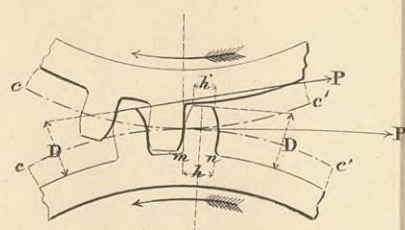


Fig. 66.

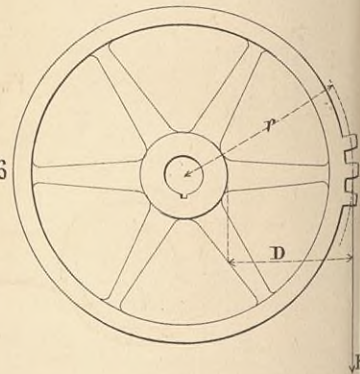


Fig. 67.

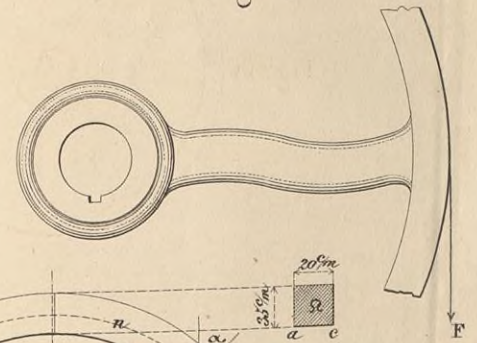


Fig. 68.

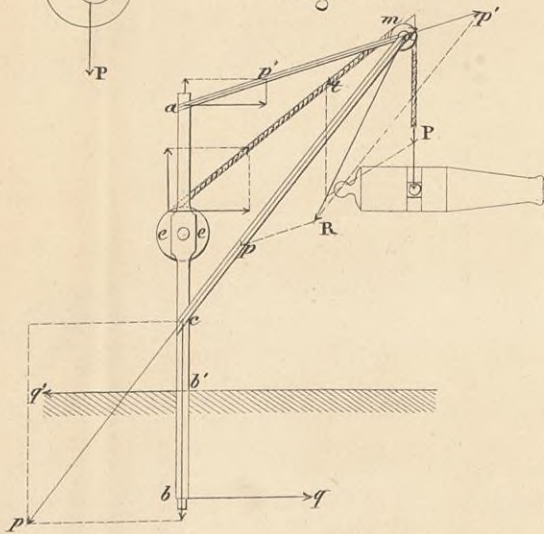


Fig. 69.

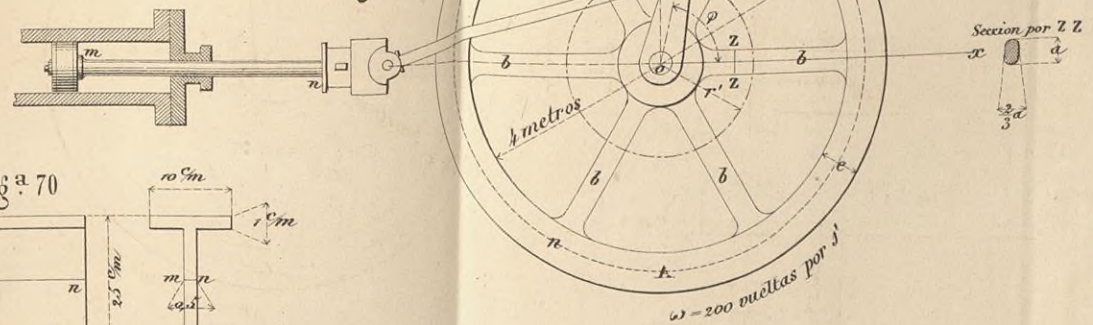
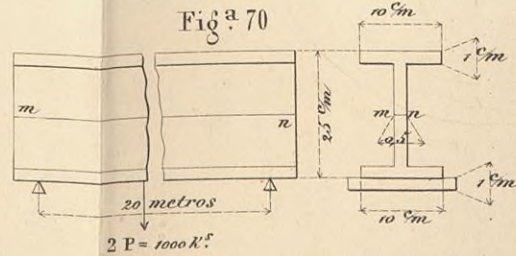


Fig. 70.



2 P = 1000 K²

