COMPENDIO

DE

MATEMÁTICAS ELEMENTALES

PARA USO DE LOS

SEMINARIOS CONCILIARES,

COMPUESTO POR

D. TOMÁS BRET, PBRO.

REGENTE DE DICHA ASIGNATURA, Y CATEDRÁTICO DE TEOLOGÍA EN EL SEMINARIO CONCILIAR DE VICH.

VICH:

IMPRENTA Y LIBRERIA DE LUCIANO ANGLADA,

1859.

AL SEMINARIO CONCILIAR
DE VICH.

Durante el largo espacio de años que enseñé la asignatura de Matemáticas en este Seminario, no me fué posible vencer del todo una dificultad que impedia instruirse debidamente en esta ciencia á ciertos discípulos de esclarecido talento. Esta dificultad consistia en la falta de un libro de texto acomodado á los cursantes de Seminario que en gran parte son de la clase pobre; dificultad que debe de ser comun á todos los Seminarios de España.

Hallándose además incorporado á este Seminario el *Colegio privado* agregado á la Universidad de Barcelona, me era indispensable dar á la enseñanza toda la estension que requerian los programas presentados por la Universidad; pero no era fácil encontrar un libro de reducido volúmen que explicara todas las materias contenidas en los programas.

El compendio que ofrezco al público, y que dedico á este Seminario, como una muestra de gratitud y afecto, se propone llenar este vacío, y obviar las dificultades. No presumo de profundo Matemático. No diré nada nuevo ni mejor que tantos ilustres Autores; pero me complazco en consignar, que será la obra al alcance de los de escasa fortuna; que contendrá cuanto pueda interesar á los estudiantes de Seminarios; y que al mismo tiempo nada faltará en ella de lo prescrito para la segunda enseñanza tanto por los programas generales del Gobierno, como por los particulares de los Catedráticos de la Universidad.

Tomas Brét Pbro.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *Matemáticas*, son las ciencias que tratan de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad. Llámase *cantidad*, todo lo que es capaz de aumento ó disminucion. Se divide en *discreta* y *contínua*: la primera es la que representa un todo cuyas partes pueden separarse facilmente las unas de las otras, como por ejemplo *un monton de duros*, *granos*, etc. la segunda, es la que representa un objeto cuyas partes no pueden separarse facilmente, como por ejemplo *una mesa*, *una pared*, etc.

2. Las Matemáticas pueden dividirse en *puras* y *mistas*. Las *puras* son las que tratan de la cantidad con la mayor abstraccion; y las *mistas* son las que consideran la cantidad en alguna de las propiedades de los cuerpos. Por razon de la diferencia de cantidades pueden considerarse tres los ramos principales de las Matemáticas puras, á saber; *Aritmética, Álgebra y Geometría.* Llámase *Aritmética* aquella parte de Matemáticas que trata de la cantidad discreta por medio de números; *Álgebra* la que versa sobre la misma con la mayor generalidad espresada por letras, y *Geometría* la que se ocupa de la cantidad contínua.

3. Seis son los axiomas principales que sirven de base á las Matemáticas y son los siguientes.

1.° Una cosa es igual á ella misma.

2.° El todo es igual al conjunto de sus partes, ó el conjunto de las partes es igual al todo.

3.° Lo que se haga con el todo, quedará hecho con el conjunto de las partes; y al contrario, lo que se haga con el conjunto de las partes quedará hecho con el todo.

4.ª El todo es mayor que cualquiera de sus partes, ó la parte es menor que el todo.

5.° Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

6.° Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

ARITMÉTICA.

Clasificacion de los números.

4. Entiéndese por unidad aquel objeto que sirve de tipo ó término de comparacion con otros de su clase. Así en una cantidad ó monton de libros sirve el objeto *libro* de unidad; en una porcion de hombres sirve el objeto *hombre*, etc. Llamamos *número* á una reunion de unidades. El número se divide 1.° en *abstracto* y *concreto*; el primero denota un conjunto de unidades prescindiendo de la clase á que pertenezcan, como *quince*, *tres*, *ciento*, etc; el segundo denota una reunion de unidades espresando la clase á que pertenezcan, como *seis hombres*, *doce duros*, etc. En 2.° lugar se divide en *entero* y *quebrado*; el entero espresa un conjunto completo de unidades, como por ejemplo *cuatro*, *veinte*, etc; el quebrado espresa parte ó partes de la unidad, como un *tercio* de duro, *dos cuartas partes* de peseta, etc. Si una cantidad está compuesta de un entero y quebrado, se denomina *número misto*; y si

equivale la cantidad á parte ó partes de una unidad, la cual sea á la vez parte ó partes de otra unidad diferente, toma el nombre de *quebrado de quebrado*; tal sería, *dos tercios de una cuarta parte* de onza, *etc*. Los números concretos se dividen en *homogéneos* y *heterogéneos*: llámanse homogéneos aquellos que designan una misma especie, como *ocho hombres*, *diez hombres*; y heterogéneos los que se refieren á especies diferentes, como *tres libros*, *siete naranjas*, *once horas*, etc. Si el número de la cantidad se espresa con un solo guarismo el número se llama *simple* ó *díjito*; y *compuesto* cuando la cantidad se espresa con mas de un guarismo; entendiéndose por *guarismos* unos signos convencionales con los que se manifiestan las diferentes cantidades.

Numeracion hablada y escrita.

5. Tres son las operaciones que la Aritmética puede hacer con las cantidades designadas por números, á saber, *espresarlas*, *componerlas* y *descomponerlas*. La espresion puede ser *hablada* y *escrita*. El sistema de numeracion que sigue la Aritmética, se llama *sistema décuplo*, por razon de que con diez unidades de un órden cualquiera se forma una unidad de órden superior mas inmediato.

6. Las cifras ó guarismos que emplea la numeracion décupla son las siguientes.

1,	2.	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	0.
uno,	dos,	tres,	cuatro,	cinco,	seis,	siete,	ocho,	nueve,	cero.

Cuando una cantidad esté espresada por un número compuesto, ó sea por una combinacion de cifras, cada una de estas tiene dos valores, á saber; uno absoluto y otro relativo segun el lugar que ocupa. La primera cifra de la derecha de una combinacion cualquiera se llama *unidad simple*, la segunda *decena*, la tercera *centena*, la cuarta *mil* ó *millar*, la quinta *decena de millar*, la sexta *centena de mi-*

llar, la séptima *millon*, y en seguida *decena de millon*, *centena de millon*, *millar de millon*, *decena de millar de millon*, *centena de millar de millon*, *billon*, *decena de billon*. *etc. etc.*

7. Con diez unidades simples ó de primer órden se forma una decena, ó sea una unidad de segundo órden, con diez decenas se forma una centena, con diez centenas un mil ó millar, y así sucesivamente. Segun esto se vé, que en cualquier combinacion ó número no entran mas que unidades, decenas, y centenas; con solo la diferencia que segun el lugar que ocupan estas unidades, decenas, y centenas, serán simples, ahora de millar, ahora de millon, ahora de millar de millon, ahora de billon, ahora de millar de billon, etc. etc.

Segun el convenio establecido, cada guarismo del número 5478 tendrá estos dos valores. El valor absoluto del 8 siempre será *ocho*, y así de los demás; el relativo del 8 espresa unidades sencillas, el del 7, decenas, el del 4, centenas, y el del 5, miles ó millares.

El cero indica defecto de cantidad; y así siempre sirve para suplir el lugar que debiera ocupar una cifra de un órden cualquiera. Así en el número 503080, los ceros correspondientes ocupan el lugar de las unidades simples, de las centenas, y de las decenas de millar.

8. Para leer un número cuando está escrito, lo dividirémos en períodos de tres cifras cada uno empezando por la derecha, no importando que el primer período que resulte de la izquierda conste de una sola, ó dos cifras. En cada período pondrémos debajo de las cifras del número dado alternativamente los signos, *coma*, 1, *coma*, 2, *coma* 3, etc. Empezarémos á leer por los períodos de la izquierda pronunciando la palabra mil siempre y cuando indistintamente encontremos el signo *coma*, y la palabra *millon*, *billon*, *trillon*, *cuatrillon*, *quillon*, etc. cuando encontremos los signos 1, 2, 3, 4, 5, etc.

El número 6483056418, hecha la division establecida, da, 6,483,056,418 y se lee: seis *mil*, cuatro cientos ochenta y tres *millones*, cincuenta y seis *mil*, cuatro cientos diez y ocho *duros*, *manzanas*, *soldados* ó lo que representen.

9. Cuando tratemos de escribir un número que se nos dicte empezarémos á escribir de izquierda á derecha, cuidando de poner todos los órdenes de unidades á medida que se vayan enunciando, supliendo con ceros los órdenes de unidades que dejen de mencionarse, y teniendo cuidado de colocar los correspondientes signos de la *coma*, 1, 2, 3, 4, etc. por debajo, segun se nos vaya dictando la palabra *mil*, ó *millon*, *billon*, etc.

Así, el número cinco mil *cuatrillones*, tres cientos mil seis *trillones*, cuatro mil ochenta *billones*, mil *millones*, dos cientos cuarenta y cuatro *mil*, quinientos cuatro, se escribirá: 5,000$_{4}$300,006$_{3}$004,080$_{2}$001,000$_{1}$244,504.

La razon de empezar á leer y escribir un número por la parte izquierda, es porque en esta está la unidad de especie superior; y al enumerar un número, siempre se empieza por la parte superior.

Sumar números enteros.

10. *Sumar* es *reunir en un solo valor el valor de dos ó mas cantidades homojéneas;* Asi; sumar en Aritmética es reunir en un solo valor el de dos ó mas números de una misma especie. Las cantidades que se dan para sumar, se llaman *sumandos*, y el resultado que se obtiene se llama *suma*. Pueden ofrecerse los cuatro casos de sumar un número díjito con otro díjito, un compuesto con un díjito y al revés, y un compuesto con otro compuesto. El signo de que nos valemos para indicar la operacion de sumar es el siguiente, $+$, que se lee *mas*, el cual se coloca en medio de los dos sumandos, y para indicar el resultado de la operacion, se usa de este signo $=$, que se lee *igual*; colocando el resultado á continuacion de este signo que debe estar al lado del último sumando. Así, debiendo sumar 6 con 2, y traducir el resultado, nos gobernariamos del modo siguiente; $6 + 2 = 8$; y se leeria, 6 *mas* 2 *igual* á 8.

Para poder sumar con facilidad, es preciso saber bien de memoria la siguiente.

TABLA DE SUMAR.

1 + 0 = 1	4 + 0 = 4	7 + 0 = 7
1 + 1 2	4 + 1 5	7 + 1 8
1 + 2 3	4 + 2 6	7 + 2 9
1 + 3 4	4 + 3 7	7 + 3 10
1 + 4 5	4 + 4 8	7 + 4 11
1 + 5 6	4 + 5 9	7 + 5 12
1 + 6 7	4 + 6 10	7 + 6 13
1 + 7 8	4 + 7 11	7 + 7 14
1 + 8 9	4 + 8 12	7 + 8 15
1 + 9 10	4 + 9 13	7 + 9 16
2 + 0 = 2	5 + 0 = 5	8 + 0 = 8
2 + 1 3	5 + 1 6	8 + 1 9
2 + 2 4	5 + 2 7	8 + 2 10
2 + 3 5	5 + 3 8	8 + 3 11
2 + 4 6	5 + 4 9	8 + 4 12
2 + 5 7	5 + 5 10	8 + 5 13
2 + 6 8	5 + 6 11	8 + 6 14
2 + 7 9	5 + 7 12	8 + 7 15
2 + 8 10	5 + 8 13	8 + 8 16
2 + 9 11	5 + 9 14	8 + 9 17
3 + 0 = 3	6 + 0 = 6	9 + 0 = 9
3 + 1 4	6 + 1 7	9 + 1 10
3 + 2 5	6 + 2 8	9 + 2 11
3 + 3 6	6 + 3 9	9 + 3 12
3 + 4 7	6 + 4 10	9 + 4 13
3 + 5 8	6 + 5 11	9 + 5 14
3 + 6 9	6 + 6 12	9 + 6 15
3 + 7 10	6 + 7 13	9 + 7 16
3 + 8 11	6 + 8 14	9 + 8 17
3 + 9 12	6 + 9 15	9 + 9 18

11. Cuando uno de los sumandos ó varios de ellos sean números compuestos, es mas cómodo colocar unos suman-

dos debajo de los otros, de modo que se correspondan bien unidades debajo unidades, decenas debajo decenas, y así unidades de un mismo órden; tírese entonces una raya debajo del sumando inferior, y colóquese debajo de la raya el resultado. Se han de sumar unidades simples con unidades simples, decenas con decenas, etc. empezando siempre de derecha á izquierda. En cada una de las sumas parciales de las respectivas columnas póngase el resultado como si fueran unidades sencillas, y agréguense á la columna siguiente superior aquella ó aquellas unidades que la anterior suma comprendiera. Si en la suma de la última columna sobran algunas unidades, colóquese á su lado izquierdo, y se tendrá la suma total.

Tratemos de hallar por esta regla el valor de la suma siguiente; 4532 sumado con 5304, y con 387. — Colocados los sumandos como prescribe la regla y se vé, en (A), digo, 2 y 4 son 6, y 7 son 13; pongo 3 y llevo 1, porque en 13 *unidades* hay 3 *unidades* y una *decena*. Llevo pues 1, y 3 son 4, y 8 son 12; pongo 2 y llevo 1, y 5 son 6, y 3 son 9, y 3 son 12; pongo 2 y llevo 1, y 4 son 5, y 5 son 10; pongo 0 y llevo 1 que lo pongo. Con esto tengo que la suma pedida es 10,223.

(A)

$$\begin{array}{r} 4\,5\,3\,2 \\ 5\,3\,0\,4 \\ 3\,8\,7 \\ \hline 1\,0{,}2\,2\,3 \end{array}$$

Colocados ya debidamente los sumandos, resuélvanse los siguientes ejemplos.

$$\begin{array}{rrr} 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} \\ 3\,8\,4\,5\,6 & 1\,0\,5\,6\,3 & \\ 1\,2\,0\,8\,4 & 2\,8\,8\,0\,4 & 8\,2\,3\,4 \\ 3\,5\,7\,9\,5 & 4\,5\,6\,7\,3 & 5\,7\,8\,2 \\ 1\,2\,3\,4\,6 & 1\,2\,3\,4\,6 & 3\,3\,4\,6 \\ \hline 9\,8{,}6\,8\,1 & 9\,7{,}3\,8\,6 & 1\,7{,}3\,6\,2 \end{array}$$

La razon de empezar siempre por la derecha es por el ya esplicado sistema de numeracion. (n.° 5) Si ninguna de las sumas parciales llegara á 10, entonces seria indiferente empezar por la derecha ó izquierda. El poner las unidades bajo unidades, decenas bajo decenas etc, es porque los sumandos deben ser homogéneos. La raya se tira por claridad.

12. Cuando uno ó varios sumandos crecen ó decrecen, la suma crece ó decrece tambien á proporcion de lo que han aumentado ó disminuido uno ó varios sumandos.— Si uno de los sumandos aumenta ó disminuye cuanto disminuye ó aumenta otro de los sumandos, la suma no sufre alteracion alguna. —El órden de los sumandos no altera la suma.

Restar números enteros.

13. *Restar* en general, es *averiguar la diferencia entre dos cantidades homogéneas*, ó *quitar una cantidad de otra.* Restar, por consiguiente, en Aritmética, es averiguar la diferencia entre dos números homogéneos, ó quitar un número de otro de igual especie que el primero. El número del cual se quita el otro se llama *minuendo* y el número que se quita se llama *sustraendo*, dándose al resultado el nombre de *resta*, *esceso ó diferencia.* Se conoce el *minuendo,* porque regularmente va precedido de la partícula *De*, y el *sustraendo* va precedido de la palabra *quítese*, *réstese*, ú otra semejante, ó tambien de este signo — que se llama *menos.*

14. Tres son los casos que pueden ofrecerse en el restar números enteros, 1.° restar un díjito de otro díjito; 2.° un díjito de un compuesto; 3.° un compuesto de otro compuesto. Para restar un díjito de otro se colocará el *sustraendo* al lado ó despues del *minuendo* separados por medio del signo —, é inmediatamente el resultado separado por medio del signo =. Así si de 7 quiero restar 3, siendo 7 el *minuendo* y 3 el *sustraendo*, los colocaré del modo siguiente: 7 — 3, y leeré 7 menos 3; y poniendo finalmente el resultado al lado ó despues del *sustraendo* separado por medio del signo = será, 7 — 3 = 4, debiéndose leer 7 menos 3 igual á 4.

TABLA DE RESTAR.

De 0 á	1 va	1
0	2	2
0	3	3
0	4	4
0	5	5
0	6	6
0	7	7
0	8	8
0	9	9
De 1 á	1 va	0
1	2	1
1	3	2
1	4	3
1	5	4
1	6	5
1	7	6
1	8	7
1	9	8
1	10	9
De 2 á	2 va	0
2	3	1
2	4	2
2	5	3
2	6	4
2	7	5
2	8	6
2	9	7
2	10	8
2	11	9
De 3 á	3 va	0
3	4	1
3	5	2
3	6	3
3	7	4
3	8	5
3	9	6
3	10	7
3	11	8
3	12	9
De 4 á	4 va	0
4	5	1
4	6	2
4	7	3
4	8	4
4	9	5
4	10	6
4	11	7
4	12	8
4	13	9
De 5 á	5 va	0
5	6	1
5	7	2
5	8	3
5	9	4
5	10	5
5	11	6
5	12	7
5	13	8
5	14	9
De 6 á	6 va	0
6	7	1
6	8	2
6	9	3
6	10	4
6	11	5
6	12	6
6	13	7
6	14	8
6	15	9
De 7 á	7 va	0
7	8	1
7	9	2
7	10	3
7	11	4
7	12	5
7	13	6
7	14	7
7	15	8
7	16	9
De 8 á	8 va	0
8	9	1
8	10	2
8	11	3
8	12	4
8	13	5
8	14	6
8	15	7
8	16	8
8	17	9
De 9 á	9 va	0
9	10	1
9	11	2
9	12	3
9	13	4
9	14	5
9	15	6
9	16	7
9	17	8
9	18	9

15. Para restar un díjito de un compuesto, ó un compuesto de otro, en uno y otro caso colocarémos el *sustraendo* debajo del *minuendo*, haciendo que se correspondan las unidades de cada especie; á saber unidades debajo

unidades, decenas debajo decenas; etc. tirarémos una raya y pondrémos debajo de ella la resta que (3, Axioma 3.°) quedará toda ejecutada, restando unidades de unidades, decenas de decenas, centenas de centenas, etc. Así si de 879 quiero restar 325, dispondré el cálculo como sevé en (B) y colocadas como están, diré; De 5 á 9 van 4; de 2 á 7 van 5; de 3 á 8 van 5.

(B)

Minuendo.	8 7 9
Sustraendo.	—3 2 5
Resta.	=5 5 4

16. Aunque de la definicion de restar se desprende, que el *minuendo* siempre debe ser mayor que el *sustraendo*, sin embargo muchas veces acontece, que algunas cifras del *sustraendo* son mayores que sus correspondientes del *minuendo*. En este caso se quita una unidad de la cifra del órden inmediato superior del *minuendo*, ó mejor, se agregan diez unidades á la cifra del *minuendo* que está en cuestion, y de este agregado se resta su correspondiente del *sustraendo*. Entonces paraque haya compensacion se agregará una cantidad á la cifra del órden inmediato superior del *sustraendo* ó sean diez unidades del órden anterior que está á la derecha. Por igual razon siempre que una ó muchas cifras del *minuendo* sean ceros, se considerará á cada uno de ellos como que valga diez, y de este número restarémos la cifra correspondiente del *sustraendo*. Segun esta regla, De 8504, réstese 2386; dispondrémos el calculo como se vé en (C), y dirémos; de 6 á 14 van 8, y llevo 1; que con el 8 son 9; de 9 á 10 va 1, y llevo 1 que con el 3 hacen 4; de 4 á 5 va 1; de 2 á 8 van 6.

(C)

Mind.°	8 5 0 4
Susd.°	—2 3 8 6
Resta.	=6,1 1 8

La razon de estas reglas es muy óbvia. El *sustraendo* colocado debajo del *minuendo* correspondiéndose unidades de cada especie, es porque, tratándose de disminuir, los números deben ser homogéneos. Cuando la cifra del *sustraen-*

do es mayor que la correspondiente del *minuendo*, se agregan diez unidades al *minuendo* y diez al *sustraendo* porque añadiendo una misma cantidad al *minuendo* y *sustraendo* el resultado no se altera; y á que cuanto se ha aumentado por razon del *minuendo* se ha disminuido por razon del *sustraendo*. Finalmente, restando unidades de unidades, decenas de decenas, etc. se ha restado todo el *sustraendo* de todo el *minuendo*.

17. Como el *minuendo* se compone del *sustraendo* y de la *resta*, tendrémos, que sumando el *sustraendo* con la *resta* nos habrá de dar otra vez el *minuendo*, con lo que habrémos alcanzado la prueba de esta operacion.

Resolvamos los ejemplos siguientes:

	1.°	2.°	3.°
Minuendo.	6 4 5 3 2 8	8 4 6 0 2	5 0 0 8
Sustraendo.	— 2 5 7 8 0 3	— 4 7 8 5 3	— 1 0 8 4
Resta. . .	= 3 8 7 5 2 5	= 3 6 7 4 9	= 3 9 2 4
Prueba. . . .	6 4 5,3 2 8	8 4,6 0 2	5,0 0 8

De la definicion del restar se deducen las consecuencias siguientes; 1.ª Si el *minuendo* crece ó decrece, crece ó decrece igualmente la resta; y si el *sustraendo* aumenta ó disminuye, disminuye ó aumenta la resta, siguiendo por tanto una ley contraria al *sustraendo*. 2.ª Añadiendo ó quitando al *minuendo* y *sustraendo* una misma cantidad, la resta no se altera. 3.ª Si el *minuendo* crece por una parte lo que disminuye el *sustraendo* por otra, la resta habrá aumentado tanto como se haya añadido al *minuendo* y quitado al *sustraendo*; y si el *minuendo* disminuye por una parte lo que por otra aumenta el *sustraendo*, la resta habrá disminuido tanto como se haya quitado al *minuendo* y añadido al *sustraendo*.

Multiplicar números enteros.

18. *Multiplicar* en general, es *tomar como á sumando una cantidad tantas veces como unidades tenga otra*. Así mul-

tiplicar números, será, *tomar un número como á sumando tantas veces como nos diga otro*. El número que se ha de multiplicar se llama *multiplicando*; el número por el cual se ha de multiplicar el multiplicando se llama *multiplicador*; el resultado de multiplicar un número por otro se llama *producto*, y el multiplicando y multiplicador juntos se denominan *factores del producto*.

El signo que indica la multiplicacion es el siguiente, × ó un punto . y se leen *multiplicado por*. Tres son los casos que pueden ofrecerse en la multiplicacion de números enteros, á saber, multiplicar un díjito por otro díjito; un díjito por un compuesto, ó al revés; y un compuesto por otro compuesto. Para la multiplicacion en cualquiera de estos casos, es preciso saber de antemano la siguiente,

TABLA DE MULTIPLICAR.

1 × 0 = 0	3 × 0 = 0	5 × 0 = 0
1 × 1 1	3 × 1 3	5 × 1 5
1 × 2 2	3 × 2 6	5 × 2 10
1 × 3 3	3 × 3 9	5 × 3 15
1 × 4 4	3 × 4 12	5 × 4 20
1 × 5 5	3 × 5 15	5 × 5 25
1 × 6 6	3 × 6 18	5 × 6 30
1 × 7 7	3 × 7 21	5 × 7 35
1 × 8 8	3 × 8 24	5 × 8 40
1 × 9 9	3 × 9 27	5 × 9 45
	3 × 10 30	5 × 10 50
2 × 0 = 0	4 × 0 = 0	6 × 0 = 0
2 × 1 2	4 × 1 4	6 × 1 6
2 × 2 4	4 × 2 8	6 × 2 12
2 × 3 6	4 × 3 12	6 × 3 18
2 × 4 8	4 × 4 16	6 × 4 24
2 × 5 10	4 × 5 20	6 × 5 30
2 × 6 12	4 × 6 24	6 × 6 36
2 × 7 14	4 × 7 28	6 × 7 42
2 × 8 16	4 × 8 32	6 × 8 48
2 × 9 18	4 × 9 36	6 × 9 54
2 × 10 20	4 × 10 40	6 × 10 60

7 × 0 = 0	8 × 0 = 0	9 × 0 = 0
7 × 1 7	8 × 1 8	9 × 1 9
7 × 2 14	8 × 2 16	9 × 2 18
7 × 3 21	8 × 3 24	9 × 3 27
7 × 4 28	8 × 4 32	9 × 4 36
7 × 5 35	8 × 5 40	9 × 5 45
7 × 6 42	8 × 6 48	9 × 6 54
7 × 7 49	8 × 7 56	9 × 7 63
7 × 8 56	8 × 8 64	9 × 8 72
7 × 9 63	8 × 9 72	9 × 9 81
7 × 10 70	8 × 10 80	9 × 10 90

10 × 10 = 100	10 × 10,000 = 100,000
10 × 100 = 1,000	10 × 100,000 = 1,000,000
10 × 1,000 = 10,000	

19. Para efectuar la multiplicacion de un díjito por otro, se pone regularmente el multiplicador al lado del multiplicando separado el uno del otro por el signo ×, y el resultado en seguida á su derecha, precedido del signo =. Así por ejemplo, si quiero multiplicar 3 por 2, lo efectuaré de este modo: $3 \times 2 = 6$, y leeré, 3 multiplicado por 2 igual á 6.

20. Segun la definicion del multiplicar se desprende, que el producto siempre debe ser de la misma especie que el multiplicando. Sin embargo conviene demostrar, que el órden de los factores no altera el producto. Para su demostracion supongamos que hemos de multiplicar 2 por 3; vamos á probar, que lo mismo se obtiene multiplicando 2 por 3, que multiplicando 3 por 2, ó que $2 \times 3 = 3 \times 2$. Para esto hagamos uso de la definicion del multiplicar, y tendrémos: $2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$. $3 \times 2 = 3 + 3 = 6$.

Cuando hay dos ó mas cosas iguales á una tercera son iguales entre sí; luego ya que $2 \times 3 = 6$, y $3 \times 2 = 6$, resultará que $2 \times 3 = 3 \times 2$. De la misma manera si tenemos 4×5, demostrarémos que $4 \times 5 = 5 \times 4$; por que $4 \times 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$. $5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 + = 20$.

Luego por lo dicho, $4 \times 5 = 5 \times 4$. Como lo mismo se verificaría en todos los ejemplos, podemos inferir por analogía, que en general el órden de los factores no altera el producto. De esto se sigue que si tenemos una multiplicacion indicada en la que entren varios factores, podrán cambiarse de lugar sin alterar el resultado. Así, si tenemos $2 \times 3 \times 4$, será $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 4 = 3 \times 4 \times 2 = 2 \times 4 \times 3 = 4 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 \times 2$, etc.

Cuando hayan de multiplicarse entre sí sumas ó restas indicadas, se encerrará cada factor dentro de un paréntesis y despues de efectuar luego las operaciones indicadas dentro, se multiplicarán entre sí los resultados. Así debiendo multiplicar $2+3$ por $6-4$ tendremos; $(2+3) \times (6-4) = 5 \times 2 = 10$.

21. Para multiplicar un compuesto por un díjito, se colocará el díjito debajo de las unidades del multiplicando precedido del signo $\times$; se tirará una raya, y ejecutarémos la multiplicacion empezando por las unidades del multiplicando, luego por las decenas, y así siguiendo hasta haber tomado ó multiplicado todas las partes del multiplicando por el multiplicador. Despues se multiplica el multiplicador por las unidades del multiplicando, luego por las decenas, etc, hasta que se haya multiplicado el multiplicador por todas las partes de que consta el multiplicando, obteniéndose de este modo (3. axioma 3.°) el producto total.

En cada producto no se pondrán sino las unidades correspondientes al órden del multiplicando que se toma, y si este producto contiene á la vez unidades de un órden y unidades de otro órden superior, se reservarán estas últimas para agregarlas al producto inmediato superior. Así por ejemplo; si hemos de multiplicar 6854 por 3, dispondremos el cálculo como se ve en (D), y dirémos; 3 por 4 son 12; como en 12 unidades hay 2 de estas y una decena, dirémos pongo 2 y llevo 1 : 3 por 5 son 15 y uno que llevaba son 16 decenas; como en 16 decenas hay tambien 6 decenas y una centena, dirémos, pongo 6 y llevo 1 : 3

por 8 son 24 y 1 que llevaba son 25 centenas; como en 25 centenas hay 5 centenas y dos millares, dirémos pongo 5 y llevo 2; 3 por 6 son 18 y 2 que llevaba son 20; como en 20 unidades hay 0 millares y 2 decenas de millar, dirémos pongo 0 y 2 que llevo que los pongo, por no haberse de agregar á ningun nuevo producto.

(D)

Multiplicando.	6 8 5 4
Multiplicador.	× 3
Producto.	2 0,5 6 2

Débese advertir, que en los productos parciales no es necesario decir si son unidades, ni decenas, etc., por saber ya, que segun el sistema décuplo de numeracion con diez unidades de un órden se forma otro de órden superior inmediato.

Resolvamos los ejemplos siguientes:

	1.°	2.°
Multiplicandos.	6 3 4 8	4 3 5 7 8 6
Multiplicadores.	× 5	× 7
Productos.	3 1,7 4 0	$3_1$0 5 0,5 0 2

De la definicion de multiplicar se infiere, 1.° que toda cantidad multiplicada por la unidad ó al revés da por producto la misma cantidad; 2.° que toda cantidad multiplicada por cero y viceversa da por producto cero. Fúndase lo primero, en que toda cantidad tomada una sola vez es siempre la misma; y lo segundo, en que una cantidad tomada cero veces ó no tomada ninguna vez no es cantidad.

22. Para multiplicar un compuesto por otro, tómese por comodidad el número mas elevado por multiplicando y el otro por multiplicador. Colóquese este debajo del multiplicando, haciendo que se correspondan tambien por comodidad las unidades de cada especie, y tírese una raya debajo la que se pondrán los productos. Multiplíquense pri-

mero las unidades del multiplicador por todo el multiplicando, conforme á lo prescrito en la multiplicacion de un díjito por otro. 2.° multiplíquense del mismo modo las dedecenas del multiplicador por todo el multiplicando, poniendo el producto debajo del primero, pero corriendo un lugar hácia la izquierda, ya que se empieza por las decenas. 3.° Multiplíquense las centenas del multiplicador por todo el multiplicando, poniendo el producto debajo del segundo, y corriendo dos lugares; así sucesivamente, hasta quel se haya multiplicado todo el multiplicador por todo el mutiplicando. Súmense, despues de tirada una raya, todos los productos parciales, y la suma será el producto total.

La demostracion de esta regla está bien clara en su misma esplicacion, y en lo que se ha dicho al multiplicar un compuesto por un díjito.

Ejemplos de multiplicacion.

1.°	2.°	3.°
7054	6304825	34806
× 28	× 462	× 6245
56432	12609650	174030
14108	37829950	139224
197,512	25219300	69612
	2,912,829,150	208836
		217,463,470

23. Si dado un número, ponemos un cero á su derecha, lo que en este número antes eran unidades se habrán convertido en decenas, las decenas en centenas, las centenas en millares, etc. Si añadimos dos ceros á su derecha, las unidades se habrán convertido en centenas, las centenas en millares, etc. Si añadimos tres ceros á su derecha, las unidades del número anterior serán millares, las decenas serán decenas de millar, etc. Así, por ejemplo, si tenemos el número 45, y añadimos un cero á su derecha se convertirá

en 450; si le añadimos dos ceros, será 4500, etc; verificándose en el primer caso que el 5 que antes eran unidades han pasado á ser decenas, y el 4 que eran decenas han pasado á ser centenas; y en el segundo el 5 se ha convertido en centenas, y el 4 en millares. De esto se infiere, que si se quiere multiplicar un número por 10, bastará colocar un cero á su derecha; por 100, dos ceros; por 1000, tres ceros; y en general, si se quiere multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se pondrán á la derecha de dicho número tantos ceros como haya despues de la unidad.

24. Todo número que termine en un cero se podrá descomponer en dos factores de los cuales el uno sea un 10; si termina en dos ceros se podrá descomponer en tres factores dos de los cuales sea cada uno un 10; y en general, todo número que termine en ceros podrá descomponerse en cierto número de factores entre los que se repetirá el 10 tantas veces, cuantos sean los ceros que contenga; ó mejor, si un número termina en un cero se podrá descomponer en dos factores de los cuales el uno sea un 10; si termina en dos ceros, uno de los factores podrá ser 100; si termina en tres factores el uno podrá ser 1000, etc. Así por ejemplo: el número $50 = 5 \times 10$; $500 = 5 \times 100 = 5 \times 10 \times 10$; $5000 = 5 \times 1000 = 5 \times 10 \times 10 \times 10$; etc. De esto se deduce, que siempre que uno de los factores ó ambos terminen en ceros, bastará multiplicar entre sí las cifras significativas, añadiendo al producto tantos ceros cuantos contengan cada uno de los factores juntos. Segun esto, si hemos de multiplicar 450 por 300, multiplicarémos el 45 por 3, y añadirémos tres ceros al producto en esta forma.

Multiplicando.	4 5 0
Multiplicador.	× 3 0 0
Producto.	1 3 5,0 0 0

25. La demostracion está, concretándonos al ejemplo anterior, en que si descomponemos los dos factores, ten-

drémos, $450 \times 300 = 45 \times 10 \times 3 \times 100 =$ (n.º 20) $45 \times 3 \times 10 \times 100$; pero (n.º 23) si el producto de 45 por 3 se ha de multiplicar por 10, bastará poner un cero á su derecha, y si este nuevo producto se ha de multiplicar por 100, bastará ponerle dos ceros á su derecha; luego esto equivale á multiplicar entre sí las cifras significativas, añadiendo á la derecha del producto cuantos ceros habia en los factores juntos.

26. Cuando en medio de las cifras del multiplicador haya uno ó mas ceros, supuesto, que cero multiplicado por cualquiera cantidad, siempre da cero, podrémos abreviar la operacion, dejando los ceros, y pasando luego á multiplicar el multiplicando por la cifra inmediata superior del multiplicador; empezando á colocar el producto debajo de aquella del multiplicador por lo cual se multiplica todo el multiplicando. Multiplíquese por esta regla 4837 por 309, y tendrémos.

$$\begin{array}{r} 4\,8\,3\,7 \\ \times\, 3\,0\,9 \\ \hline 4\,3\,5\,3\,3 \\ 1\,4\,5\,1\,1 \\ \hline 1{,}4\,9\,4{,}6\,3\,3 \end{array}$$

27. La prueba del multiplicar se podrá hacer dividiendo el producto por cualquiera de los factores, en cuyo caso el cociente habrá de ser el otro factor. Fúndase esto en la misma definicion del multiplicar. Segun esta, el producto contiene una porcion exacta de veces á cada uno de los factores. Luego, dividiendo el producto por uno de los dos, el cociente habrá de ser necesariamente el otro factor.

28. De la misma definicion de multiplicar se infieren las consecuencias siguientes: 1.ª si uno ó ambos factores crecen ó menguan, crecerá tambien ó menguará el producto; 2.ª si uno de los factores se hace el duplo, triplo, etc., el producto será tambien el duplo, triplo, etc,. y si uno de los factores se hace la mitad, tercio, etc. igual-

mente se verificará en el producto; 3.ª si uno de los factores se hace tantas veces mayor cuantas se hace menor el otro, el resultado no se altera; 4.ª si cada uno de los factores se multiplica por un número cualquiera, el producto será tantas veces mayor cuantas nos diga el resultado de haber multiplicado entre sí los dos factores nuevos introducidos.

29. Tres son los usos principales de la multiplicacion; 1.º dado un número hacerlo cierto número de veces mayor; 2.º conocido el valor de una unidad, averiguar el valor de muchas; 3.º reducir unidades de especie superior á unidades de especie inferior.

Para el primer uso, se multiplica el número dado por aquel que espresa con sus unidades las veces que se le quiere hacer mayor. Fúndase esto en la misma definicion del multiplicar; pues que no es mas que un caso particular de ella.

Para el segundo, se multiplica el valor de una unidad por el número de ellas. Fúndase en que la unidad multiplicada por un número cualquiera nos da el mismo número. Cuando pues se multiplica el valor de una unidad por un número, es lo mismo que multiplicar la unidad por dicho número, con sola la diferencia, que en lugar de la unidad se pone su igual que es su valor. Por tanto, multiplicando el valor de una unidad por un número cualquiera, obtendrémos el valor de dicho número. Así, por ejemplo: si quiero saber cuanto valen 8 varas de paño á 3 duros la vara, multiplicaré el 8 por 3, y tendré 24 duros, valo de las 8 varas.

El tercer uso viene á ser lo mismo que el segundo, bien que con distintos nombres. Por consiguiente, se multiplicará el número dado de unidades de especie superior por tantas unidades de especie inferior inmediata cuantas estén contenidas en una unidad de especie superior, y añadirémos al producto por via de suma las unidades de especie inferior mas inmediata que tal vez hubiera en el problema; este producto se multiplicará otra vez por tantas unidades de la especie inferior mas inmediata cuantas estén contenidas en una unidad de la especie del producto superior, añadiendo tambien por via de suma si alguna unidad de la especie inferior hubiera en el problema. Con el producto nuevo harémos lo mismo que con el anterior, y así sucesivamente, hasta llegar á las unidades de la última especie inferior.

Bajo este concepto, si siendo 1 duro = 5 pesetas, 1 peseta = 4 reales, quiero reducir á reales la cantidad de 6 duros, 2 pesetas, multiplicaré los 6 duros dados por 5 pesetas que es el valor de 1 duro; á este producto añadiré 2 pesetas que hay tambien en el problema; despues multiplicaré este resultado espresado en pesetas por 4 reales, porque es el valor de una peseta, y como no hay ningun real en el problema, el último producto espresará el valor de los 6 duros, 2 pesetas en valor de reales. Ejecutando la operacion, será como se ve en (M).

(M)

$$\begin{array}{r l}
6 \text{ duros } 2 & \text{p.}^{s} \\
\times\ 5 & \text{p.}^{s} \\
\hline
3\ 0 & \text{p.}^{s} \\
+\ 2 & \text{p.}^{s} \\
\hline
3\ 2 & \text{p.}^{s} \\
\times\ 4 & \text{reales.} \\
\hline
1\ 2\ 8 & \text{reales.}
\end{array}$$

Resuélvanse los ejemplos siguientes; 1.º Sabiendo que 1 vara = 4 palmos, 1 palmo = 4 cuartos; redúzcanse á cuartos 48 varas. 2.º Sabiendo que 1 quintal = 4 arrobas, 1 arroba = 25 libras, 1 libra = 16 onzas; ¿cuántas onzas forman 34 quintales, 3 arrobas? 3.º Sabiendo que 1 siglo = 100 años, 1 año = 12 meses, 1 mes = 30 dias, 1 dia = 24 horas; ¿cuántas horas hay en 4 siglos, 5 años, 3 meses, 20 dias, 8 horas? Dispondrémos el cálculo de cada uno de estos ejemplos como sigue.

1.°

```
  4 8 varas.
× 4 palmos.
-----------
1 9 2 p.s
× 4 cuartos.
-----------
7 6 8 cuartos.
```

2.°

```
      3 4 q.s 3 @
        × 4 @
-----------------
    1 3 6 @
      + 3 @
-----------------
    1 3 9 @
    × 2 5 libras.
-----------------
    6 9 5 libras.
  2 7 8
-----------------
  3 4 7 5 libras.
    × 1 6 onzas.
-----------------
2 0 8 5 0
3 4 7 5
-----------------
5 5,6 0 0 onzas.
```

3.°

4 siglos, 5 años, 3 meses, 20 dias, 8 horas.

```
× 1 0 0 años.
-------------
  4 0 0 años.
    + 5 años.
-------------
  4 0 5 años.
  × 1 2 meses.
-------------
  8 1 0
4 0 5
-------------
4 8 6 0 meses.
    + 3
-------------
4 8 6 3 meses.
  × 3 0 dias.
-------------
1 4 5 8 9 0 dias.
      + 2 0
-------------
1 4 5 9 1 0 dias.
      × 2 4 horas.
-------------
5 8 3 6 4 0 horas.
2 9 1 8 2
-------------
3 5 0 1 8 4 0 h.s
          + 8 h.s
-------------
3,5 0 1,8 4 8 horas.
```

Dividir números enteros.

30. Dividir en general es, *averiguar cuantas veces una cantidad contiene á otra.* Por consiguiente, dividir en Aritmética es, *averiguar cuantas veces un número contiene á otro.* El número que contiene se llama *dividendo*, el contenido se llama *divisor*, el resultado que se obtiene dividiendo un número por otro, se llama *cociente*, y el dividendo y divisor juntos toman el nombre de *términos de la division.* De esta definicion se infiere, que multiplicando el cociente por el divisor se ha de obtener el dividendo; porque, siendo el cociente el número de veces que el divisor está contenido en el dividendo, repetido el divisor el mismo número de veces que nos diga el cociente, ha de salir de nuevo el dividendo.

31. Tres son los casos que pueden ocurrir en la division de números enteros; á saber: dividir un díjito por otro; dividir un compuesto por un díjito; y dividir un compuesto por otro.

32. Si he de indicar por ejemplo la division de 6 por 2, lo podré hacer de los modos siguientes:

$$\frac{6}{2} \qquad {}^{6}/_{2} \qquad 6 : 2 \qquad 6\ \underline{/2\quad}$$

Hé ahi los cuatro modos como puede indicarse la division de un número por otro. En cada uno de estos casos se lee, 6 dividido por 2, siendo 6 el dividendo y 2 el divisor. Tambien podemos espresar una division, leyendo el dividendo por los numerales cardinales, y el divisor por los numerales partitivos, si este no llega á 10; y si llega ó pasa de 10, podrá leerse por los numerales cardinales, añadiendo la terminacion *avos*. Asi las espresiones siguientes:

$$\frac{4}{3} \qquad \frac{8}{6} \qquad \frac{7}{10} \qquad \frac{14}{15}$$

podrán leerse cuatro dividido por tres, ó cuatro tercios;

ocho dividido por seis, ú ocho sextos; siete dividido por diez, ó siete dienavos; catorce dividido por quince, ó catorce quinceavos.

TABLA DE DIVIDIR.

1 / 0=∞
2 / 0 ∞
3 / 0 ∞
etc / 0 ∞

1 / 1 1
2 / 1 2
3 / 1 3
4 / 1 4
5 / 1 5
etc / 1 etc

La mitad
De 2 1
» 4 2
» 6 3
» 8 4
» 10 5
» 12 6
» 14 7
» 16 8
» 18 9

El tercio
De 3 1
» 6 2
» 9 3
» 12 4
» 15 5
» 18 6
» 21 7
» 24 8
» 27 9

El cuarto
De 4 1
» 8 2
» 12 3
» 16 4
» 20 5
» 24 6
» 28 7
» 32 8
» 36 9

El quinto
De 5 1
» 10 2
» 15 3
» 20 4
» 25 5
» 30 6
» 35 7
» 40 8
» 45 9

El sexto
De 6 1
» 12 2
» 18 3
» 24 4
» 30 5
» 36 6
» 42 7
» 48 8
» 54 9

El septimo
De 7 1
» 14 2
» 21 3
» 28 4
» 35 5
» 42 6
» 49 7
» 56 8
» 63 9

El octavo
De 8 1
» 16 2
» 24 3
» 32 4
» 40 5
» 48 6
» 56 7
» 64 8
» 72 9

El nono
De 9 1
» 18 2
» 27 3
» 36 4
» 45 5
» 54 6
» 63 7
» 72 8
» 81 9

El decimo
De 10 1
» 20 2
» 30 3
» 40 4
» 50 5
» 60 6
» 70 7
» 80 8
» 90 9
» etc etc

33. Segun la definicion de dividir, el dividendo nunca podrá ser menor que el divisor. Todo número dividido por sí mismo, dará por cociente la unidad. Todo número dividido por la unidad, dará por cociente el mismo número.

Cero dividido por un número cualquiera, siempre dará por cociente cero. Mas adelante verémos, que un número cualquiera dividido por cero nos dá lo que se llama *infinito*.

34. Para saber dividir un número díjito por otro díjito, bastará saber la anterior tabla de dividir, y la tabla de multiplicar; ya que el cociente multiplicado por el divisor produce el dividendo. Cuando pues hayamos de dividir un díjito por otro, buscarémos y pondrémos aquel número que multiplicado por el divisor produzca el dividendo. Así: si hemos de dividir 4 por 2, el cociente será 2; porque $2 \times 2 = 4$. Tendré pues, $^4/_2 = 2$, y leeré, 4 dividido por 2 igual á 2. De la misma manera, $^6/_3 = 2$; $^6/_2 = 3$; $^8/_2 = 4$; $^9/_3 = 3$.

35. El verdadero cociente nunca podrá ser tal que multiplicado por el divisor produzca un número mayor que el dividendo. A veces acontece, que el cociente no está contenido un número exacto de veces en el dividendo: entonces se pone aquel número que multiplicado por el divisor se acerque lo mas posible al dividendo: se resta mentalmente el producto del mismo dividendo, y á la derecha del cociente pondrémos un poco mas elevado la resta, y bebajo de ella el mismo divisor separado de la resta por medio de una raya de division. Sea, por ejemplo, que hayamos de dividir 8 por 3, y diré; 8 dividido por 3 tocan 2 que multiplicado por 3 da 6; ahora diré: de 6 á 8 van 2 que como no se pueden dividir por 3, indicaré su division de esta suerte $^2/_3$. Será pues $^8/_3 = 2\,^2/_3$; y leeré; ocho dividido por tres igual á dos y dos tercios. Fúndase esta regla en que, no cabiendo el 3 exactamente en 8, se descompone el 8 en dos partes tales como $6 + 2$, de las cuales la primera contiene exactamente al 3 dos veces. Divido pues al 6 por 3 y tocan 2 por cociente; pero como no es el 6 solamente lo que se ha de dividir por 3, sino $6 + 2 = 8$, despues de haber dividido al 6 por 3, me toca dividir al 2 tambien por 3; mas, como el 2 dividendo es menor que el 3 divisor, ha de quedar indicada solamente la operacion. Así: $^5/_2 = 2\,^1/_2$, $^5/_3 = 1\,^2/_3$, $^9/_5 = 1\,^4/_5$, etc.

36. Para dividir un compuesto por un díjito, colóquese el divisor á la derecha del dividendo separado por una raya que baja de arriba á bajo, y otra debajo del divisor. Véase si la primera cifra del dividendo contiene el divisor, y sepárese dicha cifra con una coma; si la primera cifra del dividendo no contiene el divisor, sepárense dos cifras con una coma, consíderese lo separado por la coma como un dividendo parcial, y divídáse por el divisor; póngase al cociente debajo del divisor, multiplíquese entre sí, y réstese mentalmente el producto del dividendo parcial, y póngase debajo de él la resta; al lado de la resta bájese el número siguiente del dividendo, y sepárese con una coma, para saber que ha entrado ya en cuenta; divídase la resta junto con la otra cifra por el divisor, y se tendrá la segunda cifra del cociente; multiplíquese la segunda cifra del cociente por el divisor, y réstese del dividendo parcial: al lado de la resta póngase la otra cifra inmediata del dividendo, pártase por el divisor, y así prosígase hasta que se hayan bajado todas las cifras, en cuyo caso, si queda resta, se pondrá en forma de division del mismo modo que se ha dicho en la regla de dividir un díjito por otro. El número así obtenido será el cociente que se busca. Débese advertir, que si alguna vez el dividendo parcial no contiene el divisor, se pone cero en el cociente, y entonces al lado del dividendo parcial se baja la otra cifra, continuando la division, como queda esplicado.

37. Dividamos por esta regla 5784 por 3. Separaré el 5 con una coma, y diré; 5 dividido por 3 da 1; $1 \times 3 =$ 3 que restado de 5 da 2; 2 junto con el 7 son 27 que partido por 3 da 9: $9 \times 3 = 27$ que restado de 27 da cero: 8 dividido por 3 da 2; $2 \times 3 = 6$ que restado de 8 da 2; 2 junto con el 4 son 24 que partido por 3 da 8; $8 \times 3 =$ 24 que restado de 24 da cero. Por lo que, el cociente seria 1928.

Ordenados el dividendo y divisor, y ejecutando la regla como se ha dicho, será.

$$\begin{array}{l|l} 5,7,8,4, & 3 \\ \hline 27 & 1928 \\ \ \ 08 & \\ \ \ \ 24 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

38. La razon de esta práctica consiste en que, dividiendo todas las partes del dividendo por el divisor, queda partido todo el dividendo por el divisor.

39. Dividir un número por otro, es lo mismo que tomar de dicho número las partes que nos diga el divisor. Por tanto, la division de un compuesto por un díjito podrá hacerse tambien tomando la parte que nos diga el divisor de cada una de las partes del dividendo: y si en alguna de estas operaciones hubiera resta, se reducirá á la especie del órden inmediato inferior multiplicándola por 10, á cuyo producto se añadirán las unidades que en el dividendo hayan de este mismo órden: de esto se tomará la parte pedida, y así sucesivamente hasta haberse tomado la parte de todo el dividendo, en cuyo caso, si queda resta, se pondrá en forma de division conforme se ha dicho en la division de un díjito por otro. Dispónese la operacion, poniendo á la izquierda la parte que se haya de tomar, en seguida el dividendo, luego el signo igual, y á su lado el cociente. Así, dividir el número anterior 5784 por 3, será lo mismo que tomar un tercio de dicho número. Dispondrémos pues el cálculo como se ve en (A)

(A) $^1/_3$ de $5784 = 1928$.

y diremos: el $^1/_3$ de 5 es 1; $1 \times 3 = 3$, de 3 á 5 van 2 que con el 7 son 27: el $^1/_3$ de 27 es 9: $9 \times 3 = 27$, de 27 á 27 va cero: el $^1/_3$ de 8 es 2; $2 \times 3 = 6$, de 6 á 8 van 2 que con el 4 son 24; el $^1/_3$ de 24 es 8; $8 \times 3 = 24$, de 24 á 24 va cero.

40. Para dividir un compuesto por otro seguirémos un

método análogo al que queda esplicado en la division de un compuesto por un díjito. Colóquense los dos términos de la division como allí se dijo. Sepárense con una coma de izquierda á derecha del dividendo cuantas cifras sean necesarias para contener el divisor: pártase aquel dividendo parcial por el divisor, colóquese el cociente debajo de él, multiplíquense entre sí, y réstese mentalmente el producto del dividendo parcial; al lado de la resta bájese la cifra inmediata del dividendo, y todo junto formará un nuevo dividendo parcial; pártase por el divisor, póngase el cociente debajo de él, multiplíquense entre sí, y réstese el producto de dicho dividendo; al lado de la resta bájese el periodo siguiente, y continúese del mismo modo hasta haber bajado todas las cifras, en cuyo caso, si queda resta, se pondrá en forma de division, como queda dicho en la division de un díjito por otro. El número así obtenido será el verdadero cociente que se busca; pues que habiéndose dividido cada una de las partes del dividendo por todo el divisor, quedará dividido todo el dividendo por todo el divisor.

Divídase por esta regla 347536 por 68. Ejcutarémos la operacion del modo siguiente.

```
3 4 7, 5, 3, 6,     / 6 8
0 0 7 5             -----------
    0 7 3            5 1 1 0 56/68
      0 5 6
```

41. Cuando el divisor es elevado, no puede conocerse á primera vista, cual es el verdadero cociente. Para no ser tan engorrosa la operacion, y no tener que hacer tanteos, podrán seguirse las dos reglas siguientes que, aunque no sean absolutamente infalibles, dan cuasi siempre el verdadero resultado. 1.ª Cuando la segunda cifra del divisor sea 8, ó 9, se considerará la primera cifra del divisor con una unidad mas de la que tiene, y lo que resulte de dividir la primera ó dos primeras cifras del divi–

dendo por la primera del divisor considerada con una unidad mas de la que tiene, será regularmente el cociente que se busca. Sin embargo, al tiempo de hacer la multiplicacion, se tomará la primera cifra del divisor con su verdadero y primitivo valor.

2.ª Si la segunda cifra del divisor no es 8, ó 9; ó bien en general; pártase la primera ó dos primeras del dividendo por la primera del divisor con el mismo valor que tiene; antes de escribir el cociente, multiplíquese por la misma primera del divisor, y réstese de la primera ó dos primeras del dividendo que se han tomado: entonces véase si la resta junto con la cifra inmediata del dividendo contiene la segunda del divisor el mismo número de veces ó un número mayor que la primera ó las dos primeras del dividendo contenian la primera del divisor; si es así, el cociente regularmente será el verdadero; de otro modo se irán rebajando unidades al cociente presunto, hasta que se verifique lo esplicado.

Divídase segun esta regla 2,357,804 por 694; y dispuesto el cálculo como se ve en (A) separadas las cuatro primeras cifras del dividendo necesarias para contener el divisor, dirémos; 23 dividido por $7=3$; ahora multiplicarémos el 3 por el divisor 694, restarémos el producto de 2357 diciendo; $3\times4=12$, de 12 á 17 van 5 que lo pongo debajo del 7; $3\times9=27,+1$ que llevaba son 28, de 28 á 35 van 7 que lo pondrémos debajo del 5; $3\times6=18+3$ que llevábamos son 21, de 21 á 23 van 2 que los pondrémos debajo del 3, y la resta será 275: á su lado bajarémos el 8 y tendrémos 2758, y dirémos, 27 partido por 7 da 3, que multiplicado por el divisor, y restado el producto del dividendo 2758 nos da una resta de 676; al la-

(A)

2 3 5 7,8,0,4,	/ 6 9 4
0 2 7 5 8	3 3 9 7 $^{386}/_{694}$
0 6 7 6 0	
0 5 1 4 4	
0 3 8 6	

do de este bajarémos el cero, formando así un dividendo parcial de 6760, y dirémos; 67 partido por 7 da 9, que multiplicado por el divisor y restado del dividendo, nos queda 514: bajando á su lado el 4, forma un nuevo dividendo de 5144, y dirémos; 51 partido por 7 da 7, que multiplicado por el divisor, y restado de dicho dividendo nos da de resta 386; y como no hay mas cifras que bajar la pondrémos en forma de division.

Divídase 125,784 por 347, y dispuesto el cálculo como se ve en (B), despues de separadas las cuatro primeras cifras necesarias para contener el divisor, dirémos; 12 dividido por 3 primera del divisor da 4;

(B)

```
1 2 5 7,8,4,    / 3 4 7
0 2 1 6 8        3 6 2 170/347
  0 0 8 6 4
      1 7 0
```

$4\times3=12$, de 12 á 12 va cero que junto con el 5 es 5; 5 partido por 4 segunda del divisor da 1. Como vemos que 1 es menor que 4 primer cociente presunto, inferirémos que se ha de rebajar el 4, y dirémos de nuevo: 12 partido por 3 dará 3; $3\times3=9$, de 9 á 12 van 3 que con el 5 son 35; 35 partido por $4=8$, y como 8 es mayor que 3, este será el verdadero cociente: multiplicado el 3 por el divisor y restado del dividendo parcial nos da 216: bajando á su lado el 8, tendrémos un nuevo dividendo 2168, y diremos; 21 partido por $3=7$; $3\times7=21$, de 21 á 21 va cero que con el 6 es 6; 6 partido por $4=1$. Esto nos dice que hemos de rebajar el cociente 7, y así dirémos de nuevo: 21 partido por 3 dará 6; $6\times3=18$, de 18 á 21 van 3 que junto con el 6 son 36; 36 partido por 4 da mas de 6; luego este será el verdadero cociente. Multiplicándolo ahora por el divisor y restado del dividendo parcial, nos ofrece por resta 86; bajando á su lado el 4, tendrémos por dividendo 864 y dirémos; 8 partido por 3 da 2; $2\times3=6$, de 6 á 8 van 2 que junto con el 6 son 26; 26 partido por 4 da mas de 2; luego este será el verdadero cociente. Multiplicándolo ahora por el divisor, y restado del dividendo nos da 170 que pondrémos en forma de division, por no haber mas cifras que bajar.

42. De la definicion de la division se deducen las consecuencias siguientes: 1.ª En toda operacion de dividir si el dividendo crece ó mengua, crece ó mengua tambien el cociente, porque entonces contiene mas ó menos veces al divisor. 2.ª Si el divisor crece el cociente disminuye, y si el divisor disminuye el cociente crece, porque en el primer caso el divisor está menos veces contenido en el dividendo, y en el segundo está mas veces contenido. 3.ª Si el dividendo y divisor se multiplican ó parten por un mismo número, el cociente no se altera; porque cuanto habria de haber aumentado por parte del dividendo, tanto habria disminuido por parte del divisor.

43. De esto se infiere que toda division cuyos términos acaban en ceros podrá abreviarse, suprimiendo igual número de ceros de dividendo y divisor. Fúndase esto en que, segun el sistema décuplo de numeracion, suprimir igual número de ceros de dividendo y divisor, es dividir á los dos por un mismo número, á saber, por lo que vale la unidad seguida de tantos ceros cuantos se han tachado. Así, dividiendo 57800 por 300, y practicando la regla que se acaba de establecer, será:

5,7,8,(0 0	/ 3(0 0	=	5,7,8	/ 3
2 7	1 9 2 $^2/_3$		2 7	1 9 2 $^2/_3$
0 0 8			0 0 8	
2			2	

44. Tambien podrá abreviarse cuando el divisor solamente termina en ceros. Entonces se separarán con una media luna (los ceros del divisor, y con otra media luna tantas cifras á la derecha del dividendo cuantos ceros habia en el divisor. Se dividirá entonces lo que haya quedado á la izquierda de la media luna del dividendo por lo que haya quedado separado tambien por la media luna del

divisor. Si despues sobra resta, se añadirán las cifras separadas por la media luna, y juntos se pondrán en forma de division, dejando por divisor el primitivo inclusos los ceros. Si no sobra resta, se pondrán solamente en forma de division las cifras separadas por la media luna.

Divídase segun esta regla 45783 por 3500, y será:

4 5,7,(8 3	/ 3 5(0 0
1 0 7	1 3 $^{283}/_{3500}$
0 0 2 8 3	

Fúndase esta regla en que, cada dividendo podrá descomponerse en dos sumandos, uno de los cuales termine en tantos ceros como terminaba el divisor. Dividiendo entonces á cada uno de los dos sumandos por el divisor, equivaldrá á dividir por este todo el dividendo. Pero para el primer sumando se podrá aplicar la regla anterior; para el segundo, como es menor que el divisor, se habrá de indicar la operacion. Así pues, juntando el segundo sumando, que es lo separado por la media luna, con la resta que tal vez resulte en el primer sumando, tendrémos, que de todo esto se habrá de indicar la operacion conforme se ha esplicado. Concretándonos al ejemplo anterior, será:

45783 / 3500 = (45700 + 83) / 3500; pero prescindiendo de los ceros en el primer sumando, será:

4 5 7(0 0	/ 3 5(0 0
1 0 7	1 3
0 0 2 centenas.	

Ahora hemos de dividir el segundo sumando 83 por 3500; pero como 83 es menor que el divisor, se habrá de indicar la operacion. Por lo que, 83 es la resta que ha quedado; pero como tambien habian sobrado de resta las 2 centenas, tenemos que 283 es la resta total que se ha de haber puesto en forma de division.

45. Segun lo que se ha dicho en la definicion de dividir, la mejor prueba será multiplicar el cociente por el divisor, agregando al producto por via de suma la resta, que tal vez haya, cuya operacion nos dará el dividendo.

Usos del dividir.

46. Seis son los usos principales del dividir: 1.º averiguar sencillamente cuantas veces un número contiene á otro: 2.º repartir un número de cosas entre varios sujetos: 3.º tomar una parte exacta de un número, como, por ejemplo, una mitad, un tercio, etc.: 4.º dado el valor de muchas unidades averiguar el valor de una: 5.º dado el valor de muchas unidades, y al mismo tiempo el de una, averiguar cuantas unidades corresponden: 6.º reducir unidades de especie inferior á unidades de especie superior.

47. El primer uso se resuelve partiendo el número mayor por el menor. Así, si queremos saber cuantas veces el número 24 contiene al 4, dirémos: $24 : 4 = 6$, y este cociente espresa las veces que el 4 está contenido en 26.

El segundo se resuelve partiendo el número de cosas por el número de sujetos. Así, si queremos repartir 32 duros entre 4 sujetos, dirémos: $^{32}/_{4} = 8$, y este cociente será lo que tocará á cada uno.

El tercer uso se resuelve partiendo el número dado por el número que indica la parte que se quiere tomar. Así, si queremos tomar un tercio de 234, dirémos: $234 : 3 = 78$: ó bien el $^{1}/_{3}$ de $234 = 78$.

El cuarto uso se resuelve, partiendo el valor total por el número de unidades. Así, si sabiendo que 60 varas de paño valen 300 duros, queremos saber cuanto vale una vara, dirémos: $300 : 60 = 5$ duros, y este cociente será lo que valdría cada vara.

El quinto uso se resuelve, partiendo el valor total empleado por el valor de una unidad, y el resultado es el número de unidades que tocan. Así, si queremos saber cuantos sombreros se han comprado, en el supuesto de haber empleado 600 duros para su compra, y costando 4 duros cada uno, dirémos 600 : 4 = 150, y este resultado nos dice el número de sombreros comprados.

El sexto uso se resuelve, dividiendo el número de unidades de especie inferior por tantas unidades de la misma, cuantas estén contenidas en una unidad de especie superior mas inmediata; el resultado se divide otra vez por tantas unidades de la misma especie cuantas estén contenidas en una unidad mas inmediata superior, y así sucesivamente, hasta haber llegado á las unidades de la última especie superior. Débese advertir aquí, que en esta reduccion las restas, si alguna hay, no se ponen en forma de division como se dijo (n.º 35) en razon á tener denominacion determinada las unidades que las componen; sino que se dejan con el nombre que les pertenezca debajo sus propios dividendos.

Así, para reducir á cargas un número de libras reducirémos las libras dadas á arrobas, especie superior inmediata; las arrobas á quintales; los quintales á cargas. Si hemos de reducir un número de reales á onzas de oro; reducirémos primero los reales dados á pesetas, dividiéndolos por 4 reales, en atencion á que 1 peseta = 4 reales; las pesetas las reducirémos á duros dividiéndolas por 5, porque un duro = 5 pesetas; finalmente reducirémos los duros á onzas de oro, dividiéndolos por 16, pues que 1 onza = 16 duros.

Ejemplo. ¿Cuantas onzas de oro hay en 4568 reales? Dispondrémos el cálculo como sigue:

```
4,5,6,8, r.s  / 4 r.s
0 5           ---------
  1 6          1 1,4,2, p.s  / 5 p.s
  0 0 8          0 1 4       ----------
      0 r.s        0 4 2      2 2,8, d.s  / 1 6 d.s
                     2 p.s    0 6 8       ---------
                                0 4 d.s    1 4 onzas.
```

Tendrémos pues, que en 4568 reales hay 14 onzas, 4 duros, 2 pesetas.

Divisibilidad de los números.

48. Llámase *múltiplo* de un número aquel que contiene á otro una porcion exacta de veces; tales serían, por ejemplo, el 8 respecto del 2 y del 4: el 20 respecto del 4 y del 5: el 18 respecto del 3 y del 6; etc: y llámase *submúltiplo*, *parte alícota*, *factor ó divisor* el que está contenido en otro una porcion exacta de veces, tales serían, por ejemplo, el 2 y el 3 respecto del 6; el 2, el 3, el 4 y el 6 respecto del 12; etc.

49. Llámase *número primo* aquel que solo es divisible por sí mismo y por la unidad, como el 3, el 5, el 7, el 11, etc: y llámase *factor compuesto* todo número que á mas de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es tambien por otros números: tales serían, por ejemplo, el 4, que puede dividirse por el 2, además de serlo por 4 y por 1: el 6 que además de ser divisible por 6 y por 1, lo es tambien por 2 y por 3; el 8, el 9, el 10, etc.

50. Llámase parte alicuanta aquel número que está contenido en otro, pero no una porcion exacta de veces. Tales serían, por ejemplo, el 6 respecto del 20; pues que 6 está contenido en 20, pero no una porcion exacta de veces, sino 3 veces y $^2/_6$: el 5 respecto de 24: el 4 respecto de 18; etc.

51. Para la divisibilidad de los números se conocen estas reglas;

1.ª Un número podrá dividirse por 2 cuando termina en cero ó en cifra par; como 10, 80, 100, 14, 26, 38, etc.

2.ª Todo número podrá dividirse por 3 cuando sus diferentes órdenes de unidades sumados como unidades sencillas den un 3 ó un múltiplo de 3. Tal sería, por ejemplo, 2334, cuyos diferentes órdenes de unidades sumados como unidades sencillas dan $2 + 3 + 3 + 4 = 12$, esto es un múltiplo de 3.

3.ª Todo número podrá dividirse por 5 cuando termina en cero ó en 5, como 10, 15, 20, 35, 120, 245, etc.

4.ª Todo número podrá dividirse por 4 cuando termina en ceros, ó cuando sea divisible por 4 el número formado por sus decenas y unidades, como 200, 100, 500, 328, 112, 124, etc.

5.ª Todo número podrá dividirse por 6 cuando tenga á la vez mitad y tercio; como 300, 126, 624, etc.

6.ª Todo número podrá dividirse por 8 cuando termine en tres ó mas ceros, ó cuando tenga octavo el número formado por sus centenas, decenas y unidades; como 100, 4000, 5328, 43816, etc.

7.ª Todo número tiene noveno cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 9; como 342, 1548, 4833, etc.

8.ª Todo número que termine en un cero será divisible por 10; por 100 si termina en dos ceros, por 1000 si termina en tres ceros, etc.

52. Para ver el fundamento de estas reglas, es preciso demostrar de antemano, que si un número divide exactamente las partes de un todo, dividirá tambien este todo sin dejar resíduo alguno. Fúndase esto en que, la suma es de la misma naturaleza que los sumandos; si pues los sumandos son números enteros, en razon á que cada uno de ellos ha podido dividirse exactamente por otro número, síguese que la suma debe serlo tambien; de otro modo la suma no seria igual al conjunto de los sumandos, y un entero seria igual á un quebrado. Así, si tenemos el número 12 que podrémos descomponer en $8+4$, y suponenos que 8 es divisible por 4, y 4 tambien, se seguirá, que 12 tambien lo será; y tendrémos, $(8/4+4/4)=12/4$; ó sea, $(2+1)=3$.

53. De esto se deduce, que todo número que divide exactamente á uno de los factores de un producto, divide tambien á este producto. Fúndase esto en lo que se acaba de decir en el párrafo anterior, pues que todo producto (n.º 18) no es mas que una suma abreviada en la que un factor mismo se repite una porcion de veces por sumando. Así, si tenemos el producto de $4\times 6=24$, y suponemos

que uno de sus factores, por ejemplo el 6, es divisible por 3, tambien lo será el producto 24; pues que $24 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 6 + 6 + 6 + 6$. Siendo pues, cada una de estas partes divisible por 3, tambien lo habrá de ser su todo; y así tendrémos; $24 : 3 = 8$, que es un número entero.

54. 1.º Esto sentado, la primera regla queda demostrada, observando que todo número que termina en cifra par ó cero, puede descomponerse en dos partes divisibles cada una por 2. Así: 246, por ejemplo, $= 240 + 6 = 24 \times 10 + 6$, es decir, en dos partes divisible ambas por 2; luego el número compuesto lo ha de ser tambien (n.os 52 y 53.) Si acaba en cero, como 240, tendrémos; $240 = 24 \times 10$, á saber, producto divisible por 2, por serlo uno de sus factores, á saber el 10; como lo mismo se demostraría en todos los demás ejemplos, podrémos establecer la primera regla (n.º 51.)

2.º Para probar la segunda regla, sea por ejemplo el número 234, cuyas cifras sumadas como unidades sencillas dan un 9; á saber, $2 + 3 + 4 = 9$, esto es un múltiplo de 3. Tendrémos, que $234 = 200 + 30 + 4 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 = 2 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 4 = 2 \times 99 + 2 + 3 \times 9 + 3 + 4 =$ (n.º 20) $2 \times 99 + 3 \times 9 + 2 + 3 + 4 = 2 \times 99 + 3 \times 9 + 9$; pero cada uno de los sumandos 2×99, 3×9 es divisible por 3, por serlo uno de sus factores; luego, siéndolo el otro sumando 9, ó sea la reunion de $2 + 3 + 4$, el número 334 que es igual al conjunto de unos y otros, será tambien divisible por 3. Como lo mismo sucedería en todos los demás ejemplos, tenemos demostrada la 2.ª regla (n.º 51).

3.º Para la 3.ª regla, supongamos el número 60, por ejemplo, tendrémos; $60 = 6 \times 10$, á saber, un producto divisible por 5, por serlo uno de sus factores, esto es el 10. Si el número fuese, por ejemplo, 245, tendriamos; $245 = 240 + 5 = 24 \times 10 + 5$, á saber, dos sumandos, divisibles cada uno por 5; luego lo será tambien toda la suma. Como demostrariamos lo mismo en todos los demás ejemplos, tendrémos por analogía probada la 3.ª regla (n.º 51.)

4.º Para la 4.ª regla, sea, por ejemplo, el número 200. Tendrémos que $200 = 2 \times 100 = 20 \times 10$; á saber, un producto divisible por 4, por serlo uno de sus factores, esto es el 20. Si el número fuese por ejemplo 532; tendriamos; $532 = 500 + 32$; á saber, dos sumandos divisibles cada uno por 4. Como lo mismo sucedería en todos los ejemplos, queda demostrada por analogía la 4.ª regla (n.º 51).

Por igual estilo pueden demostrarse las demás reglas sentadas en el (n.º 51).

55. Todo número puede considerarse como un producto compuesto de un número de factores. Para encontrar estos factores simples de un número cualquiera, podrá seguirse la siguiente regla. Póngase el número dado á la izquierda encima del papel ó pizarra, y tírese una raya de division de arriba abajo á su derecha. Véase entonces si el número dado es divisible por 2, ó sino por 3, ó por 5, y divídase por el menor de estos. Colóquese el divisor á la derecha del dividendo, en el mismo renglon y á la otra parte de la raya, y póngase el cociente debajo del dividendo. Hágase con este cociente la misma operacion que con el número dado que ha sido el primer dividendo; y así sucesivamente hasta llegar á un cociente que no pueda dividirse por otro número que por sí mismo y por la unidad, en cuyo caso se dividirá por sí mismo. Todos los números á la derecha de la raya serán los factores simples en que habrá podido descomponerse el número dado, y que multiplicados entre sí nos habrán de componer otra vez el mismo número.

Busquemos por esta regla los factores simples del número 120. Dispondrémos el cálculo como se ve en (A), donde observamos que hemos tomado sucesivamente tres mitades de 120, hasta llegar al cociente 15; luego hemos tomado un

(A)	120	2
	60	2
	30	2
	15	3
	5	5
	1	

tercio de 15 y nos ha dado por cociente 5, el cual le hemos dividido por sí mismo, dándonos por cociente 1. Los factores simples pues, son 2, 2, 2, 3, 5: y $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$.

56. De la combinacion de factores simples entre sí habrán de resultar factores compuestos. De la combinacion de factores compuestos con los simples habrán de resultar factores compuestos de á 3, de á 4, etc. segun las combinaciones que se hagan. Para buscar los factores compuestos podrá seguirse la siguiente regla. Multiplíquese cada factor simple por todos los que tenga debajo, y pónganse sucesivamente los productos á la derecha de otra raya tirada de arriba abajo, y en el mismo renglon de aquellos números por los que se habrá multiplicado cada factor: de este modo se tendrán los compuestos de á dos. A la derecha de estos tírese otra raya de arriba abajo; multiplíquese cada factor compuesto de á dos por todos los factores simples que tenga debajo, y pónganse los productos en los mismos renglones de los factores simples por los que se hayan multiplicado los compuestos: de este modo se tendrán los compuestos de á tres. Multiplíquense todos los compuestos de á tres por todos los simples segun se ha dicho en los demás casos, y se tendrán los compuestos de á cuatro. Continúese despues del mismo modo hasta que tengamos un compuesto igual al número dado.

Determinemos por esta regla los factores simples y compuestos del mismo número 120. Será como sigue:

120	2				
60	2	4			
30	2		8		
15	3	6	12	24	
5	5	10, 15	20, 30	40, 60,	120
1					

Segun se ve, hemos multiplicado el primer factor 2 por 2, 3, 5: obteniendo los productos 4, 6, 10 que hemos escrito en los mismos reglones de los factores simples por los que se iba multiplicando el primer factor 2. En la multiplicacion del primer factor por todos los demás, hemos omitido el multiplicarlo por el tercer factor; pues que como es igual al segundo, no nos habría dado ningun producto nuevo. Por igual razon hemos omitido la multiplicacion del segundo y tercero por todos los demás de abajo. Luego hemos multiplicado el factor 3 por el 5, escribiendo en el mismo reglon de este el producto. Por lo que, 4, 6, 10, 15, son los compuestos de á dos. Para obtener los de á tres, hemos multiplicado sucesivamente el 4 compuesto de á dos por 2, 3 y 5, y el 6 tambien por 5, escribiendo en los lugares esplicados los productos 8, 12, 20, 30, que son los compuestos de á tres. Para los de á cuatro, hemos multiplicado el compuesto 8 por 3 y por 5, y el 12 tambien por 5, escribiendo en los lugares correspondientes los productos 24, 40, 60, que son los compuestos de á cuatro. Finalmente hemos multiplicado el compuesto 24 por 5, y nos ha dado el mismo número 120; como debia necesariamente de ser así, por ser la combinacion el 24 por 5 igual á la combinacion de los factores simples entre sí, únicos elementos del número dado.

Menor múltiplo comun.

57. Entiéndese por menor múltiplo comun de varios números el número mas bajo, que contiene á cada uno una porcion exacta de veces.

Hallarémos el menor múltiplo comun de varios números, descomponiendo cada uno de ellos en sus factores simples, y formando un producto en el que cada factor simple entrará tantas veces cuantas se halle comprendido en el número en que lo esté mas: este producto es el menor múltiplo posible que se busca. Así, queriendo buscar el menor múltiplo comun de los números 20, 10, y 16, dispondrémos el cálculo como sigue.

20	2	10	2	16	2
10	2	5	5	8	2
5	5	1		4	2
1				2	2
				1	

Como el factor 2 se halla mas veces en 16 que en ningun otro, lo colocarémos en el producto tantas veces como se halla en 16, tomando el factor 5 del número 20, ó del número 10, puesto que no se halla mas que una vez en cada uno de ellos.

Luego, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$ será el menor múltiplo comun; porque solo tendrá el número de factores necesarios por qué sea divisible por cada uno de ellos.

Fúndase esto en que cada número es el producto final de todas las multiplicaciones sucesivas de los factores simples. Si pues, multiplicamos un número cualquiera ó el producto de sus factores simples por los divisores que sean peculiares á los demás, tendrémos un múltiplo de todos ellos, porque contendrá los factores de cada uno; y además será el menor múltiplo, porque de los demás habrán entrado el menor número posible de factores. Así, sabiendo que el 16 es el producto final de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 2 por 2; que el 20 es el producto de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 2 por 5: y que el 10 es el producto de las multiplicaciones sucesivas del 2 por 5; si tomamos el 16, ó sea, el producto del 2 por 2, por 2, por 2, y lo multiplicamos por 5, es decir, por el factor del 20 y del 10 que no lo es del 16, habrá de resultar un producto final de 80, mínimo múltiplo comun de 20, 10, y 16.

58. *Todo divisor del producto de los factores, que es primo con uno de dichos factores, es divisor del otro factor.*

Fúndase esto en que, un producto no es mas que el compuesto de los factores; por tanto, un producto que sea divisible por un número, ó lo es únicamente por ambos factores, ó á lo menos por uno de ellos que se repite una porcion de veces. Luego, si un número es divisor de un producto, es porque divide tambien á ambos factores ó á uno de ellos solamente. Si pues, un número es divisor de un producto, y no puede serlo de uno de los factores por ser primos entre sí, ha de serlo precisamente del otro factor. Así, si tenemos el producto $24 = 3 \times 8$, y suponemos que 24 es divisible por 4; como 4 y el factor 3 son primos entre sí, el 4 deberá dividir exactamente el otro factor 8. Si por ejemplo tenemos el producto $12 = 2 \times 6$, y suponemos que es divisible por tres; como 3 y el factor 2 son primos entre sí, el 3 deberá dividir exactamente al otro factor 6. Si por ejemplo tenemos el producto $6 = 2 \times 3$, y suponemos que es divisible por 2; como 2 y 3 son primos entre sí, el 2 deberá dividir al factor 2, etc.

59. De esto se sigue, que el producto de dos números, aunque sean primos entre sí, que sean ambos factores simples de un número, será tambien divisor del mismo número; pues que en este caso, dicho producto será uno de los factores compuestos del número dado. Así, si un número tiene á la vez mitad y tercio, tendrá tambien sexto; porque $2 \times 3 = 6$. Si tiene á la vez tercio y cuarto, tendrá tambien doceavo; porque $3 \times 4 = 12$. Si tiene á la vez 3 y 5, tendrá tambien quinceavo; porque $3 \times 5 = 15$, etc.

Máximo comun divisor.

60. Se llama máximo comun divisor de dos ó mas números *el número mayor que está contenido una porcion exacta de veces en cada uno de ellos*. Así el máximo comun divisor entre los números 40, 56, y 16 es 8, pues que el 8 reune las condiciones dichas.

61. Para hallar el máximo comun divisor de dos números seguirémos la siguiente regla: *pártase el mayor por el menor, luego el menor por el resíduo, este resíduo por el segundo y así siguiendo hasta llegar á un resíduo exacto, en cuyo caso el último divisor de la operacion es el máximo*

divisor comun de los números propuestos; y cuando el último divisor sea la unidad, los números propuestos son primos entre sí.

62. Búsquese por esta regla el máximo comun divisor de los números 40 y 56. Dispondrémos el cálculo como sigue:

56	40	16	8	*máximo comun divisor.*
	1	2	2	
16	8	0		

63. Cuando los números sean mas de dos, se busca primero el máximo comun divisor entre dos, luego se busca entre otro de los números dados y el divisor obtenido, continuando del mismo modo con todos los demás. Determinemos por este método el máximo comun divisor entre los números 78, 44 y 84.

Primera operacion.

84	78	6	*máximo divisor.*
	1	13	*comun entre 84 y 78.*
06	00		

Segunda operacion.

44	6	2	*Divisor buscado.*
	7	3	
2	0		

Segun puede verse en los dos ejemplos anteriores, hemos colocado cada divisor al lado de su propio dividendo separados con una raya de division; los cocientes debajo de sus divisores correspondientes en las casillas superiores, y los resíduos debajo de sus respectivos dividendos en las casillas inferiores.

64. Para su demostracion debemos saber, que si dos números tienen un divisor comun, este dividirá exactamente á la diferencia de estos números. Fúndase esto en que, en este caso se averigua la diferencia de dos números enteros, la cual deberá ser necesariamente un entero; porque la resta habrá de ser sin mezcla alguna de la misma naturaleza que el minuendo. De esto se deduce, que si dos números tienen un divisor comun, este tambien dividirá á la resta que quede de dividir el uno por el otro; pues en este caso el dividendo se compondrá de cierto número de veces el divisor, mas la resta; luego le podemos descomponer en dos partes, que la una sea igual al producto del cociente hallado por el divisor, y la otra la resta; pero como por el supuesto habia un número que dividia exactamente á ambos, y aquí tenemos descompuesto el mayor en dos partes que la una es divisible, á saber, la que equivale al producto del cociente por el divisor, resulta que la otra que es la resta, tambien deberá ser divisible por el otro divisor.

65. De esto se infiere, que el número hallado por la regla (n.º 60) es 1.º divisor comun de los números dados; porque lo es de las restas sucesivas: 2.º es el máximo divisor comun; porque es el primero que se ha encontrado. El divisor comun de dos ó mas números nunca podrá ser mayor que el menor; todo lo mas podrá ser igual á este. Luego no siendo el número menor divisor exacto de los números propuestos, lo habrá de ser una de las restas; y como de estas tomamos la primera en la cual ha habido cociente exacto, síguese que este es el máximo divisor buscado.

TEORÍA DE LOS QUEBRADOS.

66. Entiéndese por *quebrado* toda cantidad que espresa parte ó partes de la unidad; y llámase *quebrado de quebrado* la espresion de parte de partes de la unidad. Consta el quebrado de dos partes llamadas *numerador* la una, y *denominador* la otra, y el numerador y denominador juntos se llaman *términos del quebrado*. El numerador es el que numera ó cuenta las partes que se toman de la unidad, y el denominador es lo que da nombre al quebrado ó es lo que dice en cuantas partes se considera dividida la unidad. Los quebrados se escriben poniendo el denominador debajo del numerador, separados por medio de una raya, como, por ejemplo, el siguiente $^3/_4$, en que el 3 sería el numerador y el 4 el denominador. Se leen los quebrados, pronunciando primero el numerador por los numerales cardinales dos, tres, etc; y luego el denominador por los numerales partitivos tercio, cuarto, etc., cuando no llegue á 10; y si llega ó pasa de 10, por los numerales cardinales, añadiendo la terminacion *avos*. Así los quebrados siguientes $^3/_4$, $^2/_6$, $^4/_9$, $^5/_{10}$, $^7/_{14}$, se leerían; tres cuartos, dos sextos, cuatro novenos, cinco diezavos, siete catorceavos.

67. Divídense los quebrados en propios é impropios. Los primeros son aquellos cuyo numerador es menor que su denominador, tales son, por ejemplo, todos los del párrafo anterior; los segundos son aquellos cuyo numerador es igual ó mayor que su propio denominador, como, por ejemplo, $^6/_3$, $^{14}/_8$, $^5/_2$, etc.

68. Todo quebrado es una division indicada de numerador por denominador. Para su domostracion supongamos que se han de partir 3 pesetas entre 4 sujetos. Como hay mas sujetos que pesetas, es claro que habrá de tocar menos de una peseta á cada uno. Por lo que, lo mas natural será descomponer cada peseta en tantas partes cuantos sean los sujetos, á saber, en cuatro reales cada una, y entonces dar á cada uno un real de cada una de las pesetas,

tocando por lo mismo tres reales á cada sujeto. Pero como los reales de la primera peseta son iguales á los de la segunda y tercera, lo mismo será dar á cada uno un real de cada peseta, que dar á cada uno tres reales de una sola; lo que equivaldrá á darle tres cuartas partes de una peseta. Por lo que, $^3/_4$ de peseta ha sido igual á dividir las 3 pesetas entre 4.

69. De lo dicho en el párrafo anterior se infiere que, trocando los nombres de *dividendo* en *numerador* de *divisor* en *denominador* y de *cociente* en *quebrado* podrá aplicarse á los quebrados cuanto dejamos sentado en la division (n.º 42). Por esto, se verificará, 1.º que si una unidad se divide en un número cualquiera de partes iguales, como, por ejemplo, en 4 y despues la misma unidad se divide en un número mayor de partes v. g. en 6, cada una de estas últimas partes será menor que cada una de las primeras.

70. 2.º Que si permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado, su denominador aumenta, todo el quebrado disminuye; y si el denominador disminuye, todo el quebrado aumenta; y si el denomidador aumenta por via de multiplicacion, el quebrado disminuye por via de division; y si finalmente el denominador disminuye por via de division, todo el quebrado aumenta por via de multiplicacion. Por tanto, si varios quebrados tienen igual numerador, será mayor elque tenga menor denominador. Así de los quebrados $^3/_7$ $^3/_8$ $^3/_5$ $^3/_4$ etc., el mayor será el $^3/_4$, y menor el $^3/_8$.

Si dado el quebrado $^8/_2 = 4$, se multiplica el denominador por 2, ó bien se hace el duplo, todo el quebrado se habrá hecho la mitad de lo que era. Así, $\frac{8}{2\times2} = {}^8/_4 =$ 2, á saber, la mitad del 4 anterior, etc. Si dado el mismo quebrado $^8/_2 = 4$ se divide el denominador por 2 ó bien se hace la mitad, todo el quebrado se habrá hecho el duplo de lo que era. Así, $\frac{8}{2:2} = {}^8/_1 = 8$ á saber, duplo de 4, etc.

71. 3.º Que si permaneciendo uno mismo el denominador de un quebrado el numerador aumenta, todo el quebrado aumenta, y si el numerador disminuye, todo el quebrado disminuye; y si el numerador aumenta por via de multiplicacion ó disminuye por via de division, esto mismo hace el quebrado. Por tanto si varios quebrados tienen igual denominador, será mayor el que tenga mayor numerador y al revés. Así de los quebrados $^7/_8$ $^3/_8$ $^1/_8$ $^4/_8$, etc., será mayor el $^7/_8$ y el menor será $^1/_8$. Si dado el quebrado $^4/_2 = 2$, se multiplica el numerador por 2, ó bien se hace el duplo, tambien se habrá multiplicado por 2 el quebrado, ó lo que es lo mismo, se habrá hecho duplo el quebrado. Así $\frac{4\times2}{2} = {}^8/_2 = 4$, á saber, duplo de 2. etc. Si dado el mismo quebrado $^4/_2 = 2$, se divide por 2 el numerador, ó, lo que es lo mismo, se hace la mitad el numerador, tambien se verificará lo mismo en el quebrado. Así $\frac{4:2}{2} = {}^2/_2 = 1$ á saber, la mitad de 2, etc.

72. 4.º Que si los dos términos de un quebrado se multiplican ó parten por un mismo número, el quebrado no se altera. Así: $^4/_8 = \frac{4\times2}{8\times2} = \frac{4\times3}{8\times3} = \frac{4\times \text{etc.}}{8\times \text{etc.}} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{4:3}{8:3} = \frac{4:\text{etc.}}{8:\text{etc.}}$

Reduccion de quebrados á un comun denominador.

73. Los quebrados se reducen á un comun denominador multiplicando los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás, lo que en nada alterará el valor de cada uno, segun lo que se ha dicho en el párrafo anterior. Así, si queremos reducir á un comun denominador los quebrados $^3/_4 + {}^2/_5 + {}^1/_6$,

tendrémos: $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{3\times5\times6}{4\times5\times6}+\frac{2\times4\times6}{5\times4\times6}+\frac{1\times4\times5}{6\times4\times5}=\frac{90}{120}+\frac{48}{120}+\frac{20}{120}$.

74. Cuando dados varios quebrados el denominador de uno de ellos es múltiplo de los demás, podrá hacerse que queden reducidos á un comun denominador, de manera que todos tengan por denominador el múltiplo, lo que se conseguirá, multiplicando los dos términos de cada quebrado por aquel número que produzca el denominador múltiplo. Así, si tenemos los quebrados $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+\frac{7}{6}+\frac{5}{4}+\frac{2}{12}$, observarémos, que el denominador 12 es á la vez múltiplo de todos los demás denominadores; por lo que multiplicando los dos términos de cada quebrado por aquel número que en cada uno nos produzca por denominador el 12, los tendrémos todos reducidos al denominador múltiplo. Segun esto tendrémos: $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+\frac{7}{6}+\frac{5}{4}+\frac{2}{12}=\frac{1\times4}{3\times4}+\frac{3\times6}{2\times6}+\frac{7\times2}{6\times2}+\frac{5\times3}{4\times3}+\frac{2}{12}=\frac{4}{12}+\frac{18}{12}+\frac{14}{12}+\frac{15}{12}+\frac{2}{12}$

Simplificacion de quebrados.

75. Simplificar un quebrado, es convertir el quebrado dado en otro de igual valor, pero de mas sencilla espresion, lo que se consigue dividiendo por un mismo número los dos términos del quebrado. Con esto en nada se altera el quebrado, segun lo que se ha dicho (n.° 72.) Asi observarémos primero si los dos términos pueden dividirse por 2, luego por 3, luego por 5, etc. hasta que nos encontremos en un caso en que ambos términos no puedan dividirse por un mismo número. Practicando esta regla con el quebrado $\frac{20}{44}$, tendrémos; $\frac{20}{44}=\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$. Si por nuevo ejemplo tenemos el quebrado $\frac{200}{460}$, tendrémos;

$$\frac{200}{460}=\frac{200:2}{460:2}=\frac{100}{230}=\frac{100:2}{230:2}=\frac{50}{115}=\frac{50:5}{115:5}=\frac{10}{23}$$

Quebrados contínuos.

76. Cuando un quebrado comun no pueda simplificarse, puede reducirse á quebrado contínuo. Llámase quebrado contínuo aquel que tiene por numerador la unidad, y por denominador un entero mas un quebrado que tiene tambien por numerador la unidad, y por denominador un entero mas otro quebrado, y asi sucesivamente. Lógrase esto, dividiendo el numerador y denominador de cada quebrado por su propio numerador, lo que no altera en nada el quebrado segun lo esplicado (n.º 72).

77. Si tenemos, por ejemplo, el quebrado irreducible $^{37}/_{47}$ y aplicamos la regla dada en el párrafo anterior tendrémos:

$$\frac{37}{47}=\frac{37:37}{47:37}=\frac{1}{1+\frac{10}{37}}=\frac{1}{1+\frac{10:10}{37:10}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{7}{10}}}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{7:7}{10:7}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{3}{7}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{3:3}{7:3}}}}=$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}$$

2.° *Ejemplo.*

$$\frac{52}{185}=\frac{52:52}{185:52}=\cfrac{1}{3+\cfrac{29}{52}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{29:29}{52:29}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{23}{29}}}=$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{23:23}{29:23}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{23}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{6:6}{23:6}}}}=$$

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{6}}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{5:5}{6:5}}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

78. Como el método que hemos seguido ha sido dividir el denominador por el numerador, este por la resta, esta resta por la que queda de la division anterior, etc., resulta, que el método para transformar en quebrado contínuo un quebrado cualquiera, está reducido á encontrar el máximo comun divisor entre los dos términos del quebrado propuesto, y poner por numeradores siempre la uni-

dad, y por denominadores los cocientes enteros con el mismo órden que vayan saliendo.

Luego si queremos transformar en quebrado contínuo el $^{37}/_{47}$, hasta que tenga por numerador la unidad, buscarémos el máximo comun divisor entre sus dos términos, en esta forma:

47	37	10	7	3	1
	1	3	1	2	3
10	7	3	1	0	

Practicando lo mismo con el 2.º ejemplo del párrafo anterior tendrémos:

185	52	29	23	6	5	1
	3	1	1	3	1	5
29	23	6	5	1	0	

79. Por medio de estos cocientes se hallan con mucha sencilléz una multitud de quebrados, entre los cuales se encuentra el valor del propuesto. Para esto se colocan todos los cocientes en un renglon, y debajo de cada cociente se pone un quebrado correspondiente del modo siguiente. Pónganse primero dos quebrados; el primero que tenga por numerador la unidad y por denominador el cero; el segundo tenga por numerador el cero y por denominador la unidad. Puestos de este modo dichos quebrados en un reglon inferior al de los cocientes y antes de llegar á estos, multiplíquese cada cociente por el numerador del quebrado anterior á él en el renglon inferior, á este producto agrégase por via de suma el numerador del quebrado anterior á aquel cuyo numerador se ha multiplicado por el cociente, y esto formará el numerador de un nuevo quebrado que se pondrá debajo del cocien-

te respectivo; multiplíquese luego el mismo cociente por el denominador del quebrado anterior, á este producto agréguese por via de suma el denominador de aquel cuyo denominador se ha multiplicado por el cociente, y esto formará el denominador del quebrado que se pondrá debajo de su cociente respectivo: continúese del mismo modo hasta hallar el quebrado primitivo.

Practicando esta regla con el quebrado primero $^{37}/_{47}$ y poniendo los cocientes encontrados en el máximo comun divisor, tendrémos.

Cocientes.			1,	3,	1,	2,	3.
Quebrados.	$^1/_0$	$^0/_1$	$^1/_1$,	$^3/_4$,	$^4/_5$,	$^{11}/_{14}$,	$^{37}/_{47}$.

Ejecutando lo mismo con el segundo quebrado $^{32}/_{133}$, será:

Cocientes.			3,	1,	1,	3,	1,	5.	
Quebrados.	$^1/_0$	$^0/_1$	$^1/_3$,	$^1/_4$,	$^2/_7$,	$^7/_{25}$,	$^9/_{32}$,	$^{52}/_{183}$.	

80. Concretándonos al último ejemplo, para hallar un quebrado cualquiera, por ejemplo, $^7/_{25}$ que ocupa el sexto lugar hemos dicho; 3 cociente respectivo multiplicado por 2 numerador del quebrado anterior da 6; 6 + 1 numerador del otro quebrado anterior da 7. Para hallar el denominador, hemos dicho; 3 cociente respectivo multiplicado por 7 denominador del quebrado anterior da 21; 21 + 4 denominador del otro quebrado anterior da 25; por lo que se ha obtenido $^7/_{25}$. Del mismo modo se han hallado todos los demás.

81. Si en cada uno de los dos ejemplos anteriores reducimos á un comun denominador los quebrados que ocupan un lugar ímpar, y los que ocupan un lugar par, verémos que los que ocupan un lugar ímpar son mayores que el quebrado propuesto, y menores los que ocupan un lugar par, acercándose mas al quebrado propuesto, á medida que van aproximandose á él. Como esto se verifica en todos los casos, podrémos decir por

analogía, que todos los quebrados que ocupan un lugar ímpar, serán mayores que el primitivo, y menores los que ocupan un lugar par.

