ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

D. JOAQUIN MARÍA FERNANDEZ Y CARDIN

DOCTOR EN CIENCIAS, LICENCIADO EN JURISPRUDENCIA
Y CATEDRÁTICO DE AQUELLA ASIGNATURA EN EL INSTITUTO DE SAN ISIDRO
DE MADRID.

OBRA DE TEXTO PARA SEGUNDA ENSEÑANZA.

GEOMETRÍA
Y
TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

NOVENA EDICION.

Dr. J. Cardin

MADRID: 1876.

POR D. ALEJANDRO GOMEZ FUENTENEBRO,
Impresor del expresado Instituto,
Bordadores, 10.

GEOMETRÍA.

INTRODUCCION.

DEFINICIONES.

1. *Llámase* EXTENSION *toda parte determinada del espacio*, como el lugar que ocupa un cuerpo, el solar de un edificio, la estatura de una persona, etc.

DIMENSIONES *de una extension son su largo, su ancho y su grueso:* el largo se denomina *longitud*, el ancho *latitud*, y el grueso *profundidad* ó *altura.* Ninguna extension puede tener más dimensiones que las tres citadas, si bien puede tener ménos.

CUERPO GEOMÉTRICO *es toda extension con las tres dimensiones;* como el lugar que ocupa un cuerpo físico. Puede concebirse un número infinito de cuerpos en el espacio.

SUPERFICIE *es toda extension con dos solas dimensiones*, como el solar de un edificio. Los límites que separan á cada cuerpo del resto del espacio son superficies; y el lugar de la separacion de dos partes contiguas de un mismo cuerpo es tambien en general superficie. Puede concebirse un número infinito de superficies en el interior de todo cuerpo.

LINEA *es toda extension con una sola dimension*, como la estatura de una persona. Los límites de la superficie son líneas: el lugar de la separacion de dos partes contiguas de una misma superficie es tambien en general línea, y lo es igualmente la interseccion de dos superficies que se cortan. Puede concebirse un número infinito de líneas en toda superficie.

PUNTO *es el límite elemental de la extension.* El punto no tiene dimension alguna. Son puntos los límites de las líneas: el lugar de la separacion de dos partes contiguas de una misma línea es tambien punto; y lo es igualmente la interseccion de dos líneas que se cortan. Puede concebirse un número infinito de puntos en toda línea.

Hay, por consiguiente, tres especies de extension: de los cuerpos, de las superficies y de las líneas. Estas tres clases de extension, que por la *abstraccion* (*) podemos considerar separadas, constituyen la *cantidad contínua*, y son por lo tanto el objeto de la *Geometría* (Arit. **1**).

GEOMETRÍA *es, pues, la ciencia que trata de la extension ó de la cantidad contínua.*

2. Toda extension tiene tres cualidades propias que la distinguen de las demás: su *posicion*, su *figura* y su *magnitud.*

POSICION *es el modo de estar:* estado, situacion ó actitud de la extension.

FIGURA *es el modo de ser:* carácter ó aspecto particular debido á la estructura, formacion ó construccion.

MAGNITUD *es la cantidad de extension que contiene.* La magnitud relativa de un cuerpo se llama *volúmen*, la de una superficie *área*, y la de una línea *longitud.*

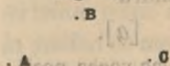
3. Dos extensiones que tengan la misma figura y la misma magnitud son *iguales*, y pueden coincidir en una sola, haciendo que tengan ambas la misma posicion. Si tienen la misma magnitud y diferente figura son *equivalentes;* y si tienen la misma figura y distinta magnitud se llaman *semejantes.*

(*) Se llama así una operacion del entendimiento, por medio de la cual consideramos separadas cosas que no pueden estarlo en realidad.

Del punto.

4. Aunque el punto matemático no tiene extension, le figuramos como el punto de la escritura comun, y cuando son varios, para distinguirlos se señalan con letras (*). Así se dice: el punto A, el punto B, el punto C (fig. 1).

Fig. 1.

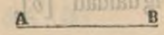


De las líneas.

Las líneas se dividen en *rectas* y *curvas*.

5. Línea recta *es la distancia más corta entre dos puntos,* como AB (fig. 2).

Fig. 2.



Corolario. *La distancia entre dos puntos se mide por una recta.*

Postulado. *Por dos puntos puede pasar una recta, pero nada más que una.*

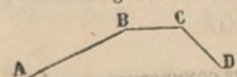
Corol. 1.° *Dos puntos determinan la posicion de una recta.*

Corol. 2.° *Dos rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden en toda su longitud.*

Corol. 3.° *La interseccion de dos rectas es un punto.*

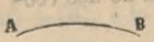
Se suele llamar línea quebrada ó poligonal *la combinacion de dos ó más rectas, que prolongadas no forman una sola recta, como* ABCD (fig. 3).

Fig. 3.



Línea curva *es aquella en que no se puede tomar una parte, por pequeña que sea, recta*, como AB (figura 4).

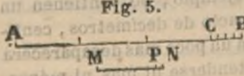
Fig. 4.



Llámase línea mista *la combinacion de la línea recta con la curva.*

6. Problema. **Hallar la mayor comun medida de dos rectas limitadas, AB y MN (fig. 5), si la tienen, y la razon que hay entre ellas.**

Fig. 5.

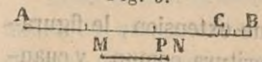


Este problema se resuelve de una

(*) Generalmente se emplean letras mayúsculas para señalar los puntos, las líneas y los cuerpos. Empleamos letras minúsculas cuando con una letra sola se quiere expresar una línea cualquiera, y en pocos más casos.

manera análoga á la empleada en la determinacion del máximo comun divisor de dos números.

Fig. 5.



Se coloca la línea menor MN sobre la mayor AB todas las veces que se pueda; y como han sido tres, se tendrá

$$AB = 3MN + CB \qquad [a].$$

El resto CB se coloca sobre la menor MN todas las veces posibles, y, como son dos veces, resulta

$$MN = 2CB + PN \qquad [b].$$

El nuevo resto PN se coloca sobre el anterior CB las veces que se pueda, y, siendo estas cuatro exactamente, se tiene al fin

$$CB = 4PN.$$

Ahora sustituyendo este valor de CB en la igualdad [b], resulta

$$MN = 2 \times 4PN + PN = 9PN.$$

Sustituyendo este valor de MN y de CB en la igualdad [a], se halla

$$AB = 3 \times 9PN + 4PN = 31PN.$$

Luego la mayor medida comun de las dos rectas dadas es PN, y la razon entre ellas será

$$\frac{AB}{MN} = \frac{31PN}{9PN} = \frac{31}{9}.$$

***Se llaman rectas, y en general cantidades* CONMENSURABLES *las que*, como las anteriores, *tienen una medida comun*, *é* INCONMENSURABLES *las que no la tienen* (*).**

OBSERVACION. Se puede hallar la razon aproximada de dos rec-

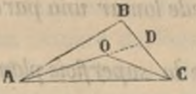
(*) A primera vista parece que no pueden darse líneas y en general cantidades inconmensurables; porque si dos rectas, por ejemplo, no contienen un número exacto de metros contendrán un número exacto de decímetros, centímetros, milímetros, etc. No obstante, si se reflexiona un poco más desaparecerá el error; si se supone que un hilo, que no pueda extenderse ni mas ni ménos, se rompe en dos partes arbitrarias, se comprende bien lo difícil que sería que cada una de estas partes contuviese un número exacto de metros, de decímetros, centímetros, ni aún de milímetros (porque existe un número infinito de unidades intermedias á estas) y por consiguiente lo difícil que tambien sería que tales partes fuesen conmensurables. (V. núm. 132.)

tas inconmensurables, procediendo como en el problema anterior y despreciando el último resíduo cuando sea suficientemente pequeño para la aproximacion que se desea obtener.

Corol. *Para medir una recta ó hallar su longitud* (2) *se determina* (como acaba de verse) *su razon exacta ó aproximada con la unidad de medida.*

7. Teorema. *Si desde un punto A á otro C* (fig. 6), *se traza una línea recta AC, y á un mismo lado de esta, dos ó más quebradas ABC y AOC, compuesta cada una de dos rectas, la línea quebrada ABC, que más se separa de la recta AC, es la mayor* (*).

Fig. 6.



Prolongando la AO hasta que encuentre en D á la BC, se tendrá (5)

$$AB+BD>AD,$$

y agregando DC á los dos miembros

$$AB+BD+DC>AD+DC,$$

ó

$$AB+BC>AD+DC \qquad [a].$$

Por igual razon se tiene

$$OD+DC>OC,$$

y sumando AO con los dos miembros

$$AO+OD+DC>AO+OC,$$

ó

$$AD+DC>AO+OC \qquad [b].$$

Pero segun la desigualdad [*a*], AB+BC es mayor que AD+DC: y conforme á la [*b*], AD+DC es mayor que AO+OC; luego con más razon AB+BC será mayor que AO+OC, ó lo que es lo mismo, la línea ABC>AOC.

De las superficies.

Las superficies se dividen en *planas* y *curvas.*

(*) Los teoremas, corolarios y problemas deben enunciarse omitiendo las letras que en ellos se intercalan, con el objeto de evitar la aplicacion de la proposicion á la figura correspondiente. Así el teorema del texto se enuncia de este modo: *Si desde un punto á otro se traza una línea recta, y á un mismo lado de esta dos ó más quebradas, compuesta cada una, etc.*

8. *Se llama* PLANO *ó* SUPERFICIE PLANA *aquella con la cual una recta, aplicada en un sentido cualquiera, coincide en todos sus puntos.*

COROL. *Si una recta pasa por dos puntos de un plano, coincide con él en toda su extension.*

Se suele llamar SUPERFICIE QUEBRADA *ó* POLIÉDRICA *la combinacion de dos ó más superficies planas, que prolongadas no forman un solo plano.*

SUPERFICIE CURVA *es aquella en que no se puede tomar una parte plana por pequeña que sea.*

Llámase SUPERFICIE MISTA *la combinacion de la superficie plana con la curva.*

Del círculo.

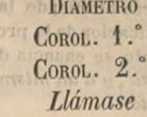
9. De todas las líneas curvas la más sencilla, y única cuyas propiedades se consideran en la Geometría elemental, es la *circunferencia de círculo.*

Se llama CIRCUNFERENCIA *una curva plana, cerrada, cuyos puntos distan igualmente de uno interior llamado* CENTRO.

CÍRCULO *es la superficie plana comprendida por la circunferencia.*

OBSERVACION. Con frecuencia se suele llamar círculo á la circunferencia; pero el sentido en que se habla da á conocer si se trata de la línea curva ó de la superficie que comprende.

Fig. 7.



Llámase RÁDIO *toda recta que desde el centro va á terminar en la circunferencia*, como OA, OB, OC, etc. (fig. 7).

COROL. *Los rádios de un mismo círculo son iguales.*

10. *Se llama* CUERDA *toda recta que une dos puntos de la circunferencia*, como AB ó CD.

DIÁMETRO *es toda cuerda que pasa por el centro*, como AB.

COROL. 1.° *El diámetro es duplo del rádio.*

COROL. 2.° *Los diámetros de un mismo círculo son iguales.*

Llámase ARCO *una porcion cualquiera de la circunferencia*, como AC.

De los teoremas recíprocos.

11. Se ha dicho (Arit. intr.) que la reciprocidad de los teoremas era muy frecuente en la Geometría, mas es evidente que de la verdad de un teorema directo no se infiere la del recíproco correspondiente; por lo tanto, estos como aquellos deben ser demostrados.

Hay, sin embargo, ciertos recíprocos que se demuestran de una manera análoga, y cuyas demostraciones pueden por lo tanto omitirse, deduciendo al efecto una regla general, que será de sumo interés en lo sucesivo.

Ocupémonos de la deduccion de esta regla, sirviéndonos para ello del siguiente

EJEMPLO (*).

Teorema directo. *En todo círculo:*

1.° *Un punto cualquiera de la circunferencia dista del centro una cantidad igual al rádio.*

2.° *Un punto cualquiera interior á la circunferencia dista del centro una cantidad menor que el rádio.*

3.° *Un punto cualquiera exterior á la circunferencia dista del centro una cantidad mayor que el rádio.*

La verdad de la primera parte de este teorema está fundada en la definicion de la circunferencia, y la de las otras dos es una consecuencia necesaria de la primera.

Teorema recíproco. *En todo círculo:*

1.° *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad igual al rádio, está situado en la circunferencia.*

2.° *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad menor que el rádio, está situado dentro de la circunferencia.*

3.° *Un punto cualquiera, que dista del centro una cantidad mayor que el rádio, está situado fuera de la circunferencia.*

(*) Este ejemplo es el mismo que emplea *Vincent*, y no puede elegirse otro más sencillo.

Demostracion. 1.° Si el punto que dista del centro una cantidad igual al rádio no estuviese en la circunferencia, estaria dentro ó fuera de ella: si estuviese dentro, distaria del centro una cantidad menor que el rádio, conforme á la segunda parte del teorema directo, lo que es contrario á la hipótesis: si estuviese fuera, distaria del centro una cantidad mayor que el rádio, segun la tercera parte del teorema directo, lo que es tambien contrario á la hipótesis: luego dicho punto no puede estar dentro ni fuera de la circunferencia, luego se hallará en esta.

Luego *si un punto cualquiera dista del centro una cantidad igual al rádio, está situado en la circunferencia.*

Lo mismo se demuestran la segunda y tercera parte del teorema recíproco.

La fuerza de la precedente demostracion estriba en que un punto, que se encuentra en un plano donde está trazada una circunferencia, se halla necesariamente en esta, dentro ó fuera, y en que cualquiera de estos supuestos produce una consecuencia distinta respecto á la distancia al centro.

Pudiendo emplearse un raciocinio análogo en la demostracion de los teoremas recíprocos, cuyos directos reunan iguales condiciones, se infiere que

12. *Siempre que en una proposicion ó série de proposiciones se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sugeto, y cada una produzca una conclusion distinta, las proposiciones recíprocas son ciertas.*

Division de la Geometría.

13. La Geometría se divide en *plana* y del espacio.

La GEOMETRIA PLANA *trata de la extension cuyos puntos están todos en un mismo plano.*

La GEOMETRÍA DEL ESPACIO *se ocupa de la extension cuyos puntos no están todos en el mismo plano.*

GEOMETRÍA PLANA.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS PLANAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

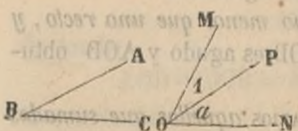
Líneas rectas en sus diferentes posiciones.

ARTÍCULO PRIMERO.

De los ángulos.

14. *Se llama* ÁNGULO *la extension comprendida entre dos rectas que concurren en un punto.* Las líneas que le forman se llaman *lados*, y *vértice* el punto de concurrencia.

Fig. 8.



ABC (fig. 8) es un ángulo cuyos lados son AB y BC, y el vértice el punto B.

Un ángulo se nombra por tres letras, como acaba de verse, expresando siempre en el medio la del vértice; tambien se puede nombrar, cuando está solo, por la letra del vértice; así se dice el ángulo en B; y cuando en un mismo punto se reunen varios vértices, por una letra ó número colocados en el interior; así se puede decir el ángulo *a*, el ángulo 1, en vez de PON y MOP.

COROL. *Un ángulo no varía de valor aunque varíe la longitud de sus lados.*

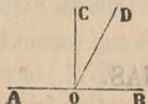
Los ángulos se suman, se restan y se multiplican ó dividen por un número abstracto.

Así MOP+PON=MON, MOP=MON−PON, y MON puede ser duplo de MOP, y éste mitad de aquel.

Se da el nombre de BISECTRIZ *de un ángulo á la recta que le divide en dos partes iguales*, OP es la bisectriz de MON.

15. *Se llaman* ÁNGULOS ADYACENTES *los que tienen el mismo vértice, un lado comun y los otros dos lados en línea recta.* AOD y DOB (fig. 9) son adyacentes, lo mismo que AOC y COB.

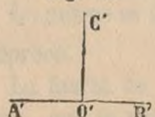
Fig. 9.



Llámase ÁNGULO RECTO *cada uno de los dos adyacentes é iguales que una recta forma con otra, y* OBLÍCUO *el que es mayor ó menor que el recto.* AOC y COB son ángulos rectos, y AOD y DOB oblícuos.

16. TEOREMA 1.º *Los ángulos rectos son iguales aunque no sean adyacentes.*

Fig. 10.



Sean rectos los ángulos AOC y A′O′C′ (figuras 9 y 10); vamos á demostrar que son iguales.

Superponiendo (*) la figura 10 sobre la 9, de modo que A′B′ coincida con AB y el punto O′ caiga sobre O, la recta O′C′ coincidirá con OC; pues si O′C′ tomase otra direccion cualquiera, por ejemplo OD, los ángulos AOD y DOB, que representan á los A′O′C′ y C′O′B′ no podrian ser iguales entre sí, siéndolo AOC y COB; lo que es contra la hipótesis. Luego los dos lados del ángulo A′O′C′ coinciden con los de AOC, luego dichos ángulos son iguales.

17. *Llámase* ANGULO AGUDO *el oblícuo menor que uno recto, y* OBTUSO *el oblícuo mayor que el recto:* BOD es agudo y AOD obtuso (fig. 9).

18. *Se llaman* ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS *aquellos que sumados forman un recto, y* SUPLEMENTARIOS *los que forman dos rectos.*

COROL. *Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ó el mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales.*

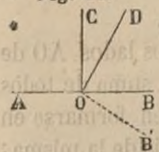
Porque agregándoles el complemento en un caso, y el suplemento en otro, dan una misma suma.

(*) La superposicion es el medio más comunmente empleado en la Geometría para demostrar la igualdad de las extensiones. Al efecto se admite como evidente, porque lo es, que *dos extensiones que superpuestas coinciden en todas sus partes son iguales*, y recíprocamente, *que dos extensiones iguales se pueden superponer de modo que coincidan.*

Tambien se admite que con la superposicion no se altera la magnitud de las extensiones.

19. Teorema 2.° *Los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos ó son suplementarios.*

Fig. 11.



Sean los ángulos adyacentes AOD y DOB (figura 11).

Trazando por O una recta OC, que forme dos ángulos rectos, se observará que los dados AOD y DOB suman lo mismo que los rectos AOC y COB, luego valen tanto como estos dos rectos: así llamando R á un ángulo recto,

$$AOD + DOB = 2R.$$

Recíprocamente. *Si dos ángulos* AOD *y* DOB, *que tienen un lado comun* OD *y el mismo vértice* O, *son suplementarios, serán tambien adyacentes, ó lo que es igual, los otros dos lados* AO *y* OB *estarán en línea recta.*

Porque si OB no es la prolongacion de AO, supongamos que lo sea OB', y se tendrá, por hipótesis,

$$AOD + DOB = 2R,$$

y por el teorema directo

$$AOD + DOB' = 2R;$$

de donde

$$AOD + DOB = AOD + DOB' \quad ó \quad DOB = DOB',$$

lo que es absurdo.

Corol. 1.° *Si un ángulo es recto, su adyacente lo será tambien; y si un ángulo es oblícuo, su adyacente lo es del mismo modo.*

Corol. 2.° *Un ángulo cualquiera* AOD *vale ménos que dos rectos.*

Porque prolongando uno de sus lados AO, se tiene

$$AOD + DOB = 2R;$$

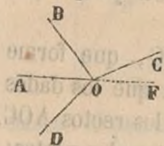
luego $AOD < 2R$.

Corol. 3.° *Los ángulos* $AOC + COD + DOB$, *que se pueden formar en un punto* O *de una recta y á un lado de esta valen junto dos rectos.*

Porque la suma de estos ángulos es igual á la de dos adyacentes cualesquiera AOD y DOB.

Corol. 4.º *Todos los ángulos* AOB+BOC+COD+DOA (figura 12) *que se pueden formar al rededor de un punto* O, *valen juntos cuatro rectos.*

Fig. 12.

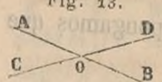


Porque prolongando uno de los lados AO de estos ángulos en el sentido AF (*) la suma de todos ellos equivale á la de los que pueden formarse en el punto O sobre la recta AF y debajo de la misma: pero los que pueden formarse en O sobre AF valen dos rectos (corolario 3.º) y los que pueden formarse debajo otros dos; luego todos los que se pueden formar al rededor de O valen cuatro rectos.

Corol. 5.º *Los ángulos formados por dos rectas que se cortan valen tambien juntos cuatro rectos.*

20. *Se llaman* ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE *aquellos de los que el uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.*

Fig. 13.



AOC y DOB (fig. 13) son opuestos por el vértice; lo mismo que AOD y COB.

21. Teorema 3.º *Los ángulos* AOC *y* DOB *opuestos por el vértice son iguales.*

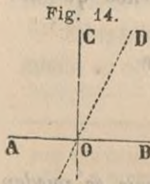
AOC tiene por suplemento á AOD, y DOB á AOD (**18**), luego AOC y DOB tienen el mismo suplemento AOD, luego son iguales (**18**, corol.)

ARTÍCULO II.

Perpendiculares y oblícuas.

22. *Se llama* LÍNEA PERPENDICULAR *la que forma con otra dos ángulos rectos, ó uno solo* (**19**, corol. 1.º). OC (fig. 14) es perpendicular á AB, si COB es recto.

Fig. 14.



Línea oblícua, *la que forma con otra dos ángulos desiguales ú oblícuos, ó uno solo* (**19**, corolario 1.º). OD es oblícua á AB, si DOB es un ángulo oblícuo.

Corol. 1.º *Si una recta* CO *es perpendicular á otra* AB,

(*) Las líneas que entran en los enunciados de los teoremas y problemas se trazan completas generalmente, y de rayitas las auxiliares de la demostracion ó resolucion. Decimos *generalmente* porque algunas veces se hace lo contrario, para evitar la repeticion de figuras ó para que estas resulten más claras.

esta lo será á la primera, y si una recta DO *es oblícua á otra* AB, *esta tambien lo será á aquella.*

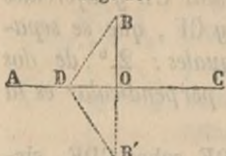
COROL. 2.° *Si dos rectas* AB *y* CO *se cortan perpendicularmente, forman cuatro ángulos rectos.*

23. TEOREMA 1.° *Por un punto dado no se puede trazar más que una sola perpendicular á una recta.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.° que el punto dado esté en la recta; 2.° que esté fuera de ella.

1.° Sea el punto O en la recta AB (fig. 14), decimos que no se puede levantar más perpendicular que la OC; porque otra recta cualquiera OD forma con la AB dos ángulos AOD y DOB, el primero mayor que el recto AOC, y el segundo menor que el recto COB, luego dichos ángulos AOD y DOB son desiguales, luego OD es oblícua á AB; luego por el punto O no se puede levantar más que una sola perpendicular.

Fig. 15.



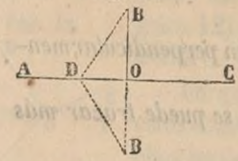
2.° Sea el punto B fuera de la recta AC (fig. 15); decimos que no se puede bajar más perpendicular que la BO. Doblando la parte superior de la figura, por AC, sobre la inferior, el punto B vendrá á parar á B′; y como AOB es un ángulo recto, por hipótesis, AOB′ lo será tambien, luego BB′ es una línea recta (**19**, rec.). Si desde B se bajase otra perpendicular BD: uniendo D con B′ y doblando otra vez la parte superior de la figura sobre la inferior, BD coincidirá con B′D; luego el ángulo B′DO sería recto como su igual BDO; luego BDB′ formaria una línea recta (**19**, rec.); luego habria dos rectas que tendrian dos puntos comunes B y B′ sin coincidir, lo que es imposible (**5**, post.). Luego por B no se puede bajar más que una perpendicular BO á la AC.

24. TEOREMA 2.° *Si desde un punto* B (fig. 15) *fuera de una recta* AC, *se traza á esta una perpendicular* BO *y una oblícua* BD, *la perpendicular es menor que la oblícua.*

Doblando la figura por AC, la parte superior sobre la inferior, el punto B caerá en B′, y las rectas BO y BD tomarán las posiciones de OB′ y DB′.

El ángulo AOB es recto; luego AOB′ lo será tambien, puesto que es el primero colocado en otra posicion despues de doblada la figura; luego BO y OB′ forman una línea recta (**19**, rec.).

Fig. 15.



Como por dos puntos B y B′ no puede pasar más que una recta (**5**, post.), BD y DB′ forman una línea quebrada; luego (**5**)

BB′<BDB′:

y como BO es mitad de BB′ y BD de BDB′, se tendrá por fin

BO<BD.

Corolario. *La distancia entre un punto y una recta se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto á la recta.*

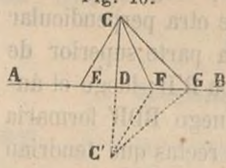
Recíprocamente. *Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y otra recta, será perpendicular á esta.*

Porque si no, sería oblícua, y trazando una perpendicular sería menor que ella: lo que es contra la hipótesis.

25. Teorema 3.° *Si de un punto* C, *fuera de una recta* AB (fig. 16), *se trazan á esta una perpendicular* CD *y diferentes oblícuas* CE, CF *y* CG: 1.° *las oblícuas* CE *y* CF, *que se separan igualmente de la perpendicular, son iguales:* 2.° *de dos oblícuas* CF *y* CG, *la que más se separa de la perpendicular es la mayor.*

1.° Si DE=DF, doblando la figura CDF sobre CDE, sirviendo de eje CD, como los ángulos CDF y CDE son iguales, el punto F caerá sobre E; luego los extremos de la recta CF coinciden con los de CE; luego estas oblícuas son iguales.

Fig. 16.



2.° Si DG>DF, doblando la parte superior CDB de la figura sobre la inferior, el punto C vendrá á parar á C′ y las rectas CD, CF y CG quedarán representadas por C′D, C′F y C′G: siendo recto el ángulo CDB, C′DB tambien lo será (**19**, corol. 1.°); luego CC′ será una línea recta (**19**, recíproco), y CFC′ y CGC′ serán líneas quebradas (**5**, post.); luego CGC′>CFC′ (**7**): pero CG es mitad de CGC′ y CF mitad tambien de CFC′, luego

CG>CF.

Si las oblícuas fuesen CG y CE, una á cada lado de la perpendicular, trazariamos la CF, de modo que DF=DE, y se demostraria, como acaba de hacerse, que CG>CF: mas CF y CE son iguales por el caso 1.°, luego CG>CE.

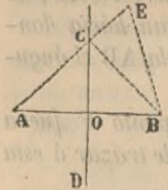
Recíprocamente. 1.° *Si dos oblícuas son iguales, se separan igualmente de la perpendicular: 2.° Si dos oblícuas son desiguales, la mayor se separa más de la perpendicular* (**12**).

Corolario. *Desde un punto á una recta se pueden trazar dos rectas iguales, y de dos en dos todas las que se quiera; pero no se pueden trazar tres, ni más de tres, iguales entre sí.*

26. Teorema 4.° 1.° *Un punto cualquiera* C, *situado en la perpendicular* CD (fig. 17) *levantada en el punto medio* O *de una recta* AB, *equidista de los extremos de esta: 2.° un punto cualquiera* E, *situado fuera de la perpendicular, dista desigualmente de los extremos de la recta.*

1.° Uniendo C con A y con B, las oblícuas CA y CB son iguales (**25**); luego C equidista de A y de B.

Fig. 17.



2.° Trazando las rectas EA, EB y CB se tendrá (**5**) CE+CB>EB;

y como CA y CB son iguales, segun la primera parte del teorema, sustituyendo la primera de estas líneas por la segunda, resulta

CE+CA>EB ó EA>EB.

Recíprocamente. 1.° *Un punto cualquiera equidistante de los extremos de una recta, está en la perpendicular levantada en su punto medio: 2.° un punto cualquiera que no equidista de los extremos de una recta, está fuera de la perpendicular levantada en su punto medio* (**12**).

Llámase lugar geométrico *de ciertos puntos la línea ó figura que tiene una propiedad exclusiva á dichos puntos.* Así, la circunferencia es el *lugar geométrico* de todos los puntos que en el mismo plano equidistan del centro.

Corolario 1.° *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta es la perpendicular levantada en su punto medio.*

Corolario 2.° *Si una recta* CD *tiene dos puntos cualesquiera* C *y* D *equidistantes de los extremos* A *y* B *de otra recta* AB, *le es perpendicular en su punto medio* O.

Porque levantando en dicho punto medio O una perpendicular, pasará por los puntos C y D (corol. ant.), luego coincidirá con la recta CD (**5**, corol. 1.º), luego será perpendicular á la AB en su punto medio O.

ARTÍCULO III.

De las líneas paralelas.

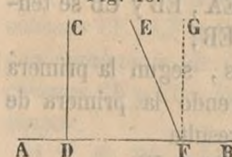
27. *Se llaman* RECTAS PARALELAS *las que estando en un mismo plano no se encuentran por más que se prolonguen.*

28. TEOREMA 1.º *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.*

En efecto, si se encontrasen en un punto cualquiera, desde este punto habria trazadas dos perpendiculares á una recta, lo que es absurdo (**23**).

29. POSTULADO. *Dos rectas, una* CD *perpendicular y otra* EF (fig. 18) *oblícua á una tercera* AB, *no son paralelas; y se encuentran hácia donde la oblícua* EF *forma con la* AB *el ángulo* EFA *agudo* (*).

Fig. 18.



COROLARIO 1.º *Por un punto* F *fuera de una recta* CD *no se puede trazar á esta más que una paralela.*

Porque trazando por F la AB perpendicular á CD, y la FG perpendicular á AB, CD y FG serán paralelas (**28**), y cualquiera otra recta FE será oblícua respecto de la AB (**23**), luego no será paralela á CD segun el postulado. Luego por F no puede trazarse más que una paralela á CD.

COROL. 2.º *Si una recta* FE *corta á una de dos paralelas* GF, *prolongada suficientemente tambien cortará á la otra* CD.

Pues de lo contrario por F habria dos paralelas, EF y GF, á una misma recta CD; lo que es imposible (corol. ant.).

COROL. 3.º *Si una recta* AB *es perpendicular á una de dos paralelas* CD, *tambien lo será á la otra* GF.

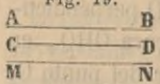
Porque si AB no fuese perpendicular á GF, le sería oblícua, y esta tambien sería oblícua respecto de aquella; mas en tal caso

(*) Este es el célebre postulado de Euclides. Puede verse una demostracion de él en Vincent, *Cours de Géométrie élémentaire*, pág. 27.

CD y GF no serían paralelas (segun el postulado), lo que es contra la hipótesis.

Corol. 4.° *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 19), *paralelas á una tercera* MN, *son paralelas entre sí.*

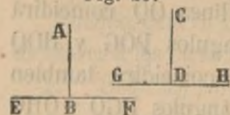
Fig. 19.



Porque si AB y CD se encontrasen, desde el punto en que lo hiciesen habria dos paralelas á MN, lo que es imposible (corol. 1.°).

Corol. 5.° *Dos rectas* AB *y* CD, *respectivamente perpendiculares á dos paralelas* EF *y* GH, *son paralelas entre sí* (fig. 20).

Fig. 20.



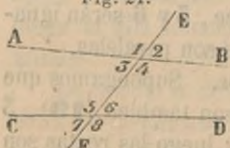
Si AB es perpendicular á EF tambien lo será á su paralela GH prolongada (corolario 3.°), y como CD lo es á esta por hipótesis, AB y CD son paralelas (**28**).

Corol. 6.° *Si dos rectas* AB *y* CD *no son paralelas, sus perpendiculares respectivas* EF *y* GH *tampoco lo serán.*

Porque si EF y GH fuesen paralelas, sus perpendiculares respectivas AB y CD lo serían tambien (corol. 5.°), lo que es contra la hipótesis.

30. *Se llama* SECANTE *ó* TRASVERSAL *la recta* EF, *que corta á otras dos* AB *y* CD (fig. 21).

Fig. 21.



La secante forma con las rectas que corta ocho ángulos, que son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Reciben el nombre de ángulos INTERNOS *los que están formados dentro de las rectas,* como 3, 4, 5 y 6, *y* EXTERNOS *los que están fuera*, tales son 1, 2, 7 y 8.

Llamaremos ángulos ALTERNOS *los que están dentro de las rectas, uno con cada una, y á diferente lado de la secante*, como 3 y 6, 4 y 5.

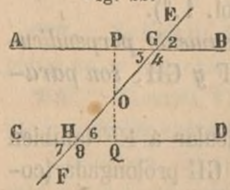
Angulos CORRESPONDIENTES *son los que están uno dentro y otro fuera de las rectas, uno con cada una, y á un mismo lado de la secante*, como 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8.

31. Teorema 2.° *Si dos rectas cortadas por otra forman con ella:* 1.° *ángulos alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado de la secante suplementarios, dichas rectas son paralelas:* 2.° *si forman ángulos alternos ó correspondientes* *desiguales, ó internos de un mismo lado no suplementarios, dichas rectas no son paralelas.*

1.° *Alternos iguales.* Supongamos que los ángulos AGH y DHE, ó 3 y 6 (fig. 22) sean iguales.

Por el punto O, medio de la GH, se traza la PQ perpendicular á CD. Hágase girar la figura OHQ, en el mismo plano y al rededor del punto O, hasta que OH coincida con OG: el punto H caerá sobre G, por ser estas rectas iguales por construccion: la línea OQ coincidirá con OP, por ser los ángulos POG y HOQ iguales (**21**): la HQ coincidirá tambien con GP por ser los ángulos PGO y QHO iguales por hipótesis, luego el ángulo OQH coincide con OPG; pero OQH es recto, luego OPG tambien lo será: luego AB y CD son perpendiculares á PQ, luego son paralelas (**28**).

Fig. 22.



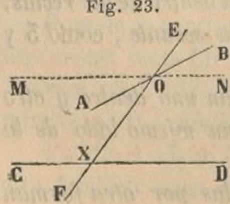
Si los ángulos alternos iguales fuesen 4 y H, como son respectivamente suplementarios de 3 y 6, estos serían tambien iguales (**18**, corol.), y el paralelismo de AB y CD se demostraria como acaba de verse.

Correspondientes iguales. Si los ángulos iguales son 3 y 7, como 7 es igual al 6 por opuestos en el vértice, 3 y 6 serán iguales, pero estos son alternos; luego las rectas son paralelas.

Internos de un mismo lado suplementarios. Supongamos que 4 y 6 sean suplementarios; como 3 y 4 lo son tambien (**19**), 3 y 6 serán iguales: pero estos son alternos; luego las rectas son paralelas.

2.° *Alternos desiguales.* Supongamos que los ángulos AOF y DXE (fig. 23) sean desiguales, vamos á demostrar que AB y CD no son paralelas.

Fig. 23.



Porque si lo fuesen, trazando por O una recta MN, que formase el ángulo MOF igual á DXE, MN sería paralela á CD, segun la primera parte del teorema; luego por O se tendrian dos paralelas AB y MN á CD, lo que es imposible (**29**, corol. 1.°); luego AB no es paralela á CD.

De una manera análoga se demuestra que las rectas no son paralelas cuando los ángulos correspondientes son desiguales, ó cuando los internos de un mismo lado no son suplementarios.

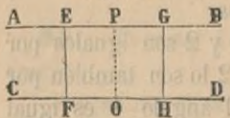
Recíprocamente. 1.° *Si dos rectas son paralelas, cortadas por otra, forman con la secante ángulos alternos y correspondientes iguales, y ángulos internos de un mismo lado suplementarios: 2.° si no son paralelas, forman con la trasversal ángulos alternos y correspondientes desiguales, é internos de un mismo lado no suplementarios* (**12**).

32. Teorema 3.° *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.° que unas paralelas sean perpendiculares á las otras: 2.° que les sean oblícuas.

1.° Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 24).

Fig. 24.



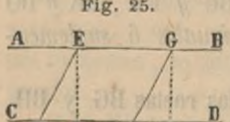
Por el punto P, medio de EG, se traza la PO perpendicular á la AB, la cual lo será tambien á la CD (**29**, corol. 3.°). Doblando la figura por PO, la parte PODB sobre la POCA, PB coincidirá con PA por ser los ángulos BPO y APO rectos: por igual razon OD coincidirá con OC; el punto G caerá sobre E, por ser PG igual á PE por construccion, luego la línea GH coincidirá con EF, porque si no desde E habria dos perpendiculares á la CD, lo que es imposible; luego la GH coincide en todos sus puntos con la EF, luego son iguales.

Lo mismo se demostraria que FH es igual á EG, trazando por el medio de GH una perpendicular á EF.

Corol. *Los puntos de una recta equidistan de su paralela.*

2.° Sean las paralelas AB y CD, EF y GH (fig. 25).

Fig. 25.

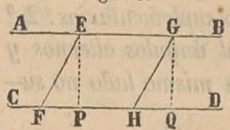


Por los puntos E y G se trazan las perpendiculares EP y GQ á la AB, que lo serán tambien á la CD (**29**, corol. 3.°), é iguales entre sí, segun la primera parte del teorema.

Superponiendo la figura HGQ sobre FEP, de manera que GQ y EP coincidan, GH caerá sobre EF, por ser los ángulos FEP y HGQ iguales por complementos de AEF y AGH, tambien iguales (**31**, rec.): QH caerá sobre PF por ser rectos los ángulos en P y en Q; luego el punto H caerá sobre F; luego los extremos de GH se confunden con los de EF, luego estas rectas son iguales.

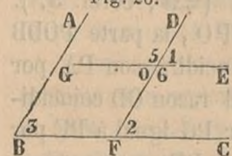
Para demostrar que EG y FH son tambien iguales, se tiene, segun la primera parte del teorema, $EG = PQ$: pero resultando $QH = PF$ por la superposicion anterior, se tendrá tambien $QH + HP = PF + HP$ ó $PQ = FH$; de esta última igualdad y de la primera resulta al fin $EG = FH$.

Fig. 25.



33. Teorema 4.º 1.º *Los ángulos* 1 *y* 3, *ó* 3 *y* 0 (figura 26), *que tienen sus lados* BA *y* OD, BC *y* OE, *paralelos y dirigidos en el mismo sentido*, *ó* BA *y* OF, BC *y* OG, *en sentido opuesto*, *son iguales*: 2.º *los ángulos* 3 *y* 5, *que tienen sus lados paralelos*, *dos* BA *y* OD *dirigidos en el mismo sentido*, *y otros dos* BC *y* OG *en sentido opuesto*, *son suplementarios.*

Fig. 26.



1.º Los ángulos 1 y 2 son iguales por correspondientes: 3 y 2 lo son tambien por igual razon; luego el ángulo 1 es igual al 3.

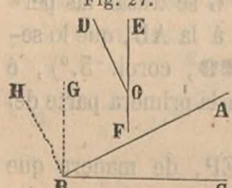
Los ángulos 0 y 1 son iguales por opuestos en el vértice: el 1 es igual al 3 por lo que se acaba de demostrar; luego 0 y 3 son iguales.

2.º El ángulo en 1 es suplementario del 5, por adyacentes: pero el 1 y el 3 son iguales por lo demostrado en la primera parte del teorema; luego 3 y 5 son suplementarios.

Corol. *Los ángulos de lados paralelos son iguales ó suplementarios.*

34. Teorema 5.º *Los ángulos* ABC *y* DOE *ó* DOF (fig. 27), *que tienen sus lados* BC *y* EF, BA *y* DO *perpendiculares*, *son iguales ó suplementarios.*

Fig. 27.



Trácense por B las rectas BG y BH, respectivamente paralelas á EF y DO, y se tendrá que los ángulos HBA y GBC son rectos (**29**, 3.º); luego los ángulos HBG y ABC, que tienen el mismo complemento ABG, son iguales (**18**, corolario); pero HBG y DOE ó DOF tienen sus lados paralelos, luego son iguales ó suplementarios

(**33**, corol.): luego ABC y DOE ó DOF tambien lo serán.

Observacion. Son iguales los ángulos de la misma especie, como ABC y DOE, y suplementarios los de especie distinta, como ABC y DOF.

CAPÍTULO II.

De la circunferencia.

ARTÍCULO PRIMERO.

Propiedades de la circunferencia.

35. Teorema 1.° *Dos circunferencias de igual rádio son iguales.*

Porque superpuestas de modo que coincidan los centros, coincidirán en todos sus puntos, pues de lo contrario unos puntos se separarian del centro más que otros, lo que es imposible (**9**, corolario); luego dichas circunferencias son iguales.

OBSERVACIONES.

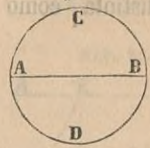
1.ª Este raciocinio demuestra igualmente que si dos arcos de igual rádio se superponen de modo que coincidan los centros de las circunferencias á que pertenecen y uno de sus extremos, coinciden en todos sus puntos si son iguales, y si son desiguales el menor se ajusta sobre el mayor, aunque no ocupe toda su extension; y que, si superpuestos de la misma manera coinciden sus extremos, se ajustan en todos sus puntos, y por lo tanto son iguales.

2.ª El mismo raciocinio demuestra tambien que dos círculos de igual rádio, superpuestos de modo que coincidan sus centros, coinciden en todos sus puntos, y por lo tanto son tambien iguales.

36. Teorema 2.° *El diámetro* AB *divide la circunferencia en dos partes iguales llamadas* semicircunferencias.

Doblando la figura 28 por el diámetro AB, la parte ACB coincidirá con ADB; porque si no coincidiesen, las distancias del centro á la circunferencia no serían iguales, lo que es absurdo (**9**, corol.): luego las dos partes en que el diámetro divide la circunferencia coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

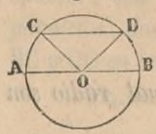
Fig. 28.



Observacion. La superposicion anterior demuestra tambien que el diámetro divide el círculo en dos partes iguales, que reciben el nombre de *semicírculos*.

37. Teorema 3.º *El diámetro* AB (fig. 29) *es mayor que otra cuerda cualquiera* CD.

Fig. 29.



Trazando los rádios OC y OD, se tendrá (**5**)

$$OC + OD > CD:$$

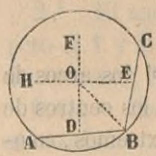
pero OC y OD componen el diámetro AB (**10**, corol. 1.º); luego

$$AB > CD.$$

38. Teorema 4.º *Por tres puntos* A, B, C (fig. 30), *que no están en línea recta, puede pasar una circunferencia, pero nada más que una sola.*

Uniendo estos puntos por las rectas AB y BC, y levantando en los puntos medios D y E de estas las perpendiculares DF y EH, estas perpendiculares se encuentran en un punto, tal como O (**29**, corolario 6.º).

Fig. 30.



Ahora, siendo DF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A y B (**26**, corol. 1.º), y EH el de los puntos equidistantes de B y C, el punto O, donde se cortan, será el único que en el mismo plano equidista de A, B y C; luego si se hace centro en O, y con un rádio OB se traza una circunferencia, pasará por los tres puntos A, B, C; y como en el mismo plano no hay otro punto equidistante de los tres dados, no se podrán trazar más circunferencias diferentes que pasen por los mismos.

Corol. 1.º *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de una circunferencia.*

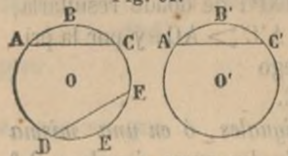
Corol. 2.º *Dos circunferencias no pueden tener más que dos puntos comunes.*

Porque si tuviesen tres, las dos circunferencias se confundirian en una sola.

39. TEOREMA 5.° *En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia : 1.° arcos iguales tienen cuerdas iguales : 2.° el mayor arco tiene la mayor cuerda* (*).

1.° Sean las circunferencias O y O′ (fig. 31) iguales, é iguales tambien los arcos ABC y A′B′C′: vamos á demostrar que las cuerdas AC y A′C′ lo son del mismo modo.

Fig. 31.



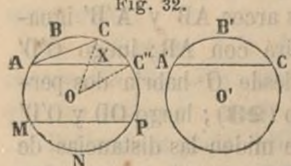
Superponiendo la circunferencia O′ sobre la O, de manera que el punto A′ coincida con A, el punto C′ caerá sobre C, por ser los arcos ABC y A′B′C′ iguales; luego los extremos de las cuerdas se confunden, luego estas son iguales.

Si los arcos iguales fuesen ABC y DEF, situados en la misma circunferencia O, en la O′ tomariamos A′B′C′=DEF; de donde resultaria por lo que se acaba de demostrar, que DF=A′C′ y AC = A′C′, luego AC=DF.

2.° Sean las circunferencias O y O′ (fig. 32) iguales, y A′B′C′>ABC; vamos á demostrar que A′C′>AC.

Superponiendo la circunferencia O′ sobre la O, de modo que el punto A′ coincida con A, el punto C′ caerá más abajo de C en C″, por ser el arco A′B′C′ mayor que el ABC por hipótesis; luego la cuerda A′C′ estará representada y será igual, segun la primera parte del teorema, á la AC″.

Fig. 32.



Ahora trazando los rádios OC y OC″, se tiene (**5**)

$$AX+XC>AC$$

y $$OX+XC''>OC''.$$

Sumando estas desigualdades resulta

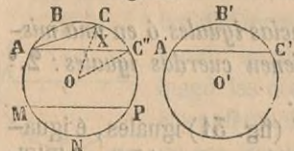
$$AX+XC+OX+XC''>AC+OC'',$$

ó $$AC''+OC>AC+OC''.$$

(*) Toda cuerda subtiende dos arcos, uno mayor y otro menor que la semicircunferencia (cuando no es diámetro). Si, como en el teorema del texto, se menciona solo uno de los arcos, se entiende siempre que se habla del menor que la semicircunferencia.

Suprimiendo en ambos miembros los rádios OC y OC″, se tiene

Fig. 32.



$$AC'' > AC,$$

y sustituyendo en vez de AC″ su igual A′C′, resulta por fin

$$A'C' > AC.$$

Si los arcos MNP>ABC estuviesen situados en la misma circunferencia O, en la O′ tomaríamos A′B′C′ = MNP: de donde resultaría, por lo que acabamos de demostrar, que A′C′>AC, y por la primera parte del teorema MP = A′C′; luego

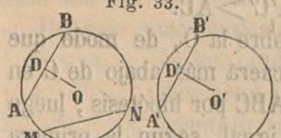
$$MP > AC.$$

Recíprocamente. *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia: 1.° cuerdas iguales subtienden arcos iguales: 2.° la mayor cuerda subtiende el mayor arco* (**12**).

40. Teorema 6.° *En circunferencias iguales, ó en una misma circunferencia: 1.° cuerdas iguales equidistan del centro: 2.° de dos cuerdas desiguales la mayor se aproxima más al centro que la menor.*

1.° Sean las circunferencias O y O′ (fig. 33) iguales, y las cuerdas AB y A′B′ iguales tambien, vamos á demostrar que equidistan del centro.

Fig. 33.



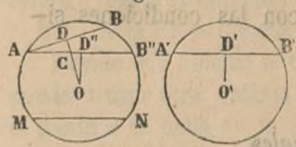
Trazando las perpendiculares OD y O′D′ á dichas cuerdas, y superponiendo la segunda figura sobre la primera, de modo que O′ y O coincidan, y que A′ y A se confundan tambien, B′ caerá sobre B por ser los arcos AB y A′B′ iguales (**39**): y la cuerda A′B′ se confundirá con AB; luego O′D′ coincide con OD, pues de lo contrario desde O habria dos perpendiculares á la AB, lo que es absurdo (**23**); luego OD y O′D′ son iguales: pero estas líneas son las que miden las distancias de las cuerdas á los centros respectivos (**24**, corol.); luego dichas cuerdas equidistan del centro.

Si las cuerdas iguales estuviesen en una misma circunferencia como AB y MN, la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

2.° Sea A′B′>AB en las circunferencias O′ y O iguales (figura 34).

Superponiendo la figura primera sobre la segunda, de modo que el centro O′ coincida con O y el punto A′ con A, el punto B′ caerá en B″, por ser el arco A′B′ mayor que AB (**39**, rec.): la cuerda A′B′ estará representada por su igual AB″ (**39**) y O′D′ por su igual OD″ segun la primera parte de este teorema.

Fig. 34.



Ahora (**24**) $OC > OD''$,

pero $OD > OC$; luego con más razon

$OD > OD''$,

ó, una vez que $OD'' = O'D'$,

$OD > O'D'$.

Luego la cuerda mayor A′B′ dista ménos del centro que la menor AB.

Si las cuerdas desiguales estuviesen en una misma circunferencia, como AB y MN, la demostracion sería análoga á la empleada en igual hipótesis del teorema anterior.

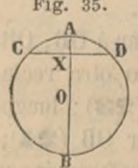
Recíprocamente. *En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia: 1.º cuerdas equidistantes del centro son iguales; 2.º de dos ó más cuerdas, la que más se aproxima al centro es la mayor* (**12**).

Observacion. Suponiendo unido el punto A con O por una recta AO, en la misma figura 34, se notará que si desde O se trazan perpendiculares á las rectas AB y AB″ la menor de estas perpendiculares es la que corresponde á la línea que con la AO forma menor ángulo.

41. Teorema 7.º *El diámetro* AB *perpendicular á una cuerda* CD (fig. 35), *divide la cuerda y los arcos* CBD *y* CAD, *que esta subtiende, en dos partes iguales.*

Doblando la parte ADB de la figura sobre la ACB, sirviendo de eje el diámetro AB, la línea XD tiene que caer sobre XC, por ser rectos los ángulos AXD y AXC; y siendo D punto de la circunferencia, tiene que caer sobre C, que tambien es punto de la misma; luego XD se confunde con XC, el arco BD con CB y el AD con AC; luego la cuerda y los arcos quedan divididos en dos partes iguales.

Fig. 35.



Corol. *Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro partes iguales, llamadas* cuadrantes.

Observacion. La recta AB cumple con las condiciones siguientes:

1.ª *Pasa por el centro del círculo.*

2.ª *Es perpendicular á la cuerda.*

3.ª *Divide la cuerda en dos partes iguales.*

4.ª *Divide tambien en dos partes iguales el arco menor que la cuerda subtiende.*

5.ª *Divide igualmente el arco mayor en dos partes iguales.*

Dos de estas condiciones determinan la posicion de una recta (**5**, corol. 1.º y **23**); luego

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes, cumplirá tambien con las tres restantes.

ARTÍCULO II.

Líneas secantes y tangentes á la circunferencia.

42. Teorema 1.º *Una recta no puede tener más que dos puntos comunes con la circunferencia.*

Porque si tuviese tres, trazando por ellos rádios, se tendrian bajadas desde el centro á la recta tres rectas iguales, lo que es absurdo (**25**, corol.)

43. *Se llama* secante *de una circunferencia una recta ilimitada, que tiene dos puntos comunes con ella; y* tangente *una recta, tambien ilimitada, que tiene un solo punto comun con la circunferencia.* El punto comun se llama *punto de contacto.*

44. Teorema 2.º *Toda recta que pasa por el extremo exterior de un rádio: 1.º si es perpendicular al rádio será tangente á la circunferencia: 2.º si es oblícua será secante.*

Fig. 36.

1.º Si CD es perpendicular en el extremo B del rádio OB (fig. 36), será tangente.

En efecto, siendo CD perpendicular á OB, OB lo será á CD (**22**, corol. 1.º): luego otra recta cualquiera Om será oblícua á CD (**23**); luego será más larga que la perpendicular OB (**24**); luego el punto m está fuera de la circunferencia; y como lo mismo se demuestra de otro punto cualquiera de la CD, resulta que ésta no tiene más que un punto comun con la circunferencia; luego es tangente (**43**).

2.° Si la EF es oblícua á OB, será secante de la circunferencia.

Siendo EF oblícua á OB, OB lo será á EF; luego desde O se puede trazar otra oblícua O*n* igual con OB (**25**, corol.); luego el punto *n* se halla en la circunferencia (**11**, rec. 1.°); luego la recta indefinida EF tiene dos puntos comunes con la circunferencia, luego será secante (**43**).

Recíprocamente. *Toda recta que pasa por el extremo exterior de un rádio: 1.° si es tangente será perpendicular al rádio: 2.° si es secante será oblícua* (**12**).

Corol. 1.° *Por un punto de la circunferencia no se puede trazar más que una tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó más, habria en el extremo del rádio dos ó más perpendiculares á este, lo que es absurdo (**23**).

Corol. 2.° *Dos paralelas* AB *y* CD (fig. 37) *tangentes á una circunferencia* O, *tienen sus puntos de contacto* E *y* F *en los extremos de un mismo diámetro* EF.

Fig. 37.

Porque trazando por el punto de contacto E un diámetro, este será perpendicular á AB, segun el teorema recíproco anterior; luego tambien lo será á CD (**29**, corol. 3.°), luego pasará por el punto de contacto F; pues de lo contrario uniendo F con O, esta línea sería perpendicular á CD, segun el recíproco precedente, y por consiguiente desde el centro habria dos perpendiculares á la CD, lo que es imposible; luego los puntos E y F están en los extremos de un mismo diámetro.

Observacion. Del recíproco anterior, y tambien del número **24**, se infiere que: *la secante dista del centro una cantidad menor que el rádio, la tangente una cantidad igual al rádio, y la línea exterior á la circunferencia una cantidad mayor que el rádio; y recíprocamente* (**12**).

45. Teorema 3.° *Los arcos comprendidos entre paralelas son iguales.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.° que las paralelas sean dos secantes ó dos cuerdas GH y LM: 2.° que sean una secante ó cuerda LM y una tangente AB: 3.° que sean dos tangentes AB y CD.