De esto y de lo dicho (n.º 70) se sigue, que si queremos saber el valor de varios quebrados de diferentes numeradores y denominadores, los podrémos reducir primero á un comun denominador, resultando despues mayor aquel que tenga mayor numerador, y al revés. Así, dados los quebrados $^3/_4$ y $^5/_8$, si queremos saber cual de los dos es mayor, tendrémos; $^3/_4$, $^5/_8 = \frac{3 \times 8}{4 \times 8}$ $\frac{5 \times 4}{8 \times 4} =$ $^{24}/_{32}$ $^{20}/_{32}$, de donde se saca, que, $^3/_4$ es mayor que $^5/_8$.

Sumar quebrados comunes.

82. Sumar quebrados es, *reunir en un solo valor el valor* de dos *ó mas quebrados homogéneos.* Tres son los casos que pueden ofrecerse en el sumar quebrados, á saber: sumar quebrados con quebrados; sumar un entero con un quebrado ó al revés, y sumar números mistos con otros números mistos.

83. Cuando se ha de sumar un quebrado con otros, podrá ser que todos tengan un comun denominador, ó que no lo tengan. En el primer caso se suman los numeradores entre sí, y se deja una sola vez por denominador el mismo, simplificándose despues el quebrado, si se puede, para obtener el resultado con la mayor sencillez posible. Fúndase esto en que en el numerador está el valor del quebrado: el denominador debe dejarse, porque es lo que da nombre al quebrado. Segun esto, súmense $^3/_6$ con $^5/_6$, y tendrémos; $^3/_6 + {}^5/_6 = \frac{3+5}{6} =$ $^8/_6$, y sacando en todos los casos de los quebrados los enteros que contengan, será finalmente $^8/_6 = 1 + {}^2/_6$.

2.º ejemplo.

Súmense $^1/_9 + {}^3/_9 + {}^5/_9 + {}^1/_9$, y será; $^4/_9 + {}^3/_9 + {}^5/_9$

$$+ {}^1/_9 = \frac{4+3+5+1}{9} = {}^{13}/_9 = 1\ {}^4/_9$$

84. Cuando se hayan de sumar quebrados de diferente denominador, se reducirán primero á un comun denominador, (porque deben ser homogéneos) y despues se sumarán como se ha dicho en el párrafo anterior. Así, si tenemos $^4/_6 + {}^3/_5$ será; $^4/_6 + {}^3/_5 = \frac{4\times5}{6\times5} + \frac{3\times6}{5\times6}$

$$= \frac{20}{30} + \frac{18}{30} = \frac{20+18}{30} = \frac{38}{30} = \begin{array}{l|l} 38 & 30 \\ \hline 08 & 1\ {}^8/_{30} \end{array}$$

Si por nuevo ejemplo tenemos $^4/_7 + {}^2/_3 + {}^5/_6$, será; $^4/_7$

$$+ {}^2/_3 + {}^5/_6 = \frac{4\times3\times6}{7\times3\times6} + \frac{2\times7\times6}{3\times7\times6} + \frac{5\times7\times3}{6\times7\times3} = {}^{72}/_{126}$$

$$+ {}^{84}/_{126} + {}^{105}/_{126} = {}^{261}/_{126} = {}^{87}/_{42} = {}^{29}/_{14}$$

85. Para sumar un entero con un quebrado, ó un quebrado con un entero, se pondrá el entero bajo la forma de quebrado, poniéndole por denominador la unidad, y entonces será el caso de sumar quebrados de diferente denominador como en el párrafo anterior. De este modo no se alterará en nada el entero, porque toda cantidad dividida por la unidad, da por cociente la misma cantidad (n.º 33). Así: $5 + {}^2/_3 = {}^5/_1 + {}^2/_3 = \frac{5\times3}{1\times3} + \frac{2\times1}{3\times1} = \frac{15}{3}$

$$+ \frac{2}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{17}{3}$$

Si tenemos que sumar 8 con $^3/_6$, será; $^3/_6$, $+ 8 = {}^3/_6$

$$+ {}^8/_1 = \frac{3\times1}{6\times1} + \frac{8\times6}{1\times6} = \frac{3}{6} + \frac{48}{6} = \frac{3+48}{6} = \frac{51}{6}$$

86. Cuando se ha de sumar un quebrado con un entero, dícese que se reduce el entero á la especie del quebrado que le acompaña. Para esto se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se agrega por via de suma el numerador, y se deja por denominapor el mismo. Fúndase esto en que por esta operacion se pone implicitamente el entero bajo la forma de quebrado.

Así: $5 + {}^2/_3 = \frac{5\times3+2}{3} = \frac{15+2}{3} = {}^{17}/_3$ (n.° 85). Si tenemos $8 + {}^4/_5$, será; $8 + {}^4/_5 = \frac{8\times5+4}{5} = {}^{44}/_5$, etc.

87. Para sumar números mistos con otros números mistos, se reducirán primero los quebrados á un comun denominador, si no lo tienen, y se sumarán despues los enteros con los enteros y los quebrados con los quebrados. Si la suma de los quebrados contiene algun entero, se sacarán estos, y formarémos una segunda suma, en la que pondrémos el quebrado resultante, y agregarémos á la suma de los enteros los que se hayan encontrado en la suma de los quebrados. Fúndase la regla dada en que un número misto no es mas que un entero y un quebrado, y los números que se suman deben ser homogéneos. Si se quisiera, tambien podría reducirse cada misto á quebrado, y sumar despues los quebrados resultantes.

Súmense segun esta regla $(8 + {}^5/_6) + (3 + {}^2/_6) + (9 + {}^4/_6)$ y tendrémos:

$$\begin{array}{l|l} 8.\ .\ .\ .\ 5 & \\ +3.\ .\ .\ .\ 2 & 6 \\ +9.\ .\ .\ .\ 4 & \\ \hline =20.\ .\ .\ .\ {}^{11}/_{6} & \\ \hline =21.\ .\ .\ .\ {}^{5}/_{6} & \end{array}$$

Si tenemos $(487 + {}^{3}/_{7}) + (582 + {}^{5}/_{7}) + (349 + {}^{6}/_{7})$, colocando como en el ejemplo anterior los enteros bajo enteros, y los numeradores unos debajo de los otros, poniendo una sola vez el denominador, será:

$$\begin{array}{l|l} 4\,8\,7.\ .\ .\ .\ 3 & \\ +5\,8\,2.\ .\ .\ .\ 5 & 7 \\ +3\,4\,9.\ .\ .\ .\ 6 & \\ \hline =1\,4\,1\,8.\ .\ .\ {}^{14}/_{7} & \\ \hline =1\,4\,2\,0.\ .\ . & \end{array}$$

Si hemos de sumar $853 + {}^{2}/_{5}$ con $454 + {}^{3}/_{4}$ y con $782 + {}^{1}/_{7}$ reducirémos primero los quebrados á un comun denominador, y tendrémos; ${}^{2}/_{5}\ {}^{3}/_{4}\ {}^{1}/_{7} = \frac{2\times4\times7}{5\times4\times7}\ \frac{3\times5\times7}{4\times5\times7}\ \frac{1\times5\times4}{7\times5\times4} = {}^{56}/_{140}\ {}^{105}/_{140}\ {}^{20}/_{140}$. Poniendo ahora los nuevos quebrados resultantes en lugar de los primeros tendrémos:

$$\begin{array}{l|l} 8\,5\,3.\ .\ .\ .\ \ \ 5\,6 & \\ +4\,5\,4.\ .\ .\ .\ 1\,0\,5 & 140 \\ +7\,8\,2.\ .\ .\ .\ \ \ 2\,0 & \\ \hline =2\,0\,8\,9.\ .\ .\ .\ {}^{181}/_{140} & \\ \hline =2\,0\,9\,0.\ .\ .\ .\ {}^{41}/_{140} & \end{array}$$

Restar quebrados comunes.

88. Restar quebrados *es hallar la diferencia entre dos quebrados homogéneos.* Tres son los casos que pueden ofrecerse, á saber; restar un quebrado de otro; restar un quebrado de un entero; y restar un número misto de otro número misto.

89. Si los quebrados tienen igual denominador, se restará el numerador del quebrado sustraendo del numerador del quebrado minuendo, dejándose una sola vez por denominador el mismo, simplificándose despues, si se puede. Fúndase en lo dicho (n.º 83). Así; si de $^9/_{12}$ hemos de restar $^4/_{12}$, tendrémos: $^9/_{12} - {^4/_{12}} = \frac{9-4}{12} = {^5/_{12}}$ Si de $^7/_9$ hemos de quitar $^4/_9$, será: $^7/_9 - {^4/_9} = \frac{7-4}{9} = {^3/_9} = {^1/_3}$

90. Si los quebrados tienen diferente denominador, para restarlos se reducirán primero á un comun denominador, y despues se restarán como se ha dicho en el párrafo anterior. Fúndase en lo dicho (n.º 84). Así, si de $^8/_9$ hemos de restar $^5/_7$, tendrémos: $\frac{8}{9} - \frac{5}{7} = \frac{8\times7}{9\times7} - \frac{5\times9}{7\times9} = \frac{56}{63} - \frac{45}{63} = \frac{56-45}{63} = \frac{11}{63}$. Si de $^6/_8$ hemos de quitar $^3/_7$, tendrémos; $\frac{6}{8} - \frac{3}{7} = \frac{6\times7}{8\times7} - \frac{3\times8}{7\times8} = \frac{42}{56} - \frac{24}{56} = \frac{42-24}{56} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

91. Para restar un quebrado de un entero, se pondrá primero el entero bajo la forma de quebrado, poniéndole por

denominador la unidad, y entonces tendrémos el caso del párrafo anterior. Fúndase en lo dicho (n.º 33). Así, si de 8 hemos de quitar $^3/_5$, tendrémos: $8 - {}^3/_5 = {}^8/_1 - {}^3/_5 =$

$$\frac{8\times5}{1\times5} - \frac{3\times1}{5\times1} = \frac{40}{5} - \frac{3}{5} = \frac{40-3}{5} = \frac{37}{5} = 7\ {}^2/_5$$

Si de 24 hemos de restar $^2/_3$, tendrémos; $24 - {}^2/_3 =$

$${}^{24}/_1 - {}^2/_3 = \frac{24\times3}{1\times3} - \frac{2\times1}{3\times1} = \frac{72}{3} - \frac{2}{3} = \frac{72-2}{3} = \frac{70}{3}$$
$$= 23\ {}^1/_3$$

92. Cuando se haya de restar un número misto de otro número misto, se reducirán primero los quebrados á un comun denominador, si no lo tienen, y despues se separarán los enteros de los quebrados, y se restarán los quebrados de los quebrados y los enteros de los enteros. Fúndase en que las cantidades que se han de restar, deben ser homogéneas. Así, si de 548 $^5/_8$ hemos de restar 349 $^2/_8$, los colocarémos bajo la forma siguiente:

$$\begin{array}{rrl} & 548\ldots\ 5 & \multirow{2}{*}{$\big|\ 8$} \\ - & 349\ldots\ 2 & \\ \hline = & 199\ldots\ {}^3/_8 & \end{array}$$

Si de 6484 $^8/_{15}$ hemos de restar 2986 $^5/_{15}$, tendrémos:

$$\begin{array}{rrl} & 6484\ldots\ 8 & \multirow{2}{*}{$\big|\ 15$} \\ - & 2986\ldots\ 5 & \\ \hline = & 3498\ldots\ {}^3/_{15} & \end{array}$$

93. Podrá suceder, que despues de reducidos los quebrados á un comun denominador, resulte el numerador del sustraendo mayor que el numerador del minuendo; en tal caso, agregarémos al numerador del minuendo una

unidad de los enteros, la cual valdrá tanto como el denominador comun; y entonces, de este agregado restarémos el numerador del sustraendo, cuidando despues de agregar una unidad á los enteros del sustraendo, paraque la resta no se altere. La unidad que se quita de los enteros del minuendo vale lo que nos dice el denominador comun; porque es lo mismo que reducir aquella unidad á la especie del quebrado que lo acompaña. Así, si de 845 $^5/_9$ hemos de restar 484 $^3/_4$, tendrémos primero: $^5/_9 - ^3/_4 =$

$\frac{5\times4}{9\times4} \quad \frac{3\times9}{4\times9} = {}^{20}/_{36} \quad {}^{27}/_{36}$. Colocando ahora enteros bajo enteros y quebrados bajo quebrados; y poniendo los últimos quebrados en lugar de los primeros, será:

$$\begin{array}{r} 8\,4\,5.\ .\ .\ .\ \ 2\,0 \\ -\ 4\,8\,4.\ .\ .\ .\ \ 2\,7 \\ \hline =3\,6\,0.\ .\ .\ .\ {}^{29}/_{36} \end{array} \Big|\ 36$$

Multiplicar quebrados comunes.

94. Multiplicar quebrados es, *tomar como á sumando un quebrado cuantas veces nos diga otro.* Tres son los casos que pueden ocurrir en esta multiplicacion; á saber, multiplicar un quebrado por otro; multiplicar un quebrado por un entero ó al revés; y multiplicar un número misto por otro número misto.

95. Para multiplicar un quebrado por un entero ó al revés, se multiplicará el numerador del quebrado por el entero; y poniendo el mismo denominador, tendrémos el quebrado producto que se busca. Fúndase en lo dicho, (n.º 71, 3.º) Así, si hemos de multiplicar 3 por $^4/_5$, tendrémos: $3 \times {}^4/_5 = \frac{3\times4}{5} = \frac{12}{5} = 2\,{}^2/_5$ Si hemos de mul-

tiplicar $^2/_3$ por 8, tendrémos $^2/_3 \times 8 = \frac{2\times8}{3} = {^{16}/_3} = 5\,{^1/_3}$

96. Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplicarán los numeradores entre sí, y tambien los denominadores, cuyos productos respectivos formarán el numerador y denominador del quebrado que se busca. Así, si hemos de multiplicar $^4/_5$ por $^3/_6$, tendrémos: $^4/_5 \times {^3/_6} =$

$\frac{4\times3}{5\times6} = {^{12}/_{30}} = {^6/_{15}} = {^2/_5}$. Si se ha de multiplicar $^3/_8$ por

$^4/_7$, tendrémos: $^3/_8 \times {^4/_7} = \frac{3\times4}{8\times7} = {^{12}/_{56}} = {^6/_{28}} = {^3/_{14}}$

Para la demostracion de esta regla, observarémos, que concretándonos al primer ejemplo, cuando se ha multiplicado el $^4/_5$ por 3, se ha hecho el quebrado $^4/_5$ tres veces mayor de lo que era (n.° 71, 3.°); pero como no se habia de multiplicar precisamente por 3, sino por una cantidad seis veces menor que 3, habrá de resultar el quebrado $^4/_5$ seis veces menor de lo que se ha hecho, lo que se conseguirá multiplicando su denominador 5 por el otro denominador 6 (n.° 70, 3.°). Como lo mismo se podría observar en todos los casos, podrémos sentar la regla dada.

97. Para multiplicar un número misto por otro, se reducirá en cada factor su entero á la especie del quebrado que lo acompaña, y se multiplicarán los quebrados resultantes segun la regla dada en el párrafo anterior. Dicha reduccion en nada alterará los factores, segun lo esplicado (n.° 85 y 86). Así, si hemos de multiplicar $5 + {^2/_3}$ por $4 + {^2/_5}$,

tendrémos: $(5 + {^2/_3}) \times (4 + {^2/_5}) = \left(\frac{6\times3+2}{3}\right) \times$

$\left(\frac{4\times5+2}{5}\right) = \left(\frac{15+2}{3}\right) \times \left(\frac{20+2}{5}\right) = {^{17}/_3} \times {^{22}/_5} =$

$\frac{17\times22}{3\times5}=\frac{374}{15}$ Si por nuevo ejemplo hemos de multiplicar $8+{}^1/_3$ por $25-{}^2/_4$, tendrémos: $(8+{}^1/_3)\times(25-{}^2/_4)$

$$=\left(\frac{8\times3+1}{3}\right)\times\left(\frac{25\times4-2}{4}\right)=\left(\frac{24+1}{3}\right)\times\left(\frac{100-2}{4}\right)$$

$$=\frac{25}{3}\times\frac{98}{4}=\frac{25\times98}{3\times4}=\frac{2450}{12}=\frac{1225}{6}$$

Dividir quebrados comunes.

98. Dividir quebrados es, *averiguar cuantas veces un quebrado contiene á otro.* Pueden suceder tres casos; á saber, dividir un quebrado por otro; dividir un quebrado por un entero, ó al revés; y dividir un número misto por otro número misto.

99. Para dividir un quebrado por otro, se multiplicará el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, y el producto formará el numerador del quebrado cociente: despues se multiplicará el denominador del quebrado dividendo por el numerador del quebrado divisor, y el producto formará el denominador del quebrado cociente. Asi, si hemos de dividir ${}^4/_5$ por ${}^6/_8$, tendrémos: ${}^4/_5:{}^6/_8=\frac{4\times8}{5\times6}={}^{32}/_{30}$. Si por nuevo ejemplo hemos de dividir ${}^5/_6$ por ${}^2/_3$, tendrémos; ${}^5/_6:{}^2/_3=\frac{5\times3}{6\times2}={}^{15}/_{12}={}^5/_4$

Para su demostracion observarémos que, concretándonos al primer ejemplo, si hubiesemos de haber dividido ${}^4/_5$ por 6, habria sido lo mismo que hacer dicho quebrado seis veces menor de lo que era, lo que se habría conseguido multiplicando el denominador 5 por 6, (n.º 70, 2.º) pero como no se habia de dividir por 6, sino por ${}^6/_8$, á saber por un número ocho veces menor, resulta que el quebrado ${}^4/_5$ deberá ser ocho veces mayor, lo que se conseguirá multiplicando el numerador 4 por 8 (n.º 71. 3.º). Como lo mismo podria decirse de todos los demás ejemplos, podrémos sentar la regla dada.

De lo dicho en el número 95 se sigue, que cuando se ha de multiplicar un quebrado por un entero igual al denominador, el resultado será igual al numerador del quebrado. Así, si tenemos $^5/_7 \times 7$, tendrémos: $^5/_7 \times 7 = \frac{5 \times 7}{7} = {}^{35}/_7 = 5$. Por consiguiente bastará poner inmediatamente el numerador. Así, $8 \times {}^3/_8 = 8$. $^3/_5 \times 5 = 3$. $^4/_6 \times 6 = 4$. etc.

100. Para dividir un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado; como todo entero no se altera poniendole por denominador la unidad, en uno y otro caso pondrémos el entero bajo la forma de quebrado, y se reducirá entonces á dividir un quebrado por otro, lo que se ejecutará conforme á la regla dada en el número anterior. Así, si hemos de dividir 8 por $^3/_5$ tendrémos: $8 : {}^3/_5 = {}^8/_1 : {}^3/_5 = \frac{8 \times 5}{1 \times 3} = {}^{40}/_3 = 13 + {}^1/_3$ Si se ha de dividir $^5/_7$ por 6, será: $^5/_7 : 6 = {}^5/_7 : {}^6/_1 = \frac{5 \times 1}{7 \times 6} = {}^5/_{42}$ etc.

De lo dicho en el n.º 85 y 91 se infiere por regla general, que para reducir un entero á la especie del quebrado que le acompaña, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le añade ó quita, (segun que haya indicada una operacion de sumar ó restar) el numerador del quebrado, y se deja por denominador el mismo. Así, $4 + {}^3/_6 = \frac{4 \times 6 + 3}{6} = \frac{24 + 3}{6} = {}^{27}/_6$. $8 - {}^2/_4 = \frac{8 \times 4 - 2}{4} = \frac{32 - 2}{4} = {}^{30}/_4$, etc.

101. Para dividir un número misto por otro número misto, como no se altera ningun entero reduciéndole á la especie del quebrado que le acompaña, se hará primero esta operacion en cada uno de los dos términos de la division, y despues se aplicará la regla sentada en el n.º 99.

Así, si hemos de dividir $6 + {}^2/_3$ por $2 + {}^4/_5$, tendrémos;

$$(6 + {}^2/_3) : (2 + {}^4/_5) = \left(\frac{6\times3+2}{3}\right) : \left(\frac{2\times5+4}{5}\right) =$$

$$\frac{18+2}{3} : \frac{10+4}{5} = {}^{20}/_3 : {}^{14}/_5 = \frac{20\times5}{3\times14} = {}^{100}/_{42}$$

Valuacion de quebrados comunes simples y compuestos.

102. La valuacion de los quebrados no es mas que una aplicacion del tercer uso de la multiplicacion (n.º 29). Cuando el quebrado sea simple, se multiplicará por tantas unidades de la especie inferior mas inmediata cuantas estén contenidas en una unidad de aquellas á las que se refiere el quebrado. Del quebrado resultante se sacarán los enteros que tal vez contenga, y si además contiene tambien algun quebrado, se hará con este lo mismo que con el primero, continuando del mismo modo hasta llegar á la última denominacion. Así, si hemos de valuar el quebrado ${}^2/_3$ de duro, tendrémos: ${}^2/_3$ duro $= {}^2/_3 \times 5$ pesetas $=$

$$\frac{2\times5\,\text{p.}^s}{3} = \frac{10\,\text{p.}^s}{3} = 3\,\text{p.}^s + {}^1/_3\,\text{p.}^s\,;\ {}^1/_3\,\text{p.}^s = {}^1/_3 \times 4\,\text{r.}^s$$

$$= \frac{1\times4\,\text{r.}^s}{3} = {}^4/_3\,\text{r.}^s = 1\,\text{r.}^s + {}^1/_3\,\text{r.}^s;\ {}^1/_3\,\text{r.}^s = {}^1/_3 \times$$

$$34\,\text{m.}^s = \frac{1\times34\,\text{m.}^s}{3} = {}^{34}/_3\,\text{m.}^s = 11\,\text{m.}^s + {}^1/_3\,\text{m.}^s$$ Con

lo que tendrémos, que ${}^2/_3$ duro $= 3$ p.^{s} 1 r.^{s} 11 m.^{s} y ${}^1/_3$ de maravedís.

2.º *Ejemplo.*

103. Valúese el quebrado ${}^2/_5$ de quintal, y será: ${}^2/_5$ q.^{s}

$$= {}^2/_5\,\text{q.}^s \times 4\,@ = \frac{2\times4\,@}{5} = {}^8/_5\,@ = 1\,@ + {}^3/_5\,@;$$

$^3/_5$ @ $= {}^3/_5$ @ $\times 25$ ℔ $= \dfrac{3 \times 25\text{ ℔}}{5} = {}^{75}/_5$ ℔ $= 15$ ℔.

104. Los quebrados compuestos pueden reducirse á quebrados simples, multiplicando entre sí los numeradores y entre sí los denominadores, cuyos productos respectivos serán el numerador y el denominador de un quebrado simple equivalente al compuesto dado. Si este compuesto tuviese algun entero, se le pondrá por denominador la unidad. Así, queriendo reducir á quebrado simple de duro el compuesto $^2/_3$ de $^4/_6$ de $^5/_8$ de duro, tendrémos: $^2/_3$ de $^4/_6$ de $^5/_8 = \dfrac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 6 \times 8} = {}^{40}/_{144}$ de duro. Esto se comprenderá muy bien, si se considera, que tomar una parte de una cantidad, equivale á dividir á esta por la parte que deba tomarse; por lo que $^2/_3$ de $^4/_6$, por ejemplo, será lo mismo que dividir $^4/_6$ por 3 y tomarla dos veces; de modo que, tendrémos: $^2/_3$ de $^4/_6 = ({}^4/_6 : 3) \times 2 = ({}^4/_6 : {}^3/_1) \times 2 = \dfrac{4}{6 \times 3} \times 2 = \dfrac{4 \times 2}{6 \times 3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 6}$; y por lo mismo, $^2/_3$ de $^4/_6$ de $^5/_8 = ({}^5/_8 : 6) \times (4 : 3) \times 2 = ({}^5/_8 : {}^6/_1) \times (4 : {}^3/_1) \times 2 = \left(\dfrac{5}{8 \times 6}\right) \times (4 : {}^3/_1) \times 2 = \left(\dfrac{5 \times 4}{8 \times 6} : {}^3/_1\right) \times 2 = \dfrac{5 \times 4}{8 \times 6 \times 3} \times 2 = \dfrac{5 \times 4 \times 2}{8 \times 6 \times 3} = \dfrac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 6 \times 8}$.

Para valuar un quebrado compuesto, lo reducirémos á quebrado simple, aplicándole despues la regla que hay para la valuacion de los quebrados simples.

Idea del límite de la cantidad variable.

105. Llámase límite de una variable á aquella cons-

tante, á la que la variable puede acercarse tanto como se quiera, de modo que la diferencia entre ellas pueda llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada per pequeña que sea, pero sin llegar jamás á ser iguales.

106. Dos son los límites de una cantidad variable; á saber, el infinito y cero. Toda variable puede variar aumentando ó disminuyendo. Una cantidad podrá aumentar cuanto se quiera, pues que sabemos que, permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado, este va aumentando á medida que el denominador va disminuyendo, y podemos disminuir el denominador por via de division cuanto queramos; pero una cantidad por mas que aumente no dejará de ser cantidad, y así tampoco jamás llegará al infinito; luego, como tanto podría aumentar una cantidad, que la diferencia entre ella y el infinito fuera menor que ninguna cantidad dada, de ahí es que el infinito será el límite de la cantidad creciente.

107. Sabemos tambien que permaneciendo uno mismo el numerador de un quebrado este va disminuyendo á medida que su denominador va aumentando; y como somos libres de aumentar por via de multiplicacion cuanto queramos al denominador de un quebrado, de ahí es, que una cantidad podrá aproximarse á cero cuanto se quiera, de modo que la diferencia entre la cantidad y cero será tambien menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea; peró subsistiendo cantidad, nunca llegará á valer cero; luego cero será el límite de la variable decreciente.

El infinito se señala con esta expresion $^1/_0 = \infty$.

Cero se señala con la siguiente $^0/_1 = 0$.

Quebrados decimales.

108. Llámanse quebrados decimales *aquellos resultados que se obtienen dividiendo la unidad ó los números por diez,*

por ciento, por mil, y en general por la unidad seguida de ceros.

109. Dividiendo la unidad en diez partes iguales se forma un décimo; dividiéndola en cien partes iguales, ó dividiendo el décimo en diez partes se forma un centésimo; dividiendo la unidad en mil partes iguales, ó dividiendo el centésimo en diez partes, se forma un milésimo: etc. Los números decimales toman el nombre de décimos, centésimos, milésimos, cienmilésimos, millonésimos, diezmillonésimos, cienmillonésimos, milmillonésimos, diezmilmillonésimos, cienmilmillonésimos, billonésimos, diezbillonésimos, cienbillonésimos, milbillonésimos, etc.

110. Para diferenciar las cifras que representan unidades en enteros de aquellas que representan decimales, se pone una coma entre las unas y las otras; á saber, á la derecha de la cifra que representa unidades en enteros se pone un poco mas elevado una coma, y esta da á conocer, que todas las cifras que están á su izquierda son números enteros, así como los que quedan á su derecha son decimales. La primera cifra decimal que está á la derecha de la coma representa los décimos; lo segunda los centésimos, la tercera los milésimos; la cuarta los diezmilésimos; la quinta, los cienmilésimos; y así sucesivamente. Hé aqui un número decimal con especificacion del órden de unidades que corresponde á cada uno de sus guarismos.

5 3 4 8 0’ 3 5 8 6 9 0 5 4 3 8 9 9 1 2 3 4, etc.

5	decenas de millar.
3	millares.
4	centenas.
8	decenas.
0’	unidades.
3	décimos.
5	centésimos.
8	milésimos.
6	diezmilésimos.
9	cienmilésimos.
0	millonésimos.
5	diezmillonésimos.
4	cienmillonésimos.
3	milmillonésimos.
8	diezmilmillonésimos.
9	cienmilmillonésimos.
9	billonésimos.
1	diezbillonésimos.
2	cienbillonésimos.
3	milbillonésimos.
4, etc.	diezmilbillonésimos.

111. Del lugar que en el anterior número dado ocupa cada una de las cifras decimales, y de su definicion (104) se infiere, que cuando no hay mas que una sola cifra decimal, indica que aquel número se ha dividido por 10, á saber, por la unidad seguida de un cero: el conjunto de dos cifras decimales indica que se ha dividido por 100, á saber, por la unidad seguida de dos ceros: el conjunto de tres cifras decimales indica que se ha dividido por 1000, á saber, por la unidad seguida de tres ceros; y por analogía se infiere, que un conjunto cualquiera de cifras decimales indica que se ha dividido por lo que vale la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras habia en el conjunto.

112. Para leer un número que conste de enteros y decimales, dividirémos primero á unos y otros en períodos de tres en tres, conforme se dijo respecto de los numeros enteros (n.° 8.) Empezarémos á leer por los enteros, pronunciando este mismo nombre al encontrar la cifra que está inmediata á la izquierda de la coma; y luego continuarémos leyendo en seguida los decimales por el estilo que se verificó en los enteros (n.° 8), pronunciando la terminacion *ésimo* correspondiente en la última cifra decimal. Si antes de los números decimales no hay ningun entero, se leerá primero, *cero enteros*.

113. Segun la regla establecida en el párrafo anterior, si tuviéramos el número 457'54, leeríamos; cuatro cientos cincuenta y siete enteros, cincuenta y cuatro centésimos. El número 0'5485 se leería; cero enteros, cinco mil cuatro cientos ochenta y cinco diezmilésimos; etc.

114. Si dado, por ejemplo, el número 84'567, hacemos correr la coma un lugar hácia la derecha, será; 845'67. Con esto se ve, que el 6 que antes era centésimos ha pasado á ser décimos; que el 7 que antes representaba milésimos, ahora espresa centésimos; lo mismo, el 5 que antes representaba décimos, ahora espresa unidades; el 4 que antes representaba unidades, ahora espresa decenas; y finalmente el 8 que antes representaba decenas, ahora espresa centenas. Es decir que cada órden de cifras tanto

en enteros como decimales se ha hecho diez veces mayor de lo que era. Si hacemos correr la coma en el mismo número dos veces hácia la derecha, será: 8456'7; donde se ve, que cada órden de cifras tanto decimales como enteros se ha hecho cien veces mayor; es decir, lo que vale la unidad seguida de dos ceros. Si en el mismo número se hace correr la coma hácia la derecha tres lugares, tendrémos; 84567'; donde se ve que cada órden de cifras se ha hecho mil veces mayor; es decir, lo que vale la unidad seguida de tres ceros, etc. De esto podrémos inferir la siguiente regla general: *corriendo la coma hácia la derecha en un número compuesto de enteros y decimales, el número se ha hecho tantas veces mayor, cuanto nos dice lo que vale la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras se han corrido.*

115. Por un procedimiento contrario al que hemos verificado en el párrafo anterior, se podría ver que, corriendo la coma hácia la izquierda, todos los órdenes de cifras tanto decimales como enteros se han hecho tantas veces menores cuantas nos diga lo que vale la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras se han corrido.

116. De la definicion de los decimales (n. 108) y de lo dicho (n. 111) se desprende que un número decimal podrá ponerse bajo la forma de quebrado comun, poniéndole por numerador el mismo número decimal, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras decimales haya. Pues que siendo los decimales no mas que los resultados de dividir la unidad ó los mismos números por 10, por 100, por 1000, etc. y en general, por la unidad seguida de ceros, la coma que se pone entre los enteros y decimales hace oficios de denominador; por lo que, si quitamos la coma, y ponemos el signo de division, el número decimal (que es el que se ha dividido) servirá de numerador de un quebrado comun que tendrá por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tuviera el decimal. Si el número constara de enteros y decimales sería un verdadero número misto; en cuyo caso se pondrían los en-

teros fuera la raya de quebrado, y los decimales conforme á la regla que acabamos de establecer. Así, $45'3 = 45 + {}^{3}/_{10}$; $843'545 = 843 + {}^{545}/_{1000}$; $0'28 = {}^{28}/_{100}$; $0'005 = {}^{005}/_{1000} = {}^{5}/_{1000}$ etc.

117. De la misma definicion de los decimales, y de lo dicho en el número anterior se infiere tambien, que un número decimal no se alterará añadiendo ó quitando ceros á su derecha. Así, $0'5 = 0'50$; $0'500$; $0'5000$; etc. Poniendo la primera espresion bajo la forma de quebrado comun, será: $0'5 = {}^{5}/_{10} = \frac{5\times10}{10\times10} = \frac{50}{100} = \frac{50\times10}{100\times10} = \frac{500}{1000} = \frac{500\times10}{1000\times10} = \frac{5000}{10000} =$ etc, ó sea, $0'5 = 0'50 = 0'500 = 0'5000$.

Si tenemos $4'58000$, será; $4'58000 = 4'5800 = 4'58 = 4'58000$ etc.

118. Si dado el número $84'347$ ponemos un cero á la izquierda de las cifras decimales, se nos convertirá en el siguiente $84'0347$; donde vemos que el número decimal se ha hecho diez veces menor. Si ponemos dos ceros, será: $84'00347$; donde vemos que el número decimal se ha hecho cien veces menor. De esto se infiere en general, que si entre la coma y las cifras significativas decimales se colocan ceros, el número decimal se habrá hecho tantas veces menor cuanto nos diga la unidad seguida de tantos ceros cuantos se han puesto.

Transformacion de quebrados comunes en decimales.

119. De la definicion de los decimales se sigue, que para transformar un quebrado comun en quebrado decimal, no habrá mas que partir el numerador por el denominador.

Si este cabe en el numerador se pondrá en enteros el cociente respectivo; y si no cabe se pondrá en el cociente inmediatamente cero enteros. Para encontrar los decimales, pondrémos á la derecha del cociente en enteros, ó del cero la coma, y añadirémos sucesivamente un cero á cada una de las restas del dividendo para cada una de las cifras decimales que queramos encontrar. Con esto no alterarémos en nada el cociente: pues que equivale á multiplicar por 10, por 100, ó por un mismo número tanto el numerador como el denominador del quebrado comun de donde procede.

120. Resolvamos por la regla dada los siguientes ejemplos; $^3/_4$, $^9/_5$, $^8/_{11}$, $^5/_{24}$, y tendrémos:

1.º

$^3/_4$ = 3 0 | 4
0 2 0 | 0'7 5
0 0

2.º

$^9/_5$ = 9 | 5
4 0 | 1'8
0 0

3.º

$^8/_{11}$ = 8 0 | 1 1
0 3 0 | 0'7 2 7 2 etc.
0 8 0
0 3 0
0 8 etc.

4.º

$^5/_{24}$ = 5 0 | 2 4
0 2 0 0 | 0'2 0 8 3 3 etc.
0 0 8 0
0 8 0
8 etc.

Por lo que el primer quebrado es equivalente á 0'75: el segundo á 1'8: el tercero á 0'7272 etc. el cuarto á 0'20833 etc.

121. Las fracciones decimales se dividen en exactas, periódicas y mistas. Las primeras son, cuando el quebrado comun reducido á decimal no deja resta, como en los ejemplos 1°. y 2.° Las segundas son cuando reducido un quebrado comun á decimal, despues de salidas algunas cifras, vuelven á salir las mismas, verificándose esta repeticion indefinidamente, como en el ejemplo 3.° Las terceras son aquellas en las que despues de salidas algunas cifras, unas de ellas se repiten y otras no, como en el ejemplo 4.°

122. Segun lo observado en cada uno de los denominadores de los quebrados propuestos en los cuatro ejemplos anteriores, y lo que se observa en todos los casos semejantes, podrémos de antemano conocer que clase de fraccion dará un quebrado comun reducido á decimal, teniendo presente la siguiente regla. Todo quebrado comun irreducible dará fraccion exacta cuando su denominador no tenga mas factores simples que el 2 ó el 5, ó el 2 y el 5 á la vez: la dará periódica, cuando su denominador no tenga por factores simples ni el 2 ni el 5: y la dará mista, cuando su denominador á mas del 2 ó del 5 tenga tambien otro factor.

Transformacion de quebrados decimales en comunes.

123. Como haya tres clases distintas de fracciones decimales, tres habrán tambien de ser las reglas para la reduccion de decimales á quebrados comunes. Cuando la fraccion decimal que se quiera transformar, sea exacta, se reducirá á quebrado comun, poniendo á la fraccion por numerador, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros, cuantas cifras decimales haya. Fúndase en lo que se ha dicho (n.° 116). Así, $0'4 = {}^{4}/_{10}$; $3'54 = 3 + {}^{54}/_{100}$; $0'0025 = {}^{0025}/_{10000} = {}^{25}/_{10000}$; etc.

124. Para transformar en quebrado comun una fraccion decimal periódica, se pondrá por numerador el período, y por denominador tantas veces el nueve cuantas cifras haya

en dicho período, y si antes del período hay algun cero ó mas, se pondrán en el denominador despues de los nueves. Así, 0'7272 etc. $= {}^{72}/_{99} = {}^{8}/_{11}$; 0'04545 $= {}^{45}/_{990}$.

Para la demostracion de la regla anterior reduzcamos primero á quebrados decimales los comunes siguientes: ${}^{1}/_{9}$; ${}^{1}/_{99}$; ${}^{1}/_{999}$; ${}^{1}/_{9999}$; etc. y tendrémos:

1.º

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}/_{9} = 10 & 9 \\ \hline \quad 10 & 0'111 \text{ etc.} \\ \quad\ 10 & \\ \quad\quad 1 \text{ etc.} & \end{array}$$

2.º

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}/_{99} = 100 & 99 \\ \hline \quad 00100 & 0'010101 \text{ etc.} \\ \quad\quad 00100 & \\ \quad\quad\quad 01 \text{ etc.} & \end{array}$$

3.º

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}/_{999} = 1000 & 999 \\ \hline \quad 0001000 & 0'001001 \text{ etc.} \\ \quad\quad 001 \text{ etc.} & \end{array}$$

4.º

$$\begin{array}{l|l} {}^{1}/_{9999} = 10000 & 9999 \\ \hline \quad 000010000 & 0'00010001 \text{ etc.} \\ \quad\quad 0001 \text{ etc.} & \end{array}$$

Por lo que tenemos, que ${}^{1}/_{9} =$ 0'111 etc.; ${}^{1}/_{99} =$ 010101 etc.; ${}^{1}/_{999} =$ 0'001001 etc. ${}^{1}/_{9999} =$ 0'00010001 etc. En estos ejemplos, pues, se ve que cada quebrado decimal ha procedido de un quebrado comun que ha tenido por numerador tantas cifras significativas cuantas ha habido en el período. Luego por analogía se puede inferir, que cada quebrado decimal periódico equivale á un período de los cuatro propuestos ú otro análogo repetido tantas veces cuantas nos diga el conjunto de cifras que entran en el período del quebrado decimal de que se trate. Así, por ejemplo, 0'7272 etc. podrá considerarse como el producto de 72 por 0'0101 etc. y será: 0'7272 etc. $= 72 \times$ 0'0101 etc. $= 72 \times {}^{1}/_{99} = {}^{72}/_{99}$; es decir el quebrado que se obtiene por la regla.

125. La fraccion decimal mista se reduce á comun poniendo por numerador el número compuesto de la parte no periódica y del primer período menos la parte no periódica; y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras hay en el período, seguidos de tantos ceros como cifras hay en la parte no periódica. Así, por ejemplo: 0'20833 etc. $= \frac{2083-208}{9000} = {}^{1875}/_{9000} = {}^{375}/_{1800} = {}^{75}/_{360} = {}^{15}/_{72} = {}^{5}/_{24}$ (n.º 124, 4.º)

Si tenemos por nuevo ejemplo el decimal 0'453434 etc. reducido á comun será: 0'453434 etc. $= \frac{4534-45}{9900} = \frac{4489}{9900}$

Para la demostracion de esta regla concretémonos al primero de estos dos ejemplos, y descomponiendo, tendrémos evidentemente; 0'20833 etc. $=$ 0'208$+$0'00033 etc. $=$ (n.º 111 y 124) ${}^{208}/_{1000} + {}^{3}/_{9000} =$ (n.º 72 4º.)

$$\frac{208\times9}{1000\times9}+\frac{3}{9000}=\frac{208\times9}{9000}+\frac{3}{9000}=(\text{n.º } 63)\ \frac{208\times9+3}{9000}$$

$$=\frac{208\times(10-1)+3}{9000}=\frac{2080-208+3}{9000}=\frac{2080+3-208}{9000}$$

$=\frac{2083-208}{9000}$ que es el quebrado obtenido practicando la regla dada. Como se observaría lo mismo en todos los ejemplos, podemos por analogía aplicar la regla sentada.

Sumar fracciones decimales.

126. Para sumar números compuestos de enteros y decimales, ó decimales solos, se colocarán los sumandos unos debajo de los otros, de modo que se correspondan entre sí los órdenes de cada especie tanto en los decimales como en los enteros, procurando que las comas de cada sumando formen tambien coluna. Se empezará despues la operacion por la derecha de los decimales, poniendo la suma en su lugar correspondiente, de modo que forme coluna con las de los sumandos, y practicando en un todo las reglas prescritas para sumar números enteros.

Súmense por esta regla 4850'345+8438'6847+5394'34, y colocados los sumandos como se ve en (A), tendrémos.

(A)

$$\begin{array}{rr} & 4850'345 \\ + & 8438'6847 \\ + & 5394'34 \\ \hline = & 18683'3697 \end{array}$$

La demostracion de esta regla se funda en que, por lo visto hasta ahora, los números decimales siguen la misma ley de los enteros, de manera que con diez unidades de un órden cualquiera en los decimales se forma una unidad de un órden inmediato superior de la izquierda, así como tambien con diez décimos se forma una unidad en enteros. La coma debe ponerse en la suma, para diferenciar los enteros de los decimales.

Restar números decimales.

127. Para restar números decimales, se hará para mayor comodidad que el minuendo y sustraendo tengan igual número de cifras decimales, añadiendo ceros al dato que tenga menos cifras decimales. Se colocará despues el sustraendo debajo del minuendo, haciendo que se correspondan entre sí todos los órdenes de unidades tanto en los enteros como en los decimales, y procurando que las comas formen coluna. Se empezará luego la operacion por la derecha de los decimales, poniendo tambien en la resta la coma, de modo que forme coluna, siguiendo en un todo las reglas prescritas para restar números enteros.

Segun esta regla, de 8546'3484 réstense 5684'48 y colocados como se ve en (A), tendrémos:

(A)

```
   8 5 4 6'3 4 8 4
 — 5 6 8 4'4 8 0 0
 = 2 8 6 1'8 6 8 4
```

2.° ejemplo. De 6450'384 quítense 284'538926, y será como se ve en (B).

(B)

```
   6 4 5 0'3 8 4 0 0 0
 —     2 8 4'5 3 8 9 2 6
 = 6 1 6 5'8 4 5 0 7 4
```

La demostracion es análoga á la que se ha dado en la operacion de sumar. Ademas, el añadir ceros al minuendo ó sustraendo en nada altera su valor (n.° 117).

Multiplicar quebrados decimales.

128. Para multiplicar quebrados decimales se pondrá el multiplicador debajo del multiplicando: se prescindirá

de las comas, y se multiplicarán como si fuesen enteros, separando despues en el producto para decimales tantas cifras de derecha á izquierda cuantas hubiere en los dos factores juntos. Si no hubiera bastantes cifras para decimales, se completarán las que falten con ceros á su izquierda, y se pondrá inmediatamente *cero enteros*.

Multiplíquense por esta regla 45'3 por 0'5, y tendrémos lo que se ve en (A).

(A)

$$\begin{array}{r} 4\,5'\,3 \\ \times\ 0'\,5 \\ \hline =2\,2'\,6\,5 \end{array}$$

2.º ejemplo. 684'84 multiplicado por 3'84, será:

$$\begin{array}{r} 6\,8\,4'\,8\,4 \\ \times\ 3'\,8\,4 \\ \hline 2\,7\,3\,9\,3\,6 \\ 5\,4\,7\,8\,7\,2\ \ \\ 2\,0\,5\,4\,5\,2\ \ \ \ \\ \hline =2\,6\,2\,9'\,7\,8\,5\,6 \end{array}$$

3.º ejemplo. 0'54 multiplicado por 0'25, será:

$$\begin{array}{r} 0'\,5\,4 \\ \times\ 0'\,2\,5 \\ \hline 2\,7\,0 \\ 1\,0\,8\ \ \\ \hline 0'\,1\,3\,5\,0 \end{array}$$

Para su demostracion observarémos, que concretándonos al primer ejemplo, prescindiendo de la coma en el multiplicando, este se ha hecho diez veces mayor, y lo mismo ha resultado en el multiplicador. Luego el producto se ha hecho diez veces mayor por razon del multiplicando, y diez veces mayor por razon del multiplicador, y paraque resulte el verdadero, deberá hacerse tantas veces menor, cuantas nos diga la multiplicacion de 10 del multiplicando por 10 del multiplicador; á saber, cien veces menor; pero esto (n.º 115) se logra corriendo la coma dos lugares de derecha á izquierda. Semejante raciocinio podría hacerse en todos los casos; por lo que, deberán siempre separarse en el producto de derecha á izquierda para decimales tantas cifras cuantas haya en los dos factores juntos, pues que deberá siempre hacerse tantas veces menor, cuantas nos diga el resultado de multiplicar la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el multiplicando por la unidad seguida de tantos otros ceros como cifras decimales haya en el multiplicador.

129. De lo dicho en el n.º 114 y 115 se infiere que podrémos abreviar la multiplicacion ó division de los números decimales, siempre que esta multiplicacion ó division tenga que hacerse por la unidad seguida de ceros; pues que equivaldrá á correr la coma hácia la derecha ó hácia la izquierda. Así, si dado el número 478'547, se ha de multiplicar por 100 se correrá la coma dos lugares hácia la derecha y tendrémos; 478'547×100=47854'7; etc. Si dado el mismo número, se hubiera de dividir por 100, correriamos la coma dos lugares hácia la izquierda, y seria, 478'547:100=4'78547; etc.

Dividir quebrados decimales.

130. Para dividir quebrados decimales, se hará primero que los dos términos de la division tengan igual número de cifras decimales, añadiendo los ceros convenientes al término que tenga menos cifras decimales. Despues se prescindirá de la coma, y se dividirá el dividendo y el divisor como si fueran enteros; si finalmente sobra resta, se reducirá á decimales, poniendo inmediatamente en el cociente la coma, añadiendo un cero á cada una de las restas sucesivas para cada cifra decimal que tratemos de

obtener, siguiendo en un todo las reglas dadas en la trans formacion de quebrados comunes en decimales.

Segun esta regla, divídase 3843'54 por 0'5, como el dividendo tiene dos cifras decimales, y el divisor no tiene mas que una, añadiré un cero á la derecha del 5, y será:

3843'54 : 0'5 = 3843'54 : 0'50 =

```
384,3,5,4,     /50
                ----------
0343            7687'08
 0435
  0354
   00400
     000
```

Para su demostracion observarémos, que añadiendo ceros á los decimales de uno de los dos términos, no se ha alterado dicho número. Prescindiendo de la coma en los dos términos, se han hecho cada uno igual número de veces mayor. Poniendo la coma en el cociente, y añadiendo un cero á cada una de las restas, ha sido igual á multiplicar dividendo y divisor por una misma cantidad (n.° 119).

Valuacion de quebrados decimales.

131. Siendo la valuacion de quebrados decimales no mas que la reduccion de unidades de especie superior á unidades de especie inferior, se multiplicará el decimal dado por tantas unidades de la especie inferior mas inmediata cuantas estén contenidas en una unidad de aquella especie á que se refiere el quebrado, siguiendo las reglas dadas (n.° 128). Si de esta multiplicacion resulta un nuevo quebrado decimal, se hará con él lo mismo que con el primero; y así sucesivamente hasta llegar á la menor de las denominaciones.

Valúese segun esta regla el quebrado decimal 0'2 de duro, y será: 0'2 duro = 0'2 d.ˢ × 5 p.ˢ = 1'0 peseta. = 1 peseta.

Si se hubiera de valuar el quebrado 0'35 de duro, sería; 0'35 duro = 0'35 d.s × 5 ps. = 1'75 ps.; = 1 ps. + 0'75 p.s; 0'75 p.s = 0'75 p.s × 4 r.s = 3'00 = 3 r.s. Por lo que tendríamos; 0'35 d.s = 1 peseta, 3 r.s

TABLAS NECESARIAS

PARA EL CÁLCULO DE LOS NUNEROS DENOMINADOS.

Medidas longitudinales.

CASTELLANAS.		CATALANAS.	
La toesa.	*2 varas.*	La cana.	*8 palmos.*
La vara.	*4 palmos.*	El palmo.	*4 cuartos.*
El palmo.	*12 dedos.*		

Otras medidas longitudinales.

La vara = *3 pies*; 1 pie = *12 pulgadas*; 1 pulgada = *12 líneas.*

Medidas para áridos.

CASTELLANAS.		CATALANAS.	
El cahiz.	*12 fanegas.*	La tonelada.	*4 cuarteras.*
La fanega.	*12 celemines.*	La carga.	*2 cuarteras.* 1/2
El celemin.	*4 cuartillos.*	La cuartera.	*12 cuartanes.*
El cuartillo.	*4 ochavos.*	El cuartan.	*4 picotines.*
El ochavo.	*4 ochavillos.*		

MEDIDAS PARA VINO Y LICORES.

CASTELLANAS.		CATALANAS.	
El moyo.	*16 cántaras.*	La pipa.	*4 cargas.*

La cántara.	*2 azumbres.*	La carga.	*4 barrilones.*
El azumbre.	*4 cuartillos.*	El barrilon.	*32 mitadellas.*
El cuartillo.	*4 copas.*	La mitad.ª	*4 cuartillos.*

Medidas de peso.

CASTELLANAS.		CATALANAS.	
El quintal.	*4 arrobas.*	La carga.	*3 quintales.*
La arroba.	*25 libras.*	El quintal.	*4 arrobas.*
La libra.	*16 onzas.*	La arroba.	*26 libras.*
La onza.	*4 cuartos.*	La libra.	*12 onzas.*
El cuarto.	*4 adarmes.*	La onza.	*4 cuartos.*
El adarme.	*3 tomines.*	El cuarto.	*4 adarmes.*
El tomin.	*12 granos.*	El adarme.	*36 granos.*

Medidas agrarias.

El estadal.	*4 varas cuadradas.*	*Papel.*	
La aranzada.	*20 estadales. cuadrados.*	La resma.	*20 manos.*
		La mano.	*5 cuadernillos.*
La fanega de tierra.	*24 id.*	El cuadernillo.	*5 pliegos.*

Tiempo.

El siglo.	*100 años.*	El dia.	*24 horas.*
El año.	*12 meses.*	La hora.	*60 minutos.*
El mes gent.º	*30 dias.*	El minuto.	*60 segundos.*

Monedas.

La onza de oro.	*16 duros* =	*80 pesetas* =	*320 r.s*
La media onza.	*8 duros* =	*40 pesetas* =	*160 r.s*
El doblon de Isabel.	*5 duros* =	*25 pesetas* =	*100 r.s*
El doblon.	*4 duros* =	*20 pesetas* =	*80 r.s*

El duro.	*5 pesetas sencillas ó cuatro pesetas columnarias = 20 r.ˢ*
La peseta sencilla.	*4 reales ó 34 cuartos.*
La media peseta id.	*2 reales ó 17 cuartos.*
El real vellon.	*34 maravedises ú ocho cuartos ½*
La libra.	*20 sueldos ó 240 dineros.*
El real catalan.	*2 sueldos ó 24 dineros.*
El sueldo.	*12 dineros.*
La peseta.	*7 sueldos ½ ó 90 dineros.*

NÚMEROS COMPLEXOS, Ó DENOMINADOS.

132. Números complexos son aquellos, que constan de varias especies, pero relativas todas á un mismo género. Así, sería un número complexo 25 duros, 3 pesetas, 3 reales, 28 maravedises; pues que hay en él varias especies, pero relativas todas al mismo género, á saber, moneda. Tambien lo sería el siguiente, 45 cargas, 2 quintales, 3 arrobas, 27 libras, porque cada una de las especies que contiene se refiere á un mismo género, á saber, peso, etc.

Sumar números complexos ó denominados.

133. Para sumar números complexos ó denominados, se colocarán los sumandos unos debajo de otros, haciendo que se correspondan todas las especies entre sí. Despues se tirará una raya, y se empezará la operacion por la especie mas inferior, luego por la otra, y así siguiendo, hasta que se hayan sumado todas las especies. En cada especie se pondrá su suma correspondiente, como si no hubiera ninguna otra especie superior. Despues se tirará otra raya, y debajo de cada especie pondrémos las unidades que correspondan, agregando á la especie superior inmediata las unidades que tal vez hubiera en la anterior. De este modo se tendrá la suma total, pues que habrá la de todas las partes.

134. Súmense segun esta regla 347 cargas, 2 quintales, 3 arrobas, con 684 cargas, 1 quintal, 2 arrobas, y con 68 cargas, 2 quintales, 1 arroba; practicando la regla dada, será:

	347 c.^{s}	2 q.^{s}	3 @
+	684 »	1 »	2 »
+	68 »	2 »	1 »
=	1099 »	5 »	6 »
=	1101 »	0 »	2 »

Si por nuevo ejemplo hemos de sumar 85 duros, 3 pesetas, 3 reales, 15 maravedises, con 54 duros, 2 pesetas, 3 reales, 8 maravedises, y con 15 duros, 2 pesetas, 2 reales, 9 maravedises; tendrémos:

	85 d.^{s}	3 p.^{s}	3 r.^{s}	15 m.^{s}
+	54 »	2 »	3 »	8 »
+	15 »	2 »	2 »	9 »
=	154 »	7 »	8 »	32 »
=	155 »	4 »	0 »	32 »

Restar números complexos ó denominados.

135. Para restar números complexos, se pondrá el sustraendo debajo del minuendo, haciendo que se correspondan todas las especies entre sí. Despues se tirará una raya, y se restarán entre sí las especies correspondientes; empezando por la mas inferior, hasta que todas se hayan agotado. De este modo se tendrá la resta total; pues que habrá la resta de todas las partes.

136. Segun esta regla: De 854 varas, 2 palmos, 3 cuartos, quítense 548 v.^{s} 1 p.^{s} 2 c.^{s} y será:

	854 v.^{s}	2 p.^{s}	3 c.^{s}
—	548 »	1 »	2 »
=	306 »	1 »	1 »

2.° *Ejemplo.*

De 645 varas, 2 pies, 10 pulgadas, réstense 349 v.^{s} 2 p.^{s} 8 pul.^{s}, y será:

$$\begin{array}{rrrr} & 645\ \text{v.}^{s} & 2\ \text{p.}^{s} & 10\ \text{pul.}^{s} \\ - & 349\ » & 2\ » & 8\ » \\ \hline = & 296\ » & 0\ » & 2\ » \end{array}$$

137. Si algun sustraendo parcial, ó sea de alguna ó algunas especies inferiores fuere mayor que su correspondiente minuendo, se agregará á este una unidad ó las convenientes de la especie superior mas inmediata reducida á unidades de la especie inferior que esté en cuestion; y entonces de este agregado se restará su propio sustraendo, añadiendo despues á la especie inmediata superior del sustraendo la unidad que se habia quitado al minuendo. Lo mismo se verificará aunque hubiera *cero* en la especie superior mas inmediata del minuendo: pues que se considerará como si realmente contuviera alguna unidad, ya que la contendrá la especie mas superior.

138. Segun esta regla; De 543 duros, 2 pesetas, 2 reales, réstense 349 d.^{s} 3 p.^{s} 3 r.^{s} y tendrémos:

$$\begin{array}{rrrr} & 543\ \text{d.}^{s} & 2\ \text{p.}^{s} & 2\ \text{r.}^{s} \\ - & 349\ » & 3\ » & 3\ » \\ \hline = & 193\ » & 3\ » & 3\ » \end{array}$$

Transformacion de los números complexos en quebrados comunes y decimales.

139. Para transformar un número complexo en quebrado comun de una de sus denominaciones, puede seguirse la siguiente regla: redúzcase el complexo dado á la menor de las denominaciones que contenga, y póngase el resultado por numerador de un quebrado cuyo denominador sea un número, en el que hayan tantas unidades de esta misma inferior, cuantas estén contenidas en una unidad supe-

rior de aquellas á las que ha de referirse el quebrado. De este modo se tendrá formado el quebrado que se busca.

140. Redúzcase, por ejemplo, á quebrado el complexo 2 pies, 9 pulgadas, 6 líneas; y sabiendo que 1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 12 líneas, empiezo por reducir á líneas este número, y segun las reglas dadas hallo, que 2 pies, 9 pulgadas, 6 líneas = 402 líneas: ahora busco cuántas lineas hay en una vara, y encuentro 432; por lo que; digo, que el quebrado pedido es $^{402}/_{432}$ de vara.

Si por nuevo ejemplo queremos reducir á quebrado de duro el complexo 3 duros, 4 pesetas, 2 reales, siendo 1 duro = 5 pesetas, 1 peseta = 4 reales, tendrémos; 3 d.^{s} 4 p.^{s} 2 r.^{s} = $^{78}/_{20}$ de duro.

Para transformar un complexo en fraccion decimal de una de sus denominaciones, ha de transformarse dicho complexo en quebrado comun equivalente, y transformar á este en quebrado decimal.

Multiplicacion de números complexos por la reduccion de cada uno de sus factores á la menor de sus denominaciones ó especies.

141. Para la multiplicacion de números complexos por dicho método podrán seguirse las tres reglas siguientes: 1.^{a} Redúzcanse el multiplicando y multiplicador á la menor de las denominaciones que contengan: 2.^{a} Multiplíquense entre sí estos factores despues de reducidos, y el producto vendrá espresado en valores de la especie menor del multiplicando. 3.^{a} Divídase el producto por tantas unidades de la especie inferior del multiplicador cuantas estén contenidas en una unidad de la especie superior del mismo y el cociente vendrá espresado en valores de la especie inferior del multiplicando, los cuales se reducirán á unidades de las especies superiores, segun las reglas dadas (n.^{o} 46, 6.^{o} uso.)

Antes de la aplicacion de esta regla debemos advertir, que aunque el órden de los factores no altere el resultado del producto, sin embargo es preciso conocer, que el multiplicando siempre es de la especie que se busca: así que, el precio es el multiplicando, y el otro factor el multiplicador.

142. Resolvamos segun la regla dada el siguiente problema. ¿Cuánto valdrán 24 cargas, 2 quintales azucar á 12 duros, 3 pesetas la carga?

Resolucion. 1.ª regla.

Multiplicando. 12 d.s 3 p.s $\times$ 5 p.s = 60 p.s + 3 » = 63 p.s

Multiplicador. 24 c.s 2 q.s $\times$ 3 q.s = 72 q.s + 2 » = 74 q.s

2.ª *regla.* 63 p.s $\times$ 74 q.s: 252 p.s, 441, = 4662 p.s

3.ª *regla.*

4,6,6,2 p.s / 3 q.s = 1,5,5,4 p.s (residuos: 16, 016, 012, 0 p.s)

1,5,5,4 p.s / 5 p.s = 310 d.s 4 p.s (residuos: 005, 004 p.s, 00 p.s)

2.º *Ejemplo.*

¿Cuánto importarán 36 varas, 3 palmos, 3 cuartos de paño á 4 duros, 12 reales, 17 maravedises la vara?

Resolucion. 1.ª regla.

Multiplicando.

4 d.s 1 2 r.s 1 7 m.s
× 2 0 r.s
8 0 r.s
+ 1 2 »
9 2 r.s
× 3 4 m.s
3 6 8 m.s
2 7 6 »
+ 1 7 »
= 3 1 4 5 m.s

Multiplicador.

3 6 v.s 3 p.s 3 c.s
× 4 p.s
1 4 4 p.s
+ 3 »
1 4 7 p.s
× 4 c.s
5 8 8 c.s
+ 3
= 5 9 1 c.s

2.ª regla.

3 1 4 5 m.s
× 5 9 1 c.s
3 1 4 5
2 8 3 0 5
1 5 7 2 5
= 1,8 5 8,6 9 5 m.s

3.ª *regla.*

1 8,5,8,6,9,5, m.s / 1 6 c.s
0 2 5 = 1 1 6 1 6 8'4 3 7 5 m.s
0 9 8
0 2 6
1 0 9
0 1 3 5
0 0 7 0
0 6 0
1 2 0
0 0 8 0
0 0

1 1 6,1,6,8'4,3,7,5 m.^{s} / 3 4 m.^{s}
0 1 4 1 = 3 4,2,6 r.^{s} / 2 0 r.^{s}
0 0 5 6 1 4 1 = 1 7 0 duros.
2 2 8 0 0 1 6 r.^{s}
0 2 4'4 3 7 5 m.^{s}

3.° *Ejemplo.*

¿Cuánto valdrán 6 quintales, 3 arrobas, 7 libras café á 3 duros, 2 pesetas, 3 reales el quintal?

1.^{a} *regla.*

Multiplicando.
3 d.^{s} 2 p.^{s} 3 r.^{s}
× 5 p.^{s}
1 5 p.^{s}
+ 2
1 7 p.^{s}
× 4 r.^{s}
6 8 r.^{s}
+ 3 »
7 1 »

Multiplicador.
6 q.^{s} 3 @ 7 ℔
× 4 @
2 4 @
+ 3 »
2 7 @
× 2 5 ℔
1 3 5 ℔
5 4
+ 7 »
= 6 8 2 ℔

2.^{a} *regla.*

6 8 2 ℔
× 7 1 r.^{s}
6 8 2 r.^{s}
4 7 7 4
= 4 8 4 2 2 r.^{s}

3.^{a} *regla.*

4 8 4,2,2, r.^{s} / 1 0 0 libras.
0 8 4 2 = 4 8,4'2,2, r.^{s} / 4 r.^{s}
0 4 2 2 0 8 = 1 2,1, p.^{s} / 5 p.^{s}
0 2 2 0 0 4 0 2 1 = 2 4 D.^{s}
0 2 0 0 0'2 2 r.^{s} 0 1 p.^{s}
0 0 0 r.^{s}

Para la demostracion de esta práctica observarémos, que aplicando la primera regla, no se altera ninguno de los factores; con la segunda se efectua la multiplicacion; pero se hace el valor de una unidad de especie superior del multiplicador tantas veces mayor, cuantas unidades contiene ella misma de la especie inferior; por lo que debe practicarse la tercera regla para obtener el verdadero resultado; pues que con ella se hace el producto tanto menor cuanto mayor se habia hecho por la segunda regla.

Multiplicacion de los números complexos por quebrados.

143. Antes de la multiplicacion de los números complexos, debemos advertir, que aunque el órden de los factores no altera el producto, sin embargo, el multiplicando es siempre de la misma especie que se busca en el producto; por lo que; el valor ó el precio que se busca, es siempre el multiplicando, por mas que haga *vices* de multiplicador.

144. La multiplicacion de números complexos por quebrados consiste, en transformar cada factor en quebrado de su denominacion superior y multiplicar entre sí estos quebrados. Con este producto se forma un quebrado de la especie superior del multiplicando, y como todo quebrado es una division indicada de numerador por denominador, ejecutando la operacion, se obtiene primeramente en el cociente las unidades del órden superior del multiplicando y así sucesivamente.

145. Tratemos de determinar por esta regla cuánto importan 36 varas, 3 palmos, 3 cuartos de paño á 4 duros, 12 reales, 17 maravedises la vara: y despues de las transformaciones de cada factor en quebrados de su denominacion superior, resultará: $^{591}/_{16}$ v.^{s} $\times$ $^{3145}/_{680}$ d.^{s} $= \frac{591 \times 3145}{16 \times 680}$

$= {}^{1858695}/_{10880}$ d.^{s} $=$ 170 d.^{s} 16 r.^{s} 24'4375 mrs.

2.° *Ejemplo.*

¿Cuánto valdrán 6 quintales, 3 arrobas, 7 libras café á 3 duros, 2 pesetas, 3 reales el quintal?

Resolucion. 6 qq.^{s} 3 arr.^{s} 7 libras $= {}^{682}/_{100}$ qq.^{s}; y 3 d.^{s} 2 p.^{s} 3 r.^{s} $= {}^{71}/_{20}$ d.^{s} por lo que tendrémos; ${}^{682}/_{100}$ qq.^{s} $\times {}^{71}/_{20}$ dur.^{s} $= \frac{682 \times 71}{100 \times 20} = {}^{48422}/_{2000}$ dur.^{s} $= 24$ d.^{s} 1 p.^{s} 0 r.^{s} 7'48 m.^{s}

Tomar una parte de un número complexo.

146. Para tomar una parte de un número complexo, ó dividir un número complexo por otro número, tomarémos en primer lugar la parte de las unidades de la denominacion superior, si sobra algo lo reducirémos á unidades del órden inmediato inferior, agregando á esto las unidades que haya de este mismo órden, tomarémos entonces la parte de este resultado, y así sucesivamente hasta llegar á la última de las denominaciones que puede contener el complexo propuesto, en cuyo caso si queda resíduo, se pone á la derecha en forma de quebrado, ó se aproxima por decimales.

147. Tomemos por esta regla ${}^{1}/_{2}$ de 5 duros, 2 pesetas, 2 reales. Empezarémos diciendo; la mitad de 5 es 2 y sobra uno que vale 5, que junto con las 2 pesetas son 7 pesetas; la mitad de 7 es 3 y sobra 1 que vale 4 reales, que con los 2 suman 6; la mitad de 6 es 3, por lo que tendrémos; ${}^{1}/_{2}$ de 5 d.^{s} 2 p.^{s} 2 r.^{s} $=$ 2 d.^{s} 3 p.^{s} 3 r.^{s}.

2.° *Ejemplo.*

${}^{1}/_{4}$ de 57 varas, 3 piés, 9 pulgadas $=$ 14 varas 1 pié 8'25 pulgadas.

Descomponer un número de unidades en partes alícotas de la unidad de inmediata denominacion superior.

148. Para descomponer un número de unidades de una denominacion dada en partes alícotas de la unidad inmediata superior, descompondrémos el número dado en una porcion de partes, que sumadas nos dén el mismo número propuesto, y tales, que cada una sea la mitad, tercio, cuarto, etc. de las unidades de denominacion superior, ó bien de la superior inmediata.

149. Trátese por esta regla de descomponer 15 duros en partes alícotas de onza, y como esta es igual á 16 duros, tendrémos; 15 duros $= 8 + 4 + 2 + 1$.

Descomponiendo 19 reales en partes alícotas de duro, será; 19 reales $= 10 + 5 + 4$.

En el primer ejemplo podemos observar, que las partes en que hemos descompuesto los 15 duros, son 8 mitad de 16, 4 el cuarto del mismo 16, 2 mitad de 4, y 1 mitad de 2. Así mismo en el segundo ejemplo, 10 es mitad de 20, 5 mitad de 10, ó bien el cuarto de 20, y 4 un quinto de 20.

Multiplicacion de números complexos por el método de partes alícotas.

150. En dicha multiplicacion puede suceder que uno de los factores sea número complexo y el otro factor incomplexo. Cuando el multiplicador, á saber, el factor que no es el precio es número incomplexo y al propio tiempo es número díjito, entonces se multiplica el número díjito por todas las partes del otro factor complexo, poniendo el producto total de cada especie en su lugar correspondiente, y despues sacando de cada especie inferior las unidades que contenga de su superior inmediata y agregándolas á esta, queda concluida la operacion.

151. Si por ejemplo, quiero saber cuánto valdrán 9 quintales arroz á 5 duros, 4 pesetas, 3 reales, 6 maravedises el quintal, plantearé la regla del modo siguiente:

Multiplicando. . .	5 d.s	4 p.s	3 r.s	6 m.s
Multiplicador.				× 9
=	45 d.s	36 p.s	27 r.s	54 m.s
=	53 d.s	3 p.s	0 r.s	20 m.s

2.º *Ejemplo.*

¿Cuánto importan 7 varas de paño á 2 duros, 16 reales la vara?

Multiplicando. . . .	2 d.s	16 r.s
Multiplicador.	×	7 r.s
=	14 d.s	112 r.s
=	19 d.s	12 r.s

152. Cuando uno de los factores sea número incomplexo y al propio tiempo compuesto, y del mismo modo; cuando ambos factores sean números complexos, entonces se empieza multiplicando entre sí las dos partes superiores de cada factor, continuando la operacion, sacando partes alícotas de la parte superior del factor de arriba ó bien de la inmediata superior obtenida para hallar lo correspondiente á las partes inferiores del factor de abajo; ahora para hallar lo correspondiente á las partes inferiores del factor de arriba, se descompondrán tambien estas en partes alícotas del factor de abajo, y sumando los productos parciales, obtendrémos el producto total.

Tratemos de determinar por este método, cuánto importan 36 varas, 3 palmos, 3 cuartos de paño á 4 duros, 12 reales, 17 maravedises la vara. Dispondrémos el cálculo como sigue en el siguiente ejemplo.

Multiplicador...	36 v.^{s}	3 p.^{s}	3 c.^{s}	
Multiplicando...	4 d.^{s}	12 r.^{s}	17 m.^{s} la vara.	
36 v.^{s} á 4 d.^{s}...	144 d.^{s}			
á 10 r.^{s}......	18 »			
á 2 r.^{s}.....	3 »	12 r.^{s}		
á 17 m.^{s}.....	»	18 »		
2 palmos valen......	2 »	6 »	8'5 m.^{s}	
1 p.^{s}..............	1 »	3 »	4'25	
2 cuartos..........		11 »	19'125	
1 c.^{s}...........		5 »	26'5625	
Suma.............	168 »	55 »	58'4375	
Valen............	170 d.^{s}	16 r.^{s}	24'4375 m.^{s}	

2.° *Ejemplo.*

¿Cuanto valen 6 quintales, 3 arrobas, 7 libras café á 3 duros, 2 pesetas, 3 reales el quintal?

Multiplicador.....	6 qq.^{s}	3 arr.^{s}	7 lib.		
Multiplicando.....	3 d.^{s}	2 p.^{s}	3 r.^{s} el quintal.		
6 qq.^{s} á 3 duros....	18 d.^{s}				
á 1 p.^{s}.........	1 »	1 p.^{s}			
á 1 p.^{s}.........	1 »	1 »			
á 2 r.^{s}.........		3 »			
á 1 r.^{s}.........		1 »	2 r.^{s}		
2 arrobas valen.....	1 »	3 »	3 »	17 m.^{s}	
1 arr............		4 »	1 »	25'5	
5 lib............		0 »	3 »	18'7	
1 lib............				24'14	
1 lib............				24'14	
Suma..............	21 »	13 »	9 »	109'48	
Valen.............	24 d.^{s}	1 p.	0 r.^{s}	7'48	

En cada uno de estos ejemplos hemos obtenido los mismos resultados que por el método de los quebrados. (n.° 145.)

153. Explicacion. Hallado el valor de las 36 varas á 4 duros cada una, observo que 12 reales no es parte alícota de un duro, por lo mismo descompongo el 12 en las dos partes 10 y 2, y calculo de este modo: 36 varas á duro cada una valen 36 duros, luego á 10 reales valdrán la mitad de esta partida; á 2 reales valdrán la quinta parte de esta última, y como 17 maravedises es $^1/_4$ de 2 reales obtendrémos el valor de las 36 varas á 17 maravedises sacando el cuarto del valor de las mismas varas á 2 reales; con lo que se tiene calculado el valor de las 36 varas á 4 d.s 12 r.s 17 m.s la vara.

Para el valor de los 3 palmos 3 cuartos nos valdrémos del siguiente raciocinio: como 3 p.s no es parte alícota de vara los descompongo en 2 mitades de una vara y 1 mitad de 2 palmos, y digo, una vara vale 4 d.s 12 r.s 17 m.s, luego 2 p.s valdrán la mitad de este precio y 1 p.s la mitad del valor de 2 p.s: descomponiendo tambien los 3 cuartos en 2 + 1 digo, 2 c.s valdrán la mitad del valor de 1 palmo y 1 cuarto la mitad del valor de 2 cuartos. Con lo que tendrémos calculado el valor total.

Semejante raciocinio podría hacerse con el 2.º ejemplo.

Division de números complexos.

154. Para esta division podrán practicarse las siguientes reglas; 1.ª Redúzcase el divisor á la menor de las denominaciones que contenga; 2.ª Divídase cada una de las especies del dividendo por el divisor despues de reducido, siguiendo para esto las reglas dadas (n.º 146 y 147). 3.ª Multiplíquese el cociente por tantas unidades de la especie inferior del divisor cuantas estén contenidas en una unidad de la especie superior del mismo; y este será el verdadero resultado.

Resolvamos por esta regla los ejemplos siguientes:

1.º Por 310 duros, 4 pesetas se han comprado 24 cargas, 2 quintales azúcar: cuanto importará una carga?

Resolucion.

1.ª *regla.* — 2.ª *regla.*

Divisor.

$$\begin{array}{r} 2\,4\ c.^s\ 2\ q.^s \\ \times\ 3\ p.^s \\ \hline 7\,2\ q.^s \\ +\,2\ » \\ \hline 7\,4\ q.^s \end{array}$$

Dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 3\,1\,0\ d.^s\ 4\ p.^s & 7\,4\ q.^s \\ \cline{2-2} 0\,1\,4\ » & =\ 4\ d.^s\ 1\ p.^s \\ \times\ 5\ p.^s & \\ \cline{1-1} 7\,0\ p.^s & \\ +\ 4\ p.^s & \\ \cline{1-1} =7\,4\ p.^s & \\ 0\,0 & \end{array}$$

3.ª *regla.*

$$\begin{array}{r} 4\ d.^s\ 1\ p.^s \\ \times\ 3\ \text{quintales.} \\ \hline 1\,2\ d.^s\ 3\ p.^s \end{array}$$

Véase el primer ejemplo de multiplicacion (n.º 142).

Para su demostracion observarémos que, practicando la primera regla, no se altera en nada el divisor; con la segunda regla se halla el resultado en valores de la especie inferior del divisor; por lo que debe practicarse la tercera regla para hallar el verdadero resultado en valores de la especie superior del mismo divisor.

155. Para la division de números denominados puede seguirse tambien el siguiente método. Redúzcase el dividendo á quebrado de la especie superior, y el divisor á quebrado de la especie cuya unidad quiera valuarse, siguiendo para esto las reglas dadas (n.º 139); y luego se procede á la division de los quebrados resultantes, obteniéndose el cociente en valores de la especie superior del dividendo.

Redúzcase por este método el ejemplo anterior. Cuánto importará una carga de azúcar en el supuesto de haberse pagado 310 duros, 4 pesetas por 24 cargas, 2 quintales?

Resolucion. 1.ª regla.

Dividendo.	Divisor.
3 1 0 d.^{s} 4 p.^{s}	2 4 c.^{s} 2 q.^{s}
$\times$ 5 p.^{s}	$\times$ 3 q.^{s}
1 5 5 0 p.^{s}	7 2 q.^{s}
+ 4 »	+ 2 »
$\frac{1554 \text{ p.}^s}{5 \text{ p.}^s} = {}^{1554}/_5 \text{ d.}^s$	$\frac{74 \text{ q.}^s}{3 \text{ q.}^s} = {}^{74}/_3$ cargas.

2.ª regla.

$${}^{1554}/_5 \text{ d.}^s : {}^{74}/_3 \text{ q.}^s = \frac{1554 \text{ d.}^s \times 3}{5 \times 74} = {}^{4662}/_{370} \text{ d.}^s = {}^{2331}/_{185} \text{ d.}^s$$

$$= 2\,3\,3{,}1, \text{ d.}^s \quad /\,1\,8\,5$$

```
= 2 3 3,1, d.s    / 1 8 5
  0 4 8 1         ----------
    1 1 1         1 2 d.s 3 p.s
    × 5 p.s
  ---------
  5 5 5 p.s
  0 0 0
```

SISTEMA MÉTRICO.

MEDIDAS USUALES DE CASTILLA Y SU EQUIVALENCIA CON LAS DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.

Medidas de Longitud.

La legua equivale á. . . . . 5.572'7 *metros.*
La vara. . . . . 0'835905 *metros.*

De superficie.

La fanega de marco real. . . . . . 6.439'5.647 *centiáreas.*

De capacidad para áridos.

La fanega. . . . . 51'501 *litros.*

Id. para líquidos.

La arroba de vino. . . . . 16'133 *litros.*
La arroba de aceite. . . . . 12'563 *litros.*

De peso.

La libra. . . . . 460'093 *gramos.*

Equivalencia de las principales unidades métricas á usuales de castilla.

El metro equivale á . . . . 1'196.308 *varas.*
La área. . . . . 143'115.329 *varas cuadradas.*
El litro para áridos. . . . . 0'864.849 *cuartillos.*
El litro de vino. . . . . 1'983.512 *cuartillos.*
El litro de aceite. . . . . . 1'989.971 *libras.*
El kilógramo. . . . . 2'173.474 *libras.*

MEDIDAS USUALES Y SU EQUIVALENCIA CON LAS DE ESTE SISTEMA EN LAS PROVINCIAS DE BARCELONA, GERONA, LÉRIDA Y TARRAGONA.

PROVINCIA DE BARCELONA.

Medida de longitud.

La cana equivale á. . . . . 1'555 *metros.*

De superficie.

La mojada de 2.025 canas cuad.^{s}. . . . 48'965.006 *áreas.*

De capacidad para áridos.

La media cuartera. . . . . 34'759 *litros.*

Idem para líquidos.

El barrilon de vino. . . . . 30'35 *litros.*
El cuartan de aceite. . . . . 4'15 *litros.*

De peso.

La libra comun. . . . . 400 *gramos.*
La libra medicinal. . . . . 300 *gramos.*

PROVINCIA DE GERONA.

Medida de longitud.

La cana equivale á. . . . . 1'559 *metros.*

De superficie.

La vesana de tierra de 900 canas cuadradas. . . . . 21'874.329 *áreas.*

De capacidad para áridos.

El cuartan. . . . . 18'08 *litros.*

Id. para líquidos.

El mallal para vino. . . . . 15'48 *litros.*

De peso.

La libra. 400 *gramos.*

PROVINCIA DE LÉRIDA.

Medida de longitud.

La media cana equivale á. . . . . 0'778 *metros.*

De superficie.

El jornal de 1800 canas cuad.ˢ . . . . 43'580.448 *áreas.*

De capacidad para áridos.

La medida de 3 cuartanes. . . . . 18'34 *litros.*

Id. para líquidos.

El cántaro de vino. . . . . 11'38 *litros.*

De peso.

La libra. 401 *gramos.*

PROVINCIA DE TARRAGONA.

Medida de longitud.

La media cana equivale á. . . . . 0'78 *metros.*

De superficie.

La cana de rey superficial de
2.500 canas cuadradas. . . . . . 6.084'000 *metros cuad.ˢ*

De capacidad para áridos.

La media cuartera. . . . . 35'4 *litros.*

Id. para líquidos.

La armiña. . . . . 34'66 *litros*

De peso.

La libra. 400 *gramos.*

EQUIVALENCIA DE LAS UNIDADES MÉTRICAS Á LAS USUALES DE LAS PROVINCIAS DE BARCELONA, GERONA, LÉRIDA Y TARRAGONA.

PROVINCIA DE BARCELONA,

El metro equivale á. . . . . . 5'145 *palmos.*
La área.. . . . . 41 *canas cuadradas*, 22 *palmos id. y* 778 *milésimas id.*
El litro para áridos. . . . . . 0'173 *cuartanes.*
El litro para líquidos. . . . . 1'054 *mitadellas.*
El litro de aceite. . . . . . . 3'855 *cuartas.*
El kilógramo.. . . . . 2 *libras*, 6 *onzas.*

PROVINCIA DE GERONA.

El metro equivale á. . . . . . 5 *palmos*, 0 *cuartos y* 526 *milésimas de cuarto.*
La área.. . . . . 41 *canas cuad.*[s], 9 *palmos id. y* 224 *milésimas de id.*
El litro para áridos. . . . . . 0'332 *mesurones.*
El litro para líquidos.. . . . . 1'034 *porrones.*
El kilógramo. . . . . 2 *libras*, 6 *onzas.*

PROVINCIA DE LÉRIDA.

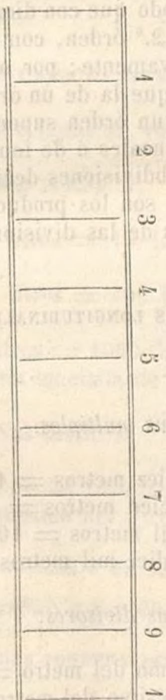
El metro equivale á. . . . . . 5'141 *palmos.*
La área.. . . . . 41 *canas cuad.*[s] *y* 1'9387 *palmos id.*
El litro para áridos.. . . . . . 1'309 *picotines.*
El litro para líquidos.. . . . . 1'054 *porrones.*
El kilógramo. . . . . 2 *libras*, 5 *onzas*, 3 *cuartos y* 2'803 *arxens.*

PROVINCIA DE TARRAGONA.

El metro equivale á. . . . . . 5'128 *palmos.*
La área.. . . . . 143 *varas cuad.*[s] *y* 115329 *millonesimas de id.*

El litro para áridos. . . . . . 0'047 *fanegas.*
El litro para líquidos. . . . . 0'923 *porrones.*
El litro de aceite. . . . . . . 0'242 *cuartales.*

NOTA: Con el ausilio de las precedentes tablas, y teniendo presentes las reglas dadas para la reduccion de unidades de especie superior á inferior y viceversa; se reducirán facilmente las unidades métricas á las usuales de cada provincia, y estas á las del sistema métrico.



Estension del decímetro dividido en centímetros.

ESPLICACION DEL SISTEMA.

156. Llámase *sistema métrico* por ser su base el *metro*, el cual es igual á la diezmillonesima parte de un cuadrante de meridiano, desde el polo del Norte al Ecuador.

157. En este sistema todas las medidas estan ligadas entre sí, y se derivan de la unidad principal llamada *metro*. Los múltiplos y subdivisiones de cada unidad se refieren al sistema decimal; de modo que con diez unidades de primer órden se forma una de 2.º órden, con diez de 2.º se forma una de 3.º y así sucesivamente; por manera que cada unidad, diez veces mayor que la de un órden inferior, es diez veces menor que la de un órden superior.

158. Las medidas lineales ó de longitud son los múltiplos decimales y las subdivisiones decimales del metro, es decir, que las medidas son los productos de las multiplicaciones y los cocientes de las divisiones de metro por 10, 100, 1000, 10000, etc.

MEDIDAS LONGITUDINALES.

Unidad usual. . . . . El metro.

Sus múltiplos.

El decámetro = diez metros = 10 metros.
El hectómetro = cien metros = 100 metros.
El kilómetro = mil metros = 1000 metros.
El miriámetro = diez mil metros = 10000.

Sus divisores.

El decímetro = un décimo del metro = 0'1 del metro.
El centímetro = un centésimo del metro = 0'01 del metro.
El milímetro = un milésimo del metro = 0'001 del metro.

MEDIDAS SUPERFICIALES.

Unidad usual. La *área* igual á un cuadro de diez metros de lado, ó sea á cien metros cuadrados = 100 metros cuadrados.

Sus múltiplos. La hectárea ó cien áreas, igual á diez mil metros cuadrados = 10000 metros cuadrados. Es un cuadrado cuyos lados son de 100 metros.

Sus divisores. La centiárea ó el centésimo del área, igual al metro cuadrado.

MEDIDAS DE CAPACIDAD Y ARQUÉO PARA ÁRIDOS Y LÍQUIDOS.

Unidad usual. El *litro* igual al volúmen del decímetro cúbico.

Sus múltiplos.

El decálitro = diez litros = 10 litros ó 10 decímetros cúbicos.

El hectólitro = cien litros = 100 litros ó 100 decímetros cúbicos.

El kilólitro = mil litros = 1000 litros ó 1000 decímetros cúbicos, igual á una tonelada de arquéo.

Sus divisores.

Un decilitro = un décimo del litro = 0'1 del litro.
Un centílitro = un centésimo del litro = 0'01 del litro.

MEDIDAS CÚBICAS Ó DE SOLIDEZ.

El metro cúbico y sus divisiones.

MEDIDAS PONDERABLES.

Unidad principal. El *gramo* igual á un centímetro cúbico ó sea un mililitro de agua destilada á la temperatura de 4 grados sobre cero del termómetro centígrado, y pesada en el vacío.

Sus múltiplos.

El decágramo = diez gramos = 10 gramos.
El hectógramo = cien gramos = 100 gramos.
El kilógramo = mil gramos = 1000 gramos.
El miriágramo = diez mil gramos = 10000 gramos.
El quintal métrico = cien mil gramos = 100000 gramos.
La tonelada de peso = un millon de gramos = 1000000 gramos.

Sus divisores.

El decígramo = un décimo de gramo = 0'1 de gramo.
El centígramo = un centésimo de gramo = 0'01 de gramo.
El milígramo = un milésimo de gramo = 0'001 de gramo.

MONEDAS.

Doblon de Isabel.	=	1000	décimas.
Duro ó peso fuerte	=	200	décimas.
Escudo.	=	100	décimas.
Peseta.	=	40	décimas.
Media peseta. . . .	=	20	décimas.
Real de vellon. .	=	10	décimas.
Medio real. . . .	=	5	décimas.
Doble décima. .	=	2	décimas.
Décima.	=	1	
Media décima. .	=	$^1/_2$	

Suponiendo á una décima por unidad, observarémos que con 10 décimas se forma un real de vellon; con 10 reales un escudo; con 10 escudos un doblon de Isabel, siguiendo de este modo en un todo el sistema decimal.

Una de las principales ventajas del presente sistema consiste en que, como todas las divisiones y subdivisiones de pesos y medidas proceden de 10 en 10 guardando el mismo órden que el sistema de numeracion, se evita por su medio el molesto y siempre penoso cálculo de los números denominados. Por este sistema, cualquier número complexo se transforma fácilmente en incomplexo. Así por ejemplo 6 miriámetros, 5 kilómetros, 8 hectómetros, 7 decámetros, 3 metros, 4 decímetros, 9 centímetros, 2 milímetros seria igual á 65873'492 metros.

159. Si dado un número métrico decimal lo queremos reducir á número complexo descompondrémos al número dado en las cifras de que conste, dando á cada una el nombre del múltiplo ó divisor que le corresponda. Así, 3568 m.^{s},79 equivaldrá al número complexo 3 kilómetros, 5 hectómetros, 6 decámetros, 8 métros, 7 decímetros y 9 centímetros.

Reduccion de unidades métricas de denominacion inferior á superior y viceversa.

160. Para reducir las unidades de un número métrico decimal á una denominacion inferior ó superior respecto á la expresada por el signo, bastará correr este signo hasta colocarlo á la derecha de la cifra que en aquel número indique la denominacion pedida. Si esta denominacion no existiese en el número dado, se añadirán á este los ceros correspondientes.

Tratemos de reducir á decímetros el número 4875 m.^{s},342, y como observamos que la cifra 3 indica decímetros en el número propuesto, colocarémos la coma á la derecha del 3, y tendrémos; 4875 m.^{s},342 = 48753deci.^{s},42. Queriendo reducir á kilógramos el número 6732 g.^{s},685 tendrémos; 6732,685 = 6 k.^{s}732685. Reduciendo á mililitros el número 785 l.^{s}, será; 785l.^{s} = 785000 mililitros.

Sumar, restar, multiplicar y dividir números del sistema métrico.

161. Siempre y cuando se ofrezca ejecutar alguna de las operaciones del cálculo con números del sistema métrico, los reducirémos primero á números incomplexos decimales, aplicándoles inmediatamente las mismas reglas explicadas en el tratado de los números decimales.

162. Si pues con 7 miriámetros, 5 hectómetros, 3 decámetros se han de sumar 9 hectómetros, 4 decámetros, 2 metros, 6 decímetros y al mismo tiempo 5 metros, 8 decímetros 3 milímetros, despues de reducidos á decimales é indicando la operacion resultará: 70530 m.s + 942 m.s 6 + 5 m.s,803 cuya operacion despues de prácticada nos dará: 71478 m.s,403 que es lo mismo que 7 miriámetros, 1 kilómetro, 4 hectómetros, 7 decámetros, 8 metros, 4 decímetros, 0 centímetros y 3 milímetros.

163. Si de 8 kilólitros, 3 hectólitros, 4 litros, 6 decílitros he de quitar 5 kilólitros, 6 hectólitros, 1 litro, 5 decílitros 8 centílitros 3 mililitros, reduciendo, é indicando la operacion se convertirá en la siguiente; 8304 l.s,600 — 5601 l.s,583 y practicando la operacion conforme en los decimales, nos dará por resultado 5703 l.s,017. ó sea 5 kilólitros, 7 hectólitros, 0 decálitros, 3 litros, 0 decílitros, 1 centílitro y 7 mililitros.

164. Si hemos de averiguar cuanto valen 4 hectógramos, 6 decágramos, 3 gramos, 8 decígramos de cierta mercaduria á razon de 4 reales, 5 décimas el gramo, reduciendo, é indicando la operacion se nos convertirá en 463 g.s,8 × 4 r.s,5, y practicando la operacion nos dará por resultado 2087 r.s,10.

165. Si finalmente hemos de averiguar cuanto importará un decámetro de paño habiendo pagado 84 doblones de Isabel, 5 escudos, 3 reales, 6 décimas por 32 metros, 5 cen-

tímetros de paño, convertirémos primero á cada uno de los términos en decimales, á saber, al dividendo en decimal de doblon, y al divisor en decimal de decámetro, y quedará reducida la operacion á dividir 84 dob.^{s},536 por 3 dec.^{s},205, y practicando la operacion conforme se dijo en los decimales, obtendrémos por resultado 26 dob.^{s},376.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

metros de paño, convertirémos primero á cada uno de los términos en decimales, á saber, al dividendo en decimal de doblon, y al divisor en decimal de decámetro, y quedará reducida la operacion á dividir 84dob.',336 por 3dec.',205, y practicando la operacion conforme se dijo en los decimales, obtendrémos por resultado 26dob.',376.

FIN DE LA ARITMÉTICA

ÍNDICE DE LA ARITMÉTICA.

ÁLGEBRA.

PRIMERA PARTE.

1. El *Álgebra* es la parte de Matemáticas que trata de la cantidad con la mayor generalidad y abstraccion. En la Aritmética todas las cantidades vienen expresadas por números, en el Álgebra lo son por letras. De esto se deduce inmediatamente la ventaja que el Álgebra lleva sobre la Aritmética. El número 3, por ejemplo, siempre tiene el mismo valor limitado, y tan solamente pueden variar las especies á que se refiera. Así, el número 3 podrá representar duros, manzanas, arrobas, etc; pero en todos los casos no espresará sino tres unidades de duro, manzana, arroba, etc. En el Álgebra la letra a, por ejemplo, tiene un valor totalmente indeterminado, cuyo valor está solamente sujeto al arbitrio del calculador. Así, sean cuales fueren las especies de unidades á que se refiera, podrá representar el número 3, 10, 100, 1000, 10000, etc. etc. Lo que se ha dicho de la letra a puede decirse de todas las demás.

2. En la Aritmética todas las operaciones son particulares con datos determinados; en el Álgebra, las operaciones que se practiquen con las letras, por razon de su indeterminacion, serán una regla general aplicable á todos los casos particulares que puedan presentarse. Esta es la diferencia que existe entre el Álgebra y la Aritmética, y la inmensa ventaja que la una tiene sobre la otra.

3. Para expresar las cantidades se vale el Álgebra de las letras mayúsculas y minúsculas de nuestro alfabeto, y á veces tambien de las del griego. Con una misma letra se podrán representar diferentes cantidades, dejándola sin acentuar, ó diferentemente acentuada. A una letra se le pueden poner uno ó mas acentos á la derecha ó á la izquierda, arriba ó abajo, y cada una de estas letras tendrá valor diferente. Así cuatro números de arrobas podrán expresarse de este modo: a, a', a'', a''', a'''', y se leerán; a, *a prima*, *a segunda*, *a tercera*, *a cuarta*; ó bien de este modo, a $'a$, $''a$, $'''a$, $''''a$, y se leerán; a, *primera a*, *segunda a*, *tercera a*, *cuarta a*, etc.

Tambien pueden ponerse los acentos en la parte inferior de la letra. Así los cuatro primeros números se escribirán, a, $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, $a_{,,,,}$ y se leerán; a, *a subprimera*, *a subsegunda*, *a subtercera*, *a subcuarta*, etc.; ó bien de este modo, a, ${}_{,}a$, ${}_{,,}a$, ${}_{,,,}a$, ${}_{,,,,}a$, y se leerán; *a*, *subprimera a*, *subsegunda a*, *subtercera a*, *subcuarta a*, etc.

4. Las operaciones del Álgebra son las mismas que las de la Aritmética, añadiéndose además los de elevacion á potencias, y extraccion de raices. Los signos de que se vale para indicar las operaciones son igualmente los mismos que en Aritmética, y á mas el signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*. Así como en Aritmética se efectuan todas las operaciones, porque los datos son determinados y de un valor conocido, en Álgebra no puede hacerse mas que indicar, porque los datos representan un valor indeterminado y desconocido. Los únicos recursos pues serán los signos que indiquen las operaciones. Así si tenemos la espresion $a+b$, el signo $+$ nos indica una operacion de sumar, ó bien que el valor de b debe agregarse al de a; si tenemos $a-b$, el signo $-$ nos indica una operacion de restar, ó bien que el valor de b debe quitarse del de a. De esto se infiere que los signos $+$ y $-$ no solo nos indican cantidades positivas y negativas, sino tambien las operaciones de sumar y restar. Si tenemos $a \times b$ el signo $\times$ nos indica que el valor de a se ha de multiplicar

por el de b: y si finalmente tenemos a/b, el signo / nos indica que el valor de a ha de dividirse por el de b.

5. Una letra sola forma una cantidad, y un grupo de ellas la forma tambien. Cada cantidad álgebraica tiene su *coeficiente, esponente y divisor*. Llámase *coeficiente* de una cantidad algebraica aquel número que está á la izquierda de la cantidad, y nos indica que la cantidad está repetida una porcion de veces como *sumando*. Entiéndese por *esponente* de una cantidad aquel número que está á su derecha un poco mas elevado, y nos indica que ella está repetida una porcion de veces como *factor*.

Para leer una espresion algebráica se empieza por el coeficiente nombrándole como los numerales cardinales, luego la letra ó grupo de ella, y en seguida en cada una de ellos su esponente como se ha dicho del coefiente, ó bien diciendo en cada una de las letras elevada al número que nos indique su esponente. Asi para leer la espresion siguiente, $3a^2b^4$, diremos; *tres a dos b cuatro*; ó bien *tres a elevado á dos b elevado á cuatro*, etc. Cuando el esponente sea la unidad, se suprime el nombrarlo en su espresion. Así si tenemos $4a^3dm^5$, dirémos; *cuatro a tres ó bien elevada á tres d cinco ó elevada á cinco.*

Segun lo anteriormente esplicado tendrémos que $3a$, por ejemplo nos dice que la a está tres veces repetida como *sumando*; de modo que descomponiendo tendrémos; $3a = a + a + a$; $3ab = ab + ab + ab$, etc. Si tenemos a^3, por ejemplo, el número 3 nos dice que la a está tres veces repetida como *factor*; de modo que descomponiendo tendrémos; $a^3 = a \times a \times a$; $ab^3 = ab \times ab \times ab$; $abd^4 = abd \times abd \times abd$, etc. De esto se infiere, que el coeficiente ó esponente de una cantidad nos indican una suma ó multiplicacion abreviadas.

6. Toda espresion algebraica tiene su *coeficiente, esponente* y *divisor*; cuando falte alguna de estas tres cosas, se le sobrentiende la unidad en cada una de ellas. Asi a, por ejemplo, está implícitamente acompañada de la unidad por coeficiente, esponente y divisor. De este modo tendrémos $a = 1a = 1a^1 = 1a^1/1$.

7. Todas las cantidades algebráicas están afectas del signo $+$ ó $-$. El signo $-$ no puede suprimirse nunca. El signo $+$ se ha convenido en omitirlo al principio de una operacion. Así $ab = + ab$. Las cantidades afectas del signo $+$ se llaman *positivas*, porque conspiran al fin que se propone el calculador, y las que van acompañadas del signo $-$ se denominan *negativas*, porque conspiran á un fin contrario. Absolutamente hablando, no puede decirse que las cantidades negativas sean menores que cero, porque no puede concebirse cosa alguna inferior á la nada; sin embargo se dicen menores con relacion al sujeto, porque le producen un efecto mas desventajoso. Aquel que tiene 0 duros, se supone que no tiene ninguno, pero sin deuda; aquel que tiene -4 duros carece de ellos, y al mismo tiempo adeuda 4. De esto se sigue, que de dos cantidades negativas aquella será mayor que contenga un número menor. Así $-3 > -6$; $-2a > -4a$; etc.

8. Cada espresion algebráica separada de otra por medio del signo $+$ ó $-$ se llama *término*. De esto se infiere, que no formará un término diferente una letra ó un grupo de ellas separado de otro por medio del signo de multiplicacion ni division. Así, si tenemos; $3ab - 2c + m$, habrá tres términos, por haber tres cantidades separadas entre sí por los signos $+$ y $-$. Si tenemos; $3\,ab \times d + 2c/_4 - an \times 2ab^3$, tampoco habrá mas de tres términos, aunque se encuentren dos signos de multiplicacion y division, pues que no hay sino tres espresiones separadas unas de otras por dos veces el signo $+$ y una del signo $-$.

9. Los términos comparados entre sí serán *homogéneos*, *semejantes*, *iguales*, ó *desiguales*. Llámanse *semejantes*, cuando aunque sean con signos y coeficientes diferentes, tienen iguales letras é iguales esponentes en cada una de las letras. Llámanse *iguales*, cuando tengan iguales los signos, coeficientes, letras y esponentes en cada una de ellas, y serán *desiguales*, cuando les falte alguna de estas circunstancias. Así en la espresion siguiente; $3a^2b - m^3 - d^4 + 2a^3 - 5x^4 + a^2b - 4m^3$, serán semejantes $3a^2b + a^2b$,

porque tienen las mismas letras y esponentes en cada una de ellas, así como lo serán por igual razon $-m^3 - 4m^3$. Los dos términos $-d^4 - 5x^4$, serán desiguales entre sí, y desiguales con todos los demas.

Hemos dicho que los términos serían semejantes mientras tuvieran letras y esponentes iguales en cada una de ellas, aunque fueran diferentes los signos y coeficientes. En los ejemplos anteriores han sido iguales los signos é igual el órden con que estaban colocadas las letras. Sin embargo aunque no se observe igual colocacion de letras en los diversos términos, serán por esto semejantes, mientras haya las mismas letras y esponentes en cada una de ellas, aunque estén en órden inverso. Así en la expresion siguiente ; $-4a^2db^3c + 5mx^3a + b^3a^2cd - ax^3m$, serán semejantes los términos $-4a^2db^3c + b^3a^2cd$; al mismo tiempo que el término $5mx^3a$ lo será con $-ax^3m$.

10. Cuando una espresion algebráica conste de un solo término se llama *monomio*, cuando conste de dos *binomio*; cuando conste de tres *trinomio*, etc; y en general se llama *polinomio* á toda espresion algebraica que contenga dos ó mas términos. Así a^3bm será un *monomio*; $5dc + am$ será un *binomio*; $4a^2 + 6dc - 2m$ será un *trinomio*, etc. En cada término deben considerarse lo que se llaman *dimensiones*. Entiéndense por estas cada uno de los factores literales con esponente 1 en que puede descomponerse dicho término. Así en a^2 habrá dos dimensiones, porque $a^2 = a^1 \times a^1$, en $3ab^2c^2$ habrá siete dimensiones, porque $3a^3b^2c^2 = 3a^1 \times a^1 \times a^1 \times b^1 \times b^1 \times c^1 \times c^1$.

Cuando un término no tenga denominador, se contarán sus dimensiones sumando los esponentes de cada una de las letras, cuya suma será el número de dimensiones que contenga. Así en $5a^4dm^2$ hay siete dimensiones; porque la suma de los esponentes $4 + 1 + 2 = 7$.

Si el término tuviera denominador, se sumarán los esponentes tanto del numerador como del denominador, y se restará la suma menor de la mayor, cuya resta nos dirá el número de dimensiones de dicho término. Cuando sea igual la suma de los esponentes en el numerador y denominador, el término tiene cero dimensiones. Si la suma del denominador es mayor que la del numerador, la resta entonces será negativa, y por consiguiente las dimensiones tambien. Así en $\frac{4a^3bc^5}{2m^2a^4}$ habrá 3 dimensiones: en $\frac{5m^4d}{acb^2x}$ habrá cero dimensiones; y en $\frac{a^2b^3d}{m^5c^3}$ habrá — 2 dimensiones.

Por razon de las dimensiones los términos se llaman *homogéneos* ó *heterogéneos*. Son lo primero los que tengan igual número de dimensiones, y son lo segundo los que no los tengan. Así los términos $3a^2b^4 - 5md^3c^2$ serán homogéneos, porque ambos contienen igual número de dimensiones á saber, 6. los términos $3a^2bd + 5m^3c^4$ serán heterogéneos, porque no tienen cada uno igual número de dimensiones.

Simplificacion de Polinomios.

11. Llámase simplificacion de *polinomios* la reduccion de estos á una mas sencilla espresion, pero de igual valor que la primera. Esto puede hacerse cuando haya dos ó mas términos semejantes. Para ello se suman los coeficientes de los términos que lleven igual signo, y la suma forma el coeficiente del nuevo término que traerá igual signo, y las mismas letras y esponentes que tenian los términos simplificados. Cuando los signos sean diferentes en los términos semejantes, se restarán los coeficientes, y la resta será el coeficiente del nuevo término que contendrá las mismas letras y esponentes que los términos simplificados, quedando la resta con el signo que tenia el término de mayor coeficiente. Los demás términos que no son semejantes se dejan del mismo modo.

Cuando dos términos semejantes tengan iguales coeficientes el uno con signo positivo y el otro con signo negativo, se tachan inmediatamente los dos, porque se destruyen mutuamente, pues que en este caso el coeficiente de la simplificacion se reduce á cero. Cuando los términos tengan iguales signos la simplificacion toma el nombre de *reduccion, y el de destruccion cuando sean los signos diferentes*. Así si tenemos la espresion siguiente: $4a^3b - 2c^4m^5 - a^2d^4 + 3x^2c - 2a^3b + cx^2 - 5d^4m^5$, observarémos que la podrémos simplificar diciendo, $+4a^3b$, y $-2a^3b$ forman $+2a^3b$; $-2c^4m^5$ y $-5c^4m^5$ forman $-7c^4m^5$; $+3x^2c$ y $+cx^2$ son $+4x^2c$; $-a^2d^4$ bebe dejarse del mismo modo por no tener término semejante; por lo que el primer polinomio simplificado será; $2a^3b - 7c^4m^5 + 4x^2c - a^2d^4$.

La razon de esta regla se funda en que las letras con sus esponentes nos indican una especie cualquiera, y los coeficientes nos dicen las unidades que se toman de aquella especie. Pues bien: cuando los términos semejantes se simplifican no se trata sino de reunir en un solo valor aquellas unidades; por lo que deberán sumarse en este caso los coeficientes de los términos de igual signo dejando en la suma el mismo signo de ellos, pues que importa poco, que las cantidades sean positivas ó negativas: y deberán restarse los coeficientes de términos que tengan diferente signo, por ser opuestos entre sí, debiendo en tal caso quedar la resta con el signo del término que tenia mayor coeficiente, porque este, como de mayor valor que el otro, ha debido servir de minuendo.

Sumar.

12. Sumar en Álgebra es reunir en solo valor el de dos ó mas espresiones algebraicas. Se indica la operacion, primero, colocando cada sumando dentro de un paréntesis, y en medio de uno y otro paréntesis el signo $+$. Para ejecutar la operacion, se quitan los paréntesis y signos que estaban fuera de ellos, y se juntan unos sumandos á continuacion de los otros, dejando en todos ellos los términos con los mismos signos que traian. Luego se simplifica, si se puede.

Para su demostracion supongamos que con la cantidad $+a$ hemos de sumar la cantidad $+b$, y tendrémos: $(+a)$

$+(+b)$. El signo $+$ que está fuera del paréntesis no sirve sino para indicar la operacion que me propongo, que en este caso es de aumentar: el signo $+$ que afecta á la b, me indica que esta cantidad es positiva, á saber que conspira al mismo fin que yo me propongo. Siendo pues este el de aumentar, habré de colocar la b con aquel signo que indique el aumento, para lo que sirve el signo $+$. Luego habré de poner la b con el mismo signo que tenia, y así tendrémos; $(+a)+(+b)=+a+b=a+b$.

Sea ahora que con la cantidad $+a$ hemos de sumar la cantidad $-b$, y se indicará la operacion de este modo: $(+a)+(-b)$. El signo $+$ que está fuera del paréntesis me indica la operacion de sumar. El signo $-$ de la b me dice que esta es negativa, á saber, que conspira á un fin contrario al mio. Como el mio es de aumentar, el de la b será pues de disminuir. Luego habré de colocar la b con el signo que indique la disminucion. Siendo pues este el signo $-$, colocaré la b con el mismo signo $-$ que tenia. Así pues tendrémos: $(+a)+(-b)=+a-b=a-b$. Todo lo que espresa la regla sentada.

Cuando los sumandos sean monomios, se ponen en seguida sin paréntesis los unos á continuacion de los otros.

Súmense pues los siguientes polinomios; $a^3+b^2c-5c^2b$, con $8a^2b^3-7ab^2d+5a^2b-6a^3$, con $8bc^2-5cb^2+9b^3a^2-2ad$; Aplicando la regla sentada, tendrémos: $(a^3+b^2c-5c^2b)+(8a^2b^3-7ab^2d+5a^2b-6a^3)+(8bc^2-5cb^2+9b^3a^2-2ad)=a^3+b^2c-5c^2b+8a^2b^3-7ab^2d+5a^2b-6a^3+8bc^2-5cb^2+9b^3a^2-2ad=-5a^3-4cb^2-5c^2b+17a^2b^3-7ab^2d+5a^2b-2ad$.

Restar.

13. Restar en Álgebra es hallar la diferencia entre dos cantidades, ó quitar una cantidad de otra. La operacion se indica poniendo el minuendo y sustraendo cada uno dentro de un paréntesis, y en medio de los dos el signo $-$ que indica la operacion de restar. Para efectuar la operacion se pone el minuendo del mismo modo que se presen-

ta, y á continuacion el sustraendo, cambiando el signo á cada uno de sus términos. Despues se simplifica el resultado, si se puede.

Para su demostracion supongamos que de la cantidad $+a$ hemos de quitar la cantidad $+b$, y tendrémos; $(+a)-(+b)$. El signo $-$ que está fuera del paréntesis indica la operacion que me propongo, que aquí es de restar. El signo $+$ que afecta á la b me dice que la b es positiva, á saber que conspira al mismo fin que yo me propongo. Como este es el de disminuir, habré de colocar la b con el signo que señale la disminucion, esto es con el signo$-$. Así pues será: $(+a)-(+b)=+a-b=a-b$.

Sea ahora que de la cantidad $+a$ hemos de quitar la cantidad $-b$, y tendrémos: $(+a)-(-b)$. El signo $-$ de fuera del paréntesis indica la operacion de restar. El signo $-$ que afecta á la b me dice que esta cantidad es negativa, á saber que conspira al fin contrario al que yo me propongo. En este caso me propongo disminuir; luego la b conspirará á aumentar; por lo que deberé cambiarle el signo, para que conspire á mi fin propuesto de disminuir. Así pues será $(+a)-(-b)=+a+b=a+b$. Todo lo que demuestra la regla establecida.

Cuando el minuendo y sustraendo son monomios, se colocan sin paréntesis inmediatamente el uno al lado del otro, cambiando el signo al sustraendo.

Del polimonio $-3a^2d+5m^3b^4c+2d^3bc-5m^3b^4+4x^5z^3$, tratemos de quitar el siguiente; $-4d^3bc+2da^2-5a^4d^3-6z^3x^5+m+5d^3bc$. Aplicando la regla esplicada, será: $(-3a^2d+5m^3b^4c+2d^3bc-5m^3b^4+4x^5z^3)-(-4d^3bc+2da^2-5a4d^3-6z^3x^5+m+5d^3bc)=-3a^2d+5m^3b^4c+2d^3bc-5m^3b^4+4x^5z^3+4d^3bc-2da^2+5a^4d^3+6z^3x^5-m-5d^3bc=-5a^2d+5m^3b^4c+d^3bc-5m^3b^4+10x^5z^3+5a^4d^3-m$.

De la definicion del restar algebráico se deduce, que á uno ó mas términos de un polinomio puede combiarseles el signo, encerrandoles dentro de un paréntesis precedido del signo$-$. Asi, el polinomio $3a^2b+5a^3dm-8bc^6+4c^7n^2d-abc$; podrá escribirse bajo las siguientes formas: $3a^2b+$

$5a^3dm - (8bc^6 - 4c^7n^2d + abc)$; $3a^2b - (-5a^3dm + 8bc^6 - 4c^7n^2d + abc)$; $5a^3dm - 8bc^6 + 4c^7n^2d - (3a^2b + abc)$ etc.

Multiplicar algebraico.

14. Multiplicar en álgebra es, *tomar una cantidad llamada multiplicando tantas veces como unidades tenga otra, llamada multiplicador, y tomarla del modo que diga se debe tomar.*

Tres son los casos que pueden ocurir en la multiplicacion algebraica, á saber; 1.º *multiplicar un monomio por otro;* 2.º *un polinomio por un monomio, ó al revés;* 3.º *un polinomio por otro.*

Entendida la operacion de multiplicar un monomio por otro, se entenderá facilmente el multiplicar un polinomio por un monómio, y un polinómio por otro, porque en estos dos últimos casos no hay sino una operacion sucesiva de un monómio por otro.

15. Cuatro son las cosas que se han de atender para multiplicar un monomio por otro, á saber; *signos, coeficientes, letras, y esponentes.*

Signos semejantes dan $+$ en el producto, y los desemejantes dan $-$. De modo que $+\times+=+$; $-\times-=+$; $+\times-=-$; $-\times+=-$.

Los coeficientes se multiplican entre sí por las reglas de Aritmética.

Las letras iguales se ponen una sola vez, y las desiguales se colocan la una á continuacion de la otra.

Los esponentes de letras iguales se suman, y los de letras desiguales se dejan del mismo modo.

16. Para la demostracion de los signos supongamos que hemos de multiplicar $+a$ por $+1$, y tendrémos $+a\times+1$; el multiplicador con sus unidades nos dice que se ha de tomar el multiplicando a una sola vez, y con el signo me dice que la a se ha de tomar tal como sea; como el multiplicando es positivo, se deberá tomar tambien positivamente, y tendrémos que $+a\times+1=+1a=+a=a$; á saber, $+\times+=+$.

Si hemos de multiplicar $+a$ por -1, tendrémos $+a\times-1$. El multiplicador con sus unidades nos dice que se ha de tomar el multiplicando una sola vez, y con su signo, por ser negativo, nos dice que se ha de tomar al revés de lo que sea el multiplicando. Siendo pues este positivo, se habrá de tomar negativamente, y tendrémos; $+a\times-1=1a=-a$; á saber: $+\times-=-$

Si hemos de multiplicar $-a$ por $+1$, será $-a\times+1$. El multiplicador con sus unidades nos dice que se ha de tomar una sola vez al multiplicando, y con su signo, por ser positivo, indica que se ha de tomar como él sea. Siendo pues el multiplicando negativo, habrá de tomarse negativamente, y tendrémos; $-a\times+1=-1a=-a$; á saber, $-\times+=-$.

Si finalmente tenemos que multiplicar $-a$ por -1, será $-a\times-1$. El multiplicador con sus unidades nos dice que se ha de tomar una sola vez al multiplicando, y con su signo por ser negativo, indica que se ha de tomar al revés de lo que sea el mismo multiplicando. Siendo pues este negativo, se habrá de tomar positivamente; y tendrémos; $-a\times-1=+1a=+a=a$; á saber, $-\times-=+$.

De todo esto resulta lo que teniamos sentado, á saber; que signos semejantes dan $+$, y signos desemejantes dan $-$ en el producto: así que; $+\times+=+$; $+\times-=-$; $-\times-=+$; $-\times+=-$.

17. Para demostrar la regla de los coeficientes, debemos tener presente que (n.º 5) el coeficiente de una cantidad espresa las veces que está repetida como sumando. Como una multiplicacion es una suma abreviada en que los sumandos son iguales, tendrémos, que todo coeficiente es un factor numérico del término á que pertenece. Así que $3a=a+a+a=3a=3\times a$. Supongamos, pues, que se ha de multiplicar $3a$ por $4b$, y tendrémos; $3a\times4b=3\times a\times4\times b$, y como el órden de los factores no altera el producto, será; $3\times a\times4\times b=3\times4\times a\times b=12\times a\times b$. Lo que nos demuestra la regla dada de los coeficientes.

18. Para las letras desiguales ha de darse por sentado que, en Álgebra se ha convenido indicar la multiplicacion

de dos cosas indeterminadas, colocando la una al lado de la otra sin signo alguno, ó con él en medio de las dos. Esto justifica la regla de las letras no comunes, pues ha de dejarse indicada la operacion. Así $a\times b=ab$, $abc\times md$ $=a\times b\times c\times m\times d=abcmd$.

19. Para la demostracion de los esponentes, supongamos que ha de multiplicarse a^2 por a^3, y tendrémos; (n.º 5) $a^2=a\times a$, y $a^3=a\times a\times a$; por lo que $a^2\times a^3=$ $a\times a\times a\times a\times a=a^5$ (n.º 5). Esto nos demuestra la regla de las letras iguales, y la de los esponentes; á saber que las letras iguales no se ponen sino una sola vez, y que sus esponentes se suman.

Resolvamos algunos ejemplos segun estas reglas. Sea, por ejemplo, que hayamos de multiplicar $+2a^4db^3$ por $+3a^2cdb^4x$, y tendrémos $2a^4db^3\times 3a^2cdb^4x$. Aplicando las reglas dadas dirémos; *mas* por *mas* da *mas*; 2 multiplicado por 3 da 6; *a cuatro* por *a dos* da *a seis*; *d uno* por *d uno* da *d dos*; *b tres* por *b cuatro* da *b siete*; y como en el multiplicando no se hallan las letras c, y x, escribirémos á continuacion la c, y la x del multiplicador. Por lo que tendrémos; $+2a^4db^3\times+3a^2cdb^4x=+2\times a^4\times d\times$ $b^3\times+3\times a^2\times c\times d\times b^4\times x$ (n.º 17 y 18) $=+2\times$ $3\times a^4\times a^2\times d\times d\times b^3\times b^4\times c\times x$ (n.º 17) $=+$ $6a^6d^2b^7cx$.

2.º $5a^4bc^2d^3m^{1/2}\times -2a^2c^4m^{1/3}x=-10a^6bc^6d^3m^{1/2+1/3}x$.

3.º $-3d^4c^{1/3}\times+dc^{1/3}=-3d^5c^{2/3}$

4.º $-4m^5d^3ca^{1/4}b\times-2x^3a^{3/4}m^2dc^5=8m^7d^4c^6abx^3$.

Si los esponentes fueran literales, se indicaría no mas la suma de los factores, como se ha hecho en los ejemplos anteriores con los esponentes quebrados de diferente denominador. Así multiplicando $3a^md^3c^nb$ por $a^xd^2c^4$, tendrémos: $3a^md^3c^nb\times a^xd^2c^4=3a^{m+x}d^{3+2}c^{n+4}$

20. Para multiplicar un polinomio por un monomio, ó al contrario, despues de simplificado todo lo posible el polinomio, se multiplicará sucesivamente segun las reglas dadas (n.º 15) el monomio por todos los términos del polinomio. La razon de esto consiste en que lo que se haga con el monomio y cada una de las partes del polinomio quedará hecho con el todo.

Antes de empezar la multiplicacion se indidará esta colocando al polinomio dentro de un paréntesis, y luego el signo $\times$ en medio del paréntesis y del monomio. La razon de esto consiste en que el signo $\times$ no afecta sino á los términos que tenga inmediatos. Por lo que colocado en medio del monomio y del paréntesis, se da á entender, que afecta al monomio y á todos los términos encerrados en el paréntesis.

Multipliquemos segun esta regla el polinomio $3a^4d - 2m^3c^4\mathrm{d} - a^5c^3d + 4b^6d^3m^5$ por $2ac^2m^3$, y tendrémos: $(3a^4d - 2m^3c^4\mathrm{d} - a^5c^3d + 4b^6d^3m^5) \times 2ac^2m^3 = 6a^5c^2m^3d - 4ac^6m^6d - 2a^6c^5m^3d + 8b^6ad^3c^2m^8$. Todo lo que se ha conseguido multiplicando el monomio $2ac^2m^3$ por el primero, segundo, tercero, y cuarto del multiplicando, esto es por todo el multiplicando.

De la definicion de multiplicar un polinomio por un monomio ó al contrario se deduce; que todo polinomio que tenga un factor numérico ó literal comun á varios términos puede descomponerse en dos factores, de los que, el uno será el factor comun que se pondrá fuera de un paréntesis, y el otro será el polinomio propuesto encerrado dentro de un paréntesis, despues de haber suprimido de los términos que convenga, el factor que les era comun. Así teniendo $a^2b + 5a^3d^2 - 2a^4c + m^6d^3a^5 + c^4a^3$, observo que a^2 se encuentra por factor en todos los términos del polinomio; saco pues fuera de un paréntesis el factor a^2, y encierro dentro de él el polinomio que me queda despues de suprimido en todos los términos el factor comun; con lo que tengo: $a^2 \times (b + 5ad^2 - 2a^2c + m^6d^3a^3 + c^4a)$.

21. Para multiplicar un polinomio por otro se encerra-

rá primero el multiplicando dentro de un paréntesis, y dentro de otro el multiplicador, y en medio de ellos el signo $\times$. Luego se multiplicará sucesivamente cada término del multiplicando por todo el multiplicador, simplificándose despues el resultado, si es susceptible de ello. La razon de esta regla se funda en el número anterior.

Multiplíquese segun esta regla el polinomio $-5a^4+2a^3b-4a^5b^2$ por $-a^3+4a^2b-2b^3$, y tendrémos; $(-5a^4+2a^3b-4a^5b^2)\times(-a^3+4a^2b-2b^3)=5a^7-20a^6b+10a^4b^3-2a^6b+8a^5b^2-4a^3b^4+4a^8b^2-16a^7b^3+8a^5b^5=5a^7-22a^6b+10a^4b^3+8a^5b^2-4a^3b^4+4a^8b^2=16a^7b^3+8a^5b^5$.

Si se multiplica el polinomio a^m+b^n por el otro a^m-b^n, tendrémos; $(a^m+b^n)\times(a^m-b^n)=a^{m+m}-a^mb^n$ $+b^na^m-b^{n+n}=a^{2m}-a^mb^n+b^na^m-b^{2n}=a^{2m}-b^{2n}$.

Este resultado nos dice que si se multiplica un binomio-suma por el mismo binomio-diferencia, el producto nos da un binomio-diferencia con esponentes dobles de lo que eran los de los factores. Si comparamos el ejemplo aducido, observarémos que hay dos términos semejantes que pueden tacharse ó suprimirse inmediatamente; á saber, $-a^mb^n$, y $+b^na^m$, porque se destruyen. Así pues en casos semejantes en que ocurra la multiplicacion de un binomio suma por el mismo binomio diferencia, podrá ponerse inmediatamente por resultado el mismo binomio diferencia con esponentes dobles. Por lo que; $(a^4+b^2)\times(a^4-b^2)=a^8-b^4$; $(a^6+b^5)\times(a^6-b^5)=a^{12}-b^{10}$, etc.; puesto que, $(a^4+b^2)\times(a^4-b^2)=a^8-a^4b^2+a^4b^2-b^4=$ (n.º 11) a^8-b^4, porque $-a^4b^2$ y $+a^4b^2$ se destruyen. Lo mismo puede hacerse con los demás ejemplos.

De esto se deduce tambien que todo binomio diferencia podrá descomponerse en dos factores que el uno sea un binomio suma, y el otro un binomio diferencia, pero poniendo á cada parte la mitad del esponente que tenia.

Así, $a^{16}—b^{12}=(a^{8}+b^{6})\times(a^{8}—b^{6})$; $a^{10}—b^{4}=(a^{5}+b^{2})\times(a^{5}—b^{2})$ $a^{7}—b^{5}=\left(a^{7/2}+b^{5/2}\right)\times\left(a^{7/2}—b^{5/2}\right)$; $a^{m}—b^{n}=\left(a^{m/2}+b^{n/2}\right)\times\left(a^{m/2}—b^{n/2}\right)$

Dividir algebraico.

22. Dividir en Álgebra es buscar cuantas veces una cantidad contiene á otra, y del modo que la contiene, ó hallar una cantidad, llamada cociente, que multiplicada por el divisor dé el dividendo.

23. Cuatro son los casos que pueden ocurrir en la division algebraica, á saber; dividir un monomio por otro; un polinomio por un monomio; un polinomio por otro; y un monomio por un polimonio.

24. Para dividir un monomio por otro hay que atender á cuatro cosas, á saber; á signos, á coeficientes, á letras, y á esponentes.

Para los signos hay la misma regla que en la multiplicacion; pues que signos semejantes dan *mas* y signos desemejantes dan *menos* en el cociente.

Los coeficientes se dividen por las reglas de aritmética; y cuando no se puedan dividir exactamente, se simplifican lo posible.

Las letras diferentes se dejan del mismo modo en el lugar que ocupaban, y las comunes se ponen una sola vez en el término que tenian mayor esponente.

Los esponentes de las letras comunes se restan, y la resta queda tambien en el término que la letra tenia mayor esponente.

25. Para la demostracion de los signos basta considerar, que el cociente multiplicado por el divisor ha de producir el dividendo. Por consiguiente cuando el dividendo tenga el signo $+$, el divisor y el cociente han de tener ambos un mismo signo $+$ ó $-$; porque solamente signos semejantes producen $+$ en el producto. Cuando el dividendo tenga el signo $-$, entonces el divisor y el cociente han de tener diferentes signos; porque solamente signos desemejantes producen $-$ en el producto. Por tanto tendrémos que en la division $\frac{+}{+}=+$; $\frac{-}{-}=+$; $\frac{+}{-}=-$; $\frac{-}{+}=-$.

Para la demostracion de la regla de los coeficientes basta recordar que en la multiplicacion se multiplican por las reglas de aritmética; luego siendo la division una operacion contraria, habrán de dividirse por las mismas reglas. A mas, la regla establecida se funda en que dividendo y divisor se parten por un mismo número ó factor comun en uno y otro caso, lo que no altera la division (arit. n.º 42. 3.ª). Pues que si teniamos por ejemplo, $\frac{12a}{3b}$, prescindiendo de las letras, ó dejándolas como están, seria; $\frac{12a}{3b}=\frac{12\times a}{3\times b}=\frac{4\times 3\times a}{3\times b}=\frac{4\times a}{b}=\frac{4a}{b}$. En este caso ha equivalido á suprimir de dividendo y divisor el factor comun 3, ó bien dividir en cada término el 3 por si mismo. Si teniamos $\frac{6a}{12b}$, seria: $\frac{6a}{12b}=\frac{6\times a}{12\times b}=\frac{6\times a}{6\times 2\times b}=\frac{a}{2\times b}=\frac{a}{2b}$: Si teniamos $\frac{26a}{8b}$ seria; $\frac{26a}{8b}=\frac{26\times a\ /^2}{8\times b\ /_2}=\frac{13\times a}{4\times b}=\frac{13a}{4b}$, etc. Siempre resulta que se suprime un factor comun, ó que se dividen sus dos términos por una misma cantidad.

Cuando las letras son diferentes en el dividendo y divisor, deben dejarse del mismo modo, porque, ignorándose su valor, ha de quedar indicada la operacion.

La regla de las letras iguales, y sus esponentes queda demostrada por las mismas razones que la de los coeficientes; pues que equivale á suprimir de dividendo y divisor un factor literal comun á los dos. Sea para su comprobacion, que hayamos de dividir $a^5b^3c^2x^8$ por $a^3dc^9zx^4$, y tendrémos:

$$\frac{a^5b^3c^2x^8}{a^3dc^9zx^4}=\frac{a^5\times b^3\times c^2\times x^8}{a^3\times d\times c^9\times z\times x^4}=\frac{a^3\times a^2\times b^3\times c^2\times x^4\times x^4}{a^3\times d\times c^2\times c^7\times z\times x^4}$$

$=\frac{a^2\times b^3\times x^4}{d\times c^7\times z}=\frac{a^2b^3x^4}{dc^7z}$. Si se observan las descomposiciones anteriores, y se comparan con el último resultado, se verá que se han suprimido de dividendo y divisor los factores comunes a^3, c^2, x^4; lo que se ha obtenido aplicando la regla dada en el número anterior.

Dividamos pues; $-8a^6d^3c^4$ por $+2a^2d^5c^3$, y dirémos: *menos* dividido por *mas* da *menos*; 8 dividido por 2 da 4; a^6 dividido par a^2 da a elevado á seis menos dos ó $a^{6-2}=a^4$ en el dividendo; d^3 dividido por d^5 da $d^{5-3}=d^2$ en el divisor; c^4 dividido por c^3 da $c^{4-3}=c^1=c$ en el dividendo; por lo que tendrémos: $\frac{-8a^6d^3c^4}{+2a^2d^5c^3}=\frac{-4a^4c}{d^2}$. Si tenemos $-18ab^3d^2c^5m$ dividido por $-4a^4zb^6d^2c$, será: $\frac{-18ab^3d^2c^5m}{-4a^4zb^6d^2c}$ $=+\frac{^{18}/_2ab^3d^2c^5m}{^4/_2a^4zb^6d^2c}=+\frac{9c^4m}{2a^3zb^3}$. En este caso se ve, que se ha podido tachar inmediatamente ó suprimir de dividendo y divisor el factor comun d^2.

26. Para dividir un polimonio por un monomio, se dividirá cada término del dividendo polinomio por el monomio, guardando en un todo las reglas dadas para la divi-

sion de un monomio por otro. La razon de esto consiste en que, lo que se haga con el conjunto de sus partes queda hecho con el todo; y á mas la operacion queda reducida á dividir una porcion de veces un monomio por otro.

Dividamos segun esta regla el polimonio $a^2+2a^2b-b^2$ por $+ab$, y tendrémos: $\frac{a^2+2a^2b-b^2}{+ab}=\left(\frac{a^2}{ab}\right)+\left(\frac{2a^2b}{ab}\right)$

$$+\left(\frac{-b^2}{ab}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{2a}{1}\right)+\left(\frac{-b}{a}\right)=\frac{a}{b}+2a-\frac{b}{a}$$

Aqui podrémos observar, para los demás casos semejantes, que el segundo término $2a^2b$ dividido por ab nos ha dado $2a$ dividido por 1, y finalmente un entero $2a$. Esto procede de que el divisor ab tenia implicitamente por coeficiente 1; de modo que $ab=ab\times1$. Como ab del divisor era un factor comun tambien al dividendo, de aquí es que se ha suprimido de ambos términos, quedando solamente la unidad en el divisor; pero como toda cantidad, dividida por 1 da por cociente la misma cantidad, ha resultado finalmente el entero $2a$.

Dividamos el polimonio $-24a^5d^3c^8+5ma^2d^3c^6-18b^4c^2zn^4+20a^9xb^{12}dc^3$ por $-6a^3xd^4c^2m$, y tendrémos:

$$\frac{-24a^5d^3c^8+5ma^2d^3c^6-18b^4c^2zn^4+20a^9dc^3xb^{12}}{-6a^3xd^4c^2m}=$$

$$\frac{-24a^5d^3c^8}{-6a^3xd^4c^2m}+\frac{5ma^2d^3c^6}{-6a^3xd^4c^2m}+\frac{-18b^4c^2zn^4}{-6a^3xd^4c^2m}+\frac{20a^9xb^{12}dc^3}{-6a^3xd^4c^2m}$$

$$=+\frac{4a^2c^6}{xdm}-\frac{5c^4}{6adx}+\frac{3b^4zn^4}{a^3xd^4m}-\frac{10a^6b^{12}c}{3d^3m}$$

27. Llámase letra principal en un polinomio aquella que en él se encuentra mas veces repetida.

Entiéndese por ordenar un polinomio, colocar sus términos de manera, que los exponentes de la letra principal vayan aumentando ó disminuyendo de izquierda á derecha. En el primer caso, la ordenacion se llama ascendente y en el segundo descendente.

Teniendo el polinomio $3a^2b - 8d^5a^6m - x^2a^3 - an^5z - 7vea^6 + a^4 - d^3e$, si lo ordenamos por la ordenacion ascendente siendo a la letra principal, resultará, $-d^3e + an^5z + 3a^2b - x^2a^3 + a^4 + 7vea^5 - 8d^5a^6$. Si se tratára de la ordenacion descendente, tendríamos; $-8d^5a^6 + 7vea^5 + a^4 - x^2a^3 + 3a^2b + an^5z - d^3e$.

Sabiendo que con diez unidades de primer órden se forma una de segundo, con diez de 2.° una de 3.° etc., se deduce que todo número del sistema décuplo tiene dispuestos sus diferentes órdenes de unidades por la ordenacion descendente siendo la base 10 del sistema la letra principal de la ordenacion. Así por ejemplo, si tenemos esta cantidad 6543, verémos que la podrémos descomponer de los modos siguientes:

$$\begin{aligned} 6543 &= 6000 + 500 + 40 + 3 \\ &= 6 \times 1000 + 5 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1 \\ &= 6 \times 10 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 3 \times 1 \\ &= 6 \times 10^3 \times 5 + 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0. \end{aligned}$$

28. Para dividir un polinomio por otro, despues de simplificados todo lo posible, y ordenados cada uno por una misma letra, y por la ordenacion descendente, se observará la siguiente regla: *Divídase el primer término del dividendo por el primero del divisor, y se tendrá el primer término del cociente; multiplíquese este cociente por todo el divisor, y réstese el producto de todo el dividendo, cambiando los signos del producto á medida que vayan saliendo, por verificarse una operacion de restar, y se hará la destruccion que se pueda. Al lado de la resta bájense los demás términos posteriores del dividendo. y divídase otra vez el primer término de este nuevo polinomio por el primero del divisor, lo que dará el segundo término del cociente; despues ejecútese en seguida la multiplicacion y resta como en el caso anterior; y*

se continuará del mismo modo hasta hallar una resta cero ó cociente exacto, ó hasta que el mayor esponente de la letra por la que se ordena, sea en la resta menor que el mayor de la misma en el divisor ; en cuyo caso se indica la division de la resta por el divisor; pues no hay entonces cociente exacto, asi como tampoco puede encontrarse, cuando el divisor tenga alguna letra no comprendida en el dividendo, ó cuyo esponente sea mayor que el de la misma letra en el propio término.

La razon de esta regla se funda en que un polinomio no se altera por la diferente ordenacion de sus términos, y todo lo demas se reduce á lo que se verifica en la division de un número compuesto por otro compuesto. (arit. n.° 40).

29. Tratemos de dividir segun esta regla el polinomio $2ab+a^2+b^2$ por el otro $b+a$. En este ejemplo será indiferente ordenar por la letra a ó por la letra b; pues que una y otra se halla el mismo número de veces repetida. Ordenando por la letra a, é indicando la operacion, tendrémos lo que se ve en (A). Ejecutando la operacion, dirémos: *mas* por *mas* da *mas*; a^2 por a da a en el cociente; multiplicando ahora, dirémos; *mas* por *mas* da *mas*, restando, *menos*; $a\times a$ es $+a^2$, que restado del término a^2 del dividendo, se destruyen: *mas* $\times$ por *mas* da *mas*; $a\times b$ da ab; restándolo del segundo término del dividendo, digo; *mas* $2ab$ y *menos* ab da ab; colocando ahora al lado de ab al tercer término b, tendrémos un nuevo dividendo polinomio, á saber $ab+b^2$, y dirémos: *mas* dividido por *mas* da *mas*; ab dividido por a da b: multiplicando ahora, y restando, tendrémos; *mas* $\times$ *mas* da *mas*; $b\times a$ da ab, y restado de ab del dividendo, se destruyen; $b\times b$ da b^2; y restado del b^2 del dividendo,

(A)

$$\begin{array}{rl|l}
 & a^2+2ab+b^2 & a+b \\
\cline{3-3}
 & -a^2-ab & a+b \\
\hline
 & 0+ab+b^2 & \\
 & -ab-b^2 & \\
 & 0\quad 0 &
\end{array}$$

tambien se destruyen; por lo que el cociente obtenido será $a+b$.

Si hemos de dividir el polinomio $3ab^2+3a^2b+b^3+a^3$ por el otro $2ab+a^2+b^2$, despues de ordenados los dos por la letra a, y habiendo indicado la operacion, tendrémos:

$$\begin{array}{r|l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a^2+2ab+b^2 \\ \cline{2-2} -a^3-2a^2b-ab^2 \quad & a+b \\ \cline{1-1} 0+a^2b+2ab^2+b^3 & \\ -a^2b-2ab^2-b^3 & \\ \cline{1-1} 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Si hemos finalmente de dividir el polinomio $-4a^5+20a^4b-40a^3b^2+40a^2b^3-20ab^4+4b^5$ por $-2a^3+6a^2b-6ab^2+2b^3$; supuesto que ya están ordenados por la letra a, tendrémos:

$$
\begin{array}{l|l}
-4a^5+20a^4b-40a^3b^2+40a^2b3-20ab^4+4b^5 & -2a^3+6a^2b-6ab^2+2b^3 \\
\underline{+4a^5-12a^4b+12a^3b^2-\ 4a^2b^3} & \overline{2a^2-4ab+2b^2} \\
\quad 0\ +8a^4b-28a^3b^2+36a^2b^3-20ab^4 \text{ etc.} & \\
\quad\ \ \underline{-8a^4b+24a^3b^2-24a^2b^3+8ab^4} & \\
\qquad\quad 0\ -4a^3b^2+12a^2b^3-12ab^4+4b^5 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{+\ 4a^3b^2-12a^2b^3+12ab^4-4b^5} & \\
\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

De los ejemplos anteriores se puede deducir, que podrá omitirse la multiplicacion del cociente por el primer término del divisor, porque, si la operacion está bien hecha, dará siempre el primer término del dividendo que podrá tacharse inmediatamente, y empezar la multiplicacion del cociente por el segundo del divisor.

30. Dividiendo ahora el binomio a^2-b^2 por $a-b$ y aplicando esta última regla, tendrémos:

$$\begin{array}{r|l}
a^2-b^2 & a-b \\ \cline{2-2}
+ab & a+b \\ \cline{1-1}
+ab-b^2 & \\
+b^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Si dividimos a^3-b^3 por $a-b$: tendrémos:

$$\begin{array}{r|l}
a^3-b^3 & a-b \\ \cline{2-2}
+a^2b & a^2+ab+b^2 \\ \cline{1-1}
+a^2b-b^3 & \\
+ab^2 & \\ \cline{1-1}
+ab^2-b^3 & \\
+b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Dividiendo a^4-b^4 por $a-b$, tendrémos:

$$\begin{array}{r|l}
a^4-b^4 & a-b \\ \cline{2-2}
+a^3b & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ \cline{1-1}
+a^3b-b^4 & \\
+a^2b^2 & \\ \cline{1-1}
+a^2b^2-b^4 & \\
+ab^3 & \\ \cline{1-1}
+ab^3-b^4 & \\
+b^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

En los ejemplos que acabamos de presentar, vemos que han sido binomios-diferencias con esponentes sencillos, pero mayores que la unidad partidos por los mismos binomios-diferencias, pero con esponentes 1. Cada uno de los tres casos nos ha dado cociente exacto. Todos los términos han sido positivos. La primera parte del binomio se halla en todos los términos del cociente menos el último, y la segunda se encuentra en todos menos el primero. Finalmente, los esponentes de la primera parte empiezan por el mismo esponente del dividendo disminuido de una unidad, y van menguando sucesivamente de una unidad hasta desaparecer, y los esponentes de la segunda parte empiezan por la unidad, y aumentan sucesivamente de 1 hasta que en el último término se halla el esponente del dividendo menos 1.

De lo que se ha verificado en los casos anteriores podemos inferir por analogía que sucederá en todos los semejantes; por lo que, cuando haya divisiones de esta clase, podrán escribirse inmediatamente los cocientes observando la siguiente

Ley: *pónganse todos los términos aditivos; el primero contenga la primera parte con el mismo esponente del dividendo disminuido de una unidad; todos los demás menos el último contengan las dos partes, haciendo que los esponentes de la primera parte disminuyan en cada término de una unidad, hasta que no se halle la primera parte, mientras que la segunda parte empezará en el segundo término con esponente* 1, *aumentando en cada término de una unidad, hasta que se halle sola en el último con el mismo esponente del dividendo menos* 1.

Aplicando esta ley á los ejemplos siguientes, tendrémos:

$$a^5-b^5 \quad \underline{/\ a-b}$$
$$a^4+a^3b+a^2b^2+a^1b^3+b^4$$

$$a^7-b^7 \quad \underline{/\ a-b}$$
$$a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+a^1b^3+b^6$$

$$a^m-b^m \quad \underline{/\ a-b}$$
$$a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3+a^{m-5}b^4+\ldots+b^{m-1}$$

31. De la regla sentada en la division para los esponentes (n.º 24) se deduce 1.º que toda cantidad elevada á *cero* es igual á 1.; 2.º que todo factor de un dividendo ó numerador, puede pasar á ser factor del divisor ó denominador y al contrario, con solo cambiar el signo á su esponente.

Para la demostracion de lo primero, supongamos que hemos de dividir la cantidad a^n por sí misma. Como toda cantidad dividida por sí misma nos da la unidad, tendrémos: $\frac{a^n}{a^n}=1$.

Si ahora volvemos á hacer la misma division, pero aplicando la regla dada para los esponentes (n.º 24), tendrémos:

$$\frac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0.$$

Observando, pues, que $1=\frac{a^n}{a^n}$; y que $a^0=\frac{a^n}{a^n}$; y sabiendo que dos ó mas cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, tendrémos; $a^0=1$.

Para la demostracion de lo segundo observarémos, que podrémos sin alteracion alguna, introducir por factor ó divisor de una cantidad la unidad ó una letra cuyo esponente sea *cero*. Sea pues $\frac{a^n}{b^m}$, y aplicando lo que acaba de sentarse, tendrémos: $\frac{a^n}{b^m}=\frac{a^n}{b^m}=\frac{a^n\times 1}{b^m\times 1}=\frac{a^n\times b^0}{b^m\times a^0}=\frac{a^n\times b^{m-m}}{b^m\times a^{n-n}}$. Pero como sabemos por lo dicho al tratar en la multiplicacion de la regla para los esponentes (n.º 15) que, $b^{m-m}=b^{m}\times b^{-m}$, por lo mismo, $a^{n-n}=a^{n}\times a^{-n}$, tendrémos: $\dfrac{a^{n}\times b^{m-m}}{b^{m}\times a^{n-n}}=\dfrac{a^{n}\times b^{m}\times b^{-m}}{b^{m}\times a^{n}\times a^{-n}}$. Si ahora suprimimos de dividendo y divisor los factores comunes b^{m} y a^{n}, tendrémos; $\dfrac{a^{n}\times b^{m}\times b^{-m}}{b^{m}\times a^{n}\times a^{-n}}=\dfrac{b^{-m}}{a^{-n}}$. Donde se ve que a^{n} ha pasado al divisor convirtiéndose en a^{-n}, y b^{m} se ha trasladado al dividendo cambiándose en b^{-m}.

32. Si comparamos entre sí las dos espresiones $\dfrac{0}{a}$, y $\dfrac{a}{0}$, encontrarémos que la primera es igual á *cero*, y la segunda es igual al infinito.

Para la demostracion de lo primero basta recordar que cero dividido por una cantidad cualquiera da por cociente cero. Para lo segundo debe saberse, que el infinito matemático no es otra cosa que una idea negativa de la cual nos valemos para expresar la absoluta imposibilidad de asignar número alguno tan elevado, que sea capaz de resolver la cuestion que nos haya conducido á una expresion semejante á esta, $\dfrac{a}{0}$. Para comprobar que esta expresion significa la idea del infinito, tratemos de hallar el resultado que nos daria, despues de haberla puesto bajo la forma de division, y tendrémos:

$$\frac{a}{0}=\frac{a}{1-1}=\begin{array}{l}a\\ \underline{-a+a}\\ 0+a\\ \underline{-a+a}\\ 0+a\\ \underline{-a+a}\\ 0+a\\ \underline{-a+a}\\ 0+a\\ \underline{-a+a\ \text{etc.}}\end{array}\ \frac{/1-1}{a+a+a+a+a\ \text{etc.}}$$

Donde observamos que tendriamos continuamente por cociente $a+a+a$ etc. es decir un cociente infinito.

33. Sabido que en una division algebráica pueden pasar los factores de un término á otro con solo cambiar el signo á su exponente, se deducen las consecuencias siguientes.

1.ª Todo monomio sea entero sea quebrado es susceptible de varias transformaciones.

Asi, el quebrado $\frac{a^{2}b^{-5}d^{-8}c^{4}n}{x^{-3}z^{4}c^{-2}m^{-1}}$ podrá ponerse bajo las siguientes formas; $\frac{a^{2}b^{-5}d^{-8}c^{4}n}{x^{-3}z^{4}v^{-2}m^{-1}}=\frac{x^{3}z^{-4}v\,m^{2}}{a^{-2}b^{5}d^{8}c^{-4}n^{-1}}=$

$$\frac{a^{2}b^{-5}z^{-4}v^{2}}{d^{8}c^{-4}n^{-1}x^{-3}m^{-1}}=\frac{n}{a^{-2}b^{5}d^{8}c^{-4}x^{-3}z^{4}v^{-2}m^{-1}}\ \text{etc.}$$

2.ª Será indiferente restar el exponente menor del mayor ó al contrario, mientras que la resta quede en el término en que estaba el exponente que ha hecho veces de minuendo.

3.ª Todo factor que tenga exponente negativo podrá pasar á ser factor con exponente positivo; sirviendo esto para la valuacion de quebrados literales con exponentes negativos.

Como en la division de un monomio por un polinomio debe entrar la multiplicacion de un quebrado por un entero, la reservaremos para despues de los quebrados.

QUEBRADOS LITERALES.

Reduccion á un comun denominador, y simplificacion de quebrados literales.

34. Para reducir dos ó mas quebrados literales á un comun denominador, se multiplican el numerador y denominador de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás. Fúndase en lo demostrado en Aritmetica (n.º 42 y 72).

Asi tendrémos que, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b}=$

$$\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}\ ;\ \frac{a^3z}{m^5}+\frac{a^2+3c}{n}=\frac{a^3z\times n}{m^5\times n}+\frac{(a^2+3c)\times m^5}{n\times m^5}$$

$$=\frac{a^3zn}{m^5n}+\frac{a^2m^5+3cm^5}{m^5n}\ ;\ \frac{a+b}{c+d}+\frac{m-n}{x+z}=\frac{(a+b)\times(x+z)}{(c+d)\times(x+z)}$$

$$+\frac{(m-n)\times(c+d)}{(x+z)\times(c+d)}=\frac{ax+az+bx+bz}{cx+cz+dx+dz}+\frac{mc+md-nc-nd}{xc+xd+zd+zc}$$

etc.

La simplificacion se reduce á suprimir los factores literales ó numéricos comunes al numerador y denominador. Fúndase en lo expuesto, (arit. n.° 42 y 72).

De este modo tendrémos que, $\frac{ab}{am}=\frac{a\times b}{a\times m}=\frac{b}{m}$;

$\frac{ab+ac}{an}=\frac{a\times b+a\times c}{a\times n}=\frac{a\times(b+c)}{a\times n}=\frac{b+c}{n}$; $\frac{x^2d-bx^3}{x^3cm}=$

$\frac{x^2\times d-b\times x^2\times x}{x^2\times x\times c\times m}=\frac{x^2\times(d-b\times x)}{x^2\times(x\times c\times m)}=\frac{d-bx}{xcm}$: etc.

En el último ejemplo que acabamos de presentar, podiamos inmediatamente suprimir el factor comun x^2; sin embargo es preferible sacar el factor comun fuera de un paréntesis, para evitar equivocaciones. Esto es tanto mas necesario cuando sean polinomios los dos términos del quebrado. En este caso, para que haya un factor comun, no basta que en uno ó mas términos del numerador y denominador haya una ó mas letras iguales. Es preciso que la letra ó letras iguales se encuentren en todos los términos del numerador y denominador. Por esto podrán sacarse fuera de un paréntesis los factores comunes, paraque resulte mayor sencillez y comodidad en la simplificacion.

Si tenemos pues, $\frac{ab^2-a^3b^2}{3a^2b^2-ab^2}$, viendo que ab^2 es un factor comun á todo el numerador y denominador, podrémos simplificar de este modo: $\frac{ab^2-a^3b^2}{3a^2b^2-ab^2}=\frac{ab^2\times(1-a^2)}{ab^2\times(3a-1)}$

$=\frac{1-a^2}{3a-1}$, y por lo mismo; $\frac{ab^2-a^3b^2+5ab^3}{4a^3b^4-3a^2b^3-ab^2}=$

$\frac{ab^2\times(1-a^2+5b)}{ab^2\times(4a^2b^2-3a-1}=\frac{1-a^2+5b}{4a^2b^2-3a-1}$

Sumar quebrados literales.

35. Las reglas para sumar quebrados literales, y las razones en que se fundan son las mismas que se explicaron en aritmética (n.º 83 y siguientes.)

Así tendrémos que; $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=$

$$\frac{a\times n}{m\times n}+\frac{b\times m}{n\times m}=\frac{an}{nm}+\frac{bm}{mn}=\frac{an+bm}{mn};\ \frac{a^3+b^2}{c+m^3}+\frac{-x^4+c^3}{-a+b}$$

$$=\frac{(a^3+b^2)\times(-a+b)}{(c+m^3)\times(-a+b)}+\frac{(-x^4+c^3)\times(c+m^3)}{(-a+b)\times(c+m^3)}=$$

$$\frac{-a^4+a^3b-b^2a+b^3}{-ca+cb-m^3a+m^3b}+\frac{-x^4c-x^4m^3+c^6+cm^3}{-ac-am^3+bc+bm^3}=$$

$$\frac{(-a^4+a^3b-b^2a+b^3)+(-x^4c-x^4m^3+c^6+cm^3)}{-ca+cb-m^3a+b^3}=$$

$$\frac{-a^4+a^3b-b^2a+b^3-x^4c-x^4m^3+c^6+cm^3}{-ca+cb-m^3a+b^3};\ \frac{a}{b+d}+m=$$

$$\frac{a}{b+d}+\frac{m}{1}=\frac{a\times 1}{(b+d)\times 1}+\frac{m\times(b+d)}{1\times(b+d)}=\frac{a}{b+d}+$$

$$\frac{mb+md}{b+d},=\frac{a+mb+md}{b+d}\ \text{etc.}$$

Restar quebrados literales.

36. Lo que se ha dicho respeto de las reglas y demostracion para sumar quebrados literales, podrá servir para restarlos, multiplicarlos y dividirlos.

Así pues, segun lo prescrito en la aritmética (n.° 99 y siguientes.)

tendrémos; $\frac{a}{b}-\frac{d}{b}=\frac{a-d}{b}$; $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}$

$-\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{ad}{bd}-\frac{cb}{bd}=\frac{ad-cb}{bd}$; $\frac{a}{d}-\left(\frac{c+x}{m-n}\right)$

$=\frac{a\times(m-n)}{d\times(m-n)}-\frac{(c\times x)\times d}{(m-n)\times d}=\frac{am-an}{dm-dn}-\frac{cd+xd}{dm-dn}$

$=\frac{(am-an)-(cd+xd)}{dm-dn}=\frac{am-an-cd-xd}{dm-dn}$; $\frac{a^3+ab^2}{a+c}-$

$\frac{a-m}{a+d}=\frac{(a^3+ab^2)\times(a+d)}{(a+c)\times(a+d)}-\frac{(a-m)\times(a+c)}{(a+d)\times(a+c)}=$

$$\frac{a^4+a^3d+a^2b^2+adb^2}{a^2+ad+ac+cd}-\frac{a^2+ac-am-cm}{a^2+ac+ad+cd}=$$

$$\frac{(a^4+a^3d+a^2b^2+adb^2)-(a^2+ac-am-cm)}{a^2+ad+ac+cd}=$$

$\frac{a^4+a^3d+a^2b^2+adb^2-a^2-ac+am+cm}{a^2+ad+ac+cd}$; $\frac{a}{b}-m=\frac{a}{b}-$

$\frac{m}{1}=\frac{a\times 1}{b\times 1}-\frac{m\times b}{1\times b}=\frac{a}{b}-\frac{mb}{b}=\frac{a-mb}{b}$;

$(c+d)-\frac{a+m}{b}=\frac{c+d}{1}-\frac{a+m}{b}=\frac{(c+d)\times b}{1\times b}-$

$\frac{(a+m)\times 1}{b\times 1}=\frac{cb+db}{b}-\frac{a+m}{b}=\frac{(cb+db)-(a+m)}{b}$

$=\frac{cb+db-a-m}{b}$

Multiplicar quebrados literales.

37. Segun lo expuesto en aritmética (n.º 95 y siguientes), tendrémos;

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd};\ \frac{a+b}{c+d}\times\frac{m}{n}=\frac{(a+b)\times m}{(c+d)n}$$

$$=\frac{am+bm}{cn+dn};\ \frac{a-b}{c+d}\times\frac{m-n}{-d+x}=\frac{(a-b)\times(m-n)}{(c+d)\times(-d+x)}$$

$$=\frac{am-an-bm+bn}{-cd+cx-d+^2dx};\ a\times\frac{b}{d}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{1\times d}$$

$$=\frac{ab}{d};\ \frac{c+m}{b-d}\times(a+x)=\frac{c+m}{b-d}\times\frac{a+x}{1}=$$

$$\frac{(c+m)\times(a+x)}{(b-d)\times 1}=\frac{ca+cx+ma+mx}{b-d}$$

Division de quebrados.

38. Teniendo presente lo manifestado en aritmética (n.º 99 y siguientes), será; $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}=\frac{ad}{bc};\ \frac{a-b}{c+d}:$

$$\frac{m+n}{x-z}=\frac{(a-b)\times(x-z)}{(c+d)\times(m+n)}=\frac{ax-az-bx+bz}{cm+cn+dm+dn};\ \frac{a}{b}:$$

$$c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a\times 1}{b\times c}=\frac{a}{bc};\ \frac{a-b}{c+d}:m=\frac{a-b}{c+d}$$

$$:\frac{m}{1}=\frac{(a-b)\times 1}{(c+d)\times m}=\frac{a-b}{cm+dm};\ a:\frac{b}{d}=\frac{a}{1}:\frac{b}{d}$$

$$=\frac{a\times d}{1\times b}=\frac{ad}{b};\ (a+b):\frac{c-m}{x}=\frac{a+b}{1}:\frac{c-m}{x}=$$

$$\frac{(a+b)x}{1\times(c-m)}=\frac{ax+bx}{c-m};\ \text{etc.}$$

Division de un monomio por un polinomio.

39. La division de un monomio por un polinomio nunca puede dar cociente exacto; porque ó bien el cociente sería un monomio ó bien un polinomio; en uno y otro caso, multiplicado el cociente por el divisor no podría dar el monomio dividendo, sino otro polinomio; luego no podrá dar jamás cociente exacto.

¿Qué regla seguirémos para esta division? Una regla análoga á la division de un polinomio por otro, hasta que descubramos una ley por la que podamos continuar el cociente sin necesidad de llevar mas adelante la operacion.

Veamos pues qué cociente obtendrémos por esta regla en la division de x^2 por $x—a$. Dispondrémos y ejecutarémos el cálculo como sigue:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & x - a \\
\cline{2-2}
-x^2 + xa & x + a + \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{a^3}{x^2} + \dfrac{a^4}{x^3} + \dots \\
\cline{1-1}
0 + xa & \\
\quad - xa + a^2 & \\
\cline{1-1}
\quad 0 + a^2 & \\
\qquad - a^2 + \dfrac{a^3}{x} & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 + \dfrac{a^3}{x} & \\
\qquad\quad - \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^4}{x^2} & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0 + \dfrac{a^4}{x^2} & \\
\qquad\qquad - \dfrac{a^4}{x^2} + \dfrac{a^5}{x^3} & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 + \dfrac{a^5}{x^3} \text{ etc.} &
\end{array}
$$

Como observamos que los exponentes del numerador a van creciendo de una unidad, y lo mismo los exponentes del denominador x, podríamos continuar el cociente siguiente: $+\frac{a^5}{x^4}+\frac{a^6}{x^5}+\frac{a^7}{x^6}+$ etc. sin necesidad de llevar adelante la operacion.

40. En esta division, no podrémos poner un término que exprese todos los términos que hayan ó puedan haber en el cociente prolongado indefinidamente?

Sí; y este término se llamará término general.

Cómo nos gobernarémos para ello?

En cuanto á signos, si es constante el que hayamos puesto hasta descubrir la ley, lo pondrémos tambien para el término general, y si antes teníamos alternativamente ahora el $+$ ahora el $-$, ó ahora el $-$ ahora el $+$, pondrémos en el término general el signo $\pm$ en el primer caso y el $\mp$ en el segundo. En cuanto á exponentes pondrémos aquel número que exprese lo que va del exponente de un término á otro inmediato multiplicado por n, cuya letra tendrá un valor segun el lugar que ocupe el término que nosotros hayamos elegido; como por ejemplo, si el término está en 4.º lugar, la n valdrá 4, y á aquel producto le añadirémos ó quitarémos tantas unidades cuantas sean necesarias para formar el exponente del término que hayamos elegido.

41. Determinemos segun esta regla el término general del cociente anterior: señalemos para esto el 5.º término, en cuyo cáso la n valdrá 5. Como lo que va del exponente de un término á otro con respecto á la a, observamos que es 1, y lo mismo con respecto á la x, tendrémos, que el exponente del numerador a en el término general será $1 \times n$, que en este caso particular será $1 \times 5 = 5$; y como en el 5.º término del cociente el exponente de a es 5, veo que debo quitar 1 de $1 \times n$ para tener en $1 \times n - 1$ el exponente de a en el término general. Del mismo modo observarémos, que el exponente del denominador x

deberá ser $1 \times n - 2 = n - 2$; por lo que; el término general pedido será; $\dfrac{a^{1 \times n - 1}}{a^{1 \times n - 2}}$. Así podrá ponerse $\dfrac{x^2}{x-a}$

$$= x + a + \frac{a^2}{x} + \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4} + \dots\dots + \frac{a^{n-1}}{x^{n-2}}$$

Valuacion numérica de las cantidades algebráicas.

42. Entiéndese por valuar una cantidad algebráica, hallar su expresion numérica, despues de haberse supuesto valores numéricos determinados á todas las letras que entran en ella. Así, teniendo el monomio $5a^2bc^4d$, y haciendo $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$, $d = 2$, tendrémos; $5a^2bc^4d = 5 \times a^2 \times b \times c^4 \times d = 5 \times a \times a \times b \times c \times c \times c \times c \times d = 5 \times 3 \times 3 \times 5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 450$.

Si tenemos el polinomio $4a^2b - 5m^3d + \dfrac{c^3}{n} - 6ac$, y tratamos de valuarlo, en el supuesto de ser $a = 5$, $b = 3$ $m = 0$, $d = 6$, $c = 2$, $n = 4$, obtendrémos el siguiente resultado: $4a^2b - 5m^3d + \dfrac{c^3}{n} - 6ac = 4 \times a^2 \times b - 5 \times m^3 \times d + \dfrac{c^3}{n} - 6 \times a \times c = 4 \times a \times a \times b - 5 \times m \times m \times m \times d + \dfrac{c \times c \times c}{n} - 6 \times a \times c = 4 \times 5 \times 5 \times 3 - 5 \times 0 \times 0 \times 0 \times 6 + \dfrac{2 \times 2 \times 2}{4} - 6 \times 5 \times 2 = 300 - 0 + {}^8/_4 - 60 = 240 + {}^8/_4 = 240 + 2 = 242$.

43. El valor de un polinomio será siempre el mismo ya se empieze por un término afectado del signo $+$ ya por un término afectado del signo $-$, porque todo polinomio despues de valuado se reduce á un solo número que lleva el signo $+$ ó el $-$ ó es igual á 0, segun que la suma de los términos que llevan el $+$ es mayor, menor ó igual á la suma de los que tienen el $-$. Sin embargo, se empieza regularmente por un término positivo, porque parece ridículo restar, sin saber de qué.

Elevacion á potencias de los monomios.

44. Llámase potencia en general el producto que se obtiene, haciendo que una cantidad entre por factor de sí misma cierto número de veces; y se entiende por raiz la cantidad que entrando este número de veces por factor, produce la cantidad primitiva. Las potencias toman el nombre de grados, los cuales se diferencian segun las veces que la raiz entre por factor. Así la potencia se llamará de *segundo grado ó cuadrado; de tercero ó cubo; de cuatro; quinto;* etc, *y en general, del grado n*, segun que la raiz entre por factor de sí misma *dos*, *tres*, *cuatro*, *cinco veces*, etc. ó en general, un número n de veces.

45. Cuando se ha de elevar una sola letra á una potencia, basta colocar á su derecha, un poco mas elevado el número que indíque el grado á que pertenezca. Así si he de elevar al *cuadrado* la letra a, escribiré de este modo; a^2, y leeré; a elevado á *dos*, ó al cuadrado.

Cuando haya mas de una letra; se encerrarán dentro de un parentésis, y á su derecha tambien y un poco mas elevado se escribirá el número de la potencia, que en uno y otro caso tomará el nombre de *esponente* de la potencia. Así estas espresiones; $\left(4a^5\right)^3$; $\left(2b^3d^4c\right)^5$; $\left(md\right)^p$ etc; se leerán; *cuatro a cinco* elevado al *cubo* ó *á tres; dos b tres d cuatro c* elevado á *cinco*; *m d* elevado á la *potencia p*. etc.

46. De la definicion de la potencia (n.° 44) se deduce, que ella no es otra cosa que un caso particular de la multiplicacion en la que los factores son iguales. Por lo que, deberémos atender unicamente á *signos, coeficientes y esponentes de las letras.*

47. Cuando el esponente de la potencia es número par, el signo de la potencia será siempre +, y si es ímpar el signo que deberá llevar la potencia será el mismo que tenga la raiz.

El coeficiente entrará por factor de sí mismo tantas veces cuantas nos diga el esponente de la potencia.

Los esponentes de cada letra se multiplicarán por el esponente de la potencia.

48. Las reglas anteriores quedan demostradas con solo recordar lo que se dijo en la multiplicacion (n.° 15 y siguientes.) respecto de los *signos*, *coeficientes y esponentes.* Añadiré no obstante para los signos que, basta observar, que los signos + ó — multiplicados cada uno de por sí un número par de veces siempre produce +, y que el signo — combinado un número cualquiera ímpar de veces siempre da —, así como produce + este signo combinado cualquier número de veces.

Para mayor claridad resolvamos algunos ejemplos: 1.° elevemos al cuadrado la cantidad $+3a^4b^5$, y tendrémos segun su definicion $(+3a^4b^5)^2 = +3a^4b^5 \times +3a^4b^5 = +3 \times a^4 \times b^5 \times +3 \times a^4 \times b^5 = +3 \times +3 \times a^4 \times a^4 \times b^5 \times b^5 = +9a^{4+4}b^{5+5} = +9a^8b^{10}$.

2.° $(+2a^3d^2mc^4)^3 = +2a^3d^2mc^4 \times +2a^3d^2mc^4 \times +2a^3d^2mc^4 = +2 \times +2 \times +2 \times a^3 \times a^3 \times a^3 \times d^2 \times d^2 \times d^2 \times m \times m \times m \times c^4 \times c^4 \times c^4 = +8 \times a^{3+3+3} \times d^{2+2+2} \times m^{1+1+1} \times c^{4+4+4} = +8a^9d^6m^3c^{12}$.

3.° $(-2z^6d^4b^3)^4 = -2z^6d^4b^3 \times -2z^6d^4b^3 \times -2z^6d^4b^3 \times -2z^6d^4b^3 = -2 \times z^6 \times d^4 \times b^3 \times -2 \times z^6 \times d^4 \times b^3 \times -2 \times z^6 \times d^4 \times b^3 \times -2 \times z^6 \times d^4 \times b^3 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times z^6 \times z^6 \times z^6 \times z^6 \times d^4 \times d^4 \times d^4 \times d^4 \times b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3 = +16z^{24}d^{16}b^{12}$

4.° $(-4a^2b^3d)^3 = -4a^2b^3d \times -4a^2b^3d \times -4a^2b^3d = -4 \times a^2 \times b^3 \times d \times -4 \times a^2 \times b^3 \times d \times -4 \times a^2 \times b^3 \times d = -4 \times -4 \times -4 \times a^2 \times a^2 \times a^2 \times b^3 \times b^3 \times b^3 \times d \times d \times d = -64a^6b^9d^3$.

49. Con estos ejemplos que anteceden quedan de nuevo demostradas las reglas de los signos, *coeficientes*, *y esponentes*. Así pues, aplicando inmediatamente estas reglas, tendrémos:

1.° $(3ab^5)^3 = 27a^3b^{15}$.

2.° $(-4m^6d^2c^5)^2 = 16m^{12}d^4c^{10}$.

3.° $(-2a^3b^4c^2)^3 = -8a^9b^{12}c^6$.

4.° $\left(a^3d^nc^mb^5\right)^p = a^{3p}d^{np}c^{mp}b^{5p}$.

De esto se deduce que la potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado en cada uno de los factores.

50. De la misma definicion dada en el número 44, y de las reglas para la multiplicacion de quebrados, se infiere que para elevar un quebrado á una potencia cualquiera, habrán de elevarse numerador y denominador á la potencia en cuestion.

Si tenemos $\left(\frac{3a^2b}{d^4}\right)^3$, y descomponemos esta potencia en los factores de que consta, será:

$$\left(\frac{3a^2b}{d^4}\right)^3 = \frac{3a^2b}{d4} \times \frac{3a^2b}{d4} \times \frac{3a^2b}{d4} =$$

$$\frac{3a^2b\times 3a^2b\times 3a^2b}{d^4\times d^4\times d^4}=\frac{3\times 3\times 3\times a^2\times a^2\times a^2\times b\times b\times b}{d^4\times d^4\times d^4}=$$

$\frac{27a^6b^3}{d^{12}}$, que es la regla sentada.

Por tanto, tendrèmos: $\left(\frac{-2a^5b^3}{4m^6d}\right)^2=\frac{(-2a^5b^3)^2}{(4m^6d)^2}=\frac{4a^{10}b^6}{16m^{12}d^2}$

2.° $\left(\frac{3zx^4b^2}{-2z^4m^5d^3}\right)^5=\frac{(3zx^4b^2)^5}{(-2z^4m^5d^3)^5}=\frac{213z^5x^{20}b^{10}}{-32z^{20}m^{25}d^{15}}$

3.° $\left(\frac{a^2d^3m^nb^r}{a^4c^xd^2}\right)^p=\frac{(a^2d^3m^nb^r)^p}{(a^4c^xd^2)^p}=\frac{a^{2p}d^{3p}m^{np}b^{rp}}{a^{4p}c^{xp}d^{2p}}$

De esto se infiere, que la potencia de un quebrado ó cociente es igual al quebrado ó cociente de las potencias de igual grado en los dos términos del quebrado ó division propuestos.

Extraccion de raices de los monómios.

51. Entiéndese por extraccion de raices la operacion por la que se busca una cantidad que entrando por factor de sí misma cierto número de veces, dé la cantidad primitiva. Esta operacion se indica por medio de este signo $\sqrt{}$ llamado radical. Entre sus ramas se pone el número que se llama esponente ó índice radical, y debajo de ellas se coloca la cantidad de la cual quiere extraerse la raiz indicada por el esponente.

Los radicales son de varios grados que toman el nombre del número que tiene el esponente. Así estas espresiones; $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[n]{}$, etc., se denominarán, raiz *segunda* ó *cuadrada*, raiz *tercera* ó *cúbica*, raiz *cuarta*, raiz *quinta*, raiz del grado n, etc. Para indicar la raiz cuadrada se ha convenido en poder suprimirse el esponente; de modo que un radical sin esponente expresa la raiz cuadrada. Así estas dos expresiones, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[2]{\ }$, indican cada una de ellas la raiz cuadrada.

52. De la definicion dada se infiere, que la extraccion de raices es una operacion contraria á la elevacion á potencias; por lo que las reglas de la extraccion deberán tambien ser totalmente opuestas á las de la elevacion á potencias, debiendo atender tambien á *signos*, *coeficientes*, y *esponentes*.

Cuando el esponente radical es par, la raiz llevará este signo $\pm$ llamado de anbigüedad, y si es ímpar, la raiz llevará el mismo signo de la potencia. Porque cuando la potencia es de grado par, puede igualmente proceder de una raiz con signo $+$ ó con signo $-$; pues que en uno y en otro caso da el mismo resultado; y cuando la potencia es de grado ímpar, lleva siempre el mismo signo que tenia la raiz.

De los coeficientes deberá extraerse la raiz indicada, porque en la elevacion á potencias, tambien se elevaban los coeficientes á la potencia en cuestion. Sin embargo, por ahora, la raiz de los coeficientes, á menos que sean números muy bajos, deberá quedar indicada, hasta que sepan extraerse raices de cantidades numéricas.

Los esponentes de la potencia se dividirán por el esponente radical, porque en la elevacion á potencias los esponentes de la raiz debian multiplicarse por el esponente de la potencia.

De esto se deduce, que todo radical puede ponerse bajo la forma de quebrado, cuyo numerador sea el esponente de la potencia y cuyo denominador sea el esponente ó índice radical. Así $\sqrt[2]{a^5} = a^{5/2}$; $\sqrt[3]{b^6} = a^{6/3}$; $\sqrt[4]{c^{11}} = c^{11/4}$; etc.

Resolvamos algunos ejemplos, aplicando las reglas dadas.

1.° $\sqrt{a^6b^8d^4} = \pm a^{6/_3} b^{8/_2} d^{4/_2} = a^3 b^4 d^2.$

2.° $\sqrt[4]{-d^4b^{12}c^{16}} = \pm d^{4/_4} b^{12/_4} c^{16/_4} = \pm d b^3 c^4.$

3.° $\sqrt[3]{a^9d^6b^3m^{12}} = + a^{9/_3} d^{6/_3} b^{3/_3} m^{12/_3} = + a^3 d^2 b^1 m^4 =$ $a^3d^2bm^4.$

4.° $\sqrt[5]{-a^{15}b^{10}c^5} = - a^{15/_5} b^{10/_5} c^{5/_5} = - a^3 b^2 c^1 = - a^3 b^2 c.$

53. De los ejemplos anteriores se deduce que, así como una cantidad radical ha podido ponerse bajo la forma de quebrado, así tambien toda cantidad con esponente quebrado ó fraccionario podrá ponerse bajo la forma de un radical cuyo índice será el denominador del quebrado, dejando el numerador por esponente de la cantidad que se escribirá debajo del radical. Así, $a^{4/_2} b^{6/_2} = \sqrt{a^4b^6}$; $m^{9/_3} d^{3/_3} c^{6/_3} = \sqrt[3]{a^9d^3c^6}$; etc.

Cuando pues se haya de extraer la raiz de una cantidad cuyos esponentes ó parte de ellos no puedan dividirse exactamente por el índice radical, se extraerá la raiz de aquellas letras cuyos esponentes sean exactamente divisibles, y se dejará indicada solamente la extraccion de las demás despues de sacados todos los enteros que se puedan. Así si hemos de extraer la raiz tercera de $a^6b^3d^5m^2$, tendrèmos:

$\sqrt[3]{a^6b^3d^5m^2} = a^{6/_3} b^{3/_3} d^{5/_3} m^{2/_3} = a^2 b^1 d^{1+2/_3} m^{2/_3} = a^2 b^1 d^1 \times$ $d^{2/_3} m^{2/_3} = a^2 b^1 d^1 \sqrt[3]{d^2m^2} = a^2bd\sqrt[3]{d^2m^2}.$

2.° $\sqrt{a^8d^4mc^3x^6b^9} = \pm a^{8/2} d^{4/2} m^{1/2} c^{3/2} x^{6/2} b^{9/2} =$

$\pm a^4 d^2 m^{1/2} c^{1+1/2} x^3 b^{4+1/2} = \pm a^4 d^2 m^{1/2} c^1 \times c^{1/2} x^3 b^4 \times b^{1/2} =$

(arit. n.° 20) $\pm a^4 d^2 c^1 x^3 b^4 c^{1/2} b^{1/2} = \pm a^4 d^2 c^1 x^3 b^4 \sqrt{c^1b^1} = \pm$

$a^4d^2cx^3b^4\sqrt{cb}$.

3.° $\sqrt[p]{a^m b^n d^r} = a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{n}{p}} d^{\frac{r}{p}}$.

54. Como la elevacion á potencias de un quebrado ó division se efectue elevando á igual potencia el numerador y denominador del quebrado, se sigue, que la extraccion de raices de un quebrado se hará extrayendo la raiz de igual grado del numerador y del denominador. Así tendrémos:

$$\sqrt[3]{\frac{a^6b^9d^{12}}{a^3c^{15}b^6}} = \frac{\sqrt[3]{a^6b^9d^{12}}}{\sqrt[3]{a^3c^{15}b^6}} = \frac{a^{6/3}\,b^{9/3}\,d^{12/3}}{a^{3/3}\,c^{15/3}\,b^{6/3}} = \frac{a^2b^3d^4}{ac^5b^2} = \frac{abd^4}{c^5}$$

2.° $$\sqrt[4]{\frac{-5a^8d^6b}{3a^{12}d^{16}b}} = \frac{\sqrt[4]{-5a^8d^6b}}{\sqrt[4]{3a^{12}d^{16}b}} = \frac{\pm 5^{1/4}\,a^{8/4}\,d^{6/4}\,b^{1/4}}{3^{1/4}\,a^{12/4}\,d^{16/4}\,b^{1/4}} =$$

$$\frac{\pm 5^{1/4}\,a^2d \times d^{2/4}\,b^{1/4}}{3^{1/4}\,a^3d^4\,b^{1/4}} = \frac{\pm a^2d\sqrt[4]{5d^2b}}{a^3d^4\sqrt[4]{3b}}$$

55. En el supuesto de que la cantidad que está bajo de un radical puede pasar fuera del radical dividiendo los exponentes de la cantidad por el exponente radical; se deduce, que una cantidad que está fuera del radical puede pasar bajo el radical, multiplicando los exponentes de la

cantidad por el exponente radical, que será lo mismo, que elevar dicha cantidad á una potencia igual al exponente radical. Así por ejemplo tendrémos; $a^2b\sqrt[3]{a^5db^2} =$

$$\sqrt[3]{a^5db^2\times(a^2b)^3} = \sqrt[3]{a^5db^2\times a^6b^3} = \sqrt[3]{a^{11}db^5};$$

2.° $2a^4x^3z\sqrt[5]{-cd^4xz^3} = \sqrt[5]{-cd^4xz^3\times(2a^4x^3z)^5} =$

$$\sqrt[5]{-cd^4xz^3\times32a^{20}x^{15}z^5} = \sqrt[5]{-32cd^4x^{16}z^8a^{20}}.$$

56. Todas las cantidades del signo $\sqrt{\ }$ se llaman radicacales: cuando tienen raiz exacta se llaman racionales, y cuando no, se llaman irracionales ó inconmemurables. Así $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, etc., $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, etc. son irracionales, porque es imposible hallar número alguno que entrando por factor de sí mismo cierto número de veces, dé alguno de los números propuestos. Al contrario: $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{27}$, etc., serian racionales por una razon contraria.

Con las cantidades radicales se hacen las mismas operaciones que con las demás cantidades algebraicas.

Sumar cantidades radicales.

57. La regla para sumar cantidades radicales es la misma que se dió para la suma de las demás cantidades algebráicas. Para la simplificacion de un polinomio de cantidades radicales observarémos ante todo, que estas cantidades son semejantes, cuando tengan un mismo índice radical, é iguales las letras y esponentes en cada una de ellas, tanto dentro como fuera del radical, pudiendo tan solo diferir en los signos y coeficientes numéricos de fuera del radical.

Algunas veces no se conoce á primera vista si algunos radicales son semejantes, pero esto puede descubrirse mediante la operacion demostrada en el número 55.

Súmense: $3x^2\sqrt{b^3}-\sqrt[4]{a^5d}+3\sqrt[8]{m^3c^4}$ con $\sqrt[4]{a^5d}-$

$5x^2\sqrt{b^3}+6z^5m\sqrt[5]{x^2a}-3\sqrt[8]{m^3c^4}$, y tendrémos;

$\left(3x^2\sqrt{b^3}-\sqrt[4]{a^5d}+3\sqrt[8]{m^3c^4}\right)+\left(\sqrt[4]{a^5d}-5x^2\sqrt{b^3}+\right.$

$\left.6z^5m\sqrt[5]{x^2a}-3\sqrt[8]{m^3c^4}\right)=3x^2\sqrt{b^3}-\sqrt[4]{a^5d}+3\sqrt[8]{m^3c^4}$

$+\sqrt[4]{a^5d}-5x^2\sqrt{b^3}+6z^5m\sqrt[5]{x^2a}-3\sqrt[8]{m^3c^4}=-$

$2x^2\sqrt{b^3}+6z^5m\sqrt[5]{x^2a}$.

2.° $\left(3a\sqrt{b}+2x\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b^7}\right)+\left(8\sqrt{a^2b}+2b\sqrt[4]{b^3}\right.$

$\left.-2\sqrt[3]{x^3a}\right)=3a\sqrt{b}+2x\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b^7}+8\sqrt{a^2b}+$

$2b\sqrt[4]{b^3}-2\sqrt[3]{x^3a}=3\sqrt{b\times(a)^2}+2\sqrt[3]{a\times(x)^3}-\sqrt[4]{b^7}$

$+8\sqrt{a^2b}+2\sqrt[4]{b^3\times b^4}-2\sqrt[3]{x^3a}=3\sqrt{a^2b}+2\sqrt[3]{x^3a}$

$-\sqrt[4]{b^7}+8\sqrt{a^2b}+2\sqrt[4]{b^7}-2\sqrt[3]{x^3a}=11\sqrt{a^2b}+$

$\sqrt[4]{b^7}$

Restar cantidades radicales.

58. Para restar cantidades radicales se observarán las mismas reglas que sirvieron para restar las demás cantidades algebráicas.

Así pues, si de $-5d^3\sqrt[4]{a^2b}+3\sqrt{x^2m}+8m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}$ hemos de quitar $-6\sqrt[9]{z^2}+9d^3\sqrt[4]{ba^2}+2\sqrt{a}-4\sqrt{x^2m}$ $+m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}$, tendrémos; $\left(-5d^3\sqrt[4]{a^2b}+3\sqrt{x^2m}+\right.$ $\left.8m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}\right)-\left(-6\sqrt[9]{z^2}+9d^3\sqrt[4]{ba^2}+2\sqrt{a}-\right.$ $\left.4\sqrt{x^2m}+m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}\right)=-5d^3\sqrt[4]{a^2b}+3\sqrt{x^2m}+$ $8m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}+6\sqrt[9]{z^2}-9d^3\sqrt[4]{ba^2}-2\sqrt{a}+4\sqrt{x^2m}$ $-m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}=-14d^3\sqrt[4]{a^2b}+7\sqrt{x^2m}+7m^2b^3\sqrt[7]{z^5pa^3}$ $+6\sqrt[9]{z^2}-2\sqrt{a}$.

Multiplicar cantidades radicales.

59. Habiéndose demostrado (n.° 52.) que todo radical puede escribirse bajo la forma de quebrado que forma el esponente de cada una de las letras que están debajo del radical, así como todo quebrado puede ponerse en forma radical, (n.° 53), se deduce que para la multiplicacion de cantidades radicales que tengan un mismo índice, bastará multiplicar entre sí las cantidades que estén fuera de los radicales, y despues poner debajo de un solo radical del mismo grado el producto de las cantidades que habia debajo de ellos.

Sea para esto que se haya de multiplicar $\sqrt[3]{a^6b^9}$ por

$\sqrt[3]{m^{12}c^{15}}$, y tendrémos; $\sqrt[3]{a^6b^9} \times \sqrt[3]{m^{12}c^{15}} = a^{6/3}b^{9/3} \times$

$m^{12/3}c^{15/3} = a^{6/3}b^{9/3}m^{12/3}c^{15/3} = \sqrt[3]{a^6b^9m^{12}c^{15}} = \sqrt[3]{a^6b^9 \times m^{12}c^{15}}$

2.º $-2ac\sqrt{m^5d^3} \times 3b^2\sqrt{z^5d^6} = -2ac \times \sqrt{m^5d^3} \times$

$3b^2 \times \sqrt{z^5d^6} =$ (arit. n.º 20) $-2ac \times 3b^2 \times \sqrt{m^5d^3} \times \sqrt{z^5d^6}$

$= -2ac \times 3b^2 \times m^{5/2}d^{3/2} \times z^{5/2}d^{6/2} = -6acb^2 \times$

$m^{5/2}d^{3/2}z^{5/2}d^{6/2} = -6acb^2 \times \sqrt[2]{m^5d^3z^5d^6} = -$

$6acb^2\sqrt{m^5d^3 \times z^5d^6} = -6acb^2\sqrt{m^5d^9z^5}$

3.º $\sqrt[r]{a^p} \times \sqrt[r]{m^n} = a^{\frac{p}{r}} \times m^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{p}{r}}m^{\frac{n}{r}} =$

$\sqrt[r]{a^pm^n} = \sqrt[r]{a^p \times m^n}$

Los anteriores ejemplos comprueban con la mayor generalidad la regla establecida.

Por lo que tendrémos; $4a^2\sqrt[4]{c^3d} \times 2ab\sqrt[4]{cm} = 4a^2 \times$ $2ab\sqrt[4]{c^3d \times cm} = 8a^3b\sqrt[4]{c^4dm}$.

2.º $5mz\sqrt[3]{ab} \times -3x^2\sqrt[3]{a^6z^2b^3} = 5mz \times -$ $3x^2\sqrt[3]{ab \times a^6z^2b^3} = -15mzx^2\sqrt[3]{a^7b^4z^2}$.

60. Cuando los radicales sean de diferente grado, se reducirán antes á un mismo índice multiplicando el índice

radical de cada uno y los esponentes de las cantidades por el producto de los índices radicales de los demás, y despues se multiplicarán entre sí como en el número anterior. Lo primero no altera en nada el valor de ninguno de los radicales; porque cada uno de ellos puede ponerse en forma de quebrado, y este no se altera multiplicando sus dos términos por una misma cantidad. Además es necesario hacer tal operacion, porque los esponentes de una cantidad deben sumarse en la multiplicacion algebráica; y como en este caso los esponentes son quebrados, deben tener todos un mismo denominador.

Así tendrémos; $\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt[3]{d^4a} = a^{2/2} b^{3/2} \times d^{4/3} a^{1/3} =$

$a^{\frac{2\times3}{2\times3}} b^{\frac{3\times3}{2\times3}} \times d^{\frac{4\times2}{3\times2}} a^{\frac{1\times2}{3\times2}} = a^{6/6} b^{9/6} \times d^{8/6} a^{2/6} = \sqrt[6]{a^6b^9} \times$

$\sqrt[6]{d^8a^2} = \sqrt[6]{a^6b^9\times d^8a^2} = \sqrt[6]{a^8b^9d^8}.$

2.º $3a^5d\sqrt[3]{-a^3b^4} \times -\ 2cm^3\sqrt[4]{b^2a^8c} =$

$3a^5d\sqrt[3\times4]{-a^{3\times4}b^{4\times4}} \times -\ 2cm^3\sqrt[4\times3]{b^{2\times3}a^{8\times3}c^{1\times3}}$

$= 3a^5d\sqrt[12]{-a^{12}b^{16}} \times -\ 2cm^3\sqrt[12]{b^6a^{24}c^3} = 3a^5d \times -$

$2cm^3\sqrt[12]{-a^{12}b^{16}\times b^6a^{24}c^3} = -\ 6a^5dcm^3\sqrt[12]{-a^{36}b^{22}c^3}.$

3.º $a^3\sqrt{b^5d} \times 2ab\sqrt[3]{-b^2cd^4} \times -\ 4ad\sqrt[4]{a^5d^6b} =$

$a^3\sqrt[24]{b^{60}d^{12}} \times 2ab\sqrt[24]{-\ b^{16}c^8d^{32}} \times -\ 4ad\sqrt[24]{a^{30}d^{36}b^6} = a^3$

$\times 2ab \times -\ 4ad\sqrt[24]{b^{60}d^{12} \times -\ b^{16}c^8d^{32} \times a^{30}d^{36}b^6} = -$

$8a^5bd\sqrt[24]{b^{82}d^{80}c^{16}a^{30}}.$

De estos ejemplos, y de los del número anterior se deduce, que la raiz de un producto es igual al producto de las raices de igual grado en cada uno de los factores.

Division de cantidades radicales.

61. Cuando los radicales sean de un mismo grado, se escribirá una sola vez el radical de igual índice, y se partirán entre sí las cantidades de fuera del signo, y entre sí las que haya debajo de los radicales. Fúndase en que la division es una regla contraria á la multiplicacion, y además en lo expuesto (n.° 54).

Así tendrémos; $\sqrt{a^6b^3} : \sqrt{a^2d^4b} = \sqrt{\frac{a^6b^3}{a^2d^4b}} = \sqrt{\frac{a^4b^2}{d^4}}$

2.° $6a^4c\sqrt[3]{a^2b^3d^5} : 2a^3m\sqrt[3]{-a^6z^8x^3d^9} = \frac{6a^4c}{2a^3m}\sqrt[3]{\frac{a^2b^3d^5}{-a^6z^8x^3d^9}} = \frac{3ac}{m}\sqrt[3]{-\frac{b^3}{a^4z^8x^3d^4}}.$

62. Cuando los radicales sean de diferente grado, se reducirán á un mismo índice de la misma manera y por igual motivo que en el número 61, y se efectuará la division como en el número anterior.

Por consiguiente tendrémos: $4a^3b\sqrt{m^3c^4} : 2z^3a\sqrt[3]{x^4dm}$

$= 4a^3b\sqrt[6]{m^9c^{12}} : 2z^3a\sqrt[6]{x^8d^2m^2} = \frac{4a^3b}{2z^3a}\sqrt[6]{\frac{m^9c^{12}}{x^8d^2m^2}} = \frac{2a^2b}{z^3}\sqrt[6]{\frac{m^7c^{12}}{x^8d^2}}.$

2.° $-3a^4x^5\sqrt[4]{ab^2m} : 5a^2z^3x^6\sqrt[5]{a^2z^3b^2} = -3a^4x^5\sqrt[20]{a^5b^{10}m^5}$

$$: 5a^2z^3x^6\sqrt[20]{a^8z^{12}b^8} = \frac{-3a^4x^5}{5a^2z^3x^6}\sqrt[20]{\frac{a^5b^{10}m^5}{a^8z^{12}b^8}} =$$

$$\frac{-3a^2}{xz^3}\sqrt[20]{\frac{b^2m^5}{a^3z^{12}}}.$$

De los ejemplos anteriores y de lo manifestado (n.° 54.) se deduce, que la raíz de un quebrado ó cociente es igual al quebrado ó cociente de las raices del mismo grado en ambos términos del quebrado ó division.

63. Las reglas que nos sirvieron en la multiplicacion y division algebráica en cuanto á los exponentes enteros, á saber, sumándolos en la multiplicacion y restándolos en la division, podrán tambien servirnos cuando haya exponentes quebrados? De la misma manera.

Demostrémoslo primero para la multiplicacion. Sea para esto $x^{\frac{m}{d}} \times x^{\frac{n}{d}}$, vamos á probar que el resultado será $x^{\frac{m+n}{d}}$.

Transformemos dicha expresion en forma radical, y tendrémos; $x^{\frac{m}{d}} \times x^{\frac{n}{d}}, = \sqrt[d]{x^m} \times \sqrt[d]{x^n} =$

$$\sqrt[d]{x^m \times x^n} = \sqrt[d]{x^{m+n}} = x^{\frac{m+n}{d}}.$$

Demostrémoslo ahora para la division. Sea para esto $x^{\frac{m}{d}}:x^{\frac{n}{d}}$, vamos á probar que el resultado será $x^{\frac{m-n}{d}}$. Haciendo lo mismo que antes, tendrémos; $x^{\frac{m}{d}}:x^{\frac{n}{d}}=\sqrt[d]{x^m}:\sqrt[d]{x^n}=\sqrt[d]{x^m:x^n}=\sqrt[d]{x^{m-n}}=x^{\frac{m-n}{d}}$.

Elevacion á potencias de los radicales.

64. Como la elevacion á potencias no sea mas que un caso particular de la multiplicacion, de lo expuesto (n.º 59) se deduce, que para elevar á potencias los radicales, bastará elevar á la potencia en cuestion las cantidades que haya fuera del signo, y las que este tenga debajo, dejando el mismo índice radical.

Sea que hayamos de elevar á la potencia p la cantidad $\sqrt[r]{m^n}$ y tendrémos: $\left(\sqrt[r]{m^n}\right)^p=\left(m^{\frac{n}{r}}\right)^p$ $=$ (n.º 47) $m^{\frac{n}{r}\times p}=m^{\frac{np}{r}}=\sqrt[r]{m^{np}}$, Por lo mismo $\left(a^x\sqrt[r]{m^n}\right)^p=\left(a^x\times\sqrt[r]{m^n}\right)^p=$ (n.º 49) $\left(a^x\right)^p\times\left(\sqrt[r]{m^n}\right)^p=\left(a^x\right)^p\times\left(m^{\frac{n}{r}}\right)^p=$

(n.° 47) $a^{x\times p}\times m^{\frac{n}{r}\times p}=a^{xp}\times m^{\frac{np}{r}}=a^{xp}\,m^{\frac{np}{r}}=$

$a^{xp}\sqrt[r]{m^{np}}$. Esto nos demuestra con toda generalidad la verdad de la regla establecida.

Por consiguiente será; $\left(\sqrt[3]{a^3b^5}\right)^2=\sqrt[3]{a^3b^5}\times\sqrt[3]{a^3b^5}$
$=\sqrt[3]{a^3b^5\times a^3b^5}=\sqrt[3]{a^6b^{10}}$.

2.° $\left(-3a^2b\sqrt[4]{m^3d^4c^5}\right)^3=-3a^2b\sqrt[4]{m^3d^4c^5}\times-$
$3a^2b\sqrt[4]{m^3d^4c^5}\times-3a^2b\sqrt[4]{m^3d^4c^5}=-3a^2b\times-3a^2b\times-$
$3a^2b\sqrt[4]{m^3d^4c^5\times m^3d^4c^5\times m^3d^4c^5}=-27a^6b^3\sqrt[4]{m^9d^{12}c^{15}}$.