1.º Si se traza el diámetro EF perpendicular á GH, se tendrá (**42**) HMF=GLF:
pero siendo EF perpendicular á GH, lo será tambien á LM (**29**, corol. 3.º); luego

Fig. 37.

MF=LF:
restando estas dos igualdades se tiene
HMF—MF=GLF—LF ó HM=GL.

2.º Trazando el diámetro EF, será perpendicular á AB (**44**, rec.), y por consiguiente á LM (**29**, corol. 3.º); luego

MHE=LGE.

3.º Por E se traza un diámetro, el cual pasará tambien por F (**44**, corol. 2.º); luego (**36**)

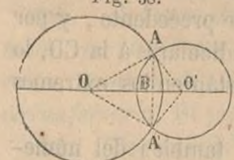
FMHE=FLGE.

46. *Se dice que dos circunferencias son* SECANTES *una de otra cuando tienen dos puntos comunes, y* TANGENTES *cuando solo tienen uno.*

47. TEOREMA 4.º *Si dos circunferencias* O *y* O′ (fig. 38), *tienen un punto comun* A *fuera de la línea* OO′, *que une los centros, serán secantes.*

Bájese desde A una perpendicular AB sobre OO′, y prolónguese de modo que A′B sea igual á AB: uniendo los puntos A y A′ con O y O′, las oblícuas OA y OA′ son iguales (**25**), luego si A es punto de la circunferencia O, tambien lo será A′ (**11**, rec. 1.º): por igual razon las oblícuas AO′ y O′A′ son iguales; luego siendo A punto de la circunferencia O′, tambien A′ lo será; luego las circunferencias O y O′ tienen dos puntos comunes, luego son secantes (**46**).

Fig. 38.



COROL. 1.º *La línea de los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular á la cuerda comun.*

COROL. 2.º *El punto de contacto de dos circunferencias tangentes está en la línea de los centros.*

Porque si estuviese fuera serían secantes.

48. TEOREMA 5.º *Dos circunferencias que están en un mismo plano:*

1.° *Si son exteriores la una á la otra, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios.*

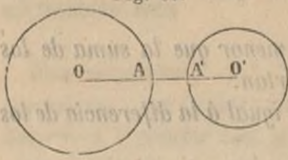
2.° *Si se tocan exteriormente, la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios.*

3.° *Si se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia.*

4.° *Si se tocan interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios.*

5.° *Si son interiores la una á la otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios.*

Fig. 39.

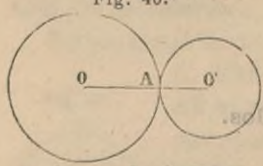


1.° La simple inspeccion de la figura 39 nos da

$$OO' = OA + AA' + A'O' : \text{ de donde}$$
$$OO' > OA + A'O',$$

ó llamando d la distancia de los centros, r y r' los rádios de las circunferencias O y O',

Fig. 40.



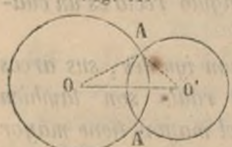
$$d > r + r'.$$

2.° El punto de contacto de estas circunferencias (fig. 40) está en la línea de los centros (**47**, corol. 2.°); luego

$$OO' = OA + AO' \quad \text{ó} \quad d = r + r'.$$

3.° Los puntos de interseccion A y A' (fig. 41) están fuera de la línea de los centros (**47**); luego los puntos O, A y O' no están en línea recta; luego (**5**)

Fig. 41.



$$OO' < AO + AO' :$$

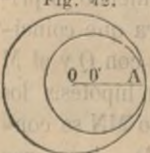
y tambien $OA < OO' + AO'$, de donde

$$OO' > OA - AO',$$

ó reuniendo la primera y última desigualdad,

$$d < r + r', \qquad d > r - r'.$$

Fig. 42.



4.° El punto de contacto de estas circunferencias (fig. 42) está en la línea OO' (**47**, corolario 2.°); luego

$$OO' = OA - O'A$$

ó

$$d = r - r'.$$

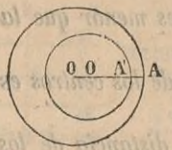
5.° La simple inspeccion de la figura 43 nos da

$$OO'=AO-O'A'-A'A;$$

sumando A'A con el segundo miembro, este crecerá, y por consiguiente

Fig. 43.

$$OO'<OA-O'A' \text{ ó } d<r-r'.$$



RECÍPROCAMENTE. *Dos circunferencias que están en un mismo plano:*

1.º *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios, son exteriores la una á la otra.*

2.º *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los rádios, se tocan exteriormente.*

3.º *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, se cortan.*

4.º *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los rádios, se tocan interiormente.*

5.º *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los rádios, son interiores la una á la otra* (**12**).

ARTÍCULO III.

Medidas de los ángulos.

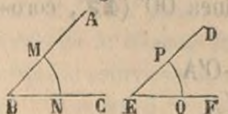
49. *Se llama* ARCO CORRESPONDIENTE *á un ángulo el arco interceptado entre sus lados y trazado desde el vértice como centro.*

COROL. *El arco correspondiente á un ángulo recto es un cuadrante* (**41**, corol.).

50. TEOREMA 1.º 1.º *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes trazados con el mismo rádio son tambien iguales: 2.º si dos ángulos son desiguales, el mayor tiene mayor arco correspondiente, estando los dos arcos trazados con el mismo rádio.*

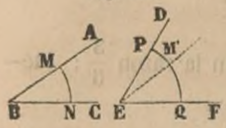
1.º Sean los ángulos B y E (fig. 44): superponiendo el primero al segundo, de manera que coincidan, el punto N coincidirá con Q y el M con P, por ser iguales por hipótesis los rádios BN y EQ; luego el arco MN se confunde con PQ (**35**, obs. 1.ª), luego son iguales.

Fig. 44.



2.° Sean los ángulos B y E (fig. 45); superpóngase el primero al segundo, de modo que coincidan los vértices y que BC caiga sobre EF, y el otro lado BA caerá en la parte interior del ángulo DEF en EM′, por ejemplo; por ser este ángulo mayor que el en B por hipótesis: el punto N caerá sobre Q por la igualdad de los rádios BN y EQ, y NM se ajustará con QP (**35**, observacion 1.ª). Ahora los arcos MN y M′Q son iguales por la primera parte del teorema: pero PQ es evidentemente mayor que M′Q; luego tambien será

Fig. 45.



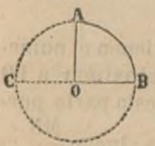
$$PQ > MN.$$

RECÍPROCAMENTE. 1.° *Si dos arcos trazados con el mismo rádio son iguales, sus ángulos correspondientes tambien lo serán:* 2.° *si dos arcos trazados con el mismo rádio son desiguales, el mayor corresponde á mayor ángulo* (**12**).

COROL. *Si el arco* AB (fig. 46), *correspondiente á un ángulo* AOB, *es un cuadrante, el ángulo será recto.*

Porque completando la circunferencia y prolongando BO hasta C, CAB será una semicircunferencia (**36**); pero AB es un cuadrante por hipótesis, luego AC será otro cuadrante; luego los ángulos AOB y AOC son iguales, segun el teorema anterior. Por otra parte, AOB y AOC valen juntos dos rectos (**19**), luego cada uno de ellos valdrá un recto; luego AOB es un ángulo recto.

Fig. 46.

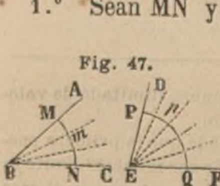


51. TEOREMA 2.° *Dos ángulos cualesquiera son proporcionales á sus arcos correspondientes trazados con igual rádio.*

Se distinguen dos casos: 1.° que los arcos sean conmensurables: 2.° que sean inconmensurables (**6**).

1.° Sean MN y PQ conmensurables (fig. 47) y $Mm = Pp$ la unidad de medida comun. Supongamos que esta se puede colocar en MN tres veces y cinco en PQ, y se tendrá

Fig. 47.



$$\frac{MN}{PQ} = \frac{3}{5}.$$

Trazando por los puntos de division de estos arcos y por los vértices líneas rectas, los ángulos ABC y DEF quedarán divididos el primero en tres ángulos y el segundo en cinco, todos iguales entre sí (**50**, rec.); luego

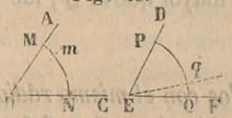
$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{3}{5}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen comun la razon $\frac{3}{5}$; luego (Alg. **183**)

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}.$$

2.° Sean MN y PQ (fig. 48) inconmensurables; supongamos que el arco MN se divide en partes iguales entre sí, tan pequeñas como se quiera (lo que es posible, puesto que se puede suponer dividido MN en dos partes iguales, cada una de estas en otras dos y así sucesivamente); y que una de estas partes sea Mm: colóquese esta medida sobre PQ todas las veces que se pueda, y quedará un resto qQ, una vez que MN y PQ son inconmensurables: trácese luego la recta Eq.

Fig. 48.



Siendo los arcos MN y Pq conmensurables se tendrá segun la primera parte del teorema

$$\frac{ABC}{DEq}=\frac{MN}{Pq}.$$

Comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{ABC}{DEF} \text{ y } \frac{MN}{PQ},$$

se observará que los segundos (que están en columna) tienen el numerador MN comun, y que el denominador Pq se puede aproximar á PQ todo lo que se quiera; porque qQ es menor que Mm, y esta parte puede ser más pequeña que una cantidad cualquiera dada; luego $\frac{MN}{PQ}$ es el límite de $\frac{MN}{Pq}$ (*): por igual razon $\frac{ABC}{DEF}$ es el límite de $\frac{ABC}{DEq}$; pero las cantidades variables son iguales, luego los límites tambien lo serán [(*) teor.]; luego

$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}.$$

(*) Se llama cantidad *variable* la que admite un número ilimitado de valores distintos, y *constante* la que no admite más de uno.

Límite de una cantidad variable es otra constante, á la que la primera puede aproximarse cuanto se quiera; pero sin que jamás le sea igual. El límite es *superior* cuando creciendo la variable se aproxima á él, é *inferior* en el caso contrario.

Teorema (llamado de los límites). *Si dos cantidades variables* x *y* z, *perma-*

OBSERVACION. La unidad de medida de los ángulos es un ángulo, y la de los arcos otro arco: porque la unidad de medida ha de ser siempre de la misma naturaleza que la cantidad que se mide; si, pues, tomamos por unidad de medida del ángulo ABC el DEF, y por unidad de medida de los arcos el PQ correspondiente á la unidad de medida angular, la igualdad anterior $\frac{ABC}{DEF}=\frac{MN}{PQ}$ nos dice que

La relacion de un ángulo con su unidad de medida es la misma que la de su arco correspondiente con su unidad de medida tambien.

En las mismas hipótesis anteriores la igualdad precedente se convierte en $\frac{ABC}{1}=\frac{MN}{1}$ ó $ABC=MN$;
luego en igual sentido se puede decir que

La medida (2) de un ángulo es su arco correspondiente.

52. El ángulo tomado comunmente por unidad de medida es el ángulo recto, y como su arco correspondiente es un cuadrante (**49**, corol.), el cuadrante será tambien la unidad de medida de los arcos. A fin de facilitar la determinacion de las relaciones de los arcos con el cuadrante, se divide este en 90 grados, de manera que la circunferencia tiene 360 de estos: cada grado se divide en 60 minutos, cada minuto en 60 segundos, etc.

Los grados, minutos, segundos etc. se indican así

$$42 \text{ grados}, 12 \text{ minutos}, 37 \text{ segundos} = 42^{\circ}\ 12'\ 37''.$$

Siendo la medida de un ángulo su arco correspondiente (observacion anterior) la misma denominacion de los arcos se aplica á

---

neciendo iguales entre si, se aproximan á sus límites respectivos A y B, estos serán iguales.

En efecto, se puede suponer á x un valor que se aproxime á A todo lo que se quiera; luego tambien se puede suponer á z el mismo valor, puesto que x y z permanecen siempre iguales; luego A es tambien límite de z, luego A y B son límites de z (la primera de estas cantidades por lo que se acaba de demostrar y la segunda por hipótesis); y como una misma variable z no puede aproximarse del mismo modo á dos límites diferentes, A es igua' B.

los ángulos.; así se dice que un ángulo tiene, por ejemplo, 13° 48′ 14″, cuando su arco correspondiente es de 13° 48′ 14″; segun lo cual *el ángulo recto tiene* 90°, *el agudo ménos de* 90° *y el obtuso más de* 90°.

Modernamente se ha dividido la circunferencia tambien en cuatro cuadrantes, pero cada cuadrante en 100 grados, cada grado en 100 minutos, cada minuto en 100 segundos, etc. Para distinguir los grados, minutos y segundos, etc. de una y otra division, llamaremos *sexagesimales* á los de la division antigua y *centesimales* á los de la moderna (*). Cuando no se haga diferencia entenderemos que se habla de la division antigua, que es todavía la más usada.

53. Aunque la medida de un ángulo es su arco correspondiente, conviene sin embargo muchas veces referir la medida de ciertos ángulos á arcos no trazados desde el vértice como centro, y de esto vamos á ocuparnos al presente.

El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia se llama INSCRIPTO *si está formado por dos cuerdas, y* SEMI-INSCRIPTO *si por una tangente y una cuerda.*

El ángulo cuyo vértice está dentro de una circunferencia se llama INTERIOR; *y es* CENTRAL *cuando su vértice está en el centro, y* EXCÉNTRICO *en otro caso.*

El ángulo cuyo vértice está fuera de una circunferencia, y cuyos lados tocan ó cortan á esta se llama EXTERIOR.

54. TEOREMA 3.° *El ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido por sus lados.*

Se distinguen tres casos: 1.° que el centro de la circunferencia esté en uno de los lados: 2.° que esté comprendido entre ellos: 3.° que esté fuera del ángulo.

Sea el ángulo ABC (fig. 49), cuyo lado BC pasa por el centro O. Trazando el diámetro DE paralelo á AB, el ángulo ABC

(*) Los franceses llaman *degrés* á los de la primera division y *grades* á los de la segunda.

Es inútil advertir que por medio de una simple proporcion se reducen los grados de la division antigua á grados de la moderna, puesto que estas divisiones están en la razon 90 : 100 ó 9 : 10.

es igual á DOC por correspondientes: pero este tiene por medida el arco DC; luego ABC tambien tendrá por medida el mismo arco DC.

Fig. 49.

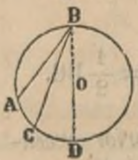
Ahora, el arco DC es igual á BE, por arcos correspondientes y trazados con el mismo rádio, de los ángulos iguales (**21**) DOC y BOE: BE es tambien igual á AD (**45**); luego DC es igual á AD, luego DC es la mitad de AC. Luego el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC comprendido entre sus lados.

2.° Si el ángulo fuese ABC (fig. 50), que comprende el centro O entre sus lados, trazando el diámetro BD se tiene que el ángulo ABC se compone de ABD y DBC: pero la medida de ABD es la mitad de AD, y la de DBC la mitad de DC, segun la primera parte del teorema; luego ABC tendrá por medida la mitad de AD más la mitad de DC, ó sea la mitad de AC.

Fig. 50.

3.° Si el ángulo fuera ABC (fig. 51), cuyos lados AB y BC están á la izquierda del centro O, trazando el diámetro BD, se tendrá que ABC sería igual á ABD ménos CBD: pero ABD tiene por medida la mitad del arco ACD, y CBD la mitad de CD, segun la primera parte del teorema; luego la medida de ABC será

Fig. 51.



$$\frac{1}{2}ACD - \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(ACD - CD) = \frac{1}{2}AC.$$

Corol. 1.° *Los ángulos inscriptos, cuyos lados comprenden un mismo arco ó arcos iguales, son iguales.*

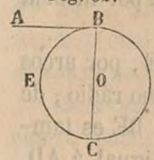
Corol. 2.° *Los ángulos inscriptos, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro ó comprenden una semicircunferencia, son rectos* (**50**, corol.), *los que comprenden un arco mayor obtusos, y los que menor agudos.*

55. Teorema 4.° *El ángulo semi-inscripto tiene por medida la mitad del arco comprendido por sus lados.*

Tambien distinguiremos tres casos: 1.° que el centro de la circunferencia esté en la cuerda: 2.° que esté comprendido entre los dos lados: 3.° que esté fuera de ellos.

1.° Sea el ángulo ABC (fig. 52), cuyo lado BC pasa por el centro O; este ángulo será recto (**41**, rec.), luego tendrá por medida un cuadrante (**49**, corolario y **51**, obs.), ó sea la mitad de la semicircunferencia BEC comprendida por sus lados.

Fig. 52.



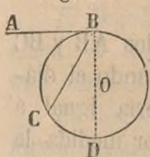
2.° Si el ángulo es ABC (fig. 53), cuyos lados comprenden el centro O, trazando el diámetro BD se tendrá que ABC es igual á ABD más DBC: pero la medida de ABD es la mitad de BED, segun el primer caso del teorema, la de DBC es la mitad de DC (**54**); luego la de ABC será

Fig. 53.

$$\frac{1}{2}\,\text{BED}+\frac{1}{2}\,\text{DC}=\frac{1}{2}\,\text{BEDC}.$$

3.° Si el ángulo fuese ABC (fig. 54), cuyos lados estan á la izquierda del centro O, trazando el diámetro BD se tendrá que ABC es igual á ABD ménos CBD: pero la medida de ABD es la mitad de BCD, segun el primer caso, y la de CBD la mitad de CD; luego la medida de ABC será

Fig. 54.



$$\frac{1}{2}\,\text{BCD}-\frac{1}{2}\,\text{CD}=\frac{1}{2}\,(\text{BCD}-\text{CD})=\frac{1}{2}\,\text{BC}.$$

56. Teorema 5.° *El ángulo* ABC (fig. 55), *interior excéntrico, tiene por medida la semisuma de los arcos* AC *y* ED *comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de estos.*

Trazando la recta DF paralela á EC, se tiene que los ángulos ABC y ADF son iguales por correspondientes; pero ADF tiene por medida la mitad del arco ACF (**54**); luego ABC tendrá la misma medida.

Fig. 55.

Ahora el arco ACF es igual á AC más CF ó á AC más ED, puesto que CF y ED son iguales (**45**), luego la medida de ABC será

$$\frac{1}{2}\,(\text{AC}+\text{ED}).$$

57. Teorema 6.° *El ángulo exterior tiene por medida la mitad del arco cóncavo comprendido entre sus lados, ménos* *la mitad del arco convexo comprendido entre los mismos* (*).

Conviene tambien distinguir tres casos: 1.° que el ángulo esté formado por dos secantes: 2.° por una secante y una tangente: 3.° por dos tangentes.

1.° Sea el ángulo ABC (fig. 56) formado por dos secantes AB y BC: trazando la cuerda EF paralela á AB, se tendrá que el ángulo ABC es igual al FEC por correspondientes: pero este tiene por medida la mitad del arco FC; luego ABC tendrá la misma medida. Por otra parte el arco AF es igual al DE (**45**); y por consiguiente

Fig. 56.

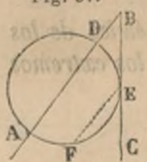
$$FC = AC - AF = AC - DE.$$

Luego la medida de ABC es, por último,

$$\frac{1}{2}(AC - DE) = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE.$$

2.° Si el ángulo es ABC (fig. 57) formado por la secante AB y la tangente BC, trazando por el punto de contacto E la recta EF paralela á AB, se tendrá que el ángulo ABC es igual al FEC por correspondientes: mas FEC tiene por medida la mitad del arco FE (**55**); luego ABC tendrá la misma medida.

Fig. 57.



El arco FE es igual á AFE ménos AF, ó á AFE ménos DE, puesto que AF y DE son iguales (**45**); luego la medida de ABC es, por último,

$$\frac{1}{2}(AFE - DE) = \frac{1}{2} AFE - \frac{1}{2} DE.$$

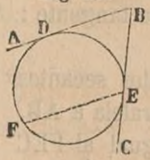
3.° Siendo el ángulo ABC (fig. 58), cuyos lados son las tangentes AB y BC, se traza por uno de los puntos de contacto E la recta EF paralela á AB, y se tendrá que el ángulo ABC es igual á FEC, por correspondientes: pero FEC tiene por medida la mitad del arco FE; luego ABC tendrá la misma medida.

Fig. 58.

(*) Una curva cualquiera se llama *cóncava* respecto de un punto cuando sus puntos intermedios son los que más se alejan de dicho punto, y *convexa* cuando sucede lo contrario. El arco AC (fig. 56) es cóncavo respecto al punto B, y el DE convexo respecto al mismo punto.

El arco FE es igual á DFE ménos DF, ó á DFE ménos DE,

Fig. 58.



una vez que DF y DE son iguales (**45**); luego la medida de ABC será por fin

$$\frac{1}{2}\ (\mathrm{DFE}-\mathrm{DE})=\frac{1}{2}\ \mathrm{DFE}-\frac{1}{2}\ \mathrm{DE}.$$

Observacion. Del corolario 2.º, núm. **54**, y de los teoremas de los núms. **56** y **57** se infiere que *Cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro:*

1.º *Si el ángulo tiene su vértice en la circunferencia, es recto: 2.º si le tiene dentro, es obtuso: 3.º y si le tiene fuera es agudo.*

Recíprocamente. *Cuando los lados de un ángulo pasan por los extremos de un diámetro:*

1.º *Si el ángulo es recto, tiene su vértice en la circunferencia: 2.º si es obtuso, le tiene dentro: 3.º y si es agudo, le tiene fuera* (**12**).

Corolario. *La circunferencia es el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro.*

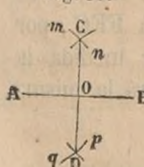
PROBLEMAS GRÁFICOS

relativos á los dos capítulos precedentes (*).

58. 1.º **Dividir una recta AB en dos partes iguales por medio de una perpendicular.**

Se hace centro en el extremo A (fig. 59), y con un rádio

Fig. 59.



mayor que la mitad de AB, se trazan dos arcos *mn* y *pq*; se hace centro en B, y con el mismo rádio se trazan dos arcos, que cortarán á los anteriores (**48**, rec. 3.º) en los puntos C y D, se unen estos puntos por una recta, la cual dividirá á la AB en dos partes iguales AO y OB.

Porque la recta CD tiene los puntos C y D equidistantes de

(*) Se llaman problemas *gráficos* los que se resuelven con la **regla y el** compás, á diferencia de los *numéricos* que se resuelven por el cálculo.

los puntos A y B de la recta AB, por rádios de círculos iguales, luego le será perpendicular en su punto medio (**26**, corol. 2.°); luego

$$AO=OB.$$

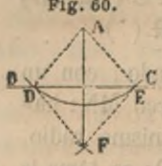
Observacion. Cada una de las partes AO y OB puede dividirse del mismo modo en otras dos, cada una de estas en otras dos, y así sucesivamente; de manera que una recta puede dividirse por este medio en un número de partes iguales expresado por 2, 4, 8, ..., y en general por una potencia cualquiera entera de 2.

59. 2.° Por un punto dado trazar una perpendicular á una recta (*).

Distinguiremos tres casos: 1.° que el punto esté fuera de la recta: 2.° que se halle en esta: 3.° que esté en uno de sus extremos, sin que pueda prolongarse más allá de dicho extremo.

1.° Sea el punto A y la recta BC (fig. 60).

Fig. 60.

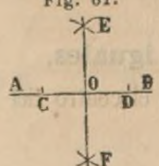


Hágase centro en A, y con un rádio mayor que la distancia de A á BC trácese un arco, que cortará á la BC en dos puntos D y E (**44**, obs.): hágase centro en estos puntos y con el mismo rádio, ú otro mayor que la mitad de ED, descríbanse otros dos arcos, que aun en la primera hipótesis (una vez que DE<AD+AE, de donde DE<DF+FE) se cortarán en F (**48**, rec. 3.°): únase el punto F con A, y la recta AF será la perpendicular pedida.

Porque tiene los puntos A y F equidistantes de D y E; luego le es perpendicular (**26**, corol. 2.°).

2.° Si el punto fuese O, y AB (fig. 61) la recta á que se ha de trazar la perpendicular, tomariamos á la derecha é izquierda de O las distancias iguales OD y OC: haciendo centro en C, y con un rádio mayor que la mitad de CD, describiriamos un arco por la parte superior ó inferior de la recta dada: haciendo centro en D y con el mismo rá-

Fig. 61.



(*) Este problema se resuelve facilísimamente por medio de la *escuadra*, como se comprende con solo tenerla á la vista.

dio , trazariamos otro arco que cortase á uno de los dos anteriores (**48**, rec. 3.º) en el punto E ó F; y uniendo uno de estos puntos con O, se tendrá la perpendicular pedida.

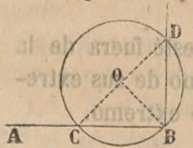
Fig. 61.

Porque tiene los puntos E y O ó F y O equidistantes de C y D; luego es perpendicular á la CD (**26**, corol. 2.º) ó á la AB.

3.º Sea el punto B, extremo de la AB (fig. 62) que no puede prolongarse en este sentido.

Se elige un punto O fuera de la recta AB, tal que la circunferencia descrita desde él, con el rádio OB, corte á la recta dada en un punto cualquiera C (para lo que basta que el ángulo OBA sea agudo): se traza el diámetro CD: se une el punto D con B, y la recta DB será la perpendicular pedida.

Fig. 62.



Porque el ángulo ABD es recto (**54**, corol. 2.º).

60. 3.º **En un punto C de una recta AB (fig.63) formar un ángulo igual á otro dado EFG** (*).

Haciendo centro en el vértice F del ángulo dado, con un rádio cualquiera se traza el arco MN: haciendo centro en C, y con el mismo rádio, se traza el arco indefinido PQ: se toma la cuerda MN y se aplica sobre PQ, que principiando en Q llegará á O, por ejemplo: por C y O se traza la recta DC, y el ángulo DCB será el pedido.

Fig. 63.

Porque siendo las cuerdas MN y OQ iguales, los arcos MN y OQ lo serán tambien (**39**, rec. 1.º); luego los ángulos DCB y EFG son iguales (**50**, rec. 1.º).

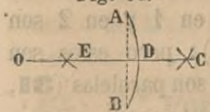
61. 4.º **Dividir un arco en dos partes iguales.**

Distinguiremos dos casos: 1.º que sea conocido el centro del arco: 2.º que no lo sea.

(*) Este problema se resuelve con mucha facilidad por medio del *semicírculo* ó de la *falsa escuadra*, como se comprende sin más explicacion que tener á la vista estos instrumentos.

1.° Si el arco es AB (fig. 64) cuyo centro está en O, se traza la cuerda AB, y desde O se le baja una perpendicular (**59**, 1.°) OC, y esta dividirá el arco en dos partes AD y BD iguales (**41**).

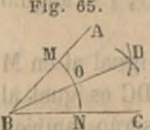
Fig. 64.



2.° Si el arco AB no tuviese el centro O determinado, se trazaria tambien su cuerda AB, y esta se dividiria en dos partes iguales por la perpendicular EC (**58**), la cual dividiria del mismo modo el arco dado en dos partes AD y BD iguales (**41**, obs.)

Corol. Para dividir un ángulo ABC (fig. 65) en dos partes iguales, ó sea para trazar su bisectriz, se describe su arco correspondiente MN, y se divide en dos partes iguales (**61**, 1.°) por medio de la recta BD, la cual será la bisectriz de dicho ángulo.

Fig. 65.



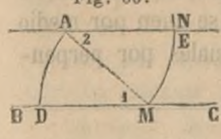
Porque si los arcos MO y ON son iguales, los ángulos ABD y DBC lo serán tambien (**50**, rec. 1.°).

Observacion. Cada uno de los arcos MO y ON, ó cada ángulo ABD y DBC, puede dividirse del mismo modo en otras dos partes iguales, cada una de estas en otras dos y así sucesivamente; de manera que un arco y un ángulo pueden dividirse por este medio en un número de partes iguales expresado por 2, 4, 8, ..., y en general por una potencia cualquiera entera de 2 (*).

62. 5.° **Por un punto A fuera de una recta BC (fig. 66) trazarle una paralela.**

Se hace centro en A, y con un rádio mayor que la distancia de A á dicha recta, se traza un arco MN, que cortará la recta BC (**44**, obs.) en un punto cualquiera M: se hace centro en M, y con el mismo rádio se describe el arco AD: se toma sobre MN una parte ME

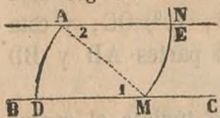
Fig. 66.



(*) Es famoso en Geometría el problema de la *triseccion* del ángulo ó del arco, por los inútiles esfuerzos que se han hecho para resolverle con solo el auxilio de la línea recta y circunferencia; pero esto es imposible. *Lacroix* le resuelve por la interseccion de ramas de parábola. (V. *Traité de Trigonométrie*, pág. 260.)

igual con AD, y por los puntos A y E se traza una recta, que será la paralela pedida.

Fig. 66.

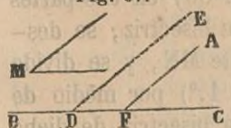


Porque los ángulos en 1 y en 2 son iguales (**50**, rec. 1.º): pero estos son alternos; luego BC y AE son paralelas (**31**, 1.º) (*).

63. 6.º **Por un punto A fuera de una recta BC (fig. 67) trazar otra recta AF, que forme con la primera un ángulo AFC igual á otro ángulo dado M.**

En un punto cualquiera D de la BC se forma el ángulo EDC igual al dado M (**60**): por A se traza una recta AF paralela á ED (**62**), y el ángulo AFC será el pedido.

Fig. 67.

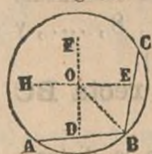


Porque el ángulo EDC es igual al en M por construccion: pero el EDC es igual al AFC (**31**, rec. 1.º); luego los ángulos AFC y M serán tambien iguales.

64. 7.º **Describir la circunferencia que determinan tres puntos A, B, C (fig. 68), que no están en línea recta**

Unanse los puntos dados por medio de dos rectas AB y BC: divídanse estas en dos partes iguales por medio de perpendiculares (**58**); y haciendo centro en el punto O donde se encuentran, y con un rádio igual á OB, se traza una circunferencia, la cual pasará tambien por los otros dos puntos A y C (**38**), y será la pedida.

Fig. 68.



Corol. Para determinar el centro de una circunferencia ó de un arco cualquiera, se toman tres puntos: se unen por medio de cuerdas: se dividen estas en dos partes iguales por perpen-

---

(*) Este problema puede resolverse tambien trazando por A una recta que corte á la BC, y formando los ángulos alternos ó correspondientes iguales, ó los internos de un mismo lado suplementarios: é igualmente bajando desde A una perpendicular á BC, y trazando por A otra perpendicular á esta última (**31** y **28**); pero el medio más exacto en la práctica es el que hemos empleado.

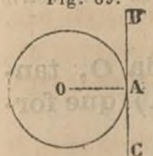
Con la escuadra se resuelve tambien fácilmente; y por medio de esta y la regla siempre que sobre el papel deban trazarse muchas rectas paralelas entre sí.

diculares, y donde estas se corten será el centro buscado. Las dos cuerdas pueden trazarse tomando cuatro puntos de la circunferencia ó del arco. En este caso las dos cuerdas no tienen un punto comun.

65. 8.° **Por un punto dado trazar una tangente á la circunferencia.**

Distinguiremos dos casos: 1.° que el punto dado esté situado en la circunferencia: 2.° que esté fuera de ella; porque si estuviese dentro, el problema sería evidentemente imposible.

Fig. 69.

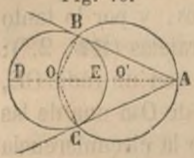


1.° Sea el punto A (fig. 69) situado en la circunferencia O.

Unase el punto O con A; trácese la perpendicular BC al extremo A del rádio OA, y BC será la tangente pedida (**41**, 1.°).

2.° Sea el punto A (fig. 70) situado fuera de la circunferencia O. Unase el punto O con A, y sobre esta recta como diámetro descríbase la circunferencia O′, la cual cortará á la O en dos puntos (**48**, rec. 3.°) B y C; por A y por los puntos B y C se trazan las dos rectas indefinidas AB y AC, cada una de las cuales será la tangente pedida.

Fig. 70.



Porque trazando los rádios OB y OC, los ángulos ABO y ACO son rectos (**54**, corol. 2.°); luego AB y AC son tangentes á la circunferencia O (**41**, 1.°).

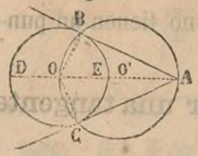
Corol. *Las partes* AB *y* AC *de las tangentes, comprendidas entre el punto* A *y el de contacto, son iguales; la recta* OA, *que pasa por el centro y por el punto dado, divide al ángulo* BAC, *formado por las tangentes, y al arco convexo* BEC, *comprendido entre las mismas, en dos partes iguales.*

En efecto, doblando la figura por la recta AD, la semicircunferencia ABO coincide con la ACO, y la EBD con la ECD (**36**): y como el punto B es comun á las dos semicircunferencias superiores, tendrá que coincidir con el C, donde se cortan las inferiores; luego AB coincide con AC, el ángulo BAO con el OAC y el arco BE con el EC. Luego

$$AB = AC, \quad BAO = OAC, \quad BE = EC.$$

RECÍPROCAMENTE. *Si una recta* DA *divide en dos partes iguales el ángulo* BAC, *formado por dos tangentes á una circunferencia, pasará por el centro* O *de esta.*

Fig. 70.



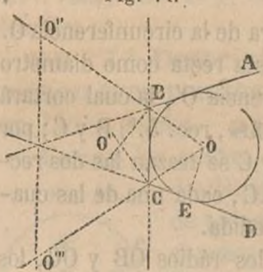
Porque de lo contrario, trazando por O y A una recta habria dos bisectrices de un mismo ángulo BAC, lo que es absurdo.

OBSERVACION. El *lugar geométrico* de los centros de las circunferencias tangentes á los lados de un ángulo es la bisectriz de este.

66. 9.° **Describir una circunferencia O, tangente á tres rectas AB, BC y CD (fig. 71), que forman entre sí ángulos cualesquiera.**

Trácense las bisectrices de los ángulos, las que se cortarán en un punto O; porque siendo cada uno de los ángulos B y C menor que dos rectos (**19**, corol. 2.°), la suma de sus mitades OBC y OCB vale ménos tambien que dos rectos, y por lo tanto OB y OC no son paralelas (**31**, 2.°): hágase centro en O, y con un rádio OE, igual á las distancias de O á una de las rectas CD, se describe la circunferencia pedida.

Fig. 74.



Porque BO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á AB y BC (**65**, obs.); por igual razon CO es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes á BC y CD, luego el punto O, donde se cortan, será el centro de la circunferencia que se quiere trazar, y la distancia á una de las rectas dadas el rádio de dicha circunferencia.

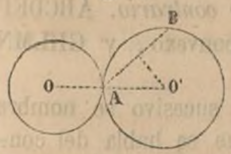
OBSERVACION. Suponiendo prolongadas indefinidamente las rectas AB, BC y CD, se podrian trazar otras tres circunferencias tangentes á las mismas rectas, cuyos centros serían O', O'', y O'''.

67. 10. **Trazar una circunferencia tangente á otra en un punto dado, y que pase por otro punto tambien dado, exterior ó interior á ella.**

Distinguiremos dos casos: 1.° que el punto dado (que no se halla en la circunferencia) sea exterior: 2.° que sea interior.

1.° Sea O (fig. 72) la circunferencia dada, A el punto de contacto y B el exterior por donde ha de pasar la circunferencia, que va á describirse.

Fig. 72.



Trácese la recta AB y el rádio OA, prolongándole indefinidamente en este sentido: divídase la AB en dos partes iguales por una perpendicular, la que encontrará á la OA prolongada suficientemente, si el ángulo BAO es oblícuo (**29**): desde el punto O', donde se cortan, con el rádio O'A se describe una circunferencia que será la pedida.

Porque pasando por A pasará tambien por B (**26**, 1.°), y será tangente á la circunferencia O (**48**, recíproco 2.°).

Fig. 73.

2.° Si el punto B (fig. 73) es interior, se ejecuta una construccion análoga á la precedente como se ve en la figura.

Observacion. Si el ángulo BAO (figs. 72 ó 73) fuese recto, el problema sería imposible.

CAPÍTULO III.

De los polígonos.

ARTÍCULO PRIMERO.

Definiciones preliminares.

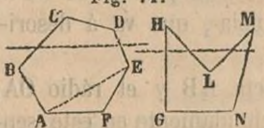
68. *Se llama* polígono *la porcion de superficie plana limitada por rectas.* Estas rectas, los ángulos que forman y sus vértices, reciben los nombres de *lados*, *ángulos* y *vértices* del polígono.

Llámase perímetro *del polígono la suma ó conjunto de sus lados.*

DIAGONAL *es la recta que une dos vértices no contiguos á un mismo lado*, como AE (fig. 74).

Un polígono se llama CONVEXO *cuando no puede ser cortado por una recta más que en dos puntos ; y* CÓNCAVO *en el caso contrario*. ABCDEF es un polígono convexo, y GHLMN cóncavo.

Fig. 74.



Cuando en lo sucesivo se nombre un polígono en general, se entenderá que se habla del convexo, que es el único de cuyas propiedades nos ocuparemos en adelante.

Se llama polígono EQUILÁTERO *el que tiene todos sus lados iguales entre sí*, *y* EQUIÁNGULO *el que tiene sus ángulos iguales*.

Llámase polígono REGULAR *el que es equilátero y equiángulo*, *é* IRREGULAR *el que no reune estas dos circunstancias*.

69. Un polígono tiene evidentemente tantos lados como ángulos y como vértices; por razon, pues, del número de lados ó ángulos (*) se clasifican los polígonos de la manera siguiente:

El polígono que tiene 3 lados se llama *triángulo*.
4. . . . . *cuadrilátero*.
5. . . . . *pentágono*
6. . . . . *exágono*
7. . . . . *heptágono*.
8. . . . . *octógono*.
9. . . . . *eneágono*.
10. . . . . *decágono*.
11. . . . . *endecágono*,
12. . . . . *dodecágono*.
15. . . . . *pentedecágono*.

Los polígonos de diferente número de lados de los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama polígonos de 13, 20, 100, etc. lados.

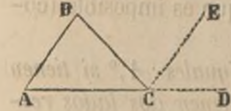
(*) El cuadrilátero es el único polígono que toma el nombre del número de sus lados, los demás le toman del de sus ángulos.

ARTICULO II.

De los triángulos.

70. De la definicion de la línea recta (**5**) se infiere que (fig. 75) $AC < AB + BC$, y tambien que $AC + BC > AB$, de donde $AC > AB - BC$; luego

Fig. 75.



Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

71. Teorema 1.° *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

Sea el triángulo ABC. Trazando por C una recta CE paralela á AB, se tendrá (**31**, rec. 1.°)

$$BAC + ACE = 2R \quad \text{ó} \quad BAC + ACB + BCE = 2R:$$

pero (**31**, rec. 1.°) $\quad BCE = CBA; \quad$ luego

$$BAC + ACB + CBA = 2R.$$

Corol. 1.° *Un ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos;* y por consiguiente, *si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, tambien tendrán igual el tercer ángulo* (**18**, corol.).

Corol. 2.° *El ángulo* BCD, *formado por un lado* BC *de un triángulo y la prolongacion* CD *de otro, llamado ángulo* externo, *es igual á la suma de los dos internos* A *y* B *no adyacentes.*

Porque la suma de A y B tiene por suplemento el ángulo ACB (corol. ant.): pero BCD tiene tambien por suplemento á ACB (**19**); luego (**18**, corol.)

$$BCD = A + B.$$

Corol. 3.° *Si un triángulo tiene un ángulo recto ú obtuso, los demás serán agudos.*

Llámase triángulo rectángulo *el que tiene un ángulo recto,* obtusángulo *el que tiene un ángulo obtuso, y* acutángulo *el que tiene sus tres ángulos agudos.*

En el triángulo rectángulo *se llama* hipotenusa *el lado opuesto al ángulo recto, y* catetos *los lados que forman dicho ángulo recto.*

Corol. 4.° *Los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios : y* recíprocamente, *si dos ángulos de un triángulo son complementarios, el triángulo será rectángulo.*

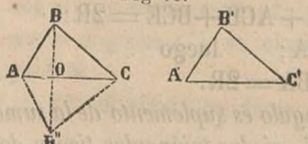
Corol. 5.° *Si desde un punto de una oblícua se baja una perpendicular sobre la recta á que lo es , la perpendicular caerá dentro del ángulo agudo.*

Porque si cayese dentro del ángulo obtuso, resultaria un triángulo con un ángulo obtuso y otro recto, lo que es imposible (corolario 3.°).

72. Teorema 2.° *Dos triángulos son iguales : 1.° si tienen sus tres lados respectivamente iguales: 2.° si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido: 3.° si tienen un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales.*

1.° Sean los triángulos ABC y A′B′C′ (fig. 76) en que suponemos AB=A′B′, BC =B′C′ y AC=A′C′ : colóquese el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de modo que A′C′ coincida con su igual AC, y que el vértice B′ caiga á diferente lado de la AC que el vértice B, en B″ por ejemplo, únanse los puntos B y B″.

Fig 76.



La recta AC tiene el punto A equidistante de B y B″ por ser rectas AB y AB″ iguales por hipótesis : por igual razon C equidista tambien de B y B″; luego la AC es perpendicular á la BB″, y la divide en dos partes iguales OB=OB″ (**26**, corolario 2.°). Doblando, pues, esta figura por AC, la parte inferior sobre la superior, OB″ caerá sobre OB (**23**), y el punto B″ coincidirá con B; luego los tres vértices de los triángulos ABC y AB″C coinciden; luego tambien los lados y ángulos, luego son iguales: pero el triángulo AB″C representa A′B′C′; luego

ABC= A′B′C′.

2.° Si los triángulos fuesen los mismos, y se supusiese AB=A′B′, AC=A′C′ y el ángulo BAC igual al B′A′C′, colocando el triángulo A′B′C′ sobre el ABC, de modo que A′C′ coincidiese con su igual AC, y el vértice B′ cayese hácia la parte superior de AC como el vértice B, el ángulo B′A′C′ coincidirá con su igual BAC y el punto B′ caerá sobre B, por ser iguales tambien por hipótesis las rectas A′B′ y AB; luego los tres vértices de los triángulos coinciden, luego los triángulos son iguales.

3.° Sean los mismos triángulos, en que se supone AC=A′C′; el ángulo BAC=B′A′C′ y ACB=A′C′B′: superponiendo dichos triángulos de manera que A′C′ coincida con su igual AC, A′B′ caerá sobre AB por ser iguales los ángulos BAC y B′A′C′, y B′C′ caerá sobre BC por igual razon; luego el punto B′ coincidirá con B (**5**; corol. 3.°); luego los tres vértices de los triángulos se confunden, luego los triángulos son iguales.

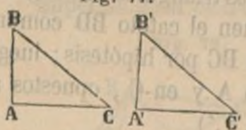
Corol. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera respectivamente iguales, con tal que estos tengan la misma colocacion en los dos triángulos respecto al lado igual.*

Porque teniendo dos ángulos respectivameute iguales, tienen el tercero tambien igual (**71**, corol. 1.°), luego si los ángulos respectivamente iguales tienen la misma colocacion respecto al lado igual, tendrán necesariamente un lado igual contiguo á dos ángulos iguales.

73. Teorema 3.° *Dos triángulos rectángulos* ABC *y* A′B′C′ (fig. 77) *son iguales si tienen las hipotenusas* BC *y* B′C′ *iguales y un cateto* AB *igual á otro cateto* A′B′.

Superpóngase el triángulo A′B′C′ al ABC, de modo que el cateto A′B′ coincida con su igual AB: el cateto A′C′ caerá sobre AC, por la igualdad de los ángulos rectos en A′ y en A, y la hipotenusa B′C′ sobre BC, pues de lo contrario B′C′ y BC serían desiguales (**25**, 2.°), lo que es contra la hipótesis; luego el punto C′ caerá sobre C, luego los triángulos son iguales.

Fig. 77.



Observacion 1.ª En este caso de igualdad de triángulos, lo mismo que en los del número anterior, se notará que los ángulos que coinciden son los opuestos á lados iguales, y que los lados que tambien coinciden son los opuestos á ángulos iguales; de manera que en *triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente.*

Observacion 2.ª Si al superponer estos triángulos suponemos AB=A′B′ y BC<B′C′, se notará que B′>B y por consiguiente C>C′; de donde resulta que dos triángulos rectángulos, que tienen igual un cateto y la hipotenusa desigual, el ángulo agudo opuesto á dicho cateto es mayor en el que tiene menor hipotenusa.

74. Los triángulos por razon de sus lados se dividen tambien en ESCALENOS, *que tienen sus tres lados desiguales*, ISÓSCELES, *que tienen dos lados iguales*, *y* EQUILÁTEROS, *que tienen los tres lados iguales entre sí.*

Se llama BASE *de un triángulo uno cualquiera de sus lados;* VÉRTICE *el vértice del ángulo opuesto al lado tomado por base*, *y* ALTURA *la perpendicular bajada desde el vértice á la base ó á su prolongacion.*

Si AC es la base del triángulo ABC (fig. 78), el punto B será el vértice, y la perpendicular BD la altura.

COROL. *En el triángulo rectángulo si un cateto es la base el otro será la altura.*

OBSERVACION. En el triángulo isósceles suele llamarse base el lado desigual.

75. TEOREMA 4.° *En todo triángulo: 1.° á lados iguales se oponen ángulos iguales: 2.° al mayor lado se opone el mayor ángulo.*

1.° Sea el triángulo ABC (fig. 78) en que se supone AB=BC, y vamos á demostrar que el ángulo en A es igual al en C.

Fig. 78.

Bájese desde B una perpendicular BD sobre AC. Los triángulos rectángulos ABD y DBC tienen el cateto BD comun: y la hipotenusa AB igual á la hipotenusa BC por hipótesis; luego son iguales (**73**); luego los ángulos en A y en C, opuestos al lado comun, tambien lo serán (**73**, obs. 1.ª)

2.° Sea el triángulo EFG (fig. 78); si FG>FE, el ángulo FEG será mayor que el G.

Tomando sobre FG una parte FH=FE se tendrá, segun la primera parte del teorema, el ángulo

FEH=FHE:

pero (**71**, corol. 2.°) FHE>G; luego

FEH>G:

el ángulo FEH es una parte de FEG; luego con mayor razon

FEG>G.

RECÍPROCAMENTE. *En todo triángulo: 1.° á ángulos iguales se oponen lados iguales: 2.° al mayor ángulo se opone el mayor lado* (**12**).

Corol. 1.º *Si un triángulo es isósceles, los ángulos contiguos á la base son iguales, y recíprocamente.*

Corol. 2.º *Si un triángulo es equilátero, será tambien equiángulo, y recíprocamente; luego el triángulo equilátero ó equiángulo es un polígono regular.*

Corol. 3.º *El mayor lado en el triángulo obtusángulo es el opuesto al ángulo obtuso, y en el rectángulo la hipotenusa.*

Observacion. La recta BD, trazada en un triángulo ABC isósceles (fig. 78), reune las circunstancias siguientes:

1.ª *Pasa por el vértice del triángulo.*
2.ª *Es perpendicular á la base.*
3.ª *Divide la base en dos partes iguales.*
4.ª *Es bisectriz del ángulo opuesto á la base.*

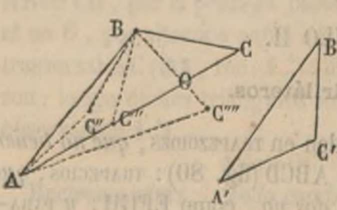
Y como dos de estas condiciones determinan la posicion de la recta, resulta que

Si una recta cumple con dos cualesquiera de las condiciones precedentes cumplirá tambien con las dos restantes.

76. Teorema 5.º *Si dos triángulos* ABC *y* A′B′C′ (fig. 79) *tienen dos lados respectivamente iguales* AB=A′B′, BC=B′C′ *y el ángulo* B *comprendido por los dos primeros es mayor que el* B′ *comprendido por los dos segundos, el lado* AC *opuesto al mayor ángulo es mayor que el* A′C′ *opuesto al menor.*

Superpóngase el triángulo A′B′C′ al ABC, de modo que A′B′ coincida con su igual AB, y el lado B′C′ caerá dentro del ángulo ABC, puesto que este ángulo es mayor por hipótesis que el A′B′C′.

Fig. 79.



Ahora el punto C′ podrá tomar á lo sumo tres posiciones distintas:

1.ª en C″ dentro del triángulo: 2.ª en C‴ sobre el lado AC: 3.ª en C⁗ fuera del triángulo.

1.ª Si C′ cae en C″ se tendrá (7)

$$AC+BC>AC''+BC'':$$

y como BC=BC″ por hipótesis, resulta

$$AC>AC'' \quad ó \quad AC>A'C'.$$

2.ª Si el punto C′ cayese en C‴, se tendria evidentemente

$$AC > AC''' \text{ ó } AC > A'C'.$$

3.ª Si dicho punto C′ cae en C'''' se tiene (**5**)

$$AO + OC'''' > AC'''' \text{ y } BO + OC > BC:$$

sumando estas desigualdades, resulta

$$AO + OC'''' + BO + OC > AC'''' + BC,$$

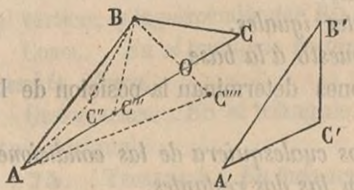
ó

$$AC + BC'''' > AC'''' + BC;$$

y como $BC = BC''''$ por hipótesis, resulta al fin

$$AC > AC'''' \text{ ó } AC > A'C'.$$

Fig. 79.



RECÍPROCAMENTE. *Si dos triángulos ABC y A′B′C′ tienen dos lados respectivamente iguales AB = A′B′, BC = B′C′ y el tercer lado AC es mayor que el tercer lado A′C′, el ángulo B, opuesto al mayor lado, es mayor que el ángulo B′ opuesto al menor.*

En efecto, si B no fuese mayor que B′, sería $B = B'$ ó $B < B'$; pero si $B = B'$ los triángulos serían iguales (**72**, 2.°), y por consiguientes $AC = A'C'$ contra la hipótesis: si $B < B'$, segun el teorema directo, sería $AC < A'C'$ lo que tambien es contra la hipótesis; luego necesariamente se ha de verificar que

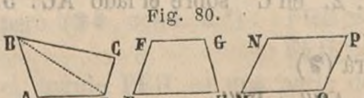
$$B > B'.$$

ARTICULO II.

De los cuadriláteros.

77. Los cuadriláteros se dividen en TRAPEZOIDES, *que no tienen ningun lado paralelo á otro* como ABCD (fig. 80): TRAPECIOS, *que tienen dos lados paralelos y otros dos no*, como EFGH: *y* PARALELÓGRAMOS, *que tienen sus lados paralelos dos á dos*, como MNPQ.

Fig. 80.



Se llaman BASES *del trapecio los lados paralelos, y* ALTURA *la perpendicular bajada de una de las bases á la otra ó á su prolongacion, ó sea la distancia entre las bases.*

En el paralelógramo recibe el nombre de *base* uno cualquiera de sus lados, y el de *altura* la perpendicular trazada desde el lado opuesto á la base á esta ó á su prolongacion, ó sea la distancia entre la base y su lado opuesto.

78. TEOREMA 1.º *Los ángulos de un cuadrilátero* ABCD (fig. 80) *valen juntos cuatro ángulos rectos.*

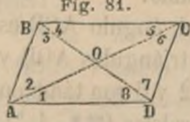
Trazando la diagonal BD queda dividido en dos triángulos, cuyos ángulos componen los del cuadrilátero propuesto; pero los ángulos de cada triángulo valen juntos dos rectos (**71**), luego los del cuadrilátero valdrán cuatro.

79. TEOREMA 2.º *En todo paralelógramo* ABCD (fig. 81): 1.º *los lados opuestos* AD *y* BC, AB *y* CD *son iguales:* 2.º *dos lados opuestos* AD *y* BC *ó* AB *y* DC *son iguales y paralelos:* 3.º *los ángulos opuestos* A *y* C, B *y* D *son tambien iguales:* 4.º *las diagonales se dividen mútuamente en dos partes* AO *y* OC, BO *y* OD *iguales entre sí.*

1.º AD = BC y AB = DC por partes de paralelas comprendidas entre paralelas (**32**).

2.º AD = BC ó AB = DC por el caso anterior, y son paralelas por la definicion del paralelógramo (**77**).

Fig. 81.



3.º A = C y B = D, porque estos ángulos tienen sus lados paralelos y dirigidos en sentido opuesto (**33**, 1.º).

4.º Los triángulos AOB y COD tienen AB = CD, por la primera parte del teorema: el ángulo en 2 igual al en 6, por alternos entre las paralelas AB y CD cortadas por la trasversal AC (**31**, rec. 1.º): el 3 es igual al 7 por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (**72**, 3.º), luego (**73**, observacion 1.ª).

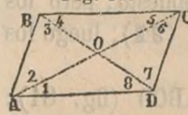
AO = OC y OB = OD.

RECÍPROCAMENTE. *Todo cuadrilátero* ABCD *será paralelógramo:* 1.º *si los lados opuestos* AB *y* DC, AD *y* BC *son iguales:* 2.º *si dos lados* AD *y* BC, *ó* AB *y* DC *son iguales y paralelos:* 3.º *si los ángulos opuestos* A *y* C, B *y* D *son iguales:* 4.º *si las dos diagonales se dividen mútuamente en dos partes iguales* AO = OC *y* BO = OD.

1.º Trácese una de las diagonales AC, y los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, AB = DC y AD = BC por hipótesis; luego son iguales (**72**, 1.°); luego los ángulos 2 y 6 son iguales (**73**, obs. 1.ª); luego AB y CD son paralelas (**31**, 1.°). La igualdad de los mismos triángulos nos da las de los ángulos 1 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego los cuatro lados del cuadrilátero son paralelos dos á dos, luego es un paralelógramo.

2.° Si AB y CD son iguales y paralelos, trazando la diagonal AC, los triángulos ABC y ACD tienen AC comun, AB=CD por hipótesis, y el ángulo 2 igual al 6 por alternos entre las paralelas AB y CD, luego dichos triángulos son iguales (**72**, 2.°); luego los ángulos 1 y 5 son tambien iguales (**73**, obs. 1.ª), luego AD y BC son tambien paralelas (**31**, 1.°); luego el cuadrilátero será un paralelógramo.

Fig. 81.



3.° Si los ángulos A=C y B=D, como (**78**)

$$A+B+C+D=4R,$$

se tendrá $2A+2B=4R$ y $2A+2D=4R$; de donde

$$A+B=2R \quad \text{y} \quad A+D=2R.$$

La primera de estas últimas igualdades demuestra (**31**, 1.°) que AD y BC son paralelas, y la segunda que AB y CD lo son tambien; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

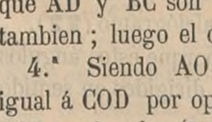
4.ª Siendo AO=OC y BO=OD: como el ángulo AOB es igual á COD por opuestos por el vértice, los triángulos AOB y COD son iguales (**72**, 2.°); luego los ángulos 2 y 6 son tambien iguales (**73**, obs. 1.ª), luego AB y CD son paralelas (**31**, 1.°).

La igualdad de los triángulos BOC y AOD, que se demuestra como la anterior, nos da tambien la igualdad de los ángulos 1 y 5, y esta el paralelismo de AD y BC; luego el cuadrilátero es un paralelógramo.

Corol. 1.° *La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales.*

Porque tienen un lado comun y los otros dos respectivamente iguales.

Fig. 82.



Corol. 2.° *Dos paralelógramos* ABCD A'B'C'D' (fig. 82) *son iguales si tienen un ángulo igual* A=A' *formado por dos lados respectivamente iguales* AB=A'B' *y* AD=A'D'.

Porque superponiendo el segundo de estos paralelógramos al primero, de modo que A'D' coincida con su igual AD, A'B' caerá sobre AB, por ser A=A' por hipótesis, y el punto B' coincidirá con B por ser tambien A'B'=AB: B'C' caerá sobre BC por la igualdad de los ángulos B' y B, como suplementos de los iguales A' y A: y el punto C' coincidirá con C, una vez que B'C'=BC, como iguales respectivamente (teor. direc.) con A'D' y AD, iguales entre sí por hipótesis; luego los vértices de los dos paralelógramos se confunden, luego los paralelógramos son iguales.

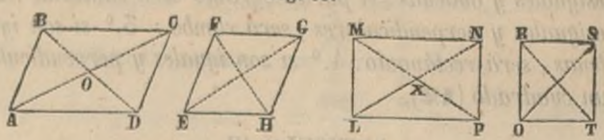
80. Los paralelógramos se dividen en ROMBOIDES, *que son los que tienen los lados que forman un ángulo desiguales, y desiguales tambien los ángulos contiguos á un lado*, como ABCD (fig. 83): ROMBOS, *que tienen iguales los lados que forman un ángulo* (y por consiguiente todos sus lados iguales entre sí) *y los ángulos contiguos á un lado desiguales*, como EFGH: RECTÁNGULOS, *que tienen los lados que forman un ángulo desiguales y los ángulos contiguos á un lado iguales* (y por consiguiente todos rectos) como LMNP: CUADRADOS, *que tienen los lados que forman un ángulo iguales é iguales tambien los ángulos contiguos á un lado* (y por consiguiente todos sus lados y todos sus ángulos iguales entre sí) como QRST.

COROL. *El cuadrado es un polígono regular.*

81. TEOREMA 4.° 1.° *Las diagonales del romboide son desiguales y oblícuas entre sí: 2.° las del rombo desiguales y perpendiculares: 3.° las del rectángulo iguales y oblícuas: 4.° las del cuadrado iguales y perpendiculares.*

1.° Sea el romboide ABCD; los triángulos ABD y ADC tie-

Fig. 83.



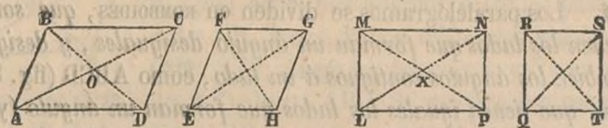
nen AD comun, AB=CD (**79**, 1.°), y el ángulo comprendido BAD<ADC por la definicion, luego BD<AC (**76**); luego las diagonales son desiguales.

Los triángulos BOC y COD tienen OC comun, BO=OD (**79**, 4.°) y BC>CD por la definicion del romboide, luego el ángulo BOC>COD (**76**, rec.); luego las diagonales son oblícuas.

2.° En el rombo EFGH, los triángulos FEH y EHG tienen EH comun, EF = GH por la definicion, y el ángulo E<H; luego EG>FH (**76**), luego las diagonales son desiguales.

Por la definicion del rombo se tiene tambien EF = EH y FG = GH; luego EG es perpendicular á FH (**26**, corol. 2.°).

Fig. 83.



3.° En el rectángulo LMNP resultan los triangulos MLP y LPN iguales, por tener dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, de donde LN = MP; luego las diagonales son iguales.

Los triángulos MXN y NXP tienen XN comun, MX = XP, (**79**, 4.°) y MN > NP por la definicion del rectángulo, luego el ángulo MXN > NXP (**76**, rec.); luego las diagonales LN y MP son oblícuas.

4.° En el cuadrado QRST resultan iguales los triángulos RQT y QTS, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego RT = QS; luego las diagonales son iguales.

Por la definicion del cuadrado resulta tambien QR = QT y RS = ST; luego QS es perpendicular á RT (**26**, corol. 2.°).

Recíprocamente *Si las diagonales de un paralelógramo, 1.° son desiguales y oblícuas, el paralelógramo será romboide: 2.° si son desiguales y perpendiculares, será rombo: 3.° si son iguales y oblícuas, será rectángulo: 4.° si son iguales y perpendiculares, será un cuadrado* (**12**).

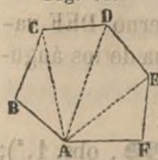
ARTICULO III.

De los polígonos en general.

82. Teorema 1.° *La suma de los ángulos de un polígono equivale á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.*

Sea el polígono ABCDEF (fig. 84). Si desde uno de sus vértices A se trazan diagonales á los demás, quedará el polígono dividido en tantos triángulos como lados tiene ménos dos; porque los triángulos extremos ABC y AEF tiene cada uno por lados dos del polígono, y los restantes cada uno tiene un solo lado del mismo polígono: los ángulos de los triángulos componen los del polígono: pero los de cada triángulo valen dos rectos (71); luego los del polígono equivaldrán á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono ménos dos.

Fig. 84.



OBSERVACIONES

1.ª Llamando S. *i.* la suma de los ángulos (internos) del polígono; y n el número de lados ó de ángulos, el teorema precedente quedará traducido en la siguiente fórmula.

$$S.\ i. = 2R(n-2) \quad \text{ó} \quad S.\ i. = 2nR - 4R.$$

2.ª Como los ángulos de un polígono regular son iguales entre sí, para hallar el valor de uno de estos ángulos no hay más que dividir el segundo miembro de cualquiera de las fórmulas anteriores por n, número de ángulos ó lados. Así

Angulo interno de polígono regular $= \frac{2R(n-2)}{n}$; de donde

Angulo de triángulo equilátero $= \frac{2R}{3} = \frac{2}{3}R = \frac{2}{3} \times 90° = 60°$.

Angulo de cuadrado. . . . . . $= \frac{4R}{4} =$ R $=$. . . . . . .90°.

Angulo de pentágono regular $= \frac{6R}{5} = \frac{6}{5}$ R $=$. . . . . .108°.

Angulo de exágono regular. . $= \frac{8R}{6} = \frac{4}{3}$ R $=$. . . . . .120°.

Angulo de eptágono regular. . $= \frac{10R}{7} = \frac{10}{7}$ R $=$. . .128°,57...

. . . .

Angulo de decágono regular. . $= \frac{16R}{10} = \frac{8}{5}$ R $=$. . . . . .144°.

Etc.

83. Teorema 2.º *La suma de los ángulos* DEF + CDG + etc. (fig. 85), *formados por los lados del polígono y la prolongacion* *de los mismos en igual sentido, llamados ángulos* EXTERNOS, *es igual á cuatro ángulos rectos.*

Cada ángulo interno AED con su adyacente externo DEF valen juntos dos rectos; luego la suma de los ángulos internos y externos será

Fig. 85.

$$S.\,i + S.\,e. = 2nR:$$

pero $\quad S.\,i = 2nR - 4R$ (**82**, obs. 1.ª);

luego restando estas igualdades resulta

$$S.\,e. = 2nR - (2nR - 4R) = 4R.$$

COROL. *Un polígono no puede tener más de tres ángulos agudos.*

Porque si tuviese cuatro ó más, la suma de los ángulos externos valdria más de cuatro rectos.

OBSERVACION. Como los ángulos externos de los polígonos regulares son iguales por suplementos de ángulos iguales, se tendrá

Angulo externo de triángulo equilátero $= \frac{4}{3} R = 120°$

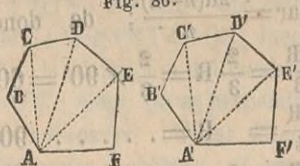
Angulo externo de cuadrado. . . . $= \quad R = \ 90°.$

Angulo externo de pentágono regular $= \frac{4}{5} R = \ 72°.$

Etc.

84. TEOREMA 3.º *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A′B′C′D′E′F′ (fig. 86) *tienen sus lados* AB = A′B′ BC = B′C′, etc., *y sus ángulos* A = A′, B = B′, etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.*

Fig. 86.



Superponiendo el primer polígono al segundo, de modo que AB coincida con su igual A′B′, BC caerá sobre B′C′, por ser los ángulos en B y B′ iguales, y el punto C coincidirá con C′, por ser tambien BC = B′C′. Del mismo modo se demuestra que todos los vértices coinciden: luego los polígonos son iguales.

85. TEOREMA 4.º *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A′B′C′D′E′F′ *se componen del mismo número de triángulos* ABC *y* A′B′C′, ACD A′C′D′, etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, los polígonos son iguales.*

La igualdad de los triángulos ABC y A′B′C′ nos da AB = A′B′, BC = B′C′; la de los triángulos ACD y A′C′D′ nos da tambien

$CD = C'D'$; y como lo mismo se deduce respecto de los demás lados, resulta que los polígonos tienen sus lados respectivamente iguales é igualmente dispuestos.

De la igualdad de los mismos triángulos ABC y $A'B'C'$, se deduce igualmente que el ángulo

$$B = B'$$

y tambien $$BCA = B'C'A':$$

la de los triángulos ACD y $A'C'D'$ nos da del mismo modo

$$\text{ángulo } ACD = A'C'A'.$$

Sumando estas dos últimas igualdades, resulta

$$BCA + ACD = B'C'A' + A'C'D' \text{ ó } C = C'.$$

Como lo mismo se demuestra de los demás ángulos, se deduce que son respectivamente iguales en los polígonos dados.

Luego dichos polígonos tienen sus lados y ángulos repectivamente iguales é igualmente dispuestos, luego son iguales (**84**).

Recíprocamente. *Si dos polígonos* $ABCDEF$ *y* $A'B'C'D'E'F'$ *son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Trazando desde A y A' diagonales á los otros vértices, resulta que los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen $AB = A'B'$ y $BC = B'C'$ por lados de polígonos iguales, y el ángulo $B = B'$ por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (**72**, 2.º).

La igualdad de estos triángulos nos da $AC = A'C'$ y el ángulo

$$ACB = A'C'B':$$

y como los ángulos igualmente dispuestos del polígono son iguales, se tiene tambien $C = C'$; restando de esta igualdad la anterior, resulta $$ACD = A'C'D'.$$

Por otra parte $CD = C'D'$ por la igualdad de los polígonos.

Luego los triángulos ACD y $A'C'D'$ son iguales (**72**, 2.º).

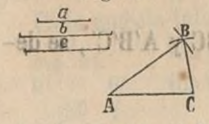
Del mismo modo se demuestra la igualdad de los demás triángulos; luego el teorema recíproco es verdadero.

PROBLEMAS GRÁFICOS.

86. 1.º **Dados los tres lados** a, b, c, **construir un triángulo.**

Tómese una recta $AC=b$ (fig. 87), y haciendo centro en los extremos A y C con rádios respectivamente iguales á c y a, se trazan dos arcos que se cortarán en B: uniendo este punto con A y con C, se tendrá el triangulo ABC, que es el pedido.

Fig. 87.



En efecto, $AC=b$, $AB=c$ y $BC=a$.

OBSERVACIONES.

1.ª Para que este problema sea posible, es preciso que los arcos se corten, lo que sucederá siempre que $b<a+c$ y $b>a-c$ (**48**, rec. 3.º), cuyas condiciones se hallan incluidas en la siguiente:

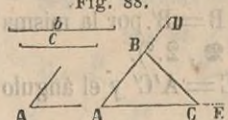
Siempre que la mayor de las rectas dadas sea menor que la suma de las otras dos, el problema es posible.

2.ª Si se tratase de construir un triángulo isósceles, bastaria conocer los dos lados desiguales: y si equilátero, su lado.

87. 2.º **Dados dos lados b y c, y el ángulo comprendido A, construir el triángulo.**

Fórmese un angulo DAE (fig. 88) igual al dado A (**60**): sobre sus lados tómense las partes AC y AB respectivamente iguales á b y c; únanse los puntos B y C, y el triángulo ABC será el pedido. Porque

Fig. 88.



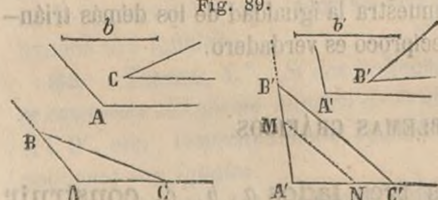
$$AC=b,\ AB=c \text{ y } BAC=A.$$

88. 3.º **Dado un lado y dos ángulos, construir el triángulo.**

Distinguiremos dos casos: 1.º que los ángulos dados sean contiguos al lado conocido: 2.º que uno sea contiguo y otro opuesto.

1.º Sea el lado b, y A y C (fig. 89) los ángulos contiguos.

Fig. 89.



Tómese en una recta cualquiera una parte $AC=b$: fórmense en los extremos A y C de esta ángulos respectivamente iguales á los dados A y C (**60**), y el triángulo ABC será el pedido.

2.° Si fuese el lado b' y los ángulos A′ y B′, de los que el primero es contiguo y el segundo opuesto á dicho lado b', se formaria un ángulo B′A′C′ igual al dado A′: por un punto cualquiera M de la A′B′ se trazaria la recta MN que formase el ángulo A′MN=B′: tomando A′C′=b', y trazando la B′C′ paralela á MN, resultaria el triángulo A′B′C′ pedido.

En efecto, en el primer caso se tiene

$$AC = b,\ BAC = A,\ ACB = C.$$

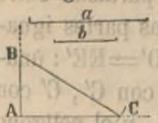
En el segundo A′C′=b', B′A′C′=A′. Por otra parte, A′B′C′=A′MN (**31**, rec. 1.°): pero A′MN=B′ por construccion; luego tambien A′B′C′=B′.

Observacion. Para que este problema sea posible es necesario que los ángulos dados valgan juntos ménos que dos rectos: de lo contrario las rectas AB y CB en el primer caso, y las MN y A′C′ en el segundo serían paralelas ó se encontrarian en la parte inferior de AC las primeras y á la izquierda de A′ las segundas (**31**).

89. 4.° **Dada la hipotenusa a y un cateto b construir un triángulo rectángulo.**

Fórmese un ángulo A (fig. 90) recto: sobre uno de sus lados se toma AB=b: haciendo centro en B, con un rádio igual á la hipotenusa a, se traza un arco que cortará el otro lado en un punto C (**75**, corolario 3.°, y **44**, obs.), y uniendo este con B el triángulo ABC será el pedido.

Fig. 90.



Porque el ángulo en A es recto, AB=b, BC=a.

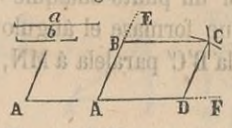
90. 5.° **Formar un triángulo igual á otro dado.**

Con los tres lados del triángulo dado, con dos lados y el ángulo comprendido, con un lado y dos angulos igualmente dispuestos, ó con la hipotenusa y un cateto (si fuese rectángulo) se construye un nuevo triángulo (**86**, **87**, **88**, **89**), el cual será igual al propuesto (**72** ó **73**).

91. 6.° **Dados los lados a, b, y el ángulo comprendido A, construir un paralelógramo.**

Fórmese un ángulo EAF = A (fig. 91); tómese AB = b y AD = a: haciendo centro en B con el rádio AD se traza un arco, y haciendo centro en D con el rádio AB se traza otro arco, que cortará el anterior (**70** y **48**, rec. 3.°) en un punto C: se une este punto con B y con D, y ABCD será un paralelógramo (**79**, rec. 1.°), que tiene las circunstancias pedidas.

Fig. 91.



Porque BAD = A, AB = b, AD = a.

Observacion. Un rombo se construye dado el lado y un ángulo: un rectángulo conociendo los lados desiguales; y un cuadrado si se da su lado.

92. 7.° **Construir un polígono igual á otro dado ABCDEF (fig. 86).**

Se divide este polígono dado en triángulos por medio de diagonales trazadas desde el vértice A: se forman los triángulos A'B'C', A'C'D', etc. respectivamente iguales á los ABC, ACD, etc., y que tengan entre sí la misma colocacion que estos; y el polígono A'B'C'D'E'F', formado por los lados exteriores de dichos triángulos, será el pedido (**85**).

Otra construccion. Sea el polígono ABCDE (fig. 92): trácense por todos sus vértices paralelas entre sí: tómense sobre estas las partes iguales AA' = BB' = CC' = DD' = EE': únase el punto A' con B', B' con C', C' con D', D' con E' y E' con A', y el polígono A'B'C'D'E' será igual al dado.

Fig. 92.

Porque las figuras ABA'B', BCB'C', etcétera, son paralelógramos (**79**, rec. 2.°); luego AB = A'B', BC = B'C', etc. (**79**, 1.°); y los ángulos ABC = A'B'C', BCD = B'C'D', etc. (**33**, 1.°). Luego el polígono propuesto y el que acaba de formarse tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos; luego son iguales (*).

(*) Tambien podria resolverse este problema fundándose en el teorema del número **84**; pero la construccion estaria más sujeta á error en la práctica, y conviene siempre elegir entre los diferentes medios, que en cada caso pueden emplearse, aquel en que ménos se multiplican los errores, debidos á los instrumentos de que tenemos que valernos.

SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPÍTULO I.

Figuras semejantes.

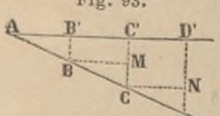
ARTÍCULO PRIMERO.

De las líneas proporcionales.

93. Teorema 1.° *Si sobre el lado* AD *de un ángulo* DAD′ (fig. 93) *se toman partes iguales* AB=BC=CD , *y por los puntos de division se trazan paralelas* BB′, CC′, DD′, *hasta encontrar el otro lado* AD′ , *las partes de este* AB′, B′C′, C′D′, *interceptadas entre las paralelas*, *serán tambien iguales entre sí.*

Trazando por los puntos B , C , las rectas BM , CN, paralelas á la AD′ , los triángulos AB′B, BMC, CND tienen AB=BC=CD por hipótesis, los ángulos BAB′, CBM, DCN iguales por correspondientes, y los ABB′ , BCM , CDN iguales tambien por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales (**72**, 3.°) , luego (**73** , obs.)

Fig. 93.



$$AB' = BM = CN:$$

pero BM=B′C′ y CN=C′D′, por lados opuestos de paralelógramos; luego

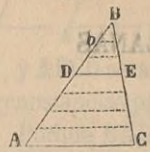
$$AB' = B'C' = C'D'.$$

94. Teorema 2.° *Si una recta* DE (fig. 94) *es paralela á un lado* AC *de un triángulo* ABC *divide los otros dos lados* AB *y* BC *en partes proporcionales.*

Distinguiremos dos casos: 1.° que las partes BD y DA de un lado sean conmensurables: 2.° que no lo sean.

1.° Sea B*b* la medida comun; supongamos que se pueda colocar sobre BD tres veces, y cuatro sobre DA, y se tendrá

Fig. 94.



$$\frac{BD}{DA}=\frac{3}{4}.$$

Por los puntos de division trácense paralelas á DE ó á la AC, y segun el teorema anterior la BC quedará dividida en otras siete partes iguales entre sí, de las que la BE contiene tres y la EC cuatro por consiguiente; luego

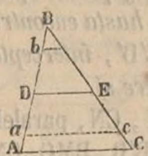
$$\frac{BE}{EC}=\frac{3}{4}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun; luego (Alg. **183**)

$$\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}.$$

2.° Sean BD y DA (fig. 95) inconmensurables; supongamos que la BD sea dividida en partes iguales entre sí, tan pequeñas como se quiera, y que una de estas partes esté representada por B*b*: colóquese esta medida sobre DA todas las veces que se pueda, y quedará un resto A*a*, una vez que BD y DA son inconmensurables: trácese, por último, la *ac* paralela á DE.

Fig. 95.



Siendo BD y D*a* conmensurables se tendrá, segun la primera parte del teorema,

$$\frac{BD}{Da}=\frac{BE}{Ec}:$$

comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{BD}{DA} \text{ y } \frac{BE}{EC},$$

se observará que los dos primeros (que están en columna) tienen el numerador BD comun, y que el denominador D*a* se puede aproximar á DA todo lo que se quiera, porque la diferencia A*a* es menor que B*b*, y esta parte puede ser más pequeña que una cantidad cualquiera dada: luego $\frac{BD}{DA}$ es el límite de $\frac{BD}{Da}$ [**51**. (*)]: por igual razon $\frac{BE}{EC}$ es tambien el límite de $\frac{BE}{Ec}$: pero las cantidades variables son iguales; luego los límites lo serán del mismo modo [51, (*) teor.], luego

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}.$$

Corol. De la proporcion anterior se deduce (Alg. 184)

$$\frac{BD + DA}{BD} = \frac{BE + EC}{BE} \quad y \quad \frac{BD + DA}{DA} = \frac{BE + EC}{EC},$$

ó bien
$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE} \quad y \quad \frac{BA}{DA} = \frac{BC}{EC},$$

esto es: *todo un lado es á su parte superior ó inferior á la paralela, como todo el otro lado es á la parte superior ó inferior á la misma.*

Recíprocamente. *Si una recta divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela al tercer lado.*

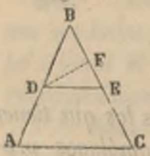
Es decir, que si se tiene (fig. 96) la proporcion

$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$, ó lo que es igual (corol. ant.) $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BE}$,

la recta DE será paralela á AC.

Porque si no lo fuese, se podria trazar por D la DF paralela á AC, en cuyo caso, segun el corolario precedente, se tendria

Fig. 96.



$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BF}.$$

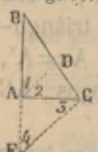
Esta proporcion y la anterior tienen los tres primeros términos iguales, luego

$$BE = BF:$$

pero esto es imposible; luego la paralela DF tiene que confundirse con DE, luego esta es paralela al lado AC.

95. Teorema 3.° *La bisectriz* AD (fig. 97) *del ángulo* BAC *de un triángulo* ABC *divide el lado opuesto* BC *en partes proporcionales á los lados que forman dicho ángulo.*

Fig. 97.

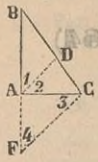


Por el punto C trácese la recta CF paralela á la bisectriz AD, prolongándola hasta que corte en F la BA tambien prolongada, y se tendrá (94)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AF}.$$

Ahora el ángulo en 1 es igual al en 4 por correspondientes, el 2 es igual al 3 por alternos: pero 1 y 2 son iguales por hipótesis; luego 3 y 4 tambien lo serán; luego (**75**, recíproco 1.º)

Fig. 97.



$$AF = AC.$$

Sustituyendo este valor de AF en la proporcion anterior, resulta al fin

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}.$$

Corol. *Los lados de un triángulo no son proporcionales á sus ángulos opuestos.*

Porque siendo a, b, dos lados y A, B sus ángulos respectivamente opuestos, se tienen las cuatro cantidades homogéneas dos á dos

A..... a,
B..... b:

duplicando ó dividiendo por 2 una de las homogéneas A, su relativa a no queda duplicada ni dividida por 2, segun el teorema; luego dichas cantidades no son proporcionales (Alg. **191**, obs.)

ARTÍCULO II.

De los triángulos semejantes.

96. *Se llaman en general* polígonos semejantes *los que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.*

Llámanse vértices homólogos *los vértices de los ángulos iguales, y lados* homólogos *los que unen vértices homólogos.*

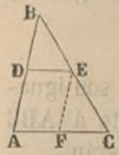
En los triángulos semejantes los *lados homólogos están opuestos á ángulos iguales* (**71**, corol. 1.º); y como esta circunstancia es más fácil de apreciar, de ella toman su denominacion. Así que si en los triángulos ABC y A′B′C′ (fig. 98) se tiene: A=A′, B=B′ y C=C′; BC y B′C′ son homólogos, AC y A′C′, AB y A′B′ lo son tambien.

Fig. 98.

97. Teorema 1.º *Si en un triángulo* ABC (fig. 99) *se traza una recta* DE *paralela á un lado* AC, *el triangulo parcial* BDE *que resulta es semejante al total* ABC.

En efecto, el ángulo en B es comun á los dos triángulos, el BDE=A por correspondientes, y BED=C por la misma razon; luego dichos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

Fig. 99.



Por otra parte, por ser DE paralela á AC se tiene (**94**, corol.)

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BC}{BE};$$

y trazando la EF paralela á BA se tiene tambien

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{AF} \text{ ó, puesto que } AF=DE \text{ (**79**, 1.º)}, \frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}.$$

Esta proporcion y la primera tienen comun la razon $\frac{BC}{BE}$; luego (Alg. **183**)

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE};$$

luego el triángulo parcial y el total tienen sus lados homólogos proporcionales.

Luego los triángulos ABC y DBE tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes (**96**).

98. Teorema 2.º *Dos triángulos son semejantes: 1.º si tienen sus lados proporcionales: 2.º si tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido: 3.º si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

1.º Sean los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 98), en que se supone que

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

Tómese sobre BA una parte BD=A'B', y trazando la recta DE paralela á AC, resulta (**97**)

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}:$$

esta proporcion y la de la hipótesis $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ tienen sus tres primeros términos iguales, una vez que A'B'=BD; luego

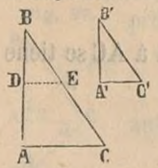
$$BE=B'C'.$$

Por el mismo número **97** se tiene tambien

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DE},$$

cuya proporcion y la de la hipótesis $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$ tienen del mismo modo sus tres primeros términos iguales; luego

Fig. 100.



$$DE = A'C'.$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (**72**, 1.º): pero DBE es semejante á ABC (**97**); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

2.º Supóngase que (en los mismos triángulos) B=B' y

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Tomando BD = B'A' y trazando DE paralela á AC, como en el caso precedente, se tendrá (**97**)

$$\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{BE}:$$

esta proporcion y la de la hipótesis tienen iguales sus tres primeros términos; luego

$$BE = B'C'.$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (**72**, 2.º): pero DBE es semejante á ABC (**97**); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

3.º Supongamos (en los mismos triángulos) A=A', B=B', C=C', y ejecutando igual construccion que en los casos anteriores, se tendrá que los triángulos DBE y A'B'C' tienen DB=A'B' por construccion, y los ángulos B=B', y D=A', por ser A=A' por hipótesis y A=D por correspondientes.

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (**72**, 3.º): pero DBE es semejante á ABC (**97**); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

Corol. *Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes* (**71**, corol. 1.º).

99. Teorema 3.º *Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales.*

Supónganse rectángulos en A y en A' los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 100), y además que

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Sobre BA tómese $BD = B'A'$ y trácese DE paralela á AC.

Siendo ABC rectángulo en A, DBE lo será en D, por ser $A = D$ por correspondientes.

Por otra parte (**97**)

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE}:$$

esta proporcion y la de la hipótesis tienen los tres primeros términos iguales; luego

$$BE = B'C'.$$

Luego los triángulos DBE y A'B'C' son iguales (**73**): pero DBE es semejante á ABC (**97**); luego ABC y A'B'C' tambien lo serán.

100. Teorema 4.° *Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.*

En ambos casos los ángulos de uno de los triángulos serán respectivamente iguales ó suplementarios de los del otro (**33**, corol. y **34**). Mas dos ángulos de uno de los triángulos no pueden ser suplementarios de otros dos del otro, porque en tal caso estos cuatro ángulos equivaldrian á cuatro rectos, lo que es imposible (**71**); luego dos ángulos de uno de los triángulos serán respectivamente iguales á dos del otro, luego los triángulos son semejantes (**98**, corol.).

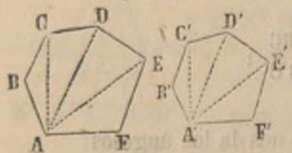
Observacion. Los lados homólogos en estos triángulos son los respectivamente paralelos ó perpendiculares.

ARTÍCULO III.

Semejanza de los polígonos en general.

101. Teorema 1.° *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A'B'C'D'E'F' (fig. 101) *se componen del mismo número de triángulos* ABC *y* A'B'C', ACD *y* A'C'D', etc., *semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Fig. 101.

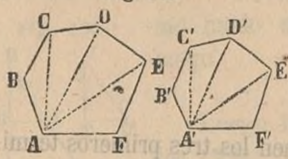


La semejanza de los triángulos ABC y A'B'C' nos da los ángulos

$$B = B',$$

y $BCA = B'C'A'$: la de los triángulos ACD y A'C'D' da tambien los ángulos ACD=A′C′D′, y sumando estas dos igualdades, resulta BCD=B′C′D′, ó bien

Fig. 110.



$$C=C';$$

como lo mismo se demostraria de los demás ángulos, se infiere que los dos polígonos tienen sus ángulos respectivamente iguales.

De la semejanza de los triángulos ABC y A′B′C′ resulta igualmente

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}:$$

y de la semejanza de los triángulos ACD y A′C′D′ resulta del mismo modo

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}:$$

estas proporciones tienen comun la razon $\frac{AC}{A'C'}$; luego (Algebra, **183**) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$.

Como lo mismo se extenderia la demostracion á probar la proporcionalidad de los demás lados, se deduce que dichos polígonos tienen sus lados homólogos proporcionales.

Luego los polígonos propuestos tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes (**96**).

Recíprocamente. *Si dos polígonos* ABCDEF *y* A′B′C′D′E′F′ *son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.*

Por hipótesis se tiene: A=A′, B=B′, C=C′, etc., y

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\text{etc.}$$

Trazando desde los vértices A y A′ diagonales á los demás, resulta que los triángulos ABC y A′B′C′ tienen B=B′, por hipótesis, y por igual razon

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

luego son semejantes (**98**, 2.º).

La semejanza de estos triángulos nos da los ángulos

$$BCA=B'C'A';$$

y restando esta igualdad de la de la hipótesis $C = C'$, resultan los ángulos

$$ACD = A'C'D'.$$

De la semejanza de los mismos triángulos BAC y B'A'C' resultan igualmente $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$: mas por hipótesis $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$; de donde (Alg. **183**) $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Luego los triángulos ACD y A'C'D' son tambien semejantes (**98**, 2.°).

Lo mismo se demostraria la semejanza de los demás triángulos; luego el teorema recíproco es verdadero.

102. TEOREMA 2.° *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.*

Estos polígonos tienen sus ángulos iguales (**82**, obs. 2.ª).

Por otra parte, siendo los lados de cada uno iguales entre sí, si llamamos l el lado de un polígono y l' el del otro, evidentemente se podrá formar esta proporcion

$$\frac{l}{l'} = \frac{l}{l'} = \text{etc.}$$

ARTÍCULO IV.

Consecuencias de la semejanza de los polígonos.

103. TEOREMA 1.° *Si tres ó más rectas* OA, OB, OC, etc., (fig. 102) *que concurren en un punto* O, *cortan á dos paralelas* AE *y* A'E' *las dividen en partes proporcionales.*

Los triángulos AOB y A'OB' son semejantes (**97**); luego

Fig. 102.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}.$$

Tambien son semejantes los triángulos BOC y B'OC' (**97**): de donde

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen comun la razon $\frac{OB}{OB'}$; luego $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

La semejanza de los triángulos COD y C′OD′, DOE y D′OE′ nos daria la proporcionalidad de las partes restantes con las anteriores, luego el teorema es verdadero.

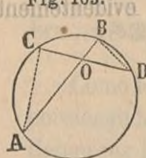
Corol. *Si las partes de una de las paralelas son iguales entre sí, las de la otra lo serán tambien.*

Porque siendo iguales los antecedentes ó consecuentes de estas proporciones, los consecuentes ó antecedentes lo son tambien.

104. *Se dice que dos rectas están divididas en partes* RECÍPROCAMENTE PROPORCIONALES, *cuando las partes de la una, ó toda la recta y una parte suya, forman los extremos de una proporcion, y las partes de la otra, ó toda la recta y una parte suya, forman los medios* [V. Alg. **191** (*)].

105. Teorema 2.° *Si dos cuerdas* AB *y* CD (fig. 103) *se cortan, quedan divididas en partes recíprocamente proporcionales.*

Fig. 103.

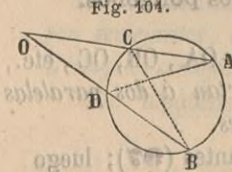


Uniendo A con C, y B con D, los triángulos AOC y BOD tienen los ángulos A = D y C = B (**54**, corol. 1.°); luego son semejantes (**98**, corolario), luego

$$\frac{AO}{OD} = \frac{OC}{OB}.$$

106. Teorema 3.° *Si desde un punto* O (fig. 104) *fuera de un círculo se trazan dos secantes* OA *y* OB, *que terminen en la parte cóncava de la curva, los segmentos externos* OC *y* OD *son recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.*

Fig. 104.



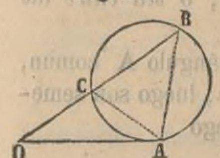
Uniendo A con D, y C con B, los triángulos AOD y BOC tienen el ángulo en O comun y A = B (**54**, corol. 1.°); luego son semejantes (**98**, corolario), luego

$$\frac{AO}{OB} = \frac{OD}{OC}.$$

107. Teorema 4.° *Si desde un punto* O *fuera de un círculo* (fig. 105) *se traza una tangente* OA, *que termine en el punto* A *de contacto, y una secante* OB, *que termine en la parte cóncava de la curva, la tangente es media proporcional entre toda la secante y el segmento externo* OC.

Uniendo B con A, y A con C, los triángulos OAB y OAC tienen el ángulo en O comun, y OAC = B: porque el primero tiene por medida la mitad del arco AC (**55**), y el segundo tiene tambien por medida la mitad del mismo arco (**54**); luego los triángulos son semejantes (**98**, corol.); luego

Fig. 105.

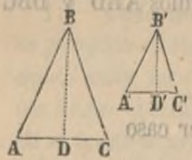


$$\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OC}.$$

108. Teorema 5.° *Dos triángulos semejantes* ABC *y* A'B'C' (fig. 106) *tienen las bases homólogas* AC *y* A'C' *proporcionales con las alturas* BD *y* B'D'.

Por hipótesis se tiene

Fig. 106.



$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}:$$

los triángulos ABD y A'B'D' tienen los ángulos A = A' por hipótesis, y ADB = A'D'B' por rectos; luego son semejantes (**98**, corolario), luego

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BD}{B'D'};$$

de cuyas proporciones se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BD}{B'D'}.$$

109. *Se llama* proyeccion *de una línea cualquiera* AB (figura 107) *sobre una recta* XZ *la parte* A'B' *de esta comprendida entre las perpendiculares* AA' *y* BB', *bajadas desde los extremos* A *y* B *de la primera.*

Fig. 107.

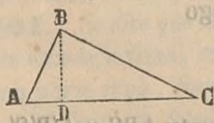
Observacion. La proyeccion de la hipotenusa sobre un cateto es este mismo cateto. Así en el triángulo rectángulo ABD (fig. 108) la proyeccion de la hipotenusa AB sobre el cateto AD es este cateto.

110. Teorema 6.° *Si desde el vértice* B (fig. 108) *del ángulo recto de un triángulo rectángulo* ABC *se baja una perpendicular* BD *sobre la hipotenusa* AC: 1.° *un cateto* AB *es medio propor-*

cional entre la hipotenusa AC *y su proyeccion* AD *sobre la hipotenusa:* 2.º *la perpendicular* BD *es tambien media proporcional entre los segmentos* AD *y* DC *de la hipotenusa*, *ó sea entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

1.º Los triángulos ABC y ABD tienen el ángulo A comun, y ABC=ADB por rectos; luego son semejantes (**98**, corol.), luego

Fig. 108.



$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}.$$

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los triángulos ABC y DBC, y de ella se deduce

$$\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC}.$$

2.º Siendo ABC semejante con ABD, y ABC semejante tambien con DBC, segun acaba de verse, los triángulos ABD y DBC son semejantes entre sí; luego

$$\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC}.$$

Corolario 1.º De las proporciones del primer caso

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD} \quad \text{y} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{BC}{DC},$$

se deducen (Alg. **177**) las igualdades

$$(AB)^2=(AC)\times(AD) \qquad \text{y} \qquad (BC)^2=(AC)\times(DC) \text{ (*)}.$$

Luego *el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por su proyeccion sobre aquella* (**).

Corol. 2.º Formando una proporcion con las dos igualdades del corolario anterior, se tiene

$$\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AC\times AD}{AC\times DC}=\frac{AD}{DC}.$$

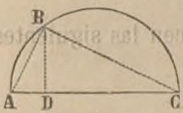
Luego *los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

(*) Siempre que en lo sucesivo haya que indicar una operacion con el conjunto de letras que representa una línea, se hará como si todas ellas fuesen un solo signo. Así por $(AB)^2$ escribiremos AB^2 y por $(AC)\times(AD)$ se escribirá $AC\times AD$.

(**) Se entiende por cuadrado de una línea el *cuadrado de su valor numérico, referido á una unidad longitudinal cualquiera*; y por producto de dos líneas *el producto de sus valores numéricos, referidos á una misma unidad, aunque arbitraria.*

Observacion. Como el ángulo inscripto cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro es recto (**54**, corol. 2.°), resulta que todo punto B (fig. 109) de la circunferencia se puede considerar como el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos AB y BC son las cuerdas que de dicho punto van á los extremos del diámetro, y cuya hipotenusa AC es el diámetro mismo; luego las proporciones anteriores, sustituyendo *punto de la circunferencia* por vértice, *cuerda* por cateto, y *diámetro* por hipotenusa, se convierten en los teoremas siguientes:

Fig. 109.



Si desde un punto de la circunferencia se baja una perpendicular al diámetro, y por dicho punto y los extremos del diámetro se trazan cuerdas:

1.° *Cada cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyeccion sobre este: 2.° la perpendicular es media proporcional entre los segmentos del diámetro, ó sea entre las proyecciones de las cuerdas sobre el diámetro: 3.° el cuadrado de una cuerda es igual al producto del diámetro por su proyeccion sobre este: 4.° los cuadrados de las cuerdas son proporcionales á sus proyecciones sobre el diametro.*

111. Teorema 7.° 1.° *En el triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos* (*): 2.° *en el obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, más el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él: 3.° en un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado opuesto á un angulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, ménos el duplo del producto de uno de estos por la proyeccion del otro sobre él.*

1.° Segun el corolorio 1.° del teorema anterior se tiene (figura 110)

$$AB^2 = AC \times AD, \quad BC^2 = AC \times DC,$$

(*) Esta primera parte del teorema, que es sin duda una de las verdades más interesantes de la Geometría, se llama *teorema de Pitágoras*, del nombre del célebre filósofo que le descubrió.

y sumando estas igualdades resulta

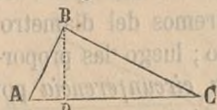
$$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC) = AC \times AC = AC^2,$$

ó bien $$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Corol. De la igualdad que precede se deducen las siguientes

$$AB^2 = AC^2 - BC^2,$$

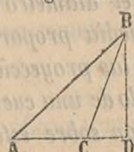
Fig. 110.



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}, \quad AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}.$$

Luego *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto : la hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos: un cateto cualquiera es igual á la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.*

Fig. 111.



2.° Sea el triángulo ABC (fig. 111) y AB el lado opuesto al ángulo obtuso: bajando la perpendicular BD sobre AC prolongada, se tendrá en el triángulo ABD, segun la primera parte del teorema,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2: \text{ pero}$$

$$AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2$$

(Alg. **40**, 1.°), y $BD^2 = BC^2 - CD^2$ (corol. ant.); luego sustituyendo estos valores en la igualdad primera, resultará

$$AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + 2AC \times CD + BC^2,$$

ó bien $$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD.$$

3.° Sea el triángulo ABC (fig. 110), y AB el lado opuesto á un ángulo agudo: bajando la perpendicular BD, en el triángulo rectángulo ABD, se tiene

$$AB^2 = AD^2 + BD^2:$$

pero $AD^2 = (AC - DC)^2 = AC^2 - 2AC \times DC + DC^2$ (Alg. **41**, 1.°), y en el triángulo DBC, $BD^2 = BC^2 - DC^2$ (corol. ant.); luego sustituyendo los valores de AD^2 y BD^2, que acabamos de determinar, en la igualdad primera, resultará

$$AB^2 = AC^2 - 2AC \times DC + DC^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 - 2AC \times DC + BC^2.$$

ó bien $$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times DC.$$

Recíprocamente. 1.° *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo* *opuesto al primero será recto: 2.° si es mayor, el ángulo opuesto será obtuso: 3.° si es menor, agudo* (**12**).

112. Teorema 8.° *Los perímetros de los polígonos semejantes son proporcionales á sus lados homólogos.*

Llamando a, b, c, etc. los lados de uno de los polígonos, y a', b', c', etc. los del otro, se tendrá (**96**)

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\text{etc.};$$

de donde (Alg. **186**)

$$\frac{a+b+c+\text{etc.}}{a'+b'+c'+\text{etc.}}=\frac{a}{a'},$$

ó expresando por p y p' dichos perímetros

$$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}.$$

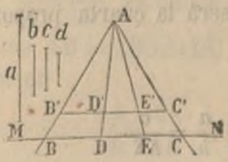
PROBLEMAS.

Problemas gráficos.

113. 1.° **Dividir una recta** a **en partes proporcionales á otras rectas dadas** b, c, d.

Sobre una recta indefinida MN (fig. 112) tómense las partes BD$=b$, DE$=c$, EC$=d$: fórmese sobre BC el triángulo equilátero BAC (**86**, observacion 2.ª): sobre AB y AC tómese AB'$=a$ y AC'$=a$: trácense las rectas B'C', AD, AE, y B'D', D'E', E'C' serán las partes de a proporcionales á b, c, d.

Fig. 112.



En efecto, siendo AB$=$AC y AB'$=$AC', la línea B'C' divide los lados del triángulo ABC en partes proporcionales, luego es paralela á BC (**94**, rec.); luego los triángulos BAC y B'AC' son semejantes (**97**): pero BAC es equilátero, luego B'C'$=$B'A$=a$.

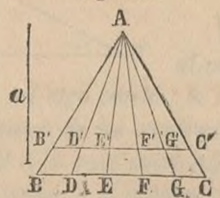
La recta B'C' está dividida en partes B'D', D'E', E'C', proporcionales á BD, DE, EC (**103**) y por consiguiente á b, c, d; luego tambien están determinadas las partes de su igual a proporcionales á b, c, d.

Observacion. Si los puntos B' y C' cayesen en la parte inferior de B y C, la demostracion sería la misma, tanto en este problema como en el siguiente.

114. 2.° **Dividir una recta *a* en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo, en cinco.**

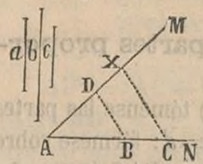
Este problema se resuelve como el anterior, segun aparece en la fig. 113, sin más diferencia que la de tomar la parte BD arbitraria, y las DE, EF, FG y GC iguales con BD. La demostracion tambien es la misma que la precedente, fundándose la igualdad de las partes en que queda dividida la recta B′C′, y por consiguiente la dada *a*, en el corolario del núm. **103**.

Fig. 113.



115. 3.° **Hallar una cuarta proporcional á tres rectas, *a*, *b*, *c*.**

Fig. 114.



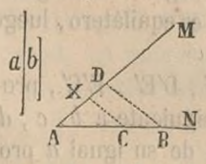
Fórmese un ángulo cualquiera MAN (figura 114): sobre el lado AN tómese AB$=a$ y AC$=b$, y sobre AM tómese tambien AD$=c$, únase el punto B con el D, ó sean los extremos de los antecedentes *a* y *c* de la proporcion: por C, extremo del consecuente *b*, trácese la recta CX paralela á BD, y la AX será la cuarta proporcional pedida.

Porque (**97**)

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AX}, \qquad \text{ó bien} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{AX}.$$

116. 4.° **Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas *a* y *b*.**

Fig. 115.

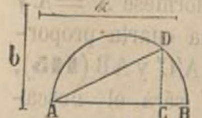


Se resuelve como el anterior, tomando AC y AD (fig. 115) iguales á *b*, como aparece en la figura.

117. 5.° **Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas *a* y *b*.**

Sobre la recta AB (fig. 116) igual á la mayor *a* de las dadas, trácese una semicircunferencia: tómese $AC=b$: levántese la perpendicular CD, y la cuerda AD será la media proporcional pedida (*).

Fig. 116.



Porque (**110**, obs.)

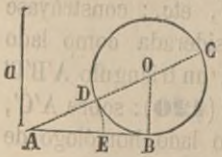
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AC} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{AD}=\frac{AD}{b}.$$

118. *Se dice que una recta está dividida en* MEDIA Y EXTREMA RAZON, *cuando está dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la menor y la línea entera.*

119. 6.º **Dividir una recta** a **en media y extrema razon.**

Tómese una recta $AB=a$ (fig. 117): en el extremo B levántese una perpendicular $BO=\frac{1}{2}a$: desde O con el rádio OB trácese una circunferencia: por A y O se traza la secante AC, y la parte AD exterior de la secante, aplicada sobre AB, divide á esta en E, en media y extrema razon.

Fig. 117.



En efecto AB es tangente y AC secante de la circunferencia O; luego se tendrá (**107**)

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD}; \text{ de donde (Alg. } \mathbf{184}) \quad \frac{AC-AB}{AB}=\frac{AB-AD}{AD}:$$

y como $AB=2BO=DC$ y $AD=AE$, esta proporcion se convierte en

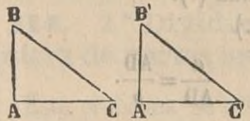
$$\frac{AE}{AB}=\frac{EB}{AE} \quad \text{ó (Alg. 182, 2.ª)} \quad \frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EB}.$$

120. 7.º **Dado un triángulo ABC (fig. 118), construir sobre una recta dada A′C′, considerada como lado homólogo de AC, otro triángulo semejante al primero.**

(*) Es inútil repetir que, entre los diferentes medios que pueden emplearse en la resolucion de este problema y precedentes, hemos elegido los que nos parecen más sencillos y exactos en la práctica.

Fórmense en los extremos de la recta A′C′ los ángulos A′=A y C′=C, y A′B′C′ será el triángulo pedido (**98**, corol.): ó fórmese A′=A y tómese A′B′ igual á una cuarta proporcional á las rectas AC, A′C′ y AB (**115**), y el triángulo A′B′C′ será el buscado (**98**, 2.º); ó tambien hállese una cuarta proporcional á AC, A′C′ y AB, otra á AC, A′C′ y BC; con estas cuartas proporcionales y con la recta dada A′C′ fórmese el triángulo A′B′C′ (**86**), el cual será el pedido (**98**, 1.º).

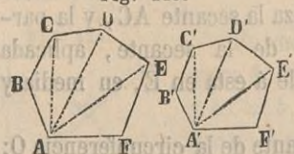
Fig. 118.



121. 8.º **Dado un polígono ABCDEF (fig. 119) construir sobre una recta dada A′B′, considerada como lado homólogo de AB, otro polígono semejante al primero.**

Divídase el polígono dado en triángulos por medio de las diagonales AC, AD, etc.: constrúyase sobre A′B′, considerada como lado homólogo de AB, un triángulo A′B′C′ semejante al ABC (**120**): sobre A′C′, considerada como lado homólogo de AC, constrúyase otro A′C′D′ semejante á ACD: y así sucesivamente. El polígono A′B′C′D′E′F′ será el pedido (**101**).

Fig. 119.



Problemas numéricos.

122. 1.º **Dados los valores numéricos de dos lados de un triángulo rectángulo determinar el tercer lado.**

Distinguiremos dos casos: 1.º que el lado desconocido sea la hipotenusa: 2.º que sea un cateto.

1.º Supongamos que un cateto tiene 40 metros y el otro 32; llamando a la hipotenusa se tendrá (**111**, corol.)

$a=\sqrt{40^2+32^2}=\sqrt{2624}=51,22...$ metros.

2.º Supongamos que un cateto tiene 6 metros y 10 la hipotenusa, llamando b el otro cateto, será (**111**, corol.)

$b=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8$ metros.

123. 2.° **Dados los valores numéricos de los lados de un triángulo determinar la especie de sus ángulos.**

Se eleva al cuadrado el valor numérico del mayor, y si este cuadrado es igual á la suma de los cuadrádos de los otros dos el triángulo será rectángulo, si mayor obtusángulo, y si menor acutángulo (**111**, rec.).

Así, si los lados son 3, 4, 5, como $5^2=25$ y $3^2+4^2=25$, se tendrá
$$5^2=3^2+4^2;$$
luego el triángulo es rectángulo (*).

Si los lados son 10, 12, 20, como $20^2=400$ y $10^2+12^2=244$, resulta
$$20^2>10^2+12^2;$$
luego el triángulo es obtusángulo.

Por último, si los lados fuesen 8, 9, 11, como $11^2=121$, y $8^2+9^2=145$, se tendria
$$11^2<8^2+9^2;$$
luego el ángulo opuesto al mayor lado sería agudo, y siendo los demás menores (**75**, 2.°), el triángulo sería acutángulo.

CAPÍTULO II.

Polígonos regulares inscriptos y circunscriptos, y razon de la circunferencia al diámetro.

ARTÍCULO I.

Inscripcion y circunscripcion de polígonos.

124. *Se dice que una circunferencia está* CIRCUNSCRIPTA *á un polígono, ó que un polígono está inscripto en una circunferencia, cuando esta pasa por todos los vértices del polígono.*

(*) Si con una cuerda ó cadena dividida en piés, por ejemplo, se quisiese formar un triángulo rectángulo, bastaria tomar por lados 3, 4, 5 divisiones ó 6, 8, 10, y el ángulo opuesto al lado 5 en el primer caso y al 10 en el segundo sería recto; porque $5^2=3^2+4^2$ y $10^2=8^2+6^2$.

Dícese que una circunferencia está INSCRIPTA *en un polígono ó que un polígono está* CIRCUNSCRIPTO *á una circunferencia, cuando son tangentes á esta todos los lados del polígono.*

125. TEOREMA 1.° *A todo polígono regular* ABCDE (figura 120): 1.° *se le puede circunscribir una circunferencia:* 2.° *inscribir otra.*

1.° Trácese una circunferencia que pase por los vértices A, B y C (**64**): desde el centro O de esta bájese la perpendicular OM al lado BC, y únase el punto O con A y con D.

Fig. 120.

Doblando el cuadrilátero MODC sobre el MOAB, MC caerá sobre MB, por ser rectos los ángulos OMC y OMB, el punto C coincidirá con B una vez que MC=MB (**41**): la recta CD caerá sobre BA, por ser iguales los ángulos en B y en C por hipótesis, y el punto D coincidirá con A, por ser tambien CD=BA; luego los extremos de OD y OA coinciden, luego estas rectas son iguales; luego la circunferencia que pasa por A, B y C pasará tambien por D. Lo mismo se demostraria que pasa por los vértices restantes; luego dicha circunferencia está circunscripta al polígono.

2.° Los lados del polígono inscripto son cuerdas iguales de la circunferencia circunscripta; luego equidistan del centro de esta (**40**, 1.°); luego todas las perpendiculares trazadas desde O á los lados del polígono son iguales con OM (**24**, corol.); luego la circunferencia trazada desde O con el rádio OM pasará por los extremos de estas perpendiculares; luego todos los lados del polígono serán tangentes, y por lo tanto la nueva circunferencia estará inscripta en el polígono.

126. Llámase *centro* de un polígono regular el centro de la circunferencia circunscripta é inscripta, *rádios* del polígono las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos; y *apotemas* las perpendiculares trazadas desde el centro á los lados del polígono. Los rádios suelen tambien llamarse *rádios oblícuos*, para distinguirlos de las apotemas que se denominan *rádios rectos.*

COROL. 1.° *Los rádios de un polígono son iguales entre sí y las apotemas lo son tambien.*

Corol. 2.° *Los rádios de un polígono son bisectrices de sus ángulos.*

En efecto, los triángulos AOE, EOD (fig. 120) son iguales (**72**, 1.°); luego los ángulos AEO, OED son tambien iguales; luego EO es bisectriz del ángulo en E. Lo mismo se demuestra de los demás.