3.° $\left(2x^4z^3\sqrt[5]{4m^2a^4x^5z^6}\right)^4=16x^{16}z^{12}\sqrt[5]{256m^8a^{16}x^{20}z^{24}}$

65. Si hemos de elevar á la potencia p la $\sqrt[p]{a^r}$, tendrémos: $\left(\sqrt[p]{a^r}\right)^p=\sqrt[p]{a^{rp}}=a^{\frac{rp}{p}}=a^r$

El resultado del ejemplo anterior nos dice, que cuando se ha de elevar á una potencia un radical del mismo grado que la potencia, bastará escribir por resultado la cantidad que está debajo del radical.

Asi pues; $(\sqrt{a^3b^5})^2=a^3b^5$.

2.° $(\sqrt[3]{m^2d^6c^4})^3=m^2d^6c^4$.

3.º $\left(-a^4b^5d^2\sqrt[5]{z^6m^3c}\right)^5 = -a^{20}b^{25}d^{10}\times z^6m^3c = -a^{20}b^{25}d^{10}z^6m^3c.$

Extraccion de raices de las cantidades radicales.

66. Para la extraccion de raices de cantidades radicales, se formará un radical cuyo índice sea el producto de todos los índices radicales, y bajo de este radical se escribirá la cantidad propuesta.

Para la demostracion de esta regla, supongamos que hemos de extraer la raiz m de $\sqrt[n]{p^z}$, y tendrémos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{p^z}} = \sqrt[m]{p^{\frac{z}{n}}} = p^{\frac{z}{n}:m} = p^{\frac{z}{n}:\frac{m}{1}} = p^{\frac{z\times 1}{n\times m}} = p^{\frac{z}{nm}} = \sqrt[nm]{p^z}$$

2.º $$\sqrt[x]{\sqrt[z]{\sqrt[m]{n^p}}} = \sqrt[x]{\sqrt[z]{n^{\frac{p}{m}}}} = \sqrt[x]{n^{\frac{p}{m}:z}} = \sqrt[x]{n^{\frac{p}{m}:\frac{z}{1}}} = \sqrt[x]{n^{\frac{p\times 1}{m\times z}}} =$$

$$\sqrt[x]{n^{\frac{p}{mz}}} = n^{\frac{p}{mz}:x} = n^{\frac{p}{mz}:\frac{x}{1}} = n^{\frac{p}{mzx}} = \sqrt[mzx]{n^p}$$

Aplicando la regla dada, tendrémos: $\sqrt{\sqrt[3]{a^9b^6}} = \sqrt[6]{a^9b^6}$.

2.º $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{15}b^9c^{21}}}} = \sqrt[24]{a^{15}b^9c^{21}}$.

67. Cuando uno de los esponentes radicales divida exactamente á los esponentes de la cantidad, podrá simplificarse la operacion. En este caso, cuando se haya de extraer un radical de otro radical solamente, se dividen los esponentes de la cantidad por el índice radical que los divida exactamente, dejando el resultado debajo del otro radical; cuando haya mas de dos radicales, se formará un radical cuyo índice sea el producto de los índices que no dividian exactamente á los esponentes de la cantidad, y bajo de este radical se escribirá la cantidad dividiendo los esponentes de ella por el otro índice radical. Fúndase esto en lo demostrado en el número anterior.

Para mayor claridad resolvamos los dos últimos ejemplos. En el primero vemos que los esponentes 9 y 6 son ambos divisibles por el índice radical 3. Luego tendrémos: $\sqrt{\sqrt[3]{a^9b^6}} = \sqrt{a^{9/3}\,b^{6/3}} = \sqrt{a^3b^2}$, que es la regla sentada en el primer caso. En el segundo ejemplo observamos que los esponentes 15, 9, y 21 son todos divisibles por el índice radical 3, y no lo son ni por 2, ni por 4.

Luego tendrémos: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{15}b^9c^{21}}}} =$ $\sqrt[8]{a^{15/3}\,b^{9/3}\,c^{21/3}} = \sqrt[8]{a^5b^3c^7}$, que es la regla sentada en el segundo caso.

Para ver este segundo procedimiento, pongamos sucesivamente los radicales bajo la forma de quebrados, y tendrémos: $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{a^{15}b^{9}c^{21}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{15/4}\,b^{9/4}\,c^{21/4}}}$

$= \sqrt{a^{15/4 : 3}\,b^{9/4 : 3}\,c^{21/4 : 3}} = \sqrt{a^{15/12}\,b^{9/12}\,c^{21/12}}$

$= a^{15/12 : 2}\,b^{9/12 : 2}\,c^{21/12 : 2} = a^{15/24}\,b^{9/24}\,c^{21/24} =$ (arit. n.° 72.) $a^{5/8}\,b^{3/8}\,c^{7/8} = \sqrt[8]{a^{5}b^{3}c^{7}}$.

68. De los ejemplos anteriores se infieren dos consecuencias importantes. 1.ª No se alterará un radical dividiendo por una misma cantidad tanto el índice radical como los esponentes de la cantidad. 2.ª Así como de varios radicales simples hemos formado un radical compuesto, cuyo índice ha sido el producto de todos, así tambien cuando un índice radical conste de factores simples podrá descomponerse en tantos factores cuantos contenga.

Por lo tanto tendrémos; $\sqrt[4]{a^{8}b^{12}c^{16}} = \sqrt{a^{4}b^{6}c^{8}}$;
$\sqrt[6]{a^{12}b^{6}d^{18}m^{24}} = \sqrt{a^{4}b^{2}d^{6}m^{8}}$; etc.

2.° $\sqrt[6]{ab} = \sqrt{\sqrt[3]{ab}}$; $= \sqrt[4]{mn} = \sqrt{\sqrt{mn}}$;

3.° $\sqrt[12]{ad} = \sqrt{\sqrt[6]{ad}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{ad}} =$
$\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{ad}}}$, 4.° $\sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$; etc.

Cálculo de las espresiones imaginarias.

69. Llámanse raices imaginarias las raices de grado par de cantidades negativas; porque es imposible que haya cantidad alguna que, elevada á una potencia par, dé un resultado negativo. Así: $\sqrt{-a}$, $\sqrt[4]{-b}$, $\sqrt[6]{-c}$, $\sqrt[2n]{-am}$, etc., son espresiones imaginarias.

70. Toda espresion imaginaria puede, sin alteracion alguna en su valor, descomponerse en dos factores, el uno real que contenga la cantidad con signo positivo debajo del radical del mismo grado, y otro imaginario que contenga la unidad con signo negativo debajo del mismo radical. Así:

$$\sqrt[2n]{-a^m} = \sqrt[2n]{a^m} \times \sqrt[2n]{-1};\ \sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{-1};\ \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{b} \times \sqrt[6]{-1};\ \text{etc.}$$

Para la demostracion de esta regla, sea la cantidad $-a^m$, y tendrémos, (n.º 6); $-a^m = -1\,a^m = -1 \times a^m = -1 \times +a^m = +a^m \times -1$. Luego, $\sqrt[2n]{-a^m} =$

$$\sqrt[2n]{-1 \times +a^m} = \sqrt[2n]{+a^m \times -1} = \sqrt[2n]{+a^m \times -1^1}$$

$$= +a^{\frac{m}{2n}} \times -1^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{+a^m} \times \sqrt[2n]{-1^1} = \sqrt[2n]{a^m}$$

$$\times \sqrt[2n]{-1}.$$

71. Con las imaginarias podrán hacerse las mismas operaciones que con las demás cantidades reales. La suma y la resta se verifican en un todo por las reglas dadas (n.° 57 y 58).

72. Para la multiplicacion, se descompondrán cada uno en los factores (n.° 70), y luego se multiplicarán como los demás radicales (n.° 59, y 60).

Asi tendrémos: $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} =$ (arit. n.° 20) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a \times b} \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{ab} \times -1$ (n.° 65) $= -1 \times \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$.

2.° $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{a \times a} \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{a^2} \times -1 = a \times -1 = -1 \times a = -a$.

3.° $\sqrt[4]{-a} - \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{-1} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a \times b} \times \left(\sqrt[4]{-1}\right)^2 = \sqrt[4]{ab} \times \left(\sqrt[4]{-1^1}\right)^2 = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt[4]{-1^2} = \sqrt[4]{ab} \times \left(\sqrt{\sqrt{-1}}\right)^2 = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}$.

4.° $\sqrt{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt{a} \times \sqrt[4]{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a^2} \times$

$$\sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{-1^2} \times \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a^2 \times b} \times \sqrt[4]{-1^2 \times -1} =$$

$$\sqrt[4]{a^2b} \times \sqrt[4]{-1 \times -1 \times -1} = \sqrt[4]{a^2b} \times \sqrt[4]{-1} =$$

$$\sqrt[4]{a^2b \times -1} = \sqrt[4]{-1 \times a^2b} = \sqrt[4]{-a^2b}\,.$$

En el segundo de estos ejemplos se ve especialmente como elevando al cuadrado un radical imaginario de segundo grado, hemos obtenido un resultado negativo. Si en la elevacion al cuadrado de $\sqrt{-a}$, hubiéramos aplicado las reglas dadas en la multiplicacion por lo tocante á los signos, habríamos tenido; $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2}$ $= \pm\, a$. Por lo tanto, la a dentro del radical estaba con signo aditivo. Fuera del radical la hemos indicado con elsigno de ambigüedad, como si ignoráramos de donde se habia formado el cuadrado de a. Como sin embargo al multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$, sabíamos de antemano, que la raíz era $-a$, y no $+a$, por esto debiamos seguir un camino que nos condujera á este resultado, lo que se ha obtenido, no efectuando la multiplicacion de la $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$ segun las reglas dadas (n.º 59), sino elevando al cuadrado la $\sqrt{-1}$, en cuyo caso $\left(\sqrt{-1}\right)^2 =$ (n.º 65) -1. Esta misma regla conviene seguir en los demás casos análogos.

73. Para la division de espresiones imaginarias, se descompondrán antes cada una en los dos factores, y se efectuará la division como en los demás radicales reales. Así:

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \times \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

2.° $\sqrt[6]{-a} : \sqrt[6]{-b} = \frac{\sqrt[6]{a} \times \sqrt[6]{-1}}{\sqrt[6]{b} \times \sqrt[6]{-1}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}} = \sqrt[6]{\frac{a}{b}}.$

3.° $\sqrt{-a} : \sqrt[4]{-b} \; \frac{\sqrt{a} \times \sqrt{-1}}{\sqrt[4]{b} \times \sqrt[4]{-1}} = \frac{\sqrt[8]{a^4} \times \sqrt[8]{-1^4}}{\sqrt[8]{b^2} \times \sqrt[8]{-1^2}} =$

$\frac{\sqrt[8]{a^4 \times -1^4}}{\sqrt[8]{b^2 \times -1^2}} = \frac{\sqrt[8]{a^4 \times 1}}{\sqrt[8]{b^2 \times 1}} = \frac{\sqrt[8]{a^4}}{\sqrt[8]{b^2}} = \sqrt[8]{\frac{a^4}{b^2}}$

74. La elevacion á potencias se verificará, descomponiendo primero el radical en los dos factores, y elevando despues cada factor á la potencia en cuestion. Así:

$\left(\sqrt{-a}\right)^3 = \left(\sqrt{a}\right)^3 \times \left(\sqrt{-1}\right)^3 = \sqrt{a^3} \times \sqrt{-1}$

$= \sqrt{a^3 \times -1} = \sqrt{-a^3}.$

2.° $\left(\sqrt[4]{-a}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{a}\right)^5 \times \left(\sqrt[4]{-1}\right)^5 = \sqrt[4]{a^5} \times$

$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a^5 \times -1} = \sqrt[4]{-a^5}.$

3.° $\left(\sqrt[6]{-a}\right)^{10} = \left(\sqrt[6]{a}\right)^{10} \times \left(\sqrt[6]{-1}\right)^{10} = \sqrt[6]{a^{10}}$

$\times \left(\sqrt[3]{-1}\right)^5 = \sqrt[6]{a^{10}} \times \sqrt[3]{-1^5} = \sqrt[6]{a^{10}} \times \sqrt[3]{-1} =$

$\sqrt[6]{a^{10}} \times \sqrt[6]{-1^2} = \sqrt[6]{a^{10} \times 1} = 1\sqrt[6]{a^{10}} = \sqrt[6]{a^{10}}.$

75. Finalmente, la extraccion de espresiones imagina-

rias se ejecuta en un todo como la de radicales reales. Así:

$$\sqrt{\sqrt[3]{-a}} = \sqrt[6]{-a}.$$

$$2.^{\circ} \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{-b}} = \sqrt[12]{-b}.$$

$$3.^{\circ} \quad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{-b}}} = \sqrt[24]{-b}.$$

76. Demostramos (n.° 21) como uu binomio-suma multiplicado por el mismo binomio-diferencia daba por producto un binomio-diferencia con esponentes dobles. Veamos ahora que resultado nos dará el binomio $a + b\sqrt{-1}$ multiplicado por $a - b\sqrt{-1}$. Ejecutando la operacion, tendrémos: $\left(a+b\sqrt{-1}\right)\times\left(a-b\sqrt{-1}\right) = a^2 - ab\sqrt{-1} + ab\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1}$. Como los dos términos semejantes $-ab\sqrt{-1}$ y $+ab\sqrt{-1}$ se destruyen, tendrémos; $a^2 - ab\sqrt{-1} + ab\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = a^2 - b \times \sqrt{-1} \times b\sqrt{-1} = a^2 - b \times b \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = a^2 - b^2 \times \left(\sqrt{-1}\right)^2 = a^2 - b^2 \times -1 = a^2 + 1\,b^2 = a^2 + b^2$.

Este resultado nos dice, que todo binomio positivo puede descomponerse en dos factores, de los cuales el primero sea un binomio-suma y el otro un binómio-diferencia; cuyo primer término de cada factor sea la primera parte del binomio propuesto pero con esponente mitad, y el segundo sea la segunda parte de dicho binomio pero tambien con esponente mitad y multiplicado en cada factor por $\sqrt{-1}$.

Así, $a^4 + b^6 = \left(a^2 + b^3\sqrt{-1}\right) \times \left(a^2 - b^3\sqrt{-1}\right)$

2.° $a^m + b^n = \left(a^{\frac{m}{2}} + b^{\frac{n}{2}}\sqrt{-1}\right) \times \left(a^{\frac{m}{2}} - b^{\frac{n}{2}}\sqrt{-1}\right)$

SEGUNDA PARTE DEL ÁLGEBRA.

Análisis algebráico.

77. Llámase *análisis* algebráico la parte del álgebra que trata de resolver las cuestiones ó problemas puestos en ecuacion. El espíritu analítico consiste en suponer conocido lo que se trata de averiguar, encontrando lo desconocido en valores de cosas conocidas. Las cosas conocidas toman el nombre de *datos*, y las desconocidas el nombre de *incógnitas*. Los datos se señalan ordinariamente con las primeras letras del alfabeto a, b, c, d, e, etc.; y las incógnitas con las últimas x, z, v, u, y.

78. Entiéndese por ecuacion la igualdad de dos cantidades que comprende una ó mas incógnitas, como por ejemplo: $4x + 2d = 5m - b$. $3z - ab + x = \frac{m}{n} - 5z$.

Identidad es la igualdad de dos cantidades escritas del mismo modo, como por ejemplo: $5x + b = 5x + b$. $9 - 2 = 9 - 2$.

Igualdad es la expresion compuesta de dos cantidades conocidad equivalentes, separadas con el signo igual y escritas bajo distinta forma como por ejemplo: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. $6+5=11$.

Inecuacion ó desigualdad es la expresion de dos cantidades desiguales separadas con uno de estos signos $>$ ó $<$, como por ejemplo $4a^5+b>z$. $3a^6-5m<x$.

En cada una de las anteriores espresiones y otras semejantes lo que se escribe antes de uno de los signos $=$. $>$. $<$. se llama *primer miembro*, y lo que se escribe despues se denomina *segundo miembro*. Cada una de las cantidades que forman uno de los dos miembros toma el nombre de *término*.

79. Una cuestion algebráica puede contener varias ecuaciones; una ecuacion, como lo dice el mismo nombre, no consta mas que de ella sola.

Una cuestion se llama *determinada*, cuando contiene tantas ecuaciones independientes entre si, como incógnitas: *indeterminada*, cuando contiene menos ecuaciones independientes la una de la otra, que incógnitas; y debiera llamarse *mas que determinada*, si constara de mas ecuaciones independientes, que incógnitas.

Una ecuacion por sí sola es *determinada*, cuando no contiene sino una sola incógnita, bien se halle en un solo término, ya se encuentre repetida en varios de ellos; y se llama *indeterminada*, cuando contenga mas de una incógnita. Así la ecuacion; $ax+b-c=d$ seria determinada, y la otra, $z-d+m=b-x+c$ seria indeterminada.

80. Las ecuaciones, ya sean determinadas, ya indeterminadas, se dividen por razon de los esponentes de las incógnitas, y por razon de los datos. Por razon de los esponentes, cuando la ecuacion es determinada, toma el nombre de grado 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, n, etc., segun que la incógnita se halle elevada á la potencia 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª, n, etc. Esto sin enbargo, se entiende, siempre y cuando la incógnita no se halle por divisor de algun término, ó por factor de todos los términos de la ecuacion; en cuyos casos,

para conocer el grado de la ecuacion, deben quitarse todos los denominadores por las reglas que en adelante se dirán, ó deben dividirse todos los términos por el factor incógnito comun. Así las ecuaciones siguientes: $ax+b-\frac{e}{d}=m$; $d+x^2-p=a-bx^2$; $a+b-x=d-x^3$, serian del grado 1.°, 2.° y 3.°, porque en el primer ejemplo la incógnita x se halla elevada á la 1.ª potencia, en el segundo á la 2.ª, y en el tercero á la 3.ª

Cuando la ecuacion es indeterminada tambien se mide su grado por el número de dimensiones incógnitas que hay en el término que tiene mas; para lo que cuando un término contenga varias incógnitas, el número de sus dimensiones será igual á la suma de los esponentes de las mismas incógnitas. Así la ecuacion $b+x^4-d=m-ax^2v^2$, seria indeterminada y del cuarto grado, porque el 4 es el mayor número de dimensiones incógnitas tanto en el término $+x^4$, como en el $-ax^2v^2$. Esta otra $a-\frac{b}{c}-bx^2+m-z^3xa=v^6-m+dv^6z^2$, seria del grado 8.°, porque el mayor número de dimensiones incógnitas se encüentra en el término $+dv^6z^2$, y el esponente 6 de la v sumado con el esponente 2 de la z dan 8.

81. Por razon de los datos se dividen las ecuaciones en *numéricas* y *literales*. Llámanse numéricas cuando los datos están representados por números, y se denominan *literales ó algebráicas*, cuando los datos vienen espresados por letras. Asi la ecuacion $x^2-4+3x=36$, seria numérica; y seria literal ó algebráica la siguiente; $ax+b-mx=\frac{b}{c}-e$. Siempre que en los cálculos se halle una incógnita afectada de otra cantidad conocida, ya sea numérica ya sea algebráica, se da el nombre de *coeficiente* á toda la cantidad conocida que afecta á la incógnita.

Cuando las ecuaciones son de un grado mas elevado que el primero, se dividen en *puras* y *mistas*. Las *puras* son aquellas en las que la incógnita en cualquier término en que se halle está elevada al mismo esponente que da nombre á la ecuacion. Las mistas son aquellas en las que la incógnita á mas de hallarse elevada al esponente que da nombre á la ecuacion, se encuentra tambien en algun otro término elevada á un esponente menor. Asi serian *puras* las ecuaciones siguientes; 1.ª $ax^2+p-mx^2=c+d$. 2.ª $\frac{a}{b}-c+x^4=d-m+x^4$. 3.ª $x^n+p-m=c$. Serian *mistas* estas otras. 1.ª $x^2+px=g$. 2.ª $ax^4-b=d+c-x^2+r$. 3.ª $x^n+m-ax^{n-1}=d+c+x^{n-2}$.

Resolucion de las ecuaciones determinadas de primer grado.

82. Tres cosas hay que considerar en un problema algebráico, á saber; El *planteo, la resolucion y la comprobacion*: El planteo consiste en cifrar en ecuaciones las condiciones que contiene: la resolucion en hallar el valor de la incógnita en valores conocidos; y la comprobacion en averiguar si el valor ó valores de las incógnitas que se han deducido de la resolucion del mismo problema, satisfacen á las condiciones comprendidas en su enunciado.

83. Toda la dificultad de un problema está en su planteo, porque el modo de cifrarlo en ecuaciones depende del talento del calculador. La resolucion de un problema cifrado en ecuacion ó ecuaciones no ofrece dificultad alguna, porque está sujeta á reglas fijas y determinadas. Estas son, hacer con las cantidades que afectan á las incógnitas unas operaciones contrarias á las que van marcadas en la ecuacion. Fúndase esto en que *si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.*

84. Así pues, toda cantidad que afecte á una incógnita por via de suma, puede pasar al otro miembro por via de resta. Si tenemos la ecuacion $x+a=b$, podrémos hacer pasar la a al segundo miembro con el signo —.

Si de la ecuacion $x+a=b$, quitamos de ambos miembros la misma cantidad a que afecta á la incógnita x por via de suma, la ecuacion no se alterará, y tendrémos; $x+a-a=b-a$. Como ahora $+a$ y $-a$ del primer miembro se destruyen, nos queda $x=b-a$. Si tenemos: $x=a+b$ y de ambos miembros quitamos la cantidad a, tendrémos, $x-a=+a-a+b$, y como $+a$ y $-a$ del segundo miembro se destruyen, nos queda $x-a=b$.

85. Toda cantidad que está en un miembro con el signo $-$ puede pasar al otro miembro con el signo $+$. Si tenemos la ecuacion $x-a=-b$, y á ambos miembros añadimos 1.° la cantidad a, no se alterará en nada la ecuacion, y tendrémos; $x-a+a=-b+a$. Como $-a$ y $+a$ del primer miembro se destruyen, nos queda, $x=-b+a$. 2.° Si tenemos $x=a-b$, y hacemos lo mismo con la $-b$, á saber si añadimos á ambos miembros la misma cantidad b, no se alterará la ecuacion, y tendrémos; $x+b=a-b+b$. Como $-b$ y $+b$ se destruyen, resulta $x+b=a$.

86. Toda cantidad que está en un miembro como factor puede pasar al otro miembro por via de divisor. Teniendo la ecuacion $ax=b$, y dividiendo los dos miembros por la misma cantidad a, no se alterará la ecuacion, y resultará. $\frac{ax}{a}=\frac{bx}{a}$. Como la a del numerador ó dividendo y la a del denominador ó divisor se destruyen, nos queda, $x=\frac{b}{a}$. Si tenemos $a=bx$, y dividimos ambos miembros por b, resultará, $\frac{a}{b}=\frac{bx}{b}$. y como se destruye la b del dividendo y la b del divisor del segundo miembro, nos queda; $\frac{a}{b}=x$.

87. Toda cantidad que está en un miembro como divisor puede pasar al otro miembro por via de factor. Si te-

nemos la ecuacion $\frac{x}{a} = b$, y multiplicamos ambos miembros por la misma cantidad a, no se alterará la ecuacion, y resultará, $\frac{x \times a}{a} = b\,a$. Como ahora la a del dividendo y la a del divisor del primer miembro se destruyen, nos queda; $x = b\,a$. Si tenemos la ecuacion $x = \frac{a}{b}$, y multiplicamos ambos miembros por b, resultará:

$x \times b = \frac{a}{b} \times b$, lo que nos da; $x\,b = \frac{a\,b}{b}$. Como la b del dividendo y la b del divisor en el segundo miembro se destruyen nos queda; $b\,x = a$.

88. Sentados estos preliminares, podrémos facilmente resolver una ecuacion. Ante todo conviene saber, que resolver una ecuacion, y despejar una incógnita es una misma cosa. Despejar una incógnita es, disponer la ecuacion de manera que la incógnita quede sola en un miembro, que regularmente es el primero, sin coeficiente, esponente, ni divisor, y siempre con el signo positivo. Para esto deben servir las siguientes reglas. 1.ª Pasar al primer miembro todos los términos que contengan la incógnita, y al segundo todos los que no la contengan, teniendo cuidado de cambiar el signo á cada uno de los términos que se trasladen.

2.ª Quitar todos los divisores, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demás términos; pues que esto equivale á multiplicar cada miembro por una misma cantidad.

Cuando ocurran varios términos con un mismo denominador, bastará que en el producto no entre mas que uno solo de ellos, porque equivale á suprimir de repente una misma cantidad del numerador y denominador de un término quebrado. Por la misma razon, si todos los términos de una ecuacion fueran quebrados con un mismo denominador, bastará suprimir los denominadores, y escribir unicamente los numeradores.

3.ª Si la ecuacion es númerica, reducir á un solo término todos los que contengan la incógnita, porque en este caso todos son semejantes; y si es algebráica, se descompondrá el primer miembro en dos factores, sacando fuera de un paréntesis la incógnita, y encerrando dentro de él todo lo demás que la multiplique.

4.ª Dejar la incógnita sola en el primer miembro, pasando al segundo por via de divisor todo lo que la multiplique, ya sea esto un factor numérico, ya sea literal.

Si despues de despejada la incógnita, resultaba ella con el signo —, se cambiarán los signos á todos los términos de la ecuacion; paraque la incógnita tenga finalmente el signo positivo. Esto en nada alterará la ecuacion, porque equivaldrá á multiplicar todos sus términos por -1.

89. Resolvamos algunos ejemplos, aplicando las reglas dadas.

1.º

$2x+3-5=84+x$, y tendrémos:

1.ª $2x-x=84-3+5$.
2.ª $x=84+5-3=89-3=86$.
3.ª $x=86$.

2.º

$4+3x-7+{}^{2}/_{3}=56+{}^{4}/_{2}+8,+x$ y resultará:

1.ª $3x-x=56+{}^{4}/_{2}+8-4+7-{}^{2}/_{3}$
2.ª (simplificando lo posible:)
$2x=56+8+7-4+{}^{4}/_{2}-{}^{2}/_{3}=67+{}^{4}/_{2}-{}^{2}/_{3}$.
3.ª $2x\times2\times3=67\times2\times3+4\times3-2\times2$.
4.ª $12x=402+12-4=410$.
5.ª $x={}^{410}/_{12}={}^{205}/_{6}=34\,{}^{1}/_{6}$.
6.ª $x=34\,{}^{1}/_{6}$.

3.º

$$-\frac{3x}{2}+15-{}^{1}/_{3}+x=99+5x-{}^{1}/_{4}, \text{ y será}$$

1.ª $-\frac{3x}{2}+x-5x=99-{}^{1}/_{4}-15+{}^{1}/_{3}$.

2.ª $-\frac{3x}{2}-4x=84-{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{3}$.

3.ª $-3x\times4\times3-4x\times2\times4\times3=84\times4\times3\times2$
$-1\times3\times2+1\times4\times2$.

4.ª $-36x-96x=2016-6+8$.

5.ª $-132x=2018$.

6.ª $132x=-2018$.

7.ª $x=-{}^{2018}/_{132}=-{}^{109}/_{66}$.

4.º

$$a+\frac{mx}{d}+c+\frac{b}{n}=h-ax+\frac{c}{f}, \text{ y será:}$$

1.ª $\frac{mx}{d}+ax=h+\frac{c}{f}-a-c-\frac{b}{n}$.

2.ª $mx\times f\times n+ax\times d\times f\times n=h\times d\times f\times n+c$
$\times d\times n-a\times d\times f\times n-b\times d\times f$.

3.ª $mfnx+adfnx=hdfn+cdn-adfn-bdf$.

4.ª $x\times(mfn+adfn)=hdfn+cdn-adfn-bdf$.

5.ª $x=\dfrac{hdfn+cdn-adfn-bdf}{mfn+adfn}$

90. Dijimos que toda la dificultad que podia importar la resolucion de un problema, consistia en su planteo. Este no es mas que una rigurosa traduccion del lenguage comun al lenguage algebráico; por lo que, es preciso familiarizarse bien con semejante lenguage, y penetrarse perfectamente de las

condiciones del problema, paraque, comprendidas las relaciones que tienen entre sí unas partes con otras, puedan facilmenle traducirse al lenguage algebraico. En las ecuaciones las cantidades no podrán estar combinadas sino por una de las operaciones del cálculo. Por tanto, las cantidades deben escribirse las mismas enunciadas en el problema, pero combinadas entre sí por via de *suma*, *resta*, *multiplicacion*, *etc*. Para esto conviene advertir, que las palabras *sumado*, *agregado*, *aumentado en*, y sus semejantes se traducen por medio del signo $+$ colocado en medio de dos cantidades: las *restado de*, *quitado*, *disminuido en*, y sus sinóminas se traducen por el signo $-$; las *multiplicado por*, *tantas veces mayor*, y otras semejantes, se traducen por el signo $\times$; las *dividido por*, *tantas veces menor etc.* se traducen por una raya de division, ó por medio del signo (:); Las *tal potencia etc*, se traduden por el signo de elevacion á potencias; las *estraer tal raiz etc*, se traducen por el signo radical $\sqrt{}$, y las palabras *dé*, *componga*, *resulte*, *salga*, y todas sus equivalentes quedan traducidas por medio del signo $=$.

Por lo que pueda servir, pondrémos la siguiente

Regla de la Croix para poner un problema en ecuacion.

91. Represéntense por guarismos ó mas bien por letras todas las cantidades conocidas que entren en la cuestion, y por una letra la incógnita, y hágase el mismo razonamiento, é indíquense con el auxilio de los signos algebráicos las mismas operaciones que se deberian efectuar en el caso de que suponiendo conocido el valor de la incógnita, tratáramos tan solo de comprobarlo ó de averiguar, si tenia todas las condiciones que la propuesta requería.

92. Propongámonos algunas cuestiones para ejercicio de los principiantes.

1.ª *Si al cuádruplo de mis duros añado* 10, *tendré* 30; *¿cuántos duros tengo?*

Res. Como no sepa cuantos duros tenga, supondré que tengo x duros; por lo que, el cuádruplo de mis duros será cuatro veces x, ó cuatro multiplicado por x. De esto se sigue que cuatro multiplicado por x duros *mas* 10, han de sumar el número de 30 duros. Por tanto diré;

1.º $4x + 10 = 30$.

2.º $4x = 30 - 10 = 20$.

3.º $x = {}^{20}/_{4} = 5$.

2.ª *Halló un gavilan una bandada de palomas y las saludó diciendo; salve bandada de 100 palomas. No somos 100 respondió una de ellas; pero si á las que vamos añades su mitad, su tercio, y tu tambien, S. gavilan, serémos 100 cabal.* ¿Cuántas palomas hay?

Res. Si conociésemos el número de palomas, conoceriamos tambien facilmente, su mitad y su tercio. Representando pues por x dicho número, tendrémos que su mitad será $\frac{x}{2}$, y su tercio será asimismo $\frac{x}{3}$. El gavilan estará representado por una unidad. Por tanto, como las palomas que vuelan, *mas* su mitad, y su tercio, y el gavilan han de completar el número 100, tendrémos planteado el problema del modo siguiente: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 1 = 100$, y resolviéndolo, nos dará:

1.º $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 100 - 1 = 99$.

2.º $6x + 3x + 2x = 594$.

3.º $11\,x\,594$.

4.º $x = {}^{594}/_{11} = 54$.

3.ª *Dos banqueros tienen juntos en caja 58700 pesos; pero el primero tiene dos veces mas que el segundo.* ¿Cuál es el montante de cada caja?

Res. Aqui se ignora lo que tiene el primero y el segundo por separado; pero suponiendo que el segundo tenga x

pesos, el primero habrá de tener $2x$, y como los dos juntos forman 38700 pesos, tendrémos, $x+2x=38700$, la que resuelta nos dará:

1.º $3x=38700$.

2.º $x=38700/3=12,900$.

Por lo que, el 1.º tenia 25800 pesos, el 2.º 12900 pesos.

4.ª Cincuenta duros del padre
Enrique en juego perdió,
Y sin contar los restantes
Sobre un naipe los tiró;
Felíz suerte, amigo Fabio,
Cuenta y recoge por mí,
Toma Enrique, que en la bolsa
Triplicado te me dí.
Volviendo luego á su casa,
La bolsa entrega otra vez
A su padre quien encuentra
Los mismos duros *mas* diez.
Al salir pues de su casa
¿Cuánto dinero tenía?
Que lo diga quien entienda
Semejante algarabía.

Res. Aqui lo que se ignora es el dinero que tenia Enrique cuando salió de su casa, porque aunque no se sepa de fijo los dineros que puso en el naipe, sin embargo se sabe, que estos eran los mismos que tenia al salir de casa *menos* los 50 duros que habia perdido. Sean pues x el número del padre. De esto se infiere que Enrique tiró en el naipe los mismos $x-50$. Despues de la jugada Fabio encuentra ó entrega á Enrique tres veces mas de lo que habia recibido. Luego despues del juego puede representarse por $3\times(x-50)$. Como esto era igual al mismo número x que habia traido Enrique de su casa *mas* los 100 duros, tendrémos planteada la ecuacion del modo siguiente. $3\times(x-50)=x+10$. Resolviéndola, dará:

1.° $3\times x-3\times 50=x+10$.

2.° $3x-150=x+10$.

3.° $3x-x=10+150$.

4.° $2x=160$.

5.° $x={}^{160}/_{2}=80$.

Interpretacion de las cantidades negativas en los problemas.

93. Puede suceder que, despejada una incógnita en una ecuacion, nos dé un resultado negativo. Esto nos indica que, no habiendo padecido error alguno en los cálculos de la resolucion, ni habiendo imposible en el plantéo del problema, hay una verdadera imposibilidad en las condiciones del problema. Sirva de ejemplo la cuestion siguiente. *Pedro y Pablo han comprado una pieza de paño cada uno. Pedro ha pagado por ella 50 duros, y Pablo 40 por la suya. ¿Cuántos duros ha satisfecho Pablo mas que Pedro?* A primera vista se descubre ya la imposibilidad del enunciado del problema; porque siendo el número 40 menor que 50, no podrá resultar jamás que Pablo haya pagado mas que Pedro. Sin embargo, prescindamos de esta imposibilidad marcada, y tratemos de cifrar el problema en ecuacion. Supongamos que Pablo ha satisfecho x duros mas que Pedro. En este concepto, los x duros junto con los 50 de Pedro habrán de igualar los 40 de Pablo; por lo que, tendrémos planteada la ecuacion del modo siguiente:

(1.) $x+50=40$. Resolviéndola nos dará:

1.° $x=40-50=-10$.

2.° $x=-10$.

De esta resolucion se deduce, que el álgebra nos da á conocer la contradiccion ó incompatibilidad que hay en el enunciado de algun ploblema. Si el enunciado del anterior dijese de este modo

Pedro y Pablo han comprado una pieza de paño cada uno. Pedro ha pagado por ella 50 duros, y Pablo 40 por la suya. ¿Cuántos duros menos que Pedro ha satisfecho Pablo?

Suponiendo que estos duros están representados por x, tendrémos que x duros *mas* los 40 de Pablo han de sumar los 50 de Pedro. Así pues plantearémos el problema de este modo: $x+40=50$. Resolviéndola, nos dará

$x=50-40=10$, resultado verdadero.

94. Comparando ahora las dos ecuaciones anteriores, 1.ª $x=40-50$ *y* 2.ª $x=50-40$, se deduce que en el enunciado del problema se nos pedia que hiciéramos servir de minuendo lo que debia ser sustraendo, y al revés: de modo que, si en la ecuacion (1) $x+50=40$, hubiéramos cambiado los signos á los dos términos conocidos, habria resultado; $x-50=-40$, y resuelta hubiéramos tenido; $x=-40+50=10$.

Con esto pues hemos descubierto no solamente la contradiccion en el enunciado del problema, sino tambien el modo de rectificarla; á saber, cambiando los signos á los datos del problema.

Una cosa parecida resultaría con el resultado $\frac{-109}{66}$ que hemos obtenido en el ejemplo 3.° n.° 88. Allí teniamos la ecuacion siguiente: $-\frac{3x}{2}+15-\frac{1}{3}+x=99+5x-\frac{1}{4}$. Si ahora cambiamos los signos á todos los términos conocidos, resultará: $-\frac{3x}{2}-15+\frac{1}{3}+x=-99+5x+\frac{1}{4}$. Resolviéndola nos dará:

1.ª $-\frac{3x}{2}+x-5x=-99+{}^{1}/_{4}+15-{}^{1}/_{3}$.

2.ª $-\frac{3x}{2}-4x=-84+{}^{1}/_{4}-{}^{1}/_{3}$

3.ª $-36x-96x=-2016+6-8$.

4.ª $-132x=-2018$.

5.ª $132x=2018$.

6.ª $x={}^{2018}/_{132}={}^{109}/_{66}$.

Por tanto; podrémos decir por regla general que, habiendo alguna incompatibilîdad en el enunciado de un problema manifestada por un resultado negativo, desaparecerá cambiando los signos á todos los términos conocidos.

Casos de imposibilidad é indeterminacion en los problemas de primer grado.

95. Despejando la incógnita en una ecuaciou se va á parar á un resultado imposible, siempre y cuando por el enunciado de la cuestion se han de igualar dos cantidades que en ningun valor particular de la incógnita pueden ser iguales. Tal seria en la siguiente cuestion

Si del tercio de mis duros quito 5, me encontraré con el mismo tercio aumentando de 12.

Planteando el problema, será: $\frac{x}{3}-5=\frac{x}{3}+12$. Resolviéndola, tendrémos:

1.ª $\frac{x}{3}-\frac{x}{3}=12+5$.

2.ª $0=17$; resultado absolutamente imposible, sea cuál sea el valor que supongamos para x.

96. Se halla para la incógnita un valor indeterminado, cuando en su despejo se encuentra una perfecta identidad,

á saber, $x = x$; $z = z$; $0 = 0$; etc; ó bien la siguiente expresion $\frac{0}{0}$.

Se hallaría el primer caso, cuando segun el enunciado del problema, nos encontráramos con el planteo de una ecuacion semejante á esta: $x - 4 = x - 4$; pues que resuelta nos daría:

1.ª $x - x = 4 - 4$.

2.ª $0 = 0$. Ó bien resuelta de este modo:

1.ª $x - 4 = x - 4$.

2.ª $x = x + 4 - 4$.

3.ª $x = x + 0$.

4.ª $x = x$.

En estos casos la cuestion quedará satisfecha, sea cual sea el valor de la x.

97. La expresion, $\frac{0}{0}$ es tan solamente símbolo de la indeterminacion, cuando no provenga de alguna expresion en que habia un factor cero comun al dividendo y al divisor; pues que en este último caso es tambien el símbolo de una cantidad determinada.

Sea para su comprobacion que tengamos la cantidad $\frac{0}{0}$ y observarémos que, $\frac{0}{0} = \frac{a-a}{1-1} = \frac{a \times (1-1)}{1 \times (1-1)} = \frac{a}{1} = a$, á saber, una cantidad determinada.

Discusion de los problemas.

98. Todas las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita pueden reducirse á la siguiente; $Ax = B$, que por lo mismo la podrémos llamar fórmula general. Supongamos para su demostracion la siguiente ecuacion general;

$ax+b-cx-\frac{d}{n}=dx+m$. Resolviéndola, nos dará, $ax-cx-dx=m-b+\frac{d}{n}$. Poniendo en el primer miembro el factor comun x fuera de un paréntesis, obtendrémos; $x\times(a-d-c)=m-b+\frac{d}{n}$, haciendo ahora, $a-c-d=A$, y despues $m-b+\frac{d}{n}$, $=B$, resultará finalmente, $x\times A=B$, o bien $Ax=B$.

Discutir un problema no es otra cosa, que averiguar los valores que va tomando la incógnita, á medida que se atribuyen á los datos del mismo problema ó ecuacion los diferentes valores de que son susceptibles. Así, si en la fórmula general $Ax=B$, despejamos la x, tendrémos $x=\frac{B}{A}$; si hacemos positiva la A y negativa la B, será $x=\frac{+B}{+A}=+$, si hacemos positiva la A y negativa la B, será $x=\frac{-B}{+A}=-$, etc; es decir, que haciendo ahora positivas á la B y á la A; luego negativa la una y positiva la otra; luego ambas 0, ó una tan solamente, tendrémos sucesivamente la x ahora igual á un valor positivo, ahora negativo, ya indeterminado, ya infinito, etc.

Problemas determinados de primer grado con mas de una incógnita.

99. Llámase *sistema* de ecuaciones el conjunto de aquellas que ha producido el planteo de un problema. Para resolver semejantes cuestiones, despues de haber preparado y simplificado, si se quiere, cada una de las ecuaciones del sistema, pueden seguirse diferentes métodos; los tres mas usados se conocen con los nombres de *sustitucion, de igualacion, y de reduccion á coeficientes idénticos.*

100. En el método de sustitucion, se determina en la e-

cuacion mas sencilla del sistema la incógnita mas sencilla, y se sustituye su valor en las demás ecuaciones. De este modo se obtiene un nuevo sistema mas sencillo que el primero; pues que en él hay una incógnita menos, y una ecuacion menos. En este nuevo sistema se determina otra vez en la ecuacion mas sencilla la incógnita mas sencilla, y se sustituye su valor en las demás. De este modo resulta otra vez un nuevo sistema con una ecuacion menos y una incógnita menos. En este sistema practíquese lo mismo que en los anteriores, y así sucesivamente hasta que resulte finalmente una sola ecuacion con una sola incógnita; en cuyo caso se despeja, y se obtiene su valor en valores conocidos. Entonces se sustituye su valor en los despejos de las demás incógnitas, y quedará resuelta la cuestion. *Es de advertir que, cuando una incógnita ha desaparecido de un sistema, se dice que se ha eliminado.*

Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones.

(A)

$$x+z+u=a$$
$$2x+3z+4u=b$$
$$3x+4z+6u=c$$

Viendo que la primera ecuacion del sistema es la mas sencilla, y que tan sencilla es la una incógnita como las otras, determinarémos la x, y será, $x=a-z-u$. Sustituyendo ahora el valor de x, en las otras dos ecuaciones, resultará:

(B)

$$2\times(a-z-u)+3z+4u=b$$
$$3\times(a-z-u)+4z+6u=c$$

Ejecutando ahora las operaciones indicadas en el sistema B, tendrémos (C):

(C)

$$2a-2z-2u+3z+4u=b$$
$$3a-3z-3u+4z+6u=c$$

Simplificando lo posible el sistema C, resultará (D):

(D)

$$2a + z + 2u = b$$
$$3a + z + 3u = c$$

Dejando ahora en el sistema D todos los términos desconocidos en el primer miembro y pasando al segundo los conocidos, tendrémos (E):

(E)

$$z + 2u = b - 2a$$
$$z + 3u = c - 3a$$

Tenemos pues ya un nuevo sistema preparado y simplificado todo lo posible con una ecuacion menos y una incógnita menos. Despejando ahora en el sistema E la z de la primera ecuacion, y sustituyendo su valor en la segunda, tendrémos; $z = b - 2a - 2u$. Sustituyendo pues este valor en la otra ecuacion, nos dará (F):

(F)

$$b - 2a - 2u + 3u = c - 3a$$

Ha resultado pues ya una sola ecuacion con una sola incógnita. Despejando pues esta, tendrémos:

$-2u + 3u = c - 3a - b + 2a$. Simplificando, resulta, $u = c - 3a - b + 2a = c - a - b$. Por lo que, $u = c - a - b$.

Hemos obtenido pues para cada incógnita los siguientes resultados:

1.° $x = a - z - u$. 2.° $z = b - 2a - 2u$.

3.° $u = c - a - b$.

Como ahora el valor de u es enteramente conocido, si sustituimos su valor en los despejos 2.° y 1.°, tendrémos.

2.° $z = b - 2a - 2 \times (c - a - b = b - 2a - 2c + 2a + 2b = 3b - 2c$. Por lo que, $z = 3b - 2c$.

1.º $x=a-(3b-2c)-(c-a-b)=a-3b+2c-c+a+b=2a-2b+c$. Por lo que, $x=2a-2b+c$.

101. Con el método de igualacion se determina en todas las ecuaciones una misma incógnita: se iguala el valor sacado de la primera con el valor sacado de de las demás, y resulta un sistema nuevo mas sencillo que el primero, en el que habrá una ecuacion menos con una incógnita menos. En este nuevo sistema hágase lo mismo que en el primero, hasta llegar finalmente á una sola ecuacion con una sola incógnita, en cuyo caso se despejará, y el valor hallado se sustituirá en las anteriores. Despejemos por este método el mismo sistema de ecuaciones.

(A)	(B)
$x+z+u=a$	$x=a-z-u$
$2x+3z+4u=b$	$2x=b-3z-4u$
$3x+4z+6u=c$	$3x=c-4z-6u$

Despejando la x en todas las ecuaciones, tendrémos sucesivamente (B) y (C).

(C)

$$x=a-z-u$$

$$x=\frac{b-3z-4u}{2}$$

$$x=\frac{c-4z-6u}{3}$$

102. Igualando ahora en el sistema C el segundo miembro de la primera ecuacion con el segundo de la segunda, y despues con el segundo de la tercera, tendrémos (D):

(D)

$$a-z-u=\frac{b-3z-4u}{2}$$

$$a-z-u=\frac{c-4z-6u}{3}$$

Determinando ahora en el sistema D una misma incógnita en cada ecuacion, resultará sucesivamente (E) (F) (G).

(E)

$$2a-2z-2u=b-3z-4u$$
$$3a-3z-3u=c-4z-6u$$

(F)

$$-2z+3z=b-4u-2a+2u$$
$$-3z+4z=c-6u-3a+3u$$

Igualando ahora el segundo miembro de la primera con el segundo de la segunda en el sistema G, tendrémos (H):

(G)

$$z=b-2u-2a$$
$$z=c-3u-3a$$

(H)

$$b-2u-2a=c-3u-3a$$

Despejando pues ahora la u en esta ecuacion, tendrémos:

$$-2u+3u=c-3a-b+2a. \qquad u=c-a-b.$$

Teniendo pues ahora conocido el valor de u, si lo sustituimos en los valores de los despejos de z y x, tendrémos, para la z (G);

$$z=b-2\times(c-a-b)-2a=b-2c+2a+2b-2a$$
$$=3b-2c.$$

Finalmente para la x (C);

$$x=a-(3b-2c)-(c-a-b)=a-3b+2c-c+$$
$$a+b=2a-2b+c.$$

Por lo que resulta:

$$x=2a-2b+c. \qquad z=3b-2c. \qquad u=c-a-b,$$

que son los mismos valores obtenidos por el método anterior.

103. El método de los coeficientes idénticos consiste en que, en todas las ecuaciones tenga un mismo coeficiente la incognita que se trata de eliminar. Si el sistema consta solo de dos ecuaciones, se suman ó restan ordenadamente, á

saber: primer miembro de la primera con el primer miembro de la segunda, y segundo miembro de la primera con el de la segunda. Se sumarán los dos miembros entre sí de cada una, cuando el término que contenga la incógnita tenga signos diferentes en cada ecuacion; y se restarán en caso contrarío. Con esto no habrá ya sino una sola ecuacion con una sola incógnita, la que se despejará, sustituyendo su valor en una de las anteriores ecuaciones del sistema, y quedando de este modo despejadas las dos incógnitas.

Cuando las ecuaciones sean mas de dos, se compara la mas sencilla con cada una de las dos, siguiendo en cada comparacion la regla anterior. De este modo resulta un nuevo sistema con una ecuacion menos y una incógnita menos. En este sistema hágase lo mismo hasta llegar á una sola ecuacion con una sola incógnita, la que se despejara, sustituyendo su valor en las anteriores.

Para reducir á un coeficiente comun la incógnita que trata de eliminarse, se multiplican todos los términos de cada ecuacion por el coeficiente, ó producto de los coeficientes que tenga en las demás ecuaciones la incógnita que trata de eliminarse. (Con esto no se altera ninguna de las ecuaciones, porque con cantidades iguales se hacen operaciones iguales). Cuando el coeficiente de la incógnita que quiere eliminarse es submúltiplo de otro coeficiente de la misma incógníta en otra ecuacion, entonces podrá abreviarse la operacion multiplicando la ecuacion conveniente por dicho submúltiplo.

Resolvamos por este método el siguiente sistema:

(A)

$$1\,x + z = a$$
$$2\,x + 3z = b$$

Tratando de eliminar la x, multiplicarémos todos los términos de la 1.ª ecuacion por 2, y los de la 2.ª por 1, que son los coeficientes de x en las dos ecuaciones, y tendrémos:

(B)

$$2x+2z=2a$$
$$2x+3z=b$$

Restando ahora la segunda ecuacion de la primera, y simplificando despues el resultado, sale:

$(2x+2z)-(2x+3z)=2a-b$

$2x+2z-2x-3z=2a-b$

$-z=2a-b$, y cambiando los signos, resulta: $z=-2a+b$.

Sustituyendo ahora en cualquiera de las dos ecuaciones de A el resultado de z en lugar de ella, tendrémos para la primera:

$$x+(-2a+b)=a$$
$$x-2a+b=a$$
$$x=a+2a-b=3a-b$$
$$x=3a-b.$$

Por lo que tenemos despejadas ya las dos incógnitas, habiendo resultado:

$$x=3a-b \qquad z=-2a+b.$$

Resolvamos ahora por el mismo método el sistema resuelto ya por sustitucion é igualacion, y tendrémos: (A).

(A)

$x+z+u=a$

$2x+3z+4u=b$

$3x+4z+6u=c.$

Tratando de eliminar la x, multiplicarémos la primera ecuacion por el producto de 2 por 3 coeficientes de x en las otras ecuaciones; luego multiplicarémos la segunda por el producto de 3 por 1; y la tercera por el producto de 2 por 1. Tendrémos pues (B):

(B)

$$6x + 6z + 6u = 6a$$
$$6x + 9z + 12u = 3b$$
$$6x + 8z + 12u = 2c$$

Restando ahora sucesivamente la segunda y tercera de la primera, será:

(C)

$$(6x + 6z + 6u) - (6x + 9z + 12u) = 6a - 3b$$
$$(6x + 6z + 6u) - (6x + 8z + 12u) = 6a - 2c.$$

(D)

$$6x + 6z + 6u - 6x - 9z - 12u = 6a - 3b$$
$$6x + 6z + 6u - 6x - 8z - 12u = 6a - 2c.$$

(E)

$$-3z - 6u = 6a - 3b$$
$$-2z - 6u = 6a - 2c.$$

Tenemos ya un nuevo sistema con una ecuacion menos y una incógnita menos. Cabalmente observamos que la u tiene igual coeficiente en las dos ecuaciones, por lo que, podríamos inmediatamente eliminar la incógnita u sumando la segunda ecuacion con la primera. Pero paraque pueda verse mejor el procedimiento explicado, eliminarémos la z, multiplicando por 2 la primera ecuacion, y por 3 la segunda. Resultará pues:

(F)

$$6z + 12u = -12a + 6b.$$
$$6z + 18u = -18a + 6c.$$

Restando ahora la segunda de la primera, y simplificando despues, resultará (G):

(G)

$(6z+12u)-(6z+18u)=(-12a+6b)-(-18a+6c).$
$6z+12u-6z-18u=-12a+6b+18a-6c.$
$-6u=+6a+6b-6c.$
$6u=-6a-6b+6c.$

Despejando ahora la u, tendrémos:

$$u=\frac{-6a-6b+6c}{6}=-a-b+c.$$

Sustituyendo ahora en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema C el valor de u, tendrémos para la primera;

$-3z-6\times(-a-b+c)=6a-3b.$
$-3z+6a+6b-6c=6a-3b.$
$-3z=6a-3b-6a-6b+6c=-9b+6c.$
$3z=9b-6c.$
$z=\frac{9b-6c}{3}=\frac{9b}{3}+\frac{-6c}{3}=(3b)+(-2c)=3b-2c.$
$z=3b-2c.$

Sustituyendo finalmente ahora en la primera ecuacion del sistema A los valores de z y u, tendremos:

$x+(3b-2c)+(-a-b+c)=a$
$x+3b-2c-a-b+c=a$
$x=a-3b+2c+a+b-c=2a-2b+c.$
$x=2a-2b+c.$

Por lo que hemos obtenido estos tres resultados:

$x=2a-2b+c.$ $z=3b-2c.$ $u=a-b+c,$

que son los mismos valores obtenidos por los dos métodos anteriores.

104. Resolvamos algunas cuestiones.

1.ª *Dada la suma y la diferencia de dos cantidades, hallar la mayor y la menor.*

Res. Representemos por s la suma, por d la diferencia, por x la cantidad mayor, y por z la menor. El problema vendrá representado por estas dos ecuaciones:

$$x+z=s$$
$$x-z=d$$

Aplicando el método de sustitucion, tendrémos:

$$x=s-z.$$

$$s-z-z=d$$
$$s-2z=d$$
$$-2z=d-s$$
$$2z=-d+s=s-d$$
$$z=\frac{s-d}{2}=\left(\frac{s}{2}\right)+\left(\frac{-d}{2}\right)=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}.$$

Sustituyendo ahora el valor de z en la primera de las ecuaciones del sistema, resultará:

$$x+\left(\frac{s-d}{z}\right)=s$$
$$2x+(s-d)=2s$$
$$2x+s-d=2s$$
$$2x=2s-s+d=s+d$$
$$x=\frac{s+d}{2}=\left(\frac{s}{2}\right)+\left(\frac{d}{2}\right)=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$$

Estos resultados nos dicen que dada la suma y la diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma *mas* la mitad de la diferencia; y la menor es igual á la mitad de la suma *menos* la mitad de la diferencia.

2.ª *Un pescador, con el objeto de estimular á su hijo al trabajo, promete darle 5 cuartos por cada lance en que este saque pesca, con la condicion de que por cada lance en que no la saque le descontará 3 cuartos. Despues de 12 lances ajustaron cuentas, y tuvo el padre que pagar al hijo 28 cuartos. ¿En cuántos lances de los 12 sacó el hijo pesca, y en cuántos no?*

Res. Representemos por x los lances felices, y por z los infructuosos. Como entre unos y otros hay 12; dirémos $x+z=12$. Cada lance feliz vale al hijo 5 cuartos; luego los cuartos de los lances felices estarán representados por $5x$. Por una misma razon, el descuento por los lances infructuosos vendrá expresado por $3z$. Descontando pues unos de otros, tendrémos: $5x-3z=28$. Por lo que la cuestion podrá venir expresada del modo siguiente:

$$x+z=12$$
$$5x-3z=28$$

Resolviéndola, nos dará:

$$x=12-z.$$

$$5\times(12-z)-3z=28$$
$$60-5z-3z=28$$
$$-8z=28-60=-32$$
$$8z=32$$
$$z={}^{32}/_{8}=4.$$

Sustituyendo ahora 4 en lugar de z en la primera ecuacion del sistema, tendrémos:

$$x+4=12$$
$$x=12-4=8.$$

Fueron pues 8 los lances felices y 4 los infructuosos.

3.ª *Juan dice á Diego: si me das 100 duros, tendré tanto dinero como tú; á lo que contexta Diego: si tú me das 100 duros, yo tendré duplo dinero del que te quedará á tí. ¿Cuántos duros tiene cada uno?*

Res. Sean x los duros de Juan, y z los de Diego. Es claro que los x duros de Juan junto con los 100 de Diego han de sumar los de este. Ahora, si Juan entrega 100 duros á Diego, al primero le quedarán $x - 100$. Por lo que podré plantear el problema del modo siguiente:

(A)	(B)
$x + 100 = z$	$x + 100 = z$
$z + 100 = 2 \times (x - 100)$	$z + 100 = 2x - 200$

Resolviéndola nos dará:

$$x = z - 100.$$

Sustituyendo este valor en la segunda, será:

$$z + 100 = 2 \times (z - 100) - 200$$
$$z = 2z - 200 - 200 - 100$$
$$z - 2z = -500$$
$$-z = -500$$
$$z = 500$$

Sustituyendo ahora este valor en lugar de z en la primera ecuacion del sistema, tendrémos:

$$x + 100 = 500$$
$$x = 500 - 100 = 400.$$

Por lo que Juan tenia 400 duros y Diego 500.

4.ª *Un tendero debe 1200 duros, y otro 2550, y ni uno ni otro tiene lo suficiente para pagar su deuda: el primero dice al segundo; si me prestas el octavo de lo que tú tienes,* *podré satisfacer lo que debo; á lo que replica el segundo; si me prestas el sexto de tu dinero, tambien podré pagar mi deuda. ¿Cuánto posee cada uno?*

Res. Representando por x el dinero del uno y por z el del otro; es claro que cada uno con su propio dinero y lo que recibiera prestado del otro satisfaria su propia deuda. Por tanto podrémos plantear el problema del modo siguiente:

(A)	(B)
$x+\frac{z}{8}=1200$	$8x+z=9600$
$z+\frac{x}{6}=2550$	$6z+x=15300$

Resolviéndola, nos dará:

$$z=9600-8x$$

$$6\times(9600-8x)+x=15300.$$
$$57600-48x+x=15300$$
$$-47x=15300-57600=-42300$$
$$47x=42300$$
$$x={}^{42300}/_{47}=900 \text{ duros.}$$

Sustituyendo ahora el valor de x en el despejo de la z, tendrémos:

$$z=9600-8\times 900=9600-7200=2400 \text{ duros.}$$

Por tanto el primero tenia 900 duros y el otro 2400 d.s

5.a *Preguntando á Rosendo por su edad, y por los años de su padre, y de su abuelo, contexta: mi edad y la de mi padre componen 56 años: los de mi padre y abuelo sumados* *llegan á 100*, y *agregando á mis años los de mi abuelo componen 80. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Res. Representando por x los años de Rosendo, por z los de su padre, y por u los de su abuelo, por poco que se discurra, se conocerá que debe plantearse la cuestion del modo siguiente:

$$x+z=56$$
$$z+u=100$$
$$x+u=80$$

Resolviéndola, nos dará:

$$x=56-z \qquad (1)$$

Sustituyendo este valor en las otras ecuaciones, será:

$$z+u=100$$
$$56-z+u=80.$$

Despejando ahora la z en la primera ecuacion, será:

$$z=100-u \qquad (2)$$

Sustituyendo este valor en la otra ecuacion tendrémos:

$$56-(100-u)+u=80$$
$$56-100+u+u=80$$
$$2u=80-56+100=180-56=124$$
$$u={}^{124}/_{2}=62.$$

Sustituyendo este valor en el despejo de la z (2), tendrémos para ella:

$$z=100-62=38.$$

Sustituyendo ahora este valor en el despejo de la x (1), tendrémos para esta:

$$x = 56 - 38 = 18.$$

Por tanto, Rosendo tenia 18 años; su padre 38, y su abuelo 62.

Problemas indeterminados de primer grado.

105. Dijimos (n.º 79) que una cuestion era indeterminada, cuando tenia menos ecuaciones independientes que incógnitas; y que una ecuacion era indeterminada, cuando tenia en su planteo mas de una incógnita. En todo problema indeterminado entran cantidades que se llaman *constantes*, y cantidades denominadas *variables*. Las primeras son aquellas que tienen siempre un mismo valor, las segundas son aquellas que pueden tener diferentes valores. Si teniendo el número 10 por ejemplo, lo divido en dos partes, tendré que estas podrán ser, 1 y 9, ó 2 y 8, ó 3 y 7, ó 4 y 6, etc. Aqui el número 10 ha permanecido siempre el mismo, pero las partes que, sumadas daban 10, han sido diferentes, á saber, 1 y 9, 2 y 8, etc. Luego el número 10 sería en este caso la cantidad constante, y las demás partes en que se ha descompuesto serian las variables.

106. Por lo mismo que el problema se llama indeterminado, puede darse á las incógnitas un número infinito de valores que satisfagan á las condiciones propuestas. Sin embargo, este número se limita, haciendo que los valores de las incógnitas vengan expresadas en números enteros y positivos.

107. Toda ecuacion indeterminada de primer grado con dos incógnitas puede reducirse á esta fórmula general: $ax \pm bz = c$, siendo a, b, c, números enteros positivos ó negativos. Las cantidades x y z son las variables. Para que estas sean números enteros, a, y b, deben ser números primos entre sí.

Si en la fórmula general despejamos la x, tendrémos:

$$ax = c \mp bz$$

$$x = \frac{c \mp bz}{a} = \frac{c}{a} \mp \frac{bz}{a}$$

En este caso los valores de x dependen de los que se den á z.

108. Resolvamos algunas cuestiones.

1.ª *Hallar dos números cuya suma sea 10.*

Res. Suponiendo que son x y z los dos números que se buscan, tendrémos: $x + z = 10$. Despejando la x nos dará: $x = 10 - z$. En este caso se ve que la cantidad constante es 10, y las variables son x y z. Habiendo despejado la x, y entrando en su valor el valor de z que se ha de restar de 10, es claro que el valor de x dependerá de los valores que se den á z. Resultará pues:

Si $z = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$

Será $x = 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,$

En este ejemplo se ve que el número de soluciones se ha limitado á 5. Porque la primera y última no son soluciones; puesto que no son dos números, sino uno solo, y las soluciones 6 y 4, 7 y 3, etc, no se diferencian de las antediores 4 y 6, 3 y 7, etc.

2.ª *Hallar dos números* x *y* z *cuya diferencia sea 10.*

Res. $x - z = 10$. Despejando la x, resulta; $x = 10 + z$. Dando pues valores á la z, resultarán para la x los siguientes:

Si $z = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$ etc.

Será $x = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,$ etc.

En cuyo caso se conoce ya que el número de soluciones es infinito.

109. No siempre se presentan ecuaciones tan sencillas como las anteriores en las que la incógnita despejada tenia la unidad por coeficiente. Veamos pues, como debemos gobernarnos cuando la incógnita despejada tenga un coeficiente mayor que la unidad. Para esto resolvamos la siguiente cuestion.

3.ª *Dividir el número 34 en dos partes p y p' que la primera sea divisible por 3 y la segunda por 5.*

Res. Suponiendo que x es el cociente de dividir p por 3, y z el cociente que nos da p' dividido por 5, tendrémos. $\frac{p}{3}=x$. $\frac{p'}{5}=z$. Quitando el denominador á cada una de las dos ecuaciones, la primera se nos convertirá en $p=3x$, y la segunda en $p'=5z$. Luego como $p+p'=34$, si en lugar de p ponemos su igual $3x$, y en lugar de p' ponemos su igual $5z$, la ecuacion $p+p'=34$ se nos convertirá en la siguiente; $3x+5z=34$. Si tratamos de despejar la x, como esta tiene el número 3 por coeficiente, este habrá de pasar por denominador al segundo miembro. En este caso pues, y en todos los semejantes podrémos seguir la siguiente

Regla: *Despéjese en general la variable que tenga menor coeficiente*: sáquense todos los enteros que contengan tanto el término en que haya la otra incógnita como el término conocido: si en su expresion á mas resulta quebrado, se igualará este con otra *variable auxiliar* que se introducirá arbitrariamente para llegar con facilidad al resultado, haciendo que esta variable auxiliar tenga el mismo signo que la del quebrado; se despeja esta haciendo lo mismo que en el caso anterior, y si á mas resulta quebrado, se igualará con una nueva variable auxiliar del mismo signo que la del quebrado; se despejará esta, y se continuará como en los dos casos anteriores, hasta llegar finalmente á una variable que determine exactamente la anterior, no ofreciendo ya quebrado alguno: entonces remóntese en seguida de esta última ecuacion á las precedentes por un órden inverso, sustituyendo en cada despejo el valor de la última variable, hasta expresar por medio de sustituciones sucesivas las dos incógnitas variables en valores de la última auxiliar. Dando entonces valores particulares á esta, se obtendrán las soluciones que satisfagan al problema.

Resolvamos por esta regla la cuestion anterior, y tendrémos:

$3x+5z=34$ (A). $3x=34-5z$ (B). $x=\frac{34-5z}{3}$ (C). $=11+{}^1/_3-z+\frac{-2z}{3}=11-z+\frac{1-2z}{3}$ (D). Haciendo ahora $\frac{1-2z}{3}=-v$, tendrémos: $1-2z=-3v$. (E).

$-2z=-3v-1$ (F). $2z=3v+1$ (G). $z=\frac{3v+1}{2}$ (H). $=v+\frac{v+1}{2}$ (J). Haciendo ahora el quebrado $\frac{v+1}{2}=u$, tendrémos; $v+1=2u$ (L). $v=2u-1$ (M).

Este último resultado no ofrece ya quebrado alguno. Por tanto, si ahora retrocedemos, y en cada despejo vamos introduciendo sucesivamente el valor de u, tendrémos tambien las incógnitas x y z en valores de esta última los cuales dependerán de los que se den á u. Por tanto resultará:

$v=2u-1$ (N). $z=v+u=2u-1+u=3u-1$ (O). $x=11-z+(-v)=11-(3u-1)-(2u-1)=11-3u+1-2u+1=13-5u$.

Dando pues á esta valores particulares, resultarán para x y z los siguientes:

Si $u=$ 0, 1, 2, 3, etc

Será $x=$ 13, 8, 3, $-$2, etc.

y $z=-$1, 2, 5, 8, etc.

Segun esto pues no tenemos mas que dos soluciones, porque cuando u sea igual á cero sale un -1 para z, y cuando sea igual á 3 sale un -2 para x.

Si ahora en lugar de $3x$ y $5z$ restablecemos p y p', tendrémos:

$$p = 3x = 24,\ 9.$$
$$p' = 5z = 10,\ 25.$$

Por lo que las partes en que puede descomponerse el número 34 con las condiciones propuestas son 24 y 10, 9 y 25.

4.ª *Un niño tenia de 100 á 400 nueces, y se divertia haciendo con ellas pequeños montones; cuando ponia 13 en cada monton le sobraban 9, y poniendo 17 le sobraban 14. ¿Cuántas nueces eran?*

Res. Designando por n el número de nueces, por x los montones de 13 en 13, y por z los de 17 en 17, tendrémos:

$$n = 13x + 9. \qquad n = 17z + 14.$$

Siguiendo ahora la regla de la cuestion anterior, resultará:

$$13x+9=17z+14\ (\mathrm{A});\qquad 13x=17z+14-9=17z+5\ (\mathrm{B});$$

$$x=\frac{17z+5}{13}=z+\frac{4z+5}{13}\ (\mathrm{C}),\qquad \frac{4z+5}{13}=v\ (\mathrm{D});$$

$$4z+5=13v\ (\mathrm{E});\qquad 4z=13v-5\ (\mathrm{F});$$

$$z=\frac{13v-5}{4}=3v-1+\frac{v-1}{4}\ (\mathrm{G});\qquad \frac{v-1}{4}=u\ (\mathrm{H});$$

$$v-1=4u\ (\mathrm{M});\qquad v=4u+1.$$

Sustituyendo ahora los valores de z y x en valores de u, tendrémos:

$$z = 3v - 1 + u = 3(4u + 1) - 1 + u = 12u + 3 - 1 + u$$
$$= 13u + 2;$$
$$x = z + v = 13u + 2 + 4u + 1 = 17u + 3.$$

De esto pues resulta, que

Si $u = 0,\ 1,\ 2,$ etc.
$x = 3,\ 20,\ 37,$ etc.
$z = 2,\ 15,\ 28,$ etc.

Tenemos pues que el número de nueces era 269, que resulta de hacer $u = 1$.

POTENCIAS DE LOS POLINÓMIOS.

Cuadrado de los polinómios.

110. Llámase cuadrado de una cantidad la potencia que indica que la cantidad llamada raiz ha de entrar dos veces por factor de sí misma. De este modo tendrémos que, si hemos de elevar al cuadrado el binomio $a + b$, resultará: $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (1). Elevando ahora al cuadrado el binomio $a - b$, tendrémos: $(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (2). Comparando ahora los dos resultados, tendremos: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Este resultado nos dice que el cuadrado de un binomio se compone de tres partes, á saber: cuadrado de primera: *mas* ó *menos* duplo de primera multiplicado por segunda; *mas* cuadrado de segunda.

Toda espresion que, como la anterior, suministra una regla práctica, se llama *fórmula*; de manera que, fórmula es una espresion analítica en que está cifrado el modo de ejecutar una operacion, ó alguna propiedad de una cantidad.

111. Todo polinomio puede convertirse en binomio, haciendo la suma de todos los términos menos uno igual á una letra cualquiera; Así, si en el polinomio $a+b+c$ hacemos la suma de $b+c=n$, se nos transformará; $a+b+c=a+n$. Esto podrá servirnos para elevar al cuadrado un polinómio cualquiera. Transfórmese pues el polinómio en binomio, elévese este al cuadrado, y restablézcanse en su resultado en lugar de la segunda parte del binomio la suma de los términos á que se habia hecho igual.

Valiéndose de la regla anterior, si queremos elevar al cuadrado el polinómio $a+b+c$, tendrémos que, haciendo antes $b+c=n$, resultará: $(a+b+c)^2=(a+n)^2$ $=$ (n.° 110) $a^2+2an+n^2$. Si ahora en lugar de n restablecemos $b+c$, tendrémos; $a^2+2an+n^2=a^2+2a\times(b+c)+(b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$. Este resultado nos dice en general que el cuadrado de un polinómio se compone de las siguientes partes, á saber; *cuadrado de primera; mas duplo de primera por todas las que siguen; mas cuadrado de segunda; mas duplo de segunda por todas las que siguen; mas cuadrado de tercera; mas duplo de tercera por todas las que siguen, mas etc.... mas cuadrado de la última.* Así si hubiéramos de escribir el cuadrado del polinómio $a+b+c+d$, tendríamos:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2.$$

Cubo de los polinómios.

112. Cubo de una cantidad es la potencia que indica que una cantidad ha de entrar por factor de sí misma tres veces. De este modo tendrémos que, si hemos de elevar al cubo el binomio $a+b$, resultará; $(a+b)^3=(a+b)\times(a+b)\times(a+b)=(a+b)^2\times(a+b)=$ (n.° 110) $(a^2+2ab+b^2)\times(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+$

$ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Este resultado nos dice que el cubo de un binomio se compone de cuatro partes, á saber: *cubo de primera; mas triplo de cuadrado de primera multiplicado por segunda; mas triplo de primera multiplicado por cuadrado segunda; mas cubo de segunda.*

Sabiendo elevar un binomio al cubo, y pudiéndose transformar en binomio un polinomio cualquiera, será muy fácil encontrar una regla fija para la elevacion al cubo de cualquier polinomio.

Sea para esto que se haya de elevar al cubo el polinomio $a+b+c$, y haciendo $b+c=n$, tendrémos;

$$(a+b+c)^3=(a+n)^3.$$

Si despues de haber elevado al cubo este binomio, restablecemos de nuevo $b+c$ en lugar de n en todos los términos en donde se encuentre la n, tendrémos facilmente el cubo de $a+b+c$.

Porque $(a+n)^3=a^3+3a^2n+3an^2+n^3$. Si ahora en lugar de n restablecemos $b+c$, resultará; $a^3+3a^2n+3an^2+n^3=a^3+3a^2\times(b+c)+3a\times(b+c)^2+(b+c)^3=a^3+3a^2b+3a^2c+3a\times(b^2+2bc+c^2)+b^2+2bc+c^2=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^2+2bc+c^2$.

Formacion de las potencias en general.

113. Habiendo formado anteriormente las potencias 2.ª y 3.ª del binomio $a+b$, y habiendo visto tambien, que la 3.ª potencia se obtenia (n.º 112.) multiplicando la 2.ª por el mismo binomio; inferiremos que, la potencia 4.ª se obtendrá multiplicando la 3.ª por el mismo binomio; la 5.ª multiplicando la 4.ª por dicho binomio: la 6.ª multiplicando la 5.ª por él mismo, y asi sucesivamente.

Segun esto tendrémos:

1.ª $(a+b)^1 = a + b.$

2.ª $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = a^2 + 2ab + b^2.$

3.ª $(a+b)^3 = (a+b)^2 \times (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

4.ª $(a+b)^4 = (a+b)^3 \times (a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \times (a+b) = a^4 + a^3b + 3a^3b + 3a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3ab^3 + ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

5.ª $(a+b)^5 = (a+b)^4 \times (a+b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \times (a+b) = a^5 + a^4b + 4a^4b + 4a^3b^2 + 6a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4a^2b^3 + 4ab^4 + ab^4 + b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

Por lo que hemos obtenido el siguiente cuadro.

1.ª $(a+b)^1 = a+b.$

2.ª $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

3.ª $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

4.ª $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

5.ª $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

114. Observando cada uno de los anteriores resultados, veremos que en cada uno el número de término es igual al que nos indica el esponente de la potencia *mas* uno.— La primera parte del binomio entra en todos los términos menos el último, así como la segunda está en todos menos en el primero.- Los esponentes de la primera parte enpiezan por el mismo de la potencia, y van menguando de una unidad en cada término hasta que desaparece la primera parte. — Los esponentes de la segunda empiezan por la unidad, y

van aumentando de 1 en cada término hasta que en el último es igual al esponente de la potencia. — Los coeficientes de cada término no vienen á ser mas que el producto del esponente de la primera parte del término anterior multiplicado por su propio coeficiente, y partido por el número de términos que hay antes del que quiere escribirse. — Finalmente todos los términos son aditivos.

Tambien puede advertirse que, cuando se han escrito la mitad de los términos en las potencias de grado *impar*, y la mitad *mas uno* en las potencias de grado par, los coeficientes de los términos siguientes son los mismos que los términos anteriores pero en un órden inverso.

Segun la regla anterior podemos escribir de repente cualquier potencia de un binomio suma. Sea para esto, que hayamos de elevar á la 6.ª potencia el binomio $a+b$, y tendrémos: $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Concretándonos á la regla de los coeficientes, podemos observar en este ejemplo, como el 6 del 2.º término es igual á 6 esponente del primero multiplicado por 1 que es su propio coeficiente, y partido por 1; pues que $\frac{6\times 1}{1} = {}^6/_1 = 6$. El 15 coeficiente del 3.º es igual á 5 esponente de la a en el término anterior multiplicado por 6 que es su propio coeficiente, y partido por 1, por 2; pues que $\frac{5\times 6}{1.\ 2.} = {}^{30}/_{1.\ 2.} = 15$. Lo mismo podriamos notar de los demás.

115. La ley anterior sirve igualmente cuando el binomio tiene la segunda parte sustractiva con sola la diferencia, que los términos que ocupan lugar *impar* llevan el signo $+$, y los que se hallan en lugar *par* llevan el $-$. Así, si hemos de elevar á la potencia 7.ª el binomio $a-b$, tendrémos; $(a-b)^7. = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$.

Binomio de Newton.

116. Entiéndese por binomio de Newton aquella expresion que resulte de elevar un binomio tal como $x+a$ á la potencia m.

Para saber cual es la fórmula del binomio de Newton, sea que tengamos el binomio $(x+a)^m$, y la regla sentada antes para la elevacion á una potencia cualquiera de un binomio nos conducirá á la expresion siguiente:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} a + \frac{m\times(m-1)}{1.\ 2.} x^{m-2} a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^{m-3} a^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.} x^{m-4} a^4 + \ldots\ldots + a^m$$

¿Podrémos designar un término general al término que tenga antes de sí n términos? Sí; y este será:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3):\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ldots\ldots.n} x^{m-n} a^n ;$$

pues que haciendo en ella sucesivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$,, etc. resultan todos los términos de la serie.

Extraccion de la raiz cuadrada de los polinomios.

117.. La extraccion de la raiz cuadrada de un polinomio no es otra cosa, que aquella operacion por la que se trata de hallar una cantidad, que entrando por factor de sí misma dos veces produzca otra vez la cantidad dada.

La fórmula siguiente; $a^2+2ab+b^2$, nos suministrará la regla que habrémos de seguir para la extraccion de dicha raiz. Si, sabiendo que la raiz cuadrada de $a^2+2ab+b^2$ es $a+b$, tratamos de obtenerla, verémos que obtendrémos la 1.ª parte a, extrayendo la raiz cuadrada de a^2, que es el cuadrado de la 1.ª parte; la 2.ª parte b la obtendrémos, dividiendo el 2.º término que es $2ab$ por el doble de la 1.ª que es $2a$.

Si tenemos ahora el polinomio siguiente; $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$ que es el cuadrado de $a+b+c$, despues de haber hallado por la regla anterior las dos primeras partes $a+b$ que son la raiz cuadrada de $a^2+2ab+b^2$, verémos que queda $2ac+2bc+c^2=c\times(2a+2b)+c^2$; por lo que, si prescindiendo del último termino c^2, dividimos los otros por $2a+2b$ que es el duplo de la raiz hallada, obtendrémos por cociente la tercera parte c.

118. Luego, para extraer la raiz cuadradra de cualquier polinomio ordenado, estableceremos la siguiente regla, 1.º Extráigase la raiz cuadrada del primer término, póngase el resultado á la derecha de la potencia separada por una raya de division, cuádrese la raiz y réstese del primer término de la potencia.

2.º Dóblese la raiz hallada, divídase el residuo de la potencia por el duplo de la raiz hallada, y el cociente será la segunda parte de la raiz; póngase esta al lado de la primera parte, luego al lado del duplo de la raiz hallada, despues debajo de sí misma y multiplíquese por el duplo de la raiz hallada y por sí misma, (lo que se considerará junto como un solo divisor), réstese el producto del residuo anterior de la potencia, y continúese del mismo modo hasta concluir la operacion. Así, si tenemos el polinomio siguiente ordenado por la letra a, dispondrémos el cálculo como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{4a^4-16a^3b+24a^2b^2-16ab^3+4b^4}= & /\,2a^2-4ab+2b^2 \\
-4a^4 & \times 2a^2 \\
\hline
0-16a^3b+24a^2b^2-16ab^3+4b^4 & /\,4a^2-4ab \\
+16a^3b-16a^2b^2 & \times -4ab \\
\hline
0+8a^2b^2-16ab^3+4b^4 & /\,4a^2-8ab+2b^2 \\
-8a^2b^2+16ab^3-4b^4 & \times +2b^2 \\
\hline
0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas.

119. Antes de sentar la regla para la extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas, debemos advertir. 1.º que $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$. $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$. $8^2=64$, $9^2=81$. Los principiantes deben aprender esto de memoria, y saber la raiz cuadrada de los números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

2.º $1^2=1\times1=1$, $10^2=10\times10=100$,
$9^2=9\times9=81$, $99^2=99\times99=9801$,

$100^2=100\times100=10000$,
$999^2=999\times999=998001$,

Con esto observamos, que el número menor de una cifra nos da una en su cuadrado, y el mayor nos da dos; el número menor de dos cifras nos da tres en su cuadrado, y el número mayor nos da cuatro; el número menor de tres cifras nos da cinco en su cuadrado, y el número mayor nos da seis. Podemos pues deducir por analogía que el cuadrado de un número tiene todo lo mas el duplo de las cifras de la raiz, y todo lo menos el duplo de dichas cifras menos una. — De esto se infiere que, dado el cuadrado de una cantidad numérica, podemos ya saber de antemano las cifras que habrán de resultar en la raiz. Si el cuadrado se compone de un número *par* de cifras, habrá la mitad en la raiz, y si dicho número es *impar*, resultarán la mitad y media cifra *mas* en la raiz, ó, dígase, la mitad *mas* una.

3.º todo número compuesto puede tomar la forma del binomio $a+b$. Porque si tenemos por ejemplo 45, podrémos descomponerlo y resultará;

$45=40+5$. $324=320+4$. $5879=5870+9$ etc.

La regla pues, que nos sirvió para extraer la raiz cuadrada del cuadrado de $a+b$, nos guiará para extraer la raiz cuadrada de cualquiera cantidad numérica.

120. Entendido esto podrémos sentar la siguiente regla para la extraccion de la raiz cuadrada de un número cualquiera. 1.º Divídase el número propuesto en períodos de 2 cifras cada uno empezando de derecha á izquierda, no importando nada que el primer período de la izquierda conste de un solo guarismo. 2.º Extráigase la raiz cuadrada del primer período, póngase el resultado á la derecha entre las lineas de division, y tambien debajo de sí mismo: multiplíquese por sí mismo, y réstese el producto del primer periodo. 3.º Al lado de la resta bájese el período siguiente, sepárese la primera cifra de la derecha con una coma, y divídase lo que queda á la izquierda por el duplo de la raiz hallada; póngase el cociente al lado de la primera cifra de la raiz, y al lado del duplo de la raiz que sirvió de divisor, y debajo de si mismo; multiplíquese entonces todo lo que sirvió de divisor junto con el cociente por el mismo cociente, y réstese el producto del número que hizo veces de dividendo, incluso el guarismo separado con la coma. Al lado de esta resta bájese el periodo siguiente, sepárese con una coma la primera cifra de la derecha, y pártase lo que quede á la izquierda por el duplo

de toda la raiz hallada, y saldrá en el cociente la tercera cifra de la raiz. Practíquese con esta lo que se ha hecho con la segunda, y continúese del mismo modo hasta hallar cociente exacto, ó aproximarla por decimales si no la tiene exacta.

Así, si queremos extraer la raiz cuadrada del número 104976, dividiéndolo primero en periodos de 2 cifras cada uno, extraerémos en primer lugar la raiz cuadrada de 10 que es el primer período, y poniéndola en las rayas de division y debajo de sí misma, dirémos; 3 multiplicado por 3 da 9, que restado de 10 es 1; bajamos luego al lado del 1 el período siguiente 49, y separando con una coma el 9, nos queda á la izquierda el número 14; dividimos pues el 14 por el duplo de 3 que da 6, y obtenemos por cociente 2 que lo pondrémos al lado del 3, al lado del 6, y debajo de sí mismo. Multiplicamos luego el 62 por 2 y restamos el producto de 149, lo que nos da 25 por resta. Al lado del 25 bajamos el último período 76, separamos el 6 con una coma, y dividimos el 257 que nos queda á la izquierda por el duplo de la raiz 32 que nos da 64, y obtenemos por cociente 4. Ponemos ahora el 4 al lado de la raiz 32, al lado del duplo 64, y debajo de sí mismo. Multiplicamos finalmente el 644 por 4, y restándolo de 2576 nos da por resta cero. Todo esto viene espresado bajo la siguiente forma.

$\sqrt{10{,}49{,}76}=$	/ 324
14,9	$\times 3$
0257,6	/ $3\times 2=6$
0000	/ 62
	$\times 2$
	$32\times 2=64$
	/ 644
	$\times 4$

2.º *Ejemplo.*

$\sqrt{29,44,14,76}=$	/5426
0 44,4	×5
0 28 1,4	/5×2=10
0 65 07,6	/104
0 0 0 0 0	×4
	/54×2=108
	/1082
	×2
	/542×2=1084
	/10846
	×6

121. Cuando se divida lo que queda á la izquierda de la coma por el duplo de la raiz hallada, nunca podrá ponerse mas de 9 por cociente en la raiz.—Si lo que queda á la izquierda es menor que el duplo de la raiz, se pondrá cero en ella, se bajará el período siguiente al lado del anterior, y separando con una coma otra vez la primera cifra de la derecha, se dividirá todo lo demás que haya quedado á la izquierda por el duplo de toda la raiz hallada.—Cuando se ponga mas de lo que se debe por cociente en la raiz, se conocerá, si al ejecutar la multiplicacion y resta, no se puede hacer esta última.

122. Para conocer si en la raiz se ha puesto menos de lo que corresponde, obsérvese si la resta que resulta pasa del duplo de la raiz hallada: en este caso la cifra puesta últimamente es menor de lo que corresponde, y por lo mismo debe aumentarse. Para su demostracion cuadremos las cantidades a y $a+1$, cuyas cantidades se diferencian

tan solo en una unidad. Tendrémos pues: $(a)^2=a^2$. $(a+1)^2=a^2+2a\times1+1^2=a^2+2a+1$. Segun se observa, en el cuadrado de a entra a^2; en el de $a+1$ tambien entra a^2, pero á mas $2a+1$. Esto nos dice que los cuadrados de dos números que se diferencian en una unidad, se diferencian en el duplo del menor mas la unidad. Luego las restas que resultan en la extraccion de la raiz cuadrada pueden llegar á ser el duplo de la raiz hallada; y llegando á ser el duplo de la raiz mas uno, debe tener este una unidad mas.

123. La razon de dividir primeramente el número en períodos de dos cifras cada uno, es porque, si observamos que el número propuesto consta de mas de dos cifras, nos indica que ya nos ha de dar mas de una en la raiz (n.° 119. 2.°); luego las cifras de la raiz constarán á lo menos de unidades y decenas, y como la primera cifra que nosotros buscamos de la raiz no es la que pertenece al órden de unidades simples, sino otra superior, por esto separamos del cuadrado propuesto aquellas cifras que no nos han de servir, que son precisamente las dos cifras de unidades y decenas. Si todavia quedan mas de dos cifras á la izquierda, vamos continuando el mismo raciocinio hasta que estas no consten de mas de dos.

Cuando despues de haber bajado el período siguiente, separamos la primera cifra de la derecha, es porque no pertenece al duplo de la primera multiplicado por la segunda; sin embargo de que se hace la resta hasta de esta misma cifra, porque no deja de formar parte del cuadrado.

124. Cuando no se encuentra raiz exacta puede aproximarse por decimales. En este caso á cada resta se añaden dos ceros para cada una de las cifras de la aproximacion. Fúndase esto en que todo decimal elevado al cuadrado da por resultado duplo número de cifras de las que tenia la raiz. Así, $(0'3)^2=0'3\times0'3=0'09$. (arit. n.° 128.) $(0'14)^2=0'14\times0'14=0'0196$, etc. De este modo tendrémos:

$\sqrt{10{,}49{,}85} =$	/3 2 2'0 1 etc.
0 1 4,9	×3
0 2 5 8,5	/6 2
0 0 0 9 0,0 0,0	×2
2 5 5 9 9	/6 4 4
	×4
	/6 4 4 0
	/6 4 4 0 1
	×1

2.º *Ejemplo.*

$\sqrt{6{,}34{,}95} =$	/2 5 2'3 6 etc.
2 3,4	×2
0 0 9 9,5	/4 5
1 9 1 0,0	×5
0 3 9 7 1 0,0	/4 0 2
0 3 4 3 0 4	×2
	/5 0 4 3
	×3
	/5 0 4'6 6
	×6

Bueno es advertir aquí de paso, que la raiz de una suma ó diferencia no es igual á la suma ó diferencia de sus raices. — Supongamos para su demostracion que hemos de extraer la raiz cuadrada de 25, y tendrémos: $\sqrt{25} = 5$.

Como 25 puede descomponerse en los dos sumandos $16+9$, vamos á probar que $\sqrt{16+9}$ no es igual á $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; porque $\sqrt{16}=4$, y $\sqrt{9}=3$. Sumando ahora los dos resultados tendrémos: $4+3=7$, es decir, que $\sqrt{16}+\sqrt{9}=7$. Sin embargo antes habiamos encontrado que $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$. Como pues 5 y 7 no pueden ser iguales, resulta que la raiz de una suma no es igual á la suma de las raices. Igual raciocinio podemos hacer entre la raiz de una diferencia y la diferencia de sus raices. Porque si tenemos $25-9=16$, será $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$. Pero si ahora extraemos separadamente la raiz cuadrada de 25 y de 9, resultará: $\sqrt{25}=5$. $\sqrt{9}=3$. Por tanto, si dijéramos $\sqrt{25-9}=\sqrt{25}-\sqrt{9}$ obtendríamos $5-3=2$. No pudiendo pues ser iguales 4 y 2, tenemos que la raiz de una suma ó resta no es igual á la suma ó resta de las raices. —Por lo que, siempre qne se haya de extraer una raiz de una suma ó resta indicada, efectuarémos primero la operacion de sumar ó restar indicada debajo del radical, y despues se extraerá la raiz de la suma ó resta efectuada.

Raiz cuadrada de los decimales.

125. Cuando un número consta de enteros y decimales, para extraer de él la raiz cuadrada, se hará 1.° que el número de los decimales sea par, añadiendo un cero á su derecha si antes era impar. 2.° Se dividirá tanto la parte decimal como la parte en enteros en períodos de dos cifras cada uno. 3.° Se extraerá en seguida la raiz cuadrada del número dado del mismo modo que se ha practicado en los números enteros (n.° 120), y cuydando de poner en la raíz el signo decimal, tan pronto como haya salido la parte per-

teneneciente á los enteros, que constará de tantas cifras cuantos sean los períodos del cuadrado de los enteros. — Si el número cuadrado constara solo de decimales, se hará que el número de cifras sea par, añadiendo un cero en caso de ser impar, y se extraerá la raiz como en los ejemplos anteriores, poniendo al principio de la raiz cero enteros. Fúndase en lo dicho en el párrafo anterior.

Segun esta regla extraigamos la raiz cuadrada de las cantidades siguientes.

$\sqrt{7,86'25,48} =$	/ 2 8'0 4 etc.
3 8,6'	×2
0 0 2 2,5 4,8	/ 4 8
0 0 1 3 2	×8
	/ 5 6 0 4
	×4

2.º *Ejemplo.*

$\sqrt{88,84'94,7530} =$	/ 9 4'2 5 9 etc.
0 7 8,4	×9
0 4 8 9,4	/ 1 8 4
1 1 3 0 7,5	× 4
0 1 8 8 5 0 3,0	/ 1 8 8 2
0 1 8 8 4 4 9	× 2
	/ 1 8 8'4 5
	× 5
	/ 1 8 8'5 0 9
	× 9

Raiz cuadrada de los quebrados.

126. Fundados en lo dicho (n.° 54) la raiz cuadrada de un quebrado será igual á la extraccion de dicha raiz de cada uno de los términos del quebrado. Partiendo despues uno por otro los resultados, el cociente será la raiz cuadrada que se busca.

$$\text{Así: } \sqrt{4/25} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = 2/5;$$

$$\sqrt{64/36} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{36}} = 8/6 = 4/3 \text{ etc.}$$

127. En los ejemplos anteriores cada uno de los términos del quebrado ha tenido raiz exacta; sin embargo á veces acontece que la tiene exacta uno de los dos términos, y el otro no. En este caso se extrae la raiz del término que la tiene exacta, y se deja indicada la operacion en el otro término.

$$\text{Así: } \sqrt{9/12} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{12}};$$

$$\sqrt{15/49} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{15}}{7}, \text{ etc.}$$

No obstante en semejantes casos lo mas sencillo es reducir el quebrado comun á decimal, y despues extraer conforme á las reglas dadas (n.° 120) la raiz cuadrada del decimal resultante. Lo mismo se verifica cuando ningun término del quebrado tiene raiz exacta. Así, tendrémos:

$\sqrt{4/7} = \sqrt{4:7} =$ (arit. n.º 119)

$\sqrt{0'57,14,28} =$	/ 0'7 5 6 etc.
0 8 1,4	× 7
0 8 9 2,8	/ 1 4 5
0 4 9 2	× 5
	/ 1 4 0 6
	× 6

2.º *Ejemplo.*

$\sqrt{5/12} = \sqrt{5:12} = \sqrt{0'41,66} =$	/ 0'6 4 5 etc.
0 5 6,6	× 6
0 7 0 0,0	/ 1 2 4
0 6 7 5	× 4
	/ 1 2 8 5
	× 5

Simplificacion del cálculo de la raiz cuadrada de los enteros y decimales.

128. Teniendo calculadas mas de la mitad de las cifras de la raiz cuadrada de un número cualquiera, se pueden hallar las restantes, dividiendo la diferencia entre el número dado y el cuadrado de la raiz hallada por el duplo de la misma raiz; y como la diferencia entre el número dado y el cuadrado de la raiz hallada es igual al último residuo mas los últimos períodos de dicho número; despues de haber obtenido mas de la mitad de las cifras de la raiz; bájense al lado del residuo último los períodos que quedan en la potencia, divídase la cantidad resultante por el doble de la raiz hallada poniendo á su lado tantos ceros cuantas sean las cifras que falten para la raiz; y el cociente será la parte que falte de la raiz.

Para la demostracion de esta regla supongamos que sea N el número dado, a la parte que suponemos hallada de la raiz, y designemos por b la parte que falta para completarla; estando representada por el binomio $a+b$ la raiz exacta del número propuesto N, tendrémos esta ecuacion; $\sqrt{N}=a+b$. Si elevamos ambos miembros al cuadrado, no alteraremos la ecuacion, y será: $(\sqrt{N})^2=(a+b)^2$, de donde resulta, $N=a^2+2ab+b^2$; pasando la cantidad a^2 al primer miembro, sacarémos la siguiente; $N-a^2=2ab+b^2$; dividiendo ambos miembros de la ecuacion por $2a$, que es el duplo de la raiz hallada se deduce la siguiente; $\frac{N-a^2}{2a}=\frac{2ab}{2a}+\frac{b^2}{2a}$; ó bien $\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$; trasladando el primer miembro al segundo y el segundo al primero, tendrémos; $b+\frac{b^2}{2a}=\frac{N-a^2}{2a}$, despreciando finalmente el quebrado propio $\frac{b^2}{2a}$, resulta $b=\frac{N-a^2}{2a}$, que es la regla establecida.

No hay inconveniente en despreciar el quebrado $\frac{b^2}{2a}$, porque b^2 es el cuadrado de la parte que falta de la raiz, y como el cuadrado de una cantidad todo lo mas puede llegar á valer el duplo de la raiz, si representamos por c el número de cifras que entran en b, tendrémos, que b^2 todo lo mas podrá llegar á valer $2c$; si queremos reducir las unidades de a á la misma especie que las de b, habrémos de añadir á a tantos ceros cuantas cifras habia en b, á saber c cifras; como en a hay ya mas de la mitad de las cifras, resultará que junto con c ceros tendrá mas de $2c$ cifras; luego será $b^2<a$, y con mucha mas razon $b^2<2a$, y $\frac{b^2}{2a}<1$, asi que, el quebrado $\frac{b^2}{2a}$ será despreciable.