Corol. 3.° *Los ángulos en el centro*, AOE, EOD, *etc.*, *son iguales.*

Por la igualdad de los mismos triángulos AOE, EOD, etc.

OBSERVACIONES.

1.ª Para determinar el centro O de un polígono, se trazan las bisectrices AO y EO de dos de sus ángulos cualesquiera consecutivos A y E, ó las perpendiculares en los puntos medios de dos lados consecutivos.

2.ª Los ángulos en el centro O de un polígono regular valen juntos 4R (**19**, corol. 4.°): y son iguales entre sí (corolario anterior); luego el valor del ángulo en el centro de un polígono regular estará representado por la fórmula

$$\frac{4R}{n}.$$

De donde

Angulo en el centro de triángulo equilát.° $=\frac{4R}{3}=\frac{4}{3}R=120°.$

Id. de cuadrado. . . . . $=\frac{4R}{4}=\ R=\ 90°.$

Id. de pentágono regular . . . . $=\frac{4R}{5}=\frac{4}{5}R=\ 72°.$

Id. de exágono id. . . . . $=\frac{4R}{6}=\frac{2}{3}R=\ 60°.$

Id. de eptágono id. . . . . $=\frac{4R}{7}=\frac{4}{7}R=51°,42...$

. . . .

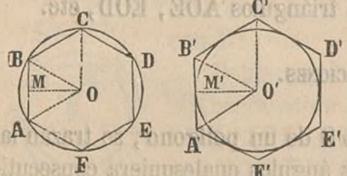
Id. de decágono id. . . . . $=\frac{4R}{10}=\frac{2}{5}\ R=\ 36°.$

127. Teorema 2.° *Todo polígono: 1.° si es inscripto y equilátero es regular: 2.° si es circunscripto y equiángulo es tambien regular.*

1.° Sea el polígono ABCDEF (fig. 121). Los ángulos ABC, BCD, etc., del polígono son inscriptos y comprenden entre sus lados arcos iguales (que en este caso cada uno es $\frac{2}{3}$ de la circunferencia), luego son iguales (**54**, corol. 1.°); luego el polígono es regular.

2.° Sea el polígono A'B'C'D'E'F'. Trazando por el centro O' de la circunferencia inscripta y por los vértices del polígono las líneas O'A', O'B' y O'C', dividirán los ángulos A',B',C' del polígono en dos partes iguales (**65**, corol.); luego los ángulos O'A'B', O'B'A', O'B'C', O'C'B' son iguales; luego los triángulos A'B'O' y B'C'O', que tienen el lado B'O' comun y dos ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales (**72**, corol.); luego A'B'=B'C'.

Fig. 121.



Del mismo modo se demostraria que B'C'=C'D', C'D'=D'E', etc.; luego el polígono dado es tambien equilátero, luego es regular.

128. Teorema 3.° *Los perímetros de los polígonos regulares* ABCD..., A'B'C'D'... (fig. 121), *de igual número de lados, son proporcionales á sus rádios* OA, O'A' *y á sus apotemas* OM, O'M'.

Los polígonos propuestos son semejantes (**102**); luego se tendrá

$$\frac{p}{p'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Los ángulos A, B, C,..., y A', B', C',..., de los polígonos regulares de igual número de lados, son todos iguales entre sí (**82**, obs. 2.ª); luego sus mitades tambien lo serán; luego los triángulos AOB y A'O'B' tienen los ángulos ABO=A'B'O' y BAO=B'A'O' por ser AO y BO, A'O' y B'O' bisectrices de los ángulos de los polígonos (**126**, corol. 2.°); luego son semejantes (**98**, corol.), luego se tendrá (**108**)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{MO}{M'O'}.$$

Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun, luego (Alg. **230**)

$$\frac{p}{p'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{MO}{M'O'}$$

ó llamando r, r' los rádios, y a, a' las apotemas,

$$\frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}.$$

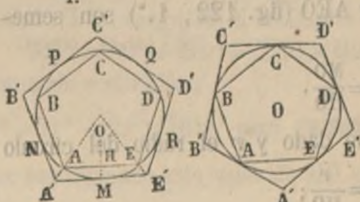
PROBLEMAS.

129. 1.° **Inscribir en una circunferencia un polígono regular de cualquier número de lados, por ejemplo, 5.**

Divídase la circunferencia en cinco partes iguales (*), AB, BC, etc. (fig. 122, 1.ª y 2.ª): trácense las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono ABCDE será el pedido.

Fig. 122.

1.ª 2.ª



Los arcos AB, BC, ..., son iguales, luego las cuerdas tambien lo serán (**39**, 1.°); luego el polígono es equilátero ó inscripto, luego es regular (**127**, 1.°).

130. 2.° **Dado un polígono regular inscripto: 1.° circunscribir á la misma circunferencia otro del mismo número de lados: 2.° hallar el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del rádio.**

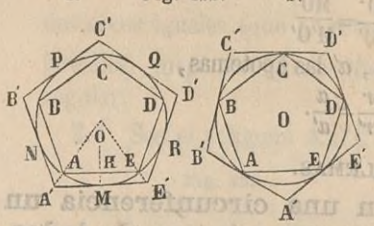
1.° Sea el polígono dado ABCDE; por los puntos M, N, P, etc., medios de los arcos subtendidos por sus lados (fig. 122, 1.ª) ó por los vértices A, B, C, etc. del polígono (fig. 122, 2.ª) trácense tangentes, y el polígono A'B'C'D'E', formado en una ú otra figura, será el pedido.

Porque en uno y otro caso los ángulos A', B', C', etc. del

(*) De dos maneras puede hacerse esta division: 1.ª por tanteo: 2.ª calculando el ángulo en el centro del polígono que trata de formarse (**126**, observacion 2.ª), que en este caso sería 72°; construyendo con el semicírculo un ángulo AOB de este número de grados, y el arco AB, que interceptan sus lados, será la quinta parte de la circunferencia. Por más que este método parezca expedito y exacto no lo es sin embargo; en la práctica es preferible el primero.

nuevo polígono tienen por medida mitades de arcos iguales, lue-

1.ª Fig. 122. 2.ª



go son iguales; luego el polígono A'B'C'D'E' es equiángulo y está circunscripto, luego es regular (**127**, 2.°), teniendo además evidentemente igual número de lados que el propuesto.

Observacion 1.ª En el caso de ser los lados paralelos, como en la figura primera, la recta A'O divide el arco convexo MAN en dos partes iguales (**65**, corolario); luego pasa por el punto A, medio de este arco.

Luego *los vértices correspondientes*, como A y A', *y el centro, están en línea recta.*

2.° Los triángulos A'E'O y AEO (fig. 122, 1.ª) son semejantes (**97**); luego (**108**)

$$\frac{A'E'}{AE}=\frac{MO}{HO},$$

ó llamando l el lado del polígono dado y r el rádio del círculo

$$\frac{A'E'}{l}=\frac{r}{HO};$$

de donde
$$A'E'=\frac{rl}{HO} \qquad [1].$$

En el triángulo rectángulo AHO se tiene (**111**, corol.)

$$HO=\sqrt{AO^2-AH^2}=\sqrt{r^2-(\tfrac{1}{2}l)^2}=\sqrt{r^2-\tfrac{1}{4}l^2}=\sqrt{\frac{4r^2-l^2}{4}}=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2} \qquad [2].$$

Sustituyendo este valor de HO en la ecuacion [1], resulta

$$A'E'=\frac{rl}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-l^2}}=\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}} \quad \text{ó} \quad A'E'=\frac{2rl}{\sqrt{4r^2-l^2}}.$$

Observacion 2.ª Traducida la fórmula [2] al lenguaje comun, nos dice que: *la apotema de un polígono regular es igual á la mitad de la raíz cuadrada del cuádruplo del rádio cuadrado ménos el cuadrado del lado.*

131. 3.° Dado un polígono ABCDE (fig. 123) regular inscripto: 1.° inscribir otro de duplo nú-

mero de lados: 2.° hallar el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del rádio.

1.° Divídanse los arcos AB, BC, etc., subtendidos por los lados del polígono dado en dos partes iguales (**61**); trácense las cuerdas de estos nuevos arcos, y el polígono AMBNC....., formado por ellas, será el pedido.

Fig. 123.

Porque es regular (**127**, 1.°), y evidentemente de duplo número de lados que el propuesto.

2.° Trácense los rádios AO, MO y BO: MO pasa por el punto medio del arco AMB; luego será perpendicular á la cuerda AB y la dividirá en dos partes iguales (**41**, obs.); luego el triángulo BHO es rectángulo en H; luego el ángulo BOM es agudo (**71**, corolario 3.°), luego en el triángulo BOM se tendrá (**111**, 3.°)

$$BM^2 = BO^2 + MO^2 - 2MO \times HO = 2BO^2 - 2MO \times HO,$$

ó llamando r el rádio,

$$BM^2 = 2r^2 - 2r \times HO: \text{ pero } (\mathbf{130}, [2])\ HO = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2};$$

luego sustituyendo este valor de HO en la ecuacion anterior, resulta

$$BM^2 = 2r^2 - 2r \times \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l^2} = r(2r - \sqrt{4r^2 - l^2});$$

de donde $$MB = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l^2})}.$$

132. 4.° **Dada una circunferencia: 1.° inscribir en ella un cuadrado: 2.° hallar el lado de este en valores del rádio.**

1.° Se trazan dos diámetros AC y BD (fig. 124) perpendiculares entre sí, los que dividirán la circunferencia en cuatro partes iguales (**41**, corol.): se unen los extremos de estos arcos por medio de cuerdas, y el polígono ABCD que estas forman, será el cuadrado pedido (**129**).

Fig. 124.

2.° El triángulo ABO, rectángulo en O, nos da (**111**, 1.°)

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 2AO^2,$$

de donde $AB=\sqrt{2AO^2}=AO\sqrt{2}$, ó llamando r el rádio

$$AB=r\sqrt{2}.$$

OBSERVACIONES.

1.ª De esta última ecuacion se deduce

$$\frac{AB}{r}=\sqrt{2}.$$

Luego *la razon del lado del cuadrado inscripto en una circunferencia al rádio es inconmensurable.*

2.ª Como el lado AB es á su vez la diagonal de un cuadrado AEBO, cuyo lado es el rádio, se infiere tambien que: *la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables.*

3.ª Si en la ecuacion anterior se supone $r=1$, resulta

$$AB=\sqrt{2}.$$

Luego construyendo un cuadrado cuyo lado sea la unidad, su diagonal representa exactamente á $\sqrt{2}$; luego la Geometría proporciona medios para determinar el valor exacto de cantidades irracionales (*).

133. 5.° **Dada una circunferencia, inscribir en ella un exágono regular.**

Supongamos el problema resuelto, y que AB (fig. 125) sea el lado del exágono inscripto. Trazando los rádios AO y BO, el ángulo AOB=60° (**126**, observacion 2.ª); luego los ángulos A y B del mismo triángulo ABO valdrán 120° (**71**, corol. 1.°). Mas siendo AO=BO, los ángulos en A y en B serán iguales; luego cada uno de ellos valdrá 60°; luego el triángulo ABO es equiángulo, luego será equilátero (**75**, corol. 2.°); luego

Fig. 125.

$$AB=AO;$$

luego *el lado del exágono es igual al rádio de la circunferencia circunscripta.*

(*) Esta exactitud es puramente ideal; porque los medios que se emplean para resolver gráficamente los problemas no dan sino resultados más ó menos aproximados á la exactitud, que jamás se consigue de esta manera.

Luego para inscribir en una circunferencia el exágono regular, se coloca el rádio sobre la curva seis veces: se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD..... será el exágono pedido.

Corol. *Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, por medio de rectas*, BD, DF, FB, *los vértices del exágono regular, se tendrá el triángulo equilátero* BDF *inscripto.*

OBSERVACIONES.

1.ª Si se quiere hallar tambien el lado del triángulo equilátero inscripto en valores del rádio, trazando el diámetro AD, el triángulo AFD rectángulo en F (**51**, corol. 2.°) nos daria (**111**, corol.)

$$DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{(2AO)^2-AF^2}=\sqrt{4AO^2-AO^2}=\sqrt{3AO^2}=AO\sqrt{3}$$

ó llamando r el rádio, $DF=r\sqrt{3}$.

De esta ecuacion se pueden sacar consecuencias análogas á las deducidas en las observaciones 1.ª y 3.ª del número anterior.

2.ª La recta BF tiene los puntos B y F equidistantes de A y O: luego es perpendicular á la AO en su punto medio G (**26**, corolario 2.°); luego AG=GO: mas GO es la apotema del triángulo equilátero inscripto; luego *la apotema del triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del rádio.*

134. 6.° **Dada una circunferencia, inscribir en ella un decágono regular.**

Supongamos que AB (fig. 126) sea el lado del decágono inscripto. Trazando los rádios AO y BO, el ángulo AOB=36° (**126**, obs. 2.ª); luego los ángulos en A y en B valdrán 144° (**71**, corolario 1.°). Mas como AO=BO, los ángulos en A y en B del mismo triángulo ABO serán iguales, luego cada uno de ellos valdrá 72°.

Fig. 126.

Trácese la bisectriz del ángulo OAB, y sus mitades QAB y QAO valdrán 36°. Luego el triángulo OAQ tiene los ángulos AOQ=QAO; luego (**75**, rec. 1.°)

$$AQ=OQ.$$

El triángulo ABQ es tambien isósceles; porque siendo QAB=36°, y B=72°, será AQB=72° (**71**, corol. 1.°); luego

Fig. 126.

$$AQ=AB.$$

Esta igualdad de lados y la anterior nos dan

$$AB=OQ.$$

Siendo AQ bisectriz del ángulo en A, se tendrá (**95**)

$$\frac{AO}{AB}=\frac{OQ}{QB}:$$

pero

$$AO=OB \text{ y } AB=OQ; \quad \text{luego}$$

$$\frac{OB}{OQ}=\frac{OQ}{QB} \quad \text{ú} \quad \frac{OB}{AB}=\frac{AB}{QB}.$$

Luego *el lado del decágono regular inscripto es igual á la parte mayor del rádio dividido en media y extrema razon* (**118**).

Luego para inscribir en una circunferencia el decágono regular se coloca la parte mayor del rádio, dividido en media y extrema razon (**119**), sobre la curva diez veces, una á continuacion de otra: se unen los extremos de cada arco, y el polígono ABCD.... será el decágono pedido (*).

Corol. 1.° Uniendo de dos en dos, dejando uno intermedio, los vértices C, E, G, L, ..., se tendrá inscripto el pentágono regular CEGL.....

Corol. 2.° Para inscribir el pentedecágono regular se toma la cuerda del arco, diferencia entre el subtendido por el lado del exágono y el del decágono, y esta diferencia se coloca quince veces, una á continuacion de otra, sobre la circunferencia, la cual quedará dividida en quince partes iguales: se trazan las cuerdas correspondientes á estos arcos, y el polígono que forman será el pentedecágono regular.

(*) Esta construccion, si bien exacta en teoría, es bastante errónea en la práctica; porque el error que necesariamente se comete en la division del rádio en media y extrema razon, se multiplica por 10 al hacer aplicacion de ella. Es preferible en este caso y en los que de él dependen, dividir la circunferencia por tanteo en las partes iguales que se desee.

En efecto, el lado del exágono subtiende un arco $\frac{1}{6}$ de circunferencia: el del decágono $\frac{1}{10}$ de id.: la diferencia entre estos arcos es

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{10}{60}-\frac{6}{60}=\frac{4}{60}=\frac{1}{15} \text{ de circunferencia};$$

luego este arco, colocado quince veces sobre la circunferencia, la divide en quince partes iguales, cuyas cuerdas formarán el pentedecágono regular (**127**, 1.°).

OBSERVACION GENERAL.

135. Se saben inscribir geométricamente, entre otros polígonos regulares, los siguientes: el *triángulo* (**133**, corol.), el *cuadrado* (**132**), el *pentágono* (**134**, corol. 1.°) y el *pentedecágono* (**134**, corol. 2.°). Mas como inscripto un polígono regular se circunscribe otro del mismo número de lados (**130**, 1.°), y se inscribe otro de número de lados duplo (**131**, 1.°), resulta que se pueden inscribir y circunscribir geométricamente los polígonos regulares, cuyo número de lados expresan los diferentes términos de las siguientes progresiones:

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 3\times2^n$$
$$\div\ 4 : 8 : 16 : 32 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 4\times2^n$$
$$\div\ 5 : 10 : 20 : 40 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 5\times2^n$$
$$\div\ 15 : 30 : 60 : 120 : \ldots\ldots\ldots\ldots : 15\times2^n$$

136. 7.° Dado el lado a **(fig. 127) de un polígono regular cualquiera, por ejemplo, de un octógono, construir el polígono.**

En una circunferencia, cuyo rádio sea una línea cualquiera OB, inscríbase un octógono ABCD.....: sobre uno de sus lados AB tómese AM$=a$: por M trácese una paralela MB' al rádio AO, hasta que corte en B' al OB', prolongado si es necesario: con un rádio igual á OB' trácese una nueva circunferencia: prolónguense los rádios OA, OC, OD, etc., si se necesita, hasta que encuentren la nueva circunferencia en los puntos A', B', C', etc.: únanse estos puntos por medio de cuerdas, y el polígono A'B'C'D'..... será el pedido.

Fig. 127.

Porque siendo $OA = OB$ y $OA' = OB'$, se tiene

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'};$$

luego AB es paralela á A'B' (**94**, rec.); y como MB' es tambien paralela á AA', por construccion, la figura AA'B'M es un paralelógramo; luego (**79**, 1.°)

$$A'B' = AM = a.$$

Siendo los ángulos en O iguales entre sí, los arcos A'B', B'C', C'D'.. que miden estos ángulos, serán tambien iguales; luego A'B'C'D'..... es un octógono regular, cuyo lado es igual á la recta dada a.

ARTÍCULO II.

Razon de la circunferencia al diámetro.

137. Teorema 1.° *Todo círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuyos rádios y apotemas son iguales.*

Inscribiendo en una circunferencia un polígono regular cualquiera, despues otro de duplo número de lados, luego otro, y así sucesivamente: los rádios de estos polígonos permanecen siempre iguales á los de la circunferencia: las apotemas se van aproximando al rádio, porque los lados del polígono son cada vez menores (**39**, 2.° y **40**, 2.°): y los perímetros de los polígonos se van confundiendo con la circunferencia, á medida que el número de lados se duplica; de manera que á las pocas inscripciones ya la vista no distingue la curva del último polígono inscripto. Como las inscripciones se pueden aún suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que el teorema es cierto.

Corol. 1.° *Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus rádios y á sus diámetros.*

Porque, siendo c, c' dos circunferencias, r, r' sus rádios, y d, d' los diámetros, se tiene (**128**)

$$\frac{c}{c'} = \frac{r}{r'} = \frac{2r}{2r'} \quad \text{ó} \quad \frac{c}{c'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'}.$$

Corol. 2.° *La razon de la circunferencia al diámetro es una cantidad constante.*

En efecto, alternando la proporcion

$$\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'} \quad \text{resulta} \quad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}.$$

Corol. 3.° Llamando π (*) la razon de la circunferencia al diámetro, se tendrá

$$\frac{c}{d}=\pi \quad \text{ó} \quad \frac{c}{2r}=\pi.$$

En cualquiera de estas dos ecuaciones entran tres cantidades indeterminadas, y por consiguiente conocidas dos de ellas se puede hallar el valor de la otra. Así

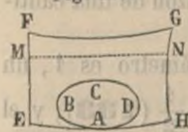
$$c=\pi d \quad \text{ó} \quad c=2\pi r,$$

$$d=\frac{c}{\pi} \quad \text{y} \quad r=\frac{c}{2\pi}.$$

138. Teorema 2.° *Toda línea convexa (**) cerrada, comprendida dentro de otra cualquiera, es menor que esta.*

Sea ABCDA (fig. 128) la línea convexa. Si esta no es menor que todas las que la comprenden, habrá de ellas una menor que todas las demás, que será más corta que ABCDA ó igual con ella. Supongamos que la línea que comprende á la ABCDA con estas circunstancias sea AEFGH: trácese entre estas dos líneas una recta cualquiera MN, que no corte á la ABCDA, y se tendrá (**5**)

Fig. 128.



$$MN < MFGN,$$

y agregando á los dos miembros la línea MEAHN, resulta

$$AEMNHA < AEFGHA:$$

mas por hipótesis AEFGHA es la línea menor de las que comprenden á la ABCDA; luego esta hipótesis es absurda; luego todas las líneas que comprenden á la convexa son mayores que ella, ó ABCDA es la menor de todas.

(*) Este signo es la *p* griega que se pronuncia *pi*.

(**) Cuando se da este nombre á una curva, sin relacion á otra línea ni punto, se significa con él que la curva no puede ser cortada por una recta más que en dos puntos. Así, la circunferencia es una curva convexa.

Corol. 1.° *La circunferencia es mayor que el perímetro de un polígono cualquiera inscripto y menor que el de otro cualquiera circunscripto.*

Corol. 2.° *Los perímetros de los polígonos regulares inscriptos van creciendo á medida que el número de sus lados se duplica, y los de los circunscriptos van disminuyendo en igual caso.*

Observacion. De estos corolarios se infiere tambien [**51**, (*)] que

La circunferencia es el límite superior de los polígonos regulares inscriptos, y el inferior de los circunscriptos.

PROBLEMAS.

139. 1.° Hallar la razon numérica de la circunferencia al diámetro, ó sea el valor de π.

Siendo constante ó igual para todas las circunferencias la cantidad que vamos á determinar (**137**, corol. 2.°), si se calcula el valor de una circunferencia en el supuesto de que el diámetro es 1, se tendrá la razon pedida; puesto que la razon de una cantidad con la unidad es la cantidad misma.

Inscribiendo en una circunferencia, cuyo diámetro es 1, un exágono regular, el lado de este polígono valdrá $\frac{1}{2}$ (**133**); y el perímetro

$$\frac{1}{2}\times 6=3.$$

El lado del exágono circunscripto será tambien (**130**, 2.°)

$$\frac{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{4\times(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}=0{,}577\ldots,$$

y el perímetro $0{,}577\ldots..\times 6=3{,}46\ldots.$

Ahora la circunferencia es mayor que el perímetro del polígono inscripto y menor que el del circunscripto (**138**, corol. 1.°); luego el valor numérico de la circunferencia será 3 y una fraccion decimal menor que 0,46.

Si del mismo modo calculamos el perímetro del polígono inscripto de 12 lados (**131**, 2.º), y el de igual número de lados circunscripto, el primero de estos valores será mayor que 3 y el 2.º menor que 3,46... (**138**, corol. 2.º), luego la circunferencia estará representada por 3 y la parte decimal que tengan comun los perímetros que acaban de determinarse.

Continuando de la misma manera el cálculo de los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos de 24, 48, 96, etc. lados, los valores de estos perímetros se irán aproximando más y más, y el valor de la circunferencia se podrá hallar tan aproximado como se quiera (*). Así se halló

$$\pi = 3,14159...$$

Observacion. La razon de la circunferencia al diámetro hallada por Arquímedes es $\frac{22}{7}$, por Pedro Mecio $\frac{355}{113}$ (**); por otros procedimientos ménos elementales que el que hemos empleado $\pi = 3,1415926535.....$ (hasta 155 cifras decimales).

140. 2.º **Si un rádio tiene seis metros ¿cuál será la longitud de la circunferencia?**

Se tendrá (**137**, corol. 3.º)

$$c = 2\pi r = 2 \times 3,14159 \times 6 = 37,69908 \text{ metros.}$$

Recíprocamente. **Si una circunferencia tiene 516 varas de longitud, ¿cuál será su rádio?**

El rádio será (**137**, corol. 3.º)

$$r = \frac{c}{2\pi} = \frac{516}{6.28318} = 82,12 \text{ varas.}$$

141. 3.º **Si un arco tiene 20° y el rádio es 10 metros, ¿cuál será la longitud del arco?**

La de la circunferencia es **137**, corol. 3.º)

$$c = 2 \times 3,14159 \times 10 = 62,8318 \text{ metros,}$$

(*) Claro se ve que por este procedimiento no es posible llegar á un valor exacto que represente la razon de la circunferencia al diámetro. Más aún, por cualquiera otro de los inventados ó por inventar se hallaria un resultado análogo, porque la razon de la circunferencia al diámetro, y áun el cuadrado de esta razon, es una cantidad inconmensurable. (V. *Legendre*, Geom., nota 4.ª)

(**) Este número se puede obtener escribiendo las tres primeras cifras impares cada una dos veces, y separando por medio el grupo que forman, de este modo

113|355.

y la del arco se halla por la siguiente proporcion

$$\frac{360°}{20°}=\frac{62,8318}{x};\ \text{de donde}\ x=\frac{20\times 62,8318}{360}=3,4906\ \text{metros.}$$

142. 4.° **Conocido el rádio de un arco, hallar el número de grados que debe tener para que su longitud sea igual á la de una circunferencia de rádio tambien dado.**

Llamando r el rádio del arco y x el número de grados, la longitud del arco será $\frac{2\pi r\times x}{360}$; la de la circunferencia, cuyo rádio es r', será tambien $2\pi r'$: y como estas dos expresiones representan, por hipótesis, cantidades iguales, resulta

$$\frac{2\pi r\times x}{360}=2\pi r';$$

de donde (Alg. **72**) $x=360\times\frac{r'}{r}$.

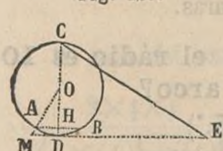
Así, el número de grados de un arco cuyo rádio son 24 varas, é igual en longitud á una circunferencia cuyo rádio sean 10 varas, será

$$x=360°\times\frac{10}{24}=150°.$$

143. 5.° **Hallar gráficamente la longitud aproximada de una circunferencia (*).**

Trácese la cuerda AB (fig. 129), igual al rádio, y el diámetro CD perpendicular á esta cuerda: se traza por D la tangente ME, y el rádio OA, prolongándole hasta encontrarla en M: desde este punto hácia la derecha se toman tres rádios; se une el extremo E del último con el C del diámetro y la recta CE será la longitud de la semicircunferencia con ménos error que 0,0001 del rádio.

Fig. 129.



En efecto, en el triángulo CED, rectángulo en D, se tiene (**111**, corolario)

$$CE=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{\overline{CD}^2+(ME-MD)^2}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{ME}^2-2ME\times MD+\overline{MD}^2},$$

(*) Tambien es imposible la resolucion exacta de este problema empleando solo la línea recta y la circunferencia.

ó poniendo en vez de CD su valor $2r$, y en lugar de ME el suyo $3r$,

$$CE=\sqrt{4r^2+9r^2-6r\times MD+MD^2}=\sqrt{13r^2-6r\times MD+MD^2} \quad [1].$$

Para hallar el valor de MD, de los triángulos semejantes OAH y OMD se deduce

$$\frac{MD}{AH}=\frac{OD}{OH}; \text{ de donde } MD=\frac{AH\times OD}{OH},$$

ó sustituyendo $\frac{1}{2}r$ por AH, r por OD y $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}$ por OH (**130** [2])

$$MD=\frac{\frac{1}{2}r\times r}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-r^2}}=\frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}}=\frac{r^2}{r\sqrt{3}}=\frac{r}{\sqrt{3}}=\frac{r\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}r\sqrt{3}.$$

Sustituyendo este valor de MD en la ecuacion [1], resulta

$$CE=\sqrt{13r^2-6r\times\tfrac{1}{3}r\sqrt{3}+\tfrac{1}{3}\times r^2\times 3}=\sqrt{r^2(13\tfrac{1}{3}-2\sqrt{3})}=$$
$$r\sqrt{13{,}33.....-3{,}46410161.....}=r\sqrt{9{,}86923171.....},$$

ó por último $\qquad CE=r\times 3{,}14153...;$

y como (**137**, corol. 3.°) $c=2r\times 3{,}14159$ *la línea* CE *representa el valor de la semicircunferencia con menos error de* 0,0001 *del rádio.*

CAPÍTULO III.

De las áreas de las figuras planas.

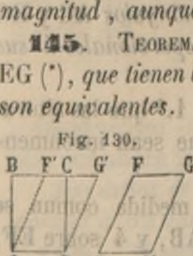
ARTÍCULO I.

Determinacion de las áreas de las figuras planas.

144. *Se llaman superficies* EQUIVALENTES *las que tienen igual magnitud, aunque tengan distinta figura* (**3**).

145. TEOREMA 1.° *Dos paralelógramos* (fig. 130) AC *y* EG (*), *que tienen las bases* AD *y* EH *iguales é igual altura* (**77**), *son equivalentes.*

Fig. 130.



Superpóngase el paralelógramo EG al AC, de modo que EH coincida con su igual AD; y como las alturas son iguales, los lados BC y FG formarán la linea recta BG' (**32**, corolario).

(*) Estos paralelógramos los nombramos, para mayor concision, por las letras colocadas en los extremos de una diagonal: del mismo modo se expresará en lo sucesivo todo cuadrilátero, siempre que esto no dé lugar á equivocaciones.

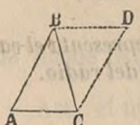
Los triángulos ABF′ y CDG′ tienen los ángulos BAF′=CDG′ (**33**, 1.°), además AB=CD y AF′=DG′ (**79**, 1.°), luego son iguales (**72**, 2.°).

Fig. 130.

Si del trapecio ABG′D se resta el triángulo ABF′ queda el paralelógramo AF′G′D, que representa al EG : si del mismo trapecio se resta el triángulo DCG′ queda el paralelógramo AC; luego los paralelógramos AC y EG son equivalentes.

146. Teorema 2.° *Todo triángulo* ABC (fig. 131) *es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura.*

Fig. 131.



Si por los vértices B y C se trazan las rectas BD y CD respectivamente paralelas á AC y AB, la figura ABCD es un paralelógramo que tiene la misma base AC que el triángulo, y tambien la misma altura (**32**, corol.) : pero los triángulos ABC y BCD son iguales (**79**, corol. 1.°) ; luego ABC es la mitad del paralelógramo AD, que tiene la misma base y altura.

Corol. *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

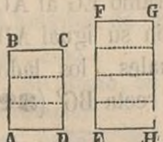
Porque son mitades de paralelógramos equivalentes (**145**).

147. *Se llama* área *de una superficie la medida de su magnitud* (**2**).

En la determinacion de las áreas *tomaremos siempre por unidad un cuadrado cuyo lado sea la unidad de longitud.*

148 Teorema 3.° *Las áreas de dos rectángulos* AC y EG (fig. 132), *de iguales bases* AD y EH, *son proporcionales á sus alturas* AB y EF.

Fig. 132.



Distinguiremos dos casos : 1.° que las alturas sean conmensurables : 2.° que sean inconmensurables.

1.° Supongamos que la medida comun se pueda colocar 3 veces sobre AB, y 4 sobre EF, y se tendrá

$$\frac{AB}{EF}=\frac{3}{4}.$$

Por los puntos de division trácense paralelas á las bases, y los rectángulos AC y EG quedarán divididos, el primero en

3 rectángulos parciales y el segundo en 4, todos iguales entre sí (**79**, corol. 2.°); luego

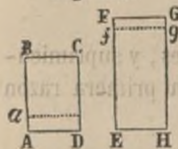
$$\frac{AC}{EG}=\frac{3}{4}.$$

De esta proporcion y de la anterior se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF}.$$

2.° Sean AB y EF (fig. 133) inconmensurables. Supongamos que la AB se divida en partes iguales tan pequeñas como se quiera, y que una de estas partes sea Aa: colóquese esta parte sobre EF todas las veces que se pueda, y quedará un resto Ff, una vez que AB y EF son inconmensurables: trácese luego la fg paralela á EH.

Fig. 133.



Siendo las rectas AB y Ef conmensurables, se tendrá (primera parte del teorema)

$$\frac{AC}{Eg}=\frac{AB}{Ef}:$$

comparando estos quebrados con los siguientes

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF},$$

se observará que los segundos (que están en columna) tienen el numerador AB comun, y que el denominador Ef se puede aproximar á EF todo lo que se quiera: porque Ff es menor que Aa y esta parte puede ser más pequeña que una cantidad dada cualquiera; luego $\frac{AB}{EF}$ es el límite de $\frac{AB}{Ef}$ (**51**, (*)): por igual razon $\frac{AC}{EG}$ es el límite de $\frac{AC}{Eg}$: pero las cantidades variables son iguales; luego los límites tambien lo serán (**51**, (*) corol.); luego

$$\frac{AC}{EG}=\frac{AB}{EF}.$$

Observacion. Como en todo rectángulo se puede tomar la base por altura y la altura por base, resulta que

Las áreas de dos rectángulos de iguales alturas, son proporcionales á sus bases.

149. Teorema 4.° *Las áreas de dos rectángulos son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Llámese R, b, a, el área, base y altura de un rectángulo,
R′ b', a', el área, base y altura de otro rectángulo,
R″, b, a', el área, base y altura de un tercer rec-

tángulo, que, como se ve, tiene igual base que el primero é igual altura que el segundo.

El primero y tercer rectángulo tienen bases iguales, luego (**148**)

$$\frac{R}{R'}=\frac{a}{a'}.$$

El segundo y tercer rectángulo tienen iguales alturas, luego (**148**, obs.)

$$\frac{R''}{R'}=\frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones, y suprimiendo el factor R'', comun á los dos términos de la primera razon compuesta, resulta

$$\frac{R}{R'}=\frac{a\times b}{a'\times b'}.$$

Corol. 1.° Si suponemos que R' es la unidad de medida del rectángulo R, el primer quebrado representa el área de este rectángulo (**2**): mas en tal caso $b'=a'=1$ (**147**); luego en dicha hipótesis se tiene

$$R=a\times b.$$

Luego *el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

De modo que si un rectángulo tuviese por base 41 metros y por altura 22, llamando R su área, se tendria

$$R=41\times 22=902 \text{ metros cuadrados.}$$

Corol. 2.° *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Porque el cuadrado es un rectángulo en que la base y altura son iguales.

Así, el área de un cuadrado, cuyo lado son 6 varas y 2 piés, llamando C dicha área y reduciendo el complejo á incomplejo, resulta

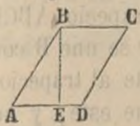
$$C=20^2=400 \text{ piés cuadrados.}$$

150. Teorema 5.° *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura.*

Porque el paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura (**145**): el área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura (**149**, corol. 1.°); luego la del paralelógramo será igual tambien al producto de la base por la altura.

Así para hallar el área del paralelógramo AC (fig. 134), se mide su base AD, que supongamos tiene 6 metros: se traza su altura BE, que tambien se mide, y supóngase que tiene 8 metros: y llamando P el área buscada, se tendrá

Fig. 134.



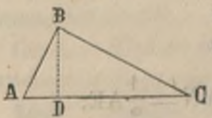
$$P=6\times8=48 \text{ metros cuadrados.}$$

151. Teorema 6.° *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Porque el triángulo es la mitad de un paralelógramo de igual base y altura (**146**): el área del paralelógramo es igual al producto de su base por su altura (**150**); luego la del triángulo será igual á la mitad del producto de la base por la altura.

De modo que para hallar el área del triángulo ABC (figura 135), se mide su base AC: se traza la altura BD, que se mide tambien, y suponiendo que la primera de estas líneas tenga 10 varas y la segunda 7, llamando T el área buscada, será

Fig. 135.



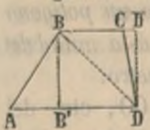
$$T=\frac{10\times7}{2}=35 \text{ varas cuad.}$$

Corolario *Las áreas de dos triángulos son proporcionales á los productos de las bases por las alturas: si las bases son iguales, serán proporcionales á las alturas; y si las alturas son iguales, serán proporcionales á las bases.*

152. Teorema 7.° *El área de un trapecio* ABCD (fig. 136) *es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases.*

Trazando la diagonal BD, el trapecio queda dividido en dos triángulos, cuyas bases pueden ser las AD y BC del trapecio, y cuyas alturas son en tal caso BB'=DD', que es la misma del trapecio.

Fig. 136.



El área de ABD es $\frac{1}{2}AD\times BB'$, la de BDC es $\frac{1}{2}BC\times DD'$; luego la del trapecio será

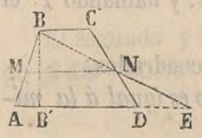
$$\frac{1}{2}AD\times BB'+\frac{1}{2}BC\times DD'=BB'\times\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Así, el área del trapecio anterior, en el supuesto de que $BB'=10$ pulgadas, $AD=13$ y $BC=5$, sería

$$10\times\frac{1}{2}(13+5)=10\times 9=90 \text{ pulgadas cuad.}$$

Observacion. Si se prolonga la base AD del trapecio ABCD (fig. 137) una parte $DE=BC$, y se une B con E, el triángulo ABE es equivalente al trapecio; porque tiene la misma altura que este, y su base es la suma de las dos bases del mismo. Luego el área del trapecio es tambien

Fig. 137.



$$BB'\times\frac{1}{2}AE \quad [1].$$

Los triángulos BCN y NDE, que tienen $BC=DE$ por hipótesis, y los ángulos $BCN=NDE$ y $NBC=DEN$ por alternos entre paralelas, son iguales (**72**, 3.º): luego $BN=NE$; y tambien $CN=ND$.

Trazando por N la recta NM paralela á AE, se tendrá (**97**)

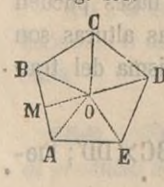
$$\frac{BN}{BE}=\frac{BM}{BA}=\frac{MN}{AE}:$$

pero $BN=\frac{1}{2}BE$; luego $BM=\frac{1}{2}BA$ y $MN=\frac{1}{2}AE$.

Sustituyendo este valor de $\frac{1}{2}AE$ en la fórmula [1], el área del trapecio será $BB'\times MN$.

Luego *el área del trapecio es tambien igual al producto de su altura por una recta trazada por los puntos medios de los lados no paralelos, ó sea por una paralela á las bases y equidistante de estas* (*).

Fig. 138.



153. Teorema 8.º *El área de un polígono regular* ABCDE (fig. 138) *es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro.*

Trazando los radios AO, BO, CO, etc. del polígono, este queda dividido en tantos triángulos AOB, BOC, etc. iguales entre sí (**72**, 1.º)

(*) A esta línea MN se le suele dar el nombre de paralela media.

como lados tiene: el área de uno de los triángulos AOB es $\frac{1}{2}$ MO$\times$AB (**151**); luego la del polígono será $\frac{1}{2}$ MO$\times$AB$\times$5$=$ $\frac{1}{2}$MO$\times$5AB, ó llamando P el área del polígono, a la apotema y p el perímetro

$$P=\frac{1}{2}ap.$$

Así, para hallar el área de un exágono regular, cuyo lado tiene 4 metros, será $p=6\times4=24$ metros, y (**130**, obs. 2.ª)

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{4\times16-16}=3,46\ \ldots \text{ metros};$$

de donde $P=\frac{1}{2}\times3,46\times24=41,52$ metros ... cuad.

154. *Llámase* SECTOR POLIGONAL *la parte* ABCO *de polígono regular comprendida por dos rádios y dos ó más lados.*

La parte ABC *de perímetro correspondiente á un sector se llama base de este.*

COROL. *El área de un sector poligonal es igual á la mitad del producto de su apotema por la base.*

155. TEOREMA 9.º *El área del círculo es igual á la mitad del producto del rádio por la circunferencia.*

Porque el círculo se puede considerar como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro es la circunferencia, y cuya apotema es el rádio (**137**); luego llamando c la circunferencia, r el rádio y C el área del círculo, se tendrá

$$C=\frac{1}{2}rc.$$

COROL. Sustituyendo en esta fórmula en vez de c su valor $2\pi r$ (**137**, corol. 2.º), se tendrá

$$C=\frac{1}{2}r\times2\pi r=\pi r^2 \text{ ó } C=\pi r^2.$$

Luego *el área del círculo es igual al producto de la razon de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del rádio.*

Así, el área de un círculo cuyo rádio sean 10 varas será

$$C=3,14159\times10^2=314,159 \text{ varas cuad.}$$

156. *Llámase* SECTOR *de círculo la parte* ABCO (fig. 139) *de este comprendida entre dos rádios* OA, OC *y un arco* ABC.

COROLARIO. *El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su rádio por el arco.*

Fig. 139.

Porque se puede considerar tambien como un sector poligonal correspondiente á un polígono regular de infinito número de lados.

157. *Se llama* SEGMENTO *de círculo la parte de este comprendida entre una cuerda y su arco, ó entre dos cuerdas paralelas y los arcos que estas interceptan.*

La cuerda ó cuerdas que le forman se llaman *base* ó *bases* del segmento.

ABC y ADC son segmentos de una base AC: ACNM es un segmento de dos bases AC y MN.

COROL. El área de un segmento ABC de una base, y menor que el semicírculo, es igual á la del sector AOCB ménos la del triángulo AOC: la de un segmento ADC de una base tambien pero mayor que el semicírculo, es igual á la del sector ADCO más la del triángulo AOC; y la del segmento ACNM de dos bases es igual á la diferencia de las áreas de los segmentos MBN y ABC de una base.

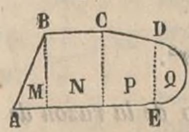
158. *Se llaman circunferencias* CONCÉNTRICAS *las que tienen el mismo centro.*

Llámase CORONA ó ANILLO *la superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas de diferente rádio.*

COROL. *El área de una corona es igual á la del círculo de mayor rádio, ménos la del círculo de rádio menor.*

159. Para determinar el área de una figura plana cualquiera, no comprendida en lo que precede de este artículo, se divide exacta ó aproximadamente en otras, cuyas áreas se saben hallar: se suman estas, y la suma será exacta ó aproximadamente el área pedida.

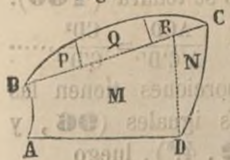
Fig. 140.



Así, para hallar el área de la figura ABCDE (fig. 140) se puede dividir en el triángulo M, el rectángulo N, el trapecio P y el semicírculo Q; y las áreas de M+N+P+Q forman el área total pedida.

Si la figura no fuese rectilínea ni compuesta de arcos de círculo, como ABCD (fig. 141), se dividiria en otras que supondríamos rectilíneas, por ejemplo, el trapecio M, los triángulos P, R, N y el rectángulo Q; y la suma de las áreas de estas sería aproximadamente el área de la figura propuesta.

Fig. 141.



ARTICULO II.

Comparacion de las áreas en las figuras planas.

160. Teorema 1.° *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Las áreas de los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 142) serán (**151**)

$\frac{1}{2}AC\times BD$, $\frac{1}{2}A'C'\times B'D'$: de donde $\frac{\frac{1}{2}AC\times BD}{\frac{1}{2}A'C'\times B'D'}=\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}$.

Sustituyendo en la razon compuesta $\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}$, en vez de la razon componente $\frac{BD}{B'D'}$ su igual (**108**) $\frac{AC}{A'C'}$, resulta (Alg. **175**, corol.)

Fig. 142.

$$\frac{\frac{1}{2}AC\times BD}{\frac{1}{2}A'C'\times B'D'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}.$$

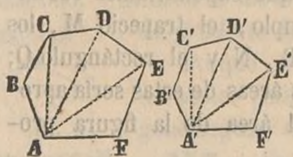
Los términos de la primera razon representan, como se ha dicho, las áreas de los triángulos dados, y la razon segunda es igual á $\frac{AB^2}{A'B'^2}$ y á $\frac{BC^2}{B'C'^2}$ (Alg., **182**, 4.ª);

luego $$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}=\frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

161. Teorema 2.° *Las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera* ABCD..... *y* A'B'C'D'..... (fig. 143) *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

Estos polígonos se pueden descomponer en igual número de triángulos ABC y A'B'C', ACD y A'C'D', etc., semejantes y semejantemente dispuestos (**101**, recíproco); luego se tendrá (**160**):

Fig. 143.



$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BC^2}{B'C'^2}, \quad \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{CD^2}{C'D'^2}, \ldots\ldots$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**96**, y Algebra, **182**, 4.ª), luego

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \text{etc.} = \frac{BC^2}{B'C'^2};$$

de donde (Alg., **186**)

$$\frac{ABC + ACD + \text{etc.}}{A'B'C' + A'C'D' + \text{etc.}} = \frac{BC^2}{B'C'^2},$$

ó llamando P y P' las áreas de los polígonos,

$$\frac{P}{P'} = \frac{BC^2}{B'C'^2}.$$

Corol. *Las áreas de los polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus rádios y apotemas.*

Estos polígonos son semejantes (**102**); luego sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de los lados: y como los lados son proporcionales á los rádios y apotemas, los cuadrados de los lados serán proporcionales á los cuadrados de los rádios y de las apotemas (Alg., **182**, 4.ª); y por consiguiente, las áreas serán tambien proporcionales á los cuadrados de los rádios y de las apotemas. Así

$$\frac{P}{P'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

162. Teorema 3.º *Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de los rádios y de los diámetros.*

Las fórmulas de las áreas de dos círculos son (**155**, corolario)

$$C = \pi r^2 \quad \text{y} \quad C' = \pi r'^2;$$

de donde $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \dfrac{r^2}{r'^2};$

y como los cuadrados de los rádios son proporcionales á los cuadrados de los diámetros, resulta

$$\frac{C}{C'}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{d^2}{d'^2}.$$

163. Teorema 4.° *Si sobre la hipotenusa* a *y los catetos* b *y* c *de un triángulo rectángulo, considerados como lados homólogos, se construyen polígonos semejantes* A, B, C; *el área del polígono construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos.*

En efecto, se tiene (**161**)

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}:$$

pero $a^2=b^2+c^2$ (**111**, 1.°); luego (Alg., **186**, corol.

$$A=B+C.$$

Corol. 1.° *El cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Porque estos tres cuadrados son polígonos semejantes (**102**).

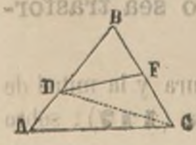
Corol. 2.° *Si con rádios ó diámetros respectivamente iguales á la hipotenusa ó catetos de un triángulo rectángulo se trazan circunferencias, y en ella se inscriben ó circunscriben polígonos regulares de igual número de lados, el área del polígono formado en la primera es igual á la suma de las áreas de los otros dos.*

Este corolario y el siguiente se demuestran como el teorema.

Corol. 3.° *El área del círculo trazado con un rádio ó diámetro igual á la hipotenusa es igual á la suma de las áreas de los trazados con el rádio ó diámetro respectivamente iguales á los catetos.*

164. Teorema 5.° *Las áreas de dos triángulos* ABC *y* DBF (fig. 144), *que tienen un ángulo* B *comun, son proporcionales á los productos* AB×BC *y* BD×BF *de los lados que en cada triángulo forman dicho ángulo.*

Fig. 144.

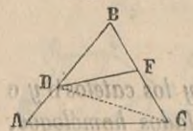


Trazando la DC y tomando por bases de los triángulos ABC y DBC los lados AB y DB, estos triángulos tienen la misma altura, luego (**151**, corol.)

$$\frac{ABC}{DBC}=\frac{AB}{DB}.$$

Si se toman por bases de los triángulos DBC y DBF los lados BC y BF, tambien estos triángulos tienen la misma altura; luego

Fig. 144.



$$\frac{DBC}{DBF}=\frac{BC}{BF}.$$

Multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo al mismo tiempo el factor comun DBC, resulta

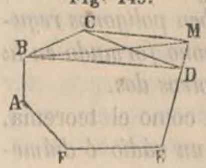
$$\frac{ABC}{DBF}=\frac{AB\times BC}{DB\times BF}.$$

PROBLEMAS.

165. **1.° Trasformar un polígono ABCD...... (fig. 145) en otro equivalente y que tenga un lado ménos.**

Únase B con D: por C trácese CM paralela á BD: prolónguese el lado ED hasta encontrar en M á la CM, y el polígono ABMEF será el pedido.

Fig. 145.



En efecto, los triángulos BCD y BMD, que tienen la misma base BD y sus vértices C y M equidistantes de esta base (**32**, corol.) son equivalentes (**146**, corol). Luego si al polígono ABDEF se le agrega el triángulo BCD, y despues el BMD, los polígonos resultantes ABCDEF y ABMEF son equivalentes; y este tiene evidentemente un lado ménos que el primero.

Corol. *Todo polígono se puede trasformar gráficamente en un triángulo equivalente.*

Porque si tiene por ejemplo 10 lados, se trasforma en otro equivalente que tenga 9, luégo en otro que tenga 8, y así sucesivamente.

166. **2.° Cuadrar un triángulo, ó sea trasformarle en cuadrado equivalente.**

Hállese una media proporcional entre la altura y la mitad de la base, ó entre la base y la mitad de la altura (**117**): sobre esta media proporcional se construye un cuadrado, el cual será el pedido.

En efecto, de la proporcion

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{\frac{1}{2}b} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{x}=\frac{x}{\frac{1}{2}a}$$

se deduce $$x^2=\frac{1}{2}ab.$$

Corol. *Todo polígono puede cuadrarse gráficamente.*

Porque se puede trasformar en triángulo equivalente (**165**, corol.), y luego en cuadrado segun el problema.

OBSERVACIONES.

1.ª Los polígonos para la determinacion de cuya área hay fórmula determinada pueden cuadrarse sin necesidad de trasformarlos ántes en triángulos equivalentes, *hallando una media proporcional entre los dos factores que forman dicha área, y construyendo un cuadrado sobre la media proporcional.*

Así, para cuadrar el paralelógramo se halla la media proporcional entre la base y la altura; para cuadrar el trapecio, se determina la media proporcional entre la altura y la semisuma de las bases, etc.

2.ª Tambien es fácil calcular el lado del cuadrado equivalente á una figura cualquiera, hallando su área y extrayendo la raíz cuadrada del número que resulte.

Así, el lado del cuadrado equivalente á una figura cuya área son 1800 varas cuadradas, es

$$l=\sqrt{1800}=42,42\ldots \text{ varas.}$$

167. 3.º Cuadrar el círculo aproximadamente.

Hállese una media proporcional entre el rádio y la semicircunferencia, y este será aproximadamente el lado del cuadrado equivalente al círculo, ó determínese el área del círculo, extráigase la raíz cuadrada del número que la represente, y esta raíz será con aproximacion el lado del cuadrado equivalente.

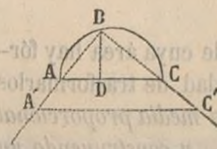
Observacion. Por este último procedimiento es imposible hallar con exactitud el lado del cuadrado equivalente al círculo; porque entrando por factor del área la razon de la circunferencia al diámetro, y siendo esta cantidad inconmensurable [**139**, (*)], el resultado no puede ser exacto, aunque sí tan aproximado como se quiera. Tampoco puede resolverse el problema por el primer medio con exactitud; puesto que no puede rectificarse exactamente la circunferencia [**143**, (*)].

De manera que la cuadratura del círculo, el problema más famoso de la Geometría, es irresoluble con los auxilios que presta la Geometría elemental (*).

168. 4.° Dado un polígono P construir otro P′ semejante al primero, y cuyas áreas estén en una razon dada, por ejemplo, de 3 á 4.

En una recta AC (fig. 146) tómese AD=3 partes cualesquiera, pero iguales entre sí, y á continuacion DC=4 partes iguales á las anteriores: sobre AC como diámetro trácese una semicircunferencia: en el punto D del diámetro levántese la perpendicular DB, y trácense las rectas BA y BC, indefinidas por la parte inferior del diámetro: tómese sobre BA una parte BA′ igual á uno de los lados del polígono dado P: y trazando la recta A′C′ paralela al diámetro, constrúyase sobre BC′, considerada como lado homólogo del lado BA′ del polígono P, otro polígono P′ semejante al dado (**121**); y el polígono formado de esta manera será el pedido.

Fig. 146.



En efecto, se tiene (**161**)

$$\frac{P}{P'}=\frac{BA'^2}{BC'^2}.$$

Los triángulos BAC y BA′C′ son semejantes (**97**); luego

$$\frac{BA'}{BC'}=\frac{BA}{BC},$$

ó (Alg. **182**, 4.ª) $\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{BA^2}{BC^2}$: pero (**110**), obs,)

$$\frac{BA^2}{BC^2}=\frac{3}{4};$$

luego de esta proporcion y la anterior, que tienen una razon comun, se deduce

$$\frac{BA'^2}{BC'^2}=\frac{3}{4}.$$

Esta proporcion y la primera tienen tambien una razon igual, luego por último

$$\frac{P}{P'}=\frac{3}{4}.$$

(*) Si bien la resolucion exacta de este problema sería interesante bajo el punto de vista científico, no lo sería tanto, mejor dicho, traeria muy poca utilidad, con relacion á sus aplicaciones prácticas, porque la aproximacion puede llevarse tan adelante como en cualquier caso sea de desear.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

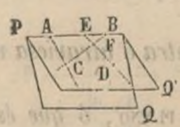
PRELIMINARES.

Del plano.

169. TEOREMA 1.º *Por tres puntos A, B, C (fig. 147), que no estén en línea recta, puede pasar un plano, pero nada más que uno solo.*

Por los puntos A, B, C trácense rectas: por una de estas AB, hágase pasar un plano PQ (*), el cual puede evidentemente girar sirviéndole de eje AB hasta llegar al punto C; luego el plano PQ pasa por los tres puntos dados.

Fig. 147.



Otro plano PQ′, que pasase por los mismos puntos A, B, C, coincidiria con el PQ.

Porque las tres rectas AB, BC y AC estarian en los dos planos (**8**, corol.); luego por un punto cualquiera D, situado en el plano PQ′, se podria trazar una recta DE que cortase dos rectas AB y BC de las tres que unen los puntos dados. Ahora la recta DE, que tiene los puntos E y F en el plano PQ, coincidirá con

(*) El plano se representa comunmente por un paralelógramo que debe suponerse ilimitado, y se nombra por las letras de una de sus diagonales como ya se ha visto (**145** y siguientes). Con más propiedad se representaría por un círculo; pero esto ni se acostumbra ni sería más cómodo.

él en toda su extension (**8**, corol.); luego el punto D de esta recta se hallará tambien en el plano PQ, luego dicho punto es comun á los dos planos; luego estos tienen todos sus puntos comunes, luego coinciden.

Corol. 1.º *Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de un plano.*

Corol. 2.º *Un ángulo ó dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Porque el punto comun de las dos rectas y otro en cada una de ellas forman un sistema de tres puntos que no están en línea recta; hallándose las dos rectas en el plano de dichos puntos (**8**, corol.).

Corol. 3.º *Dos paralelas determinan la posicion del plano en que están situadas.*

Porque tomando un punto en una de las paralelas y dos en la otra, se tiene un sistema de tres puntos que no están en línea recta.

Corol. 4.º *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

Porque si en esta interseccion se pudiesen tomar tres puntos no en línea recta, los dos planos formarian uno solo; contra la hipótesis.

Rectas perpendiculares y oblícuas á un plano.

170. *Se llama* pié *de una línea que encuentra ó atraviesa un plano, el punto comun á la recta y al plano.*

Se dice que una recta es perpendicular á un plano, *ó que éste lo es á aquella, cuando la recta es perpendicular á todas las que pueden pasar por su pié en el mismo plano: y* oblícua *cuando le encuentra sin serle perpendicular.*

171. Teorema 1.º *Si una recta* AO (fig. 148) *es perpendicular á otras dos* BO *y* CO, *que pasan por su pié* O *en un plano* PQ, *lo será tambien á otra recta cualquiera* DO, *que pase por este punto* O *en el mismo plano.*

Fig. 148.

Tómese (sobre la recta AO y su prolongacion) AO=A'O: trácese por un punto cualquiera D de la DO una recta BC, que corte á las rectas indefinidas BO y CO: únanse los puntos A y A′ con los B, C y D.

Como los puntos A, B y A′ están en un plano (**169**), y además BO es perpendicular á AA′ en su punto medio O, resulta (**25**, 1.º) AB=A′B; por igual razon AC=A′C; luego los triángulos ABC y A′BC tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales. Doblando el A′BC sobre el ABC por la recta BC, la línea A′D coincide con la AD, luego son iguales, luego la recta DO tiene los puntos D y O equidistantes de A y A′, luego es perpendicular á la AA′ (**26**, corol. 2.º); y por consiguiente AA′ lo será á DO (**22**, corol. 1.º).

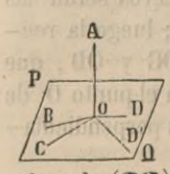
Corol. 1.º *Si una recta es perpendicular á dos que pasan por su pié en un plano, es perpendicular al plano.*

Corol. 2.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos* A *y* A′ *de una recta, es el plano* PQ *perpendicular en el punto medio* O *de dicha recta.*

Recíprocamente. *Si dos rectas* BO *y* CO (fig. 149) *son perpendiculares á una tercera* AO *en un punto dado* O, *otra recta cualquiera* DO, *perpendicular á la misma* AO *y en el mismo punto, estará en el plano* BOC *de las dos primeras.*

Porque supongamos que, siendo PQ el plano de las BO y CO, la DO se encuentre fuera de él: hágase pasar por AO y DO otro plano, el cual cortará al PQ en otra recta D′O distinta de DO, y se tendrá: D′O perpendicular á AO (teor. direc.), y DO perpendicular tambien á la AO por hipótesis; luego en el punto O de la AO y en el plano AOD se tienen dos perpendiculares á esta recta, lo que es absurdo (**23**).

Fig. 149.



Corolario. *El lugar geométrico de las perpendiculares trazadas en un punto de una recta, es el plano perpendicular á la recta en el mismo punto.*

172. Teorema 2.º *Por un punto dado no se puede trazar á un plano más de una perpendicular.*

Pueden ocurrir dos casos: 1.º que el punto esté en el plano: 2.º que esté fuera de él.

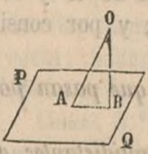
1.º Sea el punto dado O (fig. 150), situado en el plano PQ, y supongamos que se puedan levantar las dos rec-

Fig. 150.

tas OA y OB, perpendiculares á dicho plano. Haciendo pasar por OA y OB otro plano, su interseccion con el PQ será una recta CD (**169**, corolario 4.º); luego en el punto O de la recta CD se tendrian dos perpendiculares á esta recta (**170**), lo que es absurdo (**23**).

2.º Sea el punto dado O (fig. 151), situado fuera del plano PQ, y supongamos que se puedan bajar las perpendiculares AO y BO á este plano. Haciendo pasar por AO y BO otro plano, su interseccion con el PQ será una recta AB (**169**, corol. 4.º); luego desde el punto O se tendrian bajadas sobre la AB dos perpendiculares (**170**), lo que es imposible (**23**).

Fig. 151.

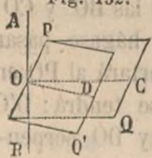


173. Teorema 3.º *Por un punto dado no se puede trazar á una recta más que un plano perpendicular.*

Se distinguen tambien dos casos: 1.º que el punto esté en la recta: 2.º que esté fuera de ella.

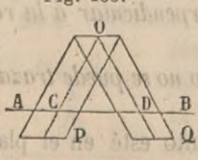
1.º Supongamos que por el punto O (fig. 152), situado en la recta AB, se puedan trazar dos planos PQ y PQ′ perpendiculares á esta recta. Haciendo pasar por AO un tercer plano, que corte á los otros dos, sus intersecciones con los dos primeros serán las rectas OC y OD (**169**, corol. 4.º); luego la recta AO sería perpendicular á las OC y OD, que pasan por su pié en dichos planos (**170**), luego en el punto O de la recta AB, y en un mismo plano, se tendrian dos perpendiculares á dicha recta, lo que es absurdo (**23**).

Fig. 152.



2.º Si desde el punto O (fig. 153), situado fuera de la recta AB, suponemos trazados los dos planos OP y OQ perpendiculares á esta recta, haciendo pasar por O y por dicha recta AB un tercer plano, las intersecciones de este con los primeros serían las rectas OC y OD (**169**, corol 4.º): y como AB es perpendicular á los dos planos OP y OQ, lo sería tambien á las rectas OC y OD que pasan por los puntos C y D en estos planos (**170**); luego desde el punto O fuera de la recta AB, y en un

Fig. 153.



mismo plano, se tendrian dos perpendiculares á dicha recta, lo que es imposible (**23**).

174. Teorema 4.° *Si desde un punto O, fuera de un plano PQ (fig. 154), se trazan á este una perpendicular OA y una oblícua OB, la perpendicular es menor que la oblícua.*

Uniendo B con A, el triángulo OAB es rectángulo en A, (**170**); luego OA<OB (**75**, corol. 3.°).

Fig. 154.

Corol. *La distancia entre un punto y un plano se mide por la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.*

Recíprocamente. *Si una recta es la menor que se puede trazar entre un punto y un plano, será perpendicular á este plano.*

Porque si no sería oblícua, y entónces trazando una perpendicular sería menor que ella; lo que es contra la hipótesis.

175. Teorema 5.° *Si desde un punto O, fuera de un plano PQ, se trazan á este una perpendicular OA y diferentes oblícuas OB, OC, OD: 1.° las oblícuas OB y OC, que se separan igualmente de la perpendicular son iguales: 2.° de dos oblícuas OC y OD, la OD que más se separa de la perpendicular, es la mayor.*

1.° Uniendo A con B y con C, los triángulos AOB y AOC tienen el lado AO comun, AB=AC por hipótesis, y los ángulos BAO y CAO iguales por rectos; luego estos triángulos son iguales (**72**, 2.°), luego OB=OC.

2.° Uniendo A con D, como AD>AC por hipótesis, se podrá tomar sobre AD una parte AE=AC, en cuyo caso OC=OE, segun la primera parte del teorema: pero OD>OE (**25**, 2.°); luego OD>OC.

Recíprocamente. *Si desde un punto fuera de un plano se trazan á este una perpendicular y diferentes oblícuas: 1.° las oblícuas iguales se separan igualmente de la perpendicular: 2.° de dos oblícuas, la mayor se separa más de la perpendicular* (**12**).

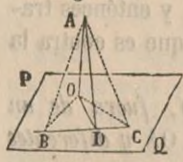
Corol. 1.° *El lugar geométrico de los piés* B, C, E, *etc., de las oblícuas iguales* OB, OC, OE, *etc., bajadas desde un punto* O *sobre un plano* PQ, *es una circunferencia* BCE, *cuyo* *centro es el pié* A *de la perpendicular* AO: *y cuyo rádio es la distancia de este pié al de las oblícuas.*

COROL. 2.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia* BCE , *es la perpendicular* AO *levantada en el plano* PQ *de dicha circunferencia y en su centro* A.

176. TEOREMA 6.º *Si desde el pié* O (fig. 155) *de la perpendicular* AO *á un plano* PQ, *se traza una perpendicular* OD *á otra recta* BC *situada en el mismo plano , y se une el punto* D, *donde estas rectas se encuentran , con otro cualquiera* A *de la perpendicular al plano , la recta* AD , *que une estos dos puntos, es perpendicular á la línea* BC *situada en dicho plano* (*).

Tómese DB=DC, y únanse los puntos B y C con O y con A. Las oblícuas OB y OC son iguales (**25**, 1.º) ; luego las oblícuas AB y AC al plano PQ lo son tambien (**175**, 1.º) ; luego el triángulo ABC es isósceles; luego la línea AD es perpendicular á la base BC de este triángulo (**75** , obs.).

Fig. 155.



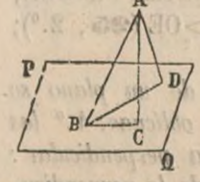
OBSERVACION. La recta BC es perpendicular al plano AOD (**75**, corol. 1.º).

177. *Llámase* PROYECCION DE UN PUNTO *sobre un plano el pié de la perpendicular bajada desde dicho punto al plano.*

PROYECCION DE UNA RECTA AB (fig. 156) *sobre un plano es otra recta* BC, *que une las proyecciones de los extremos de la primera.*

178. TEOREMA 7.º *El ángulo* ABC, *que forma una recta* AB *con su proyeccion* BC *sobre un plano* PQ, *es menor que el* ABD *que la misma recta forma con otra cualquiera* BD, *trazada por su pié en dicho plano.*

Fig. 156.



Tómese BD=BC, y los triángulos ABC y ABD tendrán el lado AB comun , AC<AD, por ser AC perpendicular al plano PQ (**177**) y AD oblícua al mismo (**172**) ; luego el ángulo ABC<ABD (**76** , rec.).

(*) Este *teorema* se suele llamar *de las tres perpendiculares.*

Corol. *El ángulo que una recta forma con un plano, tiene por medida el que la misma recta forma con su proyeccion sobre dicho plano.*

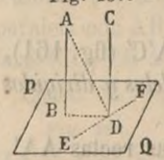
De las rectas paralelas en el espacio.

179. Teorema 1.º *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 157), *perpendiculares á un mismo plano* PQ, *son paralelas.*

AB y CD son perpendiculares á la recta BD que une sus piés.

Por otra parte, trazando la EF perpendicular á BD en el plano PQ y uniendo A con D, esta recta AD es perpendicular á la EF (**176**): BD y CD lo son tambien, la primera por construccion y la segunda por hipótesis; luego las tres rectas BD, AD y CD están en un mismo plano (**171**, rec.): y como la AB se halla tambien en él (**8**, corol.), las rectas AB y CD están en un mismo plano, y son perpendiculares á una tercera, luego son paralelas (**28**).

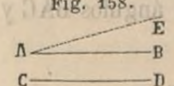
Fig. 157.



180. Teorema 2.º *Por un punto* A (fig. 158), *dado en el espacio, no se puede trazar á una recta* CD *más que una paralela* AB.

En efecto, si se pudiese trazar otra AE, como las rectas AB y AE estarian en el plano que pasa por los puntos A, C y D (**27**), las tres rectas se hallarian en este plano (**169**); luego por un punto fuera de una recta y en un mismo plano se tendrian dos paralelas á dicha recta, lo que es absurdo (**29**, corol. 1.º).

Fig. 158.



Corolario 1.º *Dos rectas, una* AB (fig. 159) *perpendicular y otra* CD *oblícua á un plano* PQ, *no son paralelas.*

Porque si lo fuesen, levantando en D la DE perpendicular al mismo plano PQ, sería tambien paralela á AB (**179**); luego por D habria dos rectas DC y DE paralelas á AB, lo que es imposible.

Fig. 159.

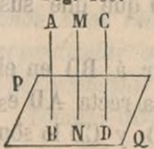
Corol. 2.º *Si un plano* PQ *es perpendicular á una de dos paralelas* AB, *tambien lo será á la otra* DE.

Porque si el plano PQ fuese oblícuo respecto de DE, esta recta lo sería respecto de él; en cuyo caso las rectas AB y DE no serian paralelas (corolario anterior), contra la hipótesis.

Observacion. Este corolario puede enunciarse de otro modo: *Si una recta es perpendicular á un plano cualquiera, otra recta paralela con ella será perpendicular al mismo plano.*

Corol. 3.º *Dos rectas* AB *y* CD (fig. 160), *paralelas á una tercera* MN, *son paralelas entre sí.*

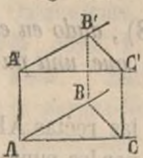
Fig. 160.



Porque trazando un plano PQ perpendicular á AB, lo será tambien á su paralela MN (corolario anterior), y siéndolo á MN lo será á su paralela CD; luego AB y CD son perpendiculares al plano PQ, luego son paralelas (**179**).

181. Teorema 3.º *Si dos ángulos* BAC, B'A'C' (fig. 161), *situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.*

Fig. 161.



Tómese AB=A'B', AC=A'C', y trácense las rectas AA', BB', CC', BC y B'C'. El cuadrilátero ABA'B' tiene AB igual y paralela á A'B', luego es un paralelógramo (**79**, rec. 2.º); luego AA' es igual y paralela con BB': por igual razon CC' es igual y paralela á AA'; luego BB' y CC' son iguales y paralelas entre sí; luego BCB'C' es un paralelógramo, luego BC=B'C'; luego los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (**72**, 1.º), luego los ángulos BAC y B'A'C' lo son tambien.

De las rectas paralelas á un plano.

182. *Se dice que una recta es* paralela á un plano, *ó que el plano es paralelo á la recta, cuando no se encuentran por más que uno y otra se prolonguen.*

183. Teorema 1.º *Si una recta* AB (fig. 162) *es paralela á otra* CD, *situada en un plano* PQ, *es paralela al plano.*

Fig. 162.

La AB está en el plano ABCD (**27**); luego no puede encontrar al plano PQ sino en algun punto de la CD: pero esto es contra la hipótesis; luego tampoco puede encontrar á dicho plano, luego le es paralela.

184. Teorema 2.° *Si por una recta* AB, *paralela á un plano* PQ, *se traza otro plano que corte al primero, la interseccion* CD *de estos planos es paralela á la recta dada.*

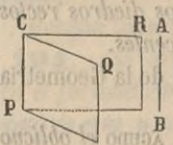
En efecto, AB y CD estan en un mismo plano ABCD, además AB no puede encontrar á CD, porque si la encontrase, encontraria tambien al plano PQ en que esta se halla situada, lo que es contra la hipótesis; luego AB y CD son paralelas (**27**).

Corol. 1.° *Si una recta* AB *es paralela á un plano* PQ, *y por un punto* C *de este se traza otra recta* CD *paralela á la primera, dicha recta* CD *estará toda ella en el mismo plano.*

Porque si CD no tuviese más que el punto C en el plano PQ, trazando por AB y CD otro plano, cortaria al PQ en una recta CE paralela con AB (segun el teorema); luego por C habria dos paralelas CD y CE á la AB, lo que es imposible (**29**, corol. 1.°)

Corol. 2.° *Si una recta* AB (fig. 163) *es paralela á dos planos* PQ *y* PR, *que se cortan, será paralela á la interseccion* CP *de estos planos.*

Fig. 163.



Porque trazando por un punto cualquiera C de la interseccion CP una paralela á la AB, debe hallarse al mismo tiempo en los dos planos (corolario anterior); luego coincide con dicha interseccion CP, luego AB y CP son paralelas.

CAPITULO I.

Planos en sus diferentes posiciones.

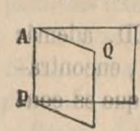
ARTÍCULO PRIMERO.

Angulos diedros.

185. *Se llama* ángulo diedro, *ó simplemente* diedro, *la extension comprendida entre dos planos que se cortan. Estos planos se llaman* caras, *y* arista *su interseccion.*

QAPR (fig. 164) es un ángulo diedro, cuyas caras son PQ y PR, y cuya arista es AP.

Fig. 164.



Un ángulo diedro se nombra, como acaba de verse, por cuatro letras, expresando siempre en el medio las dos de la arista. Tambien se puede nombrar, cuando está solo, por las letras de la arista; así se dice el diedro AP.

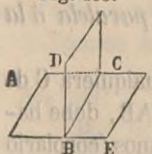
Corol. *Un diedro no varía de valor aunque varíe la magnitud de sus caras.*

186. *Se llaman* diedros adyacentes *los que tienen la misma arista, una cara comun y las otras dos caras formando un plano.*

ABCD y DCBE (fig. 165) son adyacentes.

187. *Llámase* diedro recto *cada uno de los dos adyacentes é iguales que un plano forma con otro, y* oblícuo *el que es mayor ó menor que uno recto.*

Fig. 165.



188. Teorema 1.° *Los ángulos diedros rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

Se demuestra como su análogo de la Geometría plana (V. núm. **16**).

189. *Llámase* ángulo diedro agudo *el oblícuo menor que uno recto, y* obtuso *el oblícuo mayor que uno recto.*

190. *Se llaman* diedros complementarios *aquellos que sumados forman uno recto, y* suplementarios *los que forman dos.*

Corol. *Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ó el mismo suplemento ó suplementos iguales, son iguales.*

Porque agregándoles el complemento en un caso y el suplemento en otro, dan una misma suma.

191. Teorema 2.° *Los diedros adyacentes valen juntos dos rectos, ó son suplementarios.*

Se demuestra como su análogo de la Geometría plana: del mismo modo se deducen los corolarios siguientes, y se demuestra el recíproco correspondiente (V. núm. **19**).

Recíprocamente. *Si dos diedros que tienen una cara comun y la misma arista son suplementarios y exteriores el uno al otro, serán tambien adyacentes, ó lo que es igual, las otras dos caras forman un solo plano.*

Corol. 1.° *Si un diedro es recto, su adyacente lo será tambien, y si un diedro es oblícuo, su adyacente lo es del mismo modo.*

Corol. 2.° *Un diedro cualquiera vale ménos que dos rectos.*

Corol. 3.° *Los diedros, que se pueden formar en una recta situada en un plano y á un lado de este, valen juntos dos rectos.*

Corol. 4.° *Todos los diedros, que se pueden formar al rededor de una recta, valen juntos cuatro rectos.*

Corol. 5.° *Los ángulos formados por dos planos, que se cortan, valen tambien juntos cuatro rectos.*

192. *Llámanse* DIEDROS OPUESTOS POR LA ARISTA *aquellos de los que el uno está formado por las prolongaciones de las caras del otro.*

193. Teorema 3.° *Los diedros opuestos por la arista son iguales.*

Porque tienen el mismo suplemento.

194. *Se llama* ÁNGULO RECTILÍNEO CORRESPONDIENTE *á un diedro el formado por dos perpendiculares á la arista, en un mismo punto de esta y una en cada cara.*

Si las rectas MO y ON (fig. 166) son perpendiculares á BC, el ángulo MON es el rectilíneo correspondiente al diedro ABCD, y en igual hipótesis ECD lo será tambien.

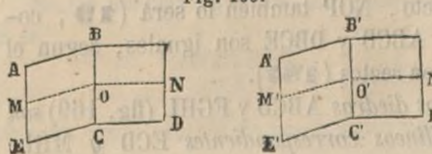
Corol. *Los ángulos rectilíneos* MON, ECD, etc., *correspondientes á un mismo diedro* BC, *son iguales.*

Porque tienen sus lados paralelos (**28**) y dirigidos en el mismo sentido, luego son iguales (**181**).

195. Teorema 4.° 1.° *Si dos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes lo son tambien: 2.° si dos diedros son desiguales, el mayor tiene mayor rectilíneo correspondiente.*

1.° Sean los diedros BC y B′C′ (fig. 166): superponiendo el primero al segundo, de manera que coincida la arista BC con B′C′, el punto O con O′ y la cara BD con la B′D′; la otra cara AC coincidirá

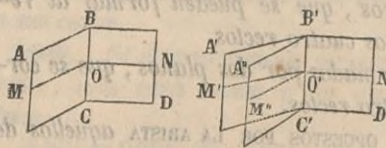
Fig. 166.



con A′C′, por la igualdad de los diedros: la línea ON coincidirá con O′N′, porque si no habria dos perpendiculares en el punto O′ de la arista B′C′ en el plano B′D′, lo que es imposible (**23**): por igual razon OM coincide con O′M′; luego los ángulos rectilíneos MON y M′O′N′ son iguales.

2.° Sean los diedros BC y B′C′ (fig. 167): superpóngase el primero al segundo, de manera que la arista BC coincida con B′C′, el punto O con O′ y la cara BD con B′D′; la cara AC caerá dentro del diedro B′C′, una vez que este es mayor que el BC, y estará representada por A″C′: ON coincidirá con O′N′, y OM quedará representada por O′M″. Las tres rectas O′N′, O′M″ y O′M′ son perpendiculares, por hipótesis, á la arista B′C′ en el punto O′; luego estarán en un mismo plano (**171**, rec.); luego evidentemente el ángulo rectilíneo

Fig. 167.



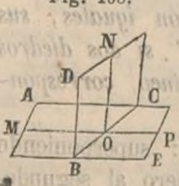
$$M'O'N' > M''O'N' \quad \text{ó} \quad M'O'N' > MON.$$

RECÍPROCAMENTE. 1.° *Si los ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros tambien lo serán: 2.° si los rectilíneos correspondientes á dos diedros son desiguales, al mayor corresponde mayor diedro* (**12**).

COROL. *El ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro recto es tambien recto.*

Porque si ABCD (fig. 168) es recto, su adyacente DBCE tambien lo será (**190**, corol. 1.°); luego los rectilíneos correspondientes MON y NOP son iguales, segun el teorema directo, luego son rectos (**15**).

Fig. 168.



RECÍPROCAMENTE. *El ángulo diedro, cuyo rectilíneo correspondiente es recto, será tambien recto.*

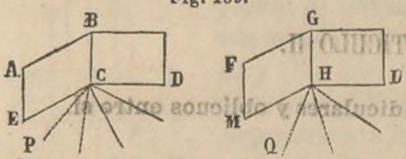
Porque si MON es recto, NOP tambien lo será (**19**, corol. 1.°); luego los diedros ABCD y DBCE son iguales, segun el teorema recíproco, luego son rectos (**187**).

196. TEOREMA 5.° *Dos diedros* ABCD y FGHL (fig. 169) *son proporcionales á sus rectilíneos correspondientes* ECD *y* MHL.

Distinguiremos dos casos: 1.° que los ángulos rectilíneos sean conmensurables: 2.° que no lo sean.

1.° Sea el ángulo ECP=MHQ la unidad de medida comun de los rectilíneos ECD y MHL: supongamos que el primero de estos contenga 5 veces dicha unidad y el segundo 4; y se tendrá

Fig. 169.



$$\frac{ECD}{MHL}=\frac{5}{4}.$$

Trazando por la arista BC y por las divisiones CP, etc. del rectilíneo ECD planos, el diedro ABCD quedará dividido en 5, todos iguales entre sí (**195**, rec. 1.°): de igual manera el diedro FGHL puede dividirse en 4 iguales entre sí, é iguales á los anteriores; luego

$$\frac{ABCD}{FGHL}=\frac{5}{4}.$$

De esta proporcion y de la anterior se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{ABCD}{FGHL}=\frac{ECD}{MHL}.$$

2.° Si los ángulos ECD y MHL fuesen inconmensurables, este caso se demostraria como su análogo (**51**, 2.°).

Observación. Si en la proporcion

$$\frac{ABCD}{FGHL}=\frac{ECD}{MHL}$$

suponemos que FGHL es la unidad de medida del diedro ABCD, y que MHL, correspondiente al diedro unidad de medida, es tambien la unidad de medida de los ángulos rectilíneos, la igualdad anterior nos dice que:

La razon de un diedro con su unidad de medida es la misma que la de su rectilíneo correspondiente con su unidad de medida tambien.

En las mismas hipótesis, la igualdad precedente se convierte en

$$\frac{ABCD}{1}=\frac{ECD}{1} \text{ ó } ABCD=ECD;$$

uego en igual sentido se puede decir que

La medida (**2**) *de un diedro es su rectilíneo correspondiente;* pudiendo en consecuencia expresarse el valor de los diedros, como el de los rectilíneos (**52**), en *grados*, *minutos*, *segundos*, etc.

ARTICULO II.

De los planos perpendiculares y oblícuos entre sí.

197. *Se llama* PLANO PERPENDICULAR *el que forma con otro dos diedros rectos, ó uno solo* (**191**, corol. 1.°); *y* PLANO OBLÍCUO *el que forma con otro dos diedros oblícuos, ó uno solo.*

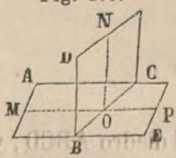
COROL. 1.° *Si un plano es perpendicular á otro, este lo será al primero; y si un plano es oblícuo á otro, este lo será á aquel.*

COROL. 2.° *Si dos planos se cortan perpendicularmente, forman cuatro diedros rectos.*

198. TEOREMA 1.° *Si una recta* NO (fig. 170) *es perpendicular á un plano* AE, *todo plano* DC *que pase por ella es perpendicular al primero.*

Trazando en el plano AE la recta MO, perpendicular á la intersección BC de los dos planos AE y CD, el ángulo MON es recto (**170**): pero este ángulo es el rectilíneo correspondiente al diedro ABCD; luego este diedro es recto (**195**, corol. recíproco); luego el plano DC es perpendicular al AE (**197**).

Fig. 170.



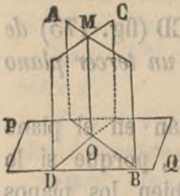
COROL. 1.° *Por un punto cualquiera* N *ú* O, *ó por una recta* NO, *perpendicular á un plano* AE, *se pueden trazar infinitos planos perpendiculares al primero.*

COROL. 2.° *Si en un punto* O *de la interseccion* BC *de dos planos* AE *y* DC, *perpendiculares entre sí, se levanta una perpendicular á uno de ellos* AE, *esta perpendicular coincidirá con el otro plano.*

Porque si no coincidiese con el plano DC, como MON, correspondiente al diedro recto ABCD, es tambien recto (**195**, corolario), habria dos perpendiculares al plano AE en un mismo punto O, lo que es absurdo (**132**).

Corol. 3.° *La interseccion* MO (fig. 171) *de dos planos* AB *y* CD, *perpendiculares á un tercero* PQ, *es perpendicular á este tercer plano.*

Fig. 171.



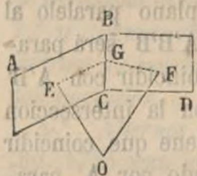
Porque si en el punto O, comun á los tres planos, se levanta una perpendicular al PQ, esta perpendicular se hallará en los dos planos AB y CD (corol. ant.); luego coincide con la interseccion OM de estos, luego esta recta es perpendicular á PQ.

Corol. 4.° *Por una recta no perpendicular á un plano, no se puede trazar más que otro perpendicular al primero.*

Porque si se pudiesen trazar dos, dicha recta sería perpendicular al plano dado (corol. ant.), lo que es contra la hipótesis.

199. Teorema 2.° *Si desde un punto* O (fig. 172) *interior á un diedro* ABCD, *se trazan dos perpendiculares* OE *y* OF, *una á cada cara, el ángulo* EOF, *formado por las perpendiculares es suplemento del diedro.*

Fig. 172.



En efecto, si por las perpendiculares OE y OF se hace pasar un plano, será perpendicular á los otros dos AC y BD (**198**); luego la interseccion BC de estos dos planos será perpendicular al plano OEGF (**198**, corol. 3.°); luego BC será perpendicular á las rectas EG y GF, que pasan por su pié en este plano (**170**); luego el ángulo EGF es el rectilíneo correspondiente al diedro ABCD.

Ahora, el cuadrilátero *plano* OEGF tiene los ángulos en E y en F rectos, luego el ángulo en O y el EGF son suplementarios; luego el ángulo en O y el diedro ABCD tambien lo serán.

ARTÍCULO III.

Planos paralelos.

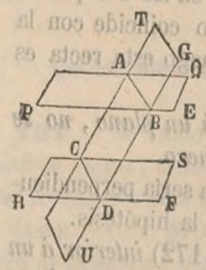
200. *Se llaman* planos paralelos *aquellos que no se encuentran por más que se prolonguen.*

201. Teorema 1.° *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

Porque si se encontrasen en un punto cualquiera, desde este punto habria dos planos perpendiculares á una misma recta, lo que es imposible (**193**).

202. Teorema 2.° *Las intersecciones* AB *y* CD (fig. 173) *de planos paralelos* PQ *y* RS *con un tercer plano* TU, *son líneas paralelas.*

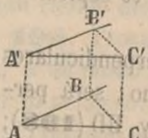
Fig. 173.



En efecto, AB y CD están en el plano TU: y no pueden encontrarse, porque si lo hiciesen se encontrarian tambien los planos PQ y RS en que están situadas, lo que es contra la hipótesis; luego son paralelas (**25**).

Corol. *Si dos ángulos* BAC *y* B′A′C′ (figura 174), *situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos, los planos que determinan son tambien paralelos.*

Fig. 174.



Porque trazando por A′ un plano paralelo al BAC, su interseccion con el AA′B′B será paralela con AB; luego tiene que coincidir con A′B′ (**29**, corol. 1.°): por igual razon la interseccion de dicho plano con el AA′C′C tiene que coincidir con A′C′, luego el plano trazado por A′ paralelamente al BAC, coincide con el B′A′C′; luego estos son paralelos.

203. Teorema 3.° *Por un punto* A (fig. 175) *no se puede trazar á un plano* PQ *más que otro* RS *paralelo.*

En efecto, si se pudiesen trazar dos RS y RT, cortando estos tres planos por otro ADEC, las intersecciones AB y AC serían paralelas á DE (**202**); lo que es absurdo (**29**, corol. 1.°).

Fig. 175.

Corol. 1.° *Dos planos* PQ y RT, *uno perpendicular y otro oblícuo á una recta* AD, *no son paralelos.*

Porque si lo fuesen, trazando por A otro RS perpendicular á la recta AD, sería paralelo á PQ (**201**); luego por A habria dos planos RT y RS paralelos á PQ, lo que es imposible segun el teorema.

Corol. 2.° *Si una recta* AD *es perpendicular á un plano* PQ, *tambien lo será á su paralelo* RS.

Pues si fuese oblícua á RS, este plano tambien lo sería á dicha recta AD; en cuyo caso los planos no serían paralelos (corol. anterior), contra la hipótesis.

COROL. 3.° *Dos planos paralelos con un tercero son paralelos entre sí.*

Porque si se encontrasen, desde su interseccion habria dos planos paralelos á otro, lo que es contra el teorema.

204. Dos planos cualesquiera cortados por un tercero, forman ocho ángulos diedros, que toman los nombres de *internos, externos, alternos y correspondientes*, como los rectilíneos formados por una secante que corta á dos rectas (**30**).

205. TEOREMA 4.° *Si dos planos cortados por otro, de manera que las intersecciones sean paralelas, forman con él: 1.° ángulos diedros alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado suplementarios, dichos planos son paralelos: 2.° si forman diedros alternos ó correspondientes desiguales, ó internos de un mismo lado no suplementarios, dichos planos no son paralelos.*

1.° *Alternos.* Supongamos que los diedros PABC y ACDS (fig. 173) sean iguales, siendo además AB y CD paralelas. Trácese un plano perpendicular á la interseccion AB, el cual lo será igualmente á la CD (**180**, corol. 2.°); y sea para mayor sencillez PEFR este plano, que tambien contiene á la GU.

Como AB y CD son perpendiculares al plano PEFR, que acaba de trazarse, los ángulos rectilíneos PBD y BDF son los correspondientes á dichos diedros: pero estos son iguales; luego PBD = BDF (**195**), luego las rectas PE y RF son paralelas (**31**, 1.°): y como AB y CD lo son por hipótesis, PBA ó sea PQ es paralelo al CDF ó sea al RS (**202**, corol.).

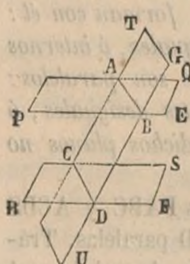
Las demás partes del teorema se demuestran de un modo análogo, como en el número **31**.

RECÍPROCAMENTE. 1.° *Si dos planos son paralelos, cortados por otro forman con él diedros alternos y correspondientes iguales, y diedros internos de un mismo lado suplementarios: 2.° si no son paralelos, forman con el transversal, una vez que las intersecciones sean paralelas, diedros alternos y correspondientes desiguales, é internos de un mismo lado no suplementarios* (**12**).

OBSERVACION. El teorema directo no será cierto si las intersecciones de los planos con el transversal no son paralelas, como fácilmente se comprende observando que si dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero, forman con este los ocho ángulos diedros rectos, y por consiguiente iguales; resultando consiguientemente los alternos y correspondientes iguales y los internos de un mismo lado suplementarios, sin que los planos sean paralelos. En el recíproco 1.° dichas intersecciones son siempre paralelas (**202**); y este por lo tanto es cierto en todo caso, ó sea sin más hipótesis que las hechas en el análogo de la Geometría plana.

206. TEOREMA 5.° *Las partes* AC *y* BD (fig. 176) *de paralelas, comprendidas entre planos* PQ *y* RS *paralelos, son iguales.*

Fig. 176.



Trazando un plano que pase por dichas paralelas, las comunes secciones AB y CD de este plano con los paralelos son líneas paralelas (**202**); luego la figura ABDC es un paralelógramo, luego

$$AC = BD.$$

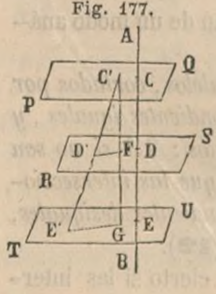
COROL. *Los puntos de un plano equidistan de su paralelo.*

Porque las perpendiculares trazadas desde un plano á su paralelo son paralelas (**179**), luego son iguales.

207. TEOREMA 6.° *Dos rectas* CE *y* C'E' (fig. 177) *comprendidas entre dos planos* PQ *y* TU *paralelos, cortadas por un tercer plano* RS, *paralelo á los primeros, quedan divididas en partes proporcionales.*

Trácese la recta C'G paralela á CE, y por E'C'G hágase pasar un plano.

Fig. 177.



D'F y E'G serán paralelas (**202**); luego se tendrá (**94**)

$$\frac{C'F}{FG} = \frac{C'D'}{D'E'},$$

pero C'F = CD y FG = DE por partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos; luego

$$\frac{CD}{DE} = \frac{C'D'}{D'E'}.$$

ARTICULO IV.

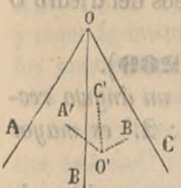
De los ángulos poliedros.

208. *Se llama* ÁNGULO POLIEDRO *la extension comprendida por tres ó más planos que concurren en un punto, y tienen dos á dos una recta comun.*

Los planos se llaman *caras* ó ángulos rectilíneos, las intersecciones de las caras reciben el nombre de *aristas*, y el de *vértice* el punto de concurrencia.

OABC (fig. 178) es un ángulo poliedro; AOB, BOC y COA sus caras: OA, OB y OC las aristas, y O el vértice.

Fig. 178.



Un ángulo poliedro se nombra, como acaba de verse, por la letra del vértice seguida de una colocada en cada arista. Tambien se puede nombrar, si está solo, por la letra del vértice: así para expresar el anterior bastará decir el ángulo poliedro O.

COROL. *Un ángulo poliedro no varía de valor aunque varíe la longitud de sus aristas.*

Se da el nombre de angulo poliedro CONVEXO *al que no puede ser atravesado por una recta más que en dos puntos.*

En todo lo que sigue supondremos convexos los ángulos poliedros.

Llámase ÁNGULO TRIEDRO *ó simplemente* TRIEDRO, *el ángulo poliedro formado por tres caras.*

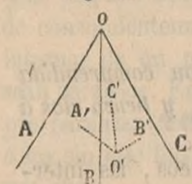
209. *Se dice que dos triedros son suplementarios cuando los ángulos rectilíneos de cada uno son respectivamente suplementarios de los diedros del otro.*

210. TEOREMA 1.° *Dado un ángulo triedro O, se puede formar otro suplementario.*

Desde un punto O′, interior del triedro dado, trácense las perpendiculares O′A′, O′B′ y O′C′ á las caras AOB, BOC y COA del mismo triedro, y el formado en O′ por estas perpendiculares será el pedido.

En efecto el ángulo rectilíneo A′O′C′, formado por las perpendiculares O'A' y O'C' á las caras AOB y AOC, es suplemento del diedro OA (**199**): por igual razon los rectilíneos A'O'B' y B'O'C' son suplementos de los diedros OB y OC; luego los ángulos rectilíneos del triedro O' son suplementarios de los diedros del triedro O.

Fig. 178.



Siendo O'A' perpendicular á la cara AOB y O'C' á la AOC, el plano A'O'C' es perpendicular á estas dos caras (**198**); luego la interseccion AO de estas será perpendicular á dicho plano A'O'C' (**198**, corol. 3.°): por igual razon OB es perpendicular al plano A'O'B', y OC al B'O'C'; luego el diedro O'A' es suplemento del ángulo rectilíneo AOB, O'B' del rectilíneo BOC, y O'C' del AOC; luego los ángulos rectilíneos del triedro O son suplementos de los diedros del triedro O'.

Luego los triedros O y O' son suplementarios (**209**).

211. TEOREMA 2.° *En todo ángulo triedro, un ángulo rectilíneo: 1.° es menor que la suma de los otros dos: 2.° es mayor que su diferencia.*

1.° Sea el triedro O (fig. 179), y supongamos que el ángulo rectilíneo AOC es mayor que cualquiera de los otros dos AOB y BOC.

Fig. 179.

Fórmese el ángulo DOC=BOC, y trácese por D la recta AC: tómese OB=OD, y únase B con A y con C.

De esta construccion resulta que los triángulos DOC y BOC son iguales (**72**, 2.°), luego DC=BC: AC ó sea AD+DC<AB+BC (**70**); luego, restando de esta desigualdad la igualdad anterior, se tiene

$$AD<AB.$$

Ahora, los triángulos AOD y AOB tienen AO comun, OD=OB por construccion y AD<AB; luego el ángulo AOD<AOB (**76**, recíproco); luego sumando con esta desigualdad los ángulos iguales por construccion DOC y BOC, resulta

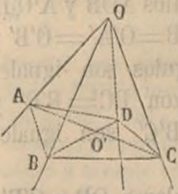
$$AOD+DOC<AOB+BOC \text{ ó } AOC<AOB+BOC.$$

2.° Esta parte del teorema es una consecuencia necesaria de la primera.

212. Teorema 3.° *La suma de los ángulos rectilíneos* AOB, BOC, *etc., que forman un ángulo poliedro* O (fig. 180) *es menor que cuatro rectos.*

Córtense todas las aristas del ángulo poliedro O por un plano ABCD, y desde un punto O′, interior de este polígono, trácense las lineas O′A, O′B, etc., á los vértices de todos sus ángulos.

Fig. 180.



La suma de los ángulos de los triángulos laterales AOB, BOC, etc. es igual á la de los ángulos de igual número de triángulos AO′B, BO′C, etc. formados en el polígono (**71**).

Ahora, en el triedro BAOC se tiene ABC<ABO+OBC (**211**, 1.°), ó ABO′+O′BC<ABO+OBC; y como lo mismo se verifica en los triedros cuyos vértices están en los puntos C, D y A, resulta que en los triángulos cuyo vértice está en O, la suma de los ángulos de las bases es mayor que la de los ángulos, tambien en las bases, de los triángulos cuyo vértice está en O′; luego por compensacion, la suma de los ángulos en O será menor que la de los ángulos en O′, pero estos valen cuatro rectos (**19**, corol. 4.°); luego los en O, ó sean los rectilíneos del ángulo poliedro, valen ménos de cuatro rectos.

213. Teorema 4.° *La suma de los ángulos diedros de un triedro cualquiera es mayor que dos rectos y menor que seis.*

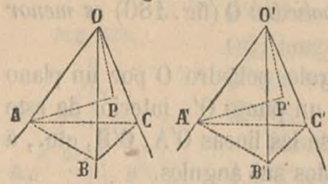
En efecto, los ángulos diedros de un triedro, sumados con los rectilíneos de su suplementario, valen seis rectos: pero los rectilíneos del suplementario valen evidentemente más de cero y ménos de cuatro rectos (**212**); luego los diedros del primitivo valen ménos de seis rectos y más de dos.

214. Teorema 5.° *Dos ángulos triedros son iguales: 1.° si tienen sus tres caras ó ángulos rectilíneos respectivamente iguales: 2.° si tienen dos caras iguales é igual el diedro comprendido: 3.° si tienen una cara igual contigua á dos diedros respectivamente iguales: 4.° si tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales, con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo.*

1.° Sean los triedros O y O′ (figura 181), en que se supone AOB = A′O′B′, BOC = B′O′C′ y AOC = A′O′C′.

Tómense las aristas OA, OB, OC, O′A′, O′B′ y O′C′ iguales, y trácense los triángulos ABC y A′B′C′: bájense las perpendiculares OP y O′P′ sobre los planos de estos triángulos, y únanse los puntos P y P′ con A y A′.

Fig. 181.



En los triángulos AOB y A′O′B′ se tiene AO = OB = O′A′ = O′B′ y al ángulo AOB = A′O′B′; luego estos triángulos son iguales (**72**, 2.º); luego AB = A′B′: por igual razon BC = B′C′ y AC = A′C′; luego los triángulos ABC y A′B′C′ son iguales (**72**, 1.º).

Los puntos P y P′, piés de las perpendiculares OP y O′P′, son los centros de las circunferencias circunscriptas á dichos triángulos (**175**, corol. 1.º); luego los rádios AP y A′P′ son iguales; luego los triángulos rectángulos AOP y A′O′P′ son tambien iguales (**73**), luego OP = O′P′.

Superpónganse el triedro O al O′, de modo que el triángulo ABC coincida con su igual A′B′C′: el punto P coincide con P′ y PO con P′O′ (**172**); luego la arista OA coincidirá con O′A′, OB con O′B′ y OC con O′C′; luego los triedros coinciden, luego son iguales.

2.º Supongamos que en los triedros O y O′ se tengan los diedros AO = A′O′, y los rectilíneos AOB = A′O′B′ y AOC = A′O′C′.

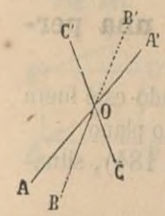
Superpóngase el triedro O al O′, de modo que la cara AOC coincida con su igual A′O′C′, y que la arista OB caiga al mismo lado de la cara comun que la O′B′: la cara AOB caerá sobre A′O′B′ por ser los diedros OA y O′A′ iguales, y la arista OB coincidirá con O′B′ por la igualdad de los ángulos rectilíneos AOB y A′O′B′; luego los triedros coinciden, luego son iguales.

3.º Este caso se demuestra de una manera análoga al 2.º

4.º Si los triedros O y O′ tienen sus diedros respectivamente iguales, formando los triedros suplementarios respectivos, estos tendrán sus ángulos rectilíneos respectivamente iguales; luego son iguales, segun el primer caso; luego los ángulos rectilíneos de los triedros O y O′ son iguales; luego estos triedros tambien lo serán (primer caso).

OBSERVACION. Cuando dos triedros tienen los elementos que se indican en cada caso respectivamente iguales y dispuestos de diferente modo, todas sus partes son iguales respectivamente; pero la coincidencia no puede verificarse.

Fig. 182.



Los triedros que reunen estas circunstancias se llaman *simétricos*.

Si las aristas de un triedro OABC (fig. 182) se prolongan al otro lado del vértice, resulta el triedro OA'B'C' simétrico del primero.

En efecto, los ángulos rectilíneos AOB y A'OB' son iguales por opuestos por el vértice, lo mismo que los AOC y A'OC', BOC y B'OC'; los diedros OA y OA' son iguales tambien (**193**), y los OB y OB', OC y OC' lo son de igual modo. Por otra parte, estos dos triedros no pueden, en general, superponerse de modo que coincidan, como á simple vista se percibe.

215. TEOREMA 6.º *En todo ángulo triedro: 1.º á caras iguales se oponen diedros iguales: 2.º á mayor cara se opone mayor diedro.*

1.º Sea el triedro O (fig. 183) en que se supone AOB=BOC, y vamos á demostrar que el diedro OC es igual al OA.

Fig. 183.

Por un punto B de la arista OB trácense dos planos uno perpendicular á OA y otro á OC, los cuales serán perpendiculares á la cara AOC (**198**) lo mismo que su comun interseccion BD (**198**, corol. 3.º). Los triángulos AOB y BOC son iguales (**72**, corolario); luego AB=BC, luego los triángulos ABD y BDC son tambien iguales (**73**); luego los ángulos BAD y BCD resultan iguales: mas estos son los rectilíneos correspondientes á los diedros OA y OC, luego estos son iguales.

2.º Si en la misma figura suponemos AOB>BOC, vamos á demostrar que el diedro OC es mayor que el OA.

Ejecutando la construccion anterior y doblando el triángulo BOC sobre BOA resulta que BA>BC (**40**, obs.); luego los triángulos tambien rectángulos ABD y BDC tienen el ángulo BCD mayor que BAD (**73**, obs. 2.ª), luego el diedro OC es mayor que el OA.

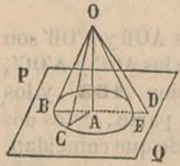
RECÍPROCAMENTE. *En todo ángulo triedro: 1.º á diedros iguales se oponen caras iguales: 2.º á mayor diedro se opone mayor cara.*

PROBLEMAS.

216. 1.° **Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano.**

Pueden ocurrir dos casos: 1.° que el punto dado esté fuera del plano: 2.° que esté en el mismo plano.

Fig. 184.



1.° Sea el punto dado O (fig. 184), situado fuera del plano PQ (*).

Bajense desde O sobre el plano tres rectas iguales OB, OC y OE; trácese una circunferencia que pase por sus pies B, C y E (**64**): únase el centro A de esta circunferencia con el punto dado O, y la recta AO será la perpendicular que se pide.

Porque la perpendicular levantada en A pasa por O (**175**, corolario 2.°); luego esta recta es la perpendicular pedida.

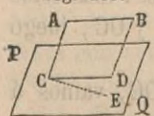
Fig. 185.

2.° Sea el punto D (fig. 185) situado en el plano PQ.

Desde un punto cualquiera A, fuera de este plano, bájese una perpendicular AB al mismo (caso ant.): por D trácese una paralela DE á esta perpendicular, y la recta DE será la perpendicular pedida (**180**, corol. 2.°, observacion).

217. 2.° **Por un punto dado A (fig. 186), fuera de un plano PQ, trazar una paralela á este plano.**

Fig. 186.



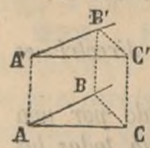
Trácese en el plano PQ una recta cualquiera CD, y por A una paralela AB á la CD; la recta AB será la pedida (**183**).

(*) En la resolucion de este problema no se hace mérito de las líneas OD, ED, etc., de la figura del márgen; lo cual depende de que la misma figura ha sido empleada en la demostracion de proposiciones en que era necesaria la consideracion de las líneas ahora omitidas.

Una cosa análoga sucede, por igual razon, con las tres figuras siguientes y con otras más de que se hará uso en lo sucesivo.

218. 3.° **Por un punto A′ (fig. 187), situado fuera de un plano BAC, trazar otro plano paralelo al dado.**

Fig. 187.



Por A′ trácense dos rectas A′B′ y A′C′ respectivamente paralelas á otras dos AB y AC, situadas en el plano dado BAC, y el plano determinado por B′A′C′ será el pedido (**202**, corol.)

CAPÍTULO II.

De las superficies de revolucion.

219. *Llámanse* SUPERFICIES DE REVOLUCION *las engendradas por el movimiento de una línea, llama da* GENERATRIZ, *al rededor de una recta fija, que recibe el nombre de* EJE.

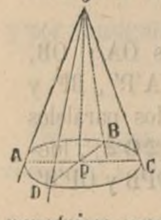
Entre las infinitas superficies de revolucion, que pueden concebirse, tres son las que ahora nos interesa conocer: la *cónica*, la *cilíndrica* y la *esférica*.

ARTÍCULO I.

De la superficie cónica.

220. *Se llama* SUPERFICIE CÓNICA *la engendrada por una recta que gira al rededor de otra con la cual concurre en un punto:* ó tambien *la originada por una recta sujeta á pasar por un punto fijo, llamado* VÉRTICE, *y á recorrer una curva plana cualquiera que toma el nombre de* DIRECTRIZ (*).

Fig. 188.



En este último caso *llamamos* EJE *la recta que pasa por el vértice y por el centro de la directriz, si le tiene.*

OABCD (fig. 188) es una superficie cónica, cuyo *vértice* es O: OA, OB, OC ú OD, prolongada cuanto se quiera por la parte inferior, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices* cuando se consideran dos ó más: la curva ABCD es la *directriz*, y OP el *eje*.

(*) Si la generatriz se supone prolongada al otro lado del vértice, trazará otra superficie cónica, que con la primera forman la superficie cónica total, de la que cada una de las parciales es una *hoja*. Actualmente no consideramos más que una de estas hojas.

La superficie cónica es RECTA *si el eje es perpendicular al plano de la directriz* (fig. 188), y OBLÍCUA *cuando el eje es oblícuo á dicho plano* (fig. 189).

Llámase superficie cónica CIRCULAR *aquella cuya directriz es una circunferencia.*

221. *Recibe el nombre de* CONO *el cuerpo limitado por una superficie cónica* OABCD, *y un plano* ABCD *que corta todas las generatrices.*

VÉRTICE *del cono es el vértice* O *de la superficie cónica:* BASE *el plano* ABCD *que limita la superficie cónica:* LADOS *las partes* OA, OB, *etc.*, *de las generatrices, interceptadas entre el vértice y la base, y* EJE *es la recta* OP *que une el vértice con el centro de la base, si le tiene.*

El cono es RECTO *si el eje es perpendicular á la base* (fig. 188), *y* OBLÍCUO *en el caso contrario* (fig. 189).

Se llama ALTURA *del cono la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.*

CONO CIRCULAR *es aquel cuya base es un círculo.*

COROL. 1.º *En el cono recto la altura coincide con el eje.*

COROL. 2.º *Los lados del cono recto y circular son iguales* (**175**, 1.º).

OBSERVACION. El cono recto y circular se puede suponer tambien engendrado por la revolucion de un triángulo rectángulo APO al rededor de uno de sus catetos OP.

222. TEOREMA. *Si la superficie curva de un cono circular* (figura 189), *se corta por un plano* A′B′C′D′ *paralelo á la base* ABCD, *la seccion es una circunferencia.*

En efecto, haciendo pasar planos por los lados OA, OB, OC, etc., y por el eje OP, las intersecciones AP y A′P′, BP y B′P′, etc., de estos planos con los paralelos ABCD y A′B′C′D′ serán paralelas (**202**); luego los triángulos OPA y OP′A′, OPB y OP′B′, etc., son semejantes (**97**);

Fig. 189.

luego $\dfrac{AP}{A'P'}=\dfrac{OP}{OP'},\quad \dfrac{BP}{B'P'}=\dfrac{OP}{OP'},\ \ldots.$

de donde $\dfrac{AP}{A'P'}=\dfrac{BP}{B'P'}=\text{etc.}$

pero $AP=BP=$etc., por rádios de un mismo círculo; luego

$$A'P'=B'P'=\text{etc.};$$

luego la curva $A'B'C'D'$ es una circunferencia.

223. *Llámase* TRONCO *de cono ó cono* TRUNCADO la parte ABCDA'B'C'D' *comprendida entre la base del cono y un plano que le corta paralelamente á dicha base; y cono* DEFICIENTE *la parte del cono total, que queda al otro lado del plano secante.*

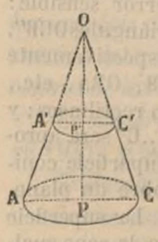
Los planos ABCD *y* A'B'C'D', *que limitan el tronco de cono, se llaman* BASES; *y* ALTURA *la distancia entre las bases.*

PROBLEMAS.