Extraccion de la raiz cúbica de las cantidades numéricas.

129. Si teniendo el cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, nosotros tratramos de hallar su raiz $a+b$, verémos, que para obtener la primera parte a, no hemos de hacer otra cosa que extraer la raiz cúbica del primer termino a^3, y la segunda parte b la obtendrémos dividiendo el segundo término $3a^2$ por el triplo del cuadrado de la raiz hallada.

Observando además que $(1)^3=1$, y $(9)^3=729$; $(10)^3=1000$, y $(99)^3=970299$, es decir, que el cubo de un número consta todo lo mas del triplo de las cifras de la raiz, y todo lo menos del triplo de las cifras de la raiz menos 2, (como podriamos deducirlo con todos los números), y pudiendo representar un número cualquiera bajo la forma del binomio $a+b$, estableceremos la siguiente regla.

Para extraer la raiz cúbica de un número cualquiera dividirémos 1.° el número propuesto en períodos de 3 cifras cada uno, no importando nada que el primer período de la izquierda conste solo de uno ó dos guarismos. 2.° extraigase la raiz cúbica del primer período, póngase á la derecha entre las líneas de division, elévese esta raiz al cubo, el resultado réstese del primer período, al lado de la resta bájese el período siguiente, sepárense las dos primeras cifras de la derecha, y divídase lo que quede á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, elévese toda la raiz al cubo, y réstese el resultado de los periodos de arriba que nosotros ya hemos bajado; al lado de la resta bájese el período siguiente, sepárense las dos primeras cifras de la derecha, y continúese del mismo modo hasta hallar cociente exacto, ó bien aproximándolo por decimales, añadiendo tres ceros por cada cifra que nosotros queramos obtener en la raiz. Así, si queremos extraer la raiz cúbica del número 32768, dividiéndolo en períodos de 3 cifras, extraerémos en primer lugar la raiz cúbica de 32, que es el primer período, y poniéndola en las rayas de division, dirémos; la raiz cúbica de 32 es 3, elevando esta raiz 3 al cubo, nos resulta 27, y restándolo del primer período 32, nos da de resta 5; bajamos el siguiente período, 768, y separando con una coma las dos cifras 68, dividimos el 57, que es lo que queda á la izquierda por 27 que es el triplo del cuadrado de la raiz hallada 3, lo que nos da 2 por cociente, y elevando ahora toda la raiz hallada 32 al cubo, lo restaremos de los dos períodos de arriba, lo que nos da por resíduo cero; todo lo que viene expresado bajo la siguiente forma:

$\sqrt[3]{32768} =$	/ 3 2
— 27	$(3)^3 = 27$
0 5 7,6 8	/ 2 7
3 2 7 6 8	2
— 3 2 7 6 8	$(32)^3 = 32768$
0	

2.º *Ejemplo.*

$\sqrt[3]{76{,}765{,}638} =$	/ 4 2 5'0
— 6 4	$(4)^3 = 64$
1 2 7,6 5	/ 4 8
	2
7 6 7 6 5	$(42)^3 = 74088$
— 7 4 0 8 8	
0 2 6 7 7 6,3 8	/ 5 2 9 2
	5
7 6 7 6 5 6 3 8	$(425)^3 = 76765625$
— 7 6 7 6 5 6 2 5	/ 5 4 1 8 7 5
1 3 0,0 0	0

La razon de dividir primerante el número propuesto en períodos de 3 cifras cada uno, es porque, si observamos que el número propuesto consta de mas de tres cifras, nos indica, que ya nos ha de dar mas de una en la raiz, luego las cifras de la raiz constarán á lo menos de unidades y decenas, y como la primera cifra que nosotros buscamos de la raiz no es la que pertenece al órden de unidades simples sino otra superior, por eso separamos del cubo propuesto aquellas cifras que no nos han de servir, que son precisamente las tres cifras de unidades decenas y centenas, continuando el mismo raciocinio, hasta que las cifras que nos quedan de la izquierda no consten de mas de tres cifras.

Cuando despues de haber bajado el período siguiente, separamos las dos cifras de la derecha, es porque no pertenecen al triplo del cuadado de 1.ª multiplicado por 2.ª, sin embargo de que el cubo de la raiz se resta hasta de las mismas cifras dichas, porque no dejan de formar parte del cubo.

Regla general para extraer la raiz de cualquier grado.

130. Las reglas practicadas para extraer la raiz cuadrada y cúbica de los números determinarán el modo de extraer la raiz de un grado cualquiera. — En la extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades numéricas dividimos de derecha á izquierda el número dado en períodos de dos cifras cada uno; y en la extraccion de la raiz cúbica lo hicimos en períodos de tres cifras cada uno; es decir, que en cada uno de los dos casos hemos dividido el número dado en períodos de tantas cifras cada uno, cuantas unidades tuviera el esponente radical. Luego diremos por analogía que, si hemos de extraer la raiz cuarta de un número, lo dividiremos en períodos de cuatro cifras cada uno; si es la raiz quinta, lo dividiremos en períodos de cinco cifras cada uno, etc.

131. Al extraer la raiz cuadrada ó 2.ª de una cantidad numérica; despues de haber dividido el número en perío-

dos de dos en dos cifras, extraimos la raiz cuadrada del primer período; se elevó la raíz al cuadrado, y se restó del primer período; al lado de la resta se bajó el período siguiente, se separó la última cifra de la derecha con una coma; y se dividió lo que quedaba á la izquierda por el duplo de la raiz hallada elevada á 1: se elevó toda la raiz al cuadrado, (pues que á esto equivalen las operaciones que se practican en dicha extraccion), y se restó el producto de los dos períodos, al lado de la resta se bajó el período siguiente, y se hizo lo mismo que en el primer caso hasta haber concluido la operacion. — En la extraccion de la raiz cúbica, despues de haber dividido el número en períodos de tres en tres cifras, extraímos la raiz cúbica del primer período; se elevó la raiz al cubo, y se restó el producto del primer período; al lado de la resta se bajó el período siguiente, se separaron las dos últimas cifras de la derecha con una coma, y se dividió lo que quedaba á la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada; se elevó toda la raiz al cubo, y se restó el producto de los dos primeros períodos; al lado de la resta se bajó el período siguiente, se separaron las dos últimas cifras de la derecha, y se hizo como en el caso anterior hasta haber concluido la operacion. — Luego podremos decir por analogía que, si hemos de extraer la raiz cuarta de una cantidad númérica, despues de dividido el número en períodos de cuatro en cuatro cifras, extraeremos primero la raiz cuarta pel primer período, elevaremos la raiz á la cuarta potencia, y se restará el resultado del primer período; al lado de la resta bajaremos el período siguiente; separaremos las tres últimas cifras de la derecha con una coma, y dividiremos lo que quede á la izquierda por el cuádruplo del cubo de la raiz hallada; se elevará toda la raiz á la cuarta potencia, y se restará el resultado de los dos primeros períodos; al lado de la resta bajaremos el período siguiente; separaremos con una coma las tres últimas cifras de la derecha, y dividiremos lo que quede á la izquierda por el cuádruplo del cubo de la raiz hallada, continuando como en el caso anterior hasta haber concluido la operacion.

Si hubiéramos de extraer la raiz quinta, despues de haber dividido el número en períodos de cinco en cinco cifras, extraeríamos la raiz 5.ª del primer período; se elevaría esta raiz á la 5.ª potencia; y se restaría el resultado del primer período: al lado de la resta bajaríamos el período siguiente, separaríamos las cuatro últimas cifras de la derecha con una coma, y dividiríamos lo que quedaría á la izquierda por el quíntuplo de la cuarta potencia de la raiz hallada: elevaríamos toda la raiz á la 5.ª potencia, y se restaría el resultado de los dos primeros períodos; al lado de la resta bajaríamos el período siguiente, y practicaríamos lo mismo que en el caso anterior hasta haber concluido la operacion.

132. Cuando en la raiz cuadrada no se hallaba raiz exacta, se aproximaba por decimales añadiendo al número dado tantas veces dos ceros cuantas cifras decimales queríamos obtener en la raiz.— En la raiz cúbica añadíamos tres ceros por cada cifra decimal de la raiz. — Luego dirémos por analogía que en la raiz 4.ª añadiríamos cuatro ceros por cada cifra decimal de la raiz: en la raiz 5.ª añadiríamos 5 ceros, en la 6.ª 6, etc.

133. De todo lo dicho en los párrafos anteriores se deduce que, para extraer en general la raiz de un grado cualquiera, se dividirá primero el número dado de derecha á izquierda en períodos de tantas cifras cada uno cuantas unidades contenga el esponente radical; se extraerá la raiz en cuestion del primer período, se elevará la raiz á una potencia del mismo grado que el índice radical, y este resultado se restará del primer período; al lado de la resta se bajará el período siguiente, se separarán de derecha á izquierda con una coma tantas cifras *menos* una cuantas unidades contenga el índice radical, y se dividirá lo que quede á la izquierda por el producto que resulta de multiplicar el esponente radical por toda la raiz elevada á la potencia del mismo grado que el radical *menos* 1: se elevará entonces toda la raiz á la potencia del mismo grado que el radical; se restará el resultado de los dos primeros períodos; al la-

do de la resta se separarán de derecha á izquierda tantas cifras *menos* una cuantas unidades contenga el esponente radical, y se continuará como en el caso anterior hasta encontrar raiz exacta, ó haberla aproximado por decimales, añadiendo por cada cifra decimal de la raiz tantos ceros cuantas unidades haya en el índice radical.

Ecuaciones determinadas puras y mistas de 2.° grado.

134. Llámase ecuacion pura de 2.° grado, cuando la incógnita en todos los términos en que se encuentre siempre se halla elevada al cuadrado. Tales serian por ejemplo las siguientes: $x^2 + m = a$; $a + \frac{m}{b} - x^2 = cx^2 - d$; etc.

135. Cuando una incógnita se halle elevada á una potencia, y esté sola en un miembro, quedará despejada extrayendo del otro miembro una raiz del grado de aquella potencia. Así, si tenemos $x^n = b$, sacarémos: $x = \sqrt[n]{b}$. Fúndase esto en que, si extraemos de ambos miembros un radical del mismo grado, la ecuacion no se alterará (arit. n.° 3. 6.°). Si pues en la ecuacion $x^n = b$, extraemos la raiz n de ambos miembros, resultará: $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}$, ó sea (n.° 52) $x^{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ó bien $x = \sqrt[n]{b}$. Por lo que si tenemos $x^2 = 25$, será $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$, ó sea, $x = 5$; $x^2 = 49$, será: $\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$, ó bien $x = 7$.

136. Del mismo modo, si una incógnita se halla sola debajo un radical en un miembro, quedará despejada, elevando el otro miembro á una potencia del grado de aquel radical. Así, si tenemos $\sqrt[n]{x} = b$, resultará; $x = b^n$. Fún-

dase esto en que elevando ambos miembros de una ecuacion á una potencia, la ecuacion no se altera; por tanto, si en la ecuacion $\sqrt[n]{x}=b$, elevamos á la potencia n ambos miembros, resultará: $(\sqrt[n]{x})^n=(b)^n$, ó sea (n.° 65) $x=b^n$.

137. Llámase ecuacion mista de 2.° grado aquella que consta á lo menos de tres términos; uno en el que la incógnita sea elevada al cuadrado; otro en el que se halle elevada á la primera potencia, y otro en el que no se encuentra la incógnita. —La fórmula general de estas ecuaciones es la siguiente. $Ax^2+Bx=C$; ó bien, $Ax^2+Bx-C=0$. (H)

No puede haber menos de tres términos; porque si en la ecuacion (H) faltaba el 1.° ya no seria de 2.° grado; si faltaba el 2.° seria pura; y si faltaba el 3.° seria de primer grado; porque dividiendo toda la ecuacion por x, tendriamos; $\frac{Ax^2}{x}+\frac{Bx}{x}=0$, ó bien $Ax+B=0$. — Puede ser que se hallen mas de tres términos, pero por medio del análisis llegan á reducirse á tres.

138. Una ecuacion mista de 2.° grado se dice que está preparada, cuando consta de solos los tres términos espresados, y además la incógnita elevada al cuadrado es positiva, sin coeficiente ni divisor.

Si en la ecuacion $Ax^2+Bx=C$, dividimos ambos miembros por A que es el coeficiente de la incógnita elevada al cuadrado, se nos convertirá en la siguiente: $\frac{Ax^2}{A}+\frac{Bx}{A}=\frac{C}{A}$, ó bien en esta otra. $x^2+\frac{Bx}{A}=\frac{C}{A}$. Haciendo ahora para mayor sencillez $\frac{B}{A}=p$, y $\frac{C}{A}=g$, dicha ecuacion se convertirá en la siguiente: $x^2+px=g$. (N). Esta última espresion se llama fórmula general de las ecuaciones mistas de 2.º grado preparadas.

139. Las operaciones practicadas en el número anterior para encontrar la fórmula general nos dicen, que se logrará tener la incógnita elevada al cuadrado sin coeficiente, dividiendo todos los términos de la ecuacion por el coeficiente que tenga dicha incógnita. — Cuando esta fuera negativa, se convertirá en positiva cambiando los signos á todos los términos por las razones dadas (n.º 88.)

140. Siendo la ecuacion (N) $x^2+px=g$, la fórmula general de las ecuaciones de 2.º grado preparadas, cuando sepamos resolver esta, se resolverán facilmente todas las demás. Para esto elevemos al cuadrado el binomio $x+{}^1/_2p$, y tendrémos: $(x+{}^1/_2p)^2=$ (n.º 110.) $x^2+2x\times{}^1/_2p+({}^1/_2p)^2=x^2+\frac{2xp}{2}+\frac{1^2}{2^2}p^2=x^2+px+{}^1/_4p^2$. Comparando ahora este resultado con el primer miembro de la ecuacion (N), á saber x^2+px, veremos que á este le falta ${}^1/_4p^2$ para ser un cuadrado perfecto. Luego si á ambos miembros de la ecuacion (N) $x^2+px=g$, añadimos ${}^1/_4p^2$ que es el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, la ecuacion subsistirá, y se transformará en la siguiente: $x^2+px+{}^1/_4p^2=g+{}^1/_4p^2$. Estrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembos, resultará: $\sqrt{x^2+px+{}^1/_4p^2}=\sqrt{g+{}^1/_4p^2}$. Como el cuadrado del primer miembro nos ha provenido de elevar al cuadrado el binomio $x+{}^1/_2p$, la ecuacion anterior se nos convertirá en la siguiente: $x+{}^1/_2p=\sqrt{g+{}^1/_4p^2}$. Despejando la x, será finalmente: $x=-{}^1/_2p\pm\sqrt{g+{}^1/_4p^2}$. ($O$)

Comparando este resultado con la ecuacion (N) nos da la siguiente regla, para resolver una ecuacion mista de 2.º grado preparada;

Póngase inmediatamente la incógnita sola, luego el signo $=$, despues la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario al que lleve: luego el signo de ambigüedad $\pm$, un radical de 2.º grado, y debajo de él el tercer término con el mismo signo que tenga en el segundo miembro, y finalmente la mitad del coeficiente del segundo término elevada al cuadrado siempre con signo aditivo.

141. La ecuacion $(O)\ x=-{}^1/_2 p \pm \sqrt{g+{}^1/_4 p^2}$ es equivalente á estas dos

$$x=-{}^1/_2 p+\sqrt{g+{}^1/_4 p^2}$$
$$x=-{}^1/_2 p-\sqrt{g+{}^1/_4 p^2}.$$

Estos dos valores jamás podrán ser iguales mientras la ecuacion sea mista. Tan solo lo serian, con solo la diferencia del signo, cuando p fuera igual á cero, porque entonces resultaría para la 1.ª $x=\sqrt{g}$, y para la 2.ª $x=-\sqrt{g}$: pero en este caso la ecuacion seria pura.

142. Resolvamos algunos ejemplos.

1.º

Hallar un número tal que si á su cuadrado se le agrega el cuádruplo del mismo número la suma sea 21.

Res. Designando por x el número pedido, su cuadrado estará representado por x^2, y su cuádruplo por $4x$. Por lo que la ecuacion estará representada de este modo: $x^2+4x=21$. Aplicando ahora la regla dada, (n.º 140), tendrémos: $x=-{}^4/_2\pm\sqrt{21+({}^4/_2)^2}=-2\pm\sqrt{21+2^2}=-2\pm\sqrt{21+4}=-2\pm\sqrt{25}$
$=-2\pm 5$. La cual es equivalente á estas dos

$$x=-2+5=+3.$$
$$x=-2-5=-7.$$

Así como la fórmula general (O) nos dió dos valores para la incógnita, así tambien nos los ha ofrecido esta cuestion particular, como lo deben hacer todas las demás de su clase. De estos dos valores á veces el uno es positivo y el otro negativo, como se ha verificado en este ejemplo: á veces los dos son positivos; en otros casos los dos son negativos; y algunas veces los dos son imáginarios. Aunque siempre cada uno de los dos valores satisface á la ecuacion, sin embargo no siempre satisface cada uno al problema que nos ha conducido á ella. Si algun valor ha de satisfacer á la cuestion ó problema, ha de ser precisamente positivo.

En el ejemplo que nos ocupa el primero de los dos valores de la x satisface á la cuestion segun está propuesta; pero no satisface el segundo. Si $x=3$, tendremos realmente:

$$x^2=9$$

$$4x=12$$

y la suma $x^2+4x=21$.

143. Si se quisiera que el 2.° valor de la x en el ejemplo anterior satisfaciera á la cuestion, seria preciso modificar la propuesta, cambiando el $+4x$ en $-4x$, lo que podria venir espresado bajo las condiciones propuestas en este

2.° *Ejemplo.*

Hallar un número que si de su cuadrado se quita el cuádruplo del mismo número, nos dé 21.

Res. $x^2-4x=21$.

$x=\frac{4}{2}\pm\sqrt{21+(\frac{4}{2})^2}=2\pm\sqrt{21+2^2}=2\pm\sqrt{21+4}=2\pm\sqrt{25}=2\pm 5$. La cual equivale á estas dos.

$$x=2+5=7$$
$$x=2-5=-3$$

Ejemplo 3.°

144. *Hallar un número que si á su cuadrado se agrega el séptuplo del mismo número con 9 unidades, nos dé por suma 3.*

Ya se ve á primera vista que, sea cuál sea el valor de este número que designarémos por x, si á este se le agregan ademas 9 unidades que de si solas valen mas que 3, ha de dar por suma un resultado mayor que el pedido. Sin embargo el álgebra no solo nos dirá el absurdo, si que tambien nos advertirá el modo de rectificar la propuesta. Designando pues por x el número pedido, tendrémos:

Res. $x^2+7x+9=3$

$$x^2+7x=3-9=-6$$

$$x=-{}^7/_2\pm\sqrt{-6+({}^7/_2)^2}=-{}^7/_2\pm\sqrt{-6+{}^{49}/_4}$$
$$=-{}^7/_2\pm\sqrt{-{}^6/_1+{}^{49}/_4}=-{}^7/_2\pm\sqrt{-{}^{24}/_4+{}^{49}/_4}=-$$
$${}^7/_2\pm\sqrt{\frac{-24+49}{4}}=-{}^7/_2\pm\sqrt{{}^{25}/_4}=-{}^7/_2\pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$

$=-{}^7/_2\pm{}^5/_2$. La cual equivale á estas dos:

$$x=-{}^7/_2+{}^5/_2=\frac{-7+5}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x=-{}^7/_2-{}^5/_2=\frac{-7-5}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

La resolucion del problema anterior nos ha ofrecido dos soluciones negativas, ninguna de las cuales puede satisfacer á la cuestion. Si en lugar de añadir al cuadrado del número pedido su séptuplo, hubiéramos quitado á este de dicho cuadrado, y además hubiéramos añadido 9 unidades, no habria habido entonces inconveniente alguno en que su resultado fuera igual á 3. Ejecutándolo pues, será:

$$x^2 - 7x + 9 = 3$$
$$x^2 - 7x = 3 - 9 = -6$$

$$x = +\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{-6 + (\tfrac{7}{2})^2} = +\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{-6 + \tfrac{49}{4}}$$
$$= +\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{6}{1} + \tfrac{49}{4}} = +\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{24}{4} + \tfrac{49}{4}} =$$
$$+\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{-24 + 49}{4}} = +\tfrac{7}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} = +\tfrac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$

$= +\tfrac{7}{2} \pm \tfrac{5}{2}$. La cual equivale á estas dos.

$$x = +\tfrac{7}{2} + \tfrac{5}{2} = \frac{+7+5}{2} = \tfrac{12}{2} = +6$$

$$x = \tfrac{7}{2} - \tfrac{5}{2} = \frac{7-5}{2} = \tfrac{2}{2} = 1.$$

Esto pues nos dice, que para hacer desaparecer el absurdo propuesto en el problema manifestado por las dos soluciones negativas, bastará cambiar el signo al término en que se halle la incógnita elevada á la primera potencia.

4.º Ejemplo.

145. *Hallar un número que si á su cuadrado se añaden 59 unidades y el óctuplo del mismo número nos dé por suma 7.*

Res. $x^2 + 8x + 59 = 7.$
$$x^2 + 8x = 7 - 59 = -52.$$

$$x = -\tfrac{8}{2} \pm \sqrt{-52 + (\tfrac{8}{2})^2} = -4 \pm \sqrt{-52 + \tfrac{64}{4}}$$
$$= -4 \pm \sqrt{-52 + \tfrac{16}{1}} = -4 \pm \sqrt{-52 + 16} = -4$$

$\pm \sqrt{-36}$; La cual equivale á estas dos.

$$x = -4 + \sqrt{-36}.$$
$$x = -4 - \sqrt{-36}.$$

La resolucion de este problema nos ha conducido á dos soluciones imáginarias. — Si cambiamos el signo al término que contiene el cuadrado de la incógnita, resultará:

$-x^2 + 8x + 59 = 7.$
$x^2 - 8x - 59 = -7.$
$x^2 - 8x = -7 + 59 = 52.$
$x = {}^8/_2 \pm \sqrt{52 + ({}^8/_2)^2} = 4 \pm \sqrt{52 + 4^2} = 4 \pm$
$\sqrt{52 + 16} = 4 \pm \sqrt{68}$; la cual equivale á estas dos:

$$x = 4 + \sqrt{68}$$
$$x = 4 - \sqrt{68}$$

Esto nos dice que, para hacer desaparecer los radicales imáginarios en las ecuaciones mistas de 2.º grado bastará cambiar el signo al término que contenga el cuadrado de la incógnita.

5.º Ejemplo.

146. *Dividr el 16 en dos partes tales que su producto sea 70.*

Res. Siendo x la parte mayor, la menor estará representada por $16 - x$, y el producto de estas dos partes estará espresado por $x \times (16 - x)$. Tendremos pues:

$x \times (16 - x) = 70.$
$16x - x^2 = 70$
$x^2 - 16x = -70$
$x = {}^{16}/_2 \pm \sqrt{-70 + ({}^{16}/_2)^2} = 8 \pm \sqrt{-70 + 8^2} = 8$

$\pm\sqrt{-70+64}=8\pm\sqrt{-6}$: la cual equivale á estas dos.

$$x=8+\sqrt{-6}$$

$$x=8-\sqrt{-6}.$$

En este ejemplo hemos obtenido otra vez dos soluciones imaginarias; y en efecto debia ser así, porque el producto máximo de un número descompuesto en dos partes no puede pasar del cuadrado de su mitad; y sin embargo se nos pedia que el producto de las dos partes de 16 llegara á 70, siendo así que el cuadrado de 8 mitad de 16, no pasa de 64.

Para demostrar esta verdad con toda generalidad supongamos que $2a$ sea el número que se ha de descomponer en dos partes cuyo producto sea el máximo. Si representamos por $2x$ la diferencia, tendrémos (n.º 104) que la mayor será $a+x$, y la menor $a-x$ y su producto será $(a+x)\times(a-x)=a^2-ax+ax-x^2=a^2-x^2$. Pero el mayor valor que puede tener este producto es cuando $x=0$. en este caso cada parte es igual á a que es la mitad de $2a$.

Razones en general.

147. Llámase *razon* en general *la comparacion de dos cantidades con el objeto de averiguar las relaciones que tengan entre sí*. Llámase razon *aritmética* ó *por diferencia* cuando se trata de averiguar lo que una cantidad excede á la otra; y se denomina *geométrica* ó *por cociente* cuando se quiere averiguar cuantas veces la una contiene á la otra. — La cantidad que se compara se llama *antecedente*; la cantidad con la cual se compara se llama *consecuente*: el resultado de la comparacion se denomina *esponente* de la razon, ó simplemente *razon*, y antecedente y consecuente juntos toman el nombre de *términos* de la razon. — La razon se lla-

ma de igualdad, de mayor ó de menor desigualdad, segun que el antecedente es igual, mayor ó menor que su propio consecuente. — Cuando dos razones son tales, que el antecedente de la 1.ª es consecuente de la 2.ª y el consecuente de la 1.ª es antecedente de la 2.ª, entonces la una se llama inversa de la otra.

Razones aritméticas ó por diferencia.

148. La razon aritmética se señala escribiendo el antecedente, y á su lado el consecuente, pero separado el uno del otro por medio de un punto. — Si tuviéramos el antecedente 7 y el consecuente 3, y tratáramos de formar razon, los pondríamos bajo esta forma; 7.3; cuya espresion se leeria diciendo: 7 *es aritméticamente á* 3. — Del mismo modo deben leerse todas las demás.

149. Para encontrar una razon aritmética se resta el consecuente del antecedente. Así para encontrar la razon del párrafo anterior, diriamos: $7.3 = 7 - 3 = 4$. En este caso 4 seria la razon pedida. — De la misma manera se encontrarían todas las demás.

150. De lo expuesto en el número anterior, y de la definicion dada (n.º 147) se deduce, que una razon aritmética es igual á una operacion de restar, así que la una podrá transformarse en la otra. Por tanto, á una razon aritmética podrán aplicársele todas las consecuencias que se desprenden de la definicion del restar (arit. n.º 17), cuidando de sustituir los nombres de *antecedente, consecuente* y *razon*, en lugar de los de *minuendo*, *sustraendo*, y *resta*. — De esto se infiere que, dada una razon aritmética podrémos encontrar muchas otras iguales á ella, añadiendo ó quitando una misma cantidad en el antecedente y consecuente. Así tendremos, por ejemplo; $9.\ 5 = 11.\ 7 = 13.\ 9 = 17.\ 13 = 6.\ 2 = 5.\ 1 = $ etc.

Razones geométricas ó por cociente.

151. La razon geométrica se señala por medio de dos puntos colocados entre el antecedente y consecuente. Así, si quisiéramos formar razon con los números 12 y 4, escribiriamos; 12 : 4, la que leeriamos diciendo; 12 *es geométricamente á 4*, ó simplemente 12 *es á 4*. Del mismo modo podrian escribirse y leerse todas las demás.

152. Para encontrar la razon geométrica se divide el antecedente por el consecuente. Así, para encontrar la razon geométrica entre 12 y 4, diriamos; $12 : 4 = \frac{12}{4} = 3$. En este caso el 3 seria la razon pedida. Del mismo modo encontrariamos todas las demás.

153. De lo expuesto en el párrafo anterior, y de la definicion de la razon geométrica dada (n.° 147) se desprende que dicha razon es igual á una division, ó á un quebrado, así que la una podrá transformarse en la otra. — Por tanto á una razon le convendrá todo cuanto se ha dicho de la division y de los quebrados (arit. n.° 42), cuidando de sustituir los nombres de *antecedente*, *consecuente*, *y razon*, en lugar de los de *dividendo* ó *numerador*, *divisor* ó *denominador*, *cociente* ó *quebrado*. — De esto se infiere que, dada una razon geométrica, podremos encontrar muchas otras que le sean iguales, multiplicando ó dividiendo por una misma cantidad los dos términos de la razon. Así tendremos; $12 : 4 = 12 \times 2 : 4 \times 2 = 12 \times 3 : 4 \times 3 : = 12 \times 4 : 4 \times 4 = {}^{12}/_{2} : {}^{4}/_{2} = {}^{12}/_{3} : {}^{4}/_{3} =$ etc.

154. Llámase razon compuesta la que resulta de haber multiplicado ordenadamente entre sí dos ó mas razones. Entiéndese por multiplicar ordenadamente, multiplicar antecedente de la una por antecedente ó producto de los antecedentes de las demás, y el consecuente de la una por consecuente ó producto de los consecuentes de las demás. — Las razones que se dan se llaman *componentes*, y el re-

sultado se denomina razon *compuesta*. Si queremos formar una razon compuesta de estas dos 3 : 5 y 6 : 4, las colocarémos en columna, y diremos:

$$\begin{array}{c} 3:5 \\ 6:4 \\ \hline 3\times 6:5\times 4=18:20. \end{array}$$

Si tuviéramos 2 : 3; 4 : 1; 5 : 6; 3 : 4, formariamos la compuesta del modo siguente:

$$\begin{array}{c} 2:3 \\ 4:1 \\ 5:6 \\ 3:4 \\ \hline 2\times 4\times 5\times 3:3\times 1\times 6\times 4=120:72 \end{array}$$

155. Una razon por si sola podrá simplificarse dividiendo sus dos términos por una misma cantidad, sin que ella se altere (n.º 42. 3.ª), Así, 8:4 = 4:2 = 2:1. Cuando haya muchas razones á la vez componentes convendrá para mayor sencillez simplificarlas todo lo posible antes de formar la compuesta. Para esto simplificarémos cuanto se pueda cada razon por separado, y si despues finalmente resulta todavia que el antecedente de una cualquiera y consecuente de otra puedan dividirse por un mismo número, se efectuará esta division. Esto equivale á simplificar la compuesta que resultaria, simplificacion que, por lo dicho (n.º 42 y 72), en nada alteraría la razon. Cuando las componentes sean simplificadas, para formar la compuesta, se pondrán los términos que hayan resultado en lugar de los primitivos. Cuando un antecedente y consecuente fueran iguales, se tacharán, y en lugar de ellos se acostumbra escribir la unidad.

Supongamos que tenemos las razones siguientes; 3 : 4; 5 : 6; 4 : 5. Si tratamos de formar la compuesta, las pondremos en columna, y será como se ve en (A). Pero observamos que ninguna de ellas por sí sola puede simplificarse, porque no hay ninguna de ellas cuyos dos términos puedan exactamente dividirse por un mismo número, no obstante el antecedente 3 de la una y el consecuente 6 de la otra son divisibles por 3, el antecedente 5 y el consecuente 5 pueden suprimirse, porque equivale á dividir cada uno por sí mismo; lo mismo puede decirse del antecedente 4 y consecuente 4. Por tanto aplicando la regla dada, saldrán las componentes y compuesta que se ven en (B).

(A)

$$\begin{array}{c} 3 : 4 \\ 5 : 6 \\ 4 : 5 \end{array}$$

(B)

$$\begin{array}{c} 1 : 1 \\ 1 : 2 \\ 1 : 1 \\ \hline 1 \times 1 \times 1 : 1 \times 2 \times 1 = 1 : 2. \end{array}$$

Si teniendo las mismas de (A) hubiéramos formado la compuesta con ellas, y despues hubiéramos simplificado la compuesta, habría resultado:

$$\begin{array}{c} 3 : 4 \\ 5 : 6 \\ 4 : 5 \\ \hline \end{array}$$

$3 \times 5 \times 4 : 4 \times 6 \times 5 = 60 \times 120 = 30 : 60 = 15 : 30 = 5 : 10 = 1 : 2$; cuyo resultado es el mismo que se ha obtenido en (B).

156. Si tenemos la razon 3 : 6, veremos que podemos formar las siguientes iguales á ella; $3 : 6 = 12 : 24 = 15 : 30 = 18 : 36 =$ etc. Esto nos dice 1.° que en lugar de una razon podemos poner cualquiera otra que le sea igual; 2.° que mirado un antecedente ó consecuente con relacion á

los demás, todos los antecedentes, como antecedentes, serán iguales entre sí, y lo mismo los consecuentes. Por lo que tomando las razones anteriores, tendrémos:

$$3 = 12 = 15 = 18 = \text{etc.}$$
$$6 = 24 = 30 = 36 = \text{etc.}$$

Ya se ve que los números 3, 12, 15, 18, etc. mirados como tales no son iguales entre sí; pero sí que lo son, si se consideran como antecedentes de los consecuentes respectivos 6, 24, 30, 36, etc; porque la misma relacion hay entre 3 y 15, por ejemplo que entre 6 y 24. De esto se infiere, que si hemos de formar una razon compuesta de las dos 3:6; 12:24, en lugar de estas podrémos poner las otras dos 15 : 30; 18 : 36. De las dos primeras resultará (A), y de las dos segundas resultará (B) que son iguales entre sí.

(A)

$$3 : 6$$
$$12 : 24$$
$$3 \times 12 : 6 \times 24 = 36 : 144 = 12 : 48 = 3 : 12$$

(B)

$$15 : 30$$
$$18 : 36$$
$$15 \times 18 : 30 \times 36 = 270 : 1080 = 54 : 216 = 18 : 72 = 3 : 12$$

Proporciones en general.

157. Llamáse *proporcion la igualdad de dos razones de una misma especie*. Por lo que, proporcion *aritmética* es la

igualdad de dos razones aritméticas, y proporcion *geométrica* la igualdad de dos razones geométricas. — Como en cada razon entran dos términos, resulta que cada proporcion consta de cuatro términos; de los cuales el 1.° y 4.°, se llaman extremos, y el 2.° y 3.° medios. — El 1.° y 3.° se denominan antecedentes, y el 2.° y 4.° consecuentes. — La proporcion se divide en *discreta* y *contínua*: la primera es la que tiene los medios diferentes, y la segunda la que tiene los medios iguales.

Proporciones aritméticas.

158. Para señalar una proporcion aritmética se colocan dos razones iguales la una al lado de la otra, pero separadas entre sí por medio de dos puntos (:), tal seria por ejemplo la siguiente; *a.b* : *c.d*, la que se leería de este modo; *a es aritméticamente* á *b*, *como c es aritméticamente* á *d*. Del mismo modo se leen todas las demás. Es decir, leyendo cada razon de por sí, y traduciendo este signo (:) ó dos puntos por la palabra *como*.

La regla que acaba de sentarse sirve tanto para las proporciones discretas, como para las contínuas. Así escribiríamos por ejemplo *a.b* : *b.c*, en la cual los medios son iguales. Sin embargo cuando son contínuas se acostumbran escribir abreviadamente, poniendo antes este signo ($\div$), y suprimiendo el tercer término. y el signo *como*. Así, la proporcion contínua anterior se escribiria de este modo; $\div$*a.b.c.*, y se leería; *a es aritmeticamente* á *b*, *es aritmeticamente* á *c*. De la misma manera se leen todas las demás contínuas.

159. Para escribir con facilidad una proporcion aritmética discreta podremos seguir la siguiente regla; póngase una razon cualquiera; luego los dos puntos; y añadiendo ó quitando una misma cantidad á cada uno de los dos términos de la razon dada, se formará una razon segunda igual á la primera, cuyos términos, por consiguiente, formarán

proporcion. Así, si teniendo los términos por ejemplo 9 y 7 que forman una razon, añado á cada uno una cantidad tal como 3, obtendré los dos términos siguientes, 12 y 10 que guardarán proporcion con los primeros. Por tanto, tendremos; $9.7 : 9+3. 7+3 = 9.7 : 12.10$. — Si dados los mismos números 9 y 7, quito á cada uno una misma cantidad por ejemplo 3, tendré una segunda razon igual tambien á la primera, y saldrá la siguiente proporcion; $9.7 : 9-3. 7-3 = 9.7 : 6.4$.

160. Para escribir con facilidad una proporcion aritmética continua podrá servir la siguiente regla: póngase una razon cualquiera y luego los dos puntos; despues póngase por tercer término el segundo de la razon escrita, y para formar el cuarto añádase ó quítese al tercero lo mismo que se hubo de añadir ó quitar al primero para formar el segundo. Así, si dada la razon entre los términos 7 y 9 por ejemplo quiero formar una proporcion contínua, pondré por tercer término el 9, y como veo que el 9 se ha formado del primero $7+2$, añadire 2 al 9, y resultará; $7.9 : 9.9+2 = 7.9 : 9.11$, ó bien abreviadamente; $\div 7.9.11$.

161. La propiedad fundamental de las proporciones aritméticas es la siguiente: *suma de extremos es igual á suma de medios en la discreta, é igual al duplo del término medio en la contínua.*

Para su demostracion supongamos la proporcion discreta general $a.b : c.d.$ y tendrémos (n.^{os} 149 y 157) $a-b = c-d$; trasladando ahora á los miembros opuestos los dos términos $-b$ y $-d$, no se alterará la igualdad, y resultará: $a+d = c+b$. Luego la suma de los extremos a y d es igual á la de los medios b y c. Si ahora tenenemos la contínua $\div a.b : b.c$, haciendo lo mismo que en la discreta, resultará: $a-b = b-c$; trasladando ahora á los miembros opuestos los términos $-b$ y $-c$, tendrémos; $a+c = b+b$, ó bien, $a+c = 2b$. Luego la suma de los extremos a y c es igual al duplo del término medio b.

Concretándonos pues á los ejemplos anteriores, tendrémos que, $9.7 : 12.10$, dará; $9+10 = 7+12$; ó sea, $19 = 19$.

De la otra $9 . 7 : 6 . 4$ sale: $9+4=7+6$; ó sea $13=13$. De la proporcion contínua, $7 . 9 : 9 . 11$, sale; $7+11=2\times 9$; ó sea, $18=18$.

162. De lo demostrado en el párrafo anterior se sigue, 1.° que si la suma de dos cantidades es igual á la suma de otras dos, con estas cuatro se podrá formar proporcion, poniendo los dos términos de una suma por extremos, y por medios los dos términos de la otra suma. Así, de $m+n=x+z$ resultará; $m . x : z . n$; ó bien, $x . m : n . z$.

2.° Dada una suma de dos cantidades igual á la suma de otras dos podrán formarse con ella ocho proporciones diferentes, porque á todas ellas podrá aplicárseles la propiedad fundamental, de que la suma de los extremos de la primera será igual á la suma de los medios de la misma en todas las demás. Esto se verifica, haciendo que las dos cantidades de cada suma sirvan dos veces de medios, y dos veces de extremos. Así, dada la igualdad siguiente: $a+d=b+c$, obtendrémos con ella estas ocho.

$a . b : c . d$,	$b . a : d . c$,
$a . c : b . d$,	$b . d : a . c$,
$d . b : c . a$,	$c . a : d . b$,
$d . c : b . a$,	$c . d : a . b$,

3.° En toda proporcion aritmética discreta un término medio será igual á la suma de los extremos *menos* el otro término medio, y un extremo será igual á la suma de los medios *menos* el otro extremo. Esto nos servirá para despejar un término cualquiera desconocido en una proporcion discreta. Así, si tenemos; $3 . 5 : 7 . x$, resultará: $x=5+7-3=12-3=9$. Si tenemos: $4 . x : 6 . 10$, resultará: $:=10+4-6=14-6=8$.

4.° Un extremo de la proporcion contínua será tambien igual á la suma de los medios *menos* el otro extremo, y un medio será igual á la mitad de la suma de los extremos. Así si tenemos: $3 . 5 : 5 . x$, resultará: $x=5+5-3=10-3=7$. Si tenemos, $4 . x : x . 8$ saldrá: $x=\frac{4+8}{2}={}^{12}/_{2}=6$.

Proporciones geométricas.

163. Para señalar una proporcion geométrica se colocan dos razones geométricas iguales la una al lado de la otra, pero separadas entre sí por medio de cuatro puntos en esta forma ($::$). Tal seria la siguiente: $a : b :: c : d$, y se leería diciendo: *a es* á *b*, *como c es* á *d*. De la misma manera se leen todas las demás. — Cuando la proporcion es contínua, se acostumbra escribir abreviadamente poniendo antes este signo ($\div\div$), y suprimiendo el tercer término, y el signo *como*. Así, tendríamos escrita la siguiente: $\div\div a : b : c$, y leeríamos: *a es* á *b*, *es* á c. Del mismo modo se leerían todas las demás.

164. Para escribir facilmente una proporcion geométrica discreta puede servir la siguiente regla: póngase una razon cualquiera y luego los cuatro puntos; despues multiplíquense ó pártanse por una misma cantidad los dos términos de la razon dada, y se obtendrá una razon segunda igual á la primera, cuyos términos guardarán proporcion. Así, teniendo una razon entre los términos 8 y 6, multiplicaré por ejemplo por 2, cada uno de los dos términos, y obtendré la segunda razon. Así, será: $8 : 6 :: 8 \times 2 : 6 \times 2 = 8 : 6 :: 16 : 12$. — Si teniendo los mismos términos 8 y 6, los divido por 2, resultará, $8 : 6 :: {}^{8}/_{2} : {}^{6}/_{2} = 8 : 6 :: 4 : 3$.

165. Para escribir facilmente una proporcion geométrica contínua podrá seguirse esta regla; póngase por primer término un número cualquiera, por 2.° y 3.° un mismo múltiplo ó submúltiplo del 1.° y por 4.° el mismo múltiplo ó submúltiplo del 3.° que se haya tomado del 1.°. Si tenemos 4 por primer término, y multiplico el 4 por 2, por ejemplo, tendré los términos 2.° y 3.°, y si despues multiplico el 8 por 2, obtendré 16 que será el 4.° término. Así resultará: $4 : 4 \times 2 :: 4 \times 2 : 4 \times 2 \times 2 = 4 : 8 :: 8 : 16$. Si en lugar de haber multiplicado por 2 partiéramos por el mismo 2, resultaría la siguiente: $4 : 2 :: 2 : 1$.

166. La propiedad fundamental de las proporciones geométricas es la siguiente; el producto de extremos es igual al producto de medios en toda proporcion discreta, é igual al cuadrado del término medio en la contínua.

Para su demostracion supongamos la proporcion general $a : b :: c : d$. Como sabemos (n.^{os} 153 y 157) que toda razon geométrica puede ponerse bajo la forma de quebrado, y que el signo *como* puede traducirse por el signo $=$, tendremos; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Quitando ahora los denominadores, resultará: $ad=cb$. (A) Luego el producto de extremos a y d es igual al producto de medios b y c. — Sea ahora la proporcion contínua, $a : b :: b : c$. Practicando lo mismo que en el caso anterior, resulta: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, de donde sale: $ac=b^2$. (B), Luego el producto de extremos es igual al cuadrado del término medio.

167. Si en la ecuacion (A) despejamos sucesivamente cada una de las cuatro cantidades, obtendrémos las siguientes igualdades: $a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$; $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$. Lo que nos dice que en toda proporcion geométrica discreta, un extremo es igual al producto de medios dividido por el otro extremo, y un medio igual al producto de extremos dividido por el otro medio. Así, de la proporcion $3 : 4 :: 6 : x$, resulta; $x=\frac{4\times6}{3}={}^{24}/_{3}=8$. De la otra

$4 : 7 :: x : 14$, resulta; $x=\frac{4\times14}{7}={}^{56}/_{7}=9$.

Si en la ecuacion (B) despejamos sucesivamente cada una de las cantidades, obtendrémos estas ecuaciones; $a=\frac{b^2}{c}$; $c=\frac{b^2}{a}$; $b^2=ac$; $b=\sqrt{ac}$. Esto nos dice que un extremo de una proporcion contínua es igual al cuadrado del término medio dividido por el otro extremo, y un término medio es igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos. Así, de la proporcion, $x : 4 :: 4 : 8$, saldrá $x = \frac{4^2}{8} = {}^{16}/_8 = 2$. De la otra $3 : x :: x\ 27$, saldrá; $x = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$.

Propiedades de las proporciones.

168. 1.ª Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos con ellas se podrá formar proporcion, poniendo por extremos las dos de un producto, y por medios las otras dos. Si tenemos, $ad = bc$, segun lo dicho (n.º 86) resultárá: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, de donde se saca (n.º 153 y 157) $a : b :: c\, d$,

2.ª Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, se podrán formar con ellas ocho proporciones diferentes, haciendo que las dos de cada producto sirvan dos veces de medios, y dos veces de extremos. Así, de la igualdad $a\,d = b\,c$ (A) salen las ocho siguientes:

$a : b :: c : d$	$b : a :: d : c$
$a : c :: b : d$	$b : d :: a : c$
$d : b :: c : a$	$c : a :: d : b$
$d : c :: b : a$	$c : d :: a : b$

Fúndase esto en que en todas ellas se guarda la propiepad fundamental (n.º 166), pues que en todas ellas resulta, $a\,d = b\,c$ (A).

3.ª Si los antecedentes de una proporcion son iguales, tambien lo serán los consecuentes; y si los consecuentes son iguales tambien lo serán los antecedentes. Si tenemos la proporcion $a : b : a : c$, resultará $b = c$. Porque aplicando la propiedad fundamental, se saca, $ac = ab$. Despejando ahora la c ó la b, resulta; $c=\frac{ab}{a}=b$. Si tenemos $a:b::c:b$, resultará $a=c$. Haciendo como en la anterior, se obtiene; $ab=cb$. Despejando ahora la a ó la c, se saca; $a=\frac{cb}{b}=c$.

4.ª Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos podremos formar proporcion. Sean las proporciones, $a:b::c:d$, y $a:b::m:n$; de estas dos saldrá; $c:d::m:n$. Porque puestas cada una bajo la forma de igualdad, tendremos: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ Pero como dos ó mas cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resulta: $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, de donde se saca; $c:d::m:n$. Si tuviéramos, $a:b::c:d$, y $m:n::a:b$, puestas en forma de igualdad resultaría: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y $\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$. Si ahora en esta segunda igualdad ponemos el primer miembro por segundo, y el segundo por primero, resulta; $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$, y como antes ya teniamos, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, resulta finalmente, $c:d::m:n$. Lo que nos demuestra la propiedad con toda la generalidad posible.

5.ª Si los extremos de dos proporciones son iguales, con los medios se podrá formar proporcion, con tal que los medios de la una sean extremos, y los medios de la otra sean medios de la nueva. Así, de las dos proporciones $a:b::c:d$, y $a:m::n:d$, saldrá; $b:m::n:c$. Si aplicamos á cada una de las dos primeras la propiedad fundamental, saldrá; $ad=bc$, y $ad=mn$. Luego tendrémos (n.º 168); $b:m::n:c$. Un raciocinio semejante habria cuando los medios fueran iguales.

6.ª Si cuatro cantidades guardan proporcion, tambien la guardarán sus potencias y sus raices. Si tenemos $a:b::c:d$, resultará tambien, $a^p : b^p :: c^p : d^p$. Porque la proporcion $a : b :: c : d$ puede ponerse bajo esta forma: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (O) Elevando ambos miembros á la potencia p, resulta; $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{c}{d}\right)^p$, ó sea: $\frac{a^p}{b^p}=\frac{c^p}{d^p}$, y finalmente $a^p : b^p :: c^p : d^p$. Si ahora de la igualdad (O) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ estraemos la raiz r resultará: $\sqrt[r]{\frac{a}{b}}=\sqrt[r]{\frac{c}{d}}$, ó bien, $\frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \frac{\sqrt[r]{c}}{\sqrt[r]{d}}$, y finalmente $\sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} :: \sqrt[r]{c} : \sqrt[r]{d}$

169. Cuando dos ó mas proporciones se multiplican ordenadamente, se obtiene una proporcion compuesta, denominándose proporciones componentes las que entran á formar la compuesta.

Si tenemos las dos proporciones de (A), saldrá la compuesta que se ve en (C), multiplicando el antecedente a por el antecedente m, etc.

(A)	(C)
$a : b :: c : d$	$a \times m : b \times n :: c \times x : d \times z$
$m : n :: x : z$	$a\,m : b\,n :: c\,x : d\,z$

No hay dificultad alguna en formar la proporcion compuesta, dadas varias componentes; porque aplicando la propiedad fundamental á las proporciones de (A), resultarán las dos ecuaciones siguientes que se ven en (D), y multiplicando ahora ordenadamente las dos ecuaciones, resulta la compuesta que se ve en (E), ó bien, $am \times dz = bn \times cx$, de la que (n.º 168 1.ª) sale la proporcion siguiente:

(D)

$$ad = bc$$
$$mz = nx$$

(E)

$$ad \times mz = bc \times nx$$

$$am : bn :: cx : dz.$$

Como la proporcion se compone de dos razones iguales, y por lo visto (n.º 155) cada razon puede simplificarse, si es susceptible de ello; síguese que, cada proporcion podrá simplificarse mientras un extremo y un medio puedan dividirse por un mismo número, en razon de que toda proporcion puede alternarse. Por lo que, antes de formar una proporcion compuesta, convendrá simplificar todo lo posible las componentes, viendo si pueden dividirse por un mismo número un extremo y un medio de una misma proporcion, ó un extremo de la una y un medio de la otra; pues que esto es equivalente á simplificar despues la compuesta.

Si observamos las tres proporciones que se ven en (F), tendrémos que el extremo 3 de la primera y el medio 6 pueden dividirse por 3; que el extremo 12 y el medio 24 de la segunda pueden tambien dividirse por 6; que pueden dividirse por sí mismos ó pueden suprimirse inmediatamente el extremo x de la primera y el medio x de la segunda, el extremo z de la segunda y el medio z de la tercera. Por lo que, practicando estas operaciones, saldrán las nuevas componentes que se ven en (G). Formando ahora con estas la compuesta, saldrá la de (H); por lo que en último resultado tenemos la compuesta $2:20::8:v$, que es mucho mas sencilla que la que se hubiera obtenido sin simplificar las componentes.

(F)	(G)
$3:4::6:x$	$1:4::2:1$
$12:x::24:z$	$2:1::4:1$
$1:5::z:v$	$1:5::1:v$

(H)

$$1\times2\times1:4\times1\times5::2\times4\times1:1\times1\times v$$

$$2:20::8:v.$$

Hemos dicho que la simplificacion de las componentes del modo esplicado equivalia á simplificar despues la compuesta. Si la formamos con las mismas componentes de (F) obtendrémos las siguientes que se ven en (M). Si ahora en la última de (M) dividimos por x los términos 2.º y 4.º; por z los términos 3.º y 4.º, y sucesivamente por 2, por 3, y por 3 los términos 1.º y 3.º obtendremos finalmente la proporcion (N) igual con la de (H)

(M)

$$3\times12\times1:4\times x\times5::6\times24\times z:x\times z\times v$$

$$36:20x::144z:xzv$$

(N)

$$2:20\times8:v$$

Transformacion de las proporciones sin que deje de subsistir proporcion.

170. Las proporciones se pueden *alternar*, *invertir*, *componer*, *dividir*, *permutar*, y *convertir*.

1.° *Alternar* es comparar antecedente con antecedente, y consecuente con consecuente en cada una de las razones. Así, la proporcion $a : b : c : d$, quedaria alternada diciendo: $a : c :: b : d$.

2.° *Invertir* es comparar consecuente con antecedente en cada una de las razones. Así la proporcion $a : b :: c : d$ quedaria invertida deciendo; $b : a :: d : c$. No hay ninguna dificultad en las dos transformaciones anteriores, porque á cada una de ellas se puede aplicar la propiedad fundamental, pues que en cada una de ellas se verifica; $ad = bc$. De estas dos transformaciones y de lo dicho (n.° 168 4.ª) se deduce que, *si dos proporciones tienen unos mismos antecedentes se podrá formar proporcion con los consecuentes; y si tienen iguales los consecuentes se formará proporcion con los antecedentes.* Si tenemos $a : b :: c : d$, y $a : m :: c : n$, podremos formar esta proporcion: $b : d :: m : n$. Si alternamos las dos, resultará; $a : c :: b : d$, y $a : c :: m : n$, de donde (n.° 168 4.ª) sale; $b : d :: m : n$. Si teníamos $a : b :: c : d$, y $x : b :: z : d$, resultaría por la misma razon; $a : c :: x : z$.

3.° *Componer* es comparar la suma de antecedente y consecuente con el antedente ó consecuente en cada una de las razones. Así, de la proporcion $a : b :: c : d$ pueden salir estas dos; $a + b : b :: c + d : d$, y $a + b : a :: c + d : c$. Para su demostracion pongamos en forma de igualdad la proporcion $a : b :: c : d$, y resultará; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Si ahora añadimos la unidad á ambos miembros, no se alterará la igualdad, y tendremos; $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. Reduciendo ahora el entero 1 á la especie del quebrado que le acompaña, resulta; $\frac{a + 1 \times b}{b} = \frac{c + 1 \times d}{d}$, ó bien; $\frac{a+b}{b} =$

$\frac{c+d}{d}$, y poniendo esta igualdad en forma de proporcion, se saca: $a+b : b :: c+d : d$ (A).

Invirtiendo ahora la misma proporcion $a : b :: c : d$, resulta $b : a :: d : c$, de la cual puede sacarse: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Añadiendo 1 á ambos miembros, tendremos; $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$. Reduciendo el entero á la especie de su quebrado, resulta; $\frac{b+1\times a}{a}=\frac{d+1\times c}{c}$, ó bien: $\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$. Poniendo esta igualdad en forma de proporcion, sale; $b+a : a :: d+c : c$, y como el órden de los sumandos no altera la suma resulta finalmente $a+b : a :: c+d : c$ (B).

4.° De las transformaciones de alternar y componer se infiere que, *en toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su propio consecuente.* Así, de esta proporcion $a : b :: c : d$, salen estas dos $a+c : b+d :: a : b$, y $a+c : b+d :: c : d$. Porque alternando la proporcion $a : b :: c : d$, sale: $a : c :: b : d$, y componiendo á esta, da; $a+c : c :: b+d : d$, ó bien, $a+c : a :: b+d : b$, las cuales alternadas dan; $a+c : b+d :: c : d$ (C), y $a+c : b+d :: a : b$. (D).

5.° *Dividir* es comparar la diferencia de antecedente y consecuente con el antecedente ó consecuente en cada una de las razones. Así, dividiendo la proporcion $a : b :: c : d$, dará; $a-b : b :: c-d : d$, ó bien, $a-b : a :: c-d : c$.

Para su demostracion pongamos en forma de igualdad la misma proporcion $a : b :: c : d$, y tendremos; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si quitamos de ambos miembros la unidad, no se alterará, y resultará: $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$. Reduciendo ahora el entero á la especie del quebrado que le acompaña, tendrémos; $\frac{a-1\times b}{b}=\frac{c-1\times d}{d}$, ó bien, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, que puesta en forma de proporcion, da; $a-b:b::c-d:d$. (E)

Invirtiendo ahora la misma proporcion $a:b::c:d$, dará; $b:a::d:c$, que puesta en forma de igualdad, resulta; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Quitando ahora de 1 ambos miembros, tendrémos; $1-\frac{b}{a}=1-\frac{d}{c}$. Reduciendo el entero á la especie del quebrado, sale; $\frac{1\times a-b}{a}=\frac{1\times c-d}{c}$, ó bien, $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$, que puesta en forma de proporcion, da finalmente; $a-b:a::c-d:c$. (F).

6.° De las transformaciones de alternar y dividir se infiere que, *en toda proporcion geométrica se verifica que la diferencia de antecedentes es á la diferencia de consecuentes, como un antecedente es á su propio consecuente.* Así, de esta proporcion $a:b::c:d$ salen estas dos, $a-c:b-d::c:d$, y $a-c:b-d::a:b$. Porque alternando la proporcion $a:b::c:d$, sale: $a:c::b:d$, y dividiendo á esta, da; $a-c:c::b-d:d$ ó bien, $a-c:a::b-d:b$, las cuales alternadas dan $a-c:b-d::c:d$ (G), y $a-c:b-d::a:b$. (H).

7.° De lo dicho hasta aqui se infiere tambien que, *en toda proporcion geométrica la suma de antecedentes es á la suma de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes.* Porque observando que las proporciones (C) y (G) tienen una razon comun podremos formar proporcion con las otras dos, y darán: $a+c:b+d::a-c:b-d$ (H).

8.ª De esta última consecuencia se desprende finalmente que, *en toda proporcion geométrica la suma de antece-*

dentes es á su diferencia como la suma de consecuentes á su diferencia. Porque alternando la proporcion anterior, tendrémos: $a+c : a-c :: b+d : b-d$. (N).

9.° *Permutar* es cambiar de lugar las razones, esto es poner la segunda por primera, y la primera por segunda. Así, la proporcion $a : b :: c : d$ permutada, dará; $c : d :: a : b$. No hay dificultad en esto porque de todos modos se verifica la propiedad fundamental $ad = bc$.

10°. *Convertir* es invertir una proporcion compuesta ó dividida: cuando se invierte una compuesta se llama *convertir componiendo*, y cuando se invierte una dividida, se llama, *convertir dividiendo*. Así, invirtiendo la (A) y la (B), tendremos $b : a+b :: d : c+d$ (O) y $a : a+b :: c : c+d$ (P), y se habrá convertido componiendo. Invirtiendo ahora las (E) y (F), tendremos $b : a-b :: d : c-d$ (R), y $a : a-b :: c : c-d$ (S), y hemos convertido dividiendo.

Series de razones iguales.

171. Llámase serie de razones iguales un conjunto de razones cuyo esponente tiene el mismo valor en todas ellas. Tal sería esta; 2 : 3 :: 4 : 6 :: 6 : 9 :: 8 : 12 :: 10 : 15 :: 12 : 18 :: 14 : 21 :: etc : *etc.*

Suelen escribirse abreviadamente poniendo primero todos los antecedentes separados unos de otros por medio de dos puntos; luego los cuato puntos; y despues todos los consecuentes separados entre sí como los antecedentes. Así la serie anterior se escribiría 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12 : 14 etc. :: 3 : 6 : 9 : 12 : 15 : 18 : 21 : etc.

De la definicion dada se deduce que, una proporcion es una serie de dos razones iguales, y que por consiguiente una serie se formará multiplicando ó dividiendo sucesivamente una razon por una misma cantidad.

172. En toda serie de razones iguales se verifican las propiedades siguientes:

1.ª La suma de todos los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

Sea para su demostracion la serie general $a : b :: c : d ::$ $m : n ::$ etc. : etc. Si de esta serie tomamos las dos primeras razones $a : b :: c : d$, nos dará (170. 4.º), $a + c : b + d :: c : d$· Si ahora en lugar de la razon $c : d$, ponemos su igual $m : n$ de la serie, se nos convertirá en $a + c : b + d :: m : n$, la cual nos da finalmente (170. 4.º) $a + c + m : b + d + n :: m : n$. (A).

Si hubiese mas razones en la serie, empleariamos el mismo raciocinio, hasta que estuviesen todas agotadas.

2.ª *La diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.* Suponiendo la misma serie $a : b :: c : d :: m : n ::$ etc. : etc., y tomando de ella las dos primeras razones, tendremos $a : b :: c : d$, la que (170. 6.º) nos da; $a - c : b - d :: c : d$. Si ahora en esta proporcion en lugar de la razon $c : d$, ponemos su igual $m : n$ de la serie, se nos convertirá en $a - c : b - d :: m : n$, que por lo mismo nos dará $a - c - m : b - d - n :: m : n$. (B).

3.ª *La suma de antecedentes es á la de consecuentes, como la diferencia de antecedentes es á la de consecnentes.* Como vemos que las dos proporciones anteriores (A) y (B) tienen una razon comun, con las otras dos podremos formar proporcion y saldrá; $a + c + m : b + d + n :: a - c - m : b - d - n$ (D)

4.ª *La suma de antecedentes es á su diferencia, como la suma de consecuentes es á la suya.* Alternando la proporcion anterior (D), tendrémos; $a + c + m : a - c - m :: b + d + n : b - d - n$. (E).

5.ª *La relacion que tenga un antecedente con la suma de los otros, esta misma tendrá el consecuente correspondiente con la suma de los demás.* Si tenemos la serie $a : b :: c : d :: m : n :: x : z ::$ etc. : etc. y empezamos por la segunda razon, se verificará (1.ª) que, $c + m + x +$ etc. $d + n + z +$ etc. $:: c : d$. Si ahora en vez de esta razon $c : d$, ponemos su igual $a : b$, de la serie, se nos convertirá en $c + m + x +$ etc. $: d + n + z +$ etc. $:: a : b$. Permutándola, dará: $a : b :: c+m+x+\text{etc.} : d+n+z+\text{etc.}$ y alternándola, resultará $a : c+m+x+\text{etc.} :: b : d+n+z+\text{etc.}$ (F).

De esta última propiedad se deduce que, si el primer antecedente es igual con la suma de los demás antecedentes, el primer consecuente deberá ser tambien igual con la suma de los demás consecuentes. Porque, si en la última proporcion suponemos $a=c+m+x+\text{etc.}$, la primera razon será de igualdad, y como la segunda debe ser igual con la primera, en tal caso debería ser $b=d+n+z+\text{etc.}$

Regla de tres.

173. La regla de tres es aquella por la que dados tres términos conocidos de una proporcion geométrica se trata de determinar el cuarto desconocido. En toda regla de tres entran cuatro cantidades; dos de una misma especie y ambas conocidas, llamadas datos ó cantidades principales, y otras dos de una misma especie tambien pero diversa de la primera, conocida una cantidad y desconocida la otra, que se llaman resultados ó cantidades relativas.

Las reglas de tres se dividen primeramente en simples y compuestas; las primeras son aquellas, cuya solucion depende de un solo dato, y las segundas, las que dependen de varios datos.

En segundo lugar se dividen en directas é inversas; las directas son aquellas, cuyas cantidades van de mas á mas, ó de menos á menos; y las inversas son aquellas, cuyas cantidades van de mas á menos, ó de menos á mas. Como sin embargo debe resolverse cualquiera regla de tres por medio de una simple proporcion, y la naturaleza de esta es tal, que si el antecedente de la primera razon es mayor que su propio consecuente, tambien lo ha de ser el antecedente de la segunda, y al revés; se deduce facilmente, que es enteramente inutil esta division; puesto que, una y otra pueden resolverse por una misma regla.

Para esto observarémos, que en cualquiera cuestion que se nos ofrezca, ó bien se nos pide mas de lo que se nos ha dado, ó bien se nos pide menos; en ambos casos harémos de manera, que las dos cantidades conocidas de una misma especie formen los dos primeros términos de la proporcion, y la otra cantidad tambien conocida de diversa especie el tercer término de la misma, siendo el cuarto el término desconocido, del modo siguiente:

Cuando se nos pida mas de lo que se nos ha dado, el antecedente de la primera razon será menor que su consecuente, y cuando se nos pida menos, el antecedente será mayor que su propio consecuente.

EJEMPLO 1.º

Regla simple directa.

¿Si 3 hombres en cierto tiempo han abierto 12 varas de camino, 6 hombes en el mismo tiempo cuántas varas abrirán? mas varas. Dispondrémos pues el cálculo como sigue:

$$3 \text{ hs.} : 6 \text{ hs.} :: 12 \text{ vs.} : x \text{ vs.} = \frac{6 \times 12}{3} = \frac{72}{3} = 24 \text{ varas.}$$

EJEMPLO. 2.º

Regla simple inversa.

¿Si 4 hombres por cierta obra han necesitado 6 dias, 8 hombres por la misma obra cuántos dias necesitarán? menos dias. Será pues: $8 \text{ hs.} : 4 \text{ hs.} :: 6 \text{ ds.} : x \text{ ds.} = \frac{4 \times 6}{8}$ $= \frac{24}{8} = 3$ dias.

Regla compuesta.

174. Para el planteo de las reglas de tres compuestas formarémos tantas proporciones cuantos sean los datos,

averiguando en la primera proporcion aquello mismo que se nos pide señalándolo con una letra ó incógnita cualquiera, en cuya proporcion tomarémos dos datos cualesquiera. Para la segunda proporcion tomarémos otros dos datos, haciendo que el tercer término sea la letra ya antes puesta, y así sucesivamente hasta que no haya mas datos, guardando siempre las reglas establecidas para las reglas de tres simples, y formando despues una proporcion compuesta de todas las obtenidas. Así, si tenemos que averiguar los cahices de trigo que podrian traer 36 carros en 6 dias, sabiendo que 12 carros en 4 dias han traido 72 cahices; observarémos ante todo, que ha de haber dos proporciones, porque dos son los datos, á saber, los carros y los dias; plantearémos pues las dos proporciones del modo siguiente:

$$(A)\left\{\begin{array}{l} 12 \text{ carros} : 36 \text{ carros} :: 72 \text{ cahices} : x \text{ cahices} \\ 4 \text{ dias} : 6 \text{ dias} :: x : z \end{array}\right.$$

Tachando las x de la primera y segunda proporcion, y multiplicando ordenadamente saldrá (B)

$$(B)\ 12 \times 4 : 36 \times 6 :: 72 : z, \text{ y finalmente } (D),$$

$$D)\ 48 : 216 :: 72 : z = \frac{216 \times 72}{48} = \frac{15552}{48} = 155{,}5{,}2, \ /48$$

de donde sale, $z = 324$ cahices.

155,5,2	48
011 5	324
01 9 2	
0 0 0	

EJEMPLO 2.°

¿Si 3 hombres en 2 años 4 meses han fabricado 500 fusiles, 6 hombres en 8 años 2 meses en igualdad de las demás circunstancias cuántos fusiles fabricarán?

Res. (A) 3 hs. : 6 hs. :: 500 fs. : x
(B) 2 as. : 8 as. :: x : z
(C) 4 ms. : 2 ms. :: z : u

Suprimiendo de las proporciones las x y las z y multiplicando ordenadamente saldrá (D)

(D) $3 \times 2 \times 4 : 6 \times 8 \times 2 :: 500 : u$, y finalmente (E).

(E) $24 : 96 :: 500 : u = \frac{96 \times 500}{24} = \frac{48000}{24} =$

$$\begin{array}{ll} 4\,8,0,0,0 & /2\,4 \\ 0\;0\;0\;0\;0 & \overline{2\,0\,0\,0} \end{array}$$; de donde sale; $u = 2000$ fusiles.

Regla de interés simple.

175. Llámase regla de interés simple la que tiene por objeto calcular el beneficio que produce en cierto tiempo un capital prestado á tanto por ciento anual convenido, llamado simplemente interés, retirando al fin de cada año la suma ganada por el capital. De la definicion que acabamos de dar, se deduce que, en esta clase de interés el capital permanece siempre el mismo, y el interés es siempre el mismo cada año; de modo que si teniamos un capital C á r por ciento anual, tendríamos, que en el primer año el interés seria r; en el 2.° seria r dos veces repetido, ó bien $r \times 2$; en el 3.° seria r repetido tres veces, ó bien $r \times 3$; y finalmente, despues de a años, el interés seria r repetido a veces, ó bien $r \times a$. Veamos pues cuánto producirá un capital C á interés simple por a años y al tanto por ciento r anual. Ya se vé que no es otra cuestion, que un caso particular de la regla de tres; así como la regla de descuento, regla conjunta, de aligacion, de tanto por ciento, de corretaje, de comision, etc. Así pues, la cuestion dicha vendrá expresada en estos términos. ¿Si 100 ganan r repetido a veces, ó bien $r \times a$, el capital C cuánto ganará? tendrémos pues el siguiente planteo:

$100 : r \times a :: C : \text{p.} = \frac{C \times r \times a}{100} = \frac{C\,r\,a}{100}$. Por tanto, tenemos; $p = \frac{C\,r\,a}{100}$.

176. Aplicando las reglas sentadas en el tratado de las ecuaciones, podrémos sacar de esta última formula los valores siguientes:

$$C=\frac{100\,p}{r\,a}\,;\qquad r=\frac{100\,p}{C\,a};\qquad a=\frac{100\,p}{C\,r}.$$

177. Tratémos de determinar cuánto producirá un capital de 2000 duros prestados por 3 años á 4 por ciento anual, y tendrémos planteado y resuelto el problema del modo siguiente:

$$100 : 4\times 3 :: 2000 : p=\frac{2000\times4\times3}{100}=\frac{2000\times12}{100}=$$

$$\frac{24000}{100}=\frac{240}{1}=240 \text{ duros.}$$

Segun las fórmulas deducidas de la cuestion general, resultaria;

$$C=\frac{100\times240}{4\times3}=\frac{24000}{12}=2000;$$

$$r=\frac{100\times240}{2000\times3}=\frac{24000}{6000}=4;$$

$$a=\frac{100\times240}{2000\times4}=\frac{24000}{8000}=\frac{24}{8}=3;$$

todo lo cual venia expresado en la cuestion.

Regla de interés compuesto.

178. Llámase regla de interés compuesto aquella en la que al fin de cada año se agrega al capital del año finido el beneficio hecho por este capital, para tener en la suma

un nuevo capital que gane el mismo interés del primitivo en el próximo año. De esta definicion se ve claro, que el interés es siempre el mismo tanto por ciento; pero el capital va variando de esta suerte; al fin del primer año el capital es igual al capital primitivo mas el interés ganado por él, al fin del 2.º es igual al capital del 1.º mas el interés ganado por este, etc. Si teniamos pues un papital C prestado á interés compuesto, al fin del primer año habria subido al mismo capital $C+$ su producido p, y así tendriamos $S'=C+p$; al fin del 2.º seria $S''=S'+p'=(C+p)+p'$; al fin del 3.º seria $S'''=S''+p''=S'+p'+p''=(C+p)+p'+p''$, etc. Podriamos pues decir: ¿si 100 unidades al fin del primer año suben á las mismas 100 unidades mas el interés r, el capital C á cuánto subirá? á S'. Así pues, dispondrémos el cálculo como sigue; $100:100+r::C:S'=\dfrac{C\times(100+r)}{100}$;

para fin del 2.º tendrémos; $100:100+r::S':S''$ ó bien

$$100:100+r::\frac{C\times(100+r)}{100}:S''=\frac{\frac{C\times(100+r)}{100}\times(100\times r)}{100}$$

$$=\frac{C\times(100+r)\times(100+r)}{100}:\frac{100}{1}=\frac{C\times(100+r)\times(100+r)}{100\times100}$$

$=C\times\left(\dfrac{100+r}{100}\right)^2$; para fin del 3.º tendrémos;

$$100:100+r::S'':S''' \text{ ó bien,}$$

$$100:100+r::C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^2:S'''$$

$$=\frac{C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^2\times(100+r)}{100}$$

$$=C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^2\times(100+r):\frac{100}{1}$$

$$=C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^2\times\frac{(100+r)}{100}=\left(\frac{100+r}{100}\right)^3$$

Luego siguiendo la ley de analogía, si designamos por S el valor del capital primitivo C junto con sus intereses compuestos al fin de un número a de años tendrémos la fórmula siguiente:

$S=C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^a$; fórmula general que nos provendria de la proporcion siguiente;

$$100^a:(100+r)^a::C:S=\frac{C\times(100+r)^a}{100^a}$$

$$=C\times\left(\frac{100+r}{100}\right)^a.$$

Tratemos de buscar por esta regla á cuánto subirá al cabo de 2 años un capital de 300 duros al interés compuesto de un 3 p $\%$ annual. Será;

$$100^2:(100+3)^2::300:S=300\times\frac{(100+3)^2}{100^2}=$$

$$300\times\left(\frac{103}{100}\right)^2=300\times(1'03)^2=300\times1'0609=$$

318'2700; luego tendrémos: $S=318'27$ duros.

Tratemos de buscar por 2.° ejemplo á cuánto subirá al cabo de 3 años un capital de 2000 duros al interés compuesto del 4 p $\%$ annual. Será;

$$100^3:(100+4)^3::2000:S=\frac{2000\times(100+4)^3}{100^3}=$$

$$2000\left(\frac{100+4}{100}\right)^3=2000\times\left(\frac{104}{100}\right)^3=2000\times$$

$$(1'04)^3=2000\times 1'124864=2249'728000 \text{ duros.}$$

Descuento simple.

179. Llámase regla de descuento simple aquella, que tiene por principal objeto calcular la rebaja que debe hacerse de una cantidad que se quiere pagar antes del plazo señalado para su cobro, rebajando los intereses simples de la cantidad que se ha de descontar; haciéndose comunmente la rebaja á un tanto p $\frac{o}{o}$ llamado simplemente descuento.

180. Hay dos especies de descuento, á saber, el líquido ó real, y el abusivo ó incluso; el 1.° es aquel, en que se hace la rebaja de la cantidad cobradera á proporcion de que se toma el descuento de cada 100 unidades + los intereses que hubieran producido, bajando así á las mismas 100 unidades valor realmente primitivo. El 2.° es aquel, en que se hace la rebaja de la cantidad cobradera á proporcion de que se toma el de cada 100 unidades no mas, bajando así á las mismas 100 unidades — los intereses que hubieran producido valor supuesto primitivo. Sea por ejemplo que yo haya prestado 100 duros á 6 p $\frac{o}{o}$, y me los quieran devolver haciendo un 6 p $\frac{o}{o}$ de rebaja al año; está claro que al fin del año yo debería cobrar los mismos 100 duros + 6 que me hubieran producido; peró si se me devuelven luego de haberlos prestado, el interés ganado por ellos será nulo, y así 100 duros + 6 habrán de rebajar á los mismos 100 duros valor primitivo. De este modo seria el descuento real. Siendo por el descuendo abusivo, sino se me hubieran devuelto inmediatamente, despues de un año deberia haber cobrado de la misma manera los 100 duros + 6 interes producido; peró de cada 100 duros se descontarian 6, así cada 100 duros bajarian á 100 duros — 6

valor supuesto primitivo, lo que de ningun modo es exacto, pues que no es 94 el que produce 6 sino 100.

181. Sea pues un capital C cobradero al cabo de a años siendo r el descuento simple anual líquido, veamos á cuánto rebajará.

Segun vimos en el interés simple, si en un año el descuento vale r p $\%$, en a años valdrá $r \times a$, y así podrémos decir: ¿si $100 + r \times a$ en el capital cobradero bajan á 100 valor primitivo, el capital C á cuánto bajará?, ó bien; $100 + r \times a : 100 :: C : B = \dfrac{C \times 100}{100 + r \times a}$

182. Por el descuento abusivo diriamos: ¿si 100 en el capital cobradero bajan á $100 - r \times a$ capital primitivo, el capital C á cuánto bajará? ó bien $100 : 100 - r \times a :: C : B = \dfrac{C \times (100 - r \times a)}{100}$.

¿A cuánto bajará segun esta regla un capital de 2000 duros cobraderos al cabo de 3 años, siendo 4 p $\%$ el descuento simple anual líquido? tendrémos: $100 + 4 \times 3 : 100 :: 2000 : x = \dfrac{100 \times 2000}{100 + 4 \times 3} = \dfrac{200000}{100 + 12} = \dfrac{200000}{112} = 1785 \dfrac{80}{112}$

Resolviendo la misma cuestion por el descuento abusivo, será; $100 : 100 - 4 \times 3 :: 2000 : x = \dfrac{2000 \times (100 - 4 \times 3)}{100}$

$$= \frac{2000 \times (100 - 12)}{100} = \frac{2000 \times 88}{100} = \frac{176000}{100} = \frac{1760}{1}$$

$= 1760$ duros.

Descuento compuesto.

183. Llámanse compuestas las reglas de descuento, cuando tratan de rebajar de una cantidad dada, los intere-

ses compuestos que ha producido otra cantidad desconocida negociada á interés de cierta especie.

Para fijar el método que debemos seguir en las reglas de descuento compuesto, reproducirémos la fórmula general de interés compuesto, á saber; $S = C \times \left(\frac{100+r}{100}\right)^a$. Si ahora despejamos la C tendrémos el capital primitivo despues de haber deducido el descuento, y será $C = \frac{S}{\left(\frac{100+r}{100}\right)^a} = \frac{S}{1} : \frac{(100+r)^a}{100^a} = \frac{S \times 100^a}{(100+r)^a}$, de donde tenemos, $C = \frac{S \times 100^a}{(100+r)^a}$: si en esta ecuacion quitamos los divisores resultará: $C \times (100+r)^a = S \times 100^a$ luego podrémos formar la proporcion siguiente;

$$(100+r)^a : 100^a :: S : C = \frac{S \times 100^a}{(100+r)^a}.$$

¿A cuanto bajará por esta regla una suma de 318'2700 duros que se quiere pagar 2 años antes del plazo descontando los intereses compuestos ganados por el capital primitivo, y haciéndose el descuento á un 3 p $\%$? Será. $(100+3)^2 : 100^2 :: 318'2700 : C = \frac{318'2700 \times 100^2}{(103)^2} = \frac{3182700}{10609} = 300$ duros.

Determinemos por 2.º ejemplo qué valor tendrá un capital de 2249'728000 duros, descontando los intereses compuestos ganados por el capital primitivo, haciendo la rebaja á un 4 p $\%$, y satisfaciéndose 3 años antes del plazo. Será;

$$(100+4)^3 : 100^3 : 2249'728000 : x = \frac{2249'728000 \times 100^3}{104^3}$$

$$= \frac{2249728000'000000}{1124864} = 2000 \text{ duros.}$$

Regla conjunta.

184. Llámase regla conjunta á la regla de tres, que tiene por principal objeto el reducir cantidades de una especie á otra con el auxilio de otras intermedias.

El uso principal que se hace de la regla conjunta es la reduccion de una partida expresada en monedas de un pais á moneda de otro pais, cuya reduccion se llama cambio.

Para deducir la regla general que resuelve esta clase de cuestiones, resolverémos el siguiente ploblema: ¿Cuántos x duros valen v varas de paño, ó bien cuántos x duros $=v$ varas de paño, sabiendo que v' varas de paño $=a$ arrobas de carbon; a' arrobas de carbon $=l$ libras catalanas; l' libras catalanas $=r$ reales de plata: r' reales de plata $=d$ duros?

185. Si lo observamos verémos que no se nos da otra cosa que una serie de razones, de las cuales cada una es de igualdad, y como sabemos que multiplicando ordenadamente una serie de razones, formamos una razon compuesta; se deduce, que si las componentes eran de igualdad, la compuesta tambien lo habrá de ser; por lo que; plantearémos la regla, formando una serie de razones del modo siguiente: en la 1.ª razon póngase por antecedente una incógnita que representará lo que se nos pida, y por consecuente póngase lo que se nos dé con relacion á ello, y bájense las otras razones de manera, que formando coluna unas con otras, el antecedente de cada razon sea de la misma especie que el consecuente de la anterior, debiendo ser el último término de la serie, de la misma especie que el antecedente de la 1.ª razon; fórmese entonces una razon compuesta, (que por lo dicho, será de igualdad), despéjese la incógnita, y tendrémos averiguado lo que se nos pedia.

Resolvamos segun esta regla la cuestion general pedida, disponiendo el cálculo como sigue:

x duros. . . . . : v varas paño
v' varas paño. . : a arrobas carbon
a' arr. carbon. . : l libras catalanas
l' lib. catalanas : r reales de plata
r' reales plata. . : d duros.

Formando la razon compuesta, tendrémos las siguientes:

$x \times v' \times a' \times l' \times r' : v \times a \times l \times r \times d$

$x v' a' l' r' : v a l r d.$

Poniendo la última razon en forma de igualdad, será:

$x v' a' l' r' = v a l r d.$

Despejando finalmente la incógnita, resultará:

$$x = \frac{v a l r d}{v' a' l' r'}$$

186. ¿Cuántos duros valen 10 arrobas de azucar en el supuesto de ser 1 arroba azucar = 2 libras azafran; 3 lib. azafran = 4 qq. cacáo; 6 qq. cacáo = 222 ₶ moneda catalana; 15 ₶ = 8 duros?

Res. x duros. . : 10 arr. azucar
1 @ azu. . : 2 lib. azafran
3 lib. azaf. : 4 qq. cacáo
6 qq. cacáo : 222 ₶
15 ₶ . . . : 8 duros.

$x \times 1 \times 3 \times 6 \times 15 : 10 \times 2 \times 4 \times 222 \times 8$

$x \times 270 : 142080$

$x \times 270 = 142080$

$$x = \frac{142080}{270}$$

$$x = 526 \frac{6}{27}$$

Regla de compañía.

187. Llámase regla de compañía la que enseña á determinar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios compañeros que han puesto sus caudales en un fondo, á proporcion de lo que puso cada uno. Divídese en *simple* y *compuesta* ó *con tiempo*. Llámase simple, cuando los caudales permanecen un mismo tiempo; y compuesta, cuando uno ó mas caudales no permanecen el mismo tiemdo. Sin embargo las compuestas se reducen á simples, multiplicando el caudal por el tiempo en que estuvo empleado; pues que, por ejemplo, lo mismo deben ganar 40 duros en 2 años, que $40 \times 2 = 80$ en un año. Para ver como debe resolverse una regla de compañía, resolvamos el siguiente problema.

Distribuir un número dado á en tres partes x, z, u, que tengan entre sí las mismas razones que los números tambien dados m, n, p; á saber, que la 1.ª x sea á la 2.ª z, como $m : n$; y la misma 1.ª x sea á la 3.ª u, como $m : p$.

Es claro que el conjunto de las tres partes han de componer la suma total a; por lo que tendremos; $x+z+u=a$.

Siendo la 1.ª parte x, tratemos de buscar la 2.ª z segun las condiciones del problema, y será; $m : n :: x :$ 2.ª parte z; y despejándola, dará; $z=\frac{nx}{m}$. Haciendo ahora lo mismo para encontrar la 3.ª parte u, resultará; $m:p::x:u$, y despejándola, tendremos; $u=\frac{px}{m}$. Por lo que tenemos ya cada una de las partes en valores de x, de modo que resulta;

1.ª $x=x$. 2.ª $z=\frac{nx}{m}$. 3.ª $u=\frac{px}{m}$.

Como ahora las tres partes sumadas nos han de dar a, resulta; $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$. Quitando ahora los divisores, resulta; $mx+nx+px=ma$. Poniendo ahora la x fuera de un paréntesis, tendrémos; $x\times(m+n+p)=ma$. de donde resulta, despejando la x; $x=\frac{ma}{m+n+p}$. (1.ª)

Sustituyendo ahora el valor de x en la 2.ª parte z, tendrémos; $z=\frac{nx}{m}=n\times\frac{ma}{m+n+p}:m=n\times\frac{ma}{m+n+p}:\frac{m}{1}$

$=\frac{nma}{m(m+n+p)}=\frac{na}{m+n+p}$. Por tanto resulta;

$z=\frac{na}{m+n+p}$. (2.ª)

Haciendo lo mismo con la 3.ª parte u, tendrémos;

$u=\frac{px}{m}=p\times\frac{ma}{m+n+p}:m=p\times\frac{ma}{m+n+p}:\frac{m}{1}=$

$\frac{pma}{m\times(m+n+p)}=\frac{pa}{m+n+p}$. Por lo tanto, resulta;

$u=\frac{pa}{m+n+p}$. (3.ª)

Si quitamos los divisores en las tres ecuaciones, será:

(1.ª) $(m+n+p)\times x=ma$; (2.ª) $(m+n+p)\times z=na$;

(3.ª) $(m+n+p)\times u=pa$.

Formando en cada ecuacion la proporcion correspondiente (n.° 168 1.ª), tendrémos las tres siguientes:

(1.ª) $m+n+p:a::m:x$; (2.ª) $m+n+p:a::n:z$;

(3.ª) $m+n+p:a::p:u$.

Estos resultados nos manifiestan que podemos hallar cada una de estas partes por medio de la siguiente proporcion; *suma de puestas, ó puesta total es á ganancia ó pérdida total, como puesta parcial de cada uno es á la ganancia ó pérdida parcial que le corresponde.*

Resolvamos algunos ejemplos:

1.º

¿Cuánto corresponde á cada uno de tres socios que juntos han ganado 600 duros; habiendo puesto 200 duros el 1.º, 300 el 2.º, y 400 el 3.º?

Aplicando la regla dada, y designando por x lo que corresponde al primero, por z lo del 2.º y por u lo del 3.º tendrémos para el primero;

$200+300+400 : 600 :: 200 : x$, ó bien, sumando. . .

$900 : 600 :: 200 : x = \frac{200\times600}{900} = \frac{120000}{900} = \frac{1200}{9} =$ $133\,^3/_9$. Para el segundo, será; $900 : 600 :: 300 : z = \frac{300\times600}{900} = \frac{180000}{900} = \frac{1800}{9} = 200$. Para el 3.º será:

$900 : 600 :: 400 : u = \frac{400\times600}{900} = \frac{240000}{900} = \frac{2400}{9} =$ $266\,^6/_9$.

Estas partes sumadas nos dan los 600 duros ganados, pues que, $133\,^3/_9 + 200 + 266\,^6/_9 = 600$ duros.

2.º

¿Cuánto toca á cada uno de tres compañeros que han ganado juntos 2000 duros; habiendo puesto el 1.º, 500 ds. el 2.º, 400 por 3 años y el 3.º, 800 por 2 años?

Como esta regla es compuesta, la resolveremos, reduciéndola á simple y tendrémos; Para el 1.º

500 duros $+ 400 \times 3 + 800 \times 2 : 500 :: 2000 : x$, ó bien

$500+1200+1600:2000::500:x$; y finalmente....

$$3300:2000::500:x=\frac{2000\times 500}{3300}=\frac{1000000}{3300}=$$

$$\frac{10000}{33}=\begin{array}{l}100{,}0{,}0\\001\;0\;0\\\;\;0\;0\;1\end{array}\;\frac{/\,3\;3}{3\;0\;3\;{}^{1}/_{33}}.$$ Para el 2.º será;

$$3300:2000::1200:z=\frac{1200\times 2000}{3300}=\frac{2400000}{3300}=$$

$$\frac{24000}{33}=\begin{array}{l}240{,}0{,}0\\009\;0\\\;\;2\;4\;0\\\;\;0\;0\;9\end{array}\;\frac{/\,33}{727\;{}^{9}/_{33}}.$$ Para el 3.º tendrémos;

$$3300:2000::1600:u=\frac{1600\times 2000}{3300}=\frac{3200000}{3300}=$$

$$\frac{32000}{33}=\begin{array}{l}3\;2\;0{,}0{,}0\\0\;2\;3\;0\\\;\;0\;3\;2\;0\\\;\;\;\;0\;2\;3\end{array}\;\frac{/\,3\;3}{9\;6\;9\;{}^{23}/_{33}}.$$

Smando las tres partes, encontrarémos los 2000 duros; porque tendrémos;

$$\begin{array}{rl}1.^{\circ} & = 3\;0\;3\;{}^{1}/_{33}\\ 2.^{\circ} & = 7\;2\;7\;{}^{9}/_{33}\\ 3.^{\circ} & = 9\;6\;9\;{}^{23}/_{33}\\ \hline \text{Suma. . . .} & 2\;0\;0\;0 \text{ duros.}\end{array}$$

Regla de aligacion.

188. La regla de *aligacion* es aquella por la que se da á conocer el precio medio en que ha de venderse una mezcla de varios géneros de precio diferente, conociendo el valor y la cantidad de cada uno de ellos; ó la cantidad relativa en que estos se han de mezclar para venderlos á un precio determinado.

Para deducir la regla que debe seguirse en el primer caso, supongamos que ha de determinarse el precio á que debe venderse la mezcla de tres géneros g, g', g'', cuyos precios respectivos son p, p', p''. Es claro que g al precio de p, será $g \times p = g\,p$; g' al precio de p' será $g' \times p' = g'p'$, y g'' al precio de p'' será, $g'' \times p'' = g''\,p''$. La suma de los tres géneros será $g + g' + g''$. Por consiguiente, si representamos por x el precio de la unidad de la mezcla, tendrémos la siguiente ecuacion;

$x \times (g + g' + g'') = g\,p + g'\,p' + g''\,p''$, la cual da $x =$

$$\frac{g\,p + g'p' + g''p''}{g + g' + g''}.$$

Esta fórmula nos dice; que para hallar el precio medio de una mezcla se multiplicará el número de unidades de cada género por su respectivo precio, y la suma de los productos que resulten se dividirá por la suma de las cantidades que se han de mezclar, y el cociente será el precio medio en que ha de venderse la mezcla.

Ejemplo.

Un tendero tiene arroz de 32, de 24, y de 25 r.s la @; quiere hacer una mezcla en que entren 10 @ del 1.°, 10 del 2.°, y 20 del 3.°, ¿á cuánto deberá venderlo para no ganar ni perder? Llamando x al precio de la mezcla tendrémos; $x = \frac{10\times32+10\times24+20\times25}{10+10+20} = \frac{1060 \text{ r.s}}{40 \text{ @}} =$

1 0,6 r.s	4 @
0 2 6	2 6 r.s 17 m.s
0 2 r.s	
×3 4 m.s	
6,8 m.s	
2 8	
0 0	

Deberá pues venderlo á 26 r.s 17 m.s la @.

189. Para deducir la regla que debe seguirse en el segundo caso, supongamos que se nos dén los precios de dos géneros, y se nos pide en qué razon se han de mezclar para que puedan venderse á un precio medio sin que se pierda ni gane. Llamando m á este precio medio, podremos representar el mayor por P y el menor por p. Llamando x á la porcion del de mayor valor, y z á la del menor, tendrémos el primero expresado por xP, y el segundo por zp, y como despues de hecha la mezcla debe resultar un valor total igual á la suma de los valores que tenian los géneros separadamente, se tendrá esta ecuacion $xP+zp=m\times(x+z)$, que ejecutando las operaciones indicadas se convierte en $xP+zp=mx+mz$, ó bien en la siguiente; $xP-mx=mz-zp$ que da; $x\times(P-m)=z\times(m-p)$. Formando ahora proporcion con estas cantidades, tendrémos; $x : z :: m-p : P-m$. Esta proporcion nos dice, que la cantidad de precio mayor es á la cantidad de precio menor, como la diferencia entre el precio menor y el medio es á la diferencia entre el medio y el mayor. Es decir, que en la mezcla habremos de poner del precio mayor la diferencia entre el inferior y el

medio, y del precio menor la diferencia entre el medio y el superior ó mayor.

Para sacar con mas comodidad la proporcion que determina la cantidad de los géneros, se pone el precio medio en una llave, y dentro de esta los precios de las cosas, poniendo en la parte superior los que sean mayores que el precio medio, y en la inferior los que sean menores.

Cuando los géneros mencionados no son mas que dos, se restará el menor del medio, y la diferencia se pone frente del mayor; luego se restará el medio del mayor, y la diferencia se pone frente del menor.

Ejemplo.

¿En qué proporcion deberá hacerse la mezcla de dos clases de aceite de 16 duros la una, y de 9 la otra, para venderla á 12 duros la carga?

$$\text{Resolucion; } 12 \begin{cases} 16 \text{ duros.... } 3 \text{ cargas.} \\ 9 \text{ duros.... } 4 \text{ cargas.} \end{cases}$$

Se tomarán pues 3 cargas del de 16 duros, y 4 cargas de 9.

190. Si dichos géneros son mas de dos, se restarán primero del precio medio cada uno de los inferiores á él, y las restas se pondrán sucesivamente en frente del mayor; luego se restará el precio medio del mayor, y la resta se pondrá en frente de cada uno de los menores.

Ejemplo.

¿En qué proporcion debería hacerse la mezcla de tres clases de aceite de 18, de 8, y de 6, duros la carga, para valer una carga de la mezcla á 10 duros?

$$\text{Resolucion; } 10 \left\{ \begin{array}{l} 18 \text{ duros.. } 2+4 \text{ cargas.} \\ 8 \text{ duros........ } 8 \text{ cargas.} \\ 6 \text{ duros........ } 8 \text{ cargas.} \end{array} \right.$$

Se tomarían pues 6 cargas del de 18 duros, 8 cargas del de 8, y 8 del de 6 duros.

191. Cuando hubiese dos ó mas precios superiores, y uno ó mas inferiores al medio, entonces se restarán del precio medio cada uno de los inferiores á él y las restas se pondrán en frente de los superiores al medio; luego se restará el precio medio de cada uno de los superiores, y las restas se pondrán en frente del inferior.

Ejemplo.

¿En qué proporcion debería hacerse la mezcla de tres clases de aceite de 18, de 12, y de 6 duros la carga, para venderla á 8 duros?

$$\text{Resolucion. } 8 \left\{ \begin{array}{l} 18 \text{ duros........ } 2 \text{ cargas.} \\ 12 \text{ duros........ } 2 \text{ cargas.} \\ 6 \text{ duros. } 10+4 \text{ cargas.} \end{array} \right.$$

Se tomarán pues 2 cargas del de 18 duros, 2 cargas del de 12, y 14 del de 6 duros.

Progresiones aritméticas ó por diferencia.

192. Llámase progresíon aritmétima ó por diferencia una serie de términos tales que cada uno se forma del anterior *mas* ó *menos* la diferencia que existe entre el primero y el segundo, diferencia que se denomina *razon*. Tales serian, por ejemplo las dos siguientes:

$$\div\ 1.\ 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22.\ 25.\ \text{etc.} \quad (A)$$

$$\div\ 40.\ 38.\ 36.\ 34.\ 32.\ 30.\ 28.\ 26.\ \text{etc.} \quad (B)$$

En la primera la diferencia ó *razon* es 3, y en la segunda es 2.

193. Las proporciones se dividen en *crecientes* y *decrecïentes*. Las *crecientes* son aquellas en las que para tener un término se ha de añadir la razon al que antecede, ó bien aquellas en que cada término está formado del anterior *mas* la *razon*. Las *decrecientes* son aquellas en que cada término está formado de el anteríor *menos* la *razon*. La proporcion (A) es creciente, y la (B) es decreciente.

194. Si suponemos que a es el primer término de una progresion creciente, d la razon, ó diferencia, u el último término, n el número de términos, tendrémos una progresion general espresada en esta forma:

$$\div\ a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.$$
$$a+(n-1)d=u.\quad (\mathrm{C}).$$

De la fórmula (C) se deduce que en toda progresion aritmética creciente un término cualquiera es igual al primero *mas* el número de términos que se considera *menos* 1 multiplicado por la razon. En las progresiones decrecientes sería lo mismo con solo cambiar el signo $+$ en $-$; De modo que el término general de las progresiones decrecientes sería el siguiente; $u=a-(n-1)d$. Conociendo pues el primer término y la razon de una progresion aritmética, podemos conocer un término cualquiera de una progresion.

Así, teniendo la progresion (A), si queremos conocer el 5.º término, por ejemplo, diremos; $u=5$; $a=1$; $d=3$; por lo que será: término $5.^{\circ}=1+(5-1)\times 3=1+4\times 3=1+12=13$, como en efecto se verifica.

195. De la fórmula (C) $u=a+(n-1)\times d$ pueden deducirse otras tres fórmulas, despejando sucesivamente cada una de las tres letras a. n. d. Así resultará:

$$a=u-(n-1)\times d;\qquad d=\frac{u-a}{n-1};\qquad n=\frac{u-a}{d}+1.$$

Estos resultados nos indican como podemos conocer el primer término, la razon, y el número de términos.

196. De la definicion de la progresion aritmética se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª Cuatro términos consecutivos tomados donde se quieran forman una proporcion discreta. Así de la progresion (A) sale 10. 13 : 16. 19.

2.ª Tres términos consecutivos la forman contínua. Así de la misma progresion saldrá: 10. 13. 16.

3.ª Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos tambien consecutivos tomados donde se quieran. Así, de la misma progresion saldrá; 4. 7 : 19. 22.

4.ª Dos términos cualesquiera forman proporcion discreta con otros dos, mientras que la distancia entre los dos últimos sea la misma que guardan los dos primeros. Así de la progresion citada saldrá; 1. 10 : 13. 22.

5.ª Tres términos cualesquiera formarán proporcion contínua, mientras que ambos extremos sean equidistantes del medio. Así de la misma progresion resulta; ÷ 10. 16. 22.

6.ª La suma de los dos extremos de una progresion es igual á la suma de otros dos términos equidistantes de los mismos extremos. Así, tendrémos de la misma progresion; $1+25=4+22$.

Esto se desprende bien claro de la consecuencia 3.ª De esto se sigue que, la suma del primero *mas* el último es igual á la del segundo *mas* el penúltimo; la del segundo *mas* el penúltimo igual á la del tercero *mas* el antepenúltimo. etc.

197. Si tenemos la progresion $\div a.b.\ c.d.\ \ldots.\ m.p.\ r.u.$ y designamos la suma por s, téndrémos;

$$s=a+b+c+d\ldots\ldots m+p+r+u. \text{ ó bien,}$$
$$s=u+r+p+m\ldots\ldots d+c+b+a.$$

Sumándolas ordenadamente será

$$2s=(a+u)+(b+r)+(c+p)+(d+m)$$
$$+(m+d)+(p+c)+(r+b)+(u+a)$$

Pero por lo que se ha dicho en el número anterior, cons. 6.ª tenemos: $2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)$. Vemos que el binomio $a+u$, compuesto de la suma del primer término *mas* el último entra por sumando tantas veces cuantos son los terminos de la progresion. Luego si designamos por n el número de términos de una progresion, por a el primer término, por u el último, y por s la suma, tendrémos: $2s=(a+u)\times n$; y despejando la s resultará: $s=(a+u)\times\frac{n}{2}$. Esto nos dice, que la suma de los términos de una progresion aritmética es igual á la suma del primer término *mas* el último multiplicada por la mitad del número de términos que se consideran.

Así la suma de 6 términos de la progresion (A), será: $s=(1+16)\times\frac{6}{2}=17\times3=51$, como en efecto se verica.

198. En el número (195,) de la fórmula (C) $u=a+(n-1)\times d$, hemos deducido la siguiente $d=\frac{u-a}{n-1}$

Esto nos sirve para hallar la razon de una progresion en la que se conoce el primero y último término, y el número de ellos, pudiendo así interpolar un número cualquiera de medios aritméticos entre dos números ó cantidades dadas. Así si entre 4 y 22 de la progresion (A) quiero interpolar 5 medios aritméticos, tendré que en este caso será; $u=22$; $a=4$. $n=7$. Por lo que la fórmula $d=\frac{u-a}{n-1}$ se nos convertirá en la siguiente; $d=\frac{22-4}{7-1}=\frac{18}{6}=3$. de esto hemos sacado que la razon es 3, y así formando la progresion será;

$\div 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22.$

Progresiones geométricas ó por cociente.

196. Entiéndese por progresion geométrica una serie de términos tales, que cada uno contiene al que antecede ó sigue un mismo número de veces; denominándose *razon* el número por el cual se ha de multiplicar un término cualquiera, paraque resulte el que le sigue. Tales serán las siguientes:

$$\because 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : \text{etc.} \quad (A)$$
$$\because 512 : 256 : 128 : 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : \text{etc.} \quad (B)$$

197. Las progresiones se dividen en *crecientes* y *decrecientes*. Las primeras son aquellas en que cada término está concebido en el que le sigue, y las segundas son aquellas en que cada término está contenido en el que antecede. La progresion (A) es creciente, y la (B) es decreciente. Si dada una cantidad la multiplicamos por un número cualquiera, y á este resultado lo multiplicamos otra vez por el mismo número, y si con el nuevo resultado hacemos lo mismo, y así sucesivamente, formarémos una progresion creciente, ó decreciente. Así la progresion (A) se ha formado multiplicando por 2, que es la razon, el número 2 y los demás que han resultado. La (B) se ha formado multiplicando por $^1/_2$ el número 512 y los demás resultantes.

198. De lo dicho en los párrafos anteriores se deduce, que el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; el tercero se compone del primero multiplicado por el cuadrado de la razon; el cuarto se compone del primero multiplicado por el cubo de la razon; y en general, un término cualquiera se compone del primero multiplicado por la razon elevada á la potencia del número de términos que se consideran *menos* uno. Por lo que, si suponemos que a es el primer término de una progresion, r la razon, n el número de términos, y u el último, formaremos una progresion general espresada del modo siguiente;

$$\div a : ar^1 : ar^2 : ar^3 : ar^4 : ar^5 : ar^6 : ar^7 : \ldots . ar^{n-1} = u \quad (C).$$

La fórmula (C) nos indica el modo de encontrar un término cualquiera de una progresion, dado el primero y la razon. Así, si en la progresion (A), queremos encontrar el 7.° término, tendrémos, $u = 7.°$ término; $a = 2$; $r = 2$; $n = 7$. Por lo que la fórmula $u = ar^{n-1}$, se nos convertirá en la siguiente espresion: 7.° término $= 2 \times 2^{7-1} = 2 \times 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$, como en efecto se verifica. Si queremos encontrar el mismo 7.° término de la progresion (B), tendrémos: $u = 7.°$ termino; $a = 512$: $r = {}^1/_2$; $n = 7$. Por lo que la fórmula (C) se nos convertirá en la siguiente espresion; 7.° término $= 512 \times {}^1/_2{}^{7-1} = 512 \times {}^1/_2{}^6 = 512 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times {}^1/_2 \times = 512\,{}^1/_{64} = 8$, como en efecto se verifica.

199. De la definicion de la progresion geométrica (n.° 196) se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª Cuatro términos consecutivos forman proporcion geométrica discreta. Así de la proporcion (A) sale; $2 : 4 :: 8 : 16$.

2.ª Tres términos consecutivos la forman contínua. Así, de la misma sale; $\div 32 : 64 : 128$.

3.ª Dos términos consecutivos forman proporcion discreta con otros dos términos consecutivos tomados donde se quiera. Así, de la misma sale; $8 : 16 :: 256 : 512$.

4.ª Dos términos cualesquiera forman proporcion discreta con otros dos equidistantes entre sí, como lo sean los dos primeros. Así, de la misma proporcion sale; $2 : 8 :: 64 : 256$.

5.ª Tres términos cuyos extremos sean equidistantes del medio forman proporcion contínua. Así, de la misma sale; $\div 2 : 16 : 128$.

6.ª El producto de los extremos de una progresion geométrica es igual al producto de dos términos cualesquiera equidistantes de los mismos extremos. Así, de la misma progresion sale; $2 \times 512 = 8 \times 128$.

200. De lo dicho (n.º 196) se deduce, que en una progresion geométrica todos los términos menos el último serán antecedentes, y serán consecuentes todos los términos menos el primero. Por lo que si suponemos que a es el primer término de una progresion, r la razon, u el último término, y s la suma de todos los términos, tendrémos que $s-u$ espresará la suma de todos los antecedentes, y $s-a$ la suma de todos los consecuentes. Por lo que, (n.º 172. 1.ª) resultará $s-u : s-a :: a : ar :: \frac{a}{a} : \frac{ar}{a} :: 1 : r$. Tomando ahora de esta serie, los dos primeros términos, y los dos últimos, saldrá $s-u : s-a :: 1 : r$. Aplicando á esta proporcion la propiedad fundamental, tendrémos; $(s-u) \times r = (s-a) \times 1$, ó bien; $sr - ru = s - a$; de donde sale, $sr - s = -a + ru$, ó bien, $sr - s = ru - a$, de donde sale, $sr - s \times 1 = ru - a$, ó bien, $s \times (r-1) = ru - a$; despejando finalmente la s, resulta; $s = \frac{ru-a}{r-1}$ (H).

Esta fórmula nos dice como encontrarémos la suma de una progresion geométrica; pues que será igual al producto de la razon por el último término *menos* el primero, dividido por la razon *menos* 1. Así, si queremos encontrar la suma de 6 términos de la progresion (A), tendrémos $r=2$; $a=2$; $u=64$, y la fórmula (H) se nos convertirá en lo siguiente; $s = \frac{2 \times 64 - 2}{2-1} = \frac{128-2}{1} = \frac{126}{1} = 126$, como en efecto se verifica.

201. Si dada la fórmula (H) despejamos sucesivamente las tres letras u, a, y r, tendrémos; $u = \frac{s(r-1)+a}{r}$;

$a = ur - s(r-1)$; $r = \frac{s-a}{s-u}$; por cuyas fórmulas podremos conocer el último término, el primero, y la razon.

202. Si en la fórmula (H) $s = \frac{ru - a}{r-1}$, en lugar de u sustituimos su igual (C) $u = ar^{n-1}$, tendrémos; $s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r-1} = \frac{ar^{n-1+1} - a}{r-1} = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{ar^n - a \times 1}{r-1} = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$ (N). Esta fórmula nos da á conocer la suma de una progresion en valores de a, r, y u.

203. Si dada la fórmula (N) $s = \frac{ar^n - a}{r-1}$, multiplicamos por -1 numerador y denominador del quebrado, tendremos; $s = \frac{ar^n - a}{r-1} = \frac{ar^n \times -1 - a \times -1}{r \times -1 - 1 \times -1} = \frac{-ar^n + a}{-r+1} = \frac{a - ar^n}{1-r}$. (O). Supongamos ahora que la progresion fuera decreciente, y entonces la razon r sería un quebrado propio; por lo que el término sustractivo ar^n de la fórmula (O) será tanto menor cuanto mayor será el número n de términos que se vayan tomando (arit. n.os 69 y 70). Por tanto, cuando se hayan encontrado muchísimos terminos, el valor de ar^n será tan sumamente pequeño, que

será menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea, y así podremos decir que será igual á *cero*. Por lo que, si en la misma fórmula (O) restamos ar^n de a, no se habrá disminuido en nada el valor de a; de modo que podremos decir, que la espresion $\frac{a}{1-r}$ es una cantidad á la cual podrá acercarse cuanto se quiera la suma de los términos de una progresion decreciente. Por tanto, esta espresion $s = \frac{a}{1-r}$ indicará la suma de una progresion decreciente, y nos dirá que es igual al primer término dividido por la diferencia entre la unidad y la razon.

Si tenemos la progresion siguiente;

$\div\div 1 : {}^1/_2 : {}^1/_4 : {}^1/_8 : {}^1/_{16} : {}^1/_{32}$: etc., y representamos su suma por s, resultará, $s = \frac{1}{1-{}^1/_2} = \frac{1}{{}^1/_2} = {}^1/_1 : {}^1/_2 = {}^2/_1 = 2$

Supongamos la siguiente;

$\div\div 2 : {}^2/_3 : {}^2/_9 : {}^2/_{27} : {}^2/_{81}$: etc.; representando su súma por s', tendremos; $s' = \frac{2}{1-{}^1/_3} = \frac{2}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2}{{}^2/_3} = {}^2/_1 : {}^2/_3 = {}^6/_2 = 3.$

Supongamos finalmente la siguiente:

$\div\div 1 : {}^2/_3 : {}^4/_9 : {}^8/_{27} : {}^{16}/_{81}$: etc.; representando por s'' su suma, tendrémos; $s'' = \frac{1}{1-{}^2/_3} = \frac{1}{\frac{3-2}{3}} = \frac{1}{{}^1/_3} = {}^1/_1 : {}^1/_3 = {}^3/_1 = 3.$

De estos tres ejemplos podemos inferir, que un término cualquiera de una progresion decreciente es igual, mayor, ó menor que la suma de los demás. En el primer ejemplo el primer término 1 es igual á la suma de los demás, porque $s=2$. En el segundo el primer término 2 es mayor que la suma de los demás, porque $s'=3$. En el tercero el primer término 1 es menor que la suma de los demás, porque $s''=3$.

Logaritmos.

204. Cuando se escriban dos progresiones geométrica la una, y aritmética la otra, cuyos términos se correspondan, los términos de la aritmética se llaman *logaritmos* de los de la geométrica que toman el nombre de *números.*

Así, teniendo las dos progresiones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \div\ 4.\ 7.\ 10.\ 13.\ 16.\ 19.\ 22.\ \text{etc.} \\ \div\!\!\div\ 2:4:8:16:32:64:128:\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$ los términos 4,

7, 10, 13, etc., de la primera serán los logaritmos correspondientes á los numeros 2, 4, 8, 16, etc. de la segunda.

Siendo indefinido el número de progresiones diferentes que se pueden formar tanto aritméticas como geométricas, se sigue tambien que es infinita la diversidad de logaritmos.

205. *Llámase sistema* de logaritmos el conjunto de dos progresiones aritmética la una, y geométrica la otra, cuyos términos se correspondan, formadas de manera que la aritmética empieze por 0 y tenga por diferencia 1, y la geométrica empieze por 1 y tenga por razon un número cualquiera. Así tendremos un verdadero sistema de logaritmos con las dos progresiones de (A).

$$\left.\begin{array}{l} \div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \text{etc.} \\ \div\!\!\div\ 1.\ 2:4:8:16:32:64:128:256:512:\text{etc.} \end{array}\right\}\ (A)$$

Como la razon de una progresion geométrica puede ser un número cualquiera, se sigue que pueden ser infinitos tambien los logaritmos. Sin embargo el mas inportante de todos es el que tenga el 10 por *razon* de la progresion geométrica. Tal es el de (B).

$$\left.\begin{array}{l} \div\ 0.\ \ 1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7.\ \ \text{etc.} \\ \div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 : \text{etc.} \end{array}\right\} (\text{B}).$$

206. Entiéndese por *base* de un sistema de logaritmos, el segundo término de la progresion geométrica, cuyo lo-

garitmo es la unidad. Así en el sistema (A) la base es 2, y en el (B), es 10.

Segun puede observarse en los sistemas (A) y (B), deberemos decir, que los términos de la progresion aritmética son los esponentes á que se ha de elevar el segundo término de la geométrica, ó sea la base del sistema, para producir cualquier término. Así en el sistema (A) en el que la base es 2, tenemos, $16 = 2^4$; $64 = 2^6$; $512 = 2^9$, etc. de modo que, 4, 6, y 9, son los logaritmos de 16, 64, y 512. Así pues podrémos definir el logaritmo, diciendo que, *es el esponente á que se ha de elevar la base del sistema para producir dicho número.*

207. Sea el sistema general de logaritmos.

$$\left.\begin{array}{l} \div\ 0.\ l,\ l'.\ l''.\ l'''.\ l''''.\ \text{etc.} \\ \div\!\!:\ 1 : b : n' : n'' : n''' : n'''' : \text{etc.} \end{array}\right\} \ (\mathrm{C})$$

Por medio de este sistema vamos á demostrar algunas propiedades;

1.ª El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores. Para esto busquemos el log. $(n' \times n'')$. Como $n' = b^{l'}$; $n'' = b^{l''}$. (n.os 204 y 207), tendremos: $n' \times n'' = b^{l'} \times b^{l''} = b^{l'+l''}$; pero $l' + l''$ es el esponente á que se ha de elevar la base b del sistema para tener el número representado por el producto de $n' \times n''$; luego $l' + l''$ será el logaritmo de este producto y se tendrá: $l' + l'' = \log. (n' \times n'')$. Pero $l' = \log. n'$; $l'' = \log. n''$; luego sustituyendo, se tendrá finalmente; $\log. n' + \log. n'' = \log. (n' \times n'')$; ó sea; $\log. (n' \times n'') = \log. n' + \log n''$. Así si por ejemplo hemos de multiplicar 4 por 8, tendremos; $\log. (4 \times 8) = \log. 4 + \log. 8. =$

(n.° 205. (A)) $2+3=5$. Luego el número 32 correspondiente al logaritmo 5 será el producto de 4 por 8.

2.ª El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo *menos* el logaritmo del divisor. Para esto busquemos el log. $\frac{n''}{n'}$. Por lo dicho, $n''=b^{l''}$, y $n'=b^{l'}$.

Dividiendo ordenadamente estas dos ecuaciones, tendremos:

$$\frac{n''}{n'}=\frac{b^{l''}}{b^{l'}}=b^{l''-l'}.$$ Pero $l''-l'$ es el esponente á que se ha de elevar la base b para tener el número representado por $\frac{n''}{n'}$: luego $l''-l'$ será el logaritmo correspondiente al cociente $\frac{n''}{n'}$, Pero $l''=\log.\ n''$, y $l'=\log.\ n'$. Luego, $\log.\frac{n''}{n'}=l''-l'=\log.\ n''-\log.\ n'$. Así, queriendo dividir 32 por 8, diré; $\log.\frac{32}{8}=\log.\ 32-\log.\ 8=$ (n.° 205. (A)) $5-3=2$. De donde resulta, que el número 4 correspondiente al logaritmo 2, es el cociente de dividir 32 por 8, como en efecto se verifica.

3.ª El logaritmo de una potencia es igual al producto del esponente de la potencia por el logaritmo de la raiz. Sea para esto que hayamos de buscar á que es igual el logaritmo de $(n')^p$. Por lo dicho tenemos: $n'=b^{l'}$. Elevando ambos miembros de esta ecuacion á la potencia p, no se alterará la ecuacion y resultará; $(n')^p=(b^{l'})^p$, ó bien, $n'^p=b^{l'p}$; pero $l'p$ es el esponente á que se ha de elevar la base b del sistema para tener el número representado por n'^{p}; luego será su logaritmo, y tendremos: $\log. n'^{p} = l'\,p = p \times l'$, y como $l' = \log. n'$, resulta finalmente: $\log. n'^{p} = p \times l' = p \times \log. n'$. Así, si quiero encontrar la 2.ª potencia de 8 en el sistema (A) diré: $\log. (8)^2 = 2 \times \log. 8 = 2 \times 3 = 6$. De donde resulta que el número 64 correspondiente al logaritmo 6 es el cuadrado de 8 como realmente se verifica.

4.ª El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la potencia partido por el esponente radical. Para su demostracion busquemos el logaritmo de $\sqrt{n'}$. Como sabemos que, $n' = b^{l'}$, si de ambos miembros extraemos la raiz r, tendrémos; $\sqrt[r]{n'} = \sqrt[r]{b^{l'}}$, ó bien; $\sqrt[r]{n'} = b^{\frac{l'}{r}}$; pero $\frac{l'}{r}$ es el ponente á que se ha de elevar la base b del sistema para tener el número representado por $\sqrt[r]{n'}$; luego será su logaritmo, y tendrémos: $\log. \sqrt[r]{n'} = \frac{l'}{r}$; pero $l' = \log. n'$; luego resultará finalmente; $\log. \sqrt[r]{n'} = \frac{l'}{r} = \frac{\log. n'}{r}$. Asi, si en el sistema (A) quiero extraer la raiz cuadrada de 64, diré: $\log. \sqrt{64} = \frac{\log. 64}{2} = \frac{6}{2} = 3$. De donde resulta que el número 8 correspondiente á este logaritmo es la raiz cuadrada de 64, como en efecto se verifica.

208. Para sacar de las propiedades de los logaritmos toda la utilidad posible se han calculado tablas en las que se hallan los logaritmos de los números enteros desde 1 hasta 10000, 20000, 100000, y aun las hay que llegan hasta 200000. Para construir las tablas de logaritmos se eligieron las dos progresiones siguientes:

$$\begin{cases} \text{Logaritmos} \quad \div\, 0\,.\ 1\,.\ 2\,.\ 3\,.\ 4\,.\ 5 \text{ etc.} \\ \text{Números} \quad \dot{\dot{\div}}\, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \text{ etc.} \end{cases}$$

Para calcular los logaritmos de los números que median entre 1 y 10, entre 10 y 100 etc. procedieron los matemàticos del modo siguiente. Buscaron primero un medio equidiferencial entro 0 y 1, y otro proporcional entre 1 y 10, y hallaron para el primero 0'5000000 y para el segundo 3'1622777, con lo que tuvieron 0'5000000 = log. 3'1622777. Luego buscaron del mismo modo un medio entre 0' y 05'000000, y otro entre 1, y 3'1622777 y hallaron para el primero 0'2500000, y para el segundo 1'7782794 con lo que tuvieron 0'2500000 = log. 1'7782794. Continuando buscando medios equidiferenciales entre los términos que iban resultando en la progresion por diferencia, y medios proporcionales entre los correspondientes de la progresion por cociente, despues de 24 operaciones se halló en la progresion por diferencia 0'3010300 y en la progresion por cociente 2'0000000 con lo que se tuvo 0'3010300 = log 2. Del mismo modo se calcularon los logaritmos de los demás números primos. Para calcular los logaritmos de los números compuestos se valieron ya de las reglas que hay para hallar el logaritmo de un producto y de una potencia. Asi, pues que $4 = 2^2$, se tuvo log. 4 = log. 2, $\times$ 2; 6 = 2 $\times$ 3, luego log. 6 = log. 2 + log. 3; y del mismo modo log. 8 = log. 4 + log. 2; log. 9 = log 3 + log. 3 etc.

209. Puesto que $10^0 = 1$, y $10^1 = 10$, vemos que log. $1 = 0$, log. $10 = 1$; luego *el logaritmo de una unidad es cero; y el de todo número dijito, como 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9,* ha de ser mayor que 0 y menor que 1; esto es, será un quebrado decimal.

Igualmente, como $10^1 = 10$ y $10^2 = 100$, se inferirá que el logaritmo de todo número de dos cifras, desde 11 hasta 99 inclusive, ha de ser mayor que 1 y menor que 2, esto es, será *un entero* y un quebrado decimal. Del mismo modo se inferirá que el de todo número de tres cifras, desde 101 hasta 999 inclusive, será mayor que 2 y menor que 3; esto es, *dos enteros* y un quebrado decimal. Y en general, que el logaritmo de todo número compuesto (escepto la unidad seguida de ceros) *consta de tantas unidades en enteros, como cifras tiene el número menos una, y de un quebrado decimal*; si el número es la unidad seguida de ceros, su logaritmo *consta de tantas unidades como ceros acompañan á la unidad, y el quebrado decimal es cero.*

210. Cada logaritmo conta de una nota entera que se llama carácterística, y de un quebrado decimal que se llama mantisa. Puesto que log. $1 = 0$, y log. $10 = 1$, se sigue que los logaritmos de los números de una cifra tienen 0 de carácterística. El logaritmo de 10 es 1 y el 100 es 2, luego los logaritmos de los números de dos cifras, tienen 1 de carácterística. Del mismo modo probariamos que los logaritmos de los números de 3 cifras tienen 2 de carácterística, los de 4 cifras, tienen 3 etc. de modo que la carácterística de un logaritmo es igual al número de cifras que tiene su número, menos una. De esto se sigue que dado un número, es fácil determinar la carácterística de su logaritmo, pues será igual al número de cifras enteras del número dado menos una.

Recíprocamente; dado un logaritmo puede conocerse el número de cifras que ha de tener el número, que serán tantas como unidades tenga la carácterística del logaritmo mas una.

211. Supuesto que los logaritmos de 10, 100, 1000, etc. son respectivamente 1, 2, 3, etc.; se sumarán ó restarán de cualquier logaritmo con solo sumar ó restar de su cáracterística, 1, 2, 3, etc. unidades, y como la suma de los logaritmos corresponde al producto de los números, y la diferencia al cociente de los mismos números, se sigue que los logaritmos de los números que aumentan ó disminuyen en progresion décupla tienen una misma mantisa y solo se diferencian en sus cáracterísticas. Así los números 3'45; 34'5; 345; 3450; 34500 etc.; tienen la misma mantisa en sus logaritmos siendo sus cáracterísticas respectivamente iguales á 0, 1, 2, 3, 4, etc. Luego la mantisa nos da á conocer el valor de las cifras de un número, y la característica cuantas son las de enteros. Luego aun que en las tablas no se hallan sino los logaritmos de los números enteros, podremos hallar el logaritmo de cualquier número que conste de enteros y decimales; porque la característica será la que corresponde á los enteros, y la mantisa la misma que corresponderia al número considerado como entero.

De donde resulta, que *si se añade una unidad á la característica de un logaritmo, corresponde á un número diez veces mayor; ó equivale á multiplicar por diez dicho número; si se añaden dos unidades, equivale á multiplicar por 100 el mismo número; y así sucesivamente. Y si se quita una unidad á la característica de un logaritmo, equivale á haber dividido su número por 10; si se le quitan dos, equivale á haber dividido su número por 100, etc. etc.*

212. Los logaritmos de los números comprendidos en las tablas se hallan con facilidad, pues frente de cada número está el logaritmo correspondiente. En todas las tablas de logaritmos está esplicada su disposicion particular, y las reglas para manejarlas; cuales cosas se entenderán facilmente con la explicacion del profesor.

213. Llámase *complemento aritmético* de un número lo que le falta para valer la unidad seguida de tantos ceros como unidades tenga dicho número. Así el complemento aritmético de los números de una cifra será lo que falte á

dichos números para valer 10; el de los números de dos cifras es lo que les falte para valer 100; el de los números de tres cifras es lo que les falte para valer 1000; etc. De este modo tendrémos que, el complemento aritmético de 7 es igual á 10 — 7 = 3; el de 54 es 100 — 54 = 46; el de 425 es 1000 — 425 = 575; el de 3589 es 10000 — 3589 = 6411; etc. Para hallar de repente el complemento aritmético de un número se restan, principiando por la izquierda, todas las cifras de 9 excepto la última significativa que se resta de 10. Así para hallar el complemento aritmético de 7, diremos; de 7 á 10 van 3. Para hallar el de 54 diremos: de 5 á 9 van 4, de 4 á 10 van 6; por lo que será 46. Para hallar el de 425 diremos: de 4 á 9 van 5, de 2 á 9 van 7, de 5 á 10 van 5; por lo que será 575. Para hallar el de 3589 diremos: de 3 á 9 van 6, de 5 á 9 van 4, de 8 á 9 va 1, de 9 á 10 va 1; por lo que será 6411. etc.

214. Llámase *complemento logarítmico* de un número al complemento aritmético de su logaritmo; por lo que se buscará primero el logaritmo de dicho número, y despues el complemento aritmético de dicho logaritmo. Así si quiero hallar el complemento logarítmico de 425, buscaré primero su logaritmo, y encontraré que es 2'62839: por lo que su complemento aritmético será 1000000 — 2'62839 = 7'37161.

215. El complemento aritmético convierte la operacion de restar en sumar de este modo: con el minuendo se suma el complemento aritmético del sustraendo, y en la suma se rebaja la unidad ó unidades correspondientes al complemento; esto es, se rebaja la unidad en las decenas, si el complemento fué á 10; en las centenas, si fué á 100; en los millares, si fué á 1000; etc. Así, si de 846 hemos de quitar 37, sumaré con 846 el complemento aritmético de 37, y como el complemento de 37 será á 100, rebajarémos una unidad en las centenas, y tendremos la resta verdadera como se vé en (A).

La razon de esto es que en vez de quitar el 37 de 846, le hemos añadido el 63 que es lo que falta á 37 para valer 100: luego, de la suma resultante hemos tenido que rebajar una centena para obtener la verdadera diferencia pedida entre 846 y 37. Cuando hay que hacer sumas y restas á un mismo tiempo con las cantidades, se obtiene fácilmente el resultado sumando los complementos de las que se han de restar, y rebajando las unidades al mismo tiempo donde corresponde.

	(A)
	8 4 6
	+ 6 3
Suma.	9 0 9
Resta.	8 0 9.

Aplicaciones de las propiedades de los logaritmos.

216. Si hemos de multiplicar 485 por 978 tendremos segun lo demostrado (n.° 207. 1.ª): log. $(485 \times 978) =$ log. 485 + log. $978 = 2'6857417 + 2'9903389 = 5'6760806 =$ log. del producto 474330.

217. Si hemos de dividir 19035 por 423, tendremos segun lo demostrado (n.° 207. 2.ª): log. $\frac{19035}{423} =$ log. 19035 — log. $423 = 4'2795529 - 2'6263404 = 1'6532125$ $=$ log. del cociente 45.

218. Si hemos de buscar el cuarto término de la siguiente proporcion: $4 : 9 :: 12 : x$. Como el cuarto término de una proporcion geométrica se halla multiplicando los dos medios, y partiendo el producto por el otro extremo; y como el multiplicar y dividir por logaritmos se reduce á sumar y restar, tendremos; $4 : 9 :: 12 : x =$ log. 9 + log. 12 — log. 4. $= 0'9542425 + 1'0791812 - 0'6020600 =$ $2'0334237 - 0'6020600 = 1'4313637 =$ log. de 27.

Si en vez de restar el log. 4 de la suma de los otros dos, hubiéramos querido usar del complemento logarítmico, hubiéramos tenido; $4 : 9 :: 12 : x =$ log. 9 + log. 12 + comp. log. 4 = 0'9542425 + 1'0791812 + 9'3979400 = 11'4313637; y rebajando ahora de esta suma las unidades correspondientes, tendríamos finalmente la suma verdadera de 1'4313637 = log. del cuarto término $x = 27$.

219. Si hemos de elevar el número 32 al cuadrado, tendremos segun lo demostrado (n.º 207. 3.ª): log. $(32^2) =$ log. 32 × 2 = 1'5051500 × 2 = 3'0103000 = log. 32^2 = log. de 1024.

31. Si hemos de extraer la raiz cúbica de 5451776, tendremos segun lo demostrado (n.º 207. 4.ª); log. $\sqrt[3]{5451776}$ = log. 5451776 : 3 = 2'2455126 = log. 176.

220. Todo quebrado no es mas que una division indicada de numerador por denominador; luego el logaritmo de un quebrado será tambien igual al logaritmo del numerador *menos* el logaritmo del denominador. De esto se deduce que, si el quebrado es propio, habrá de resultar un logaritmo negativo. Por medio del complemento logarítmico se evita este inconveniente; y como la suma del logaritmo del numerador con el complemento logarítmico del denominador no llega á componer nunca una decena, tenemos que esta decena que resulta de mas, valiéndose del complemento, no puede rebajarse, y por lo mismo el logaritmo queda aumentado de 10. Estos logaritmos se llaman complementarios. Por tanto, el logaritmo complementario de $^5/_8$ sería igual al log. 5 — log. 8 = 0'69897 — 0'90309 = 0'69897 + comp. log. 8 = 0'69897 + 9'09691 = 9'79588. etc. Sin embargo, lo mas sencillo es reducir el quebrado propio á decimal, y encontrar el logaritmo de este, introduciendo tambien el complemento logarítmico.

Cuando se hubiera de buscar el logaritmo de un número misto, se reduciría el entero á la especie del quebrado que le acompañara, y tendríamos el caso de encontrar el logaritmo de una division.

221. Si hubiéramos de buscar el logaritmo de 0'54, tendriamos; log. 0'54 = log. $^{54}/_{100}$ = log. 54 — log. 100 = log. 54 + comp. log. 100 = 1'73239 + 8' = 9'73239.

Si el decimal fuera 0'054, tendríamos; log. 0'054 = log. $^{54}/_{1000}$ = log. 54 — log. 1000 = log. 54 + comp. log. 1000 = 1'73239 + 7' = 8'73239. Si el decimal fuese 0'0054, tendríamos; log. 0'0054 = log. $^{54}/_{10000}$ = log. 54 — log. 10000 = log. 54 + comp. log. 10000 = 1'73239 + 6 = 7'73239.

Del mismo modo hallaríamos que el log. 0'00054, sería igual á 6'73239, la de 0'000054 = 5'73239. etc.

En todos estos casos podemos observar que, la mantisa ha sido siempre la misma del 54, á saber, 73239, y que las características han sido 9, 8, 7, 6, 5, etc. Luego podremos deducir en general que, el logaritmo complementario de un quebrado decimal tiene por característica 9, ó tantas unidades menos que 9, como ceros hay entre la coma y los guarismos significativos, y por mantisa la misma que la de estos considerados como enteros.

Recíprocamente si se pide el quebrado decimal á que corresponde un logaritmo dado, póngase cero y coma; despues de esta pónganse tantos ceros como unidades falten á la característica para valer 9, y luego las cifras significativas correspondientes á la mantisa.

Así tendremos; 9'73239 = log. 0'54; 7'73239 = log. 0'0054.

Cuestiones esponenciales.

222. Llámanse cuestiones *esponenciales* aquellas en las que se halla la incógnita por esponente de la ecuacion. Estas ecuaciones no pueden resolverse sino con el auxilio del cálculo logarítmico. Para ver como se despeja la incógnita en estas ecuaciones, supongamos la siguiente: $a^x = n$.

Aplicando los logaritmos á esta ecuacion, tendremos; log. a^x $=$ log. n. Pero por lo demostrado (n.° 207. 3.ª) resulta; log. $a^x = x \times$ log. a. Luego sustituyendo este valor en la ecuacion log. $a^x =$ log. n, tendremos; $x \times$ log. $a =$ log. n, y despejando la x, resulta finalmente; $x = \frac{\text{log. } n}{\text{log. } a}$. Este resultado nos dice que, el esponente de una potencia se halla partiendo el logaritmo de la potencia por el logaritmo de su raiz.

Resolvamos segun esto los ejemplos siguientes:

1.°

$$34^x = 1156, \text{ y tendrémos;}$$

$$\text{log. } 34^x = \text{log. } 1156$$

$$x \times \text{log. } 34 = \text{log. } 1156$$

$$x = \frac{\text{log. } 1156}{\text{log. } 34} = \frac{3'06296}{1'53148} = \begin{array}{l|l} 306296 & 153148 \\ \hline 000000 & 2 \end{array}$$

$x = 2$.

2.°

$$12^z = 1728, \text{ y tendrémos:}$$

$$\text{log. } 12^z = \text{log. } 1728$$

$$z \times \text{log. } 12 = \text{log. } 1728$$

$$z = \frac{\text{log. } 1728}{\text{log. } 12} = \frac{3'23754}{1'07918} = \begin{array}{l|l} 323754 & 107918 \\ \hline 000000 & 3 \end{array}$$

$z = 3$.

Paso de un sistema de logaritmos á otro sistema.

223. Habiendo muchos sistemas de logaritmos, veamos como, dado el logaritmo de un número en un sistema cuya base sea B, podremos encontrar el logaritmo del mismo número en otro sistema cuya base sea b.

Si designamos por n el número, por L su logaritmo en el sistema cuya base sea B, y por l el logaritmo del mismo número n en el sistema cuya base sea b; tendremos $n = B^{L}$ y $n = b^{l}$.

Igualando estas dos espresiones del número n, resultará; $B^{L} = b^{l}$, y segun lo demostrado (n.° 207. 3.ª), $L \times \log. B = l \times \log. b$.

Tomando ahora los dos logaritmos en el mismo sistema cuya base sea B, tendremos (n.° 205); $\log. B = 1$, de donde resulta; $L \times 1 = l \times \log. b$, ó bien, $l \times \log. b = L \times 1$, ó sea, $l \times \log. b = L$. Despejando finalmente la l, resulta; $l = \dfrac{L}{\log. b.}$

Este resultado nos dice, que, teniendo el logaritmo de un número en un sistema cuya base sea conocida, para hallar el logaritmo del mismo número en otro sistema cuya base sea tambien conocida, se partirá el logaritmo dado por el logaritmo de la nueva base tomado en el sistema del logaritmo dado.

Los dos sistemas de logaritmos, que mas nos interesa conocer, son el *tabular*, y el sistema que se caracteriza con el nombre de *neperiano* ó *hiperbólico*. El tabular tiene 10 por base, y la base del neperiano ó hiperbólico es un número misto, que se acostumbra señalar con e, y se tiene $e = 2'71828182$ etc. con muchos guarismos.

Si quisiéramos pasar del sistema tabular al sistema neperiano, buscaríamos en el sistema tabular el logaritmo de 2'71828182, que es la base del neperiano, y hallaríamos ser 0'43429448 etc. Por consiguiente, para convertir los logaritmos tabulares en logarítmos neperianos, no habrá mas que dividir los logaritmos tabulares por el número 0'43429448 etc.

Si quisiéramos pasar de los logaritmos neperianos ó hiperbólicos á los tabulares, buscaríamos el logaritmo de 10 en el sistema neperiano ó hiperbólico, y hallaríamos ser 2'30258509 etc., y dividiendo cualquier logaritmo neperiano por 2'30258509, se tendría convertido en tabular.

Ejemplo. Si, conocido el logaritmo de 100 que es 2, en el sistema tabular, quisiéramos hallar su logaritmo neperiano ó hiperbólico, dividiríamos 2 por 0'43429448, y hallaríamos 4'60517018, que es en efecto el que se halla en las tablas.

Si de este quisiéramos pasar al tabular, no tendríamos mas que dividir 4'60517018 por 2'30258509, y obtendríamos 2 para el logaritmo de 100 en el sistema tabular, como así se verifica.

Permutaciones con repeticion.

224. Permutar varias cosas es, colocarlas de todos los modos posibles las unas con respecto á las otras, tomándolas de una en una, de dos en dos, de tres en tres, de n en n. Así por ejemplo, permutar de dos en dos las tres letras a, b, c, es, escribir de todos los modos posibles y en grupos de dos las tres letras expresadas; y asi será: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

Los grupos dichos se llaman *productos*, *términos de permutacion* ó simplemente *permutaciones*, y las cosas que se dan para permutar, toman el nombre de *elementos de permutacion.*

Las permutaciones se llaman de la clase 1.ª 2.ª 3.ª del órden n; segun que los grupos constan de 1, 2, 3, n elementos.

Divídense en permutaciones con repeticion y sin ella;

son lo 1.° cuando un mismo elemento puede éntrar mas de una vez en una sola permutacion; y son lo 2.° cuando no ha lugar esta circunstancia

225. Para formar las diferentes clases de permutaciones con repeticion puede seguírse la siguiente regla: Pónganse los elementos propuestos en un mismo renglon separados con una coma y se tendrá la 1.ª clase; colóquese luego cada término de 1.ª clase delante de sí mismo y de todos los demás, separando cada grupo con una coma y saldrá la 2.ª clase; colóquese en seguida cada término de 1.ª clase delante de todos los términos de 2.ª, separando del mismo modo cada grupo con una coma y se tendrá la 3.ª clase. De este modo prosiguiendo, á saber, colocando cada término de 1.ª clase delante de todos los términos de la clase última que tengamos, se irán obteniendo todas las clases que se deseen.

Formemos por esta regla las cuatro primeras clases de permutaciones con repeticion con los elementos *a*, *b*, *c*, *d*, y tendremos:

1.ª Clase.

a, *b*, *c*, *d*,

2.ª Clase.

aa, *ab*, *ac*, *ad*,
ba, *bb*, *bc*, *bd*,
ca, *cb*, *cc*, *cd*,
da, *db*, *dc*, *dd*,

3.ª Clase.

aaa, *aab*, *aac*, *aad*, *aba*, *abb*, *abc*, *abd*,
aca, *acb*, *acc*, *acd*, *ada*, *adb*, *adc*, *add*,
baa, *bab*, *bac*, *bad*, *bba*, *bbb*. *bbc*, etc.
caa, *cab*, *cac*, *cad*, *cba*, etc. etc. etc.
daa, *dab*, *dac*, etc.

4.ª Clase.

aaaa, *aaab*, *aaac*, *aaad*, *aaba*, *aabb*, *aabc*,
etc. etc. etc.

De la regla que acabamos de practicar se deduce, 1.° que es indefinido el número de clases de permutaciones con repeticion; 2.° que para n elementos la 1.ª clase ha de dar n términos; la 2.ª n^2; la 3.ª n^3; y la clase del órden n ha de dar un número de términos expresado por la fórmula n^m.

Permutaciones sin repeticion.

226. Podrémos formar las diferentes clases de permutaciones sin repeticion con la siguiente regla: pónganse los elementos propuestos en un mismo renglon, separados con una coma y se tendrá la 1.ª clase: colóquese luego cada término de 1.ª clase delante de todos á excepcion de sí mismo y se tendrá la 2.ª clase; colóquese en seguida cada término de 1.ª clase delante de todos los términos de 2.ª que no contengan al término de 1.ª que entra en cuestion y se tendrá la 3.ª clase; Así prosiguiendo llegarémos á la última clase, ó á la clase pedida en la cuestion.

Formemos por esta regla las diferentes clases de permutaciones sin repeticion de que son susceptibles los cuatro elementos a, b, c, d, y tendrémos:

1.ª Clase.

a, b, c, d,

2.ª Clase.

ab, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*,
ca, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*,

3.ª CLASE.

abc, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *adc*,
bac, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*,
cab, *cad*, *cba*, *cbd*, *cda*, *cdb*,
dab, *dac*, *dba*, *dbc*, *dca*, *dcb*,

4.ª CLASE.

abcd, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*,
bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*,
cabd, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*,
dabc, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*,

5.ª CLASE.

0

227. Segun el cuadro que acabamos de presentar podemos formar tantas clases de permutaciones sin repeticion cuantos sean los elementos propuestos, pues que, cuatro eran los elementos dados y cuatro han sido las clases que se han podido formar.

En la 1.ª clase hemos obtenido 4 permutaciones, á saber tantas cuantos eran los elementos; en la 2.ª hemos obtenido 12 permutaciones $= 4 \times 3$; en la 3.ª $24 = 4 \times 3 \times 2$; en la 4.ª $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Luego por analogía podremos decir que n elementos dan el siguiente número de permutaciones.

para 1.ª clase. . . . . n.
para la 2.ª. . . . . $n \times (n-1)$;
para la 3.ª. . . . . $n \times (n-1)\,(n-2)$;
para la 4.ª. . . . . $n \times (n-1)\,(n-2)\,(n-3)$;
para la última. $n \times (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4) \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

228. Si entre los elementos dados para permutar hubiesen dos iguales entre sí, el número de permutaciones

se habria de dividir por 1×2; si hubiesen 3, se dividiria el número por $1 \times 2 \times 3$; y asi por analogía, si entre n elementos hubiese m elementos iguales entre sí, en la clase del órden n, el número de permutaciones vendria expresado bajo la siguente forma:

$$P = \frac{n \times (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots\ldots \times m\ ..}$$

Todo esto puede comprobarse facilmente, haciendo en las clases halladas 2, 3, 4, ete. elementos iguales entre sí.

229. Enunciando por P' P'' P''', etc., el número de permutaciones de 1.ª 2.ª 3.ª etc. clase que podriamos formar con 5 elementos tomados de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc. vendrian expresados bajo las fórmulas siguientes,

Con 5 elementos,

$$P' = 5.$$
$$P'' = 5 \times 4 = 20.$$
$$P''' = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$
$$P'''' = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$$
$$P''''' = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Combinaciones con repeticion.

230. Entiéndese por combinar varias cosas, colocarlas al lado unas de otras de todos los modos posibles, tomándolas de una en una, de dos en dos, de n en n, haciendo que cada grupo se diferencie de los demás á lo menos en una de las cosas dadas para combinar, Así, combinar de dos en dos las tres letras a, b, c, es hallar estos grupos ab, ac, bc, que se diferencian unos de otros en una letra á lo menos.

231. Para hacer ver la diferencia que hay entre permutacion y combinacion, podrémos observar que con las dichas letras a, b, c, tomadas de tres en tres podriamos formar las permutaciones siguientes; abc, acb, bac, bca,

cab, *cba*; siendo así que no se puede formar sino una sola combinacion *abc*.

Las cosas que se dan para combinar se llaman *elementos de combinacion*, y los grupos que se obtienen se llaman *términos de combinacion*, ó simplemente combinaciones. Se dividen en combinaciones con repeticion y sin ella, como y tambien en clases, de la misma manera que se ha dicho en las *permutaciones*.

232. Para formar las diferentes clases de *combinaciones* con repeticion, podrá seguirse la siguiente regla: Pónganse los elementos dados en un mismo renglon, separados con una coma y se tendrá la 1.ª clase; colóquese luego por órden cada término de 1.ª clase delante de sí mismo y de todos los demás que estén despues de él y se tendrá la 2.ª clase; colóquese en seguida cada término de 1.ª delante de los términos de 2.ª partiendo cada vez de aquellos mismos términos de 2.ª que empiezen por aquel término de 1.ª que entra en cuestion. Del mismo modo se podrá continuar hasta tener la clase pedida en la cuestion.

Formemos por esta regla las cuatro primeras clases de combinaciones con repeticion, dados los elementos *a*, *b*, *c*, *d*, y tendremos:

1.ª Clase.

a, *b*, *c*, *d*,

2.ª Clase.

aa, *ab*, *ac*, *ad*,
bb, *bc*, *bd*,
cc, *cd*,
dd,

3.ª Clase.

aaa, aab, aac, aad, abb, abc, abd, acc, acd, add,
bbb, bbc, bbd, bcc, bcd, bdd,
ccc, ccd, cdd,
ddd,

4.ª Clase.

aaaa, aaab, aaac, aaad, aabb, aabc, aabd, aacc,
aacd, aadd, abbb, abbc, abbd, abcc, abcd, abdd,
accc, accd, acdd, addd;
bbbb, bbbc, bbbd, bbcc, bbcd, bbdd, bccc, bccd,
bcdd, bddd,
cccc, cccd, ccdd, cddd, dddd,

Segun el cuadro que acabamos de presentar, el número de clases de combinaciones con repeticion es indefinido, y el número de términos en cada clase son los siguientes, dados n términos;

El de la 1.ª $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$
El de la 2.ª $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots$
El de la 3.ª $= 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots\ldots$

Combinaciones sin repeticion.

233. Para formar las diferentes clases de combinaciones sin repeticion de que son susceptibles n elementos podrémos seguir la siguiente regla: pónganse los elementos dados para combinar en un mismo renglon, separados con una coma y se tendrá la 1.ª clase: colóquese luégo cada término de 1.ª clase delante de los que estén despues de él y se tendrá la 2.ª clase; colóquese en seguida cada término de 2.ª delante de los términos de 1.ª que siguen al úl-

timo elemento del término que consideramos en la 2.ª y se tendrá la 3.ª clase. Así continuando, llegarémos á la clase pedida en la cuestion.

Formemos por esta regla las diferentes clases de combinaciones sin repeticion de que son susceptibles los cinco elementos *a*, *b*. *c*, *d*, *e*, y tendrémos:

1.ª Clase.

a, *b*, *c*, *d*, *e*,

2.ª Clase.

ab, *ac*, *ad*, *ae*,
bc, *bd*, *be*,
cd, *ce*,
de,

3.ª Clase.

abc, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*
bcd, *bce*, *bde*, *cde*,

4.ª Clase.

abcd, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*,

5.ª Clase.

abcde.

6.ª Clase.

0

Del cuadro anterior se deduce 1.° por analogía que se pueden formar tantas clases de combinaciones sin repeticion, cuantos sean los elementos propuestos, 2.° que con n elementos se obtienen las siguientes combinaciones:

Para la 1.ª clase $C=\frac{n}{1}$

Para la 2.ª . . . $C=\frac{n(n-1)}{1\times2}$

Para la 3.ª . . . $C=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}$

Para la clase del órden m. $C=\frac{n(n-1)(n-2)\times\ldots(n-m+1)}{1\times2\times3\times\ldots\ldots\ldots m}$

Con 5 elementos salen las combinaciones siguientes:

1.ª clase. $C=\frac{5}{1}=5,$

2.ª .... $C=\frac{5\times4}{1\times2}=\frac{20}{2}=10.$

3.ª .... $C=\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}=\frac{60}{6}=10.$

4.ª .... $C=\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}=\frac{120}{24}=5.$

FIN DEL ÁLGEBRA.

ÍNDICE DEL ÁLGEBRA.

Segunda parte del Álgebra.

Potencias de los polinomios

GEOMETRÍA.

Nociones preliminares.

1. La Geometría *es la parte de matemáticas que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la cantidad continua; ó sea, de la estension de esa misma cantidad.*

Llámase *espacio* esta estension inmensa en que están contenidos todos los cuerpos de la naturaleza; y *estension de una cantidad ó cuerpo*, es la parte de ese espacio que ocupa dicho cuerpo.

Llámanse dimensiones de un cuerpo los modos diferentes con que puede considerarse su estension. Como sean tres estos modos diferentes, síguese que son tambien tres las dimensiones de un cuerpo, las cuales toman los nombres particulares de *longitud*, *latitud*, y *profundidad*, ó *grueso*. Llámase *longitud*, la mayor de las dimensiones, *latitud*, la que constituye lo ancho del cuerpo, y *profundidad*, ó *grueso*, la que constituye el grueso, altura, ó profundidad. Así, por ejemplo, (fig. 1.ª) AB formaría la longitud, BD su latitud, y BG su grueso.

Sin embargo, estas dimensiones no pueden considerarse con un valor absoluto, sino únicamente relativo al modo como se mire el cuerpo ó su figura; pues que, propiamente hablando, la Geometría solo se ocupa de la *estension* y *figurabilidad* del cuerpo. Esto quiere decir que, si miramos el cuerpo bajo una posicion diferente, la dimension que antes era longitud podrá pasar á ser latitud, ó grueso, y así de las demás. Así, si miramos la figura por la parte

DFGB, entonces la longitud será DB, la latitud BG, y la profundidad AB.

2. Un cuerpo, por razon de ser tal, siempre constará de las tres dimensiones dichas. El geómetra podrá prescindir de una, ó de todas, si se quiere; pero el cuerpo siempre quedará lo mismo que era. Podrá ocuparse de las tres dimensiones juntas, de dos solamente, de una no mas, y hasta podrá mirar al cuerpo como que no tuviéra dimension alguna. A pesar de esta abstraccion, el cuerpo siempre permanecerá intacto. De esa abstraccion provendrá lo que se llama *volúmen* ó *cuerpo geométrico*, *superficie*, *línea*, y *punto matemático*.

Llámase *volúmen* ó *cuerpo geométrico* el cuerpo considerado con sus tres dimensiones; *superficie* el cuerpo considerado con solas las dos dimensiones de *longitud* y *latitud; línea* el cuerpo considerado con la sola dimension de *longitud*; *punto matemático* el cuerpo considerado sin dimension alguna. De esto se sigue que, la superficie es el límite del cuerpo, porque puede acercarse á este tanto como se quiera, sin llegar jamás á ser igual con él. Por igual razon la línea es el límite de la superficie, y el punto matemático lo es de la línea.

3. La línea se divide en *recta* y *curva*. La recta es aquella que tiene todos sus puntos en una misma direccion; tal sería (fig. 2.ª) AB. La curva es aquella cuyos puntos todos no están en una misma direccion; tales serían, AEB, ADB, ACB.

Llámase *segmento* de una recta una parte cualquiera de ella. Así, (fig. 3.ª) AC, CB, serían segmentos de la recta AB.

Llámase *línea poligonal* la compuesta de segmentos de rectas; ó sea, el conjunto de dos ó mas rectas que se unen por uno de sus extremos siguiendo cada una una direccion diferente. Tal sería (fig. 4.ª) AB, BC, CD, DE, ó sea, ABCDE.

4. La superficie se divide en *plana* y *curva*. La primera es aquella cuyos puntos están todos tan altos ó salientes los

unos como los otros; tal sería ABCD (fig. 1.ª). La segunda es aquella á la que falta alguna de estas circunstancias; tal sería CDFE. Finalmente tanto las líneas curvas como las superficies se dividen en *cóncavas* y *convexas* segun el aspecto bajo que se miren.

5. Llámase *superficie plana*, ó simplemente, *plano matemático* una superficie indefinida sobre la que puede aplicarse exactamente una regla en toda su estension indefinida, y en una infinidad de posiciones diferentes.

6. Llámanse *figuras planas* las que están contenidas enteramente en un plano; y se denominan *sólidos* las partes de una figura que están en diversos planos. Por tanto, la *geométria plana* es la que trata de averiguar las relaciones y propiedades de las líneas y figuras situadas en un plano; y se denomina *geometría en el espacio la* que se ocupa de los sólidos.

GEOMETRÍA PLANA.

Líneas rectas y curvas.

7. 1.º Un punto no basta para determinar la posicion de una recta, porque un punto solo no determina direccion alguna; ya que á él pueden concurrir infinidad de direcciones. Así, desde el punto O (fig. 5.ª) pueden salir las direcciones OA, OM, OC, etc. etc.

2.º Dos puntos bastan para determinar la posicion de una recta, porque ellos fijan exactamente una misma direccion; ya que para esta no se necesitan mas que los puntos de llegada y de partida, quedando cubiertos por ellos todos los demás. Así, las líneas OA, OM, OC, etc., quedan enteramente determinadas por los extremos O y A, O y M, O y C, etc. De esto se infiere que, para nombrar una línea bastará nombrar sus dos extremos, y para un punto, la letra que haya en él.

3.º Dos rectas no pueden encontrarse mas que en un punto, porque dos determinan ya la posicion de una recta;

y si dos rectas se encontráran en dos puntos, se confundirían en una sola.

4.° Cuando una recta tenga dos puntos en un plano, toda ella se hallará en el mismo plano, porque dos puntos solos la determinan. Si se supusiera que con las condiciones espresadas no está toda ella en el plano, podría tirarse en él una recta que pasara por dichos dos puntos, y entonces habría de verificarse el imposible de tener dos rectas con dos puntos comunes.

8. Dos cantidades geométricas se llaman, y son iguales, cuando puestas la una sobre la otra se confunden exactamente. Así, dos líneas rectas, ó dos segmentos serán iguales, cuando se confundan en todo ó en parte, puestas la una sobre la otra.

9. Como las líneas rectas son cantidades, podrán hacerse con ellas las operaciones del cálculo. Para sumarlas y restarlas se tira primero una recta indefinida sobre la que se toma un punto que se llama punto de orígen; las rectas aditivas ó sumandos se colocan unas á continuacion de otras sobre esta recta indefinida desde el punto de orígen hácia un lado cualquiera, y las substractivas se colocan desde el punto á que ha llegado la última aditiva hácia el lado opuesto; es decir, si las aditivas ó el minuendo se colocan hácia la derecha, las substractivas ó el sustraendo hácia la izquierda, y al contrario. Así, (fig. 6.ª) si hubiéramos de sumar las tres líneas a, b, c, tiraríamos la línea indefinida AB, se fijaría el punto O, y se colocarían desde este punto hácia la derecha las líneas a, b, c, unas á continuacion de otras, y tendríamos la suma representada por el segmento OC. Si ahora hubiéramos de restar de esta suma las dos líneas d y e; desde el punto C hácia la izquierda se colocarían dichas líneas d y e, y el segmento Oe sería la diferencia entre las tres primeras y las dos últimas.

Cuando quiera hacerse á una recta una porcion de veces mayor, se tomará la recta por sumando tantas veces como unidades tenga dicho número. Esta operacion se resuelve como la anterior, cuando se trata de sumar líneas.

Para ver cuantas veces una recta contiene á otra, se colocará la segunda sobre la primera todas las veces que se pueda, y quedará resuelta la operacion. Si hemos de buscar (fig. 7.ª) cuántas veces la recta *m* está contenida en las AB, y CD, se colocará la recta *m* las veces que se pueda sobre las AB, y CD, y encontrarémos que está contenida 5 veces sobre la primera y 6 veces sobre la segunda, sobrando además en esta última la parte *mD*.

10. Llámase comun medida de dos ó mas rectas aquella que está de su misma especie contenida en cada una de ellas un número exacto de veces. Cuando dos ó mas rectas tienen una comun medida se llaman conmensurables, y cuando no la tienen, se dicen inconmensurables.

Para hallar la comun medida entre dos ó mas rectas se coloca la menor sobre la mayor todas las veces que se pueda, luego el resíduo sobre la menor todas las veces posibles, continuando del mismo modo hasta obtener un resíduo que quepa exactamente en el anterior. En tal caso el último resíduo será la comun medida buscada. Así, si hemos de buscar la comun medida (fig. 8.ª) entre las dos rectas AB, y CD, practicando la regla dada, encontrarémos que es *Cn*, que está contenida 23 veces en AB, y 7 en CD.

11. De lo dicho (n.º 7. 2.º y 3.º) se deduce que desde un punto á otro no se puede tirar sino una recta; y de la definicion de las líneas recta y curva (n.º 3) se infiere que desde un punto á otro podrán tirarse una infinidad de curvas, porque de un punto á otro pueden seguirse infinitas direcciones. Así, desde el punto A al punto B (fig. 2.ª) no podrá tirarse sino la recta AB, pero podrán tirarse las curvas ACB, ADB, AEB. etc. etc. De la misma definicion se infiere tambien 1.º que, de todas las líneas tiradas de un punto á otro la recta será la mas corta, porque no se aparta jamás de la direccion marcada entre uno y otro punto; y la curva y poligonal van apartándose mas ó menos de dicha direccion. Así, la recta AB, es mas corta que ACB, ADB, y AEB; y AB es mas corta que ACB, y ADB; 2.º

que si desde un punto á otro se tira una recta y diferentes curvas, cóncavas ó convexas, hácia un mismo lado, ó bien diferentes poligonales, la curva que mas se aleje de la recta será la mas larga, y lo mismo sucederá con la poligonal que mas se aparte de la recta; porque se apartarán mas de la direccion entre uno y otro punto. Así, la curva AEB, será mayor que ADB, y esta mayor que ACB, y la poligonal ADB será mayor que ACB. 3.° Que la menor distancia entre dos puntos deberá medirse por una línea recta.

Circunferencia.—Círculo.

12. Entre todas las líneas curvas que podemos concebir, la mas sencilla es la circunferencia del círculo. *Circunferencia* es una línea curva reentrante en sí misma cuyos puntos todos distan igualmente de uno interior que se llama centro. *Círculo* es el espacio cerrado por la circunferencia. Así, (fig. 9.ª) ACBE, sería una circunferencia, cuyo centro sería O, y cuyo círculo sería el espacio cerrado por el contorno ACBE. *Rádio* es aquella línea que partiendo del centro va á parar á un extremo cualquiera de la circunferencia; tales serían OA, OC, etc. *Diámetro* es toda línea que pasando por el centro toca con sus dos extremos á la circunferencia; tal sería AB, y CE. *Arco* es una porcion cualquiera de la circunferencia, como por ejemplo AC, CB, etc. *Cuerda* es una recta que desde el extremo de una arco vá á parar al otro extremo del mismo arco, como por ejemplo DF. *Sagita* es la parte del rádio interceptada entre el punto medio de un arco y su cuerda; tal sería IE. *Sector* de círculo es el espacio comprendido entre dos radios y un arco; tal sería COA, comprendido entre el arco CA, y los rádios OA, OC. *Segmento* de círculo es el espacio comprendido entre una cuerda y su arco; tal sería el espacio comprendido entre la cuerda DF, y su arco DEF.

De las definiciones del rádio y diámetro se sigue que, todos los radios de un círculo son iguales entre sí, porque todos miden distancias iguales; que todo diámetro es igual al duplo del rádio, y por tanto, que todos los diámetros de un mismo círculo son tambien iguales entre sí.

13. Dos circunferencias se llaman concéntricas cuando ambas están trazadas desde un mismo centro; tales serían (fig. 10.) ABD, y *abd*, las cuales tienen el mismo centro C. Se llaman escéntricas cuando parten de diferentes centros. Llámase *corona* ó *ánulo* el espacio comprendido entre dos circunferencias concéntricas; tal sería el espacio comprendido entre ABD, y *abd*.

Si dos circunferencias concéntricas se tocan en un punto, han de confundirse en una sola, porque serán iguales; pues que la distancia que va desde sus centros al punto de contacto es la misma que va desde los mismos centros á los demás puntos de cada una.

14. El diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales; porque doblando la figura por el diámetro, la parte inferior debe exactamente confundirse con la superior. Sea para esto ABDE (fig. 11.). Doblando la figura por el diámetro AD, la parte AED ha de confundirse exactamente con ABD, porque no puede pasar por mas arriba ni mas abajo. Por el supuesto tenemos CE$=$CB. Si suponemos que la parte inferior pasa por mas arriba de ABD, y toma la direccion AND, entonces resultará que CE$=$CN; luego tendrémos; CB$=$CN, lo que es imposible por ser CB parte, y CN todo. Si suponemos que cae por mas abajo, y toma la direccion AMD, entonces resultará CE$=$CM, pero como CE$=$CB, tendríamos CB$=$CM, lo que es imposible por la razon anterior.

De esto se sigue que la circunferencia pasa por todos los puntos del plano que distan del centro una magnitud igual con el rádio.

15. El diámetro es la mayor de todas las cuerdas, porque la suma de dos rádios siempre es mayor que cualquier cuerda. Si tenemos, por ejemplo la circunferencia ADHBF (fig. 12.), verémos que AB es mayor que AH. Sabemos que, (n.° 11. 1.°) AC$+$CH$>$AH, pero CH$=$CB; luego

sustituyendo, tendrémos; $AC+CB>AH$; ó bien, $AB>AH$.

16. En un mismo círculo, ó en circulos iguales á mayor arco corresponde mayor cuerda, y á mayor cuerda corresponde mayor arco; porque cuanto mayor sea el arco, tanto mas su cuerda se acerca al diámetro. Si tenemos la misma figura, y observamos que el arco AzDH es mayor que el otro AzD, podrémos probar que la cuerda AH del primero es mayor que AD cuerda del segundo. En el número anterior hemos visto que $AB>AH$. Luego la cuerda que mas se acerque á AB será mayor que otra; pero á AB mas se le acerca AH que AD; luego $AH>AD$. Siendo ahora la cuerda AH mayor que la otra AD, es claro que el arco AzDH es mayor que el otro AzD, porque las cuerdas están determinadas por los arcos; y así una cuerda mayor está determinada por un arco mayor; luego el arco AzDH que determina la cuerda $AH>$ que AzD que determina la cuerda AD.

17. En un mismo círculo, ó en circulos iguales, á arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y á cuerdas iguales corresponden arcos iguales. Fúndase lo primero en que, si dos arcos son iguales, puestos el uno sobre el otro se confundirán exactamente; y como los extremos de las cuerdas (n.º 12.) son tambien extremos de sus arcos, se habrán tambien de haber confundido dichos extremos; luego (n.º 7. 2.º) estas cuerdas han de ser iguales. Fúndase lo segundo en que, las cuerdas están determinadas por los arcos: luego cuerdas iguales están determinadas por arcos iguales.

18. Dos ó mas arcos se llaman conmensurables cuando tienen una comun medida, y cuando no la tengan son inconmensurables. Entiéndese por medida de un arco aquel que tirado con el mismo rádio está contenido en otro un número exacto de veces. Para hallar la comun medida á dos arcos tirados con igual rádio se opera del mismo modo que para hallar la de dos ó mas rectas (n.º 10.). Así hallaríamos que, la comun medida á los dos arcos AB, y *ab*, (fig. 13.) es B*d*, y que está contenida 10 veces en AB, y tres veces en *ab*.

19. Llámase *secante* en una circunferencia aquella cuerda que, prolongada por ambos extremos del arco, corta la circunferencia en dos puntos. Tal sería (fig. 14.) AB, que corta á la circunferencia en los puntos x, z. —Llámase *tangente* una recta que solo toca á la circunferencia en un punto llamado punto de contacto. Tal sería la recta CE que no tiene sino el punto D comun con la circunferencia ARBD. —Dos círculos se llaman *secantes* cuando están situados de modo que sus circunferencias se cortan en dos puntos. Tales serían los círculos ABC, y DEF, (fig. 15.) cuyas circunferencias se cortan en los puntos m y n. —Dos círculos se llaman *tangentes*, cuando sus circunferencias se tocan en un punto. Tales serían los círculos ABC, y CEF, (fig. 16.), cuyas circunferencias se tocan en el punto C.

20. Hemos visto (n.º 14) que el diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales. Estas partes se denominan *semicircunferencias*, y *semicírculos*. Por igual razon podrémos denominar un *cuadrante*, *sectante*, *octante*, etc. tanto de la circunferencia como del círculo, cuanto se considere una cuarta parte, sexta, octava, etc., ya sea de la circunferencia ya del círculo.

21. La circunferencia del círculo se considera dividida en 360 partes iguales que se llaman grados, cada grado en 60 partes iguales llamadas minutos: cada minuto en 60 segundos; etc. Segun esto, cada *cuadrante* vale 90 grados. Los grados se indican con una *o* sobre el número á la derecha, los minutos con un acento, los segundos con dos, etc. Así, 4.º 6′9″ se leerían 4 grados 6 minutos 9 segundos. Estas divisiones de la circunferencia no tienen magnitud absoluta, sino relativa tan solamente á la magnitud de la circunferencia á que pertenecen. Cada circunferencia, sea de la magnitud que quiera, consta de las 360 partes; sin embargo estas partes serán mayores ó menores segun la mayor ó menor magnitud de la circunferencia á que se refieran. Tal vez algun dia llegue á adoptarse la division de la circunferencia en 400 grados. En este caso cada grado sería igual á 100 minutos, cada minuto igual á 100 segundos, etc.

Ángulos.

22. Llámase *ángulo* el espacio comprendido por dos líneas llamadas *lados* que se encuentran en un punto que se denomina *vértice* del ángulo. Tal sería (fig. 17) el espacio comprendido por BA y CA, cuyo vértice sería el punto A.

Cuando un ángulo está solo, se enuncia nombrando solamente la letra del vértice. Cuando en un mismo punto concurren muchos ángulos, entonces para nombrar á cada uno de ellos se leen las tres letras, haciendo de manera que la del vértice sea siempre la del medio. Así, como vemos que en el punto A concurren dos ángulos, leerémos cada uno de ellos diciendo; DAB, ó BAD, y BAC, ó CAB. Sin embargo lo mas sencillo es poner una letra minúscula en la parte interior del vértice, y leer el ángulo por sola la letra minúscula. Así, los dos mismos ángulos se leerían, diciendo, el ángulo *m*, y el ángulo *n*.

23. Segun la definicion dada del ángulo se deduce que, el valor de un ángulo no depende de la mayor ó menor longitud de los dos lados que lo formen, sino de la abertura ó inclinacion marcada por los lados. Por tanto, dos ángulos podrán ser iguales ó desiguales, aunque tengan desiguales ó iguales sus lados respectivos.

24. Los ángulos se clasifican por razon de sus lados, y por razon de su abertura ó inclinacion. Por razon de sus lados se dividen en *rectilíneos*, *curvilíneos*, y *mistilíneos*; y por razon de su abertura se dividen en *rectos*, *agudos*, y *obtusos*. Llámase ángulo rectilíneo el que está formado por dos líneas rectas, tales serían (fig. 17.) DAB, y BAC. Llámase curvilíneo el que está formado por dos lineas curvas; tales serían (fig. 2.ª) EAD, y DAC. Llámase mixtilíneo el que está formado por una recta y una curva; tal sería, (fig. 2.ª) CAB. Llámase angulo recto el que vale 90 grados; tales serían (fig. 18.) DCA, y DCB. Llámase agudo el que vale menos que un recto; tal sería RCB; y llámase obtuso el que vale mas de un recto; tal seria en la misma

figura, RCA. De esto se deduce que, el valor del ángulo agudo está entre cero y 90 grados, y el del obtuso está entre 90 y 180 grados.

25. Llámanse ángulos *adyacentes* ó *contiguos* aquellos que yacen ó descansan sobre una recta interceptada por otra; tales serían (fig. 17.) m y n, que descansan sobre DC interceptada por BA. Llámanse ángulos *opuestos al vértice* aquellos que, siendo opuestos entre sí, el uno está formado por la prolongacion de los lados del otro, tales serían (fig. 19.) m y n, x y z.

26. Todo ángulo recto está formado por líneas *perpendiculares*, y todo ángulo agudo ú obtuso lo está por líneas *oblícuas*. Llámase línea *perpendicular* aquella que cae sobre otra sin inclinarse mas hácia un lado que á otro, y llámase *oblícua* aquella que se inclina mas hácia un lado que á otro. Así, (fig. 18.) DC sería perpendicular á AB, y RC le sería oblícua.

27. Llámase *suplemento* de un ángulo lo que falta á otro para valer dos rectos; y entiéndese por *complemento* lo que falta ó sobra á otro ángulo para valer un recto. De esto se deduce que los complementos pueden ser por *esceso* ó por *defecto*; pero que los suplementos siempre deben serlo por *defecto*. Así, (fig. 18.)el ángulo ACR es suplemento de RCB, porque á RCB le falta ACR para valer dos rectos. Por igual razon RCB es suplemento de ACR. El ángulo RCD es complemento de ACR por esceso, porque á ACR le sobra el RCD para valer un recto; y RCD es complemento de RCB por defecto, porque á este le falta el RCD para valer un recto. De esto se infiere que, ángulos que tengan suplementos iguales, siempre serán iguales; porque á cada uno le faltará una misma cosa para valer dos rectos; pero ángulos que tengan complementos iguales, tan solo serán iguales, cuando ambos complementos sean de una misma especie; á saber, ó ambos por esceso, ó ambos por defecto.

28. Todos los ángulos rectos han de ser iguales entre sí, porque el valor de cada uno de ellos es igual á 90 grados. Dos ángulos, que puestos el uno sobre el otro se con-

fundan exactamente, serán iguales. Si dos ángulos son iguales, puestos el uno sobre el otro se confundirán exactamente. Supongamos (fig. 20) BAC $=$ *bac*; si colocamos el *bac* sobre BAC, se confundirán exactamente. Porque, coloquemos el *bac* sobre el BAC, de modo que el lado *ca* cayga sobre CA, en este caso *ab* tomará la misma direccion de AB; porque si no se verifica, la línea *ab* tomará una direccion por la parte superior, ó por la parte inferior, y ninguna de estas dos cosas puede ser. Si suponemos que toma la direccion por la parte superior, y suponemos que está representada por AN, entonces tendrémos; NAC $=$ *bac*, pero como antes teníamos BAC $=$ *bac*, resultará; NAC $=$ BAC; lo que es imposible, por ser NAC todo y BAC parte. Si suponemos ahora, que el lado *ab* pasa por la parte inferior de AB, y toma la direccion AM, entonces tendrémos; MAC $=$ *bac*; pero como antes teníamos BAC $=$ *bac*, resultará; MAC $=$ BAC; lo que es imposible, por ser MAC parte, y BAC todo.

29. La suma de dos ángulos adyacentes ó contiguos es igual á dos rectos; porque es igual á la suma de dos ángulos formados por dos líneas perpendiculáres. La suma de dos rectos se señala por esta letra griega π, llamada *pi*, y por consiguiente, un recto se indica por $\frac{1}{2}\pi$. Si tenemos por ejemplo (fig. 18) las dos líneas AB y RC, la suma de los dos ángulos adyacentes ACR $+$ RCB ha de ser igual á dos rectos. Concibamos para esto tirada la perpendicular DC, y tendrémos (n.° 26.): ACD $+$ DCB $= \pi$. Pero ACD $+$ DCB $=$ ACD $+$ DCR $+$ RCB $=$ ACR $+$ RCB: luego ACR $+$ RCB y π son dos cosas iguales á una tercera, á saber, ACD $+$ DCB; luego serán iguales entre sí, y tendrémos; ACR $+$ RCB $= \pi$.

30. De lo dicho en el párrafo anterior se sigue 1.° que si uno de dos ángulos adyacentes es recto, el otro lo será tambien; porque la suma de los dos ha de valer dos rectos: 2.° que la suma de todos los ángulos formados al rededor de un punto hácia un mismo lado de una recta AB (fig. 5.ª) ha de valer dos rectos ó π, porque su suma es igual á la suma de dos ángulos formados por dos líneas perpendicula-

res, tales como AB y CO; 3.° que, por consiguiente, la suma de todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto O hacia uno y otro lado de una recta AB es igual á cuatro rectos ó 2π.

31. Si desde el extremo de una recta tiramos otras dos, una hácia la derecha y otra hácia la izquierda, de modo que la suma de los dos ángulos contiguos sea igual á π, las dos rectas tiradas desde el extremo de la primera á diferentes lados no formarán mas que una, ó la una será prolongacion de la otra. Porque, si tenemos (fig. 21.) desde el extremo C de la recta DC tiradas las dos rectas CA y CB, de modo que $ACD+DCB=\pi$, la AC prolongada debe tomar la direccion de CB, porque no puede tomar otra diferente ni por la parte superior, ni por la inferior. Si suponemos 1.° que AC prolongada toma la direccion CE, entonces tendrémos; (n.° 29.) $ACD+DCE=\pi$, y como teníamos ya por el supuesto $ACD+DCB=\pi$, resultará; $ACD+DCE=ACD+DCB$. Suprimiendo ahora ACD de ambos miembros, sale; $DCE=DCB$, lo que es imposible, por ser el uno todo y el otro parte. Si suponemos 2.° que AC prolongada toma la direccion CF, tendrémos (n.° 29.) $ACD+DCF=\pi$, luego por el supuesto resultará; $ACD+DCF=ACD+DCB$. Suprimiendo ahora ACD de ambos miembros, sale; $DCF=DCB$, lo que es imposible, por ser el uno todo y el otro parte.

32. Los ángulos opuestos al vértice son iguales; porque la suma de dos ángulos adyacentes ó contigüos es igual á π. Si tenemos (fig. 19.) los ángulos m, x, n, z, probarémos que los opuestos al vértice son iguales á saber $m=n$, y $x=z$.

Por lo demostrado (n.° 29) tenemos; $m+x=\pi$, y por lo mismo; $x+n=\pi$. Luego, $m+x=x+n$. Suprimiendo ahora la x de ambos miembros, resulta; $m=n$. Ahora podremos decir por lo mismo; $x+n=\pi$; y tambien $n+z=\pi$Luego, $x+n=n+z$. Suprimiendo ahora la n de ambos miembros, resulta; $x=z$.

Medida de los ángulos.

33. Llámase medida de un ángulo el que está contenido en otro un número exacto de veces. Así, el ángulo *bOd* (fig. 22.) sería medida de BOC, si estuviera contenido en este cierto número de veces. Si dos ángulos tienen una comun medida, se llaman conmensurables, y si no la tienen, se llaman inconmensurables.

34. Si dos ángulos son iguales, los arcos descritos desde sus vértices con un mismo rádio tambien son iguales. Sean, para su demostracion, los dos ángulos BAC y *bac*, (fig. 23.). Si desde sus vértices respectivos A, *a*, con un mismo rádio tal como A*e* se tiran entre sus lados los arcos *ed*, *e'd'*, al superponerse estos ángulos, por ser iguales, los lados del uno habrán de tomar la direccion de los lados del otro; luego puesto el *bac* sobre el BAC, el lado *ab* tomará la misma direccion de AB, y como la parte *ae'* del uno y la parte A*e* del otro son iguales por rádios de un mismo círculo, y lo mismo *ad'* y A*d*, resultará que el punto *e* se confundirá con *e'* y el *d* con *d'*, y por consiguiente los arcos *e'd'* y *ed* coincidirán en toda su longitud, y serán iguales.

35. Si desde el vértice de un ángulo dado se describe con un rádio cualquiera un arco de círculo comprendido entre sus dos lados, y despues se divide dicho arco en partes iguales, y desde los puntos de division se tiran rádios al vértice del ángulo, los ángulos parciales que resulten serán iguales. Sea para su demostracion el ángulo BOC (fig. 22.); si haciendo centro en O con un radio O*b* describimos el arco *bc*, y dividimos este arco en las partes iguales *bd*, *de*, *en*, *nc*, y tiramos los rádios *dO*, *eO*, *nO*, los ángulos *bOd*, *dOe*, *eOn*, *nOc* han de ser iguales. Doblando la figura por el rádio *dO*, el arco *db* se confundirá con *de* por ser iguales; pero como *b* y *e* no solo son extremos de los arcos *bd* y *de*, sino tambien de los radios *Ob*, y *Oe*, tenemos que estos dos rádios (n.° 7. 2.°) se habrán confundido; y como *Od* es comun á los dos ángulos *bOd* y *dOe*, estos dos ángulos se ha-

brán confundido, y por consiguiente serán iguales. Como igual raciocinio podría hacerse con totos los demás, resulta que todos estos ángulos son iguales.

36. Los ángulos son proporcionales con los arcos descritos desde sus vértices con un mismo rádio. Sean para esto los dos ángulos COA, y *coa* (fig. 24); si con un mismo rádio OA describimos los arcos AC y *ac*, resultará esta proporcion; COA : *coa* : : AC : *ac*. (A).

Puede suceder que los arcos sean conmensurables ó inconmensurables. En uno y otro caso se verifica la proporcion establecida.

1.° Si los arcos AC y *ac* son conmensurables, y suponemos que tienen por comun medida AB, es claro que esta comun medida estará una porcion de veces contenida en AC, y otra porcion exacta de veces en *ac*. Supongamos que sea m el número de veces que AB está contenido en AC, y n el número de veces que la misma AB está en *ac*. Es claro que, como la cantidad que contiene se llama dividendo, la contenida divisor, y cociente el número de veces que el divisor está contenido; AC y *ac* serán los dividendos; AB el divisor comun; y m y n los cocientes respectivos. Por otra parte sabemos que el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente. Por tanto, tendrémos; $AC = AB \times m$, y $ac = AB \times n$. Ahora sabemos que, dadas dos ó mas igualdades ó ecuaciones, se podrá formar proporcion con ellas, diciendo; primer mienbro es á primer miembro, como segundo es á segundo; porque cada igualdad se puede poner en forma de razon; cada razon será de igualdad, y por consiguiente una razon será igual á otra. Por tanto, de las dos ecuaciones anteriores saldrá; $AC : ac : : AB \times m : AB \times n$, ó bien tachando la AB, $AC : ac : : m : n$. (1.ª). Si ahora por los puntos de division que haya producido en los dos arcos la comun medida tiramos los rádios OB, etc., y *ob*, etc., tendrémos (n.° 35.) el ángulo COA dividido en tantos ángulos iguales con BOA cuantos sean los puntos de division producidos por la comun medida en el arco AC, y como m era el número de veces contenido en AC, tendrémos;

COA $=$ BOA $\times m$; y por igual razon será tambien $coa =$ BOA $\times n$. Formando ahora proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; COA : coa : : BOA $\times m$: BOA $\times n$, ó bien tachando el BOA, COA : coa : : m : n. (2.ª). Ahora vemos que esta proporcion y la primera tienen una razon comun; por lo que formando proporcion con las otras dos razones, sale; AC : ac : : COA : coa, que permutada, da; COA : coa : : AC : ac. (3.ª), la cual es la misma de (A).

2.º Si los arcos AC y ac son inconmensurables, podrémos dividir el arco mayor AC en dos partes iguales, luego en otras dos, etc. Tomando á una de estas últimas divisiones, y colocándola sucesivamente sobre el arco ac, es claro que, por ser inconmensurables los dos arcos AC y ac, ninguna de estas divisiones podrá caer sobre el punto c. Sea pues el punto e el punto de division mas aproximado á c, y entonces ya tenemos que los dos arcos AC y ae serán conmensurables: tirando pues el rádio oe, tendrémos por la primera parte demostrada que, los ángulos COA y eoa serán proporcionales con sus arcos AC y ae, y se tendrá; COA : eoa : : AC : ae. (4.ª). Pero á medida que vamos dividiendo el arco AC cada division va siendo mas pequeña, y por fin es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; por tanto, una de estas divisiones tan pequeñas cabrá mas veces en el arco ac, y así el punto e que era una de las divisiones anteriores irá aproximándose mas y mas á c á medida que estas divisiones vayan siendo mas pequeñas. Al mismo tiempo que e se acerque á c, el ángulo eoc tambien se acerca del mismo modo al total coa; por consiguiente, la misma relacion que el ángulo total coa tenga con eoa, esta misma tendrá el arco total ac con ae, y tendrémos; coa : eoa : : ac : ae. (5.ª). Alternando ahora las proporciones 4.ª y 5.ª resulta; COA : AC : : eoa : ae, y coa : ac : : eoa : ae. Pero estas dos últimas proporciones tienen la última razon comun; luego con las dos primeras se puede formar proporcion, y será; COA : AC : : coa : ac, la que alternada da; COA : coa : : AC : ac, la cual es la misma de (A).

De esto y de lo dicho en el número 34 se sigue, que los ángulos se miden por medio de arcos de círculo descritos entre sus lados desde los vértices con un rádio qualquiera; y como las circunferencias se consideran divididas en grados, minutos, segundos, etc., se dice que un ángulo es de tantos grados como el arco de que nos servimos para medirlo. Por tanto, dos ángulos que tengan arcos iguales tambien serán iguales.

37. Con las nociones anteriores podrán resolverse los siguientes problemas.

1.° En un punto A de una recta AB, formar un ángulo igual á otro dado *cab* (fig. 25.).

Haciendo centro en A con un rádio cualquiera, por ejemplo, *ar*, tírense entre los lados del ángulo dado *cab* el arco *rs*; con el mismo radio hágase centro en A, y tírese el arco indefinido *mp*; tómese una abertura de compás igual á *rs*, y haciendo centro en *m* córtese el arco *mp* en *n*; tírese desde A por el punto de interseccion la recta AC, y resultará el ángulo CAB$=$*cab*, porque sus arcos *rs* y *mn* son iguales.

2.° Dados dos ángulos *def*, y *abc* (fig. 26.) hallar su suma.

Tírese la recta AB: desde los vértices *e* y *b* con un mismo rádio descríbanse los dos arcos *qp* y *dem*; desde el punto A de la recta AB tírese con el mismo rádio el arco indefinido *xq*, y desde *q* colóquense uno á continuacion de otro los dos arcos *qp* y *dm*, cuya suma estará representada por el arco *q'p'm*; haciendo pasar ahora por los puntos A y *m* la recta AC, resultará el ángulo CAB $=$ *def* $+$ *abc*, porque el arco *q'p'm* es igual á *qp* $+$ *mn*.

3.° Dado un ángulo hacerlo un número cualquiera de veces mayor.

Se resolvería como el caso anterior colocando sobre el arco indefinido tantas veces como se pudiera el arco del ángulo dado, y entonces haciendo pasar una recta por el extremo de otra recta y por el último punto de division del arco indefinido, se tendría el ángulo tantas veces mayor.

4.° Dado el ángulo CAB (fig. 27.) dividirlo en dos ángulos iguales.

Haciendo centro en A con un rádio cualquiera, por ejemplo, AP tírese el arco de circulo QP; ahora con el mismo rádio, ú otro diferente tal como PT, haciendo centro en Q y P fórmese la interseccion T, y haciendo pasar una recta por los puntos A y T tendremos los dos angulos CAT, y TAB iguales entre sí, por ser sus arcos QR y RP iguales. Para hacer ver como son iguales los arcos QR y RB basta considerar que la recta AT tiene dos puntos A y T equidistantes de Q y P por construccion; y como dos puntos determinan la posicion de una recta (n.º 7. 2.º), se sigue que el punto B que es uno de los puntos de AT tambien es equidistante de Q y P; pero R es punto no solo de AT sino tambien de QP, luego QR=RP, y por consiguiente sus dos ángulos respectivos tambien son iguales.

Líneas perpendiculares y oblicuas.

38. Dijimos (n.º 26.) que la línea *perpendicular* era aquella que cayendo sobre otra no se inclinaba mas hácia á un lado que á otro, y que la *oblicua* se inclinaba mas hácia un lado que á otro. De esto se sigue que los ángulos formados por lineas perpendiculares han de ser iguales, porque la inclinacion ó abertura era igual; y que los ángulos formados por una oblicua al caer sobre otra han de ser desiguales, por ser desigual tambien la inclinacion ó abertura de entrambos. Cuando una recta cae sobre otra perpendicularmente, el punto en donde se encuentran las dos rectas se llama *pié* de la perpendicular. Unicamente la línea perpendicular es la que forma ángulos rectos, porque la perpendicular forma los ángulos adyacentes iguales, y la suma de los ángulos adyacentes ó contiguos es igual á dos rectos.

39. No debe confundirse la línea recta con la perpendicular, ni con la oblicua. Toda linea perpendicular es recta, mas no toda linea recta es perpendicular. Toda línea oblicua es recta, pero no toda línea recta es oblicua.

40. Cuaudo una recta es perpendicular á otra, la segunda es tambien perpendicular á la primera. Supongamos para

esto (fig. 28.) que la recta CD es perpendicular á AB, en este caso AB tambien lo es á CD. Porque, por ser CD perpendicular á AB los ángulos *m* y *n* adyacentes á AB son rectos. Ahora, por ser el ángulo *n* recto, su contiguo *x* tambien lo ha de ser; pero por lo dicho (n.° 38.) solamente la perpendicular forma ángulos rectos; luego AB ha de ser perpendicular á CD. De esto se sigue que si dos perpendiculares se cruzan, como en el presente caso, forman cuatro ángulos rectos y si dos rectas al cortarse forman un ángulo recto, los otros tambien lo serán, y los rectos serán perpendiculares.

41. Desde un punto dado de una recta no se le puede levantar mas que una perpendicular; porque, si suponemos (fig. 18.) que desde el punto C de la recta AB hemos levantado la perpendicular CD, y CR tambien lo es, los ángulos ACD, y ACR habrán de ser iguales por rectos, lo que es imposible, por ser el uno todo y el otro parte.

42. Si desde un punto fuera de una recta se le tira una perpendicular y diferentes oblicuas, se verificarán tres cosas; 1.ª la perpendicular, será la mas corta; 2.ª las oblicuas que disten igualmente de la perpendicular serán iguales; 3.ª la oblicua que mas se separe de la perpendicular será la mas larga.

1.° Si suponemos (fig. 29.) la perpendicular AB, y las oblicuas AE, AC, y AD, tendrémos; $AB < AE$ y $AB < AC$ y $AB < AD$. Porque; si prolongamos la AB hasta H, de modo que, $BH = AB$, y además unimos el punto E con H por medio de EH; doblando la figura por EC, resultará que H se confundirá con A por ser $BH = AB$. De esto resultará que, $EH = AE$, porque H es extremo no solo de BH, sino tambien de EH. Así, pues, tendrémos (n.° 11, 1.°) $AH < AE + EH$; ó bien, $2\,AB < 2\,AE$. Dividiendo ahora por 2 ambos términos de la inecuacion, no se alterará y resultará; $\frac{2\,AB}{2} < \frac{2\,AE}{2}$, ó sea, $AB < AE$. Como igual raciocinio se pudiera formar acerca de AB con respecto á AC y AD, tenemos; $AB < AE$, y $AB < AC$, y $AB < AD$.

2.º Si suponemos la misma perpendicular AB, y las oblicuas AE y AC equidistantes de AB, por hacer $BE = BC$ por construccion, tendrémos; $AE = AC$. Porque, doblando la figura por la perpendicular AB, la parte BC caerá exactamente sobre BE, por ser iguales; luego el punto C se confundirá con E. Luego las rectas AE y AC tienen sus extremos confundidos; luego son iguales, y resulta; $AE = AC$.

3.º $AD > AC$. Porque haciendo $BH = AB$, y tirando las rectas CH, y DH, resultará; $CH = AC$; y $DH = AD$; porque doblando la figura por la recta CD, el punto H se confundirá con A, por ser $BH = AB$; pero, como H no solo es extremo de BH, sino tambien de CH, y DH, resultará; $CH = AC$, y $DH = AD$. Así, pues, tendrémos (n.º 11. 1.º); $AD + DH > AC + CH$; ó bien, $2\,AD > 2\,AC$. Dividiendo ahora por 2 ambos términos de la inecuacion, esta subsistirá, y tendremos; $\frac{2\,AD}{2} > \frac{2\,AC}{2}$; ó sea, $AD > AC$.

43. De esto se sigue 1.º que la perpendicular debe medir la verdadera distancia de un punto á otro; porque desde un punto á otro la perpendicular tirada ha sido la línea recta mas corta que ha podido tirarse: y como la recta mas corta que puede tirarse de un punto á otro no es mas que una, síguese de esto que desde un punto fuera de una recta no se le puede bajar mas que una perpendicular; 2.º desde un punto dado fuera de una recta no se le pueden tirar tres rectas iguales, porque la oblicua que mas se separe de la perpendicular es la mas larga y solamente dos oblicuas pueden distar igualmente de la perpendicular, una á cada lado.

44. Si una perpendicular tiene un punto equidistante de otros dos de la línea á que lo es, todos los puntos de la primera están á igual distancia de los mismos de la segunda; porque las oblicuas que desde un punto cualquiera de una perpendicular se tiran á otra recta á dos puntos equidistantes de la primera son iguales (n.º 42. 2.ª); luego mi-

den distancias iguales. Como dos puntos ya determinan la posicion de una recta, se sigue que, si una recta tiene dos puntos equidistantes de otros dos de la recta sobre que cae, le será perpendicular; pues que entonces toda ella tiene todos sus puntos á igual distancia de otros dos de la recta sobre que cae, y cuando esto se verifica, la una es perdendicular á la otra.

45. Si una perpendicular tiene un punto equidistante de otros dos de la linea sobre que cae, debe pasar por todos los puntos que en dicho plano están á igual distancia de los mismos. Porque, si suponemos (fig. 30.) que la DC es perpendicular á AB, y que el punto D dista igualmente de A que de B, y la DC no pasa por todos los puntos equidistantes de A y de B, sino que R es uno de los puntos á igual distancia de A y de B; entonces podrémos tirar la DR que por lo dicho en el número anterior sería perpendicular á AB; pero esto es imposible, porque resultarían iguales los ángulos ADR y ADC por rectos.

46. Con estas nociones podrán resolverse los siguientes problemas.

1.° Desde un punto C de la recta AB (fig. 31.) levantarle una perpendicular.

Haciendo centro en dicho punto C con un radio cualquiera tómense las dos partes iguales C*m* y C*n*, ahora con un radio cualquiera un poco mayor que la mitad de *mn* hágase centro en cada uno de estos puntos, y trácense por abajo ó por arriba dos arcos de círculo que se crucen en *r*, y por el punto C y *r* tírese la recta DC que será la perpendicular pedida; porque tendrá los dos puntos *r* y C á igual distancia de *m* y *n* de la recta AB sobre que cae.

2.° Dada la recta AB (fig. 32) dividirla en dos partes iguales.

Haciendo centro en A y en B extremos de AB con un radio cualquiera trácense por la parte superior é inferior dos arcos de círculo que se corten en E y G, y haciendo pasar por estos dos puntos la recta CG habrá divídido á la recta AB en dos partes iguales en el punto H, de modo que;

AH = BH; porque, como EG tiene sus extremos á igual distancia de A y B, será perpendicular á AB (n.º 44); por esta razon todos los puntos de EG estarán á igual distancia de A y B (n.º 44); luego, como H es uno de estos puntos de EG estará á igual distancia de A y B.,

3.º Desde un punto A fuera de una recta BC (fig. 33.) bajarle una perpendicular.

Con un radio de compás cualquiera hágase centro en dicho punto A, y trácense dos arcos de círculo uno á la derecha y otro á la izquierda que corten á la BC en los puntos D y E; con el mismo radio ú otro cualquiera desde los puntos D y E trácense dos arcos de círculo que se corten en un punto tal como F, y por este punto y por A tírese la recta AF que será la perpendicular pedida; porque tendrá sus dos extremos á igual distancia de dos puntos D y C de la recta BC, sobre que cae.

4.º Desde el extremo B de la recta AB (fig. 34) que no se puede prolongar, levantarle una perpendicular.

Desde otro punto de la misma recta tal como D levántese una perpendicular CD por el método explicado (1.º), y tendrémos el ángulo r recto (n.º 26): tírese entonces con un rádio cualquiera el arco de circulo mn, y con el mismo rádio desde B trácese el arco pq igual con mn, y haciendo pasar la recta EB por los dos puntos B y q tendrémos esta recta perpendicular á AB; porque tendrá el ángulo $s = r$ (n.º 34 y 36) y como r es recto, s tambien lo será; y por tanto EB perpendicular á AB (n.º 40.)

Lineas paralelas.