224. 1.° **Dado un tronco de cono circular y recto AC' (fig. 190), hallar la altura OP del cono total, y la OP' del cono deficiente.**

Complétese el cono OPAC, y la semejanza de los triángulos OPA y OP'A', nos dará $\frac{AP}{A'P'}=\frac{OP}{OP'}$; de donde (Alg. **184**)

Fig. 190.



$$\frac{AP-A'P'}{AP}=\frac{OP-OP'}{OP} \quad \text{y} \quad \frac{AP-A'P'}{A'P'}=\frac{OP-OP'}{OP'}$$

ó llamando r, r' los rádios de las bases mayor y menor, y a la altura PP' del tronco,

$$\frac{r-r'}{r}=\frac{a}{OP} \quad \text{y} \quad \frac{r-r'}{r'}=\frac{a}{OP'};$$

y por consiguiente

$$OP=\frac{ar}{r-r'} \quad \text{y} \quad OP'=\frac{ar'}{r-r'}.$$

OBSERVACION. De la misma manera se hallaria que el lado del cono total y el del cono deficiente son

$$OA=\frac{AA'\times r}{r-r'} \quad \text{y} \quad OA'=\frac{AA'\times r'}{r-r'}.$$

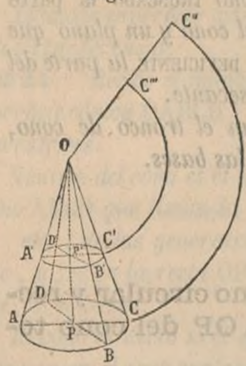
225. 2.° **Desarrollar sobre un plano una superficie cónica.**

Distinguiremos dos casos: 1.° que el cono á que esta superficie pertenece sea recto y circular: 2.° que no reuna estas circunstancias.

1.° Sea el cono recto y circular OPAC (fig. 191). Tomando el lado

OC del cono por rádio, trácese un arco CC″ de igual longitud que la circunferencia de la base (**142**): únase O con C″, y el sector OCC″ será la superficie cònica desarrollada.

Fig. 191.

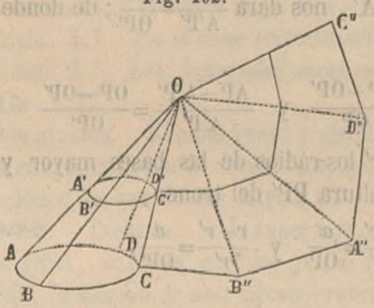


En efecto, haciendo rodar el cono en el plano que pasa por OC, los demás lados van coincidiendo con dicho plano, y como todos son de igual longitud (**221**, corol. 2.°), sus extremos se confunden sucesivamente con los puntos del arco CC″; y por consiguiente la circunferencia CBAD con el mismo arco, hasta que el punto C se ajusta con C″; luego la superficie cónica desarrollada es igual al sector OCC″.

Observacion. La superficie curva del cono deficiente recto y circular OP′A′C′, desarrollada tambien sobre un plano, es evidentemente el sector OC′C‴; y por consiguiente la del tronco AC′ es el *trapecio circular* CC′C‴C″.

2.° Sea OABCD un cono cualquiera (fig. 192). Divídase la directriz CBAD en partes bastante pequeñas para que se puedan tomar como rectas sin error sensible: constrúyanse los triángulos OCB″, OB″A″, etc., respectivamente iguales á los OCB, OBA, etc., considerados como rectilíneos; y el polígono OCB″....C″ será aproximadamente la superficie cónica desarrollada sobre un plano.

Fig. 192.



Observacion. La superficie curva de un tronco de cono cualquiera se puede desarrollar por un procedimiento análogo al empleado en este caso; advirtiendo solo que la division de dicha superficie debe ser ahora en trapecios, como se advertirá en la figura.

ARTÍCULO II.

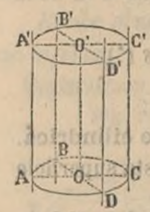
De la superficie cilíndrica.

226. *Llámase* superficie cilíndrica *la engendrada por el movimiento de una recta que gira al rededor de otra, á la cual es siempre paralela: ó* tambien *la originada por una recta, que permaneciendo constantemente paralela á sí misma, recorra una curva plana cualquiera llamada* directriz.

En este último caso *llamamos* EJE *la recta que siendo paralela á la generatriz, pasa por el centro de la directriz, si le tiene.*

ABCDA'B'C'D' (fig. 193) es una superficie cilíndrica: AA', BB', CC' ó DD', considerada como indefinida, es la *generatriz* en sus diferentes posiciones, ó las *generatrices* cuando se consideran dos ó más: la curva ABCD la *directriz*, y OO' el *eje*.

Fig. 193.



La superficie cilíndrica es RECTA, *si el eje ó la generatriz es perpendicular al plano de la directriz* (fig. 193); *y* OBLÍCUA *cuando la generatriz ó el eje es oblícuo á dicho plano* (fig. 194).

Llámase superficie cilíndrica CIRCULAR *aquella cuya directriz es una circunferencia.*

227. *Recibe el nombre de* CILINDRO *el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos* ABCD *y* A'B'C'D', *que cortan las generatrices.*

BASES *del cilindro son los planos* ABCD *y* A'B'C'D' *que limitan la superficie curva:* LADOS *las partes* AA', BB' etc., *de las generatrices interceptadas por las bases: y* EJE *la recta* OO' *que une los centros de las bases, si le tienen.*

El cilindro es RECTO *si el eje es perpendicular á las bases* (figura 193), *y* OBLÍCUO *en el caso contrario* (fig. 194).

Se llama ALTURA *del cilindro la distancia entre las bases.*

CILINDRO CIRCULAR *es aquel cuyas bases son dos círculos.*

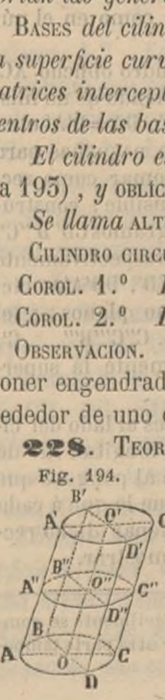
COROL. 1.º *En el cilindro recto la altura es igual al eje.*

COROL. 2.º *Los lados del cilindro son iguales* (**206**).

OBSERVACION. El cilindro recto y circular se puede tambien suponer engendrado por la revolucion de un rectángulo AOO'A' al rededor de uno de sus lados OO'.

228. TEOREMA. *Si la superficie curva de un cilindro circular* (fig. 194) *se corta por un plano* A''B''C''D'', *paralelo á una de sus bases* ABCD, *la seccion es una circunferencia igual á esta base.*

Fig. 194.



Haciendo pasar planos por los lados AA', BB', etc., y por el eje OO', las intersecciones de estos planos con la base y la seccion son las rectas AO y A″O″, BO y B″O″, etc. paralelas (**202**): y como el eje OO′ lo es á los lados, las figuras AOO″A″, BOO″B″, etc. son paralelógramos; luego AO = A″O″, BO = B″O″, etc.: pero AO = BO = etc. por rádios de un mismo círculo, luego

A″O″ = B″O″ = etc.;

luego la seccion A″B″C″D″ es una circunferencia igual á la de la base ABCD.

Corol. *Las bases del cilindro circular son iguales* (*).

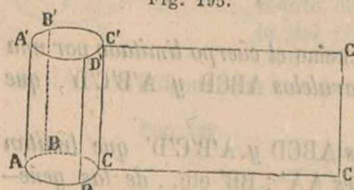
PROBLEMA.

229. Desarrollar sobre un plano una superficie cilíndrica.

Distinguiremos dos casos: 1.° que el cilindro á que esta superficie pertenece sea recto: 2.° que sea oblícuo.

1.° Sea el cilindro recto AC′ (fig. 195). Constrúyase sobre el lado CC′ un rectángulo CC″C‴C′, cuya base CC″ sea la curva ABCD rectificada, y el rectángulo construido será la superficie cilíndrica desarrollada.

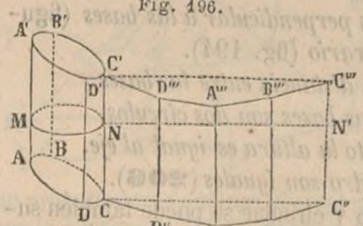
Fig. 195.



Se demuestra como en el número **225**, 1.°

2.° Sea el cilindro oblícuo AC′ (fig. 196). Divídanse los perímetros de las bases, partiendo de un mismo lado, en partes respectivamente iguales CD = C′D′, DA = D′A′ etc., y suficientemente pequeñas para que se puedan tomar como rectas sin error sensible: constrúyanse los paralelógramos CD″D‴C′, D″A″A‴D‴, etc. respectivamente iguales á los DCC′D′, DD′A′A, etc. considerados como planos, y el polígono CD″..... C″C‴B‴..... C′, será aproximadamente la supercie cilíndrica desarrollada sobre un plano.

Fig. 196.



Observacion. El rectángulo CC″C‴C′, cuya altura es el lado del cilindro, y cuya base debe ser igual evidentemente á la longitud NN′ de la seccion MN perpendicular al lado, es equivalente al polígono que representa la superficie cilíndrica desarrollada; porque lo que á cada paralelógramo le falta por su parte superior para llenar dicho rectángulo, le sobra por la inferior, como sería fácil demostrar.

(*) Esta propiedad es comun á todos los cilindros, como fácilmente se comprende; por cuya razon omitimos la demostracion, que por otra parte tampoco es de este lugar.

ARTICULO III.

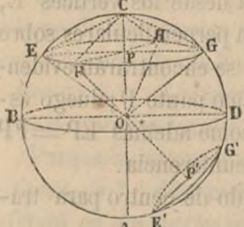
De la superficie esférica.

230. *Se llama* SUPERFICIE ESFÉRICA *la engendrada por la revolucion de una semicircunferencia* ABC (fig. 197) *al rededor de su diametro* AC.

Recibe el nombre de ESFERA *el cuerpo limitado por una superficie esférica.*

OBSERVACION. Con frecuencia se suele llamar esfera la superficie esférica; pero el sentido en que se hable, denotará si se trata del cuerpo geométrico ó de su superficie.

Fig. 197.



Llámase *centro* el punto O, centro de la semicircunferencia generatriz; *rádio* toda recta OA que desde el centro va á terminar en la superficie esférica, y *diámetro* la recta que pasando por el centro termina por sus dos extremos en la superficie esférica.

COROL. 1.º *Los rádios de una esfera son iguales.*

Porque son rádios de la semicircunferencia generatriz en alguna de sus posiciones.

COROL. 2.º *Los diámetros de una esfera son iguales.*

Porque cada uno se compone de dos rádios.

Se llama EJE *de la esfera el diámetro* AC *de la semicircunferencia generatriz.*

Se llaman POLOS *de la esfera los extremos* A *y* C *del eje.*

231. TEOREMA 1.º *La interseccion de un plano* EG *con la superficie esférica* O, *es una circunferencia* EFGH.

Trazando el rádio OC perpendicular á dicho plano, y los OE, OF, OG, OH, etc., las rectas EP, FP, GP, etc., que unen el pie de la perpendicular al plano con los diferentes puntos de la seccion, son iguales (**175**, rec. 1.º); luego la curva EFGH es una circunferencia.

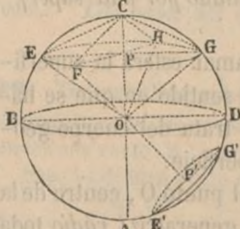
Llámase POLO *de una circunferencia* EFGH, *trazada en la superficie esférica, cada uno de los puntos de esta que equidistan de dicha circunferencia.*

COROL. *Los extremos* A *y* C *del diámetro* AC, *perpendicular al plano de una circunferencia* EFGH *en su centro* P, *son polos de* *dicha circunferencia, y los únicos que puede tener* (**175**, corol. 2.°)

232. Teorema 2.° *Si haciendo centro en un punto* C (figura 197) *de la superficie esférica, con un rádio cualquiera* CE *se traza una curva* EFGH, *esta curva será una circunferencia.*

Trácese el rádio OC de la esfera, y otros más OE, OF, OG, etc., á diferentes puntos de la curva: los triángulos OEC, OFC, OGC, etc., que tienen OE=OF=OG=etc., por rádios de la esfera, EC=FC=GC=etc., por hipótesis, y el lado OC comun, son iguales (**72**, 1.°); luego si desde los vértices E, F, G, etc., se bajan perpendiculares sobre el lado comun OC, se encontrarán evidentemente en un mismo punto P; luego estarán en un mismo plano (**171**, rec.): y como además EP=FP=GP=etc., la curva EFGH será una circunferencia.

Fig. 197.



Observacion. El punto C, que ha servido de centro para trazar una circunferencia, es uno de sus polos.

233. Teorema 3.° *En una misma esfera: 1.° los planos de circunferencias iguales equidistan del centro: 2.° de los planos de dos circunferencias desiguales, el correspondiente á la mayor se aproxima más al centro que el de la menor.*

1.° Sean las circunferencias, cuyos centros son P y P′, iguales (fig. 197). Haciendo pasar por el centro O de la esfera y por los P y P′ un plano, las intersecciones de este con los planos de las circunferencias serán los diámetros EG y E′G′ de las mismas; luego EG y E′G′ son cuerdas, iguales por hipótesis, de la circunferencia originada por el plano que pasa por O, P y P′; luego equidistan del centro O (**40**, 1.°); luego OP=OP′: pero OP y OP′ miden tambien la distancia del centro de la esfera á los planos de dichas circunferencias (**174**, corol.); luego estos planos equidistan del centro de la esfera.

2.° Sea la circunferencia P mayor que P′. Repitiendo la construccion anterior se hallará del mismo modo OP<OP′ (**40**, 2.°); luego el plano de la circunferencia P se aproxima más al centro que el de la circunferencia P′.

Recíprocamente. *En una misma esfera: 1.° las circunferencias cuyos planos equidistan del centro son iguales: 2.° de dos cir-*

cunferencias cuyos planos no equidistan del centro, la correspondiente al plano que más se aproxima al centro es la mayor (**12**).

Corol. 1.º *La mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro.*

Por esta razon se llama circunferencia *máxima* y las demás *menores*. La circunferencia cuyo diámetro es BD (fig. 197) es máxima, y las que tienen por diámetros EG y E'G' son menores.

Corol. 2.º *Las circunferencias máximas de una esfera son iguales.*

Corol. 3.º *Dos puntos de la superficie esférica que no sean extremos de un mismo diámetro, determinan una circunferencia máxima.*

Porque estos dos puntos y el centro de la esfera, forman un sistema de tres puntos no en línea recta, que determinan la posicion del plano de dicha circunferencia (**169**).

Corol. 4.º *Las circunferencias máximas se dividen mútuamente en dos partes iguales.*

Porque la interseccion de sus planos es un diámetro.

Corol. 5.º *Una circunferencia máxima* BD *divide la superficie esférica en dos partes iguales.*

Porque colocando la parte superior BCD sobre la inferior BAD, de modo que la circunferencia permanezca comun, y que el punto C caiga hácia A, estas dos partes coinciden en todos sus puntos; porque de lo contrario estos puntos no equidistarian del centro O.

Observacion. Esta superposicion prueba tambien que un círculo máximo divide la esfera en dos partes iguales, que se llaman *hemisferios*.

231. *Recibe el nombre de* ángulo esférico *la extension comprendida entre dos arcos de circunferencia máxima* BC *y* EC (fig. 198), *llamados* lados, *que se reunen en un mismo punto* C, *llamado* vértice.

Medida *de un ángulo esférico es el ángulo rectilíneo* FCG, *formado por dos tangentes* FC *y* GC, *una á cada arco, en el vértice del ángulo.*

Fig. 198.

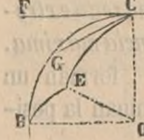
Corol. *La medida de un ángulo esférico es medida tambien del diedro formado por los planos que determinan sus lados.*

Porque siendo FC tangente al arco BC en el punto C, es perpendicular al rádio OC (**11**, rec. 1.º): por igual razon GC es perpendicular al mismo rádio y en el mismo punto: y como estas rectas están en los planos de los arcos, el ángulo rectilíneo FCG es el rectilíneo correspondiente al diedro BCOE (**194**); luego tambien será su medida (**196**, obs.).

235. *Llámase* TRIÁNGULO ESFÉRICO *la porcion de superficie esférica comprendida por tres arcos de circunferencia máxima:* BCE (fig. 198) es un triángulo esférico.

OBSERVACION. Si los vértices B, C, E del triángulo esférico BCE, se unen con el centro O de la esfera por medio de rádios, estos forman un ángulo triedro O, cuyos ángulos diedros OB, OC y OE tienen la misma medida que los ángulos esféricos CBE, BCE y BEC (**234**, corol.), y cuyos ángulos rectilíneos BOC, BOE y COE tienen por medida los lados BC, BE y CE del mismo triángulo; luego las propiedades de los triángulos esféricos se deducen de las de los ángulos triedros, luego reemplazando los nombres de *caras* y *ángulos diedros* por los de *lados* y *ángulos*, se tendrá:

Fig. 198.



1.° *En todo triángulo esférico un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia* (**211**).

2.° *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima* (**212**).

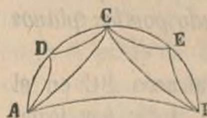
3.° *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis* (**213**).

4.° *Dos triángulos esféricos de una misma esfera ó esferas iguales son iguales si tienen:* 1.° *sus tres lados respectivamente iguales:* 2.° *dos lados iguales é igual el ángulo comprendido:* 3.° *un lado igual contiguo á dos ángulos respectivamente iguales:* 4.° *sus tres ángulos respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo* (**214**).

5.° *En todo triángulo esférico:* 1.° *á lados iguales se oponen ángulos iguales:* 2.° *á mayor lado se opone mayor ángulo; y recíprocamente* (**215**).

236. TEOREMA 4.° *El arco* AB (fig. 199) *de circunferencia máxima, menor que* 180°, *que une dos puntos* A *y* B *de una superficie esférica, es menor que otra curva cualquiera* ACB, *trazada sobre la misma superficie, y que une dichos puntos.*

Fig. 199.



En efecto, uniendo A con C, y C con B por arcos de circunferencia máxima, se tiene (**235**, obs., 1.°)

$$AB < AC + CB.$$

Tomando entre A y C, y entre C y B, los puntos intermedios D y E; y trazando los arcos de circunferencia máxima AD, DC, CE y EB, se tendrá tambien

$$AC < AD + DC \quad \text{y} \quad CB < CE + EB;$$

de donde $AC + CB < AD + DC + CE + EB.$

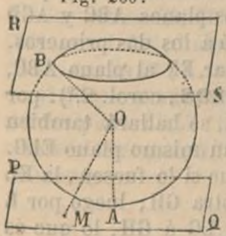
Si se continúa tomando puntos intermedios, se seguirá formando líneas poligonales esféricas, de las que cada una tiene más puntos comunes con la curva y es mayor que la anterior; luego la curva es el límite superior de dichas líneas poligonales [**51**, (*)], y como AB es menor que la más corta de estas, con mayor razon será menor que la curva propuesta ACB.

237. *Se llama* PLANO TANGENTE *á la superficie esférica el que no tiene con esta más que un punto comun; y* SECANTE *el que tiene con la misma más de un punto comun*, esto es, una circunferencia (**231**).

El punto comun á la superficie esférica y al plano tangente recibe el nombre de *punto de contacto*.

238. TEOREMA 5.º *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un rádio de la superficie esférica:* 1.º *si es perpendicular al rádio será tangente á esta superficie:* 2.º *si es oblícuo será secante.*

Fig. 200.



1.º Si el plano PQ (fig. 200) es perpendicular al rádio OA en el extremo A, el rádio tambien lo será al plano; luego uniendo el punto O con otro cualquiera M del mismo plano, la recta OM será oblícua á este (**172**), luego será mayor que OA (**174**); luego el punto M estará fuera de la superficie esférica; luego el plano PQ no tiene comun con esta superficie más que el punto A, luego le es tangente.

2.º Si el plano RS (fig. 200) es oblícuo al rádio OB en el extremo B, el rádio tambien lo será al plano; luego bajando desde O sobre este oblícuas iguales con OB, los piés de estas se hallarán á la vez en la superficie esférica y en el plano: y como el lugar geométrico de los piés de estas oblícuas sobre el plano es una circunferencia (**175**, corol. 1.º), el plano y la superficie esférica tienen una circunferencia comun, luego el plano es secante de la superficie esférica.

RECÍPROCAMENTE. *Todo plano que pasa por el extremo exterior de un rádio de la superficie esférica: 1.° si es tangente á esta superficie será perpendicular al rádio: 2.° si es secante será oblícuo* (**12**).

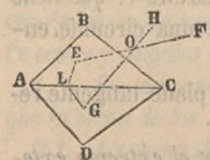
COROL. *Por un punto de la superficie esférica no se puede trazar más que un plano tangente.*

Porque si se pudiesen trazar dos ó más, habria en el extremo de un rádio dos ó más planos perpendiculares á este; lo que es absurdo (**173**).

239. TEOREMA 6.° *Por cuatro puntos* A, B, C y D (fig. 201), *que no están en un mismo plano, puede pasar una superficie esférica, pero nada más que una sola.*

Tres cualesquiera de estos puntos A, B, C estarán en un mismo plano (**169**), y A, C, D estarán tambien en otro, pero diferente del primero; puesto que por hipótesis los cuatro no están en uno mismo. Supongamos que E y G sean los centros de las circunferencias circunscriptas á los triángulos ABC y ACD: desde estos puntos E y G bájense perpendiculares sobre la AC, comun seccion de los planos, y estas perpendiculares se encontrarán en un punto L (**41**); luego la recta AC será perpendicular al plano ELG (**171**, cor. 1°.); luego los planos ABC y ACD son perpendiculares al ELG (**198**), y este lo será á los dos primeros. Levantando ahora en el punto E la perpendicular EF al plano ABC, esta perpendicular se hallará en el plano ELG (**198**, corol. 2.°): por igual razon la GH, perpendicular al plano ACD, se hallará tambien en el ELG; luego las rectas EF y GH están en un mismo plano ELG. Por otra parte, EF y GH no son paralelas; porque si lo fuesen, la EL perpendicular á una de ellas EF, lo sería á la otra GH; luego por L habria dos perpendiculares EL (prolongada) y LG á GH, lo que es imposible (**23**). Luego EF y GH se encuentran en un punto O.

Fig. 201.



Ahora, siendo EF el lugar geométrico de los puntos equidistantes de A, B y C (**175**, corol. 2.°), y GH el de los puntos equidistantes de A, D y C, el punto O donde se cortan será el único equidistante de A, B, C, y D; luego por estos puntos puede pasar una superficie esférica, y no más que una.

COROL. 1.° *Cuatro puntos, que no están en un mismo plano, determinan la posicion de una superficie esférica.*

COROL. 2.° *La interseccion de dos superficies esféricas tiene todos sus puntos en un mismo plano.*

Porque de lo contrario se podrian tomar tres puntos de los comunes en un plano, y uno en otro plano distinto; y las dos superficies esféricas se confundirian en una sola, contra la hipótesis.

Corol. 3.° *La interseccion de dos superficies esféricas es una circunferencia.*

Porque esta interseccion tiene todos sus puntos en un mismo plano (corol. anterior); luego es la interseccion de un plano con cada una de las superficies esféricas; luego es una circunferencia (**231**).

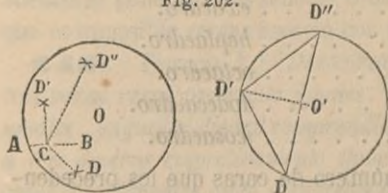
Observacion. Con suma facilidad se pueden demostrar, relativamente á la interseccion y contacto de dos superficies esféricas, teoremas análogos á los demostrados acerca de la interseccion y contacto de dos circunferencias (**47** y **48**).

PROBLEMA.

240. Dada una esfera O (fig. 202), determinar su rádio.

Tómense dos puntos A y B sobre la superficie esférica: haciendo centro en estos puntos, con un rádio cualquiera, trácense dos arcos que se corten en D y D': con un rádio diferente trácense otros dos arcos, que se corten en otro punto D'': con las distancias DD', D'D'' y DD'' constrúyase aparte, en un plano, el triángulo DD' D'': circunscríbasele una circunferencia (**64**), y el rádio O'D' de esta será igual al rádio de la esfera.

Fig. 202.



En efecto, uniendo los puntos D, D', D'' con el medio C de la recta AB, las rectas CD, CD', CD'', son perpendiculares á la AB en el punto C (**26**, corol. 2.°); luego están en el plano perpendicular á la AB en su punto medio (**171**, rec. corol.); luego el centro O de la esfera estará en el mismo plano (**171**, corol. 2.°); luego la circunferencia que pasa por los puntos D, D', D'' es máxima; y como esta es igual á la circunscripta al triángulo DD'D'', el rádio O'D' de la última es igual al rádio de la esfera.

CAPÍTULO III.

De los poliedros.

Definiciones preliminares.

241. *Se llama* poliedro *el cuerpo limitado por planos.*

Estos planos, limitados por sus mútuas intersecciones, los ángulos diedros ó poliedros que forman, los vértices de estos y las aristas, reciben los nombres de *caras*, *ángulos*, *vértices* y *aristas* del poliedro.

Diagonal *es toda línea que une dos vértices, que no están en una misma cara.*

Un poliedro se llama CONVEXO *cuando su superficie no puede ser atravesada por una recta más que en dos puntos.*

Los poliedros de que nos ocuparemos en lo sucesivo serán convexos, si no se advierte lo contrario.

242. *Llámase* POLIEDRO REGULAR *aquel cuyas caras son polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos poliedros son tambien iguales ; é* IRREGULAR *el que no reune estas condiciones.*

Por razon del número de caras que pueden tener los poliedros se clasifican del modo siguiente :

El poliedro que tiene 4 *caras* se llama *tetraedro.*
5 . . . . *pentaedro.*
6 . . . . *exaedro.*
7 . . . . *heptaedro.*
8 . . . . *octaedro.*
12 . . . . *dodecaedro.*
20 . . . . *icosaedro.*

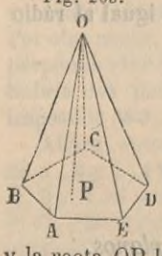
Los poliedros de diferente número de caras que los precedentes no tienen nombres especiales, y se les llama poliedros de 9, 11, 13, ..., 100, etc., caras.

ARTÍCULO I.

De las pirámides.

243. *Se da el nombre de* PIRÁMIDE *á un poliedro que tiene una cara poligonal cualquiera, y las demás son triángulos cuyos vértices se reunen en un mismo punto.*

Fig. 203.



La cara poligonal se llama *base*, *vértice* el vértice comun á las caras triangulares, y *altura* la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

OABCDE (fig. 203) es una pirámide, cuya base es el polígono ABCDE, el punto O el vértice y la recta OP la altura.

244. *Se llama pirámide* REGULAR *aquella cuya base es un polígono regular y cuya altura cae en el centro del polígono de la base ; é* IRREGULAR *la que no reune estas condiciones.*

COROL. 1.° *Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales* (**135**, 1.°).

Corol. 2.° *Las caras laterales son triángulos iguales é isósceles.*

Llámase apotema *en una pirámide regular la altura de cualquiera de sus triángulos laterales.*

Observacion. Las pirámides regulares no son siempre poliedros regulares, tales como se han definido en el número **242**; una sola pirámide puede ser poliedro regular (V. **260**).

245. Por razon del número de lados del polígono de la base, las pirámides se dividen en *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., segun dicho polígono sea triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.

Observacion. La pirámide triangular es un tetraedro, y es además el poliedro más sencillo ó de menor número de caras; porque es imposible cerrar espacio con ménos de cuatro planos.

246. Teorema 1.° *Dos tetraedros son iguales si tienen: 1.° tres caras respectivamente iguales: 2.° dos caras respectivamente iguales, é igual el diedro comprendido: 3.° una cara igual contigua á tres diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos estén dispuestos del mismo modo.*

1.° Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 204); y supongamos que los triángulos AOB=A'O'B', BOC=B'O'C' y AOC=A'O'C'.

De la igualdad de estos triángulos se deduce la de los ángulos rectilíneos, que forman los triedros en O y en O'; luego estos triedros son iguales (**214**, 1.°); luego superpuestos coinciden, y al verificarlo, coinciden tambien las caras ABC y A'B'C'; luego los tetraedros son iguales.

Fig. 204.

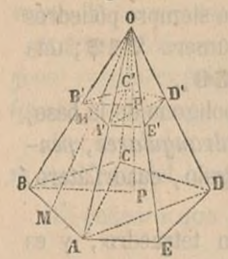
2.° Supongamos que los mismos tetraedros tengan los diedros AO=A'O' y los triángulos AOB=A'O'B', AOC=A'O'C'.

Superponiendo estos tetraedros de modo que la cara AOB coincida con su igual A'O'B', la cara AOC caerá sobre A'O'C', por ser iguales los diedros AO y A'O': y como estas caras son tambien iguales, la arista OC coincide con O'C', la OB con O'B', etc.; luego los dos tetraedros coinciden en todos sus puntos, luego son iguales.

3.° Se demuestra de una manera análoga á los anteriores.

247. Teorema 2.° *Si una pirámide* OABCDE (fig. 205) *es* *cortada por un plano A'B'C'D'E' paralelo á la base*: 1.° *el polígono de la seccion es semejante al de la base*: 2.° *las áreas de estos polígonos son proporcionales á los cuadrados de sus distancias* OP *y* OP' *al vértice de la pirámide.*

Fig. 205.



1.° Las rectas AB y A'B', BC y B'C', CD y C'D', etc., son paralelas (**202**): por igual razon, si se trazan las diagonales AC y AD en el polígono de la base, y por ellas y la arista OA se hacen pasar planos, AC y A'C', AD y A'D' serán tambien paralelas; luego los triángulos ABC y A'B'C' tienen sus ángulos respectivamente iguales (**181**), luego son semejantes: y como lo mismo sucede con los triángulos ACD y A'C'D', etc., resulta que los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' son tambien semejantes (**101**).

2.° De la semejanza de los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' se deduce (**161**)

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{A'B'C'D'E'}}=\frac{\text{AB}^2}{\text{A'B'}^2}.$$

Siendo AB y A'B' paralelas, los triángulos AOB y A'OB' son semejantes, luego

$$\frac{\text{AB}}{\text{A'B'}}=\frac{\text{BO}}{\text{B'O}}:$$

por igual razon, haciendo pasar un plano por la arista BO y la altura PO, se tendrá

$$\frac{\text{BO}}{\text{B'O}}=\frac{\text{PO}}{\text{P'O}}.$$

De esta proporcion y la anterior se deduce (Alg. **183**)

$$\frac{\text{AB}}{\text{A'B'}}=\frac{\text{PO}}{\text{P'O}} \text{ ó (Alg. 182, 4.}^{\text{a}}\text{) } \frac{\text{AB}^2}{\text{A'B'}^2}=\frac{\text{PO}^2}{\text{P'O}^2}:$$

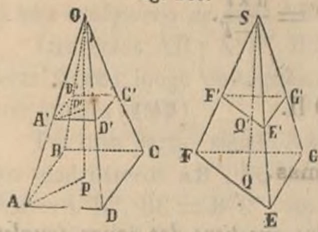
pero esta última proporcion y la primera tienen una razon comun; luego

$$\frac{\text{ABCDE}}{\text{A'B'C'D'E'}}=\frac{\text{PO}^2}{\text{P'O}^2}.$$

Corol. 1.° *Si dos pirámides* OABCD *y* SEFG (fig. 206) *de igual altura, se cortan por planos* A'B'C'D' *y* E'F'G', *paralelos á las bases y equidistantes de los vértices, las áreas de las secciones son proporcionales á las de dichas bases.*

Porque segun el teorema, se tiene

Fig. 206.



$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{PO^2}{P'O^2} \text{ y } \frac{EFG}{E'F'G'}=\frac{QS^2}{Q'S^2}:$$

mas por hipótesis PO$=$SQ y P'O$=$Q'S; luego estas proporciones tienen igual la última razon, luego

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{EFG}{E'F'G'}.$$

Corol. 2.° *Si, en las mismas hipótesis, las bases son equivalentes, las secciones tambien lo serán.*

Porque en tal caso los antecedentes de la proporcion anterior son iguales, luego tambien lo serán los consecuentes.

248. *Llámase* TRONCO *de pirámide ó pirámide* TRUNCADA *la parte* AC' *de una pirámide comprendida entre la base de esta y el plano que la corta paralelamente á dicha base, y pirámide* DEFICIENTE *la parte de pirámide que queda al otro lado del plano secante.*

Los planos ABCD y A'B'C'D', que limitan el tronco, se llaman *bases* del mismo, y *altura* la distancia entre las bases.

249. Problema. Dado un tronco de pirámide AC' (fig. 206) hallar la altura OP de la pirámide total y la OP' de la pirámide deficiente.

Supongamos completa la pirámide OABCD, y la semejanza de los triángulos AOB y A'OB' nos dará

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{A'O}:$$

la de los triángulos AOP y A'OP' da tambien

$$\frac{AO}{A'O}=\frac{OP}{OP'};$$

de cuyas proporciones se deduce

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OP}{OP'},$$

de donde (Alg. **184**)

$$\frac{AB-A'B'}{AB}=\frac{OP-OP'}{OP} \text{ y } \frac{AB-A'B'}{A'B'}=\frac{OP-OP'}{OP'};$$

ó llamando l y l' los lados paralelos de la base y de la seccion y a la altura del tronco,

$$\frac{l-l'}{l}=\frac{a}{OP} \text{ y } \frac{l-l'}{l'}=\frac{a}{OP'};$$

y por consiguiente

$$OP = \frac{a \times l}{l - l'} \quad \text{y} \quad OP' = \frac{a \times l'}{l - l'}.$$

ARTICULO II.

De los prismas.

250. *Se llama* PRISMA *un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas y las demás son paralelógramos.*

Las caras iguales y paralelas se llaman *bases*, y *altura* la distancia entre estas.

El poliedro AD′ (fig. 207) es un prisma cuyas bases son los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′, y su altura la recta CC′.

COROL. 1.° *Las aristas de un prisma son paralelas* (**180**, corolario 3.°) *é iguales* (**206**).

COROL. 2.° Para construir un prisma se traza una de sus bases ABCDE: en los vértices A, B, C, etc., se levantan las aristas laterales AA′, BB′, CC′, etc., iguales y paralelas, y se unen los extremos de estas aristas consecutivas por rectas A′B′, B′C′, C′D′, etc.

Fig. 207.

Porque las caras laterales BA′, BC′, CD′, etc., son paralelógramos (**79**, rec. 2.°); luego AB es igual y paralela á A′B′, BC á B′C′, CD á C′D′, etc.; luego los ángulos ABC=A′B′C′, BCD=B′C′D′, etc. (**181**); luego los polígonos ABCDE y A′B′C′D′E′ son tambien iguales (**84**).

251. *Se llama* PRISMA RECTO *aquel cuyas aristas son perpendiculares á las bases*, *y* OBLÍCUO *aquel en que son oblícuas.*

Prisma REGULAR *es aquel cuyas bases son polígonos regulares y que además es recto.*

COROL. *En el prisma recto la altura es igual á cualquiera de sus aristas, y las caras laterales son rectángulos; en el prisma regular los rectángulos laterales son iguales entre sí.*

OBSERVACION. Los prismas regulares no son siempre poliedros regulares como se han definido (**242**); el cubo es el único prisma regular, que es al mismo tiempo poliedro regular (V. **260**).

252. TEOREMA 1.° *Si un prisma* AD′ *se corta por un plano* A″B″C″D″E″, *paralelo á las bases, la seccion es un polígono igual á una cualquiera de estas* ABCDE.

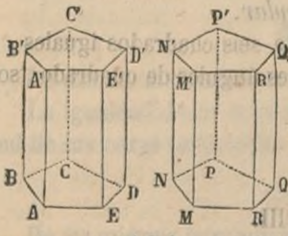
Las rectas AB y A″B″, BC y B″C″, CD y C″D″, etc. son paralelas (**202**); luego los ángulos ABC y A″B″C″, BCD y B″C″D″, etc., son iguales (**181**).

Por otra parte, siendo AA″ y BB″, BB″ y CC″, etc. paralelas, los cuadriláteros AB″, BC″, CD″, etc., son paralelógramos; luego AB = A″B″, BC = B″C″ etc. Luego los polígonos ABCDE y A″B″C″D″E″ tienen sus ángulos y lados respectivamente iguales; luego son iguales (**84**).

253. TEOREMA 2.° *Dos prismas* AD′ y MQ′ (fig. 208) *son iguales, si tienen un ángulo triedro* A *y* M, *formado por tres caras respectivamente iguales,* ABCDE = MNPQR, AB′ = MN′ y AE′ = MR′ *é igualmente dispuestas.*

Siendo iguales respectivamente y estando dispuestos del mismo modo los polígonos, que forman los triedros en A y en M, estos serán iguales (**214**, 1.°); luego superponiendo el prisma AD′ al MQ′, de manera que la cara ABCDE coincida con su igual MNPQR, la cara AB′ caerá sobre la MN′, y como estas caras son iguales, la recta A′B′ coincidirá con M′N′: por igual razon A′E′ coincidirá con M′R′; luego la base A′B′C′D′E′ coincide con su igual M′N′P′Q′R′, luego los vértices de los dos prismas coinciden, luego estos son evidentemente iguales.

Fig. 208.



COROL. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Porque los triedros A y M son iguales, por ser los ángulos BAE = NMR, BAA′ = NMM′ y A′AE = M′MR, por hipótesis: las caras ABCDE = MNPQR (tambien por hipótesis), y BA′ = NM′, AE′ = MR′ (**79**, corol. 2.°).

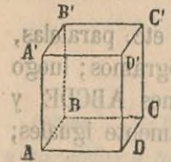
254. Por razon del número de lados de las bases, los prismas se dividen en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.*, segun dichas bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

Llámase PARALELEPÍPEDO *el prisma cuyas bases son paralelógramos*

255. TEOREMA 3.° *En todo paralelepípedo* AC′ (fig. 209) *las* *caras laterales y opuestas* AB′ y DC′, AD′ y BC′, *son tambien iguales y paralelas.*

La recta AA′ es igual y paralela á DD′ (**250**, corol. 1.°) y por hipótesis AB es igual y paralela con DC; luego la cara AB′ es igual y paralela á DC′ (**79**, corolario 2.°, y **202**, corol.). Por igual razon la cara AD′ es igual y paralela á BC′.

Fig. 209.



Corol. *En un paralelepípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.*

256. *Se llama* paralelepípedo rectángulo *aquel que tiene por bases dos paralelógramos rectángulos y además es recto.*

Corol. *Las caras de un paralelepípedo rectángulo son paralelógramos rectángulos, y sus ángulos diedros son rectos.*

257. *Se da el nombre de* cubo *á un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales.*

Corol. *El cubo es un exaedro regular.*

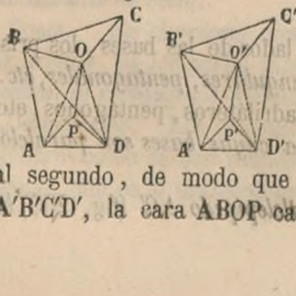
Porque sus caras son evidentemente seis cuadrados iguales, y sus ángulos poliedros, formados por tres ángulos de cuadrado, son tambien iguales (**214**, 1.°).

ARTICULO III.

De los poliedros en general.

258. Teorema 1.° *Si dos poliedros* OPABCD *y* O′P′A′B′C′D′ (fig. 210) *tienen sus caras* ABCD y A′B′C′D′, ABOP y A′B′O′P′ etc., *y sus ángulos diedros* AB y A′B′, OB y O′B′, etc., *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, son iguales.*

Fig. 210.



Superpóngase el primer poliedro al segundo, de modo que la cara ABCD coincida con su igual A′B′C′D′, la cara ABOP caerá sobre A′B′O′P′, por ser los diedros AB y A'B' iguales, y la arista OP coincidirá con la O'P', por la igualdad de estas caras; luego los vértices de estos poliedros coinciden, luego los poliedros son iguales.

Del mismo modo se demostraria cualquiera que fuese el número de caras de los poliedros.

259. Teorema 2.° *Si dos poliedros* OPABCD *y* O'P'A'B'C'D' *se componen del mismo número de tetraedros* OABD *y* O'A'B'D', OAPD *y* O'A'P'D', OBCD *y* O'B'C'D', *respectivamente iguales é igualmente dispuestos, los poliedros son iguales.*

La igualdad de los tetraedros OABD y O'A'B'D' nos da los diedros AB = A'B',

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros OADB y O'A'D'B': y como los tetraedros OAPD y O'A'P'D' son tambien iguales, los diedros OADP y O'A'D'P' lo serán de la misma manera: luego los diedros

$$OADB + OADP = O'A'D'B' + O'A'D'P',$$

ó los diedros totales

$$AD = A'D'.$$

Lo mismo se demuestra la igualdad de los diedros restantes.

La igualdad de los tetraedros OAPD y O'A'P'D' nos da la igualdad de sus caras homólogas

$$APD = A'P'D'.$$

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los triángulos AOP y A'O'P': y como los tetraedros OABD y O'A'B'D' son tambien iguales, los triángulos AOB y A'O'B' lo serán del mismo modo; luego

$$AOP + AOB = A'O'P' + A'O'B',$$

ó las caras totales (**85**) ABOP = A'B'O'P'.

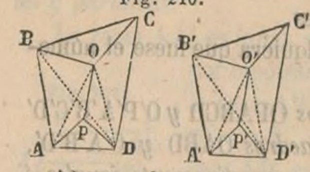
Lo mismo se demuestra la igualdad de las caras restantes.

Luego los poliedros propuestos tienen sus caras y ángulos diedros respectivamente iguales y ordenados del mismo modo; luego son iguales (**258**).

Recíprocamente. *Si dos poliedros son iguales, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operacion en el segundo poliedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

Fig. 210.



OAPD, OABD, OBCD,

y este en los

O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora, los tetraedros OAPD y O'A'P'D' tienen el diedro AP=A'P', por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros iguales: la cara APD=A'P'D' tambien por hipótesis, y la OAP=O'A'P' (**85**, rec.); luego los tetraedros son iguales (**246**, 2.º).

Como del mismo modo se demuestra la igualdad de los tetraedros restantes, el teorema recíproco es cierto.

260. TEOREMA 3.º *El número de poliedros regulares no puede pasar de cinco.*

En efecto, el número de poliedros regulares no puede exceder al de ángulos poliedros que puedan formarse con ángulos de polígonos regulares iguales (**242**); luego si demostramos que el número de estos ángulos poliedros es cinco, se tendrá demostrado que el de los poliedros regulares no puede exceder á este número.

Esto supuesto, y recordando que para formar un ángulo poliedro se necesitan á lo ménos tres ángulos rectilíneos, cuya suma no puede llegar á cuatro rectos (**212**) ó sea 360º, se tendrá que:

Valiendo el ángulo de triángulo equilátero 60º (**82**, obs. 2.ª) con 3, 4 y 5 de estos ángulos se podrán formar ángulos poliedros, porque

$$60\times3<360,\quad 60\times4<360\quad \text{y}\quad 60\times5<360;$$

mas con 6 ya no puede formarse, porque

$$60\times6=360.$$

Valiendo el ángulo de cuadrado 90º, con 3 de estos ángulos se podrá formar un ángulo poliedro, porque

$$90\times3<360;$$

pero con 4 de estos ángulos ya no puede formarse, porque

$$90\times4=360.$$

Valiendo el ángulo de pentágono regular 108º, con 3 de estos ángulos se puede formar un ángulo poliedro, porque

$$108\times3<360;$$

mas con 4 ya no puede formarse, porque

$$108 \times 4 > 360.$$

Valiendo el ángulo del exágono 120°, con 3 de estos ángulos no puede formarse ya ángulo poliedro, porque

$$120 \times 3 = 360.$$

Con mayor razon no pueden formarse ángulos poliedros con ángulos de polígonos regulares de mayor número de lados.

Luego con ángulos de polígonos regulares é iguales, solo pueden formarse 5 ángulos poliedros: 3 con los ángulos de triángulo equilátero, 1 con los del cuadrado y 1 con los del pentágono; luego el número de poliedros regulares no puede pasar de *cinco*.

Observacion. Deberíamos ahora demostrar la posibilidad de la formacion de los cinco poliedros regulares; pero la demostracion no es de este lugar. Nos limitaremos á indicar que efectivamente existen estos cinco poliedros regulares, y son:

El *tetraedro*, terminado por 4 triángulos equiláteros (fig. 211, 1).

El *exaedro*, terminado por 6 cuadrados (fig. 211, 2).

El *octaedro*, terminado por 8 triángulos equiláteros (fig. 211, 3).

El *dodecaedro*, terminado por 12 pentágonos regulares (figura 211, 4).

El *icosaedro*, terminado por 20 triángulos equiláteros (figura 211, 5).

Fig. 211.

SECCION SEGUNDA.

DE LA EXTENSION DE LAS FIGURAS EN EL ESPACIO.

CAPÍTULO PRIMERO.

De los poliedros semejantes, inscriptos y circunscriptos.

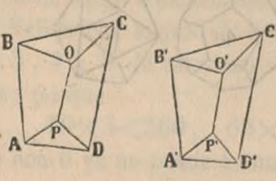
PRELIMINARES.

261. *Se llaman* POLIEDROS SEMEJANTES *los que tienen sus ángulos diedros, colocados del mismo modo, respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes.*

Llámanse ARISTAS HOMÓLOGAS *las aristas de los diedros iguales, y* CARAS HOMÓLOGAS *las formadas por aristas homólogas.*

Si en los poliedros OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 212), suponemos iguales los diedros AB = A'B', BO = B'O', etc., cuyas aristas tienen las mismas letras, las aristas AB y A'B', AP y A'P', etc., son homólogas; y las caras ABOP y A'B'O'P', APD y A'P'D', etc., formadas por dichas aristas, son las caras homólogas.

Fig. 212.



COROL. *Los poliedros semejantes tienen proporcionales las aristas homólogas.*

Porque la semejanza de las caras ABOP y A'B'O'P' nos da

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O'} = \frac{OP}{O'P'} = \frac{AP}{A'P'},$$

y la de los triángulos APD y A'P'D' da tambien

$$\frac{AP}{A'P'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{PD}{P'D'},$$

cuyas séries de razones iguales se enlazan por la razon comun

$\frac{AP}{A'P'}$, y se enlazarian igualmente con otras deducidas de la comparacion de las caras homólogas restantes.

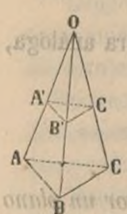
ARTÍCULO I.

De los tetraedros semejantes.

262. TEOREMA 1.° *Si un tetraedro* OABC (fig. 213) *se corta por un plano* A'B'C' *paralelo á una de sus caras, el tetraedro* OA'B'C' *parcial que resulta, es semejante al total.*

Los diedros OB y OB' son uno mismo, y por lo tanto iguales.

Fig. 213.



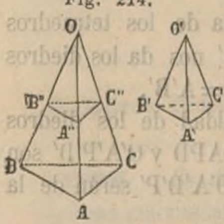
Otro tanto sucede con los diedros laterales restantes. Los diedros OBAC y OB'A'C' son tambien iguales (**205**, rec. 1.°): y como lo mismo se demostraria respecto de los demás diedros de las bases, resulta que los tetraedros propuestos tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales.

Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes (**242**, 1.°): OAB es tambien semejante con OA'B' (**92**), y como los demás triángulos laterales se hallan en igual caso, los tetraedros tienen sus caras homólogas respectivamente semejantes.

Luego dichos tetraedros son semejantes.

263. TEOREMA 2.° *Dos tetraedros son semejantes: 1.° si tienen tres caras respectivamente semejantes: 2.° si tienen dos caras respectivamente semejantes é igual el diedro comprendido: 3.° si tienen una cara semejante contigua á tres diedros respectivamente iguales; con tal que en todos estos casos los elementos estén semejantemente dispuestos.*

Fig. 214.



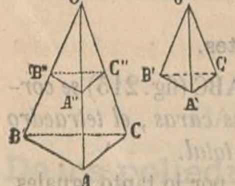
1.° Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 214), en que se suponen semejantes los triángulos OAB y O'A'B', OAC y O'A'C', OBC y O'B'C'.

Tómese sobre la arista OB una parte OB''=O'B', y por el punto B'' trácese el plano B''A''C'', paralelo á BAC.

Los tetraedros OABC y OA''B''C'' serán semejantes (**262**). De la semejanza de estos tetraedros se deduce la de las caras homólogas OAB y OA''B'', OBC y OB''C'', etc.:

mas por hipótesis OAB y O'A'B', OBC y O'B'C', etc., son tambien semejantes; luego los triángulos OA''B'' y O'A'B', OB''C'' y O'B'C', etc., tienen sus ángulos respectivamente iguales; luego los triángulos OA''B' y O'A'B', OB''C'' y O'B'C', que tienen OB''=O'B' por construccion y los ángulos contiguos iguales, son iguales (**32**, 3.º), luego los triángulos OA''C'' y O'A'C' tambien lo serán (**32**, 2.º); luego los tetraedros OA''B''C'' y O'A'B'C' son iguales (**246**, 1.º): pero el primero es semejante con OABC, luego el segundo tambien lo será.

Fig. 214.



2.º y 3.º Estos casos se demuestran de una manera análoga, fundándose en el 2.º y 3.º del núm. **246**.

ARTÍCULO II.

De los poliedros semejantes en general.

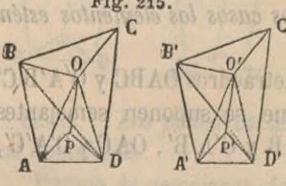
264. Teorema 1.º *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide deficiente es semejante á la total.*

La demostracion de este teorema es igual á la del teorema del núm. **262**, que es un caso particular del presente.

Corol. *Las bases de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas* (**247**, 2.º).

265. Teorema 2.º *Si dos poliedros* OPABCD *y* O'P'A'B'C'D' (fig. 215) *están compuestos del mismo número de tetraedros* OABD *y* O'A'B'D', OAPD *y* O'A'P'D', *ó* OBCD *y* O'B'C'D' *respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Fig. 215.



La semejanza de los tetraedros OABD y O'A'B'D' nos da los diedros AB=A'B'.

De los mismos tetraedros resulta la igualdad de los diedros OADB y O'A'D'B': y como los tetraedros OAPD y O'A'P'D' son tambien semejantes, los diedros OADP y O'A'D'P' serán de la misma manera iguales; luego los diedros

OADB+OADP=O'A'D'B'+O'A'D'P',

ó los diedros totales AD=A'D'.

Lo mismo se demuestra la igualdad de los diedros restantes.

La semejanza de los tetraedros OAPD y O'A'P'D' nos da la semejanza de sus caras homólogas

APD y A'P'D'.

De los mismos tetraedros resulta la semejanza de los triángulos AOP y A'O'P': y como los tetraedros OABD y O'A'B'D' son tambien semejantes, los triángulos ABO y A'B'O' lo serán del mismo modo; luego los polígonos

ABOP y A'B'O'P'

son semejantes (**101**).

Lo mismo se demuestra la semejanza de las demás caras.

Luego los poliedros propuestos tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales y sus caras homólogas semejantes, luego son semejantes (**261**).

Recíprocamente. *Si dos poliedros son semejantes, se pueden descomponer en el mismo número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.*

Haciendo pasar un plano por los puntos O, A, D, y otro por los O, B, D, y ejecutando igual operacion en el segundo poliedro, aquel quedará dividido en los tetraedros

OAPD, OABD, OBCD,

y este en los O'A'P'D', O'A'B'D', O'B'C'D'.

Ahora, los tetraedros OAPD y O'A'P'D', tienen los diedros AP = A'P', por ser diedros colocados del mismo modo en los poliedros semejantes: el triángulo APD es semejante al A'P'D' tambien por hipótesis, y el OAP al O'A'P' (**101**, rec.); luego los tetraedros son semejantes.

Como del mismo modo se demostraria la semejanza de los tetraedros restantes, el teorema recíproco es evidente.

ARTÍCULO III.

Poliedros inscriptos y circunscriptos en los cuerpos de revolucion.

266. *Se dice que una pirámide está* inscripta *en un cono ó un cono* circunscripto *á una pirámide, cuando ambos cuerpos tienen el mismo vértice y la base de la pirámide está inscripta en la del cono.*

267. Inscribiendo en un cono una pirámide cualquiera, despues otra de duplo número de caras laterales, luégo otra, y así sucesivamente, las aristas de la pirámide permanecen iguales á los lados del cono : el número de aristas que coincide con la superficie cónica se duplica ; y por lo tanto la superficie lateral de la pirámide se va confundiendo con la superficie cónica, y la base de aquella con la de esta, de manera que á las pocas inscri pciones ya la vista no puede distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aún suponer continuadas cuánto se quiera, se infiere que

Todo cono se puede considerar como una pirámide de infinito número de caras.

Observacion. El cono recto y circular se debe considerar en tal caso como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales y están representadas por los lados.

268. *Se dice que un prisma está* INSCRIPTO *en un cilindro ó un cilindro* CIRCUNSCRIPTO *á un prisma, cuando las bases del prisma están inscriptas en las del cilindro.*

269. Si en un cilindro se inscribe un prisma cualquiera, despues otro de duplo número de caras laterales, luégo otro, y así sucesivamente, el número de aristas que coincide con la superficie cilíndrica se va duplicando á medida que el número de caras laterales se duplica; y por lo tanto la superficie lateral del prisma se va confundiendo con la del cilindro, y las bases de aquel con las de este, de manera que á las pocas inscripciones ya no es fácil distinguir un cuerpo del otro. Como las inscripciones se pueden aún suponer continuadas cuanto se quiera, se infiere que

Todo cilindro se puede considerar como un prisma de infinito número de caras.