47. Llámanse líneas *paralelas* aquellas que, tiradas en un mismo plano, no pueden encontrarse por mas que se prolonguen: tales serían (fig. 35) AB, y CD. De esto se deduce 1.º que dos perpendiculares á una tercera son paralelas; porque si suponemos (fig. 36.) que EC y FD son perpendiculares á AB, y no son paralelas, podrán, prolongadas indefinidamente, encontrarse en un punto, y entonces ten-

dríamos desde un mismo punto tiradas dos perpendiculares á la recta AB, lo que es imposible (n.° 43. 1.°). 2.° Las paralelas están equidistantes en todos sus puntos; de otro modo podrían encontrarse. 3.° Si entre dos paralelas AB, CD, (fig. 37.) se tiran diferentes perpendiculares como EF, GH, HN, estas habrán de ser iguales porque miden distancias iguales; por consiguiente; partes de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales.

48. Siendo EC y FD (fig. 36.) perpendiculares á AB; y por consiguiente paralelas; como desde el punto D fuera de EC no se puede tirar á EC sino la perpendicular DA, y desde el mismo punto D no se puede levantar sino la perpendicular DF; se sigue que por un punto dado no se puede tirar mas que una paralela á otra recta dada.

49. Si una recta es perpendicular á una de dos paralelas lo será tambien á la otra, ó bien la otra paralela será tambien perpendicular á dicha recta. Si suponemos las dos paralelas EC y FD (fig. 36.) y además que AB sea perpendicular á EC, lo habrá de ser tambien á la otra FD; ó bien FD lo será tambien á AB; porque á no ser así, desde este punto D podríamos tirar una recta que fuera perpendicular á AB, y como EC por el supuesto es perpendicular á AB, y dos perpendieulares á una tercera son paralelas, tendriamos que EC y la otra perpendicular que tiráramos desde el punto D tambien serian paralelas; lo que es imposible, porque desde un mismo punto no se puede tirar mas de una paralela, segun lo demostrado en el número anterior.

50. Dos retas AB, y CD (fig. 35) paralelas á una tercera EF son paralelas entre sí; porque dos ó mas cosas iguales á una tercera son iguales entre sí; luego dos ó mas rectas iguales en paralelismo á una tercera han de ser paralelas entre sí. Además sino lo fueran, tendriamos que se encontrarían en un punto, y resultarían dos paralelas tiradas desde un mismo punto; lo que es imposible (n.° 48).

51. Cuando dos rectas paralelas, tales como *ab*, y *de* (fig. 38) son cortadas por una recta tal como *ef*, la recta que las corte se llama *secante*.

Una secante forma con las paralelas ocho ángulos, cuatro internos como r, t, o, x; y cuatro externos como m, n, z, u. Estos ángulos comparados entre sí toman los nombres de ángulos *alternos internos*, *alternos externos*, *correspondientes*, *simplemente internos*, y *simplemente externos*, segun sus diferentes modos de comparacion.

Llámanse ángulos alternos internos los que están uno en cada paralela, los dos internos y cada uno á diferente lado de la secante; tales serían r y x, t y o. Llámanse alternos externos los que están uno en cada paralela, los dos externos, y cada uno á diferente lado de la secante; tales serían m y u, n y z. Llámanse correspondientes los que están uno en cada paralela, uno interno y otro externo, y los dos á un mismo lado de la secante; tales serían n y x, t y u, m y o, r y z. Llámanse simplemente internos los que están uno en cada paralela, los dos internos, y los dos á un mismo lado de la secante; tales serían t y x, r y o. Llámanse simplemene externos los que están uno en cada paralela, los dos externos, y los dos á un mismo lado de la secante; tales serían m y z, n y u.

52. Cuando las rectas cortadas por otra forman ángulos alternos internos iguales, dichas rectas son paralelas.

Sean para su demostracion (fig. 39) las dos rectas AB, y DE cortadas por FR, de modo que resulte $m=n$, ó bien, $p=q$; en este caso AB, y DE no podrán jamas encontrarse. Porque, si dividimos la parte OC en dos partes iguales tales como LO y LC, y por el punto L tiramos á DE una perpendicular GH, tendremos los ángulos en H iguales y rectos (n.^{os} 26 y 28). Como por otra parte suponemos $m=n$, si colocamos el ángulo n sobre m de manera que CL tome la direccion de OL, es claro que CH tomará la misma direccion de OG (n.° 28): como, pues, OH cortaba perpendicularmente á GH, tambien OG cortará perpendicularmente á la misma GH en el punto G, y los ángulos en G rectos é iguales con los de H. Luego tenemos las dos rectas AB y DE perpendiculares á una tercera GH; luego (n.° 47 1.°) son paralelas. Lo mismo tendriamos cuando $p=q$, porque en este caso ya resultaría $m = n$; porque (n.° 29.) $p + m = \pi$, y $n + q = \pi$: luego, $p + m = n + q$. Suprimiendo ahora en esta ecuacion los terminos p y q que suponemos iguales, resultaria; $m = n$.

53. De la proposicion anterior se infiere tambien que, dos rectas son paralelas, cuando cortadas por otra forman iguales los ángulos alternos externos, ó iguales los correspondientes, ó la suma de dos ángulos simplemente internos ó simplemente externos igual á π; porque en cada uno de estos casos ya se verifica que los ángulos alternos internos son iguales.

En efecto. Supongamos 1.° $u = s$, ó $r = t$. En este caso ya se verifica que $u = p$ por opuestos al vértice, y $s = q$ por la misma razon. Luego, si en la ecuacion $u = s$, en lugar de u ponemos su igual p, y en lugar de s su igual q, resultará: $p = q$, que son alternos internos. Del mismo modo se verifica que $r = m$, y $t = n$ por opuestos al vértice. Luego, si en la ecuacion $r = t$, en lugar de r ponemos su igual m, y en lugar de t su igual n, resultará; $m = n$, que son alternos internos.

2.° Si suponemos $r = n$, como $r = m$ por opuestos al vértice, tendremos que si en la ecuacion del supuesto $r = m$, en lugar de r ponemos su igual m, se nos convertirá en $m = n$ que son alternos internos. Del mismo modo si $p = s$, como $s = q$, tendrémos; $p = q$ que son alternos internos. Igual raciocinio podría hacerse con los correspondientes del otro lado de la secante.

3.° Si suponemos $p + n = \pi$, como $p + r = \pi$ (n.° 29), tendrémos; $p + n = p + r$. Suprimiendo ahora de ambos miembros el término igual p, resulta; $n = r$, que son correspondientes; pero cuando esto se verifica, los alternos internos son iguales, (2.°). Si suponemos $r + s = \pi$; como $r + p = \pi$, tendrémos; $r + s = r + p$, suprimiendo de ambos miembros el término igual r, resulta; $s = p$ que son correspondientes. Lo mismo podría decirse de los ángulos del otro lado de la secante.

54. Si dos paralelas son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos serán iguales.

Sean para su demostracion las dos rectas AB, y DE paralelas cortadas por la secante FR, (fig. 39.), y resultará, $m = n$, y $p = q$. Porque, siendo las dos rectas paralelas, estarán equidistantes en todos sus puntos; por otra parte, siendo recta la línea secante FR, tendrá todos sus puntos F, O, C, R, en una misma direccion; luego las *aberturas* ó *ángulos* respectivos formados por esta secante en cada una de las dos paralelas serán iguales; pero estos son m y n que son agudos, y p y q que son obtusos; luego se sigue que $m = n$, y $p = q$ que son los alternos internos.

55. De la proposicion anterior se infiere que, si dos paralelas son cortadas por una secante, formarán iguales los ángulos alternos externos, y los correspondientes; y además que la suma de dos simplemente internos, ó externos será igual á dos rectos; porque cada uno de estos casos se verifica cuando los ángulos alternos internos son iguales (n.º 53, 1.º 2.º y 3.º).

56. De la proposicion establecida en el número 53, 3.º se deduce que, si dos rectas cortadas por otra, forman con ella dos ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos, dichas lineas se encontrarán hácia la parte donde formen dichos ángulos.

57. Dos ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales cuando tengan sus vértices vueltos hácia un mismo lado, ó en situacion enteramente opuesta; y serán el uno suplemento del otro, ó la suma de los dos igual á π, cuan do sus vértices están vueltos á diferente lado.

Si tenemos (fig. 40) los dos ángulos m y n vueltos hácia el lado izquierdo formados por los lados AO y aD paralelos, y los otros dos BO y bC paralelos tambien entre sí, estos ángulos m y n serán iguales. Porque, $m = r$ por correspondientes entre las parlelas Cb y OB cortadas por la secante aD; además $r = n$ por correspondientes entre las paralelas AO y aD cortadas por la secante OD. Luego, si en la ecuacion $m = r$, en lugar de r ponemos su igual n, se nos convertirá en $m=n$. Si ahora $m=n$, como $m=o$ por opuestos al vértice, resulta $n=o$. Si ahora consideramos los dos ángulos s y n, verémos que s mira hácia la derecha, y n está vuelto hácia la izquierda; por tanto, resultara $s+n=\pi$, ó bien s suplemento de n. Porque, $m+s=\pi$; y como $m=n$, tendrémos finalmente; $s+n=\pi$.

58. Con estas nociones podrémos resolver el siguiente problema. Desde el punto C fuera de la recta AB (fig. 41) tírese una paralela á esta recta.

Desde dicho punto C bájese la recta DH perpendicular á AB, por el mismo punto C levantese á DH una perpendicular FG, y esta será la paralela pedida; porque dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.

Tambien podría resolverse, tirando desde dicho punto de un modo cualquiera una recta que cortará á la AB, y formar entonces ángulos alternos internos iguales, etc.

Lineas en el circulo — Ángulos inscritos.

59. Tres cosas pueden suceder á una recta que corta á la cuerda de un círculo: 1.ª que dicha recta pase por el centro; 2.ª que sea perpendicular á la cuerda; 3.ª que la divida en dos partes iguales. Siempre que se verifican dos de estas circunstancias, se verificará la tercera.

1.º Si suponemos (fig. 42.) la cuerda CD cortada por oF en el punto x, de modo que o sea el centro del círculo, y oF perpendicular á CD, resultará; xC$=x$D. Porque, siendo o el centro del círculo, dista igualmente de C y D; siendo oF perpendicular, y teniendo el punto o á igual distancia de C y D, todos los puntos de oF están equidistantes de C y D; como, pues, x es uno de dichos puntos, dista igualmente de C y D, y así xC$=x$D.

2.º Si suponemos la oF que sale del centro del circulo, y que además divide á la CD en dos partes iguales en el punto x, la oF será perpendicular á CD. Porque, por esta suposicion la recta oF tiene los dos puntos o y F á igual distancia de otros dos C y D de la recta sobre que cae: luego le es perpendicular.

3.º Si suponemos qne oF es perpendicular á CD, y la divide en dos partes iguales en x, esta recta pasará por el centro del círculo. Porque, por esta suposicion todos los puntos de oF están á igual distancia de C y D: luego como el centro es uno de ellos, la oF pasa por el centro.

60. Si una recta sale del centro, y divide perpendicularmente á una cuerda en dos partes iguales, tambien divide en dos partes iguales al arco que la cuerda subtende. Porque, si suponemos en la misma figura oF perpendicular á CD, y $xC=xD$, tendrémos el punto F á igual distancia de C y D; luego las cuerdas FT y FD que miden estas distancias, serán iguales; y como (n.º 17.) á cuerdas iguales corresponden arcos iguales, resulta; $FtC=FuD$.

61. Si en un círculo se tiran dos cuerdas paralelas, los arcos interceptados por estas serán iguales.

Si suponemos (fig. 42.) las cuerdas AB y CD paralelas, resultará $AC=BD$. Esto ya se desprende inmediatamente de lo que se dijo, á saber, que las paralelas están equidistantes en todos sus puntos. Además, si desde el centro o tiramos la oF perpendicular á una de estas dos cuerdas lo será tambien á la otra; y de esto resultará que el punto F estará á igual distancia de C y D, y además equidistante de los otros dos A y B: luego las cuerdas que desde F se tiráran á A y B, serian iguales, asi como lo serían las FC y FD; luego (n.º 17.) el arco $ACtF=BDnF$, y el otro $CtF=DnF$. Restando ahora ordenadamente estas dos ecuaciones, resulta; $ACtF-CtF=BDnF-DnF$, ó bien; $AC=BD$.

62. Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto, y por consiguiente, toda perpendicular al extremo de un radio es tangente del círculo.

Si suponemos (fig. 42) la recta CG tangente del círculo, no podrá tener mas que un punto tal como G comun con el círculo (n.º 19). Si bajamos pues el radio oF, este habrá de ser perpendicular á EG: porque oF es la línea mas corta que se puede tirar á EG en razon de que cualquiera otra que tiráramos caería fuera del círculo, y por consiguiente mayor que el radio oF; pero la línea mas corta es la perpendicular; luego oF es perpendicular á EG, y por consiguiente (n.° 40) EG perpendicular á oF.

63. Todo ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.

Si suponemos (fig. 43) la tangente AB y la cuerda BC, el ángulo ABC será igual á la mitad del arco BeC. Porque, si tiramos el diámetro HB, por lo demostrado en el número anterior, será perpendicular á AD en el punto B, y tendrémos (n.° 29.) $ABO = \frac{1}{2}\pi$. Si ahora tiramos el diámetro FG paralelo á la cuerda BC y además tiramos el radio Oe perpendicular á BC, dividirá el arco BeC en dos partes iguales, de modo que $Be = Ce$. Por otra parte, siendo Oe perpendicular á BC, lo será tambien á su paralela FG; luego el ángulo $eOG = \frac{1}{2}\pi$. Como, pues, dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, resultará; $ABO = eOG$. Además observamos que los ángulos parciales n y m son iguales, por alternos internos entre las paralelas BC y FG cortadas por la secante HB, luego será; $n = m$. Si pues, de los ángulos totales ABO y eOG, restamos sus parciales n y m, resultará; $ABO - n = eOG - m$, ó bien, $ABC = eOB$; pero eOB (n.° 40) $= Be$; luego $ABC = Be$, mitad del arco BeC.

De esto se sigue que el otro ángulo CBD es igual á $\frac{1}{2}$ BGHFC.

64. Llámase ángulo inscrito el que está formado por dos cuerdas que se tocan en un extremo de la circunferencia; tales serian (fig. 44) ABC, ADC, AEC, etc.

Todo ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados. Porque, si suponemos (fig. 43.) el ángulo inscrito CBH, formado por las dos cuerdas CB, y BH, resultará, $CBH = \frac{1}{2}$ CFH. Tirando la tangente atD por el punto B, han resultado los tres ángulos parciales ABC, CBH, y HBD, cuya suma vale la mitad de toda la circunferencia (n.° 30. 2.°), pero por lo demostrado en el número anterior tenemos; ABC$=\frac{1}{2}$ BeC; HBD$=\frac{1}{2}$ BGH; luego resulta; CBH $=\frac{1}{2}$ CFH.

65. Todo ángulo central es doble del inscrito. Porque si en la misma figura del número anterior tiramos el rádio OC, ha resultado el ángulo COH que se llamará central, por tener su vértice O en el centro del círculo. Pero el ángulo COH$=$CFH (n.° 34 y 36) luego, como el ángulo inscrito n no vale sino la mitad de CFH, resulta; COH$=$CFH$=$ $2n$.

66. De lo dicho en el número 64 se deduce 1.° que todos los ángulos inscritos que insistan sobre un mismo arco serán iguales, porque todos tendrán por medida la mitad de un mismo arco. Así, (fig. 44.) son iguales los tres ángulos ABC, ADC, AEC porque todos tienen por medida la mitad del arco AC. 2.° Que los ángulos inscritos cuyos lados insistan sobre los extremos de un diámetro serán rectos, porque tendrán por medida la mitad de la mitad de la circunferencia, ó sea, un cuadrante. Así, (fig. 45.) el ángulo ACB será recto. 3.° Que el ángulo inscrito será agudo, cuando sus dos lados abrazen un arco menor que la mitad de la circunferencia; porque tendrá por medida un arco menor que un cuadrante; tal seria el ángulo ACL. 4.° Que un ángulo inscrito será obtuso, cuando sus dos lados abrazen un arco mayor que la mitad de la circunferencia; porque tendrá por medida un arco mayor que la mitad de la circunferencia; tal sería el ángulo ACD.

67. Todo ángulo que tenga su vértice fuera del círculo, tiene por medida la mitad de la diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

Sea para esto el ángulo ABC (Fig. 92,) y su valor será: $\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AC}-de}{2}$. Porque, si por el punto e se tira la eF paralela á BA, tendrémos el ángulo FeC$=$ABC (n.° 57).

Pero FeC tiene por medida $\frac{\mathrm{FC}}{2}=\frac{\mathrm{AC}-\mathrm{AF}}{2}$. Luego ABC tendrá la misma medida; y como el arco AF = *de* (n.° 61.) la medida de ABC será $\frac{AC-AF}{2}=\frac{AC-de}{2}$.

68. Con estas nociones podrémos resolver los siguientes problemas: 1.° Dados tres puntos A, B, C, (fig. 46.) que no estén en linea recta, hacer pasar por ellos una circunferencia de círculo.

Unánse los tres puntos por medio de las dos rectas CB, y AB; divídanse cada una de estas por medio de las dos perpendiculares DR y EN que se encontrarán en un punto tal como O, cuyo punto de encuentro será el centro del círculo; entonces con un rádio OA, ó bien OB, ú OC descríbase la circunferencia que pasará por cada uno de estos tres puntos.

En efecto, estas dos líneas DM y EN se habrán de encontrar en un punto, porque no siendo paralelas las dos rectas AB y CD, tampoco lo pueden ser las dos perpendiculares que las dividan en dos partes iguales; pues que (n.° 47. 1.° y 4.°) dos perpendiculares son paralelas, cuando ambas lo son á una misma recta, ó á dos ó mas paralelas. Además el punto comun O será el centro del círculo, porque por ser uno de los puntos de la perpendicular DM, está á igual distancia de C y B; y por ser tambien punto de la perpendicular EN, está equidistante de A y B; de manera que el punto comun O está equidistante de los tres A, B, y C.

De esto se deduce que, si dado un círculo se trata de hallar su centro, no habrá mas que tirar dos cuerdas que se toquen en un punto, dividirlas en dos partes iguales por medio de dos perpendiculares, y el punto de interseccion de dichas perpendiculares será el centro del círculo.

2.° Dado un punto de una circunferencia tirar una tangente.

Sea este punto F (fig. 42.), bájese el rádio *o*F, y por el punto mismo F levántese á *o*F la perpendicular EG, la que (n.° 62.) será la tangente pedida.

3.° Desde el extremo de una recta que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.

Dada la recta CB (fig. 47.) si por el extremo B queremos levantar esta perpendicular, con un rádio cualquiera tal como OB, trácese el círculo *n*B*m* que corte á la recta dada en un punto tal como *m*; desde este punto tírese un diámetro como *mn*, y por el punto *n* extremo del diámetro bájese la recta *n*B que será la perpendicular pedida (n.° 66. 2.°).

4.° Desde un punto dado fuera de un círculo, tirar á este una ó dos tangentes.

Sea para esto el círculo DEBM (fig. 48.), y si desde el punto A fuera de dicho círculo tratamos de tirarle una ó dos tangentes, prolónguese el diámetro ME hasta unirlo con A; tómese entonces como diámetro toda la recta AM, y sobre esta como diámetro trácese una circunferencia DAB, que tendrá con la primera dos puntos de contacto D y B; tirando ahora desde A las dos rectas AD, y AB, estas serán las dos tangentes pedidas, porque tirando las dos cuerdas DC, y BC, se verificará lo dicho (n.^{es} 62 y 66. 2.°)

Figuras en general.

69. Llámase *figura* el espacio terminado por líneas que se llaman *lados* de la figura. Dos cosas entran en toda figura; á saber, el espacio cerrado, y el conjunto de líneas que la limitan. Llámase *area* ó *superficie* el espacio cerrado, y *contorno* ó *perímetro* el conjunto de los lados.

Las figuras por razon de sus lados se dividen en *rectilíneas*, *curvilíneas*, y *mixtilíneas*. Son rectilíneas cuando sus lados son líneas rectas; curvilíneas cuando sus lados son curvas; y mixtilíneas las que son compuestas de líneas rectas y curvas.

70. Las figuras comparadas entre sí por razon de sus perímetros se dividen en *isoperímetras*, *equivalentes*, *iguales*, *y semejantes*. Llámanse *isoperímetras* dos ó mas figuras, cuando sus perímetros son de igual extension; *equivalentes*,

cuando tienen sus superficies iguales; *iguales* cuando tienen sus perímetros y superficies iguales; y *semejantes*, cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales.

71. Las figuras por razon del número de sus lados se dividen en *triángulos*, *cuadriláteros*, y *polígonos*. Llámase *triángulo* la figura que consta de tres lados; *cuadrilátero*, la que está terminada por cuatro lados; y *polígono* en general, la que consta de mas de cuatro lados.

72. Llámase *base* de una figura la línea sobre que se considera insistiendo; tal sería AC (figs. 49, 50, 51.). Llámase *altura* la perpendicular que desde el punto mas distante de la base se tira á la misma base ó á su prolongacion: tal sería B*e* (figs. 49, 50, 51.). Llámase *diagonal* la línea tirada desde un ángulo á otro que no sea inmediato; tal sería AC (figs. 52, 53, 54.). De esto se sigue que en ningun triángulo puede haber alguna diagonal.

Triángulos. — Igualdad de triángulos.

73. Todo triángulo consta de tres ángulos y tres lados. Por esto los triángulos podrán clasificarse por razon de sus lados y por razon de sus ángulos. El triángulo considerado segun la longitud de sus lados se divide en *equilátero*, *isósceles*, y *escaleno*; y por razon de sus ángulos se divide en *rectángulo*, *obtusángulo*, y *acutángulo*. El triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales: tal sería ABC (fig. 49.). El isósceles es el que tiene dos lados iguales; tal sería ABC (fig. 50.). El escaleno es el que no tiene ningun lado igual; tal sería ACB (fig. 51.). El triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto; tal sería ABC (fig. 59.). El obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso; tal sería ABC (fig. 51.). El acutángulo es el que tiene sus tres ángulos agudos; tal sería ABC (fig. 49.).

Los lados del triángulo rectángulo tienen los nombres particulares de *hipotenusa*, y *catetos*. Llámase hipotenusa el lado que se opone al ángulo recto; tal sería AB (fig. 59.); los otros dos lados toman el nombre de catetos.

74. Tres son los casos principales de igualdad de triángulos; 1.° cuando los tres lados del uno son iguales respectivamente á los tres lados del otro; 2.° cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; 3.° cuando tienen un lado igual, é iguales los dos ángulos adyacentes al mismo lado.

1.° Para la demostracion del primer caso supongamos los dos triángulos ABC, y *abc*, (fig. 60.), en los que se suponga tambien AB $=$ *ab*, AC $=$ *ac*, y BC $=$ *bc*; en este caso los dos triángulos serán iguales, porque puesto el uno sobre el otro se confundirán exactamente.

En efecto; coloquemos el triángulo *abc* sobre ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, supuesto que son iguales. Con un rádio *bc* hágase centro en B, y descríbase el arco de círculo *mn*, y con otro rádio *ac* hágase centro en A, y descríbase el arco de círculo *po*. Como el punto *e* es extremo de *bc* y *ac*, es claro que *e* se habrá de encontrar en cada uno de los dos arcos *mn* y *po*; y como *e* es un punto comun á los dos rádios *bc* y *ac*, es claro que tambien se encontrará en un punto comun á los dos arcos descritos por tales rádios; pero este punto comun á los dos arcos es el punto C; luego *e* se ha confundido con C. De esto se sigue, que *bc* y BC se han confundido en toda su extension, porque sus extremos *b*, *c*, y B, C, se han confundido. Por igual razon se han confundido *ac* y AC. Luego el triángulo *abc* se ha confundido con ABC. Luego son iguales.

2.° Para la demostracion del segundo caso supongamos los mismos triángulos, de modo que *ab* $=$ AB, y *ac* $=$ AC; y además el ángulo $a = A$; en este caso los dos triángulos serán tambien iguales, porque puesto el uno sobre el otro se confundirán exactamente.

En efecto; coloquemos *abc* sobre ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, supuesto que son iguales. Entonces resultará que, como $a = A$, el lado *ac* tomará la misma direccion de AC, y por suponer iguales estos dos lados, el punto *c* se confundirá con C. De aquí resulta que, como *c* y C no solo son extremos de *ac* y AC, sino tambien de *bc* y BC, habiéndose confundido antes *b* con B por haber colocado *ab* sobre AB; los dos lados *bc* y BC tienen sus dos extremos confundidos. Luego se han confundido en toda su extension, y por consiguiente, son iguales. Luego todo el triángulo *abc* se ha confundido con ABC, y por tanto, son iguales.

3.° Para la demostracion del tercer caso sean los mismos triángulos, y supongamos $ab = AB$, $a = A$, y $b = B$: en este caso puesto el uno sobre el otro se confundirán exactamente.

En efecto: coloquemos *abc* sobre ABC de modo que *ab* se confunda con AB, supuesto que son iguales. Entonces por ser $a = A$, y $b = B$, el lado *ac* habrá de tomar la misma direccion de AC; y por ser $b = B$, el lado *bc* habrá de tomar la misma direccion de BC. De esto se sigue que, como *c* es extremo comun de *bc* y *ac* habrá de tocar con el punto C extremo comun de AC y BC; pero como *c* no puede encontrarse en ninguna otra parte además del punto C, porque dos rectas tales como *bc* y *ac* no pueden encontrarse sino en un punto, resulta que el punto *c* se ha confundido con C. Por tanto, *bc* y BC tienen sus dos extremos confundidos; luego son iguales. Por la misma razon *ac* y AC tienen sus dos extremos confundidos; luego son iguales. Luego todo el triángulo *abc* se ha confundido con el otro ABC. Luego son iguales.

75. Dos triángulos rectángulos son iguales, cuando tengan la hipotenusa igual, é igual uno de los catetos, ó uno de sus ángulos agudos.

1.° Si suponemos los dos triángulos rectángulos ABC, y *abc* (fig. 61.) y suponemos $AC = ac$, y además $AB = ab$, estos dos triángulos se confundirán puesto el uno sobre el otro. Porque, si colocamos *abc* sobre ABC de modo que *ab* se confunda con AB, supuesto que son iguales; tendrémos que *bc* tomará la misma direccion de BC, por ser $b = B$ por rectos. Además el punto *c* habrá de caer exactamente sobre C, porque no puede caer hácia la izquierda, ni hácia la derecha, pues que, si suponemos que caiga en G, entonces el triángulo *abc* estará representado por el ABG, de donde resultará, $bc = AG$; y como por el supuesto ya teníamos $bc = AC$, resultará: $AG = AC$, lo que es imposible, porque la oblicua que mas se separe de una perpendicular es la mas larga (n.° 42, 3.ª). Igual raciocinio podría formarse, si se supusiera que el punto *c* cayera en el punto H. Luego el punto *c* ha de caer sobre C, y entonces los dos triángulos se han confundido.

2.° Si suponemos $ac = AC$, y $a = A$; poniendo *abc* sobre ABC, de modo que *ac* se confunda con AC por ser iguales, entonces *ab* ha de tomar la misma direccion de AB, por ser $a = A$. Además el punto *b* ha de caer exactamente sobre B; porque á no ser así, tendríamos desde el punto C tiradas á la AB dos perpendiculares; á saber, CB, y *cb*, lo que es imposible (n.° 43, 1.°). Luego el punto *b* ha de caer sobre B, y entonces los dos triángulos se han confundido.

76. La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos, ó π.

Para su demostracion supongamos el triángulo ABC (fig. 62.), y tendrémos, $m + n + o = \pi$. Si por el vértice B tiramos la EF paralela á la base AC, se habrán formado en B los tres ángulos p, n, y q; de modo que $p + n + q = \pi$ (n.° 30, 2.°) pero $p = m$, por alternos internos entre las paralelas EF y AC cortadas por la secante AB, y $q = o$ por la misma razon, siendo la secante BC; luego si en la ecuacion $p + n + q = \pi$, en lugar de p sustituimos su igual m, y en lugar de q su igual o, se nos convertirá en la siguiente $m + n + o = \pi$.

1.° Que la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que π, ó dos rectos: De esto se deduce: 2.° que en todo triángulo rectángulo y obtusángulo, cada uno de los otros dos ángulos ha de ser agudo: 3.° conociendo dos ángulos de un triángulo, conocerémos facilmente el tercero; pues que será igual á π *menos* la suma de los otros dos: 4.° conociendo un ángulo de un triángulo, conocerémos facilmente la suma de los otros dos; pues que será igual á

π *menos el* ángulo conocido: 5.° Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los tendrán todos; porque en cada uno de ellos el tercero será igual á π *menos* la suma de los otros dos conocidos.

77. Llámase ángulo externo de un triángulo el que está formado por la prolongacion de uno de los lados de dicho triángulo; tal sería el ángulo r (fig. 62) formado por la prolongacion del lado AC hasta D.

El ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos internos opuestos. Así en esta figura se verifica que, $r=m+n$ que son los dos internos opuestos. Porque; $r+o=\pi$ (n.° 29). Además, $m+n+o=\pi$ (n.° 76). Luego resulta; $r+o=m+n+o$. Si ahora de ambos miembros quitamos el término igual o, la ecuacion subsistirá, y tendrémos; $r=m+n$.

De esto se deduce que, el ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos; y así se verifica que, $r>m$, y $r>n$.

78. En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y á ángulos iguales se oponen lados iguales.

1.° Supongamos el triángulo ABC (fig. 49) en el cual $AB=BC$ en este caso se verificará; $A=C$. Porque, si desde el vértice B tiramos la B*e* al punto medio de AC, resultarán los dos triángulos BA*e*, y B*e*C, que serán iguales porque los tres lados del uno serán iguales á los tres del otro; pues que, $AB=BC$ por suposicion; $Be=eC$, porque el punto *e* es medio de AC; y además el lado B*e* es comun á los dos triángulos. Luego, siendo estos dos triángulos iguales, doblando la figura por el labo B*e*, el punto C se confundirá con A y por consiguiente; $A=C$.

2.° Si en la misma figura suponemos $A=C$, resultará; $AB=BC$. Porque, si por el vértice B tiramos la recta B*e* al punto medio de AC, esta recta B*e* será perpendicular á AC (n.° 44). Luego los ángulos en *e* son iguales, por rectos. Luego los dos triángulos que han resultado; á saber, AB*e*, y BC*e* son iguales por el tercer caso de igualdad de triángulos (n.º 74, 3.º); pues que $Ae = Ce$; $C = A$ por suposicion, y los ángulos en e iguales por rectos. Luego, doblando la figura por el lado Be, BC se confundirá con BA, y por consiguiente; $BA = BC$.

De esto se sigue: 1.º que el triángulo equilátero es equiángulo, y al revés; 2.º que una recta tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al punto medio de su base, divide á su ángulo opuesto en dos ángulos iguales.

79. En todo triángulo al mayor lado se opone mayor ángulo, y á mayor ángulo mayor lado.

1.º Si suponemos el triángulo ABC (fig. 59), en que $AC > BC$, tendrémos: $B > A$. Porque, si colocamos el lado menor CB sobre su mayor CA, de modo que CB sea representado por CD, y tiramos la línea DB; tendrémos el triángulo CBD, en el que, $CB = CD$. Luego, $m = n$ (n.º 78) pero $n > A$ (n.º 77); luego, por lo mismo, $n > A$, y con mucha mayor razon, $B > A$, por ser B todo y m parte.

2.º Si $B > A$, resultará; $AC > BC$, porque no puede ser ni menor, ni igual con BC. Porpue, si suponemos $AC < BC$, resultará; $BC > AC$, luego $A > B$, que es contra el supuesto. Si suponemos además, $AC = BC$ resultará: $A = B$, que tambien es contra el supuesto.

80. La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado.

Si tenemos el triángulo ACB (fig. 51.), en que vemos que $CA < AB$ y $CB < AB$, resultará; $AC + CB > AB$. Esto se despremde de lo dicho (n.º 11. 1.º).

81. Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo, se tiran rectas á los vértices de dos de sus ángulos, la suma de estas rectas será menor que la de los lados del triángulo opuesto á los ángulos; y además, el ángulo que formen dichas rectas, será mayor que el ángulo que formen dichos lados.

1.º Si suponemos que desde el punto D del triángulo ABC (fig. 63.) bajamos las dos rectas DB, y DC, se verificará; $BD + DC < BA + AC$. Porque, si desde un punto B al punto C se tira una recta BC, y dos poligonales como

BD $+$ DC, y BA $+$ AC, será menor la poligonal que mas se acerca á la recta, (n.° 11, 2.°).

2.° Se verificará que, $o > m$. Porque, prolongando BD hasta E, se ha originado el triángulo EDC, y o es un ángulo externo respecto de dicho triángulo. Luego, (n.° 77), $o > n$; pero por la misma razon, $n > m$; luego con mucha mas razon se tiene; $o > m$.

82. Si dos lados de un triángulo son iguales á dos de otro, y el ángulo que forman es desigual, el lado opuesto al mayor ángulo será mayor que el que en el otro triángulo está opuesto al ángulo menor.

Si suponemos (fig. 64) los dos triángulos CAB, y FDE, en que, CA $=$ FD; AB $=$ DE; y A $>$ D, resultará; CB $>$ FE.

Colocando el triángulo FDE sobre CAB, de modo que FD se confunda con CA, por ser iguales; tendrémos que, por ser D $<$ A, la DE habrá de tomar la inclinacion por la parte interior del triángulo. Tan solamente podrá suceder que el punto E caiga en uno de los puntos de CB, como por ejemplo en G, ó bien por la parte inferior de CB, como por ejemplo en E, ó bien por la parte superior de CB, como por ejemplo en R. En cada uno de los tres casos se verificará siempre; CB $>$ FE.

1.° Si el punto E cae en G, tendrémos; FE $=$ CG; pero CB $>$ CG; luego, CB $>$ FG.

2.° Si el punto E cae en E′, tendrémos; DE $=$ AE′, y FE $=$ CE′. Ahora se verifica; CG $+$ GE′ $>$ CE′, y AG $+$ GB $>$ AB. Sumando ordenadamente estas dos inecuaciones, resulta, CG $+$ GE′ $+$ AG $+$ GB $>$ CE′ $+$ AB; ó bien, simplificando; CB $+$ AE′ $>$ CE′ $+$ AB; pero, como DC $=$ AE′ $=$ AB; si de ambos miembros de la anterior inecuacion quitamos los dos términos iguales AE′ y AB, se nos convertirá en la siguiente; CB $>$ CE′; y por ser CE′ $=$ FE, resulta finalmente; CB $>$ FE.

3.° Si suponemos que el punto E caiga en R, tendrémos FE $=$ CR; DE $=$ AR $=$ AB. Por lo que resultará, (n.° 11, 2.°); AR $+$ RC $<$ AB $+$ BC. Si ahora de ambos miembros quitamos los términos iguales AR y AB, resultará: RC $<$

BC; y como RC$=$FE, tendrémos; FE$<$BC, ó bien; BC $>$FE.

83. Con estas nociones podrémos resolver los problemas siguientes. 1.º Dado el triángulo *abc* (fig. 65.), construir otro igual á él con la condicion de que los tres lados del 2.º sean iguales á los tres del 1.º.

Tírese una recta indefinida AD. Tómese de esta recta, como base, una parte AC$=$*ac*. Con unos rádios iguales á *ab* y *cb*, haciendo centro en A y C descríbanse dos arcos de círculo que se corten en B, y tirando desde B las dos rectas BA, y BC, tendrémos el triángulo pedido.

2.º Dado el mismo triángulo *abc*, formar otro igual á él, con la condicion de que este segundo tenga dos lados iguales á los dos *ab* y *ac* del primero, y además el ángulo que resulte formado por estos lados sea igual al ángulo *a* formado por *ca* y *ba*.

Tírese la misma recta indefinida AD. Tómese de esta recta, como base, una parte AC$=$*ac*. Fórmese en A un ángulo igual á *a*; por los puntos A y *x*, extremos del arco *zx* que mide el ángulo A, tírese una recta indefinida; tómese de esta recta una parte AB$=$*ab*, y bajando desde el punto B la recta BC, se obtendrá el triángulo pedido.

3.º Dado el mismo triángulo *abc*, formar otro igual á él, con la condicion de que tenga un lado igual á *ac*, y además los dos ángulos adyacentes á este lado sean iguales á *a* y *c*.

Tírese la línea indefinida AD, tómese sobre esta, como base, una parte AC$=$*ac*. En A y C, fórmense dos arcos de círculos *xz*, y *qo* iguales á los *mn*, y *rp*, y tírense desde los puntos A, y C, por los puntos *x* y *q* dos rectas que se encontrarán en el punto B, y se tendrá el triángulo pedido.

Cuadriláteros.

84. Llámase *cuadrilátero* una figura terminada por cuatro lados. Divídese el cuadrilátero en *trapezóide*, *trapecio*, y *paralelógramo*. Llámase *trapezóide*, cuando no tiene nin-

gun lado igual ni paralelo; tal seria ABCD (fig. 52). Llámase *trapecio*, cuando tiene dos lados opuestos paralelos y desiguales; tal sería ABCD (fig. 53). Llámase *paralelógramo*, cuando tiene los lados opuestos iguales y paralelos de dos en dos; tal seria ABCD (fig. 64).

85. El *paralelógramo* se divide en *rombóide*, *rombo*, *rectángulo*, y *cuadrado*. Llámase *rombóide*, cuando tiene desiguales los dos ángulos adyacentes á un mismo lado, y además, desiguales tambien los dos lados que forman un mismo ángulo; tal seria ABCD (fig. 54), en que son desiguales los ángulos A y D adyacentes á AD, y además son desiguales los lados DA y BA que forman el ángulo A. Llámase *rombo* cuando tiene desiguales los dos ángulos adyacentes á un mismo lado, é iguales los lados que forman un mismo ángulo, tal sería ABCD (fig. 55.) en la que son desiguales los ángulos A y D adyacentes á AD, y además son iguales los lados DA y BA que forman el ángulo A. Llámase *rectángulo*, cuando tiene iguales los dos ángulos adyacentes á un mismo lado, y desiguales los lados que forman un mismo ángulo; tal sería ABCD (fig. 56), en la que son iguales los ángulos totales A y D adyacentes á AD, y además son desiguales los lados DA y BA que forman el ángulo total en A. Llámase *cuadrado*, cuando tiene iguales los ángulos adyacentes á un mismo lado, y además, iguales los dos lados que forman un mismo ángulo; tal sería ABCD (fig. 57) en la que son iguales los ángulos A y D adyacentes á AD, y además son iguales los lados DA y BA que forman el ángulo A.

86. Dijimos (n.º 72,) lo que se entendia en general por *base* y *altura* de una figura: debemos añadir ahora que, en un *trapecio* se llaman bases los dos lados opuestos y paralelos; tales serian BC y AD (fig. 53), y se llama altura la perpendicular tirada desde uno de ellos al otro.

87. La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale 4 rectos, ó 2π; porque por medio de una diagonal se divide cada cuadrilátero en dos triángulos, y la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos ó π, (n.º 76.)

88. Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, el cuadrilátero será un paralelógramo; porque se verificará que los otros dos lados opuestos tambien serán iguales y paralelos entre sí.

Supongamos para esto AB = CD (fig. 58). Tirando la diagonal AC, se verifica que, $m = n$, por alternos internos entre las paralelas AB y CD siendo la secante AC. Luego los dos triángulos BAC y DCA son iguales, por el 2.° caso de igualdad de triangulos (n.° 74); pues que BA = CD por suposicion; CA es comun á los dos triángulos; y $m = n$: Luego BC = AD. De esto pues se deduce que, $p = q$; pero estos son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por AC, luego son paralelas (n.° 52).

89. Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales, la figura será un paralelógramo; porque, además, serán tambien paralelos de dos en dos.

Supongamos para esto AD = BC (fig. 58), y BA = CD; tirando la diagonal AC, los dos triángulos BAC y ADC serán iguales (n.° 74, 1.°). Luego los ángulos respectivos serán iguales; á saber, $m = n$, y $p = q$; pero m y n son alternos internos entre las rectas BA y CD cortadas por AC; luego son paralelas. Además, p y q son alternos internos entre las rectas BC y AD cortadas por AC; luego son paralelas.

90. Siendo $m = n$, y $p = q$; si sumamos ordenadamente estas dos ecuaciones, tendrémos; $m + p = n + q$, ó sea, ángulo total en A igual al ángulo total en C. Como por la igualdad de los dos triángulos teniamos, B = D; se deduce que, los ángulos opuestos de un paralelógramo son iguales.

91. De todo esto se deduce; 1.° Que la diagonal de un paralelógramo lo divide en dos triángulos iguales; 2.° Todo paralelógramo tiene los lados y ángulos opuestos iguales. 3.° Dos ángulos adyacentes á un mismo lado el uno es suplemento del otro; pues que entre los dos han de valer dos rectos. 4.° Si uno de los ángulos es recto cada uno de los otros tambien lo será porque los cuatro juntos han de

valer cuatro rectos. 5.° si dos lados contiguos de un paralelógramo son iguales, todos lo serán, porque han de ser iguales de dos en dos.

Polígonos.

92. Llámase *polígono* una figura terminada por mas de cuatro lados. Por razon del número de lados se dividen los polígonos en *pentágonos*, *exágonos*, *eptágonos*, *octógonos*, *eneágonos*, *decágonos*, *endecágonos*, *dodecágonos*, segun que el polígono conste de cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce lados. Cuando el polígono conste de mas lados, entonces se denomina diciendo, polígono de 13, 14, 15, etc. lados.

93. Divídese el polígono en *regular* é *irregular*. Llámase *regular*, cuando tiene todos sus ángulos y lados iguales entre sí; tal sería ABCDEF (fig. 66). Llámase *irregular*, cuando le falta alguna de dichas circunstancias; tal sería ABCDEF (fig. 67).

Llámase ángulo *entrante* de un polígono, aquel cuyo vértice mira hácia dentro de la figura; tal sería el ángulo D; y llámase ángulo *saliente* aquel cuyo vértice mira hácia fuera de la figura; tales serían A, B, C, E, F.

94. En todo polígono regular hay un punto que se llama *centro* el cual es equidistante de todos los ángulos y de todos los lados. Llámase *rádio oblicuo* de un polígono regular aquella recta que desde el centro va á parar al punto medio de un ángulo; tales serian OB, OC, OD, etc. (fig. 66). Llámase *radio recto* aquella recta que desde el centro va á parar al punto medio de uno de sus lados; tales serian O*m*, O*n*, O*p*, etc. Llámase *sagita* de un polígono regular la diferencia entre el radio recto y el oblicuo; tal sería *rz*.

95. De la definicion del centro, y de los rádios oblicuos y rectos dada en el número anterior, se deduce que, todos los rádios oblicuos de un polígono regular son iguales entre sí, porque miden distancias iguales. Así,

OB = OC = OD, etc. (fig. 66). Por la misma razon todos los rádios rectos tambien son iguales entre sí. Así en la misma figura se tendrá; $Om = On = Op$, etc.

96. Tirando en la figura 66 todos los rádios oblicuos, el polígono ha quedado dividido en tantos triángulos cuantos lados tiene el polígono. Además, todos estos triángulos son iguales, porque los tres lados del uno son iguales á los tres del otro. Luego podemos decir por analogía que, por medio de los rádios oblicuos todo poligono queda dividido en tantos triángulos iguales entre sí, cuantos eran sus lados. Cuando los lados del polígono sean iguales al rádio oblicuo, los triángulos serán equiláteros, y cuando no, serán isósceles.

97. En la misma figura por medio de los rádios oblicuos se han formado tantos ángulos en el centro, cuantos eran los lados del polígono; pues que eran seis los lados de dicho polígono, y han resultado seis ángulos en el centro. Luego por analogía podrémos decir que, tirando todos los rádios oblicuos en un polígono regular, resultarán tantos ángulos en el centro cuantos sean los lados del polígono. De aquí se sigue que, como el valor de todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto es igual á 360 grados, encontrarémos facilmente el valor de un ángulo central de polígono regular, dividiendo 360 grados por el número de lados de que conste el polígono (arit. n.° 46. 4.°). Por tanto, si designamos por n el número de lados de un polígono, tendrémos que, esta fórmula $\frac{360^\circ}{n}$ nos dará el valor de cada uno de los ángulos en el centro.

98. El valor de la suma de todos los ángulos de un polígono cualquiera es igual á tantas veces dos rectos cuantos lados tenga el polígono *menos* dos. Porque, si desde un ángulo cualquiera se tiran todas las diagonales posibles, como se verifica en la figura 67; el polígono quedará dividido en tantos triángulos, cuantos eran los lados de polígono *menos* dos; y como la suma de los ángulos del triángulo

(n.º 76.) es igual á dos rectos, de aquí es que el valor de todos los ángulos del polígono, que es igual al valor de todos los ángulos de los triángulos resultantes, tambien es igual á tantas veces dos rectos como lados tenia el polígono *menos* dos.

De esto se deduce que, si llamamos π al valor de dos ángulos rectos, considerando á un polígono de un número n de lados, el valor de todos los ángulos de dicho polígono vendría expresado por la siguiente fórmula; $(n-2)\times\pi$

Observando el polígono (fig. 66.), verémos que hay tantos ángulos como lados tiene el polígono. De esto podemos inferir por analogía que, todo polígono regular ó irregular consta de tantos ángulos como lados haya en el polígono, teniendo pues un polígono regular de un número n de lados; como el valor de todos es igual á $(n-2)\times\pi$, podrémos fácilmente conocer el valor de uno, dividiendo por n el valor total, ó sea $(n-2)\times\pi$ (arit. n.º 46. 4.º). Así que, $\frac{n-2}{n}\times\pi$ será la fórmula general que expresará el valor de un ángulo de polígono regular. Esta fórmula nos indica que el valor de un ángulo de polígono regular siempre es menor que π; porque para obtener su valor, se ha de multiplicar π por un quebrado propio tal como $\frac{n-2}{n}$.

99. Dando valores particulares á n, podrémos fácilmente encontrar el valor particular de un ángulo de *triángulo equilátero*, de *cuadrado*, de *pentágono* regular, de *exágono* regular, de *eptágono*, etc.; aplicando la fórmula anterior, y sustituyendo en lugar de n el número 3, 4, 5, 6, 7, etc., segun que el polígono sea un triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, etc. Así pues tendrémos;

Ángulo de triángulo equilatero $=$

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)\times\pi=\left(\frac{3-2}{3}\right)\times 180^\circ=\tfrac{1}{3}\times 180^\circ=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ.$$

Ángulo de cuadrado $=$

$\left(\frac{n-2}{n}\right) \times 180^\circ = \left(\frac{4-2}{4}\right) \times 180^\circ = {}^2/_4 \times 180^\circ =$
$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Ángulo de pentágono regular $=$

$\left(\frac{n-2}{n}\right) \times 180^\circ = \left(\frac{5-2}{5}\right) \times 180^\circ = {}^3/_5 \times 180^\circ =$
$\frac{540^\circ}{5} = 180^\circ$.

Ángulo de exágono regular $=$

$\left(\frac{n-2}{n}\right) \times 180^\circ = \left(\frac{6-2}{6}\right) \times 180^\circ = {}^4/_6 \times 180^\circ =$
$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

Líneas proporcionales.

100. Llamánse líneas proporcionales aquellas cuyas longitudes comparadas entre sí forman proporcion.

Si en una recta que forme con otra un ángulo cualquiera, se toma un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran rectas paralelas entre sí hasta que encuentren á la otra, y por estos puntos de concurso se tiran paralelas á la primera, cada una de estas rectas quedará dividida en partes iguales entre sí.

1.° Si dado el ángulo VAZ (fig. 68) formado por VA y ZA, dividimos la AV en las partes AB = BC = CD = DE, etc., y desde estos puntos tiramos las paralelas BF, CG, DH, EQ, etc., á la AZ, y desde los puntos F, G, H, Q, etc. tiramos las FS, GF, HX, etc. paralelas á AV; resultará;

$AF=FG=GH=HQ$, etc. Porque, por el supuesto, $AB=BC$; $BC=FR$ por ser partes de paralelas interceptadas por paralelas (n.° 47. 3.°); luego tenemos, $AB=FR$. Además el ángulo $RFG=BAF$ por correspondientes entre las paralelas RF y BA cortadas por ZA; el ángulo $B=R$ por ser formados por lados paralelos y tener su vértice vuelto hácia un mismo lado (n.° 57.); luego los triángulos ABF, y FRG son iguales; luego $AF=FG$. Como igual raciocinio podría hacerse con los demás triángulos, resulta; $AF=FG=GH=HQ$.

2.° $CR=RG$. Porque, $BF=CR$ por ser partes de paralelas interceptadas por paralelas; además $BF=RG$ por la igualdad de los dos triángulos ABF, y FRG; luego, $CR=RG$. Del mismo modo podría probarse que, $DL=LN=NH$ y $FM=MO=OP=PQ$.

3.° $FR=RL=LM$. Porque, $BC=CD=DF$ por suposicion. Además, $BC=FR$ por partes de paralelas interceptadas por paralelas; $CD=RL$ por igual razon, y por lo mismo, $DF=LM$. Luego de esto se sigue que, $FR=RL=LM$. Del mismo modo se probaría que, $GN=NO$.

101. Siendo $AB=BC=CD,=DP$, y $AF=FG=GH=HQ$ segun hemos visto en el número anterior, se deduce que, $AB : AF :: BC : FG :: CD : GH :: DE : HQ$. Si ahora tomamos los dos primeros términos de esta serie, tendrémos; $AB : AF$; y multiplicando sucesivamente por 2, por 3, por 4, por n, por etc., los dos términos de la razon, esta no se alterará, y tendrémos; $AB : AF :: AB\times 2 : AF\times 2 :: AB\times 3 : AF\times 3 :: AB\times n : AF\times n :: AB\times m : AF\times m$.

Esto nos dice que, un número cualquiera n de partes de la primera es al mismo número n de partes de la segunda, como otro número cualquiera m de partes de la primera es al mismo número m de partes de la segunda; si la alternábamos, diría; un número cualquiera n de partes de la primera es á otro número cualquiera m de partes de la misma, como el mismo número n de partes de la segunda es á otro número m de partes de la misma.

102. Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo se tira una paralela á la base; los lados de dicho triángulo quedarán divididos en partes proporcionales.

Si tenemos el triángulo BAC (fig. 68), y desde el punto D tiramos la DE paralela á la base AC, se verificará que, BA : BD : : BC : BE. Aquí pueden ocurrir los dos casos; á saber, que el lado BA y la parte BD sean conmensurables, ó bien que no lo sean: en uno y otro caso se verifica la proporcion establecida, BA : BD : : BC : BE. (O).

1.° Si suponemos que BA y BD son conmensurables, y que la comun medida es AP, esta cabrá un número exacto de veces en BA y en BD. Es claro que este número habrá de ser diferente en BA y en BD, por ser el uno todo y el otro parte. Supongamos que sea m el número de veces que AP está contenido en BA, y n el número de veces contenido en BD. Entonces BA y BD serán dividendos, AP será un divisor, y m y n serán los respectivos cocientes. Como el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, tendrémos; $BA = AP \times m$, y $BD = AP \times n$. Formando ahora proporcion con estas dos igualdades, resultará (n.° 36); BA : BD : : AP $\times m$: AP $\times n$, y dividiendo por AP los dos términos de la segunda razon, tendrémos; BA : BD : : m : n (1.ª). Si ahora por los puntos de division que produzca la comun medida, tiramos paralelas á la AC, tales como PQ, la BC quedará dividida en tantas partes iguales con BQ, cuantas sean las paralelas tiradas, ó sean, tantas cuantas veces AP estaba contenida en BA (n.° 100). Lo mismo podrémos decir respecto de la parte BE. Siendo pues m y n estas veces que BA y BD contienen á AP, reresultará; $BC = m \times CQ$, y $BE = n \times CQ$. Formando proporcion con estas igualdades, tendrémos; BC : BE : : $m \times CQ$: $n \times CQ$, y dividiendo por CQ los dos términos de la segunda razon, sale; BC : BE : : m : n (2.ª). Vemos ahora que esta proporcion y la anterior tienen comun la segunda razon; por tanto, (alg. 168. 4.ª) podrémos formar proporcion con las primeras razones, y resulta; BA : BD : : BC : BE. (3.ª).

2.° Si la recta BA y la parte BD son inconmensurables, y dividimos el todo BA en dos partes iguales, luego en otras dos, etc., y despues colocamos á una de estas divisiones sobre la parte BD las veces que podamos, es claro que ninguna de estas divisiones podrá caer sobre D, por la inconmensurabilidad de BA con BD. Demos pues que una de estas divisiones caiga en *d*, y entonces BA y B*d* ya serán conmensurables: luego, si tiramos la paralela *de*, resultará que BA y B*d* serán proporcionales con BC y B*e*, y tendrémos; BA : B*d* : : BC : B*e*, (4.ª). Pero á medida que las partes en que se considera dividida la BA se hacen menores cada una de ellas cabrá mas veces en BD, y por lo mismo el punto *d* va aproximándose mas á D, y por consiguiente el punto *e* tambien se acerca del mismo modo al punto E: luego, B*d* y B*e* se van acercando respectivamente á los puntos D y E; luego la misma relacion que B*d* tenga con BD, esta misma tendrá la B*e* con BE y resultará; B*d* : BD : : B*e* : BE (5.ª). Si ahora alternamos la 4.ª y 5.ª resultará; BA : BC : : B*d* : B*e*, y B*d* : B*e* : : BD : BE, y permutando esta última, tenemos; BD : BE : : B*d* : B*e* (6.ª). Observando estas dos proporciones vemos que tienen comun la segunda razon; luego, podrémos formar proporcion con las primeras, y tendrémos; BA : BC : : BD : BE, la que alternada, da; BA : BD : : BC : BE, proporcion perfectamente igual con la (3.ª).

103. De la proporcion demostrada en el párrafo anterior se deduce:

1.° Que los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas partes son tambien proporcionales entre sí. Porque, dividiendo la proporcion anterior, y comparando con el consecuente, tendrémos (alg. 170, 5.°); BA—BD:BD: :BC—BE: BE, ó bien, DA : BD : : CE : BE, (1.ª) Si ahora componemos esta última, y comparamos con el antecedente, tendrémos (alg. 170, 3.°); DA + BD : DA : : CE + BE : CE, ó bien, BA : DA : : BC : CE, la cual alternada, da; BA : BC : : DA : CE, (2.ª). Componiendo otra vez la (1.ª) y comparando con el consecuente, resulta; DA + BD : BD : : CE +

BE : BE, ó bien, BA : BD : : BC : BE, la cual alternada, da ; BA : BC : : BD : BE.

2.º Si tres paralelas AC, DE, *de* (fig. 68.) son cortadas por dos secantes A*d*, y C*e*, estas secantes y las partes de ellas en que quedan divididas por la paralela DE, serán proporcionales entre sí, y se tendrá; A*d* : C*e* : : AD : CE : : D*d* : E*e*; ó bien; A*d* : AD : D*d* : : C*e* : CE : E*e*. Porque concibiendo prolongadas las dos secantes hasta que se encuentren en un punto tal como B, se habrán originado los dos triángulos BAC, y BDE. Considerando á AC por base del primero, tendrémos *de* paralela con la base AC, y resultará (1.º); B*d* : B*e* : : A*d* : C*e* : (1.ª). Considerando ahora el triángulo BDE, y suponiendo á DE por su base, *de* será paralela á ella, y tendrémos por la misma razon; B*d* : B*e* : : D*d* : E*e*. (2.ª). Como estas dos proporciones tienen la primera razon comun, resultará (alg. 168, 4.ª); A*d* : C*e* : : D*d* : E*e*. Por lo que tendrémos (alg. 170, 6.º) A*d*—D*d*:C*e*—E*e* : :A*d*:C*e* : : D*d* : E*e*, la cual reducida, considerando la figura, nos dará; AD : CE : : A*d* : C*e* : : D*d* : E*e*. Permutando finalmente las dos primeras razones, sale; A*d* : C*e* : : AD : CE : : D*d* : E*e*, ó bien, A*d* : AD : D*d* : : C*e* : CE : E*e*.

104. Si una recta divide los lados del triángulo en partes proporcionales, esta recta será paralela á la base; porque desde dicho punto no se podrá tirar ninguna otra que lo sea.

Si tenemos el triángulo BAC (fig. 69.), y desde el punto D se tira la DE, de modo que se verifique; BA : BD : : BC : BE, resultará que la DE será paralela á AC. Porque, si esta no lo es, se podrá tirar una que lo sea desde el punto D. Si suponemos que esta es la D*e*, se tendrá, (n.º 102.) BA : BD : : BC : B*e*. Pero esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos iguales; luego el cuarto tambien lo habrá de ser, de modo que, BE = B*e*. Pero esto es un absurdo por ser BE todo, y B*e* parte. Lo mismo se verificaría si se tirára una recta que cayera por mas abajo de BE. Luego, como desde un punto siempre se puede tirar una paralela á otra recta dada, no pudiendo desde el punto D tirarse ninguna que se aparte del punto E, la DE será paralela á AC.

105. Si desde un punto de un lado de un triángulo se tira una paralela á la base, esta paralela será tambien proporcional con la misma base.

Si tenemos (fig. 69.) la DE paralela á AC, se verificará; AB : DB : : AC : DE. Porque si se tira la DF paralela á BC, tendrémos (n.° 102.) AB : DB : : AC : FC. Pero, FC = DE por lados opuestos de un paralelógramo; luego sustituyendo, se tiene; AB : DB : : AC : DE.

106. Con estas nociones podrémos resolver los siguientes problemas:

1.° Dadas tres rectas a, b, c buscarles una cuarta proporcional (fig. 70). Sea la proporcion $a : b : : c : x = \frac{bc}{a}$; para construirla fórmese con dos rectas indefinidas un ángulo cualquiera BOC; sobre el lado OC tómese una parte $oa = a$, sobre el mismo lado tómese la $Ob = b$, y sobre el otro tómese la $Oc = c$: desde el primer punto a al tercero c tírese la recta ac, por el segundo punto b tírense una paralela á la primera y esta determinará en el otro lado del ángulo el punto x; por lo que el segmento Ox será la cuarta proporcional pedida. Porque las dos paralelas ac, bx cortadas por las secantes oB, OC, dan; $Oa : Ob : : Oc : Ox$.

2.° Dadas dos rectas a, b, buscarles una tercera proporcional (fig. 71). Sea la proporcion $\div a : b : x$, ó $a : b : : b : x = \frac{b^2}{a}$. Para construirla, fórmese el ángulo COB sobre el lado Oc; tómese la $Oa = a$; sobre el mismo lado tómese la $Ob = b$, y sobre el otro lado tómese la $Ob' = b$: desde el primer punto a al tercero c, tírese la ab, y por el punto b tírese la bx paralela á ab, con lo que se determinará la Ox que es la tercera proporcional pedida. Porque las dos paralelas ab', bx cortadas por las secantes OB, OC, dan $Oa : Ob : : Ob' : Ox$.

3.° Dada una recta AB (fig. 72.), dividirla en un número cualquiera de partes iguales, v. gr. 5.

Tírese la AC que forme con la AB un ángulo cualquiera CAB; tómense sobre esta 5 partes iguales; desde el último punto de division *h* tírese la *h*B al estremo de la recta dada; por los otros puntos de division *p*, *f*, *e*, etc. tírense las *gl*, *fm*, etc. paralelas á la *h*B, y estas dividirán á la AB en las 5 partes iguales que se pedian.

4.° Dada una recta dividirla en dos partes que tengan entre sí una razon dada v. gr. la de 3 : 2.

Tirada la AC que forme con la recta dada un ángulo cualquiera, tómense sobre ella tantas partes iguales como dice la suma de los dos términos de la razon, que aquí es 5; tírese por el último punto de division *h* la recta *h*B, y por el punto *f* la *fm*, y esta dividirá á la AB en las dos partes A*m*, *m*B que formarán esta proporcion A*m* : *m*B :: 3 : 2; porque la primera contiene tres partes y la segunda dos. Si la recta se hubiese de dividir en tres ó mas partes que tuviesen entre sí una razon dada, procederíamos del mismo modo.

5.° *Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de* mil partes.

Tómese una magnitud arbitraria K (fig. 73.), y repítase diez veces sobre la AB, desde A hasta O; tómese toda la magnitud AO = 10K, y repítase nueve veces desde O hácia la derecha; en los estremos levántense perpendiculares, en las cuales se tomarán tambien diez partes iguales con otra magnitud arbitraria, y se tirarán rectas por los puntos de division 1, 2, 3, etc. que serán paralelas é iguales (88.) á la AB, y en la última CE fórmense las mismas partes que en la AB.

Desde D á C y desde O á A, póngase 10, 20, 30, etc. en las divisiones 1.ª, 2.ª, etc.; únase el punto O con el 10 de la de arriba; el 10 de la AO con el 20 de la de arriba, y así sucesivamente hasta unir el punto 90 de la de abajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán, tanto arriba como abajo, 100, 200, 300, etc.; con lo cual quedará formada la escala.

En ella se podrán tomar hasta mil partes, de esta manera: considerando que la distancia A90 vale diez partes, la AO valdrá 100; y como AB = 10AO, se sigue que la AB, que es la mayor magnitud que se puede tomar, valdrá mil partes.

Ahora, para tomar un número cualquiera de partes menor que mil, se procederá del modo siguiente. En primer lugar *esta distancia se debe tomar en la paralela á* AB *que pase por el punto que espresa el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estará espresada por la parte de esta recta que hay interceptada entre la recta que espresa las centenas y la que va desde las decenas de abajo á una decena mas de la de arriba.* Así, si se quieren tomar 237 partes, se echará de ver que esta distancia se debe tomar en la recta 7F, y estará representada por la parte HN interceptada entre la recta 200 que espresa las centenas y la que desde el 30 de la de abajo que espresa las decenas, va al 40 de la de arriba.

Porque $NH = Hm + mr + rN$; ahora, Hm es igual á 200, y por consiguiente vale 200 partes; la $Nr = O30$, tambien por lados opuestos del paralelógramo $NrO30$, y por consiguiente vale 30 de estas partes; y la rm por lo que ahora probarémos, vale 7 de dichas partes; luego $NH = 200 + 30 + 7 = 237$ partes.

Para probar que rm vale 7 partes, se observará que el triángulo OD10, por ser la rm paralela á D10, da $rm : D10 :: Om : OD :: 7 \times Ot : 10 \times Ot :: 7 : 10$; luego $rm = \frac{D10 \times 7}{10}$; y como la distancia D10 la suponemos compuesta de diez partes, resulta que $rm = \frac{10 \times 7}{10} = 7$.

Es muy importante el conocimiento de la escala, pués es lo primero que se ha de hacer para delinear todo plano, y es la que en los mismos planos y mápas sirve para conocer la distancia de dos puntos.

6.º *Fórmese una escala sencilla.*

Tírese para esto la línea indefinida Fz, (fig. 73). y tomemos las partes iguales entre sí, á saber; $FG = GL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS = SX$. Dividiendo ahora el segmento FG en diez partes iguales cada una á la unidad; resultará que cada uno de los segmentos GL, LM, etc. valdrá una decena, y por tanto, el conjunto Fx será igual á una centena. Así pues, tomando este conjunto las veces que se quiera, ó alguno de los ségmentos, ó algunas de las unidades, podrán reunirse las unidades que se deseen.

Semejanza de figuras.

107. Hemos dicho (n.º 70.) que las figuras *semejantes* son aquellas que tienen sus ángulos iguales y sus lados respectivamente proporcionales. Por consiguiente, serán *desemejantes* aquellas á quienes falte alguna de dichas circunstancias. De esto se deduce que, dos polígonos regulares de igual número de lados siempre serán semejantes: Porque los ángulos del uno serán iguales á los del otro, por ser cada uno de los dos espresado por la misma fórmula $\frac{(n-2)\times\pi}{n}$. Además los lados del uno serán iguales entre sí, y lo mismo se verificará con los lados del otro; y como entre dos lados cualesquiera siempre existe alguna relacion, resultará que, la relacion que tenga el primer lado del primero con el primero del segundo, esa misma tendrá cada lado del primero con cada uno del segundo.

108. Si por un punto cualquiera de un lado de un triángulo se tira una paralela á uno de los otros dos lados, se originarán dos triángulos semejantes entre sí.

Sea para esto el triángulo ABC (fig. 74.), en el que desde el punto b' se tire la $b'c'$ paralela á BC, y resultará; $Ab'c'$ semejante con ABC. Porque, el ángulo A es comun á los dos triángulos; $b' = B$ por correspondientes entre las dos paralelas $b'c'$ y BC cortadas por AB; $c' = C$ por igual razon, siendo las dos paralelas cortadas por AC. Además por lo dicho (n.º 102.) se verifica; $AB : Ab' :: AC : Ac' :: BC : b'c'$. Luego son semejantes, segun la definicion dada en el número anterior.

109. Tres son los casos principales de semejanza de triángulos; 1.º cuando los tres lados del uno son respectivamente proporcionales con los tres lados del otro; 2.º cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido; 3.º cuando los tres ángulos del uno son iguales á los tres ángulos del otro.

1.º Sean los dos triángulos ABC y abc (fig. 74.), y supongamos; $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$, y serán semejantes. Porque, si colocamos ab y ac sobre AB y AC, de modo que $ab = Ab'$, y $ac = Ac'$; se verificará por el supuesto; $AB : Ab' :: AC : Ac'$. Luego tirando ahora la recta $b'c'$ esta será paralela con BC (n.º 104.); luego tendrémos (n.º 102 y 105.); $AB : Ab' :: AC : Ac' :: BC : b'c'$. Pero esta série y la del supuesto tienen los cinco términos iguales; luego el sexto tambien lo será, y tendrémos; $ab = Ab'$; $ac = Ac'$; $bc = b'c'$. Luego los dos triángulos abc y $Ab'c'$ serán iguales (n.º 74, 1.º). Pero ABC y $Ab'c'$ son semejantes por lo demostrado en el número anterior; luego, siendo $Ab'c' = abc$, resultan semejantes ABC y abc.

2.º Si dados los dos mismos triángulos, suponemos; $AB : ab :: AC : ac$, y además $A = a$, estos dos triángulos serán semejantes. Porque, haciendo la construccion como en el caso anterior, resultará; $AB : Ab' :: AC : Ac'$. Luego, si tiramos la recta $b'c'$, esta será paralela á BC (n.º 104). Luego los dos triángulos ABC y $Ab'c'$ darán; $AB : Ab' :: AC : Ac' :: BC : b'c'$. Luego estos dos triángulos serán semejantes por lo demostrado en el caso anterior. Pero los dos triángulos $Ab'c'$ y abc son iguales, por el 2.º caso de igualdad de triángulos (n.º 74.); luego ABC y abc son semejantes.

3.º Si dados los mismos triángulos, suponemos $A = a$; $B = b$; y $C = c$, estos dos triángulos serán semejantes. Porque, si tomamos $Ab' = ab$, y tiramos la $b'c'$ paralela á BC, resultarán semejantes por el primer caso los dos triángulos ABC y A$b'c'$. Además los ángulos b' y c' son iguales con B y C por correspondientes. Como, pues, b=B por el supuesto, y b'=B por correspondientes, tambien resulta; $b'=b$. Luego los dos triángulos A$b'c'$ y abc son iguales por el tercer caso de igualdad de triángulos (n.º 74). Luego ABC y abc son semejantes.

110. Del último caso demostrado en el número anterior se desprende; 1.º que dos triángulos son semejantes cuando tengan dos ángulos iguales; porque entonces los tres ángulos del uno son iguales con los tres del otro (n.º 76, 5.º); 2.º Los triángulos son semejantes cuando tengan sus lados paralelos, como ABC, y DEF (fig. 75); porque en este caso tienen los ángulos iguales (n.º 57); 3.º dos triángulos son semejantes cuando tengan sus lados perpendiculares, como ABC, y FED (fig. 76); porque dando á uno de ellos un cuarto de conversion, se convierten en dos triángulos cuyos lados son paralelos.

111. Cuando se trate de formar proporcion con los lados de los triángulos semejantes, debe formarse siempre con los lados homólogos. Llámanse lados homólogos aquellos que en triángulos semejantes están de la misma manera colocados, ó sea, los que están opuestos á ángulos iguales, ó que son paralelos, ó perpendiculares.

112. Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán seis cosas; 1.ª el triángulo quedará dividido en dos semejantes cada uno al total y semejantes entre sí; 2.ª la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa; 3.ª cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente; 4.ª el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de los catetos; 5.ª los cuadrados de los catetos serán entre sí como los segmentos correspondientes; 6.ª la perpendicular bajada será cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

1.º Si dado el triángulo ABC rectángulo en A, (fig. 77), bajamos la AD perpendicular á la hipotenusa BC, resultarán los dos triángulos parciales ABD, y ADC semejantes cada uno al total ABC. Porque, ABD y ABC tienen comun el ángulo B, el ángulo *r* del triángulo ABD es igual al total en A del triángulo ABC, por ser ambos rectos. Luego estos dos triángulos son semejantes, (n.° 110. 1.°). Por la misma razon lo serán ABC y ADC; porque el ángulo C es comun á los dos triángulos, y los ángulos *m* y total en A son iguales por rectos. De esto se deduce que los dos triángulos parciales ABD y ADC son semejantes entre sí, así como dos ó mas cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

2.° Debe verificarse que, $BD : AD :: AD : DC$. Porque, siendo semejantes los dos triángulos ABD y ADC, podrémos formar proporcion con los lados homólogos, y tendrémos; BD cateto menor del uno : AD cateto mayor del mismo :: AD cateto menor del otro : DC cateto mayor del mismo.

3.° Debe verificarse que, $BC : BA :: BA : BD$ (1.ª), y $BC : AC :: AC : DC$ (2.ª). Porque, siendo semejantes los dos triángnlos BAC y BAD, y formando proporcion con los lados homólogos, tendrémos; BC hipotenusa del total : BA cateto menor del mismo :: BA hipotenusa del parcial : BD cateto menor del mismo; haciendo ahora lo mismo con los dos triángulos semejantes BAC y DAC, tendrémos; BC hipotenusa del total : AC cateto mayor del mismo :: AC hipotenusa del parcial : DC cateto mayor del mismo.

4.° Debe verificarse que, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (3.ª). Porque, aplicando la propiedad fundamental á las proporciones 1.ª y 2.ª, resulta (alg. n.° 166); $BC \times BD = BA^2$ (4.ª), y $BC \times DC = AC^2$ (5.ª) Sumando ahora estas dos ecuaciones ordenadamente, tendrémos; $BC \times BD + BC \times DC = BA^2 + AC^2$, ó bien, $BC \times (BD + DC) = BA^2 + AC^2$, la que se convierte en la siguiente; $BC \times BC = BA^2 + AC^2$, y finalmente sale; $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

5.° Debe verificarse que, $BA^2 : AC^2 :: BD : CD$. Porque, si formamos proporcion con las ecuaciones (4.ª) y (5.ª), tendrémos; $BC \times BD : BC \times DC :: BA^2 : AC^2$. Simplificando ahora la primera razon por BC, que equivale á dividir por la misma BC los dos términos de la primera razon, resulta; $BD : DC :: BA^2 : AC^2$, la que permutada, da; $BA^2 : AC^2 :: BD : DC$.

6.º Debe verificarse que, $BC : AC :: AB : AD$. Porque, comparando los dos triángulos semejantes BAC y BAD, y formando proporcion con los lados homólogos, sale; BC hipotenusa del total : AC cateto mayor del mismo :: AB hipotenusa del parcial : AD cateto mayor del mismo.

113. En el número anterior, 4.º hemos encontrado que, $BC^2 = AB^2 + AC^2$, siendo BC^2 el cuadrado de la hipotenusa, y $AB^2 + AC^2$ la suma de los cuadrados de los catetos. Si en la ecuacion anterior extraemos la raiz cuadrada de ambos miembros, resultará; $\sqrt{BC^2} = \sqrt{AB^2 + AC^2}$, ó sea $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$. Estó nos dice que, la hipotenusa es igual á la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos. Si en la misma ecuacion $BC^2 = AB^2 + AC^2$, tratamos de despejar uno cualquiera de los catetos, tal como AB, tendrémos; $AB^2 + AC^2 = BC^2$, y despues, $AB^2 = BC^2 - AC^2$. Extrayendo ahora la raiz cuadrada de ambos miembros, resultará: $\sqrt{AB^2} = \sqrt{BC^2 - AC^2}$, ó bien, $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$. Esto nos dice que, un cateto cualquiera es igual á la raiz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

114. Si desde un punto cualquiera A de una circunferencia ABC (fiig. 78) bajamos una perpendicular AD al diámetro, esta perpendicular será media proporcional entre los dos segmentos BD, DC del diámetro; y si se tiran además las dos cuerdas AB, y AC, se verificarán todas las propiedades demostradas (n.º 112.) con la sola diferencia de sustituir los nombres de *cuerdas* y *diámetro*, en lugar de los de *catetos* é *hipotenusa*. La razon de esto consiste en que, las dos cuerdas y el diámetro forman un triágulo rectángulo enA (n.º 66, 2.º). Por consiguiente deben verificarse todas las propiedades del número 112. Por tanto se verifi-

cará: 1.° la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos del diámetro, y así tendrémos; BD : AD : : AD : DC; 2.° cada cuerda será media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente, y así tendrémos; BC : BA : : BA : BD (1.ª) y BC : AC : : AC : DC (2.ª); 3.° los cuadros de las cuerdas serán entre sí como los segmentos correspondientes del diámetro, y así tendrémos; $BA^2 : AC^2 :: BD : DC$; 4.°, el cuadrado del diámetro es igual á la suma de los cuadrados de las cuerdas, y así tendrémos; $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

115. Por lo visto en el número anterior, 2.° tenemos; BC : BA : : BA : BD. Si aplicamos á esta proporcion la propiedad fundamental (alg. n.° 166.), tendrémos; $BC \times BD = BA^2$. Esto nos dice que el cuadrado de una cuerda es siempre igual al diámetro ó duplo del rádio multiplicado por el segmento correspondiente. Y como los diámetros de un círculo son todos iguales entre sí, se sigue que los cuadrados de las cuerdas son proporcionales á los segmentos del diámetro que pasa por uno de sus extremos causados por las perpendiculares bajadas desde los otros extremos.

116. En todo triángulo obtusángulo el cuadrado del lado mayor es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos. Porque, si tenemos el triángulo ABC (fig. 79.), resultará; $BA^2 > AC^2 + CB^2$.

Prolongando la base AC hasta D, y bajando la perpendicular BD, se habrá originado el triángulo ABD rectángulo en B; por lo que tendrémos (n.° 112, 4.°); $AB^2 = AD^2 + BD^2$, y como $AD = AC + CD$, resulta; $AB^2 = AD^2 + BD^2 = (AC + CD)^2 = BD^2$ (alg. n.° 110.) $+ AC^2 + 2AC + CD + CD^2 + BD^2$. Además, como el triángulo BCD tambien es rectángulo en B, resultará (n.° 113.); $BD^2 = BC^2 - CD^2$. Sustituyendo pues los valores de AD^2 y BD^2, en la primera ecuacion, resulta; $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AC^2 + 2AC + CD + CD^2 + BC^2 - CD^2$, y resumiendo, tendrémos; $AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + BC^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD$. ($m$).

117. En todo triángulo acutángulo el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos.

Sea para esto el triángulo ABC (fig. 80.) cuyo lado mayor es AB. Si tiramos la perpendicular BD se originarán dos triángulos rectángulos ABD, y BDC cuyas hipotenusas serán AB y BC, siendo BD uno de los catetos de cada uno de los triángulos. Por lo que tendrémos; $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Pero, como $AD = AC - DC$, resnltará; $AD^2 = (AC - DC)^2 = AC^2 - 2\,AC \times DC + DC^2$. Además resulta tambien; $BD^2 = BC^2 - DC^2$. Por lo que si en la ecuacion primitiva en lugar de AD^2 y BD^2 sustituimos sus iguales, tendrémos; $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AC^2 - 2\,AC \times DC + DC^2 + BC^2 - DC^2 = AC^2 - 2\,AC \times DC + BC^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \times DC$. (n).

De todo esto y de lo dicho respecto al cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rectángulo se sigue que; el cuadrado del lado mayor de un triángulo es igual, mayor, ó menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, segun que el triángulo sea rectángulo, obtusángulo, ó acutángulo.

118. Cuando quiera cifrarse en ecuaciones la relacion de los lados de los triángulos, se indican los ángulos con las letras mayúsculas A, B, C, y los lados opuestos con las minúsculas a, b, c, correspondientes á las mismas mayúsculas A, B, C. Así la ecuacion (m) del número 116 se expresará de este modo, $c^2 = b^2 + a^2 + 2b \times CD$, y la (n) de este modo; $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \times DC$, las que reunidas en una darán; $c^2 = b^2 + a^2 \pm 2b \times DC$, lo que equivale á lo siguiente; *en todo triángulo oblicuángulo el cuadrado del lado mayor es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas ó menos el duplo del lado sobre que cae la perpendicular, multiplicado por el segmento interceptado por la perpendicular hasta el ángulo opuesto al lado que se considera.*

119. Si desde dos vértices cualesquiera de un triángulo se tiran dos rectas al punto medio de su respectivo lado

opuesto, dichas rectas se encontrarán á las dos terceras partes de la distancia á su vértice respectivo.

Sea para esto el triángulo ABC (fig. 81). Si desde los vértices A y C tiramos las rectas AL y CO á los puntos L y O medios de BC y BA, se encontrarán en el punto G y tendrémos; $AG = \frac{2}{3} AL$, y $CG = \frac{2}{3} CO$. Porque, siendo O y L puntos medios de BA y BL, los lados BA y BC han quedado divididos en partes proporcionales (n.° 101); luego si tiramos la OL, esta será paralela á AC y proporcional con ella (n.° 105). Así pues, tendrémos; $AB : BO :: AC : OL$. Pero aquí, por el supuesto, $BO = \frac{1}{2} AB$; luego el consecuente de la segunda razon $OL = \frac{1}{2} AC$. (*m*).

Ahora observarémos que los triángulos ACG y OLG son semejantes, por tener iguales los ángulos en G que son opuestos al vértice, é iguales los ángulos ACG y OLG por correspondientes entre las paralelas AC y OL siendo la secante BC. Formando pues, proporcion con los lados homólogos, tendrémos; $AC : OL :: AG : GL$ (1.ª), y $AC : OL :: CG : GO$ (2.ª). Pero hemos observado (*m*) que $OL = \frac{1}{2} AC$; luego tendrémos; $GL = \frac{1}{2} AG$, y $GO = \frac{1}{2} CG$. De esto pues, se deduce que, $AG : GL :: 1 : \frac{1}{2} :: 1 \times 2 : \frac{1}{2} \times 2 :: 2 : 1$. Tomando ahora de esta série la primera y última razon, resulta; $AG : GL :: 2 : 1$. Componiendo esta proporcion y comparando con el antecedente, sale; $AG + GL : AG :: 2 + 1 : 2$, ó bien, $AL : AG :: 3 : 2$, y despejando AG, resulta; $AG = \frac{2 \times AL}{3} = \frac{2}{3} AL$. Por un raciocinio semejante se encuentra que, $CG = \frac{2}{3} CO$.

120. Dícese que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de la una, ó bien toda ella y una parte suya forman los extremos de una proporcion, y las dos partes de la otra ó bien toda ella y una parte suya forman los medios de la misma proporcion.

121. Cuando dos rectas se encuentran dentro de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.

Sean para esto las dos rectas AB y CD (fig. 82.) cortadas en el punto E, y se verificará; AE : CE : : ED : EB. Porque, tirando las dos cuerdas AB y CB, han resultado los triángulos ADE y CBE semejantes, por tener iguales los ángulos en C que son opuestos al vértice, é iguales los ángulos B y D que insisten sobre un mismo arco AC. Luego formando proporcion con los lados homólogos, resulta; AE : CE : : ED : EB.

122. Si desde un punto fuera del círculo se tiran dos secantes que terminen en la parte cóncava de la circunferencia, las partes externas serán recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.

Sea para su demostracion el círculo ABDC (fig. 83). Si desde el punto P tiramos las dos secantes PC y PD, se verificará; PA : PB : : PD : PC. Porque, tirando las dos rectas CB y DA, se han originado dos triángulos semejantes, á saber, PCB y PDA, por tener el ángulo P comun á los dos triángulos, y por ser iguales los ángulos C y D que insisten sobre un mismo arco AB. Luego, formando proporcion con los lados homólogos, resulta; PA : PB : : PD : PC.

123. Si desde un punto fuera de un círculo se le tira una secante y una tangente que termine en el punto de contacto, la tangente es media proporcional entre toda la secante y la parte externa.

Sea para su demostracion el círculo BDE (fig. 84). Si desde el punto A se tira la secante AD, y la tangente AE, se verificará, AD : AE : : AE : AB. Porque, tirando las cuerdas BE y DE, se han originado dos triángulos ACD y AEB, los cuales son semejantes, por tener el ángulo A comun á los dos, y además tener iguales los ángulos BEA y BDE que tienen por medida la mitad del arco DE. Luego, formando proporcion con los lados homólogos, resulta; AD : AE : : AE : AB.

124. Si desde el ángulo de un triángulo se tira una perpendicular al lado opuesto, el lado sobre que cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como la diferencia de estos es á la diferencia de los segmentos producidos por la perpendicular.

Sea para esto el triángulo ABC (fig. 85): Si se tira la perpendicular BD, al lado AC, esta producirá los dos segmentos AD y DC, y se verificará que, AC : AB + BC : : AB — BC : AD — DC.

Porque, si tomamos por rádio el lado menor BC, y con este rádio desde B describimos la circunferencia ECFG, y prolongamos el lado mayor AB hasta que encuentre la circunferencia en el punto E, tendrémos que, desde A que es un punto fuera del círculo se habrán tirado las dos secantes AC y AE, y por consiguiente, segun lo demostrado (n.° 121), se verificará; AC : AE : : AG : AF (m). Pero aquí podrémos observar que, AE = AB + BE = AB + BC; AG = AB — BG = AB — BC; y AF = AD — DF = AD — DC (n.° 59, 1.°). Luego, si en la proporcion (m) en lugar de los términos AE, AG, y AF, sustituimos sus iguales que hemos encontrado, se nos convertirá en la siguiente, AC : AB + BC : : AB — BC : AD — DC.

Si ahora espresamos por S el segmento mayor AD, y por s el menor DC, y aplicamos lo dicho (n.° 118), tendremos; $b : c + a : : c - a : S - s$. Despejando el cuarto término de esta proporcion, sale; $S - s = \frac{(c+a) \times (c-a)}{b}$.

y como sabemos que, $S + s = b$, recordando lo que dijimos (alg. n.° 104, 1.°), tendrémos:

$$S = \frac{b}{2} + \tfrac{1}{2} \times \frac{(c+a) \times (c-a)}{b}, \text{ y } s = \frac{b}{2} - \tfrac{1}{2} \times \frac{(c+a) \times (c-a)}{b}.$$

125. Si desde dos ángulos homólogos de dos figuras semejantes se tiran diagonales á los demás ángulos, resultarán semejantes los triángulos homólogos, o del mismo modo colocados en que hayan quedado divididas las figuras totales; porque dichos triángulos tendrán respectivamente los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Sean para esto las dos figuras semejantes ABCDE y *abcde* (fig. 86). Si desde los ángulos homólogos A y *a* tiramos las diagonales AC, AD, y *ac*, *ad*; resultará; ACB semejante á *acb*, ACD, semejante á *acd*, y ADE semejante á *ade*.

Porque, siendo semejantes las dos figuras ABCDE y *abcde*, resulta $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, y además, $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$. Luego, los dos triángulos ABC y *abc* son semejantes por el segundo caso de semejanza de triángulos (n.º 109). Además, tenemos que, $C = c$, por el supuesto, y por la semejanza de los dos triángulos ABC y *abc*, resulta que, ángulo ACB = ángulo *acb*. Restando ordenadamente las dos ecuaciones anteriores, tendrémos; $C - ACB = c - acb$, ó bien; ángulo ACD = ángulo *acd*. De esto resulta que el triángulo ACD es semejante á *acd*, por la razon anterior; pues que, $AC : ac :: CD : cd$, y además, ángulo ACD = *acd*. Ahora, tenemos que los dos triángulos ADE y *ade* tienen el ángulo E igual al ángulo *e*, por el supuesto, y además $AE : ae :: ED : ed$, tambien por el supuesto. Luego estos dos triángulos son semejantes por las razones anteriores de los otros triángulos.

De esto se deduce que, recíprocamente, si dos figuras se componen de un mismo número de triángulos semejantes, y del mismo modo colocados en cada figura, dichas figuras serán semejantes; pues que el conjunto de las partes es igual al todo: por consiguiente, siendo semejantes estos conjuntos, lo serán tambien las figuras totales.

126. Los perímetros de dos figuras semejantes son entre sí como sus lados ó diagonales homólogas, y si las figuras son polígonos regulares semejantes, sus perímetros son entre sí como los lados homólogos, ó como los rádios rectos ú oblicuos.

1.º Sea para esto que enunciemos por L, L′, L″, etc., y por l, l', l'', etc., los lados de dos figuras semejantes; por D, y d sus diagonales, y por P y p susperímetros. Tendrémos, pues, que por el supuesto de semejantes las dos figuras, que; $L : l :: L' : l' :: L'' : l''$: etc. : etc. $:: D : d$. Aplicando ahora á esta serie lo que dijímos (alg. n.º 172, 1.ª) Tendrémos; $L + L' + L'' +$ etc. $: l + l' + l'' +$ etc. $:: L : l :: D : d$. Pero, como $L + L' + L'' +$ etc. es igual á P, y $l + l' + l'' +$ etc. es igual á p, resultará que, sustituyendo, tendrémos; $P : p :: L : l :: D : d$.

2.º Si enunciamos como antes por L, L', L'', etc., y por l, l', l'', etc. los lados de dos polígonos regulares y semejantes; y por R, r, los rádios rectos ú oblicuos; se verificará por el supuesto; $L : l :: L' : l' :: L'' : l''$: etc : etc. $:: L : l :: R : r$. Como $L + L' + L'' +$ etc. es igual á P, y $l + l' + l'' +$ etc. es igual á p; sustituyendo, tendrémos; $P : p :: L : l :: R : r$.

127. Con estas nociones podrémos resolver los problemas siguientes:

1.º Dividir una recta en media y extrema razon.

Se dice que una recta está dividida en media y extrema razon, cuando la parte mayor es media proporcional entre toda la recta y la parte menor. Sea para esto la recta AB (fig. 87,) que se haya de dividir en media y extrema razon, siendo la parte mayor Ax, y xB la menor, y tendrémos; $AB : Ax :: Ax : xB$. Porque, si desde el extremo B levantamos una perpendicular $BO = \frac{1}{2}BA$, y con el rádio OB describimos una circunferencia CBD, tirando desde el extremo A de la recta AB, la línea AO, y la prolongamos hasta D y desde el punto C bajamos la Cx paralela á OB, tendrémos $AC = Ax$, y $CD = AB$: y Por consiguiente, (n.º 123) resultará; $AD : AB :: AB : AC$. Dividiendo ahora esta proporcion, sale; $AD - AB : AB :: AB - AC : AC$, la que, invertida, nos da; $AB : AD - AB :: AC : AB - AC$, ó bien; $AB : Ax :: Ax : xB$.

2.º Sobre una recta dada construir un triángulo semejante á otro dado.

Sea la recta bc (fig. 74.) aquella sobre la que se ha de construir un triángulo semejante al otro ABC. Bastará para esto formar en b y c extremos de bc, dos ángulos iguales á B y C de la otra BC, y tirar desde b y c dos rectas que se encuentren haciéndolas pasar por los extremos de los arcos que hayan medido dichos ángulos; pues así se verificará lo explicado (n.º 107).

3.º Dadas dos rectas hallarles una media proporcional.

Sean para esto las dos rectas R y L (fig. 78.) entre las que hemos de hallar una media proporcional x. Sobre una recta cualquiera tal como BC colóquense las dos rectas la una á continuacion de la otra desde el punto B, y la primera estará representada por BD, y la segunda por DC, de modo que será, R = BD, y L = DC. Tomando ahora la BC suma de las dos como diámetro, tírese la circunferencia ABC, y por el punto D donde se unen las dos rectas levántese la perpendicular AD, y esta será la media proporcional que se pedia (n.º 104). Por lo que, tendrémos; BD : DA : : DA : DC, ó bien, R : x : : x : L.

Este problema puede resolverse tambien del modo siguiente.

Sean las rectas a, b (fig. 88). Sobre una recta indefinida AB, tómese Aa = a, y Ab = b. Sobre Aa como diámetro tírese la semicircunferencia Apa; por el punto b tírese la perpendicular bp, únanse los puntos A, p, por medio de la recta Ap, y esta será la media proporcional (n.º 114, 2.º) que espresándola por x, dará; a : x : : x : b.

4.º Sobre una recta dada ab construir un cuadrilátero semejante á otro dado ABCD (fig. 89).

En el cuadrilátero dado tírese la diagonal AD, en el punto a fórmense los ángulos cad, dab respectivamente iguales á CAD, DAB, en el punto b fórmese un ángulo igual á B, en el punto d fórmese tambien un ángulo igual á D, y quedará hecha la operacion.

5.º Construir un polígono igual á otro dado. (fig. 90.)

Sea el polígono dado ABCD etc. tírense las diagonales BF, CF, DF; tómese fa = FA, y constrúyanse los triángulos baf, caf etc. respectivamente iguales á BAF, CBF, etc.

6.º Sobre una recta dada AE un polígono semejante á otro dado, $abcde$. (fig. 91).

En el polígono dado tírense las diagonales ac, ad, y procédase del mismo modo que para formar un cuadrilátero semejante á otro dado.

Polígonos inscritos y circunscritos al círculo.

128. Se dice que un polígono está *inscrito* en un círculo, ó que un círculo está *circunscrito* á un polígono, cuando todos sus vértices están en la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscrito* á un círculo, ó que un círculo está *inscrito* en un polígono, cuando todos sus lados son tangentes al círculo.

129. Si desde el centro de un polígono regular (fig. 66), y con el rádio oblicuo OA trazamos una circunferencia, el círculo quedará circunscrito al polígono; y si desde el mismo centro con el rádio recto O*n* trazáramos otra circunferencia, el círculo quedaría inscrito en el polígono. De esto se deduce que, rádio oblicuo de un polígono inscrito en un círculo, y rádio de un círculo circunscrito al polígono, es una misma cosa; así como, rádio recto de un polígono circunscrito á un círculo, y rádio de un círculo inscrito en un polígono, es tambien una misma cosa.

130. El lado del *exágono* regular es igual al rádio del círculo circunscrito. Para su demostracion bastará observar que, (fig. 66.) todos los triángulos OBC, OCD, etc. son iguales, (n.º 96), y además son equiláteros, porque los tres ángulos de cada uno son iguales entre sí. Porque ángulo ABC = ángulo DCB, por ser ángulos de polígono regular; luego ángulo OBC = ángulo OCD, por ser mitades de ABC y DCB. Luego el tercer ángulo BOC ha de ser igual á cada uno de los dos, porque los tres juntos han de valer dos rectos, y así, BC que es lado del exágono es igual á BO, y CO que son rádios del círculo circunscrito. Por lo que cada uno de estos ángulos vale 60.º Lo mismo debe decirse del arco que subtende el lado del exágono.

De esto se deduce; 1.º que, para inscribir un exágono regular en un círculo, bastará colocar su rádio seis veces sobre la circunferencia, y unir los puntos de interseccion por medio de rectas.

2.° Que si se trata de inscribir un triángulo equilátero en un círculo, bastará unir por medio de rectas de dos en dos los extremos de los lados del exágono inscrito como se ve, (fig. 93).

3.° Que si se trata de encontrar un arco de 30.°, se dividirá en dos partes iguales el arco correspondiente al lado del exágono, porque este arco vale 60.°.

4.° Que, como el exágono inscrito en un círculo es menor que el mismo círculo, y los seis lados del exágono componen seis rádios, ó tres diámetros; la circunferencia es mayor que tres diámetros.

131. Si dada la circunferencia ACBD (fig. 94), tratamos de inscribirle un cuadrado, bastará tirar los dos diámetros AB, y DC que se cruzen perpendicularmente, y unir por medio de rectas los extremos de dichos diámetros; porque, como estos cuatro arcos serán iguales, resultarán tambien iguales sus cuatro lados correspondientes, y los ángulos.

Si dada la misma circunferencia ACBD, se quiere circunscribir un cuadrado, bastará tirar los mismos diámetros AB, y DC que se cruzen perpendicularmente, y tirar las tangentes MN, NP, PQ, y QM, desde cada uno de los extremos de dichos diámetros; pues que así resultará que, MQ, y NP serán perpendiculares á una misma recta AB, y por consiguiente serán paralelas, (n.° 47, 1.°). Por igual razon serán tambien paralelas las otras dos MN, y QP, y como partes de paralelas interceptadas por paralelas son iguales, resultarán tambien iguales MQ, y NP, y por lo mismo, iguales MN, y QP. Por otra parte, cada uno de estos lados es igual al diámetro. Luego son iguales los cuatro lados, é iguales tambien los ángulos, por ser rectos. Luego la figura es un cuadrado. Como el círculo inscrito es menor que el polígono circunscrito al mismo, y el cuadrado circunscrito es igual á cuatro diámetros; se infiere que, la circunferencia es menor que cuatro diámetros, y mayor que tres.

132. De lo dicho en los números anteriores se deduce:

1.° Que, si dado un polígono cualquiera inscrito en un círculo, tal como ABCD (fig. 95), se quisiese otro inscrito de duplo número de lados, no habría mas que tirar los rádios rectos prolongados hasta los extremos de la circunferencia, tales como OM, ON, OF, OG, y tirar rectas desde estos puntos hasta los extremos de los lados del primer polígono. De este modo sale en este ejemplo el polígono AGBMCNDF, duplo de ABCD.