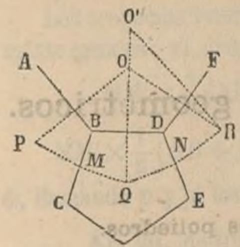
270. *Se dice que un poliedro está* INSCRIPTO *en una esfera, ó una esfera* CIRCUNSCRIPTA *á un poliedro, cuando todos los vértices del poliedro están en la superficie esférica.*

Dícese que un poliedro está CIRCUNSCRIPTO *á una esfera, ó una esfera* INSCRIPTA *en un poliedro, cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica.*

271. Teorema. *A todo poliedro regular : 1.° se le puede inscribir una esfera : 2.° circunscribir otra.*

Supongamos que ABC y CBD (fig. 216) sean dos caras adyacentes del poliedro dado ; levantando en los centros P y Q de los polígonos, que forman dichas caras, perpendiculares á las mismas, estas perpendiculares se encontrarán en el punto O, centro de la esfera que pasa por dichos puntos A, B, C, D (239). Si en el centro R de la cara EDF, contigua á una de las anteriores CBD, se levanta otra perpendicular, esta encontrará por igual razon á la QO en un punto cualquiera O'.

Fig. 216.



Ahora este punto O' debe ser el mismo punto O donde se encuentran las PO y QO. En efecto, trácense desde P y Q perpendiculares sobre la arista BC, comun á las dos primeras caras, cuyas perpendiculares concurrirán en el punto M (41); y desde Q y R sobre la DE, las cuales concurren en N, por la misma razon: dóblese el cuadrilátero plano (239) OPMQ sobre el de igual clase O'QNR, sirviendo de eje OQ, y QM caerá sobre QN por ser los ángulos OQM y OQN rectos (170), y el punto M coincidirá con N, porque QM=QN por apotemas de un mismo polígono, MP caerá sobre NR, por ser iguales los ángulos PMQ y QNR, como medidas de los diedros BC y DE, iguales por hipótesis; y el punto P coincidirá con R por ser PM=NR, como apotemas de polígonos iguales: PO caerá sobre RO' por ser rectos los án gulos OPM y O'RN (170); luego el punto O' coincide con O, y OP=O' R. Como lo mismo se demostraria respecto de la perpendicular levantada en el centro de otra cara cualquiera, resulta que todas las perpendiculares levantadas en los centros de los polígonos se encuentran en un mismo punto O y son iguales, luego todas las caras equidistan de este punto O; luego si desde él como centro se traza una esfera de igual rádio que OP, todas las caras del poliedro son perpendiculares á los extremos de los rádios OP, OQ, OR, etc., de esta esfera, luego son tangentes (238, 1.°); luego la esfera queda inscripta en el poliedro.

2.° Siendo OP perpendicular al polígono ABC en su centro P, se tendrá (*) OA=OB=OC=etc. (175, 1.°): por igual razon OB=OC=OD=etc.; de donde OA=OB=OC=OD=etc. y como lo mismo se demostraria de todas las rectas que desde O van á los vértices del poliedro, resulta que estos equidistan de O; luego si desde O, como centro, se supone trazada una esfera de igu al rádio que OA, esta pasará por todos los vértices del poliedro, y por lo tanto estará circunscripta á este.

272. *Llámase* CENTRO *de un poliedro regular el centro de las esferas inscripta y circunscripta al mismo poliedro:* RÁDIOS *del poliedro las rectas que van desde el centro á los vértices de sus ángulos; y* APOTEMAS *las perpendiculares trazadas desde el centro á las caras del poliedro.*

COROL. 1.° *Los rádios de un poliedro son iguales entre sí, y las apotemas lo son tambien.*

(*) Estas líneas no están trazadas en la figura; porque los puntos extremos las expresan con claridad, y si se hubiesen trazado, la figur a resultaria confusa.

Corol. 2.° *Todo poliedro regular se puede descomponer en tantas pirámides regulares é iguales como caras tiene, cuyas bases son las caras del poliedro y cuyos vértices se reunen en el centro.*

CAPÍTULO II.

De las áreas de los cuerpos geométricos.

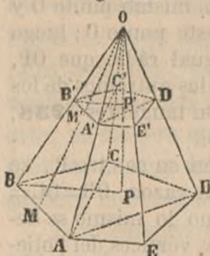
ARTÍCULO I.

Determinacion de las áreas de los poliedros.

273. El área de la superficie de un poliedro cualquiera es evidentemente igual á la suma de las áreas de los polígonos que forman sus diferentes caras; y como se sabe determinar las áreas de las figuras planas (*), solo nos ocuparemos al presente de las áreas de las superficies laterales del prisma, de la pirámide regular y de su tronco, que pueden determinarse de una manera más sencilla, como aparece de los siguientes teoremas.

274. Teorema 1.° *El área de la superficie lateral de una pirámide regular* OABCDE (fig 217) *es igual á la mitad del producto de la apotema* OM *por el perímetro de la base.*

Fig. 217.



Los triángulos laterales AOB, BOC, etc. son iguales é isósceles (**244**, corol. 2.°): el área de cada uno de estos triángulos es (**151**) $\frac{1}{2}$MO$\times$AB; luego la de los cinco será

$$\frac{1}{2}\mathrm{MO}\times\mathrm{AB}\times5=\frac{1}{2}\mathrm{MO}\times5\mathrm{AB},$$

ó, llamando a la apotema y p el perímetro de la base,

$$\text{Ar. de sup. lat. de pirám. reg.}=\frac{1}{2}\,ap.$$

Ejemplo. Hallar el área de la superficie lateral de la pirámide OABC....., suponiendo que la apotema tiene 3,12 metros y el lado de la base 1,03 metros; $p=1,03\times5=5,15$, $a=3,12$; luego el área buscada será

$$\frac{3,12\times5,15}{2}=8,0340 \text{ metros cuadrados.}$$

(*) V. Geometría plana, seccion II, cap. 3.°, art. 1.°

275. TEOREMA 2.° *El área de la superficie lateral de un tronco AD′ de pirámide regular es igual al producto de su apotema MM′ por la semisuma de los perímetros de las bases.*

Los trapecios laterales ABA′B′, BCB′C′, etc., son evidentemente iguales: el área del primero de estos es (**152**)

$$MM' \times \frac{1}{2}(AB + A'B');$$ luego la de los cinco será

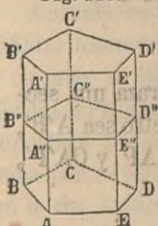
$$MM' \times \frac{1}{2}(AB + A'B') \times 5 = MM' \times \frac{1}{2}(5AB + 5A'B').$$

ó, llamando p y p' los perímetros de sus bases y a la apotema,

$$\text{Ar. lat. de tronco de pir. reg.} = a \times \frac{1}{2}(p + p').$$

276. TEOREMA 3.° *El área de la superficie lateral de un prisma* AD′ (fig 218) *cualquiera es igual al producto de la arista* AA′ *por el perímetro de una seccion* A″B″C″D″E″, *perpen dicular á dicha arista*

Fig. 218.



Siendo la seccion perpendicular á la arista AA′, lo será á todas (**180**, corol. 2.°); luego estas lo serán á la seccion, y por lo tanto, cada una de ellas á los lados A″B″, B″C″, ... de la seccion, que pasan por su pié en el mismo plano (**170**); luego el área de los paralelógramos laterales será (**150**)

$$ABA'B' = AA' \times A''B'', \quad BCB'C' = BB' \times B''C'', \text{ etc.};$$

luego el área de la superficie lateral del prisma, como las aristas son iguales (**250**, corol. 1.°), será

$$AA'(A''B'' + B''C'' + C''D'' + D''E'' + E''A''),$$

ó, llamando a la arista y p el perímetro de dicha seccion,

$$\text{Ar. lat. de prisma} = ap.$$

COROL. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de la base.*

Porque en este prisma la base es una seccion perpendicular á la arista.

ARTÍCULO II.

Areas de los cuerpos de revolucion.

277. TEOREMA 1.° *El área de la superficie curva de un cono recto y circular es igual á la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.*

El cono recto y circular se puede considerar como una pirámide regular de infinito número de caras, cuyas apotemas y aristas son iguales y están representadas por los lados (**267**, obs.): el área de la superficie lateral de la pirámide regular es igual á la mitad del producto de la apotema por el perímetro de la base (**274**); luego el área de la superficie curva del cono será tambien la mitad del producto del lado por la circunferencia de la base.

Siendo, pues, OPAB (fig. 219) un cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de OPAB} = \frac{1}{2}\,OA \times 2\pi PA = \pi PA \times OA \quad [1],$$

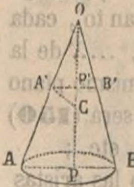
ó, llamando r el rádio de la base y l el lado,

$$\text{Ar. de sup. cur. de cono rec. y cir.} = \pi r l \quad [2].$$

OBSERVACIONES.

1.ª Si por el punto A′, medio del lado AO, se traza una seccion paralela á la base, cuyo diámetro sea A′B′, de la semejanza de los triángulos OAP y OA′P′, resulta

Fig. 219.



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{P'A'}{PA};$$

pero $OA' = \frac{1}{2}\,OA$; luego

$$P'A' = \frac{1}{2}\,PA \text{ ó } PA = 2P'A',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula [1], nos da

$$\text{Ar. de sup cur. de OPAB} = 2\pi P'A' \times OA.$$

Luego *el área de la superficie curva de un cono recto y circular es tambien igual al producto del lado por la circunferencia de una seccion, hecha por el punto medio del lado y paralela á la base.*

2.ª Si por el punto A′ (fig. 219), medio del lado, se traza la A′C perpendicular á este, los triángulos AOP y A′P′C serán semejantes (**100**);

luego $\frac{AO}{A'C} = \frac{OP}{A'P'}$; de donde

$$AO \times A'P' = A'C \times OP,$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la observacion anterior, da

$$\text{Ar. de sup. cur. de } OPAB = 2\pi A'C \times OP.$$

Luego *el área de la superficie curva de un cono recto y circular es tambien igual al producto del eje por la circunferencia, cuyo rádio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado é interceptada entre este punto y el eje.*

278. Para determinar el área de la superficie curva de un cono cualquiera, se desarrolla dicha superficie sobre un plano (**225**, 2.°), y luégo se halla el área de la figura plana resultante (**259**).

279. TEOREMA 2.° *El área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular es igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.*

Considerándose el cono recto y circular como una pirámide de infinito número de caras (**267**, obs.), el tronco de cono recto y circular se puede considerar tambien como el tronco de una pirámide regular, cuyo número de caras es infinito: el área de la superficie de la pirámide truncada es igual al producto de la apotema por la semisuma de los perímetros de las bases (**275**); luego la del tronco de cono recto y circular será tambien igual al producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.

Siendo, pues, AB′ (fig. 220) un tronco de cono recto y circular, se tendrá

$$\text{Ar. de sup. cur. de } AB' = AA' \times \frac{1}{2}(2\pi PA + 2\pi P'A') = AA' \times 2\pi \frac{PA + P'A'}{2}.$$

OBSERVACIONES.

Fig. 220.

1.ª Si por el punto A″, medio de AA′, se traza una seccion paralela á las bases cuyo diámetro es A″B″, en el trapecio APA′P′, resulta (**152**, obs.)

$$\frac{PA + P'A'}{2} = P''A'',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula precedente, da

$$\text{Ar. de sup. cur. de } AB' = 2\pi P''A'' \times AA'.$$

Luego *el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular tambien es igual al producto de su lado por la* *circunferencia de una seccion, hecha por el punto medio del lado y paralela á las bases.*

Fig. 220.

2.ª Si por los puntos A' y A'' se trazan las perpendiculares $A'D$ y $A''C$ á la base y al lado AA', los triángulos $AA'D$ y $A''P''C$ serán semejantes (**100**), luego

$$\frac{DA'}{P''A''} = \frac{AA'}{CA''};$$

de donde, y supuesto que $DA' = PP'$,

$$P''A'' \times AA' = CA'' \times PP',$$

cuyo valor sustituido en la fórmula de la precedente observacion, da

$$\text{Ar. de sup. curva de } AB' = 2\pi A''C \times PP'.$$

Luego *el área de la superficie curva de un tronco de cono recto y circular, es tambien igual al producto de su eje por una circunferencia, cuyo rádio es la perpendicular levantada en el punto medio del lado é interceptada entre este punto y el eje.*

280. Para determinar el área de la superficie curva de un tronco de cono cualquiera se desarrolla dicha superficie sobre un plano (**225**, obs. 2.ª), y luégo se halla el área de la figura resultante (**159**).

281. Teorema 3.º *El área de la superficie curva de un cilindro cualquiera es igual al producto del lado por el perímetro de una seccion perpendicular á dicho lado.*

A todo cilindro se le puede considerar como un prisma de infinito número de caras (**269**): el área de la superficie lateral del prisma es igual al producto de la arista por el perímetro de la seccion perpendicular á la misma arista (**276**); luego la del cilindro será igual al producto del lado por el perímetro de la seccion perpendicular á este lado (*).

Corol. *El área de la superficie curva del cilindro recto y circular es igual al producto de la circunferencia de la base por el lado.*

Porque en este cilindro la base es una seccion perpendicular al lado.

(*) Como no sabemos rectificar más curvas que la circunferencia, en el presente caso puede arrollarse un hilo perpendicular á los lados del cilindro, y la medida de su extension nos dará la longitud del perímetro de la seccion pedida.

Llamando r el rádio de la base y l el lado, se tiene

Ar. de sup. cur. de cil. rec. y cir. $=2\pi rl$.

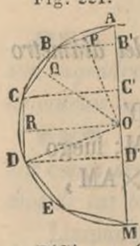
Ejemplo. **¿Cuál es el área de la superficie curva de un cilindro recto y circular, cuyo rádio de la base es 6 metros y el lado 10?**

La circunferencia de la base es $c=2\pi r=37,69908$, y por consiguiente el área buscada será

$37,69908\times10=376,9908$ metros cuadrados.

282. Teorema 4.° *El área de la superficie descrita por la base* ABCD (fig. 221) *de un sector poligonal* ABCDO, *que gira al rededor de uno de sus rádios* AO, *es igual al producto de una circunferencia, cuyo rádio es la apotema* OP *por la proyeccion* AD′ *de la base sobre el eje.*

Fig. 221.



El lado AB describe la superficie curva de un cono recto y circular cuyo eje es AB′: CB la de un tronco de cono recto y circular cuyo eje es B′C′, y CD la de un cilindro que tiene por eje C′D′; luego

Ar. de sup. desc. por AB$=2\pi$OP$\times$AB′ (**277**, obs. 2.ª),
Ar. de sup. desc. por BC$=2\pi$OQ$\times$B′C′ (**279**, obs. 2.ª),
Ar. de sup. desc. por CD$=2\pi$DD′$\times$CD (**281**, corol.).

Sumando estas igualdades, advirtiendo que CD$=$C′D′, y que DD′$=$OP y OP$=$OQ$=$OR (**126**, corol. 1.°), resulta

Ar. de sup. des. por ABCD$=2\pi$OP$\times$AD′.

283. *Se llama* ZONA *esférica la parte de superficie de la esfera, descrita por un arco cualquiera de la semicircunferencia generatriz de la superficie esférica.*

Las circunferencias descritas por los extremos del arco generador de la zona se llaman BASES *de esta, y* ALTURA *la proyeccion de dicho arco sobre el eje.*

Si uno de los extremos del arco generador coincide con el eje, la zona tiene una base sola.

La zona de una sola base se llama tambien *casquete* esférico.

La superficie descrita por el arco BCD es una zona: sus bases son las circunferencias que tienen por rádios las rectas B′B y D′D, y B′D′ es su altura. Si el arco generador fuese ABC, la única base sería la circunferencia, cuyo rádio es CC′ y AC′ la altura.

284. TEOREMA 5.º *El área de una zona esférica es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

Considerando el arco generador como la base de un sector poligonal regular de infinito número de lados, el área de la superficie descrita por esta base será igual (**282**) al producto de su proyeccion sobre el diámetro, ó sea á la altura de la zona, por la circunferencia cuyo rádio es la apotema de dicho sector, ó sea por una circunferencia máxima.

Llamando, pues, Z el área de la zona, a su altura y r el rádio de la esfera, se tendrá

$$Z = 2\pi ra.$$

COROL. *El área de la esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.*

Porque Ar. de zona desc. por arc. $AD = 2\pi r \times AD'$,

Ar. de zona desc. por arc. $DM = 2\pi r \times D'M$; luego

Ar. de sup. desc. por $ADM = 2\pi r(AD' + D'M) = 2\pi r \times AM$,

ó llamando d el diámetro y E la superficie esférica

$$\text{Ar. de } E = 2\pi rd,$$

ó, sustituyendo en vez de d su valor $2r$,

$$\text{Ar. de } E = 4\pi r^2.$$

OBSERVACION. Siendo πr^2 el área de un círculo máximo, resulta que el *área de la superficie esférica es cuádrupla de la del círculo máximo.*

EJEMPLO. Suponiendo que la tierra sea esférica, y que su rádio sea 1142 leguas, ¿cual será el área de su superficie?

Ar. de sup. T. $= 4 \times 3,14159 \ldots \times 1142^2 = 16\,388\,608$ leguas cuadradas próximamente.

ARTICULO III.

Comparacion de las áreas de los cuerpos geométricos semejantes.

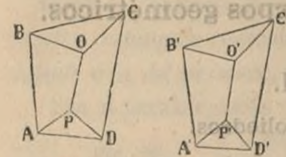
285. TEOREMA 1.º *Las áreas de las superficies de los poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Sean OPABCD y O'P'A'B'C'D' (fig. 222) los poliedros semejantes, y se tendrá (**161**)

$$\frac{ABOP}{A'B'O'P'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}, \quad \frac{BOC}{B'O'C'} = \frac{OC^2}{O'C'^2}, \ldots$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**261**, corolario, y Algebra **182**, 4.ª),

Fig. 222.



luego $\frac{ABOP}{A'B'O'P'} = \frac{BOC}{B'O'C'} = \ldots\ldots = \frac{AB^2}{A'B'^2}$,

de donde (Alg. **186**)

$$\frac{ABOP + BOC + \ldots}{A'B'O'P' + B'O'C' + \ldots} = \frac{AB^2}{A'B'^2},$$

ó llamando A y A′ las áreas de las superficies de estos poliedros,

$$\frac{A}{A'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}.$$

286. *Dos conos rectos y circulares son semejantes cuando son engendrados por triángulos semejantes, que giran al rededor de catetos homólogos.*

287. Teorema 2.º *Las áreas de las superficies curvas de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los rádios de las bases.*

Llamando r, r' los rádios y l, l' los lados de estos dos conos, las áreas de sus superficies curvas serán (**277**)

$$\pi rl \text{ y } \pi r'l':$$

de donde
$$\frac{\pi rl}{\pi r'l'} = \frac{rl}{r'l'},$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{rl}{r'l'}$ en vez de la razon componente $\frac{l}{l'}$ su igual por hipótesis $\frac{r}{r'}$ (Alg., **175**, corol.), resulta
$$\frac{\pi rl}{\pi r'l'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Observacion. De una manera análoga se definen los cilindros semejantes, y se demuestra tambien que las áreas de sus superficies curvas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.

288. Teorema 3.º *Las áreas de dos superficies esféricas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios.*

Llamando r y r' los rádios de estas superficies esféricas, sus áreas respectivas serán (**284**, corol.)

$$4\pi r^2 \text{ y } 4\pi r'^2;$$

de donde
$$\frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

CAPITULO III.

De los volúmenes de los cuerpos geométricos.

ARTÍCULO I.

Equivalencia de los poliedros.

289. *Se dice que dos cuerpos geométricos son* EQUIVALENTES *cuando tienen igual magnitud aunque tengan distinta figura* (**3**).

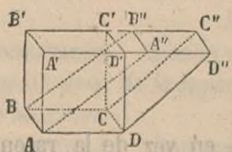
290. TEOREMA 1.° *Dos paralelepípedos, que tienen una misma base é igual altura, son equivalentes.*

Pueden ocurrir dos casos : 1.° que las bases superiores estén entre unas mismas paralelas : 2.° que no lo estén.

1.° Sean los paralelepípedos AC′ y AC″ (fig. 223), cuyas bases superiores están entre las paralelas A′D″ y B′C″.

Los prismas triangulares AA′A″BB′B″ y DD′D″CC′C″ tienen las caras BA′=CD′ (**255**): A′B′B″A″=D′C′C″D″ por componerse de la parte comun D′C′B″A″ y de los paralelógramos A′C′ y A″C″, iguales entre sí, por serlo cada uno de ellos con la base comun AC : y el triángulo AA′A″=DD′D″ (**72**, 1.°) ; luego los prismas triangulares tienen un ángulo triedro (A′ y D′) formado por tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas, luego son iguales (**253**).

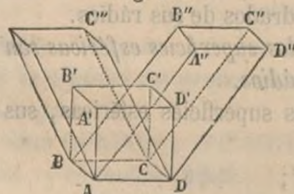
Fig. 223.



Si del poliedro total se resta el primero de dichos prismas, queda el paralelepípedo AC″, si se resta el segundo queda el paralelepípedo AC′ ; luego estos paralelepípedos son equivalentes.

2.° Sean los dos paralelepípedos AC′ y AC″ (fig. 224). Como estos paralelepípedos tienen (por hipótesis) igual altura, sus bases superiores estarán en un mismo plano paralelo á la base comun: luego si se prolongan las caras BA′ y CD′ del primero, y las AD″ y BC″ del segundo, sus intersecciones formarán un tercer paralelepípedo AC‴ (**254**), que será equivalente á cada uno de los dados AC′ y AC″,

Fig 224.

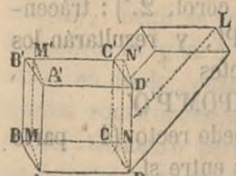


segun la primera parte del teorema; luego estos son equivalentes entre sí.

291. Teorema 2.° *Todo paralelepípedo se puede convertir en otro rectángulo equivalente, de la misma altura y base equivavalente á la del primero.*

Sea el paralelepípedo AL (fig. 225) oblicuo, y su base ABCD un paralelógramo oblicuángulo; levantando en los vértices A, B, C y D de la base las aristas AA′, BB′ etc., perpendiculares á dicha base é iguales á la altura del paralelepípedo dado, se formará el paralelepípedo recto AC′ equivalente al propuesto (**290**). En los extremos de los lados AD y A′D′ de las bases del paralelepípedo AC′, levántense las perpendiculares AM, DN y A′M′, D′N′: trácense las rectas MM′ y NN′; y quedará formado un tercer paralelepípedo AN′ rectangular, de igual altura que AL, y cuya base AMND es equivalente á la ABCD del mismo.

Fig. 225.



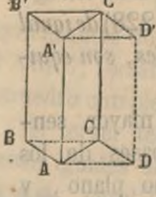
Ahora puede suponerse que los paralelepípedos AC′ y AN′ tienen por base la cara comun AA′D′D y por altura la perpendicular AM; luego tienen la misma base y altura, luego son equivalentes (**290**): pero AC′ es equivalente á AL, luego AN′ tambien lo será. Luego el paralelepípedo AL se puede convertir en otro AN′ equivalente, rectángulo, de igual altura y base equivalente.

292. Teorema 3.° *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de igual altura y dupla base.*

Distinguiremos dos casos: 1.° que el prisma triangular sea recto: 2.° que sea oblícuo.

1.° Sea el prisma triangular ABCA′B′C′ (fig. 226) recto.

Fig. 226.



Complétese el paralelepípedo BD′. Los prismas triangulares ABCA′B′C′ y ACDA′C′D′ son rectos, tienen iguales las bases ABC y ACD (**79**, corolario 1.°) é igual altura; luego son iguales (**253**, corol.); luego cada uno de ellos es la mitad del paralelepípedo BD′; luego el prisma triangular ABCA′B′C′ es la mitad del paralelepípedo BD′ de igual altura y dupla base.

2.° Sea el prisma triangular oblícuo ABCA'B'C' (fig. 227).

Fig. 227.

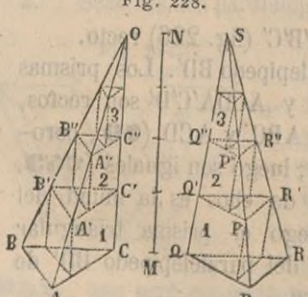
Complétese el paralelepípedo BD', y trácese el plano M'N'P'Q' perpendicular á sus aristas: prolónguense estas hácia la parte inferior de modo que M'M =N'N=P'P=Q'Q=AA': únanse los extremos de las aristas contiguas á la misma cara, y se tendrá el paralelepípedo recto MNPQM'N'P'Q' (**250**, corol. 2.°): trácense las diagonales MP y M'P', y resultarán los dos prismas triangulares rectos

MNPM'N'P' y MPQM'P'Q',

de los que cada uno es la mitad del paralelepípedo recto (1.ª parte del teor.), y que por consiguiente son iguales entre sí.

Superponiendo el poliedro MNPABC al M'N'P'A'B'C', de modo que la base MNP coincida con su igual M'N'P', la arista MA caerá sobre M'A' (**132**); y como estas aristas son iguales (porque restando de AA' y MM', iguales por construccion, la parte AM' comun, quedan los resíduos MA=M'A') el vértice A coincide con A': lo mismo se demuestra que B coincide con B' y C con C'; luego dichos poliedros son iguales. Luego agregando á cada uno de estos poliedros la parte ABCM'N'P', los prismas triangulares ABCA'B'C' y MNPM'N'P' son equivalentes: del mismo modo se demuestra que ACDA'C'D' y MPQM'P'Q' son equivalentes: pero los prismas triangulares rectos MNPM'N'P' y MPQM'P'Q' son iguales entre sí; luego los oblícuos ABCA'B'C' y ACDA'C'D' son equivalentes; luego uno de ellos ABCA'B'C' será equivalente á la mitad del paralelepípedo ABCDA'B'C'D' de igual altura y dupla base (**146**).

Fig. 228.



Corol. *Los prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

293. Teorema 4.° *Dos tetraedros* OABC *y* SPQR (fig. 228) *de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

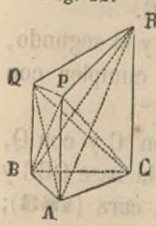
Supongamos para mayor sencillez, colocadas las bases de los tetraedros en un mismo plano, y dividida su altura comun MN en un número cualquiera de partes iguales. Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los tetraedros quedarán divididos en troncos de igual altura, y cuyas bases A′B′C′ y P′Q′R′, A″B″C″ y P″Q″R″, etc., son equivalentes (**243**, corol. 2.°). Construyendo en cada tronco un prisma triangular (tomando por base la superior del tronco), los 1 y 1, 2 y 2, etc., son equivalentes (**292**, corolario), luego la suma de los prismas inscriptos en uno de los tetraedros es igual á la de los inscriptos en el otro. Dividiendo la altura en duplo, cuádruplo, etc. número de partes, y ejecutando iguales construcciones, la suma de los prismas inscriptos en el primer tetraedro permanecerá igual á la de igual número de los inscriptos en el segundo: y como por otra parte la extension de los prismas inscriptos se aproxima indefinidamente á la de los tetraedros OABC y SPQR, estos serán equivalentes [**51**, (*) teorema].

294. *Llámase* PRISMA TRUNCADO *la parte de un prisma comprendida entre una de sus bases y un plano que le corta oblícuamente á esta.*

295. TEOREMA 5.° *Todo prisma triangular truncado* ABCPQR (fig. 229) *es equivalente á tres tetraedros* PABC, QABC *y* RABC, *que tienen por bases una base* ABC *del prisma, y cuyos vértices son los vértices* P, Q, R *de la otra base del mismo.*

Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC, y otro por el mismo punto P y por la diagonal BR de la cara BQRC, queda el prisma truncado dividido en los tetraedros

Fig. 229



PABC, PBCR, PBQR.

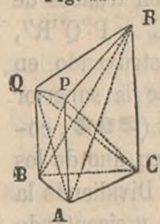
El primero de estos tetraedros cumple con las condiciones del teorema.

El segundo PBCR y el ABRC tienen la base comun BRC, y sus vértices en los puntos P y A equidistantes de esta base; luego son equivalentes (**293**): pero el ABRC, tomando por vértice R, es el RABC; luego el segundo tetraedro cumple tambien con las condiciones del teorema.

El tercer tetraedro PBQR es equivalente al ABQC, porque tienen iguales alturas, y las bases BQC y BQR son equivalentes (**146**, corol.): pero el ABQC, tomando por vértice el punto

Q, es QABC; luego el tercer tetraedro cumple del mismo modo las condiciones del teorema.

Fig. 229.



Luego el prisma truncado ABCPQR es equivalente á los tres tetraedros PABC, RABC y QABC, que tienen la misma base ABC que el prisma y cuyos vértices se hallan en los vértices P, Q, R de la otra base.

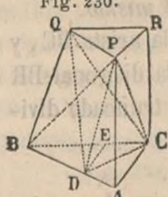
Corol. *Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Porque el teorema anterior es cierto, cualquiera que sea la posicion de las bases, y en el prisma los tres tetraedros á que equivale, tienen la misma base que él y la misma altura, puesto que todos los puntos de una de las bases equidistan de su paralela (**206**, corol.); luego los tres tetraedros son equivalentes (**293**); luego cada uno de ellos es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.

296. Teorema 6.° *Todo tetraedro truncado* ABCPQR (figura 230) *es equivalente á tres tetraedros* PABC, CPQR *y* QBDC, *que tienen la misma altura que el tronco, y cuyas bases son la base mayor del mismo tronco, la menor y la* BDC, *media proporcional entre ellas.*

Haciendo pasar un plano por el vértice P y por la arista BC, y otro por el mismo punto P y por la diagonal QC de la cara BQRC, se tiene el tronco del tetraedro dividido en los tres tetraedros

Fig. 230.



PABC, PQRC, PQBC.

El primero de estos tetraedros y el segundo, que se puede expresar por CPQR, cumplen con las condiciones del teorema.

Trazando la PD paralela á QB, y uniendo D con C y con Q, el tercer tetraedro PQBC y el QBDC tienen comun la base QBC y los vértices P y D en la recta PD, paralela á esta cara (**183**); luego tienen igual base y altura, luego son equivalentes.

Solo, pues, resta demostrar que el triángulo BDC es una media proporcional entre la base mayor ABC y la menor PQR.

Al efecto trácese la recta DE, paralela á AC, y el triángulo BED es igual al PQR (**92**, 3.°). Los triángulos BDC y BDE, cuyas bases BC y BE están en línea recta y cuyos vértices están en el punto D, tienen la misma altura, luego son proporcionales á sus bases (**151**, corol.); luego

$$\frac{BDC}{BDE}=\frac{BC}{BE}:$$

por igual razon los triángulos BCD y BCA nos dan

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BA}{BD}: \text{ pero } (\mathbf{97}) \frac{BC}{BE}=\frac{BA}{BD};$$

luego las dos primeras proporciones tienen una razon igual; luego (Alg., **230**)

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BDC}{BDE}:$$

y como BDE = PQR, resulta al fin

$$\frac{ABC}{BDC}=\frac{BDC}{PQR}.$$

ARTICULO II.

Determinacion de los volúmenes de los poliedros.

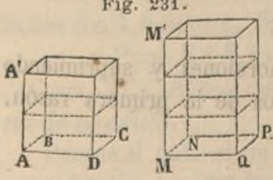
297. *Se llama* VOLÚMEN *de un cuerpo la medida de su magnitud* (**2**).

En la determinacion de los volúmenes *tomaremos siempre por unidad un cubo cuya arista sea la unidad de longitud.*

298. TEOREMA 1.° *Dos paralelepípedos rectángulos* A'C *y* M'P (fig. 231) *de iguales bases* ABCD *y* MNPQ, *son proporcionales á sus alturas* AA' *y* MM'.

Distinguiremos dos casos: 1.° que las alturas sean conmensurables: 2.° que no lo sean.

Fig. 231.



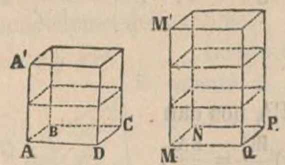
1.° Supongamos que la comun medida de las alturas se pueda colocar 2 veces sobre AA' y 3 sobre MM', y se tendrá

$$\frac{AA'}{MM'}=\frac{2}{3}.$$

Si por los puntos de division se trazan planos paralelos á las bases, los paralelepípedos propuestos quedarán divididos el primero en 2 paralelepípedos parciales, y el segundo en 3, todos iguales entre sí (**253**, corol.); luego

$$\frac{A'C}{M'P}=\frac{2}{3}.$$

Fig. 231.



De esta proporcion y de la anterior se deduce

$$\frac{A'C}{M'P} = \frac{AA'}{MM'}.$$

2.° Este caso se demuestra como su análogo del núm. **148**.

Observacion. Las aristas AA', AB, AD, que forman un ángulo triedro A de un paralelepípedo rectángulo A'C, son sus tres dimensiones; y como por otra parte el producto $AB\times AD$ representa la cara ABCD á que pertenecen las dimensiones ó factores AB y AD(**149**, corol. 1.°), resulta que el teorema anterior puede tambien expresarse de este modo:

Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen dos dimensiones iguales, son proporcionales á la tercera dimension.

Corol. *Dos paralelepípedos rectángulos, que tienen igual altura, son proporcionales á sus bases* (*), *ó dos paralelepípedos rectángulos, que tienen una dimension igual, son proporcionales á los productos de las otras dos.*

Porque llamando

P, a, b, c el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelepípedos,

P', a, b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro, y P'', a, b, c', el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelepípedo, que, como se ve, tenga dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y dos iguales tambien á otras dos del segundo, se tendrá

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'} \text{ y } \frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'};$$

de donde multiplicando estas dos proporciones y suprimiendo el factor P'', comun á los dos términos de la primera razon, resulta

$$\frac{P}{P'} = \frac{b\times c}{b'\times c'}.$$

299. Teorema 2.° *Dos paralelepípedos rectángulos cua-*

(*) Esto es, á las áreas de las superficies de sus bases. Otro tanto debe entenderse siempre que una base ó seccion se haya de comparar con otra ó multiplicarse por la longitud de una línea.

lesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, ó á los productos de sus tres dimensiones.

Llámese, de una manera análoga al corol. anterior,

P, a, b, c, el volúmen y las tres dimensiones de uno de los paralelepípedos,

P′, a', b', c' el volúmen y las tres dimensiones del otro y

P″, a', b, c el volúmen y las tres dimensiones de un tercer paralelepípedo, que tenga, como se ve, dos dimensiones iguales á otras dos del primero, y una igual á otra del segundo, y se tendrá (**298**, obs.)

$$\frac{P}{P''}=\frac{a}{a'},$$

y tambien (**298**, corol.) $\frac{P''}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}$; de donde

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times c}{a'\times b'\times c'}.$$

Corol. 1.° Si suponemos que P′ es la unidad de medida del paralelepípedo P, el primer quebrado representa el volúmen de este paralelepípedo (**2**): mas en tal caso $a'=b'=c'=1$ (**297**); luego en dichas hipótesis se tiene

$$P=a\times b\times c.$$

Luego *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura, ó al producto de sus tres dimensiones.*

Así, el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 4,6 metros, 3,24 id. y 6 id., será

$$P=4{,}6\times 3{,}24\times 6=89{,}424 \text{ metros cúbicos.}$$

Corol. 2.° *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista.*

Porque el cubo es un paralelepípedo rectángulo, cuyas aristas son todas iguales (**257**).

300. Teorema 3.° *El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Todo paralelepípedo se puede convertir en otro equivalente rectángulo de igual altura y base equivalente (**291**): el volúmen de este es igual al producto de su base por su altura (**299**, corolario 1.°); luego el de un paralelepípedo cualquiera será tambien igual al producto de la base por la altura.

301. Teorema 4.° *El volúmen de un prisma triangular es igual al producto de su base por su altura.*

Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de igual altura y dupla base (**292**): el volúmen del paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura; luego el del prisma será tambien igual al producto de su base por su altura.

Corol. 1.° *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Porque trazando diagonales desde dos vértices homólogos de las bases á todos los demás, y haciendo pasar por ellas planos, el prisma quedará dividido en tantos triangulares de igual altura, como triángulos se hayan formado en una de las bases: el volúmen de cada prisma triangular se halla multiplicando la base por la altura; luego el del prisma total será igual á su altura, que es la altura comun de los triangulares, por su base, que es la suma de las bases de los triangulares.

Corol. 2.° *Dos prismas de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*

302. Teorema 5.° *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Todo tetraedro es la tercera parte de un prisma de igual base y altura (**295**, corol.): el volúmen del prisma es igual al producto de su base por su altura (**301**, corol. 1.°); luego el del tetraedro será igual al tercio del producto de su base por su altura.

Corol. 1.° *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Se deduce como el corol. 1.° del número anterior.

Corol. 2.° *Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

303. Teorema 6.° *El volúmen de un prisma triangular truncado es igual al tercio del producto de una de sus bases por la suma de las tres perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra.*

Llamando B una de la bases, a, a', a'' las perpendiculares bajadas sobre ella desde los vértices de la otra, los volúmenes de los tetraedros á que el prisma equivale (**297**), serán (**302**)

$$\frac{1}{3}B\times a, \quad \frac{1}{3}B\times a', \quad \frac{1}{3}B\times a'',$$

cuya suma, que es evidentemente el volúmen del prisma truncado, será

$$\frac{1}{3}B(a+a'+a'').$$

COROL. 1.° *El volúmen de un prisma triangular truncado y recto con relacion á una de las bases, es igual al tercio del producto de esta base por la suma de las tres aristas.*

Porque en este caso las tres aristas son las alturas respectivas de los tetraedros en que se considera descompuesto.

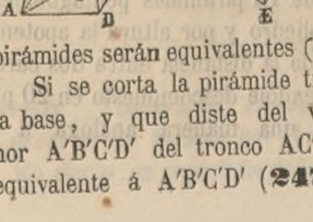
COROL. 2.° *El volúmen de un prisma triangular truncado cualquiera, es tambien igual al tercio del producto de una seccion perpendicular á las aristas por la suma de estas.*

Porque la seccion le divide en dos rectos, de los que esta es la base comun, y la suma de las seis aristas componen las tres del prisma dado.

304. TEOREMA 7.° *El volúmen de un tetraedro truncado es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas* (**296** *y* **302**).

COROL. 1.° *El volúmen de un tronco de pirámide cualquiera* AC′ (fig. 232) *es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Fig. 232.

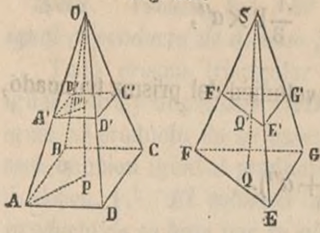


Porque completando la pirámide OABCD, y construyendo otra triangular SEFG, de igual altura y base equivalente á la de la 1.ª, estas dos pirámides serán equivalentes (**302**, corol. 2.°).

Si se corta la pirámide triangular por un plano paralelo á la base, y que diste del vértice S tanto como la base menor A′B′C′D′ del tronco AC′ dista de O, la seccion E′F′G′ es equivalente á A′B′C′D′ (**247**, corol. 2.°); luego las pirámides deficientes son tambien equivalentes (**302**, corol. 2.°).

Luego los troncos AC′ y EG′, diferencias entre las pirámides

Fig. 232.



totales y las respectivas deficientes, son equivalentes.

El volúmen de EG′ es igual al producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y media proporcional entre ellas; luego el de AC′ será del mismo modo igual al producto de su altura, que es la misma que la del tronco de tetraedro, por la suma de sus bases, equivalentes á la del mismo, y una media proporcional entre ellas, igual evidentemente á la media proporcional entre las del tronco del tetraedro.

Corol. 2.° *Dos troncos de pirámide, de igual altura y bases equivalentes, son equivalentes.*

Ejemplo. **¿Qué volúmen tiene un tronco de pirámide, cuya base mayor son 10,20 metros cuadrados, la menor 6,50 id. y la altura 4,1 metros?**

La media proporcional entre las bases será (Alg. **180**)

$$m = \sqrt{10,20 \times 6,50} = 8,14 \text{ metros cuadrados};$$

y por consiguiente el volúmen de tronco es

$$V = \frac{1}{3} \times 4,1 \times (10,20 + 6,50 + 8,14) = 33,948 \text{ met. cúb.}$$

303. Los volúmenes de los cinco poliedros regulares se hallan: el del *tetraedro* regular, como el de un tetraedro cualquiera (**302**); el del *cubo*, como se ha dicho (**299**, corol. 2.°): el del *octaedro* suponiéndole descompuesto en dos pirámides, cuya base comun es un cuadrado que tiene por lado una arista, y cuya altura es la mitad de la distancia entre dos vértices opuestos; el del *dodecaedro*, considerándole formado de 12 pirámides pentagonales, que tienen por base una cara del poliedro y por altura la apotema (**272**, corol. 2.°) ó sea la mitad de la distancia entre dos caras opuestas; y el del *icosaedro*, suponiéndole descompuesto en 20 pirámides regulares é iguales, de una manera análoga á la anterior.

ARTÍCULO I.

Determinacion de los volúmenes de los cuerpos de revolucion.

306. TEOREMA 1.° *El volúmen de un cilindro cualquiera es igual al producto de su base por su altura* (**269**, y **301** corolario 1.°)

OBSERVACION. Si el cilindro fuese circular, llamando r el rádio y a la altura, la fórmula de su volúmen sería

$$C=\pi r^2 a.$$

EJEMPLO. **¿Cuál es el volúmen de un cilindro circular, cuyo rádio es 30 centímetros y 52 su altura?**

$C=3,14159\times 30^2\times 52=14703$ centím. cub. próximamente.

307. TEOREMA 2.° *El volúmen de un cono cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura* (**267** y **302** corolario 1.°).

OBSERVACION. Si el cono es circular, llamando r el rádio y a la altura, la fórmula de su volúmen es

$$C=\frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

308. TEOREMA 3.° *El volúmen de un tronco de cono es igual al tercio del producto de su altura por la suma de las bases mayor, menor y una media proporcional entre ellas.*

Todo cono truncado se puede considerar como una pirámide truncada de infinito número de caras; luego su volúmen será igual al tercio del producto, etc. (**304**, corol. 1.°).

OBSERVACION. Si el tronco de cono fuese circular, llamando r, r' los rádios y a su altura, la fórmula de su volúmen sería

$$T=\frac{1}{3}\left(\pi r^2+\pi r'^2+\sqrt{\pi r^2\times\pi r'^2}\right)\times a=\frac{1}{3}\pi(r^2+r'^2+rr')\times a,$$

$$T=\frac{1}{3}\pi a(r^2+r'^2+rr').$$

309. TEOREMA 4.° *El volúmen de la esfera es igual al tercio del producto de su área por el rádio.*

En efecto, la superficie de la esfera se puede considerar como una superficie poliédrica de infinito número de caras; si suponemos unidos los vértices de estas caras con el centro de la esfera, esta quedará dividida en un número infinito de pirámides, cuya altura es el rádio de la misma esfera: el volúmen de cada pirámide es el tercio del producto de su base por su altura; luego el de la esfera será igual al tercio del producto de su área, que es la suma de las bases infinitamente pequeñas de las pirámides, por el rádio, altura comun de estas.

Observacion. Llamando r el rádio de la esfera, la fórmula de su volúmen será

$$E=\frac{1}{3}\times 4\pi r^2\times r=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Ejemplo. **¿Cuál es el volúmen de la tierra, suponiéndola esférica y de un rádio de 1142 leguas?**

V. de T. $=\frac{4}{3}\times 3{,}14159....\times 1142^3=6\,238\,596\,735$ leg. cúb. próxim.

310. *Llámase* sector esférico *la parte de esfera engendrada por un sector cualquiera del semicírculo generador de la misma esfera.*

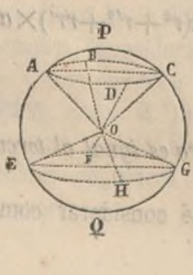
Corol. *El volúmen de un sector esférico es igual al tercio del producto del área de la zona, correspondiente al sector, por el rádio.*

311. *Se llama* segmento esférico *la parte de esfera comprendida por una zona y el plano ó planos que determinan la base ó bases de esta.*

El plano ó planos que le forman, se llaman base *ó* bases *del segmento.*

Corol. El volúmen de un segmento PABCD (fig. 233) de una base y menor que la semiesfera, es igual al volúmen del sector OAPC ménos el del cono OABCD: el del segmento QABCD, de una base tambien y mayor que la semiesfera, es igual al del sector OAQC más el del cono OABCD; y el del segmento ABCDEFGH de dos bases, es igual á la diferencia de los segmentos PEFGH y PABCD de una base.

Fig. 233.



312. Para determinar el volúmen de cuerpos no comprendidos en lo que precede de este artículo y del anterior, se dividen exacta ó aproximadamente en otros cuyos volúmenes se sabe hallar: se suman estos volúmenes, y la suma será exacta ó aproximadamente el volúmen pedido.

ARTÍCULO IV.

Comparacion de los volúmenes de los cuerpos semejantes.

313. TEOREMA 1.° *Los volúmenes de dos tetraedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Sean los tetraedros OABC y O'A'B'C' (fig. 234): sus volúmenes serán (**302**)

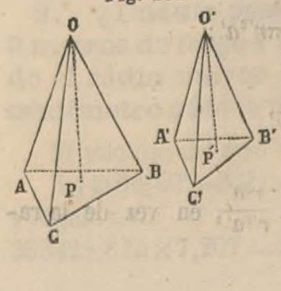
$$\frac{1}{3}\times ABC\times OP \quad y \quad \frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P';$$

de donde
$$\frac{\frac{1}{3}\times ABC\times OP}{\frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P'}=\frac{ABC\times OP}{A'B'C'\times O'P'},$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{ABC\times OP}{A'B'C'\times O'P'}$ en vez de la razon componente $\frac{ABC}{A'B'C'}$ su igual (**264**, corol.) $\frac{OP^2}{O'P'^2}$ se tiene (Alg. **175**, corol.)
$$\frac{\frac{1}{3}\times ABC\times OP}{\frac{1}{3}\times A'B'C'\times O'P'}=\frac{OP^3}{O'P'^3} \quad [a].$$

Por otra parte, de
$$\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{OP^2}{O'P'^2}$$

Fig. 234.



y de (**161**) $\frac{ABC}{A'B'C'}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$, se deduce (Alg. **183**)
$$\frac{OP^2}{O'P'^2}=\frac{AC^2}{A'C'^2}$$
y tambien (Alg. **182**, 4.ª)
$$\frac{OP^3}{O'P'^3}=\frac{AC^3}{A'C'^3},$$

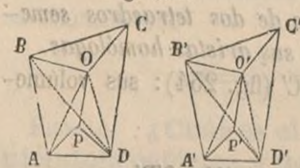
de cuya proporcion y de la [a] resulta al fin

$$\frac{\frac{1}{3}ABC\times OP}{\frac{1}{3}A'B'C'\times O'P'}=\frac{AC^3}{A'C'^3}.$$

314. Teorema 2.° *Los volúmenes de dos poliedros semejantes* OPABCD *y* O'P'A'B'C'D' (fig. 235) *son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Estos poliedros se pueden dividir en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos (**265**, rec.) OABD y O'A'B'D', OAPD y O'A'P'D', etc., luego (**313**)

Fig. 235.



$$\frac{OABD}{O'A'B'D'}=\frac{AB^3}{A'B'^3} \text{ y } \frac{OAPD}{O'A'P'D'}=\frac{AD^3}{A'D'^3}\ldots$$

Estas proporciones tienen las últimas razones iguales (**261**, corol., y Alg. **182**, 4.ª), luego

$$\frac{OABD}{O'A'B'D'}=\frac{OAPD}{O'A'P'D'}=\ldots\ldots=\frac{AB^3}{A'B'^3};$$

de donde (Alg. **186**)

$$\frac{OABD+OAPD+\ldots.}{O'A'B'D'+O'A'P'D'+\ldots.}=\frac{AB^3}{A'B'^3},$$

ó, llamando V y V' los volúmenes de estos poliedros,

$$\frac{V}{V'}=\frac{AB^3}{A'B'^3}.$$

315. Teorema 3.° *Los volúmenes de dos conos semejantes* (**286**) *son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Llamando r, r' sus rádios, y a, a' sus alturas, los volúmenes de estos conos serán (**307**)

$$\frac{1}{3}\pi r^2 a \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}\pi r'^2 a';$$

de donde $$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 a}{\frac{1}{3}\pi r'^2 a'}=\frac{r^2 a}{r'^2 a'},$$

y sustituyendo en la razon compuesta $\frac{r^2a}{r'^2a'}$, en vez de la ra–

zon componente $\frac{a}{a'}$ su igual por hipótesis $\frac{r}{r'}$ resulta (Alg., **175**, corol.).

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 a}{\frac{1}{3}\pi r'^2 a'}=\frac{r^3}{r'^3}.$$

Observacion. De una manera análoga se demuestra que los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de sus rádios.

316. Teorema 4.° *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus rádios.*

Llamando r y r' sus rádios, los volúmenes de estas esferas serán (**309**, obs.)

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y} \quad \frac{4}{3}\pi r'^3;$$

de donde

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r'^3}=\frac{r^3}{r'^3}.$$

PROBLEMAS NUMÉRICOS.

317. **1.° ¿Cuál será el rádio de una esfera, cuyo volúmen es 1000 metros cúbicos?**

La fórmula del volúmen de la esfera es (**309**, obs.)

$$E=\frac{4}{3}\pi r^3; \quad \text{de donde} \quad r=\sqrt[3]{\frac{3\times E}{4\pi}};$$

y por consiguiente en el presente caso

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\times 1000}{4\times 3,14159.....}}=6,2035..... \text{ metros.}$$

2.° ¿Cuánto pesa un tubo de hierro fundido, de 3 metros de largo y 5 centímetros de grueso, teniendo el rádio mayor 40 centímetros, y pesando un centímetro cúbico del mismo hierro 7,207 gramos?

El volúmen del tubo es (**306**)

$3,14159(40^2—35^2)\times 300=353428,875$ centím. cúb.,

y el peso será

$353428,875\times 7,207=2547161,902$ gram. $=2547,162$ kilóg.

3.° Hallar la arista x de un cubo de duplo volúmen que otro cuya arista es a.

Los volúmenes de estos cubos serán (**299**, corol. 2.°) x^3 y a^3; luego segun las condiciones del problema, $x^3=2a^3$; de donde

$$x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}.$$

Observacion. Las aristas de estos cubos son inconmensurables (*).

(*) Ya se ve que el problema de la *duplicacion del cubo* no puede resolverse exactamente por el cálculo. Tampoco se consigue esto por construcciones gráficas en que solo entren arcos de círculo y líneas rectas. *Lacroix* le resuelve por la interseccion de ramas de parábolas. (V. *Traité de Trigonométrie*, pág. 259.)

FIN DE LA GEOMETRIA.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

CAPITULO I.

De las líneas trigonométricas.

PRELIMINARES.

1. Las construcciones gráficas empleadas en la resolucion de los problemas geométricos, no son tan exactas como en muchos casos sería de desear; porque la exactitud está siempre limitada por la imperfeccion de los instrumentos, y tambien por la mayor ó menor destreza del que ha de manejarlos.

Por esta razon, aunque ya hemos visto cómo en Geometría se *resuelve* un triángulo rectilíneo, esto es, *cómo se hallan tres de sus seis elementos, conocidos otros tres que le determinen* (*), volveremos ahora á insistir en la resolucion del mismo problema general, que es del mayor interés, empleando en vez de las construcciones gráficas el cálculo, el cual permite obtener los elementos incógnitos con toda la aproximacion que en cada caso puede ser necesaria. Tal es el objeto de la *Trigonometría rectilínea*.

Es, pues, la TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA *la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos por medio del cálculo.*

Este resultado se conseguiria por medio de una simple pro-

(*) V. Geometría, números **86**, **87**, **88** y **89**.

porcion, si los ángulos de los triángulos fuesen proporcionales con sus lados opuestos; pero no sucediendo así (Geometría, **95**, corol.), fué necesario inventar *un sistema de rectas, que al mismo tiempo que determinan los arcos, y por consiguiente los ángulos que estos arcos miden, son proporcionales á los lados de los triángulos á que dichos ángulos pertenecen.* De este sistema de líneas, llamadas *líneas trigonométricas*, nos vamos á ocupar al presente.

ARTICULO I.

Valor absoluto de las líneas trigonométricas.

2. *Llámase* SENO *de un arco la perpendicular bajada desde uno de sus extremos al rádio ó diámetro que pasa por el otro extremo.*

El seno del arco AM (fig. 1.ª) es MP, el de AB es BO, el de ABM′ es M′P′, el de la semicircunferencia ABA′ es *cero*, el del arco ABA′M″ es M″P′, etc.

Fig. 1.ª

COROL. 1.º *El seno de un arco* cero *es* cero, *el de un cuadrante el rádio, el de la semicircunferencia tambien es* cero, *etc.*

OBSERVACION. El menor valor absoluto del seno es *cero*; y el mayor el rádio.

COROL. 2.º *El seno de un arco* AM *es la mitad de la cuerda* MM‴ *del arco duplo.*

Porque $PM = \frac{1}{2} MM'''$ y $MAM''' = 2AM$ (Geom. **41**).

3. *Se llama* TANGENTE *trigonométrica de un arco la parte de la tangente geométrica, levantada en uno de sus extremos é interceptada entre el punto de contacto y la prolongacion del rádio ó diámetro, que pasa por el otro extremo.*

La tangente del arco AM es AT, la del arco AB *infinita*, la de ABM′ es AT′, la de la semicircunferencia ABA′ *cero*, la del arco ABA′M″ es AT, etc.

COROL. 1.º *La tangente del arco* cero *es* cero, *la del cuadrante* infinita, *la de la semicircunferencia tambien* cero, *etc.*

Observacion. El menor valor absoluto de la tangente es *cero*, y el mayor el *infinito*.

Corol. 2.º *La tangente del arco de 45º es igual al rádio.*

Porque si el arco AM es de 45º, el ángulo AOT, que mide, será de 45º; luego el ángulo ATO tambien será de 45º (Geometría, **71**, corol. 4.º); luego AT=AO (Geom., **75**, rec., corol. 1.º).

4. *Llamaremos arcos* complementarios *aquellos que sumados algebráicamente forman un cuadrante, y* suplementarios *los que forman dos.*

El complemento del arco AM es MB, el de AB es cero, el de ABM′ es —BM′, el de ABA′ es —BA′, el de ABA′M″ es —BA′M″, etc. El suplemento de AM es MBA′, el de la semicircunferencia cero, el de ABA′M″ es —A′M″, etc.

Observacion. Los complementos de los arcos que nacen en A y se cuentan en el sentido AM, tienen su orígen en B, y los suplementos de iguales condiciones en A′.

5. *Se llama* coseno (*) *de un arco el seno de su arco complementario.*

El coseno del arco AM es MQ, el de AB es cero, el de ABM′ es M′Q, el de la semicircunferencia es el rádio A′O, el de ABM′A′M″ es M″Q′, etc.

Observacion. Como QM=OP, M′Q=OP′, M″Q′=OP′, etc.; por lados opuestos de paralelógramos, resulta que

El coseno de un arco es la parte del rádio interceptada entre el pié del seno y el centro.

6. *Llámase* cotangente *de un arco la tangente de su arco complementario.*

La cotangente del arco AM es BC, la de AMB es cero, la de ABM′ es BC′, la de la semicircunferencia es infinita, la de ABA′M″ es BC, etc.

De lo expuesto en este número y precedentes se deduce que

1.º A todo arco se refieren cuatro líneas trigonométricas, dos *propias*, que son el seno y la tangente, y dos del arco

(*) La palabra *coseno* está formada de *complementi sinus*, esto es, seno del complemento. De igual modo *cotangente* se forma de *complementi tangens*, tangente del complemento.

complementario, llamadas por esta razon *colíneas*, que son el coseno y la cotangente (*).

2.° *Las líneas* PROPIAS *de un arco son las* COLÍNEAS *del complemento, y las* COLÍNEAS *de un arco son las líneas* PROPIAS *del complementario.* Así, llamando el arco x, como su complemento es 90^o-x (4), se tiene

$$\operatorname{sen} x = \cos(90^o-x), \qquad \operatorname{tg} x = \cot(90^o-x) \ (^{**}).$$
$$\cos x = \operatorname{sen}(90^o-x), \qquad \cot x = \operatorname{tg}(90^o-x).$$

3.° Cuando un arco crece desde cero hasta el cuadrante, crecen sus líneas propias y menguan sus colíneas; lo contrario sucede cuando el arco crece desde el cuadrante hasta la semicircunferencia.

ARTICULO II.

Valores relativos de las líneas trigonométricas.

7. Se ha visto (Alg., 11) que si las cantidades que tienen un modo de ser determinado se consideran como *positivas*, las que tienen un modo de ser contrario á ellas son *negativas*. Haciendo, pues, aplicacion de esto al caso presente, y considerando como positivos los arcos que tienen su orígen en A y se prolongan en el sentido AMB..., y como positivas tambien las líneas trigonométricas del arco positivo AM, menor que el cuadrante, resulta que

1.° Los arcos que tienen su orígen en A y se prolongan en el sentido AM‴B′... son *negativos*.

2.° Los senos y las tangentes que, como M‴P, M″P′ y AT′ se encuentran en la parte inferior del diámetro AA′ son negativos; y tambien lo serán los cosenos y cotangentes que, como BC′ y OP′, se hallan á la izquierda del diámetro BB′.

COROL. *Las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos en el* 1.^er^ *cuadrante son positivas: las de los que terminan en el* 2.° *son negativas, excepto el seno: de las correspondientes á arcos que terminan en el* 3.^er^ *cuadrante son negativas el seno y el*

(*) Se suelen considerar otras cuatro más, que son el *senoverso*, la *secante*, el *cosenoverso* y la *cosecante*.

(**) Los nombres seno, tangente, coseno y cotangente, se escriben abreviadamente de este modo: sen, tg, cos, cot.

coseno, y positivas la tangente y cotangente: las de los que terminan en el 4.° son negativas, excepto el coseno.

8. Teorema 1.° *Las líneas trigonométricas de un arco negativo —AM‴ son iguales en valor absoluto á las de otro positivo +AM, de la misma longitud que el primero; pero tienen signo contrario exceptuando el coseno, que es en todo igual para los dos arcos.*

Los senos MP y M‴P son iguales en longitud (**2**, corol. 2.°); pero positivo el primero y negativo el segundo (**7**, 2.°).

Fig. 1.ª

Los triángulos AOT y AOT′ tienen AO comun, los ángulos en A rectos, y el AOT=AOT′, porque tienen por medidas los arcos AM y AM‴, iguales en valor absoluto por hipótesis; luego dichos triángulos son iguales; luego las tangentes AT y AT′ tambien lo serán en longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (**7**, 2.°).

El coseno OP es comun á los dos arcos y positivo para ambos.

Los triángulos BOC y BOC′ tienen OB comun, los ángulos en B rectos: y como AM es igual en longitud á AM‴ y este lo es con A′M′, los arcos AM y A′M′ son iguales en longitud; luego sus complementos BM y BM′ tambien lo serán, luego el ángulo BOC=BOC′. Luego dichos triángulos son iguales, luego las cotangentes BC y BC′ son de igual longitud; mas la primera es positiva y la segunda negativa (**7**, 2.°).

Llamando x un arco cualquiera, este teorema se expresa algebráicamente así:

$$\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x,\qquad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x,$$
$$\cos(-x)=+\cos x,\qquad \cot(-x)=-\cot x.$$

Corol. $\operatorname{sen}(90^\circ+x)=$[**6**, 2.°] $\cos(-x)=\cos x$,
$\cos(90^\circ+x)=$[**6**, 2.°] $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$.

9. Teorema 2.° *Las líneas trigonométricas de dos arcos* AM *y* ABA′M″, *que tienen un extremo* A *comun y los otros dos* M *y* M″ *en un mismo diámetro, son iguales; pero el seno y coseno llevan signo contrario en los dos arcos.*

AT es la tangente de estos dos arcos y BC la cotangente. La igualdad de los triángulos OPM y OP′M″ nos da PM=P′M″ y

OP = OP′; pero PM es de signo contrario á P′M′ y OP á OP′ (**7**, 2.°); luego el teorema es cierto para dichos arcos.

Si los arcos fuesen ABM′ y ABA′B′M‴, la tangente AT′ y la cotangente BC′ serían comunes á los dos, y la igualdad de los triángulos OP′M′ y OPM‴ nos daría los senos y cosenos respectivamente iguales y de signo contrario.

Lo mismo se verifica en otros dos arcos cualesquiera de iguales condiciones, aunque uno sea positivo y otro negativo como ABM′ y AM‴, ó los dos negativos, como AM‴ y AB′A′M′.

Llamando, pues, x un arco cualquiera, el otro arco será $180°+x$; y este teorema se expresa algebráicamente así:

$$\text{sen}\,(180°+x) = -\text{sen}\,x, \qquad \text{tg}\,(180°+x) = +\text{tg}\,x,$$
$$\cos\,(180°+x) = -\cos\,x, \qquad \cot\,(180°+x) = +\cot\,x.$$

Corol. 1.° *Las líneas trigonométricas de un arco no varian de valor absoluto, aunque de dicho arco se reste una semicircunferencia; pero el seno y el coseno llevan signo contrario en los dos arcos.*

Fig. 1.ª

Corol. 2.° *Las líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario; excepto el seno, que es igual en todo para los dos arcos.*

Porque mudando el signo á la x en las fórmulas del teorema, y teniendo presente que cuando el arco cambia de signo todas sus líneas trigonométricas varian de signo tambien, excepto el coseno (**8**), resulta

$$\text{sen}\,(180°-x) = +\text{sen}\,x, \qquad \text{tg}\,(180°-x) = -\text{tg}\,x,$$
$$\cos\,(180°-x) = -\cos\,x, \qquad \cot\,(180°-x) = -\cot\,x.$$

10. Teorema 3.° *Las líneas trigonométricas de los arcos que se diferencian en una, dos, tres, etc., circunferencias, son iguales.*

Haciendo que estos arcos tengan un mismo orígen, coincidirán sus extremos, y por lo tanto tienen evidentemente iguales líneas trigonométricas.

Corol. 1.° *Las líneas trigonométricas de un arco no varían aunque se le agreguen ó resten de él una ó más circunferencias.*

Corol. 2.° *Una línea trigonométrica dada corresponde á infinitos arcos.*

11. Teorema 4.° *Todo arco ± x se puede reducir á otro contenido en el primer cuadrante, cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco dado.*

En efecto, si el arco dado es negativo se convierte en positivo, con lo que el valor absoluto de sus líneas trigonométricas no varía (**8**). Réstense del arco $+x$ todas las circunferencias que contenga, y el resto $+x'$ tendrá iguales líneas trigonométricas que $+x$ (**10**, corol. 1.°). Si $+x'$ fuese mayor que una semicircunferencia, réstese ésta de él, y el resto $+x''$ tendrá sus líneas trigonométricas de igual valor absoluto que $+x'$ (**9**, corol. 1.°), y por consiguiente que $+x$. Si $+x''$ fuese mayor que un cuadrante, tómese su suplemento $180°-x''$, ó lo que es igual, réstese de $180°$, y las líneas trigonométricas de este resto $+x'''$ serán iguales en valor absoluto á las de $+x''$ (**9**, corol. 2.°) y por consiguiente á las de $+x'$ y á las de $+x$: luego las líneas trigonométricas del arco $+x'''$, menor que un cuadrante, son iguales en valor absoluto á las del arco primitivo $\pm x$.

Observacion. El signo de cada línea trigonométrica se deduce fácilmente de los principios expuestos en los cuatro números precedentes.

EJEMPLOS.

1.° $\text{sen } 3568° = \text{sen}(360° \times 11 + 328°) = $ [**10**, corol. 1.°]
$\text{sen } 328° = $ [**9**, corol. 1.°] $-\text{sen}(328° - 180°) = -\text{sen } 148° = $ [**9**, corol. 2.°]
$-\text{sen}(180° - 148°) = -\text{sen } 32°$.

2.° $\text{tg}(-3833°) = $ [**8**] $-\text{tg } 3833° = -\text{tg}(360° \times 10 + 233°) = $ [**10**, corol. 1.°]
$-\text{tg } 233° = $ [**9**, corol. 1.°] $-\text{tg}(233° - 180°) = -\text{tg } 53°$.

ARTÍCULO III.

Relacion entre las líneas trigonométricas de un mismo arco.

12. Sea el arco AM, menor que un cuadrante, sus líneas trigonométricas serán: MP el seno, OP el coseno, AT la tangente y BC la cotangente.

El triángulo rectángulo OMP nos da (Geom. **111**, 1.°)

$$\text{PM}^2 + \text{PO}^2 = \text{OM}^2$$

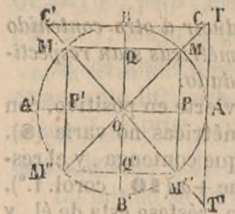
ó, llamando x este arco y r el rádio,

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = r^2.$$

De la semejanza de OPM y OAT, resulta

$$\frac{\text{OP}}{\text{MP}} = \frac{\text{OA}}{\text{AT}} \quad \text{ó} \quad \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{r}{\text{tg } x};$$

Fig. 1.ª



de donde $\quad tg x = \dfrac{\text{sen} x \times r}{\cos x}$.

Los triángulos OPM y OBC tambien son semejantes, porque además de tener los ángulos en P y en B rectos, tienen MOP=OCB por alternos entre paralelas; luego

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BC}{OB} \quad \text{ó} \quad \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \frac{\cot x}{r};$$

de donde $\qquad \cot x = \dfrac{\cos x \times r}{\text{sen}\, x}$.

Observacion. Haciendo $r=1$ en las fórmulas anteriores, se convierten respectivamente en

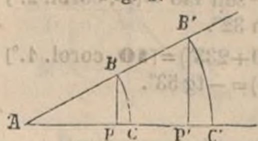
$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad [1],$$

$$tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \qquad [2],$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \qquad [3].$$

Recíprocamente, si se quisiese restablecer el rádio en alguna fórmula trigonométrica, de donde hubiese desaparecido por haberle hecho igual á la unidad, se observará que describiendo desde el vértice A (fig. 2.ª) de un ángulo dos arcos BC y B'C', y trazando sus senos correspondientes BP y B'P', la semejanza de los triángulos ABP y AB'P', nos da

Fig. 2.ª



$$\frac{BP}{AB} = \frac{B'P'}{AB'}.$$

Suponiendo ahora los rádios AB=1, AB'=r, y llamando x el número de grados de los arcos BC y B'C' y z la longitud del seno BP, se tendrá

$$z = \frac{\text{sen}\, x}{r};$$

luego en vez de z ó sea *sen x*, se deberá sustituir $\dfrac{\text{sen}\, x}{r}$, y como otro tanto puede demostrarse de las demás líneas trigonométricas, resulta que

Para restablecer el rádio en una fórmula trigonométrica, *se sustituye en vez de cada línea la misma partida por el rádio.*

Así, restableciendo el rádio en la fórmula [1], se tendria

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{r}\right)^2+\left(\frac{\cos x}{r}\right)^2=1 \text{ ó } \frac{\operatorname{sen}^2 x}{r^2}+\frac{\cos^2 x}{r^2}=1\,;$$

y por último $\qquad \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=r^2,$

que es la fórmula de donde la [1] provino.

13. Las fórmulas obtenidas en el número anterior, en el supuesto de que el arco es menor que un cuadrante, son generales y ciertas por lo tanto para otro arco cualquiera.

Tomemos una de dichas fórmulas, por ejemplo la [2], y vamos á demostrar que, cualquiera que sea el arco x: 1.° los dos miembros de esta ecuacion tienen igual valor absoluto: 2.° tambien tienen el mismo signo.

1.° Reduciendo el arco x á otro x' contenido en el primer cuadrante (**11**), se tiene para x' (**12**)

$$\operatorname{tg} x'=\frac{\operatorname{sen} x'}{\cos x'};$$

y como las líneas trigonométricas de x' tienen respectivamente igual valor absoluto que las de x, $\operatorname{tg} x$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ son iguales en valor absoluto.

2.° $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen el mismo signo en el 1.^{er} cuadrante, contrario en el 2.°, el mismo en el 3.°, y contrario en el 4.° (**7**, corol.); luego el miembro $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es positivo en el 1.^{er} cuadrante, negativo en el 2.°, positivo en el 3.° y negativo en el 4.°: pero esto es lo que sucede á $\operatorname{tg} x$ (**7**, corol.); luego $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y $\operatorname{tg} x$ tienen el mismo signo, luego

$$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

cualquiera que sea el valor del arco x.

Lo mismo se demuestra la generalidad de las demás fórmulas.

14. Por medio de las tres ecuaciones

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1\,,\qquad \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\qquad \cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

que ligan entre sí las cuatro líneas trigonométricas, conocida una de estas se pueden determinar las restantes (Alg., **115**).

Suponiendo conocido $\operatorname{sen} x$, se tendrá

$$\cos x=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x},\quad \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}},\quad \cot x=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}.$$

OBSERVACION. Multiplicando la fórmula [2] por la [3], tambien se tiene $\operatorname{tg} x \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$; de donde

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cot x} \quad [1].$$

ARTICULO IV.

Relacion entre las líneas trigonométricas de dos arcos y las de la suma ó diferencia de los mismos.

15. PROBLEMA. **Dados los *senos* y *cosenos* de dos arcos a y b determinar el *coseno* de la diferencia de dichos arcos.**

Fig. 3.ª

Supongamos que los arcos a y b sean positivos y menores que el cuadrante, por ejemplo, $a = \mathrm{AC}$ y $b = \mathrm{AD}$ (fig. 3.ª). Trácense desde C y D las perpendiculares CP y DQ sobre el diámetro AA′, la DE paralela á este, y la cuerda CD.

El triángulo rectángulo CDE nos da (Geom. **111**, 1.º)

$$\mathrm{CD}^2 = \mathrm{CE}^2 + \mathrm{ED}^2:$$

pero evidentemente se tiene

$\mathrm{CD} = \text{cuerda}(a - b)$, $\mathrm{CE} = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b$, $\mathrm{ED} = \cos b - \cos a$;

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, resulta

$$\text{cuerd}^2(a-b) = (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 + (\cos b - \cos a)^2 =$$

$\operatorname{sen}^2 a - 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b + \cos^2 a$, ó como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ y $\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b = 1$ (**12**, obs.),

$$\text{cuerd}^2(a-b) = 2 - 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b) \quad [\mathrm{A}].$$

Suponiendo en esta ecuacion $b = 0$, se convierte en (**2**, corolario 1.º y 5.º) $\text{cuerd}^2 a = 2 - 2 \cos a$,

y cambiando en esta ecuacion a en $a - b$, resulta

$$\text{cuerd}^2(a-b) = 2 - 2 \cos(a-b);$$

de esta última ecuacion y de la [A], que tiene comun el primer miembro, se deduce

$$2 - 2\cos(a-b) = 2 - 2(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b);$$

y despejando $\cos(a-b)$

$$\cos(a-b)=\cos a \cos b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [1],$$

cuya ecuacion resuelve el problema propuesto.

Corol. 1.° $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a \cos b-\cos a \operatorname{sen} b \quad [2]$.

Porque cambiando a en $90°+a$ en la fórmula [1], se tiene

$$\cos[90°+(a-b)]=\cos(90°+a)\cos b+\operatorname{sen}(90°+a)\operatorname{sen} b,$$

ó (**8**, corol.)

$$-\operatorname{sen}(a-b)=-\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b,$$

cuya ecuacion, cambiados los signos, da la que se quiere deducir.

Corol. 2.° $\cos(a+b)=\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad [3]$,

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b \quad [4]$.

Porque cambiando el signo al arco b en las fórmulas [1] y [2], y teniendo presente que *sen b* cambia tambien de signo (**8**), resultan las del corolario.

Observacion. Por medio de las cuatro fórmulas precedentes fácilmente se hallarian otras análogas para $\operatorname{tg}(a\pm b)$ y $\cot(a\pm b)$.

Generalizacion de las fórmulas precedentes.

16. Supongamos ahora que los arcos a y b sean de una magnitud y signo cualquiera. Dándoles un orígen comun A, cualquiera que sea la posicion de los puntos C y D en que están los otros extremos, se puede repetir la construccion anterior, y siempre quedará formado el triángulo CDE.

Para demostrar, pues, la generalidad de la fórmula [A], y por consiguiente la de las cuatro deducidas de ella, basta probar que en todo caso se verifica

1.° $CD=\text{cuerda}\,(a-b)$,

2.° $CE=\pm(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b)$,

3.° $ED=\pm(\cos b-\cos a)$.

1.° El arco a se compone del menor arco positivo AC, que va desde A á C, aumentado de cierto número de circunferencias positivas ó negativas: de igual manera el arco b es igual al menor arco positivo AD más ó ménos cierto número de circunferencias; luego la diferencia $a-b$ de estos dos arcos es el arco $DC=AC-AD$ más ó ménos cierto número de circunferencias. Si se toma el punto A como orígen de este arco, será necesario hacerle dar cierto número de vueltas en uno ú otro sentido; tomar despues un arco $AH=CD$ en el sentido

AHDCB......, y H será el extremo del arco $a-b$; luego la cuerda AH de este arco será igual á la del arco CD.

2.° Si los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro AA′, es evidente que CE$=\pm$(sen a—sen b), tomando el signo + cuando esté C superior á D y el — cuando inferior; si están á lado diferente del diámetro, CE es una suma CP+DQ, pero entónces uno de ellos es positivo y otro negativo; luego tambien se verifica en este caso que CE$=\pm$(sen a—sen b).

3.° Del mismo modo se demuestra que la igualdad CD $=\pm$(cos$b$—cos$a$), evidente cuando los puntos C y D están en un mismo lado del diámetro BB′, se verifica de igual modo cuando se hallan á diferente lado de dicho diámetro, tomando el signo + cuando C esté á la izquierda de D.

Luego las fórmulas deducidas son generales (*).

Consecuencias de las fórmulas anteriores.

17. Haciendo $a=b$ en las fórmulas [3] y [4] del número anterior, se tiene

$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a,$$
$$\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a;$$

y suponiendo en estas $2a=A$, de donde $a=\frac{1}{2}A$, resulta

$$\cos A=\cos^2\frac{1}{2}A-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A \quad [1],$$

$$\operatorname{sen} A=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A \quad [2].$$

Tambien se tiene (**12**, obs.)

$$1=\cos^2\frac{1}{2}A+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A,$$

de cuya ecuacion y de la [1] se deduce (Alg. **93**)

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{1+\cos A}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{2}$$

de donde $$2\cos^2\frac{1}{2}A=1+\cos A \quad [3]$$

y $$2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=1-\cos A \quad [4].$$

(*) Esta elegante demostracion está tomada de la *Trigonometria de MM. Rouche y Lacour*, que á su vez la han tomado de *Mr. Sarrus*.

18. La suma de las fórmulas [4] y [2] del núm. **15** nos da
$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen} a \cos b$$
y la diferencia
$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cos a \operatorname{sen} b:$$
dividiendo ordenadamente estas igualdades y observando que (**12**, obs.) $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$, resulta
$$\frac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)}=\frac{2\operatorname{sen} a\cos b}{2\cos a \operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}:\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}=\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b};$$
suponiendo en esta ecuacion $a+b=A$ y $a-b=B$, de donde $a=\frac{1}{2}(A+B)$ y $b=\frac{1}{2}(A-B)$, se tiene al fin
$$\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)} \quad [1].$$

CAPITULO II.

De las tablas trigonométricas.

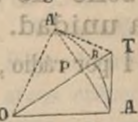
ARTÍCULO I.

Determinacion de *sen* 1′ en valores del rádio.

19. Teorema 1.° *Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente.*

Sea el arco AB (fig. 4.ª). Trácense los rádios OA y OB, el seno AP y la tangente AT: dóblese la figura AOT hácia la parte superior, sirviendo de eje OT, y en la figura total resultante AOA′T se tendrá (Geom. **5** y **138**)
$$AA' < ABA' < ATA',$$

Fig. 4.ª



ó partiendo por 2 y llamando x el arco AB,
$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

20. Teorema 2.° *La diferencia entre un arco del primer* *cuadrante y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Sea x el arco menor que el cuadrante, y se tendrá (**19**)

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x \quad \text{ó (\textbf{12}, obs.)} \quad \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x;$$

de donde
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}x > \frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x;$$

y multiplicando esta desigualdad por $2\cos\frac{1}{2}x$, resulta

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x > x\cos^2\frac{1}{2}x:$$

mas
$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \operatorname{sen}x\ (\textbf{17}),$$
y
$$\cos^2\frac{1}{2}x = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x\ (\textbf{14});$$

luego
$$\operatorname{sen}x > x\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x\right).$$

Sustituyendo en vez de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ el arco $\frac{1}{2}x$, que es mayor que el seno (**19**), el sustraendo del segundo miembro aumenta; luego el resto, ó sea el segundo miembro, disminuye; luego con mayor razon se tiene

$$\operatorname{sen}x > x\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen}x > x - \frac{1}{4}x^3,$$

ó
$$x - \frac{1}{4}x^3 < \operatorname{sen}x;$$

y sumando con los dos miembros de esta última desigualdad $\frac{1}{4}x^3 - \operatorname{sen}x$, resulta al fin

$$x - \operatorname{sen}x < \frac{1}{4}x^3.$$

21. Problema. **Calcular el valor del seno de un minuto, suponiendo el rádio igual á la unidad.**

La longitud de la circunferencia, que tiene 1 por rádio, es (Geom. **137**, corol. 2.°) $c = 2\pi$; de donde $\frac{1}{2}c = \pi$ ó $180° = \pi$; luego la longitud del arco de $1'$ será

$$\text{arco de } 1' = \frac{\pi}{180° \times 60} = \frac{3{,}14159.....}{10800} = 0{,}000\ 290\ 888\ 208\ 6......$$

La longitud de este arco es, pues, menor que 0,0003; luego si se supone

$$\text{sen } 1' = \text{arco } 1'$$

el error cometido es menor (**20**) que

$$\frac{1}{4}(0,0003)^3 < 0,000\,000\,000\,007:$$

y como este error solo afecta la cifra decimal del órden duodécimo, resulta que el valor del seno con once cifras decimales es

$$\text{seno } 1' = 0,000\,290\,888\,20.$$

ARTÍCULO II.

Formacion de las tablas.

22. Las tablas trigonométricas *naturales* contienen al lado de cada arco desde 0 hasta 90°, contados de minuto en minuto ó de 10 en 10 segundos, los valores de las líneas trigonométricas correspondientes. No es necesario que se extiendan á mayor número de grados, porque ya se ha dicho (**11**) que todo arco puede reducirse á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco primitivo, pudiendo tambien en cada caso determinarse el signo correspondiente (**11**, obs.). Así

$$\text{sen } 145° = \text{sen } 35°, \quad \text{tg } 98° = -\text{tg } 82°, \text{ etc.}$$

Debe advertirse igualmente que basta calcular las líneas trigonométricas de los arcos comprendidos desde 0 á 45° inclusive; pues las líneas *propias* y *colíneas* de los arcos mayores que 45° y menores que 90°, son las *colíneas* y líneas *propias* de sus arcos complementarios, necesariamente menores que 45° (**6**, 2.°). Así

$$\text{sen } 60° = \cos 30°, \quad \cos 72° = \text{sen } 18°, \text{ etc.}$$

Supondremos que en las tablas, de cuya formacion se trata, los arcos crecen de minuto en minuto; de manera que segun lo expuesto, el problema que nos proponemos resolver se reduce á la determinacion de las líneas trigonométricas de los arcos de 1′, 2′, 3′, etc., hasta 45°.

Veamos cómo puede esto conseguirse.

23. Conociendo el valor de sen 1′ (**21**), el de cos 1′ se determina por la fórmula (**14**)

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x},$$

haciendo en ella $x = 1'$ y sustituyendo en vez de sen 1′ el valor hallado para este.

Los valores de los senos y cosenos de 2′, 3′, 4′, ... , 45,° se pueden calcular por medio de las fórmulas (**15**, corol. 2.°)

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

haciendo en ellas $a = 1'$ y $b = 1', 2', 3', 5', \ldots\ldots, 44°59'$.

Los valores de las tangentes y cotangentes pueden hallarse tambien por las fórmulas (**12**, obs.)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{y} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

sustituyendo en vez de sen x y cos x los valores de los senos y cosenos de 1′, 2′, 3′, ... , 45°, calculados de antemano.

24. Del modo que acabamos de exponer se pueden concebir formadas las tablas trigonométricas ***naturales*** (*); mas ejecutándose los cálculos por medio de logaritmos con mucha mayor facilidad que por los métodos ordinarios, estas tablas han sido trasformadas en otras, donde al lado de cada arco se hallan los logaritmos de sus respectivas líneas trigonométricas. Las nuevas tablas se conocen con el nombre de tablas trigonométricas *artificiales* ó simplemente de *tablas trigonométricas*, porque son las únicas de que en la práctica se hace uso.

Al ejecutar la trasformacion de que se acaba de hacer mérito, como los senos y cosenos son menores que el rádio, sucediendo otro tanto con las tangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 45°, y las cotangentes de los comprendidos entre 45° y 90°, los logaritmos de todas estas líneas trigonométricas deberán resultar negativos ó de característica negativa y mantisa positiva, en la suposicion de que el rádio sea igual á la unidad (Álg. **230**, 3.° y **239**) (**).

(*) El método expuesto sirve solo para que se vea la posibilidad de la construccion de las tablas, á fin de que los principiantes no se arredren al manejar unos libros cuya formacion es para ellos un misterio. Por lo demás existen otros métodos mucho más expeditos, cuya exposicion no es de este lugar.

(**) Por creer esto un inconveniente (que no lo es cuando se emplean lo-

ARTÍCULO III.

Uso de las tablas trigonométricas.

25. Las tablas de los logaritmos de los números van acompañadas casi siempre de las *trigonométricas:* siendo de aquellas las más conocidas entre nosotros, como ya se indicó en otro lugar, las españolas de Vazquez Queipo y Calvet, y las francesas de Callet y Lalande; otro tanto sucede con las trigonométricas.

Las de Vazquez Queipo y Lalande contienen los logaritmos de las líneas trigonométricas de los diferentes arcos del cuadrante, contados de minuto en minuto, con seis cifras decimales las primeras y con cinco ó siete las segundas. En las de Callet y Calvet los arcos aumentan de 10 en 10 segundos, y las líneas trigonométricas van expresadas con siete cifras decimales de aproximacion.

Por medio de cualquiera de ellas se resuelve el problema general: «Dado un arco ó ángulo, hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas del mismo» y su recíproco. Al efecto van precedidas de su respectiva explicacion, que sería inútil repetir aquí.

Ya hemos indicado la preferencia que para nosotros merecian las de Vazquez Queipo, calculadas en el supuesto de que el *rádio es igual á la unidad*, por cuya razon á ellas nos referiremos en los problemas que hayamos de resolver en lo sucesivo (*).

---

garitmos de mantisa positiva) las tablas que se citan, excepto las del Sr. Vazquez Queipo desde la edicion de 1867, están calculadas suponiendo el rádio igual á *diez mil millones*, esto es, $r=10^{10}$, en cuya hipótesis L. $r=10$ y C_0 L. $r=\overline{10}$ (Alg. **238** 2.ª y **246**). Ya se ve que por evitar esta dificultad imaginaria se incurre en una real, cual es la de figurar en los cálculos el logaritmo del rádio, y tener que restablecer este en las fórmulas cuando haya desaparecido por haberle hecho igual á la unidad; lo que no sucede cuando $r=1$; puesto que L. $1=0$ y C_0 L. $1=0$ (Alg. **230**, 2.º y **245**).

(*) El que quiera emplear otras tendrá en cuenta la nota precedente.

CAPÍTULO III.

De la resolucion de triángulos.

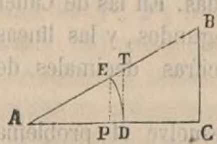
ARTÍCULO I.

Teoremas relativos á la resolucion de triángulos rectángulos.

26. TEOREMA 1.º *En todo triángulo rectángulo el rádio es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo.*

Sea el triángulo ABC (fig. 5.ª): con un rádio cualquiera describase el arco DE correspondiente al ángulo en A: trácese el seno EP, y de la semejanza de los triángulos AEP y ABC se deduce

Fig. 5.ª



$$\frac{AE}{EP}=\frac{AB}{BC}.$$

Sustituyendo en lugar de estas líneas sus valores, y expresando para mayor sencillez por a el lado BC opuesto á A, por b el opuesto á B y por c el que se opone á C (como haremos siempre en lo sucesivo), resulta que

$$\frac{r}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{a}.$$

COROL. *Suponiendo* r = 1, *un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto.*

Porque en dicha hipótesis la proporcion anterior da

$$a=c\times\operatorname{sen} A.$$

27. TEOREMA 2.º *En todo triángulo rectángulo el rádio es al coseno de un ángulo agudo, como la hipotenusa es al cateto contiguo á dicho ángulo.*

La semejanza de los mismos triángulos AEP y ABC nos da

$$\frac{AE}{AP}=\frac{AB}{AC} \quad \text{ó} \quad \frac{r}{\cos A}=\frac{c}{b}.$$

COROL. *Suponiendo* r = 1, *un cateto es igual á la hipotenusa multiplicada por el coseno del ángulo contiguo.*

Porque en esta hipótesis

$$b = c \times \cos A.$$

28. Teorema 3.° *En todo triángulo rectángulo el rádio es á la tangente de un ángulo agudo, como el cateto contiguo á dicho ángulo es al cateto opuesto.*

Trazando la tangente trigonométrica DT (en la misma figura), la semejanza de los triángulos ADT y ACB nos da

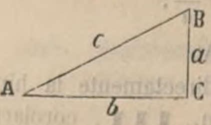
$$\frac{AD}{DT} = \frac{AC}{BC} \quad \text{ó} \quad \frac{r}{\operatorname{tg} A} = \frac{b}{a}.$$

ARTÍCULO II.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

29. Como siempre es conocido el ángulo recto en un triángulo rectángulo, basta que se conozcan dos lados ó un lado y un ángulo agudo para resolverle, ó sea para determinar los tres elementos restantes (Geom., **87**, **88** y **89**). La combinacion binaria de los cinco elementos indeterminados, sujetos á las indicadas condiciones, da lugar á los *cuatro* problemas particulares distintos, que aparecen á continuacion, donde el ángulo recto es C (fig. 6.ª).

Fig. 6.ª



	DATOS.	INCÓGNITAS.
1.°	$c, a,$	$A, B, b.$
2.°	$a, b,$	$A, B, c.$
3.°	$c, A,$	$B, a, b.$
4.°	$a, A,$	$B, c, b.$

PROBLEMAS.

30. 1.° Dada la hipotenusa c y el cateto a, determinar los ángulos agudos A, B y el otro cateto b.

El ángulo A se determina por medio de la proporcion (**26**)

$$\frac{r}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{a};$$

de donde (Alg. **257**)

$$L.\ \operatorname{sen}.\ A = L.\ a + C_0 L.\ c.$$

Las tablas darán el valor de este ángulo.

Para hallar el ángulo B se tiene (Geom. **71**, 4.°)

$$B = 90° - A.$$

El cateto b se calcula por la proporcion (**27**)

$$\frac{r}{\cos A}=\frac{c}{b} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\cos A}=\frac{c}{b};$$

de donde $\qquad$ $L.\ b=L.\ \cos A+L.\ c.$

Observacion. Tambien se puede calcular el ángulo B por la proporcion (**27**) $\frac{r}{\cos B}=\frac{c}{a}$: y despues el cateto b directamente por medio de la ecuacion (Geom., **111**, corol.)

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)};$$

de donde $\qquad$ $L.\ b=\frac{1}{2}[L.\ (c+a)+L.\ (c-a)].$

31. 2.° **Dados los catetos a y b, hallar los ángulos agudos A, B y la hipotenusa c.**

El ángulo A se determina por la proporcion (**28**)

$$\frac{r}{\operatorname{tg} A}=\frac{b}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} A}=\frac{b}{a};$$

de donde $\qquad$ $L.\ \operatorname{tg} A=L.\ a+C_0L.\ b.$

El B se halla por la igualdad $B=90°-A.$

Por último, la hipotenusa c, conocido el ángulo A, se determina por la proporcion (**26**)

$$\frac{r}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{a};$$

de donde $\qquad$ $L.\ c=L.\ a+C_0L.\ \operatorname{sen} A.$

Observacion. Tambien puede hallarse directamente la hipotenusa c por medio de la ecuacion (Geom. **111**, corolario) $c=\sqrt{a^2+b^2}$; pero esta fórmula tiene el inconveniente de no estar preparada para el cálculo logarítmico (Alg. **261**).

32. 3.° **Dada la hipotenusa c y el ángulo agudo A, determinar el otro B y los catetos a y b.**

Para hallar B se tiene $\qquad B=90°-A.$

El cateto a se calcula por la proporcion (**26**)

$$\frac{r}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{a};$$

de donde $\qquad$ $L.\ a=L.\ \operatorname{sen}.\ A+L.\ c.$

De igual manera se halla b por medio de la proporcion (**27**)

$$\frac{r}{\cos A}=\frac{c}{b}.$$

Observacion. Hallado uno de los catetos, el otro se puede determinar por la fórmula (Geom. **111**, corol.)

$$b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

33. 4.° **Dado un cateto** a **y el ángulo agudo A determinar el otro B, la hipotenusa** c **y el cateto restante** b.

$$B=90°-A.$$

La hipotenusa c se halla por la proporcion

$\frac{r}{\text{sen A}}=\frac{c}{a}$ y el cateto b por la otra $\frac{r}{\text{tg A}}=\frac{b}{a}$.

Observacion. Despues que se haya determinado el lado c ó b, se puede hallar el otro por medio de la ecuacion

$$c^2=a^2+b^2.$$

OBSERVACIONES GENERALES.

34. 1.ª Los problemas resueltos son siempre determinados y posibles, con tal que en el primero la hipotenusa sea mayor que el cateto conocido, y en los dos últimos el ángulo dado sea agudo.

2.ª Los valores hallados para las incógnitas se pueden comprobar calculando alguno de ellos por el medio indicado en la observacion respectiva, y comparando este resultado con el hallado anteriormente.

EJEMPLO.

35. Sabiendo que en un triángulo rectángulo en C, $c=300$ **y** $a=240$**, hallar los ángulos A, B y el cateto** b.

Las fórmulas que deben emplearse son (**30**)

$$\text{L. sen A}=\text{L. }a+\text{C}_0\text{L. }c,$$

$$B=90°-A,$$

$$\text{L. }b=\text{L. cos A}+\text{L. }c.$$

$$\text{L. sen A}=\begin{cases}2,380211\\ \bar{3},522879\end{cases}$$

$$\overline{\bar{1},903090}$$

$$\text{A}=53°\,7'\,48'',$$

89°	59′	60″
53	7	48
B=36°	52′	12″

$$\text{L. }b=\begin{cases}\bar{1},778152\\ 2,477121\end{cases}$$

$$\overline{2,255273}$$

$$b=180.$$

Comprobacion.

$$b=\sqrt{300^2-240^2}=180.$$

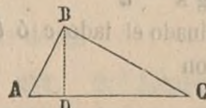
ARTÍCULO III.

Teoremas relativos á la resolucion de triángulos oblicuángulos.

36. Teorema 1.° *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, ménos el duplo del producto de estos por el coseno del ángulo comprendido.*

Distinguiremos dos casos: 1.° que el lado, que ha de formar el primer miembro de la igualdad del teorema, esté opuesto á un ángulo agudo: 2.° que esté opuesto á un ángulo obtuso.

Fig. 7.ª



1.° Sea el lado AB (fig. 7.ª) opuesto al ángulo agudo C en el triángulo ABC: bájese la perpendicular BD y se tendrá (Geom. **111**, 3.°)

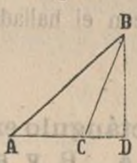
$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times DC:$$

pero (**27**, corol.) $DC = BC \times \cos C$;

luego $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times BC \times \cos C.$

2.° Sea el lado AB (fig. 8.ª) opuesto al ángulo obtuso ACB: bajando la perpendicular BD, se tendrá de igual modo (Geom. **111**, 2.°)

Fig. 8.ª



$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \times CD:$$

pero $CD = BC \times \cos BCD$, y como por otra parte $\cos BCD = -\cos ACB$ (**9**, corol. 2.°),

$$CD = BC \times -\cos ACB = -BC \times \cos C;$$

luego $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times BC \times \cos C.$

Luego en todo caso se verifica que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos C.$$

De igual modo se demostraria que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A.$$

Observacion. Estas tres ecuaciones contienen los elementos necesarios para la resolucion general de los triángulos rectilíneos.

37. Teorema 2.° *En todo triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á los lados opuestos.*

Bajando la perpendicular BD (fig. 9.ª) sobre la base, se tiene (**26**, corol.)

$$BD = AB \times \text{sen } A \quad \text{y} \quad BD = BC \times \text{sen } C, \text{ luego}$$

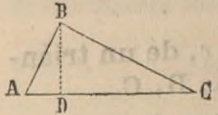
$$AB \times \text{sen } A = BC \times \text{sen } C \quad \text{ó} \quad c \times \text{sen } A = a \times \text{sen } C;$$

de donde (Alg. **181**)

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c}.$$

Bajando la perpendicular desde C sobre AB, del mismo modo se deduciria que

Fig. 9.ª



$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b},$$

de cuya proporcion y de la anterior resulta

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}.$$

38. TEOREMA 3.º *La suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.*

Por el teorema anterior se tiene

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b};$$

de donde (Alg. **184**, corol. 4.º)

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B} = \frac{a+b}{a-b};$$

pero (**18**)

$$\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } A - \text{sen } B} = \frac{\text{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg}\frac{1}{2}(A-B)};$$

luego

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg}\frac{1}{2}(A-B)}.$$

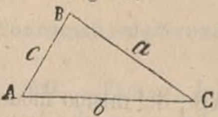
ARTICULO IV.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

39. Si en un triángulo cualquiera se conocen tres de los seis elementos que le constituyen, con tal que entre los datos se halle un lado, el triángulo puede resolverse, ó lo que es igual, se pueden determinar los tres elementos restantes (Geometría, **86**, **87**, **88**).

La combinacion ternaria de los seis elementos, sujetos á dicha condicion, da lugar á los *cuatro* problemas particulares distintos que aparecen á continuacion :

Fig. 10.



	DATOS.	INCÓGNITAS.
1.°	a, b, c,	A, B, C.
2.°	b, c, A,	B, C, a.
3.°	a, A, B,	C, b, c.
4.°	a, c, A,	B, C, b.

PROBLEMAS.

40. **1.° Dados los tres lados a, b, c, de un triángulo, determinar los tres ángulos A, B, C.**

De la fórmula (**36**) $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos A$, se deduce

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad [1].$$

Del mismo modo $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ [2],

y

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad [3].$$

Para hallar ahora cualquiera de los ángulos, el A por ejemplo, se aplican los logaritmos á la fórmula [1], y resulta

$$L.\ \cos A=L.\ (b^2+c^2-a^2)+C_oL.\ (2bc)\ (^*).$$

Es evidente que de una manera análoga se pueden determinar los ángulos B y C.

Observacion. Las fórmulas precedentes no se hallan bien preparadas para el cálculo logarítmico, porque ya se ve que para tomar el logaritmo de $b^2+c^2-a^2$, es necesario ejecutar de antemano tres elevaciones al cuadrado y la suma y resta indicadas. Por esta razon se las suele trasformar en otras, más cómodas en la práctica, del modo siguiente :

Restando la ecuacion [1] de la igualdad $1=1$, se halla

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=$$

$$(\text{Alg.}, \mathbf{40}, 3.^\circ)\ \frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{2bc},$$

y llamando $2p$ la suma de los tres lados, se tiene

$$a+b+c=2p \quad \text{de donde} \quad a+b-c=2p-2c$$

(*) Es preferible casi siempre hallar por el método ordinario el producto que á sumar los logaritmos de sus factores, etc.

y $a+c-b=2p-2b$, cuyos valores sustituidos en la ecuacion primera, teniendo al mismo tiempo presente que

$1-\cos A=2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$ (17), resulta

$$2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\frac{4(p-c)(p-b)}{2bc}=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc};\ \text{de donde}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad[A];$$

y de una manera análoga

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad[B],$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\quad[C]\ (*).$$

Aplicando los logaritmos á cualquiera de estas fórmulas, por ejemplo á la primera, resulta

$$L.\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[L.(p-b)+L.(p-c)+C_0L.b+C_0L.c].$$

41. 2.° Dados dos lados b, c y el ángulo comprendido A, determinar los otros dos ángulos B, C y el tercer lado a.

La suma de los ángulos B y C es

$$B+C=180^\circ-A,$$

y por consiguiente $\frac{1}{2}(B+C)=\frac{180^\circ-A}{2}$: tambien tenemos (38)

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}:$$

de donde

$$L.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)=L.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)+L.(b-c)+C_0L.(b+c);$$

por medio de cuya igualdad se determina el valor de $\frac{1}{2}(B-C)$; y como el de $\frac{1}{2}(B+C)$ es tambien conocido, se tendrá (Alge-

(*) De los dos valores de estos radicales, solo el positivo satisface las condiciones del problema; porque siendo un ángulo cualquiera A $<180^\circ$, $\frac{1}{2}A<90^\circ$: luego todas sus líneas trigonométricas son positivas (7, corol.)

bra, **93**) suponiendo que B esté opuesto al mayor lado,

$$B=\frac{1}{2}(B+C)+\frac{1}{2}(B-C) \quad y \quad C=\frac{1}{2}(B+C)-\frac{1}{2}(B-C).$$

El lado a se halla por medio de la proporcion (**37**)

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} A}{a}.$$

42. 3.° **Dado un lado a y dos ángulos cualesquiera A y B, determinar el tercer ángulo C y los otros lados b y c.**

El ángulo C se halla por medio de la ecuacion

$$C=180^{\circ}-(A+B),$$

y los lados b y c por las proporciones (**37**)

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b} \quad y \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

43. 4.° **Dados dos lados a y c y el ángulo A, opuesto á uno de ellos, determinar los otros angulos B y C y el tercer lado b.**

El ángulo C se halla por medio de la proporcion (**37**)

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{c},$$

el ángulo B se determina por la igualdad

$$B=180^{\circ}-(A+C)$$

y el lado b tambien por medio de la proporcion (**37**)

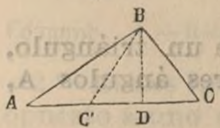
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Observacion. Como el seno corresponde siempre á dos arcos menores que la semicircunferencia, uno contenido en el cuadrante y otro suplementario del primero (**9**, corol.), cuando un ángulo se determina por medio de su seno, puede ocurrir la duda de si el ángulo buscado es el agudo que dan las tablas ó debe ser su suplemento obtuso.

Esta duda, que no ocurre en la resolucion de los triángulos rectángulos, porque los ángulos incógnitos son siempre agudos, ni en los tres primeros problemas de los oblicuángulos, como aparece de un ligero exámen de cada uno de ellos, puede tener lugar en el presente caso.

En efecto, sea ABC (fig. 11) el triángulo á que se refiere el problema último: bajando desde B la perpendicular BD sobre AC, tomando DC′=DC y uniendo C′ con B; los dos triángulos ABC y ABC′ contienen los mismos datos A, c y a=BC′: y como los ángulos BC′C y BCC′ son iguales, BC′A tiene por suplemento el ángulo C; luego *sen* C corresponde tambien al ángulo BC′A. Si se toma para C el ángulo que dan las tablas, resulta b=AC y B=ABC; si se toma para C el suplemento del ángulo que dan las tablas, resulta b=AC′ y B=ABC′.

Fig. 11.



La doble solucion, que acaba de hallarse, no tiene lugar sino cuando el lado opuesto al ángulo dado sea menor que el otro lado conocido, esto es, cuando $a<c$; porque en cualquier otra hipótesis el ángulo C es agudo, y por lo tanto el que dan las tablas es el único que satisface las condiciones del problema.

OBSERVACIONES GENERALES.

44. 1.ª Los tres primeros problemas de que acabamos de ocuparnos son posibles siempre que en el 1.º el mayor lado sea menor que la suma de los otros dos; y en el 3.º los dos ángulos conocidos valgan ménos que 180°. El 4.º problema es evidentemente imposible ó absurdo cuando A no es agudo y $a<c$: lo será además si $a<$BD, esto es, cuando el lado opuesto al ángulo conocido es menor que la perpendicular bajada desde el vértice comun á los lados a y c conocidos, sobre el tercer lado. Esta última condicion no siempre se conoce á simple vista; pero lo absurdo del problema se manifiesta en el cálculo al determinar el ángulo C, hallando para él un seno mayor que el rádio (como se verá, ejemplo 3.º), cuyo resultado significa lo mismo que las raíces *imaginarias* en las ecuaciones de 2.º grado ó el valor *infinito* en las de 1.º

2.ª Los valores hallados para las incógnitas en los anteriores problemas, se pueden comprobar, en el 1.º sumando los tres ángulos y viendo si la suma compone 180°: en el 2.º hallando directamente los dos ángulos incógnitos, y observando si sumados con el tercero dan tambien 180°; y en el 3.º y 4.º calculando uno de los ángulos por la fórmula del 1.^{er} caso, y comparando el resultado con la hipótesis ó con otro resultado hallado anteriormente.

EJEMPLOS.

45. 1.° **Dados los tres lados de un triángulo, $a=$85, $b=$70, $c=$45, hallar los tres ángulos A, B y C.**

Las fórmulas que pueden emplearse son (**40**, obs.)

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{A} = \frac{1}{2}\,[\text{L.}\,(p-b)+\text{L.}\,(p-c)+\text{C}_0\text{L.}\,b+\text{C}_0\text{L.}c,]$$

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{B} = \frac{1}{2}\,[\text{L.}\,(p-a)+\text{L.}\,(p-c)+\text{C}_0\text{L.}\,a+\text{C}_0\text{L.}c,]$$

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C} = \frac{1}{2}\,\text{etc.}$$

Ahora, $a+b+c=200$; de donde $p=100$, $p-a=15$, $p-b=30$ y $p-c=55$. Luego

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{A}=\left\{\begin{array}{r} 1,477121 \\ 1,740363 \\ \bar{2},154902 \\ \bar{2},346787 \\ \hline \bar{1},719173 \end{array}\right.$$

$$\bar{1},859586=\text{L. sen}\,(46^\circ\ 21'\ 35'')$$

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{B}=\left\{\begin{array}{r} 1,176091 \\ 1,740363 \\ \bar{2},070581 \\ \bar{2},346787 \\ \hline \bar{1},333822 \end{array}\right.$$

$$\bar{1},666911=\text{L. sen}\,(27^\circ\ 40'\ 22'')$$

$$\text{L. sen}\,\frac{1}{2}\,\text{C}=\left\{\begin{array}{r} 1,176091 \\ 1,477121 \\ \bar{2},070581 \\ \bar{2},154902 \\ \hline \bar{2},878695 \end{array}\right.$$

$$\bar{1},439347=\text{L sen}\,(15^\circ\ 57'\ 45'')$$

$$\begin{aligned} A &= 92^\circ\ 45'\ 46'' \\ B &= 55^\circ\ 20'\ 44'' \\ C &= 31^\circ\ 55'\ 30'' \end{aligned}$$

Comprob. $A+B+C=178^\circ\ 118'\ 120''=180^\circ$

2.° Dados los lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, $a=1085$, $c=1098$, $A=46^\circ\ 12'\ 42''$, hallar los otros dos ángulos B, C y el tercer lado b.

Las fórmulas que deben emplearse son (**37**)

$$\frac{\text{sen A}}{a}=\frac{\text{sen C}}{c},$$

$$B=180^\circ-(A+C),$$

$$\frac{\text{sen A}}{a}=\frac{\text{sen B}}{b}.$$

Este ejemplo tiene dos soluciones (**43**, obs.).

Primera solucion.

$$\text{L. sen C}=\left\{\begin{array}{r} 3{,}040602 \\ \bar{1}{,}858393 \\ 85 \\ \\ \bar{4}{,}964570 \end{array}\right. \qquad \text{L. } b=\left\{\begin{array}{r} 3{,}035430 \\ \bar{1}{,}999343 \\ 3 \\ \\ 0{,}141522 \end{array}\right.$$

$$\bar{1}{,}863650=\text{L. sen }(46^\circ\ 55'\ 57'' \qquad 3{,}176298=\text{L. }1500{,}7.$$

$$B=180^\circ-(93^\circ\ 8'\ 39'')=86^\circ\ 51'\ 21''$$

$$\begin{aligned} C &= 46^\circ\ 55'\ 57'' \\ B &= 86^\circ\ 51'\ 21'' \\ b &= 1500{,}71. \end{aligned}$$

Segunda solucion.

$$C=180^\circ-(46^\circ\ 55'\ 57'')=133^\circ\ 4'\ 3''$$

$$B=180^\circ-(179^\circ\ 16'\ 45'')=0^\circ\ 43'\ 15''$$

$$\text{L. } b=\left\{\begin{array}{r} 3{,}035430 \\ 3{,}414137 \\ \bar{6}{,}685564 \\ 0{,}141522 \end{array}\right.$$

$$1{,}276653=\text{L. }18{,}91$$

$$b=18{,}91.$$

Comprobacion de la solucion 1.ª (**41**, 2.ª):

$$\text{L. sen}\ \frac{1}{2}\text{A} = \left\{ \begin{array}{r} 2{,}532937 \\ 2{,}871490 \\ \bar{4}{,}823702 \\ \bar{4}{,}959398 \\ \hline \bar{1}{,}187527 \end{array} \right.$$

$$\bar{1}{,}593763 = \text{L. sen}\ (23^{\circ}\ 6'\ 21'').$$

Luego $\text{A} = 46^{\circ}\ 12'\ 42''$.

De una manera análoga se comprueba la 2.ª solucion.

3.° **Dados dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto á uno de ellos, $a=513$, $c=869$, $A=66^{\circ}$ $10'\ 12''$, hallar los ángulos B, C y el tercer lado b.**

En este ejemplo se emplean las mismas fórmulas que en el anterior.

$$\text{L. sen C} = \left\{ \begin{array}{r} 2{,}939020 \\ \bar{1}{,}961290 \\ 11 \\ \bar{3}{,}289883 \\ \hline 0{,}190204 \end{array} \right.$$

luego este problema es absurdo (**41**, 1.°).

FIN.

ÍNDICE.

GEOMETRIA DEL ESPACIO.

SECCION I.—Propiedades de las figuras en el espacio.

SECCION II.—De la extension de las figuras en el espacio.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.