2.° Si dado un polígono circunscrito á un círculo, se trata de circunscribir otro de duplo número de lados, se tirarán los rádios oblicuos, y por los puntos de interseccion que producirán estos rádios en la circunferencia se tirarán tangentes que vayan á parar á los correspondientes lados del polígono primero. Así dado el cuadrado EFHL (fig. 95), verificando lo enunciado, resulta el polígono *grstuxyz* duplo del primero.

3.° Si, dado un polígono inscrito, se quisiese otro de circunscrito de igual número de lados, se tirarian los rádios oblicuos, y desde sus extremos las tangentes correspondientes, cuyo conjunto formaría un polígono circunscrito igual en número de lados á los del inscrito. Así, si en la misma figura, tenemos el cuadrado inscrito ABCD, y tratamos de formar un cuadrado circunscrito, tirando los rádios oblicuos OA, OB, OC, OD, y levantando las tangentes desde los extremos A, B, etc. sale el cuadrado circunscrito EFHL.

133. Si observamos la figura 95, verémos que cada vez que se inscriban y circunscriban en un círculo polígonos de duplo número de lados, el uno va aproximándose continuamente al otro. Así, despues de inscrito y circunscrito el cuadrado, vemos que el octógono inscrito se ha acercado al octógono circunscrito. Por tanto podrémos decir que, despues de repetidas inscripciones y circunscripciones, la diferencia entre el perímetro del inscrito y circunscrito podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea. Siendo pues el círculo una can-

tidad media entre estos polígonos, es decir, mayor que el inscrito, y menor que el circunscrito; llegará precisamente un caso en que la diferencia entre el perímetro del polígono inscrito ó circunscrito, y el perímetro del círculo será menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea, de modo que llegarán á confundirse, y podrémos considerar al círculo como un polígono regular de infinitos lados.

134. Las circunferencias de dos círculos son entre sí como sus rádios, ó diámetros, y la misma relacion guardan las semicircunferencias, cuadrantes, etc.

Designemos para esto por P, p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes inscritos ó circunscritos á un círculo, por C, c las circunferencias, por R, r sus rádios que tambien son rádios rectos de dichos polígonos, por D, d sus diámetros, y por lo visto (n.º 126.) tendrémos; $P : p :: R : r$. Pero aumentando el número de lados de dichos polígonos, segun lo dicho en el número anterior, resultará; $P = C$, y $p = c$. Luego, formando proporcion con estas dos ecuaciones, tendrénos; $P : p :: C : c$; y como esta proporcion y la anterior tienen la primera razon comun, podrémos formar proporcion con las otras dos razones, y saldrá; $C : c :: R : r :: R \times 2 : r \times 2 :: D : d$. Y dividiendo por 2, por 4, por n los dos términos de la primera razon, resulta; $C : c :: R : r :: D : d :: \frac{C}{2} : \frac{c}{2} :: \frac{C}{4} : \frac{c}{4}$ $:: \frac{C}{n} : \frac{c}{n}$; ó sea, $C : c :: \frac{C}{2} : \frac{c}{2} :: \frac{C}{4} : \frac{c}{4} :: \frac{C}{n} : \frac{c}{n} ::$ $R : r :: D : d$.

135. De lo dicho en el número anterior se deduce que, si conociésemos la relacion entre el diámetro y la circunferencia, en dando otro diámetro ó circunferencia, se podría venir en conocimiento de la circunferencia ó diámetro respectivos; pues que en cualquiera de estos dos casos se conocerian tres términos de la proporcion anterior. Pero *Arquímedes* halló que dicha relacion del diámetro á la circunferencia era como 7 á 22; y *Pedro Mecio* encontró que era

como 113 á 355. Otros han encontrado que era como 1, á 3'14159265 etc. Esta última relacion es la mas ventajosa para la práctica, en la que, si 1 espresa el diámetro, 3'14159 etc., espresaría la circunferencia; y si 1 espresa el rádio, 3'14159 etc., espresaría la semicircunferencia. Para aplicar esta relacion á la práctica, se supone 3'14159 etc. $=\pi$, el diámetro$=$D, y la circunferencia$=$C. En este caso podríamos formar la siguiente proporcion; $1 : \pi :: D : C = \frac{\pi D}{1} = \pi D$ (A). Esta fórmula nos dice, que una circunferencia es igual á 3'14159 etc., multiplicado por el diámetro. Así, queriendo hallar una circunferencia rectificada cuyo diámetro valiera 10 palmos, tendríamos; C$=$3'14159 etc. $\times 10 = 31'41590$ palmos. Si en la proporcion que nos ha conducido á la fórmula (A), tratamos de despejar la D, tendríamos; $D = \frac{C \times 1}{\pi} = \frac{C}{\pi}$ (B). Esta fórmula nos dice, que un diámetro es igual á la circunferencia dividida por 3'14159 etc. Así queriendo hallar el diámetro de una circunferencia igual á 100 palmos tendríamos; $D = \frac{100}{3'14159}$ Si se quiere la estension en línea recta de un arco cualquiera, conociendo el número de grados de que consta, haremos este número de grados$=$N, su longitud$=$L; y como el número de grados de toda la circunferencia vale 360.°, tendríamos; $360.^{\circ} : \pi D :: N = L = \frac{\pi D \times N}{360.^{\circ}} = \frac{3'14159 \times D \times N}{360.^{\circ}}$ (C). Esta fórmula nos dice que la longitud de un arco cualquiera es igual á 3'14159 $\times$ el diámetro y el número de grados del arco, dividido por 360.°. Así, si queremos hallar la longitud de un arco de 90.° en un círculo cuyo diámetro sea de 8 palmos, tendrémos:

$$360.^\circ : 3'14159 \times 8 :: 90.^\circ : L = \frac{3'14159 \times 8 \times 90.^\circ}{360.^\circ} =$$

$$\frac{25'13272 \times 90.^\circ}{360.^\circ} = \frac{226'194480}{360.^\circ} = \frac{226'19448}{36.^\circ} = 6'28$$

etc. palmos.

136. Para encontrar la relacion entre el diámetro y la circunferencia podrémos seguir el siguiente método.

Sea AEBD (fig. 96.) una circunferencia; tírese en el punto A una tangente indefinida FG; tómese (130. 3.°) el arco Am de 30°, por el punto m tírese el rádio Om hasta F; tómese ahora sobre la misma tangente desde F á la derecha la magnitud FG igual á tres veces el rádio; desde el punto G, tírese al estremo B del diámetro la BG, y esta será igual en longitud á la semicircunferencia ADB, aproximada hasta mas de diez milésimas.

En efecto, tirando la mn perpendicular al rádio AO, será semilado de exágono, y de consiguiente igual á la mitad del rádio Om; por lo que el triángulo AFO dará; $On : OA :: mn : FA = \frac{mn \times AO}{On}$; pero suponiendo el rádio AO$=$ 1, será $mn = {}^1/_2 AO = {}^1/_2$, y $On = \sqrt{Om^2 - mn^2} = \sqrt{1 - {}^1/_4}$ $= \sqrt{\frac{4-1}{4}} = {}^1/_2\sqrt{3} = \sqrt{{}^3/_4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = {}^1/_2\sqrt{3}$.

Por lo que, si en la proporcion $On : OA :: mn : FA$, en lugar de On, OA, y mn sustituimos sus valores encontrados, tendrémos; $FA = \frac{mn \times OA}{On} = \frac{{}^1/_2 \times 1}{{}^1/_2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = {}^1/_3 \sqrt{3}$. De esto resulta que el cateto AG del triángulo rectángulo BAG será;

$AG = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$, por consiguiente, BG será; $BG =$

$$\sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{2^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2} =$$

$$\sqrt{4 + 3^2 - 2\times3\times\frac{1}{3}\sqrt{3} + (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2} =$$

$$\sqrt{4+9-2\times\sqrt{3}+\frac{1}{9}\times3} = \sqrt{4+9-2\times\sqrt{3}+\frac{3}{9}} =$$

$$\sqrt{4+9-2\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{13+\frac{1}{3}-2\times\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{39+1}{3}-2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{\frac{40}{3}-2\times1'7320508} = \sqrt{13'3333333 - 3'4641016} =$$

$$\sqrt{9'8692317} = 3'14153.$$

Por tanto, como la semicircunferencia, siendo el rádio la unidad, está espresada por 3'14159, tendrémos que, la recta BG es igual á la semicircunferencia BDA con menos de un diezmilésimo de diferencia.

137. Con estas nociones podrémos resolver los problemas siguientes.

1.° Desde el extremo de una recta que no se puede prolongar, levantar una perpendicular.

Como sabemos (n.° 130), que el lado del exágono es igual al rádio, y que este abraza un arco de 60.°, con una abertura cualquiera de compás hágase centro en el extremo de dicha recta, y descríbase un arco indefinido, colóquese sobre este arco dos veces el rádio, divídase el segundo en dos partes iguales, y haciendo pasar una recta por el extremo de la dada y por el medio del segundo arco tendrémos la perpendicular pedida, porque abrazará un arco de 90.°

2.° Formar los polígonos regulares de 8, 16, 32, etc. lados.

Constrúyase el cuadrado segun lo esplicado (n.° 131), y todo se reducirá á formar polígonos de duplo número de lados, lo que se ejecutará segun las reglas dadas (n.º 131, 1.º).

3.º Sobre una recta dada formar un pentágono regular (fig. 97).

Para esto sea la línea dada AB. Divídase en dos partes iguales en D, tírese la CD perpendicular é igual á AB; por los puntos B y C tírese la BC, prolónguese hasta E haciendo CE = DB. Tómese entonces una abertura de compás igual á BE, haciendo centro en A y B fórmese la interseccion F, haciendo despues centro en los mismos puntos y en F con un rádio igual á AB fórmense las intersecciones G, H, únanse estos puntos con las rectas AG, GF, etc., y tendrémos construido el pentágono regular; porque tendrá los lados y ángulos iguales, siendo el valor de cada ángulo de 108.º

4.º Dado un exágono regular, inscribir en un círculo los polígonos de 12, 24, 48, etc., lados.

Aplíquese la regla dada (n.º 132, 1.º).

Superficies.

138. Así como la extension de una línea la encontramos refiriéndola á otra que llamamos unidad lineal, así tambien la extension de una superficie se encontrará refiriéndola á otra que denominarémos unidad superficial. La superficie que se toma por término de comparacion es un cuadrado, cuyo lado es una unidad lineal de vara, pié, pulgada, etc. Así, cuando queremos espresar el valor de una superficie cualquiera, decimos que contiene tantas varas, piés, pulgadas cuadradas, etc., segun que el cuadrado qua se toma por unidad sea una vara, pié, ó pulgada cuadrada, etc.

Cuando se trata de espresar la unidad que debe servirnos de término de comparacion en una valuacion, es lo mismo decir una unidad cuadrada, ó una unidad en cuadro: así una vara cuadrada es lo mismo que una vara en cuadro, un palmo cuadrado es igual á un palmo en cuadro, un pié cuadrado es lo mismo que un pié en cuadro, etc., porque ambas espresiones no significan otra cosa que un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal. Así, (fig. 98.) *abcd* cuadrado $=$ *abcd* en cuadro; porque en uno y otro caso espresa la unidad, ó sea, 1, cuyo lado *ab* es otra unidad lineal de pié, palmo, vara, etc. No sucede lo mismo cuando se trata de espresar el resultado de las valuaciones, ó cuando se trate de unidades en plural. Así, cuatro unidades en cuadro no son lo mismo que cuatro unidades cuadradas; pues que cuatro unidades cuadradas forman un cuadro que no contiene sino cuatro unidades de aquella que ha servido de término de comparacion, tal sería, CDEF, (fig. 99), pero cuatro unidades en cuadro forman un cuadrado perfecto, cuyos lados constan cada uno de cuatro unidades de aquella que ha servido de término de comparacion; y como estos lados sean cuatro, y $4 \times 4 = 16$, resulta, que este cuadrado contiene 16 unidades cuadradas, tal sería, ACDB (fig. 99).

Del mismo modo podría demostrarse que 3 palmos en cuadro equivalen á 3 p.^s, $\times$ 3 p.^s, $=$ 9 palmos cuadrados; 6 varas en cuadro equivalen á 6 v.^s, $\times$ 6 v.^s, $=$ 36 varas cuadradas, etc.

139. Dos paralelógramos de bases y alturas iguales, ó que tengan una misma base y altura, ó que tengan una misma base y estén entre unas mismas paralelas, son equivalentes, ó iguales en superficie.

Sean para esto los dos paralélogramos ABCD, y ABEF (fig. 100), cuya base de los dos es AB, y están los dos comprendidos entre unas mismas paralelas AB, y DE, teniendo por consiguiente igual altura (n.° 47, 2.°), resultará; ABCD $=$ ABEF. Porque, AB $=$ DC, y AB $=$ FE (n.° 84); luego tenemos; DC $=$ EF. Si ahora á ambos miembros de esta ecuacion añadimos una misma cantidad CF, la ecuacion subsistirá y tendrémos; DC $+$ CF $=$ EF $+$ CF, ó sea, DF $=$ CE. Tambien resulta, AF $=$ BE (n.° 84); y AD $=$ BC, luego tenemos; triángulo DAF $=$ triángulo CBE, por el primer caso de igualdad de triángulos (n.° 74). Si ahora, de la figura total ABED, quitamos estos triángulos resultará; ABED — DAF = ABED — CBE, ó sea ABEF = ABCD.

Tambien observamos aquí, que ABEF es un paralelógramo oblicuángulo, y ABCD es rectángulo. Luego podrémos decir, que todo paralelógramo equivale á un rectángulo de igual base y altura.

140. Demostramos (n.º 91, 1.º), que la diagonal de un paralelógramo lo dividia en dos triángulos iguales. De esto pues se deduce; 1.º que todo triángulo es la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura. 2.º que, siendo un paralelógramo igual á un rectángulo de igual base y altura, todo triángulo es mitad de un rectángulo de la misma base y altura; 3.º que dos triángulos de bases y alturas iguales son equivalentes, por ser mitades de paralelógramos tambien equivalentes.

141. Las superficies de dos paralelógramos rectángulos de igual altura, son proporcionales con sus bases.

Sean para esto los dos rectángulos R, y r (fig. 101), cuyas alturas sean AD, y ad iguales entre sí, y por consiguiente, sus bases son AB, y ab, resultará esta proporcion; $R : r :: AB : ab$ (A).

Puede suceder que las bases AB y ab sean conmensurables, ó que no lo sean. En uno y otro caso se verificará la proporcion establecida.

1.º Siendo conmensurables las dos bases AB y ab, y suponiendo que tienen por comun medida AO, esta AO estará una porcion exacta de veces contenida en AB, y otra en ab. Si suponemos que está contenida m veces en AB, y n veces en ab, por lo dicho (n.º 36), tendrémos; $AB = AO \times m$; y $ab = AO \times n$. Formando proporcion con estas dos igualdades, resulta; $AB : ab :: AO \times m : AO \times n$, ó bien simplificando por AO; $AB : ab :: m : n$ (1.ª). Si ahora por los puntos de division producidos por la comun medida levantamos las perpendiculares OP, etc. R habrá quedado dividido en tantos rectángulos iguales con AOPD, cuantos eran los puntos de division producidos por la comun medida, y lo mismo podrémos decir de r; por lo que, R habrá quedado dividido en m rectángulos iguales con AOPD, y r en n rectángulos iguales con el mismo AOPD. Por lo que tendrémos; $R = AOPD \times m$, y $r = AOPD \times n$; y formando proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; $R : r :: AOPD \times m : AOPD \times n$, ó bien; $R : r :: m : n$ (2.ª). Ahora observamos que esta proporcion y la primera tienen una razon comun, por lo que, formando proporcion con las otras dos razones, sale; $R : r :: AB : ab$ (3.ª), la cual es la misma de (A).

2.º Si las bases AB, y ab son inconmensurables, dividiendo la AB en dos partes iguales, luego en otras dos, etc. finalmente una de estas divisiones será menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea; tomando á una de estas últimas divisiones, y colocándola sucesivamente sobre la base ab, es claro, que, por ser inconmensurables las dos bases AB y ab, ninguna de estas divisiones podrá caer exactamente sobre b. Sea pues el punto t el punto de division mas aproximado á b, y entonces ya tenemos que las dos bases AB y at, serán conmensurables, y por consiguiente si levantamos la perpendicular tn, tendrémos los dos rectángulos R y $atnd$ proporcionales con sus bases AB y at; por lo que, tendrémos; $R : atnd :: AB : at$, (4.ª). Pero á medida que vamos dividiendo la base AB, cada una de estas divisiones va siendo mas pequeña, y por consiguiente at va cada vez acercándose mas á ab, y $atnd$ lo va haciendo con $abcd$, ó sea, con r; por consiguiente, la misma relacion que r tenga con $atnd$, esta misma tendrá ab con at, y tendrémos; $r : atnd :: ab : at$, (5.ª). Alternando ahora las proporciones 4.ª y 5.ª, resulta; $R : AB :: atnd : at$, y $r : ab :: atnd : at$. Pero estas dos proporciones tienen la última razon comun; luego con las dos primeras podrémos formar proporcion, y tendrémos; $R : AB :: r : ab$, la que alternada, da; $R : r :: AB : ab$, la cual es la misma de (A).

142. Las superficies de dos paralelógramos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.

Sean para esto los dos rectángulos R, r, (fig. 102), y tendrémos; $R : r :: AB \times AD : AE \times AF$. Porque dispuestos estos dos rectángulos de modo que los ángulos en A estén opuestos al vértice, y prolongando los lados GE y CD, hasta que se encuentren en H, habrán resultado los dos rectángulos R y R′, que tendrán una altura comun AD, cuyas bases respectivas serán AB, y AE; por consiguiente, segun lo demostrado en el número anterior, resultará; $R : R' :: AB : AE$. Ahora podrémos considerar que, R′ y r tienen la misma altura AE, cuyas bases respectivas son AD, y AF, y por lo mismo tendrémos; $R' : r :: AD : AF$. Multiplicando ahora estas dos proporciones ordenadamente, sale; $R \times R' : R' \times r :: AB \times AD : AE \times AF$, y dividiendo los dos primeros términos por R′, resulta; $R : r :: AB \times AD : AE \times AF$.

143. Si suponemos (fig. 103.) que ABCD es un rectángulo cualquiera, y *abcd* es la unidad superficial, y en el cual cada lado es igual á 1; por lo demostrado en el número anterior, tendrémos; $ABCD : abcd :: AB \times AC : ab \times ac$; ó bien; $ABCD : 1^2 :: AB \times AC : 1 \times 1$, que da; $ABCD = \frac{1^2 \times AB \times AC}{1^2} = AB \times AC$. Esto nos dice que, la superficie de un paralelógramo rectángulo es igual á la base multiplicada por la altura, ó bien, que un rectángulo contiene tantas veces la unidad superficial, como nos dice el número de veces que esta está contenida en la base multiplicado por el número de veces contenido en la altura. Así en el presente caso, como esta unidad superficial, á saber, *abcd*, está contenida cuatro veces en la base AB, y cuatro en la altura AC, y $4 \times 4 = 16$, resulta que $ABCD = 16\,abcd$, como en efecto se verifica.

De esto se deduce, 1.° que la superficie de un paralelógramo cualquiera es igual á su base multiplicada por la altura; porque es equivalente á un rectángulo de igual base y altura (n.° 139), 2.° que la superficie de un triángulo es igual á la base multiplicada por la mitad de la altura, ó á la altura multiplicada por la mitad de la base; porque un triángulo es igual á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura (n.° 91, 1.°).

144. La superficie de un trapecio es igual á su altura multiplicada por la mitad de la suma de las dos bases paralelas.

Sea para su demostracion el trapecio ABCD, cuya altura es EF, y cuyas bases paralelas son AB, y CD, y tendrémos; $ABCD = EF \times \frac{AB + CD}{2}$. Porque, si por el punto G, medio de CB, tiramos la RL paralela al lado opuesto AD, y prolongamos la DC hasta que encuentre á la RL, se habrán originado los dos triángulos CGR, y GBL que serán iguales por el tercer caso de igualdad de triángulos (n.° 74.), puesto que, $BG = GC$ por suposicion; $B = C$ por alternos internos, y los ángulos en G iguales por correspondientes; luego tendrémos; $CRG = GBL$. Si ahora á ambos miembros de esta igualdad añadimos ALGCD, la igualdad subsistirá, y tendrémos; $CRG + ALGCD = BGL + ALGCD$, ó sea paralelógramo $ALRD =$ trapecio ABCD. Luego, la superficie del uno será igual á la superficie del otro. Pero, $ALRD = EF \times AL$ (n.° 143, 1.°); $AL = DR = \frac{AL}{1} = \frac{2 \times AL}{2 \times 1} = \frac{AL + DR}{2} = \frac{AB - BL + DC + CR}{2} = \frac{AB + DC}{2}$. Luego, sustituyendo este valor de AL, resultará; $ALBD = EF \times AL = EF \times \frac{AB + DC}{2}$. Y como, $ALBD = ABCD$, resulta finalmente; $ABCD = \frac{AB + DC}{2}$.

145. La superficie de un polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad de su rádio recto.

Sea para esto el polígono ABCDEF (fig. 66), cuya superficie representarémos por S, su perímetro por P, y por R su rádio recto Om; y tendrémos; $S = P \times {}^1/_2 R$. Porque tirando los rádios oblicuos OB, OC, etc., tendrémos el polígono dividido en un número n de triángulos iguales con AOB (n.º 96). Por tanto tendrémos; $S = AOB \times n =$ (n.º 143, 2.º) $n \times AB \times {}^1/_2 Om$: Pero, $n \times AB$ componen el perímetro P del polígono; por lo que, sustituyendo, tendrémos; $S = P \times {}^1/_2 Om = P \times {}^1/_2 R$.

146. La superficie de un círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del rádio.

Sea para esto que designemos por O esta superficie, por C la circunferencia, y por R su rádio, y tendrémos; $O = C \times {}^1/_2 R$. Porque, segun lo demostrado en el número anterior, designando por S la superficie de un polígono regular circunscrito al círculo, por P, su perímetro, y por R su rádio recto que es el mismo del círculo (n.º 129), tendrémos; $S = P \times {}^1/_2 R$. Pero, $S = O$, y $P = C$ (n.º 133). Además, ${}^1/_2 R$ es un factor comun. Luego si en la ecuacion $S = P \times {}^1/_2 R$, en lugar de de S, y P, sustituimos sus iguales O, y C, se nos convertirá en la siguiente; $O = C \times {}^1/_2 R$.

Si dividimos ambos miembros de la ecuacion anterior por 2, 4, n, etc., tendrémos; $\frac{O}{2} = \frac{C}{2} \times {}^1/_2 R$; $\frac{O}{4} = \frac{C}{4} \times {}^1/_2 R$; $\frac{O}{n} = \frac{C}{n} \times {}^1/_2 R$; $\frac{O}{\text{etc.}} = \frac{C}{\text{etc.}} \times {}^1/_2 R$. Esto nos dice que, el semicírculo, el cuadrante, y en general, un sector de círculo es igual á su arco correspondiente multiplicado por la mitad del rádio.

147. Sean P, p, las superficies de dos paralelógramos cualesquiera; B, b, sus bases; y A, a, sus alturas; y segun lo demostrado (n.º 145, 1.º), tendrémos; $P = B \times A$, y $p = b \times a$. Formando ahora proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; $P : p :: B \times A : b \times a$ (m). Esto nos dice, que las superficies de dos paralelógramos cualesquiera son entre sí, como los productos de sus bases por sus alturas. Si en la proporcion (m) hacemos $A = a$, tendrémos; $P : p :: B \times A : b \times A$, ó bien, $P : p :: B : b$, lo que nos dice

que dos paralelógramos de iguales alturas son entre sí, como sus bases. Si en la misma proporcion (m) hacemos $B=b$, se nos convertirá en la siguiente; $P : p :: B \times A : B \times a$, ó bien, $P : p :: A : a$, lo que nos dice que, dos paralelógramos de iguales bases son entre sí, como sus alturas. Si en la misma proporcion (m), hacemos $P=p$, se nos convertirá en la siguiente, $P : P :: B \times A : b \times a$, de la que se infiere; $B \times A = b \times a$, y formando proporcion con esta igualdad, sale; $B : b :: a : A$, la que nos dice que, dos paralelógramos iguales tienen las bases en razon inversa de sus alturas, á saber; el que tiene mayor base debe tener menor altura, y al contrario.

148. Las superficies de dos paralelógramos semejantes son entre sí, como los cuadrados de sus bases, de sus alturas, y en general de sus líneas homólogas.

Sean para esto P, p, dos paralelógramos semejantes; B, b, sus bases; A, a, sus alturas; y L, l, sus dos líneas homólogas cualesquiera, y por lo visto, (n.° 143, 1.°) tendrémos; $P = B \times A$, y $p = b \times a$. Formando ahora proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; $P : p :: B \times A : b \times a$, ($n$). Como además suponemos los dos paralelógramos semejantes, tendrán sus lados homólogos proporcionales, y por lo tanto, resulta; $B : b :: A : a :: L : l$. De esta proporcion resulta; $B = A = L$, y $b = a = l$ (alg n.° 156, 2.°). Luego, si en la proporcion (n) en lugar de cualquiera de los factores B, A, b, a, sustituimos sucesivamente sus iguales A, L, a, l, etc., tendrémos; $P : p :: B \times B : b \times b :: A \times A : a \times a :: L \times L : l \times l :: B^2 : b^2 :: A^2 : a^2 :: L^2 : l^2$.

149. Las superficies de dos polígonos regulares semejantes son entre sí, como los cuadrados de sus perímetros, de sus rádios rectos, y en general, de sus líneas homólogas.

Sean para esto S, s, las superficies de dichos polígonos; P, p, sus perímetros; R, r, sus rádios rectos, y L, l, sus dos líneas homólogas cualesquiera; y por lo visto (n.° 145) tendrémos; $S = P \times \frac{1}{2}R$, y $s = p \times \frac{1}{2}r$. Formando proporcion con estas dos ecuaciones, resultará; $S : s :: P \times {}^1/_2 R : p \times {}^1/_2 r :: P \times {}^1/_2 R \times 2 : p \times {}^1/_2 r \times 2 :: P \times R : p \times r$. Tomando ahora de esta serie los dos primeros términos, y los dos últimos, sale; $S : s :: P \times R : p \times r$ (m). Ahora podrémos observar que, $P : p :: R : r :: L : l$ (n.° 126). Luego, si en la proporcion (m), en lugar de los factores P, R, p, r, sustituimos sucesivamente sus iguales de esta última proporcion, tendrémos; $S : s :: P \times R : p \times r :: P \times P : p \times p :: R \times R : r \times r :: L \times L : l \times l :: P^2 : p^2 :: R^2 : r^2 :: L^2 : l^2$.

150. La misma proporcion se verificará siempre que los polígonos sean semejantes, aunque no sean regulares; porque en este caso se podrán dividir en cierto número de triángulos semejantes; y como los triángulos tendrán la razon de los cuadrados de los lados homólogos, por ser mitades de paralelógramos de bases y alturas respectivamente iguales, y además la suma de los triángulos de cada polígono es igual al polígono total, tendrémos, que siempre podrá formarse la proporcion establecida en el número anterior.

Cuando el polígono no sea regular, se dividirá en triángulos por medio de diagonales, se hallará la superficie de cada uno, y sumando las de todos, se tendrá la superficie de toda la figura.

151. Las superficies de dos círculos son entre sí, como los cuadrados de sus circunferencias, de sus rádios, de sus diámetros, y en general de sus dos líneas homólogas cualesquiera.

Sea para esto, que espresemos por S', s', las superficies de dos círculos; por C, c, sus circunferencias; por R, r, sus rádios; por D, d, sus diámetros; y por L, l, sus dos líneas homólogas, y por lo visto (n.° 146), tendrémos; $S' = C \times {}^1/_2 R$, y $s' = c \times {}^1/_2 r$. Formando ahora proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; $S' : s' :: C \times {}^1/_2 R : c \times {}^1/_2 r :: C \times {}^1/_2 R \times 2 : c \times {}^1/_2 r \times 2 :: C \times R : c \times r$. Tomando ahora de esta serie los dos primeros términos, y los dos últimos, resulta; $S' : s' :: C \times R : c \times r$ (m). Además sabemos que, $C : c :: R : r :: D : d :: L : l$ (n.º 134); por lo que, si en la proporcion (m), en lugar de los factores C, R, c, r, sustituimos sus iguales de esta última proporcion, resultará; $S' : s' :: C \times R : c \times r :: C \times C : c \times c :: R \times R : r \times r :: D \times D : d \times d :: L \times L : l \times l :: C^2 : c^2 :: R^2 : r^2 :: D^2 : d^2 :: L^2 : l^2$.

152. Dada una superficie se puede encontrar otra que sea igual con la primera, ó sea; se puede reducir la primera á la segunda. Como toda superficie puede reducirse á cuadrado, se dice que, medir una superficie es igual á cuadrarla. Esto se hace buscando una media proporcional entre los dos factores que componen la superficie de la figura en cuestion, y formar un cuadrado con esta media proporcional. Así, si dado un paralelógramo P, cuya base sea B, y su altura A; tratamos de transformarlo en cuadrado; como sabemos que, $P = B \times A$, estará todo reducido á buscar una media proporcional entre B, y A, por las reglas dadas (n.º 104, y 114, 2.º), y formar el cuadrado con esa media proporcional. Por tanto, designando por x esa media proporcional, tendrémos; $B : x :: x : A$, que da; $x^2 = B \times A$.

Si, dado un triángulo T, cuya base sea B, y su altura A, tratamos de cuadrarlo, designando por x la media proporcional entre B y $1/_2$ A, tendrémos; $B : x :: x : 1/_2 A$, que da; $x^2 = B \times 1/_2 A$.

Si, dado un trapecio T, cuyas bases paralelas sean B, B', y su altura A, tratamos de cuadradarlo, designando por x la media proporcional entre los factores $\frac{B + B'}{2}$, y A, tendrémos; $\frac{B + B'}{2} : x :: x : A$, que da; $x^2 = \frac{B + B'}{2} \times A$.

Si tratamos de cuadrar un polígono regular P, cuyo perímetro sea P', y su rádio recto R, designando por x la media proporcional entre P' y $1/_2$ R, tendrémos; $P' : x :: x : 1/_2 R$, que da; $x^2 = P' \times 1/_2 R$.

Y si finalmente tratamos de cuadrar un círculo O, cuya circunferencia sea C, y su rádio R, designando por x la media proporcional entre C y $^1/_2$R, tendrémos; C : x : : x : $^1/_2$R, que da; $x^2 = C \times {}^1/_2 R$.

Geometría en el espacio.

153. Llámase *geometría en el espacio* la que se ocupa de los sólidos. Hasta ahora hemos estudiado las figuras situadas en un plano; ahora vamos á estudiar las relaciones que puedan tener con otros planos, y la relacion de los diferentes planos entre sí.

154. Dícese que una recta es perpendicular á un plano, ó un plano es perpendicular á una recta, cuando esta recta es perpendicular á todas las rectas que situadas en el plano encuentran el *pié* de la perpendicular. El *pié* de la perpendicular es aquel punto que marca dicha perpendicular en el plano sobre que cae. Llámase tambien *proyeccion* del punto del espacio sobre dicho plano. Tal sería el punto P de la recta AP (fig. 105). Así, esta recta AP será perpendicular al plano MN, cuando sea perpendicular á las rectas PB, PQ, PC, etc., que están en dicho plano MN.

155. Una recta y un plano son *paralelos* cuando no se pueden encontrar por mas que se prolonguen; asi como son *paralelos* dos planos cuando tampoco jamás puedan encontrarse.

156. Por una recta pueden pasar infinitos planos. Porque, si ponemos un plano sobre una recta, como, por ejemplo, la tapa de un libro que descanse sobre una línea recta, esa tapa podrá tomar infinitas posiciones sin apartarse jamás de dicha recta, cuyas posiciones marcarán otros tantos planos. Como dos puntos determinan la posicion de una recta; síguese tambien que, por dos puntos dados pueden pasar infinitos planos. Si empero colocamos un plano sobre tres puntos que no estén en línea recta, aquel plano no podrá tomar sino una sola posicion; de modo que, al querer dar á dicho plano una posicion diferente,

este plano habrá de apartarse precisamente de uno de los tres puntos dados. De esto, pues, se deduce: 1.º que tres puntos que no estén en línea recta determinarán la posicion de un plano; 2.º que un triángulo determina tambien la posicion de un plano; 3.º que lo determinan dos rectas que se cruzan; 4.º que lo determinan tambien dos líneas paralelas; porque en cada uno de estos casos siempre se verifica que hay tres puntos no situados en línea recta; 5.º que la interseccion comun de dos planos que se cortan es una línea recta; porque á no ser así, por tres puntos no situados en línea recta podrian pasar mas de un plano, que es contra lo que se ha dicho (1.º).

157. Si una recta es perpendicular á otras dos situadas en un plano que pasan por el pié de la perpendicular, será tambien perpendicular al plano en que se encuentren; porque dos rectas que se crucen determinan la posicion de un plano (n.º 156, 3.º) Así, si AP (fig. 105) es perpendicular á PB, y PQ, tambien lo será al plano MN.

158. Si desde un punto fuera de un plano se le baja una perpendicular y diferentes oblicuas, la perpendicular es mas corta que cualquiera de las oblicuas, y las oblicuas que disten igualmente de la perpendicular serán iguales.

Sea para su demostracion el plano PQ (fig. 106); si desde el punto a fuera de dicho plano bajamos la perpendicular ao, y las oblicuas ar, an, am, tendrémos que $ao < ar$, y $ao < an$, y $ao < am$. Porque, tirando las rectas or, an, om, los triángulos aor, aon, aom serán rectángulos en o; la perpendicular ao será un cateto comun, y las oblicuas or, on, am serán las hipotenusas; pero la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre mayor que cualquiera de los catetos; luego, $ao < ar$, y $ao < an$, y $ao < am$.

Si los puntos n, y r son equidistantes del punto o, los triángulos rectángulos aon, aor, serán iguales por tener el cateto ao comun, y $on = or$; luego $an = ar$. Luego las oblicuas que disten igualmente de la perpendicular son iguales.

De esto se sigue; 1.º que la oblicua que mas se separe de la perpendicular será la mas larga; 2.º que desde un pun–

to dado sobre un plano no se puede levantar sino una perpendicular; 3.º que desde un punto fuera de un plano no se le puede tirar mas de una perpendicular; 4.º que la verdadera distancia de un punto á un plano debe medirse por la perpendicular tirada al plano desde dicho punto.

159. Si siendo AP (fig. 107.) una perpendicular al plano MN, se tira en dicho plano la recta BC, y desde el pié de la perpendicular AP se tira la PD perpendicular á BC, y se une el punto A con el D por medio de la DA, esta recta DA será perpendicular á BC.

Tomemos para esto DB = DC, y tiremos las rectas PB, PC, AB, AC, y resultará; PB = PC (n.º 42, 2.ª). De esto se deduce que, AB = AC (n.º 158); luego la AD tiene sus dos extremos equidistantes de B, y C, extremos de BC; luego le será perpendicular (n.º 44).

160. Si una recta es perpendicular á un plano, toda otra recta paralela á la primera será perpendicular tambien al plano.

Sea para esto AP (fig. 108) perpendicular al plano MN, y ED paralela á AP, en este caso DE tambien será perpendicular al plano MN. Porque, concibiendo un tercer plano que pase por las dos paralelas AP y ED, su interseccion con MN será PD, la cual habrá de ser perpendicular á cada una de las dos paralelas, porque siendo AP perpendicular al plano MN lo es tambien á todas las rectas que en dicho plano encuentren al pié de la perpendicular, luego lo es á PD; y como, si una recta es perpendicular á una de dos paralelas lo es tambien á la otra (n.º 49), síguese que PD es tambien perpendicular á ED. Luego ED lo es tambien á PD (n.º 49). Si ahora por el punto D tiramos la DC perpendicular á ED, tendrémos que ED es perpendicular á las dos rectas PD y DC; luego lo es tambien al plano MN (n.º 156, 3.º). De esto se sigue tambien que dos rectas perpendiculares á un mismo plano, son tambien paralelas.

161. Si una recta fuera de un plano es paralela á otra situada en un plano, será tambien la primera paralela al plano en donde se halle la segunda.

Sea para esto la recta AB (fig. 109.) paralela á CD situada en el plano MN, en este caso AB tambien será paralela al plano MN, porque, concibiendo un plano ACDB que pase por las dos paralelas AB y CD, si la recta AB y el plano MN prolongados se encontraran en un punto, lo habrían de hacer precisamente en uno de los puntos de CD, lo que es imposible, por suponerse esta recta paralela con AB. Luego AB y MN no pueden encontrarse, y por consiguiente son paralelos.

162. Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos entre sí. Porque, si no lo fuesen se encontrarían, y tirando desde el punto en que lo hiciesen dos rectas una en cada plano á los pies de esta perpendicular, le serían perpendiculares; y entonces tendríamos dos perpendiculares tiradas á una recta desde un mismo punto, lo que es imposible. De esto se deduce que, si una recta es perpendicular á un plano, lo es tambien á cualquier otro plano paralelo al primero.

163. Las intersecciones de dos planos paralelos formados por un tercer plano son líneas paralelas.

Sean para esto los dos planos paralelos MN y PQ (fig. 110). Si concebimos un tercer plano EH, las intersecciones EF, GH producidas por el plano EH serán líneas paralelas. Porque, si no son paralelas, prolongadas se encontrarán y como están en los planos MN, y PQ, se habrán de encontrar tambien dichos planos, lo que es imposible.

164. Las partes de paralelas comprendidas por dos planos paralelos son iguales.

Sean para esto las EF, GH, paralelas comprendidas por los dos planos paralelos MN, PQ, y resultará; EF = GH. Porque, concibiendo un plano EGHF comprendido entre las dos paralelas EF, GH, encontrará á los dos planos en las intersecciones EG, FH, las cuales serán paralelas (n.° 163). Luego, siéndolo tambien por el supuesto las dos rectas EF, GH, la figura EGHF será un paralelógramo (n.° 88). Luego, EF = GH, (n.° 84).

165. Si dos ángulos situados en distintos planos tienen

sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado, dichos ángulos serán iguales, y los planos serán paralelos.

1.° Sean para esto los dos ángulos CAE, DBF (fig. 111), situados en los dos planos MN, PQ. Hágase AC = BD, y AE = BF. Tírense las rectas AB, CD, CE, EF, FD. Como AC = BD, y AE = BF, resultará que ABFE será un paralelógramo (n.° 88), y por igual razon lo será tambien la figura ABDC. Luego AB = CD, y AB = EF; y como dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, tendrémos; CD = EF. De esto resulta que CDFE, es un paralelógramo. Luego CE = DF (n.° 84). Luego el triángulo CAE = triángulo DBF (n.° 74, 1.°). Luego ángulo A = ángulo B.

2.° Como dos rectas que se cruzan determinan la posicion de un plano (n.° 156, 3.°), tenemos que, CA y EA determinan el plano MN, y DB, EB determinan el plano PQ. Luego, siendo paralelas CA y DB, EA y FA, serán tambien paralelos los dos planos MN, y PQ, determinados por dichas rectas.

166. Si una recta es perpendicular á un plano, todo otro plano que pase por dicha perpendicular, será tambien perpendicular al primer plano; porque, no apartándose de la direccion de la primera perpendicular ha de caer tambien perpendicularmente como ella sobre el plano. Así, si la AP (fig. 105.) es perpendicular al plano MN, si por la AP hacemos pasar el plano APB, este tambien será perpendicular á MN.

Ángulos diedros.

167. Llámase ángulo diedro la separacion ó abertura de dos planos que se cortan; tal sería la separacion de los dos planos ABC, DBC (fig. 112). Llámanse *caras* del ángulo diedro los planos ABC y DBC que forman dicho ángulo. Llámase *arista* del ángulo diedro la interseccion BC de las caras.

167. Así como dos rectas que se cortan, dividen la extension de su plano en cuatro partes indefinidas que se llaman ángulos, así dos planos que se cortan, dividen el espacio en cuatro partes indefinidas llamadas ángulos diedros. Cuando un ángulo diedro está solo se designa con las dos letras de la arista. Así, el ángulo formado por los planos ABC y DBC (fig. 112), puede designarse por las dos letras BC. Pero cuando la arista es comun á varios ángulos se enuncian estos por medio de cuatro letras situadas las dos intermedias en la arista, y las dos extremas en cada una de sus caras. Así, los cuatro ángulos diedros de la (fig. 113), se enunciarian de este modo; AOPG, COPF, BOPH, DOPE.

168. El ángulo diedro se mide por el rectilíneo que forman dos perpendiculares tiradas en cada uno de ellos á un mismo punto de la arista.

Sea para esto el ángulo diedro CMAP (fig. 114). Si suponemos tiradas las AN, AP perpendiculares á la arista MA, y consideramos los dos planos puestos el uno sobre el otro de modo que se confundan, las perpendiculares tambien se confundirán. Si el plano MP empieza á separarse del MN, las dos perpendiculares lo harán del mismo modo, y el ángulo rectilíneo BMC tendrá la misma abertura que el ángulo diedro CMAN.

169. Puesto que los ángulos diedros se miden por medio de ángulos rectilíneos, sus propiedades serán las mismas que las de estos. Así diremos que, la suma de los dos ángulos diedros que forma un plano al caer sobre otro valen dos ángulos rectos; que si dos planos se cruzan, forman cuatro ángulos diedros que juntos valen cuatro rectos; que si un plano al cortarse con otro forma ángulos rectos, se llama perpendicular: que los ángulos diedros opuestos al vértice, son iguales, etc.

170. Dos ángulos diedros se llaman *iguales*, cuando coincidiendo dos caras y las aristas, coinciden tambien las otras dos caras. De esto se infiere que, la magnitud de un ángulo diedro no depende de la de sus caras, sino de la separacion de estas.

171. Se llaman ángulos diedros *adyacentes* los dos ángulos díedros formados por dos planos que se reunen en una recta. Así, los dos ángulos diedros ACED, y BCED (fig. 115.) son adyacentes.

172. Un plano CED (fig. 115.) se llama *perpendicular* á otro ACB, cuando los dos ángulos adyacentes que forman son iguales; y un plano es *oblicuo* á otro, cuando los ángulos adyacentes que forman son desiguales.

Se llama ángulo díedro *recto* cada uno de los dos díedros adyacentes formados por dos planos, de los que el uno es perpendicular al otro.

Ángulos políedros.

173. Se llama ángulo políedro ó ángulo *sólido* la abertura de tres ó mas planos que concurren en un punto llamado *vértice*; tal sería el ángulo P (fig. 116). Llámanse *caras* los ángulos planos que comprenden el ángulo políedro; su conjunto forma la *superficie*, y las intersecciones de estas mismas caras, como PA, PB, PC, PD, PE son sus aristas. Cada una de estas aristas es lado comun á dos caras contiguas. Todo ángulo políedro consta de tantos ángulos díedros como caras tiene.

174. Un ángulo políedro se enuncia con la letra del vértice cuando está solo; pero si está combinado con otros se lee la letra del vértice seguida de otra de cada arista.

175. Segun el número de caras de que consta el ángulo políedro se distingue con diferentes nombres: así, se llama ángulo *triedro*, *tetáedro*, *pentáedro*, *exáedro* etc., segun que el número de caras de que consta sea dos, tres, cuatro, cinco, etc.

Todo ángulo políedro puede descomponerse en ángulos tríedros, del mismo modo que un polígono puede descomponerse en triángulos por medio de diagonales.

176. Dos ángulos tríedros ASC, y DGF (fig. 117.) son iguales, cuando tienen las caras respectivamente iguales, y colocadas del mismo modo. Porque; el todo es igual la

conjunto de las partes; luego; si cada una de las partes del primero es igual á cada una de las respectivas del segundo, el ángulo total del primero será igual al ángulo total del segundo, que es lo que se verifica en el supuesto.

Políedros.

177. Llámase *sólido* ó mejor *políedro* el cuerpo terminado por polígonos, llamados *caras* del políedro. Los lados de estas caras toman el nombre de *aristas*, y los puntos de interseccion de las aristas se denominan *vértices*.

178. Un políedro puede tener diferentes nombres segun el número de caras de que consta. Así, se llama *tetáedro*, *pentáedro*, *exáedro*, *octáedro*, *dodecáedro*, é *icosáedro*, segun consta de cuatro, cinco, seis, ocho, doce, ó veinte caras.

179. Los políedros pueden ser *regulares* ó *irregulares*: el regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales, y sus ángulos políedros son tambien iguales. Llámase irregular cuando le falta alguna de dichas circunstancias.

180. La suma de las caras de un ángulo políedro debe ser menor que cuatro rectos, ó menor que 360.° Porque, la suma de todos los ángulos que se pueden formar al rededor de un punto hácia todas direcciones vale 4 rectos ó 360.° (n.° 30, 3.°). Pero un ángulo políedro jamás abraza todas las direcciones: luego jamás podrá valer 360.° De esto se deduce que, con tres ángulos de triángulo equilátero puede formarse ángulo políedro: porque, como cada ángulo de triángulo equilátero vale 60.° (n.° 99), tendrémos que la suma de los tres será 180.° Con cuatro ángulos de triángulo equilátero tambien podrá formarse ángulo políedro, porque su suma vale 240.° Con cinco ángulos de triángulo equilátero tambien podrá formarse ángulo políedro, porque su suma vale 300.° Con seis ángulos del mismo triángulo ya no podría formarse ángulo políedro, porque su suma vale 360°. Luego mucho menos podría formarse con 7, 8, 9, etc.

Con tres ángulos de cuadrado podrá formarse ángulo políedro; porque, como ángulo de cuadrado vale 90.° (n.° 99), tendrémos que la suma de los tres valdrá 270.° Con cuatro ángulos de cuadrado ya no podría formarse, porque su suma sería igual á 360.° Luego mucho menos podría formarse con 5, 6, 7, etc.

Con tres ángulos de pentágono regular podrá formarse ángulo políedro; porque, como cada ángulo de pentágono vale 108.° (n.° 99), tendrémos que su suma valdrá 324.° Con cuatro ángulos del mismo pentágono ya no podría formarse porque su suma valdría 430.°

Con tres ángulos de exágono regular ya no puede formarse ángulo políedro; porque, como cada ángulo de exágono regular vale 120.° (n.° 99), tendrémos que su suma será 360.° Luego mucho menos podrá formarse con tres ángulos de eptágono, octógono, etc.

181. De todo lo dicho en el número anterior se deduce que, no puede haber sino cinco políedros regulares; á saber, tres formados por triángulos equiláteros, que son el tetáedro, el octáedro, y el icosáedro; uno formado por cuadrados que es el exáedro ó *cubo*, y uno formado por pentágonos regulares que es el dodecáedro. El tetáedro está formado por cuatro triángulos equiláteros iguales; el octáedro por ocho, el icosáedro por veinte; el exáedro por seis cuadrados iguales; y el dodecáedro por doce pentágonos regulares iguales.

182. Llámanse políedros *semejantes* aquellos cuyas caras homólogas son polígonos semejantes, y los ángulos políedros homólogos son iguales.

Prismas. — Sus Superficies y Volúmenes.

183. Llámase *prisma* el políedro cuyas caras opuestas son dos polígonos iguales y paralelas, y las demás caras son paralelógramos. Las dos caras iguales y paralelas se llaman *bases* del prisma, y las otras se llaman caras laterales. Así, AH (fig. 118.) sería un prisma, cuyas bases

serian ABCDE y FGHIR. Como las partes de paralelas comprendidas por dos planos paralelos son iguales (n.º 164), síguese que, todas las *aristas* de un prisma son iguales. Llámase *altura* del prisma la perpendicular tirada desde una de las bases á la opuesta ó á su prolongacion; tal sería por ejemplo AF.

184. El prisma puede clasificarse por razon de la altura, y por razon de sus bases. Por razon de la altura, se divide en *recto* y *oblicuo*. Llámase recto aquel cuyas aristas son perpendiculares á la base; y se denomina oblicuo cuando las aristas caen oblicuamente sobre la base. Por razon de las bases se divide en *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, etc., segun que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, exágonos etc. Así, el prisma AH (fig. 118.) sería pentagonal. Llámase el prisma *paralelepípedo* cuando sus bases son paralelógramos. De esto resulta que todas las caras de un paralelepípedo son paralelógramos. El paralelepípedo se llama *rectángulo*, cuando ademas de ser recto, tiene por bases dos *rectángulos*. Divídese tambien el prisma en *regular* é *irregular*: el primero es aquel cuyas bases son polígonos regulares, y el segundo es aquel cuyas bases no son polígonos regulares.

185. Para construir un prisma fórmese un polígono cualquiera; tal como FGHIR (fig 118). Por los vértices de dicho polígono tírense hácia un mismo lado las paralelas FA, GB, HC, ID, RE; y cortándolas en seguida por un plano ABCDE, el poliedro AH que resulta será un prisma.

Porque, siendo las rectas FG, GH, HI, etc., paralelas á AB, BC, CD, etc. (n.º 163), los cuadriláteros AFGB, BGHC, etc. son paralelógramos. Ademas los ángulos de los dos polígonos ABCDE, FGHIR son respectivamente iguales (n.º 165): luego estos dos polígonos pueden coincidir, y por tanto el poliedro AH será un prisma (n.º 183).

186. Dos prismas rectos de igual base y de igual altura son iguales.

Sean para esto los dos prismas AH, y LS (fig. 118), cuyas bases FGHIR, y QRSTV sean iguales, y cuyas alturas CH, y NS tambien sean iguales, y resultarán iguales los dos prismas AH y LS. Porque, siendo las dos bases iguales por suposicion, puedo colocar el prisma LS sobre AH, de modo que la base QRSTV se confunda con la base FGHTIR. Entonces la arista SN caerá sobre HC, porque en un punto H de un plano no se puede levantar mas que una sola perpendicular á dicho plano; por otra parte, como las dos aristas SN y HC son tambien iguales por suposicion, el punto N habrá de caer exactamente sobre el punto C. Del mismo modo se puede demostrar que los puntos O, P, L, M caerán sobre los puntos D, E, A, B. Luego los dos prismas coinciden, y por consiguiente son iguales.

187. Toda seccion paralela á la base de un prisma es igual á dicha base.

Sea para esto el prisma BD (fig. 119). Si cortamos el prisma por medio de un plano, *gponmh* será paralela á la base RSTFXZ. Porque, los lados de los dos polígonos RSTFXZ, *gponmh* serán respectivamente paralelos (n.º 163); luego los cuadriláteros RS*pg*, ST*op*, TU*no*, etc. serán paralelógramos; y por tanto RS$=$*gp*; ST$=$*po*, TU $=$*on*, etc. Además los ángulos de dichos polígonos son respectivamente iguales (n.º 165). Luego estos polígonos pueden coincidir, y por consiguiente son iguales.

188. En todo paralelepípedo las caras opuestas son iguales y paralelas.

Sea para esto el paralelepípedo HB (fig. 120). Primero la cara HEFG será igual y paralela con DABC; esto se desprende de su definicion (n.º 184). La cara HGCD será igual y paralela á la cara EFBA. Porque, los dos paralelógramos HGCD, y EFBA tienen iguales los lados HD y EA, por ser lados opuestos del paralelógramo HEAD, y por igual razon tienen iguales los lados HG y EF. Además los ángulos GHD y FEA son iguales (n.º 165). Luego dichos paralelógramos han de ser iguales; porque, teniendo dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, todos los ángulos del uno serán respectivamente iguales á los ángulos del otro, y los lados opuestos tambien serán iguales (n.º 91, 2.º). Las mismas caras HGCD y EFBA son paralelas, por pasar una y otra por dos rectas HD y HG, EA y EF respectivamente paralelas; y como dos rectas que se cruzan determinan la posicion de un plano (n.º 156, 3.º) siendo estas rectas de un plano respectivamente paralelas á las dos del otro, dichos planos tambien serán paralelos. Del mismo modo podria demostrarse que las otras dos caras son tambien iguales y paralelas.

De esto se deduce que, si un políedro está terminado por seis planos paralelos de dos en dos, el políedro será un paralelepípedo.

189. Todo plano diagonal de un paralelepípedo recto le descompone en dos prismas triangulares iguales.

Sea para esto el mismo paralelepípedo HB (fig. 120); si hacemos pasar el plano diagonal FHDB, dividirá al paralelepípedo HB en los dos prismas triangulares iguales ABDHEF, DBCGHJ. Porque, siendo paralelepípedo, tendrémos EFGH = ABCD; por consiguiente sus mitades tambien serán iguales, y será; DBC = ABD, HFG = EFH. Luego el ángulo sólido en E será igual al ángulo sólido en C; porque, el ángulo AEH = BCG por rectos, el AEF = GCD por la misma razon, y el HEF = BCD por la igualdad de dichos triángulos. Además las caras DCGH y BCGF son respectivamente iguales á las AEFB, AEHD, por ser caras opuestas de un paralelepípedo; luego dichos prismas triangulares espresados son iguales

De esto se deduce que, todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo recto de la misma altura, y doble base.

190. Dos paralelepípedos que tengan bases y alturas iguales, ó que tienen una base comun, y sus bases opuestas están en un mismo plano y entre unas mismas paralelas, son equivalentes.

Sean para esto los dos paralelepípedos HC, y HL, (fig. 121), que teniendo la base inferior comun HFEG están entre unas mismas paralelas AB, y JM, y se verificará; HC = HL.

Porque, prolongando la base superior AD hasta que encuentre á la JN; como la base HE = DA, por ser bases opuestas de un paralelepípedo, y por la misma razon HE = NJ, tendrémos; DA = NJ; y DA + BL = NJ + BL, ó sea; LA = NB. Además tenemos; EC = FD, EL = FN; el triángulo EAJ = FBM, y GCL = HDN, luego los dos prismas triangulares GAL y HBN son iguales. Ahora si del EN quitamos estos prismas, las diferencias serán iguales, y tendrémos; EN — GAL = EN — HBN, ó bien; ED = EN, ó sea, HC = HL.

191. Dos paralelepípedos rectángulos de iguales bases son proporcionales con sus alturas.

Designemos para esto por P, p, dos paralelepípedos rectángulos de iguales bases B, b, y designemos por A, a, sus alturas, y resultará; $P : p :: A : a$.

1.º Supongamos que las alturas A, a, son conmensurables, y que tienen por comun medida RC. Suponiendo que la comun medida cabe m veces en A y n veces en a, tendrémos; $A = RC \times m$, y $a = RC \times n$. Formando proporcion con estas dos igualdades, resulta; $A : a :: RC \times m : RC \times n$, ó sea; $A : a :: m : n$. (1.ª) Tirando ahora por los puntos de division de las alturas planos paralelos á las bases, el paralelepípedo P quedará dividido en m paralelepípedos parciales, y el paralelepípedo p en n paralelepípedos parciales tambien. Además todos estos paralelepípedos parciales serán iguales, pues que tendrán bases y alturas iguales (n.º 187). Designando ahora por P′, p', los paralelepídedos parciales en que han quedado divididos los dos paralelepípedos totales P, y p, resultará; $P = P' \times m$, y $p = p' \times n$. Formando ahora proporcion con estas dos igualdades, resulta; $P : p :: P' \times m : p' \times n$, ó sea; $P : p :: m : n$ (2.ª). Como ahora vemos que las proporciones 1.ª y 2.ª, tienen una razon comun, podrémos formar proporcion con las otras dos razones, y tendrémos; $A : a :: P : p$, y permutando, sale finalmente; $P : p :: A : a$.

2.º Si las alturas A, a, son inconmensurables, se demostraría la proposicion como sus análogas (n.os 36, 102).

192. Dos paralelepipedos rectángulos de iguales alturas son proporcionales con sus bases.

Esta proposicion se deduce de la anterior; porque, como en un paralelepípedo todas las caras son rectángulos, podemos elegir por bases cualesquiera caras opuestas; en este caso tomando en cada uno por bases las caras que se suponen alturas; resultarán por alturas las otras caras que se tomaban por bases, y se verificaría la proposicion anteriormente demostrada.

193. Dos paralelepipedos rectángulos son proporcionales con los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.

Sean para esto dos paralelepípedos P, p, cuyas bases sean B, b, y sus alturas A, a. En este caso se verificará; $P : p :: B \times A : b \times a$.

Porque, prolongando el paralelepipedo p hasta que tenga la misma altura que P, y designando por P' el paralelepípedo resultante; como P y P' tendrán la misma altura serán proporcionales con sus bases, y resultará; $P : P' :: B : b$; y como P' y p tendrán la misma base serán proporcionales con sus alturas, y resultará; $P' : p :: A : a$. Multiplicando ahora estas dos proporciones, tendrémos; $P \times P' : P' \times p :: B \times A : b \times a$, ó bien simplificando por P'; $P : p :: B \times A : b \times a$.

194. La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de la altura por el perímetro de su base.

Designemos por S, la superficie lateral, por A, su altura, y por B, B', B'', etc. las bases de los rectángulos laterales, y tendrémos; $S = A \times (B + B' + B'' + \text{etc})$. Porque, $B + B' + B'' + \text{etc}$, será el perímetro de la base del prisma. Como la altura A es una arista, y todas las aristas son iguales, y cada rectángulo es igual á su base multiplicada por su altura, resultará que las superficies de los rectángulos laterales serán, $A \times B + A \times B' + A \times B'' +$ etc., luego tendrémos: $S = A \times B + A \times B' + A \times B'' +$ etc. $= A \times (B + B' + B'' + \text{etc})$.

195. La superficie lateral de un prisma oblicuo es igual

al producto de una de sus aristas laterales por el perímetro de una seccion perpendicular á dicha arista.

Sea para esto el prisma FC (fig. 122.), y considerando la arista AF y el perímetro LMNOP, tendrémos que representando por S, la superficie lateral, resultará; $S = AF \times (LM + MN + NO + etc)$.

Porque, considerando á las aristas AF, BG, CH, etc., como bases de los paralelógramos laterales, tendrémos que las alturas de dichos paralelógramos serán los lados LM, MN, NO, etc. Además la superficie lateral del prisma será igual á la suma de las superficies de las caras laterales. Pero la superficie de la cara $ABGF = AF \times LM$; la de la cara $BCHG = BG \times MN$; la de la cara $DCHI = CH \times NO$, etc., pero, $AF = BG = CH = etc.$, porque las aristas de un prisma son todas iguales entre sí (n.° 183). Luego resulta S de $FC = AF \times LM + BG \times MN + CH \times NO + etc. = AF \times LM + AF \times MN + AF \times NO + etc., = AF \times (LM + MN + NO + etc)$.

196. Demostramos (n.° 193.) que dos paralelepípedos rectángulos eran entre sí como los productos de sus bases por sus alturas; luego lo mismo será un paralelepípedo rectángulo que su base multiplicada por su altura. De esto se deduce que el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura.

Espresando, pues, por P un paralelepípedo, por A su altura, y por B su base, tendrémos; Volúmen $P = A \times B$. Recordando ahora lo que tenemos sentado (n.° 2), á saber que un cuerpo consta de tres dimensiones, la superficie de dos, y la linea de una sola dimension; podrémos ver que en la base de un paralelepípedo habrá dos dimensiones, y la altura formará la tercera. Luego, si en la ecuacion anterior espresamos por C y D las dos dimensiones contenidas en la base B, se nos convertirá en la siguiente: volúmen $P = A \times C \times D$. Sea ahora C el cubo que se toma por unidad, como sus dimensiones son todas iguales á la unidad, tendrémos; $C = 1 \times 1 \times 1$. Formando ahora proporcion con estas dos últimas ecuaciones, resultará; $P : C :: A \times C \times D : 1 \times 1 \times 1$, que da; $\frac{P}{C} = \frac{A \times C \times D}{1 \times 1 \times 1} = A \times C \times D = A \times B$. Como las veces que P contiene á C es lo que se llama volúmen del paralelepípedo, este volúmen será $A \times B$. Si el paralelepípedo es un cubo, su volúmen será la tercera potencia de una de sus aristas. Si el paralelepípedo es oblicuángulo, su volúmen se halla multiplicando la superficie de su base por su altura; porque es igual á un paralelepípedo rectángulo de igual altura y base equivalente.

197. El volúmen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de la superficie de su base por su altura; porque todo paralelepípedo puede convertirse en otro recto y rectángulo de igual altura y base equivalente; pero tenemos demostrado en el número anterior, que el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual á la superficie de su base multiplicada por la altura.

198. El volúmen de un prisma triangular es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura. Porque, demostramos (n.º 189), que todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de igual altura y doble base; pero el volúmen de este es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, luego tambien lo será el volúmen de un prisma triangular.

199. El volúmen de un prisma cualquiera es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura. Porque, un prisma cualquiera puede descomponerse por medio de diagonales en tantos prismas triangulares de la misma altura, cuantos sean los triángulos que se pueden formar en el polígono que le sirve de base. Luego, siendo el volúmen de cada prisma triangular igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, y siendo la altura comun; síguese que el volúmen total, será igual al volúmen de todos los prismas triangulares, y por consiguiente igual á la superficie total multiplicada por la altura. De esto se sigue que, prismas de bases y alturas iguales serán iguales en volúmen.

Pirámides. — Sus Superficies y Volúmenes.

200. Llámase pirámide un poliedro cuya base es un polígono cualquiera, y cuyas caras laterales son triángulos que rematan en un punto comun llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide. Tal seria la (fig. 123). Llámase *altura* de una pirámide á la perpendicular bajada desde el *vértice* al plano de la base ó á su prolongacion; tal seria SE.

Una pirámide por razon de la base se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, etc., segun que la base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, etc.

La pirámide se divide en *regular* é *irregular*. Es lo primero cuando la base es un polígono regular, y además las aristas laterales son todas iguales, ó la altura es perpendicular á la base; y es lo segundo cuando falta alguna de dichas circunstancias. En una pirámide *regular* se llama *apotema* á la perpendicular que baja desde el *cúspide* por una de las caras á un lado de la base; tal sería SR. De la definicion de la pirámide regular se infiere que todos los triángulos laterales son iguales entre sí, porque los tres lados del uno son iguales á los tres lados del otro, supuesto que la base es un polígono regular, y además las aristas laterales son tambien todas iguales entre sí.

201. Cuando se corta á una pirámide por medio de un plano, se divide en dos partes de las cuales la una se llama pirámide *deficiente*, y la otra se denomina pirámide *truncada*, *tronco*, ó *trozo* de pirámide. Llámase pirámide *deficiente* la parte superior que resulta, y pirámide *truncada*, *tronco*, ó *trozo* de pirámide la parte inferior ó sea la porcion de pirámide comprendida entre la base y el plano que corta á todas las aristas laterales. Así en este caso sería pirámide *deficiente* la parte S*abcd*, y la otra parte seria la *truncada*.

202. Toda pirámide puede descomponerse en tantas pirámides triangulares cuantos lados tenga. Porque, desde

un punto cualquiera de la base puede dividirse á esta en tantos triángulos cuantos sean sus lados, y tirarse planos por cada arista, y por la linea que une dicho punto con el *cúspide*.

203. Toda seccion paralela á la base de una pirámide es semejante á dicha base.

Sea para esto la pirámide (fig. 123), y supongamos que la seccion *abcd* es paralela á la base ABCD. Si por las aristas SA, SB, SC, SD, y por la altura SE concebimos los planos SAE, SBE, etc., siendo la seccion *abcd* paralela á ABCD, los lados de estos polígonos, y las diagonales serán paralelos (n.º 163). Luego los triángulos ABC y *abc*, BCD y *bcd*, CDA y *cda* serán semejantes, pues que tienen sus ángulos respectivamente iguales (n.º 165); Luego estos dos polígonos ABCD y *abcd* son semejantes.

Siendo dos figuras semejantes como los cuadrados de sus lineas homólogas, resulta que; $ABCD : abcd :: SA^2 : Sa^2 :: SE^2 : Se^2$.

204. Las secciones de dos pirámides de iguales alturas cortadas por un plano paralelo á las bases serán proporcionales con estas bases; y por consiguiente, si las bases son iguales tambien lo serán las secciones.

Sean para esto dos pirámides P, y P′ cuyas alturas sean A y A′ iguales entre sí; y las partes de estas alturas sean a y a' iguales tambien; sean sus bases B y B′, y sus secciones b y b', y resultará; $B : B' :: b : b'$. Porque, segun lo enunciado en el número anterior tendrémos; $B : b :: A^2 : a^2$, y $B' : b' :: A'^2 : a'^2$. Aqui podrémos observar, segun el supuesto, que estas dos proporciones tienen la segunda razon igual; y así, formando proporcion con las otras dos razones resultará; $B : b :: B' : b'$, la que alternada, da; $B : B' :: b : b'$. De esto se sigue que si $B = B'$, tambien será $b = b'$.

205. Llámanse dos pirámides *semejantes* cuando sean sus bases *semejantes*, y sus lineas homólogas son proporcionales.

206. La superficie lateral de una pirámide regular es

igual al perímetro de la base multiplicado por la mitad del apotema.

Sea para esto que designemos por S esta superficie, por P el perímetro de la base, y por A el apotema, y resultará; $S = P \times {}^1/_2 A$.

Porque, enunciando por n el número de los triángulos laterales, y por B una de sus bases, siendo iguales todos estos triángulos por la pirámide regular, resultará que el perímetro de la base vendrá espresado por $n \times B$. Pero la superficie de uno de estos triángulos es $B \times {}^1/_2 A$. Luego, siendo n el número de estos triángulos, y siendo además todos iguales, tendrémos; que, la superficie de todos, ó la lateral de la pirámide, será; $nB \times {}^1/_2 A$, ó sea, $P \times {}^1/_2 A$. Luego tendrémos; $S = P \times {}^1/_2 A$.

207. La superficie lateral de una pirámide regular truncada, ó de un trozo de pirámide, es igual á la parte de apotema comprendida entre las dos bases opuestas, ó sea á la altura de uno de los trapecios laterales, multiplicada por la semisuma de los perímetros de las dos bases opuestas y paralelas.

Para su demostracion designemos por a la parte de apotema, ó sea, la altura de uno de estos trapecios ó caras laterales, por b la base superior, y por b' la inferior, representando por n el número de estos trapecios, y por S la superficie lateral, y tendrémos; $S = a \times \frac{nb + nb'}{2}$. Porque, en este caso resultará que nb espresará el perímetro de la base superior, y nb' el perímetro de la inferior; luego $nb + nb'$ será la suma de los perímetros. Por lo dicho (n.º 144.), tenemos que la superficie de uno de estos trapecios será; $a \times \frac{b + b'}{2}$. Luego, siendo iguales todos estos trapecios, y estando representado su número por n, resultará; $S = a \times \frac{nb + nb'}{2}$.

208. *Todo prisma triangular* ABCFDE (fig. 124) *se puede dividir en tres pirámides equivalentes.*

Si por las diagonales AD, AF de dos caras contiguas del prisma se concibe un plano, quedará dividido el prisma en dos pirámides, una triangular ADEF (fig. 125), cuya base DEF y la altura AE serán las mismas que las del prisma: y la otra cuadrangular (fig. 126) que tendrá por base á la otra cara del prisma, y por altura la del triángulo BAC de la base. Si por las aristas DA, AC de esta, se concibe un plano DAC, su comun seccion con el BCFD, será la diagonal DC; por lo que dicha pirámide quedará dividida en otras dos triangulares ABCD, ACDF, que tendrán bases iguales (91, 1.°), y una misma altura por tener su vértice comun en A; por lo cual estas dos pirámides serán iguales en volúmen. Ahora, la pirámide DBAC se puede considerar que tiene por base el triángulo BAC, que es una de las bases del prisma, y por altura la misma que la del prisma: y como las dos bases opuestas de un prisma son iguales, resulta que las dos pirámides DBAC y ADEF (fig. 124) son iguales tambien en volúmen; luego las tres pirámides son iguales en volúmen.

209. El volúmen de una pirámide es igual á la superficie de su base multiplicada por el tercio de su altura.

Porque, (n.° 202), toda pirámide puede descomponerse en una porcion de pirámides triangulares. Pero, segun lo demostrado en el número anterior, toda pirámide triangular es el tercio de un prisma triangular de igual base y altura. Luego, siendo el volúmen del prisma (n.° 199) igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, el volúmen de la tercera parte del prisma, ó sea el volúmen de la pirámide será igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de su altura. De esto se sigue, que dos pirámides de bases y alturas iguales serán iguales en volúmen.

CUERPOS REDONDOS.

Cilindros. — Sus Superficies y Volúmenes.

210. Llamase *cuerpo redondo* ó de revolucion el que está terminado por una superficie que no tiene ángulos sólidos. Estos cuerpos son tres, á saber, el *cilindro*, el *cono*, y la *esfera*.

211. Llámase *cilindro* el cuerpo que tiene dos bases opuestas que son dos círculos iguales y paralelos, cuya superficie lateral es convexa, á la que puede aplicarse perfectamente un plano ó una regla. Llámase *eje* de un cilindro aquella recta que desde el centro de una base va á parar al centro de la otra. Llámase *altura* aquella recta que desde un punto cualquiera de una base va á parar á la otra ó á su prolongacion. El cilindro se divide en *recto* y *oblicuo*; es recto cuando el *eje* es perpendicular á las bases, y es oblicuo cuando le falta esta circunstancia. Así, el cilindro (fig. 127) sería recto, y sería oblicuo el otro (fig. 128).

212. El cilindro recto se origina de la revolucion de un rectángulo al rededor de un lado inmóvil. El lado inmóvil forma el eje, el lado opuesto al inmóvil forma la superficie lateral, y los otros dos lados forman los dos círculos que sirven de bases. Así, dado el rectángulo ABCD (fig. 127), girando al rededor de AB, AB sería el eje, CD describiría la superficie lateral, y los lados AD y BC describirian las bases.

213. El cilindro oblicuo se puede considerar formado del movimiento de un círculo paralelamente á sí mismo en la direccion de una recta.

214. A todo cilindro recto se le pueden inscribir y circunscribir prismas. Si se le inscribe un prisma y circunscribe otro, la superficie del prisma circunscrito será mayor que la del cilindro, y la del prisma inscrito será menor que la del cilindro. Porque, el prisma circunscrito con-

tiene al cilindro, y el prisma inscrito está contenido dentro del cilindro. Pero todo lo que contiene es mayor que su contenido, y al revés; luego, etc.

215. La diferencia entre el prisma circunscrito é inscrito en un cilindro podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.

Para su demostracion designemos por S la superficie del circunscrito, por s la del inscrito, por P el perímetro de la base del circunscrito, por p el perímetro de la base del inscrito, y por A la altura de cada uno de estos dos prismas que será la misma del cilindro, y segun lo demostrado (n.º 194), tendrémos; $S = P \times A$, y $s = p \times A$. Restando ahora ordenadamente estas dos ecuaciones; resultará; $S - s = P \times A - p \times A = A \times (P - p)$. Pero el segundo miembro de esta ecuacion es igual á *cero* en razon de que el factor $P - p$ se convierte en *cero* (n.º 133), y un producto crece ó decrece á medida que lo hace uno de los factores (arit. n.º 28, 2.ª). Luego, el primer miembro $S - s$ que espresa la diferencia entre las dos superficies se convierte tambien en cero, ó sea en una cantidad menor que cualquiera otra.

De esto se sigue que, si la diferencia entre las superficies de estos prismas, que son extremos respecto del cilindro, es nula, con mucha mas razon será nula la diferencia entre la superficie de un prisma inscrito ó circunscrito á un cilindro, y la del cilindro: porque será la diferencia entre las superficies de un extremo y un medio, que tienen mas puntos de contacto que las superficies de los extremos. Esto nos dice que en lugar de un prisma podrémos decir cilindro, y al revés; porque una cosa es cuasi igual á la otra.

216. La superficie convexa de un cilindro recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura.

Para su demostracion designemos por S′ la superficie del cilindro, por C la circunferencia de su base, y por A su altura, y tendrémos: $S' = C \times A$. Porque, si representamos por S la superficie de un prisma recto, por P el perímetro de su base, y por A su altura, tendrémos (n.º 194): $S = P \times A$. Pero por lo dicho en el número anterior, resulta; $S = S'$, y por lo dicho (n.º 133), $P = C$. Luego, siendo A la altura del prisma que es igual á la del cilindro, si en la ecuacion $S = P \times A$, en lugar de S ponemos S', y en lugar de P ponemos C, se nos convertirá en la siguiente; $S' = C \times A$, que espresa la superficie convexa del cilindro.

217. Si cortamos un cilindro recto por medio de un plano paralelo á las bases, la seccion que resulte será tambien un círculo igual á las bases.

Porque, hemos demostrado (n.º 215.) que, la diferencia entre la superficie del cilindro y la del prisma inscrito ó circunscrito es nula; pero en un prisma toda seccion paralela á las bases formada por un plano que lo corte es igual á estas bases (n.º 187); luego tambien será igual á las bases del cilindro toda seccion paralela á ellas. Así, la seccion MLR (fig. 127) será un círculo igual á FGC.

Lo mismo se verifica cuando el cilindro es oblícuo; porque, siendo la seccion paralela á las bases, si cortamos á estas bases y á la seccion por medio de un tercer plano, las intersecciones formadas en las bases y en la seccion serán líneas paralelas (n.º 163). De aqui resultará que, todas las figuras representadas por las líneas del tercer plano y las intersecciones de las bases y seccion serán paralelógramos, y por tanto las distancias que desde el centro de las bases vayan á parar á cualquiera de los extremos serán iguales á las distancias que desde el punto correspondiente de la seccion terminen en los extremos de la misma. Luego, siendo círculo la base, lo será tambien la seccion, y siendo iguales los rádios de la base y de la seccion, esta será un círculo igual á las bases.

218. La diferencia entre el volúmen de un prisma circunscrito y otro inscrito en un cilindro es menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.

Para su demostracion designemos por V, al volúmen del circunscrito, por v el del inscrito, por S la superficie de la base del circunscrito, por s la del inscrito, y por A su altura comun que será la misma del cilindro, y por lo demostrado (n.° 199), tendrémos; $V = S \times A$, y $v = s \times A$. Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, sale; $V - v = S \times A - s \times A = A \times (S - s)$. Pero el segundo miembro se reduce á *cero*, por hacerlo el factor $S - s$; luego tambien lo hace el primer miembro $V - v$, que espresa la diferencia entre el volúmen del prisma circunscrito y del inscrito.

De esto se infiere que, la diferencia entre el volúmen del cilindro y del prisma inscrito ó circunscrito es con mucha mas razon menor que cualquiera cantidad dada, y por tanto, el volúmen del prisma podrá convertirse en volúmen del cilindro, y al revés.

219. El volúmen del cilindro es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura.

Porque, designando por V' este volúmen, por C su base, y por A su altura, tendrémos; $V' = C \times A$. Pues que, representando por V el volúmen de un prisma inscrito ó circunscrito, por S la superficie de su base, y por A su altura que será la misma del cilindro, resultará (n.° 199); $V = S \times A$. Pero, por lo dicho en el número anterior, tenemos: $V = V'$, y por lo demostrado (n.° 133), resulta; $S = C$. Luego siendo A la altura tanto del prisma como del cilindro, si en la espresion $V = S \times A$, en lugar de V ponemos su igual V', y en lugar de S ponemos su igual C, saldrá; $V' = C \times A$.

Conos.

220. Llámase *cono* un cuerpo cuya base es un círculo, y cuya superficie termina en un punto llamado *cúspide* ó *vértice* del cono. Entiéndese por *eje* del cono la línea que parte del vértice y va á parar al centro de la base. Llámase *altura* del cono la perpendicular tirada desde el vértice á la base ó á su prolongacion. El cono se divide en *recto* y *oblicuo*. El primero es aquel cuya altura es perpendicular á la base, y el segundo es aquel cuya altura es perpendi-

cular á la prolongacion de la base. Así, sería recto el cono (fig. 129), y sería oblicuo el otro (fig. 130).

221. El cono recto se origina de la revolucion de un triángulo rectángulo que gira al rededor de un cateto inmóvil. Este cateto forma el *eje*; el otro cateto describe la base, y la hipotenusa describe la superficie curva del cono.

222. Toda seccion paralela á la base de un cono, es un círculo.

Supongamos los dos conos (fig.s 129, 130), cuyas secciones FRH sean paralelas á las bases CDB, y tendrémos que FRH será un círculo. Porque, si en cada uno de los dos conos por el eje VA y por los lados VC, VD, VB tiramos planos, resultará que las líneas CA y FG, DA y BG, BA y HG serán paralelas (n.º 163). Luego los triángulos VCA y VFG, VDA y VRG, VBA y VHG serán semejantes, y podremos formar las siguientes proporciones; VA : VG :: CA : FG (1.ª). VA : VG :: DA : RG (2.ª). VA : VG :: BA : HG (3.ª). pero observamos que estas proporciones tienen sus tres primeros términos iguales; luego el cuarto tambien lo será, y resultará; CA = RG = HG. Luego ARG es una curva cuyos puntos todos distan igualmente de G; luego es un círculo.

223. El cono cortado por un plano paralelo á su base se divide en dos partes de las que la una se llama *cono deficiente* y la otra se denomina *cono truncado*, *tronco*, ó *trozo de cono*. Llámase *cono deficiente* la parte superior, y llámase *cono truncado* la parte inferior, ó sea, la parte comprendida entre la base y la seccion.

224. A todo cono podemos inscribir y circunscribir pirámides. La superficie lateral del cono debe ser menor que la de la pirámide circunscrita, y mayor que la de la inscrita; porque el continente siempre debe ser mayor que el contenido y al contrario.

225. La diferencia entre las superficies laterales de dos pirámides, una inscrita y otra circunscrita á un cono debe ser menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.

Para su demostracion designemos por S la superficie lateral de la pirámide circunscrita y por *s* la de la inscrita, por P el perímetro de la base de la circunscrita y por *p* el de la inscrita, y por A la altura de una de estas dos pirámides que podrá ser la misma del cono, y tendrémos (n.° 206); $S = P \times {}^1/_2 A$, y $s = p \times {}^1/_2 A$. Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, resulta: $S - s = P \times {}^1/_2 A - p \times {}^1/_2 A = {}^1/_2 A \times (P - p)$. Pero el segundo miembro se reduce á *cero* ó á una cantidad equivalente, en razon de que la diferencia entre el factor $P - p$ se convierte tambien en *cero* ó en una cantidad casi igual á ella (n.° 133). Luego el primer miembro $S - s$ que espresa la diferencia entre las dos superficies se convierte en una cantidad mas pequeña que cualquiera otra por pequeña que sea. De esto se deduce tambien que será mucho menor la diferencia entre la superficie lateral de un cono y la de una pirámide inscrita ó circunscrita, porque es la diferencia entre un extremo y un medio, en el supuesto de que la diferencia entre dos extremos es cuasi nula. Esto nos dice que en lugar de un cono podrémos sustituir una pirámide, y al revés.

226. La superficie lateral de un cono recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por la mitad de su altura.

Para esto designemos por S′ la superficie del cono, por C la circunferencia de su base, y por A su altura, y tendrémos: $S' = C \times {}^1/_2 A$. Porque, representando por S la superficie de una pirámide inscrita ó circunscrita al cono, por P el perímetro de su base, y por A su altura que podrá ser la misma del cono, tendrémos (n.° 206); $S = P \times {}^1/_2 A$. Pero por lo dicho en el número anterior tenemos que, $S = S'$, y por lo demostrado (n.° 133) resulta que, $P = C$. Luego, siendo A un factor comun á la pirámide y al cono, si en la ecuacion anterior en lugar de S sustituimos su igual S′, y en lugar de P ponemos su igual C, se nos convertirá en la siguiente; $S' = C \times {}^1/_2 A$, que espresa la superficie lateral del cono recto.

227. La superficie lateral de un *cono truncado* ó *trozo de cono* es igual á su altura multiplicada por la mitad de la suma de las dos bases paralelas. Porque, pudiendo el cono convertirse en pirámide por ser nula la diferencia entre estas dos cosas, resultará que, la superficie lateral del cono truncado será igual á la superficie lateral de una pirámide truncada; pero la superficie de esta es igual á su altura multiplicada por la mitad de la suma de las dos bases parálelas (n.° 207), luego tambien lo será la superficie lateral del cono truncado.

228. La diferencia entre el volúmen de una pirámide inscrita á un cono y el de una pirámide circunscrita al mismo será menor que cualquiera cantidad dada por pequeña que sea.

Para esto designemos por V el volúmen de la pirámide circunscrita, por S la superficie de su base, y por A la altura, y por v el volúmen de la pirámide inscrita, por s la superficie de su base, y por A la altura que podrá ser la misma que la de la circunscrita, y tendrémos (n.° 209); $V = S \times {}^1/_3 A$, y $v = s \times {}^1/_3 A$. Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, resulta; $V - v = S \times {}^1/_3 A - s \times {}^1/_3 A = {}^1/_3 A \times (S - s)$. Pero el segundo miembro se reduce á cero ó á una cantidad insignificante, por hacerlo el factor $S - s$ (n.° 225). Luego el primer miembro $V - v$ que espresa la diferencia entre los dos volúmenes, tambien se reducirá á cero, ó á una cantidad menor que cualquiera otra por pequeña que sea. De esto se deduce con mucha mas razon que la diferencia entre el volúmen de un cono y el de una pirámide tambien será menor que cualquiera otra cantidad dada por pequeña que sea; porque es la diferencia entre un extremo y un medio, en el concepto de ser nula la diferencia entre dos extremos.

229. El volúmen de un cono recto es igual á la superficie de su base multiplicada por un tercio de la altura.

Para esto designemos por V′ el volúmen del cono, por S′ la superficie de su base, y por A la altura, y tendrémos: $V' = S' \times {}^1/_3 A$. Porque, espresando por V el volúmen de una pirámide circunscrita al cono, por S la superficie de su base, y por A la altura que podrá ser la misma del cono, tendrémos (n.° 209); $V = S \times {}^1/_3 A$. Pero por lo dicho en el número anterior, resulta que, $V = V'$, y por lo demostrado (n.° 133), $S = S'$. Luego, siendo ${}^1/_3 A$ un factor comun á la pirámide y al cono, si en la ecuacion anterior, en lugar de V sustituimos su igual V', y en vez de S ponemos su igual S', se nos convertirá en la siguiente; $V' = S' \times {}^1/_3 A$, que espresa el volúmen del cono recto.

230. El volúmen de un trozo de cono es igual al volúmen del cono total menos el volúmen del deficiente.

Para hallar la fórmula general, sea el cono (fig. 129). Sea el trozo de cono CDBF, y el cono deficiente VFRH. Designemos por S' la superficie de la base del cono total, y por s' la superficie de la base del deficiente, por A la altura del trozo de cono, por x la del deficiente, y por consiguiente, $A + x$ será la altura del cono total. Espresemos por R el rádio de la base del inferior, y por r el rádio de la base superior. Observando ahora la semejanza de los triángulos VAC y VGF, tendrémos; $CA : FG :: VA : VG$, ó sea, $R : r :: VA : VG$. Como VA es la altura del cono total, la podrémos espresar por $A + x$, y como VG es la altura del deficiente, la espresaremos por x, y por consiguiente la proporcion anterior se nos convertirá en la siguiente; $R : r :: A + x : x$. Aplicando á esta proporcion la propiedad fundamental (alg. n.° 166), tendrémos; $x \times R = r \times (A + x)$, ó bien, $Rx = Ar + rx$. Tratando ahora de despejar la x, resultará; $Rx - rx = Ar$, ó sea, $x \times (R - r) = Ar$, y finalmente; $x = \frac{Ar}{R - r}$. Luego tendrémos; $VA = A + x = A + \frac{Ar}{R - r} = \frac{AR - Ar + Ar}{R - r} = \frac{AR}{R - r}$. Por consiguiente; volúmen trozo = volúmen total

$$-\text{volúmen deficiente} = S' \times \tfrac{1}{3} \frac{AR}{R-r} - s' \times \tfrac{1}{3} \frac{Ar}{R-r}$$

Si ahora en la ecuacion anterior en lugar de S' sustituimos su igual πR^2 (n.° 146 y 135), y en lugar de s' ponemos su igual πr^2, se nos convertirá en la siguiente; V trozo $= \pi R^2 \times \tfrac{1}{3} \frac{AR}{R-r} - \pi r^2 \times \tfrac{1}{3} \frac{Ar}{R-r} = \pi \times \tfrac{1}{3} \frac{AR^3}{R-r} - \pi \times \tfrac{1}{3} \frac{Ar^3}{R-r} = \pi \times \tfrac{1}{3} A \frac{R^3 - r^3}{R-r}$, que espresará la fórmula general del volúmen del trozo de cono.

Esfera.

231. Llámase *esfera* un cuerpo terminado por una superficie curva cuyos puntos todos distan igualmente de un interior llamado *centro*; tal sería (fig. 131). La esfera se origina de la revolucion de un semicírculo al rededor de su diámetro inmóvil. Este diámetro forma el *eje* de la esfera, y la parte exterior del semicírculo describe la superficie de la misma esfera. El *eje* de la esfera se llama tambien diámetro de la misma. Los extremos del eje ó diámetro toman el nombre de *polos*. El centro de la esfera es el mismo centro del semicírculo. *Rádios* de la esfera son las rectas tiradas desde el centro á la superficie. De esto se sigue que, todos los rádios de la esfera son iguales, así como lo son todos los diámetros que son iguales á dos rádios. Llámase *sector esférico* un cuerpo que se origina de la revolucion de un sector de círculo. El sector esférico se compone de un *casquete esférico* y un cono.

232. Toda seccion de la esfera por un plano es un círculo.

Porque, si el plano secante pasa por el centro de la esfera, la curva descrita por la interseccion debe ser una circunferencia, pues que todos sus puntos distan igualmente del centro de la esfera, por ser puntos de la superficie de esta.

Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, como (fig. 131), tiro desde el centro O de la misma á dicha interseccion las rectas OM, ON, OP, etc. Como estas rectas son rádios de la esfera, deberán ser todas iguales, y como son oblicuas á la interseccion los puntos M, N, P, etc., equidistan del punto C′ (n.º 158). Luego esta interseccion tiene todos sus extremos equidistantes de C′, y por consiguiente es un círculo.

233. Llámase círculo máximo en una esfera el círculo cuyo plano pasa por el centro de la esfera, y se denomina círculo menor aquel cuyo plano no pasa por el centro; siendo por tanto el círculo mayor ó menor, á medida que se acerque mas al centro, ó se aparte de él.

234. Todo círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisférios*, superior el uno, é inferior el otro. Estos hemisférios son enteramente iguales; pues que colocado el uno sobre el otro han de coincidir exactamente, en razon de que los rádios del uno son iguales á los rádios del otro, porque los rádios de ambos hemisférios son los mismos que los de la esfera, y estos, por suposicion, son todos iguales. De esto se sigue que, todos los círculos que resulten de planos que pasen por el centro de la esfera, deben ser iguales.

235. La superficie de la esfera es mayor que la del cuerpo inscrito y menor que la del circunscrito; porque el continente es mayor que el contenido, y al revés.

236. La diferencia entre la superficie de un cuerpo circunscrito á la esfera y la de otro inscrito en la misma podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea.

Para su demostracion, designemos por S la superficie del cuerpo circunscrito, por R su rádio, por *s* la superficie del inscrito, por *r* su rádio, y por D el diámetro de uno de estos dos cuerpos que podrá ser el mismo de la esfera. Como se da por sentado que, la superficie de un cuerpo inscrito ó circunscrito á un círculo, formada por la revolucion de un polígono de un número par de lados al rededor

28

del diámetro del círculo, es igual á la circunferencia del rádio multiplicada por el diámetro, tendrémos; $S =$ circunf. $R \times D$, y $s =$ circunf. $r \times D$. Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, sale; $S - s =$ circunf. $R \times D -$ circunf. $r \times D = D \times$ (circunf. $R -$ circunf. r). Pero el segundo miembro se convierte en *cero*, ó en una cantidad menor que cualquiera otra, en razon de que se reduce á esta cantidad insignificante el factor circunf. $R -$ circunf. r (n.º 133); luego el primer miembro $S - s$ que espresa la diferencia entre estas dos superficies tambien se reducirá á cero, ó á una cantidad menor que cualquiera otra. De esto se deduce que, la diferencia entre la superficie de la esfera y la de un cuerpo inscrito ó circunscrito á ella, tambien será menor que cualquiera otra cantidad dada, por pequeña que sea, en razon de que la esfera es medio respecto de cada uno de dichos cuerpos. Esto nos dice que, en lugar de esfera podrémos poner cuerpo circunscrito ó inscrito, y al revés.

237. La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por su eje ó diámetro.

Porque, designando por S' dicha superficie, por circunf. R' la del círculo máximo, y por D su diámetro que podrá ser el mismo del cuerpo inscrito ó circunscrito, tendrémos; $S' =$ circunf. $R' \times D$. Pues que designando por S la superficie del cuerpo circunscrito, por R su rádio, y por D el diámetro, tendrémos, por lo dicho en el número anterior; $S =$ circunf. $R \times D$. Pero $S = S'$ (n.º 133), y circunf. $R =$ circunf. R' (n.º 133). Luego, siendo D un factor comun, si en la ecuacion anterior, en lugar de S sustituimos su igual S', y en vez de circunf. R, ponemos su igual circunf R', se nos convertirá en la siguiente; $S' =$ circunf. $R' \times D$.

238. La diferencia entre el volúmen de un cuerpo circunscrito á una esfera, y el de otro inscrito á ella podrá ser menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea.

Porque, se da por sentado que el volúmen de uno de estos cuerpos es igual á su superficie multiplicada por un tercio del rádio. Por consiguiente designando por V el volúmen del circunscrito, por S su superficie, por R su rádio que podrá ser el mismo que el del inscrito, y por v el volúmen del cuerpo inscrito, y por s su superficie, tendrémos, $V = S \times {}^1/_3 R$, y $v = s \times {}^1/_3 R$. Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, resultará; $V - v = S \times {}^1/_3 R - s \times {}^1/_3 R = {}^1/_3 R \times (S - s)$. Pero el segundo miembro es menor que cualquiera cantidad, por razon de serlo el factor $S - s$ (n.º 136). Luego el primer miembro tambien se reduce á una cantidad menor que cualquiera otra por pequeña que sea. De esto se deduce que, la diferencia entre el volúmen de la esfera y el de un cuerpo inscrito ó circunscrito á ella tambien será menor que cualquiera otra cantidad dada por pequeña que sea. Esto nos dice que, en lugar de volúmen de la esfera podrémos poner el de un cuerpo circunscrito ó inscrito, y al revés.

239. El volúmen de la esfera es igual á su superficie multiplicada por un tercio de su rádio.

Porque, designando por V' este volúmen, por S' la superficie de la esfera, y por R el rádio, tendrémos; $V' = S' \times {}^1/_3 R$. Pues que, si espresamos por V el volúmen de un cuerpo circunscrito á la esfera, por S su superficie, y por R su rádio que podrá ser el mismo de la esfera, resultará (n.º 138), $V = S \times {}^1/_3 R$. Pero por lo dicho en el número anterior, $V = V'$, y por lo esplicado (n.º 136), $S = S'$. Luego, siendo ${}^1/_3 R$ un factor comun al cuerpo circunscrito y á la esfera, si en la ecuacion anterior en lugar de V sustituimos su igual V', y en vez de S ponemos su igual S', se nos convertirá en la siguiente; $V' = S' \times {}^1/_3 R$, que espresa el volúmen de la esfera.

Comparacion de las superficies y Volúmenes de cuerpos semejantes.

240. Las superficies de los cuerpos semejantes son proporcionales con los cuadrados de sus dimensiones homólo-

gas, y los volúmenes lo son con los cubos de dichas dimensiones.

1.º Representemos por S, y s, las superficies de dichos cuerpos, por A, A′, y a, a' las dimensiones homólogas, y por lo demostrado hasta ahora, tendrémos; $S = A \times A'$, y $s = a \times a'$. Formando proporcion con estas ecuaciones, resulta; $S : s :: A \times A' : a \times a'$ (m). Pero por lo visto hasta aquí, siendo los cuerpos semejantes, las dimensiones habrán de ser proporcionales, y resultará; $A : a :: A' : a'$. Luego, (álg. n.º 156), $A = A'$ y $a = a'$. Luego si en la proporcion (m) en lugar de A y a, ponemos sus iguales A′ y a', y al revés, tendrémos; $S : s :: A \times A' : a \times a' :: A \times A : a \times a :: A' \times A' : a' \times a' :: A^2 : a^2 :: A'^2 : a'^2$.

2.º Representando por V, v, los volúmenes de dos cuerpos semejantes, por A, A′, A″, y por a, a', a'' las dimensiones homólogas; por lo dicho hasta aquí, tendrémos; $V = A \times A' \times A''$ y $v = a \times a' \times a''$. Formando proporcion con estas dos ecuaciones, resulta; $V : v :: A \times A' \times A'' : a \times a' \times a''$ (n). Como estas dimensiones son proporcionales, sale; $A : a :: A' : a' :: A'' : a''$. De donde tenemos (alg. n.º 156), $A = A' = A''$ y $a = a' = a''$. Luego si en la proporcion (n) en lugar de A y a, ponemos sus iguales A′, A″ y a', a'', y al revés, resultará; $V : v :: A \times A' \times A'' : a \times a' \times a'' :: A \times A \times A : a \times a \times a :: A' \times A' \times A' : a' \times a' \times a' :: A'' \times A'' \times A'' : a'' \times a'' \times a'' :: A^3 : a^3 :: A'^3 : a'^3 :: A''^3 : a''^3$.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

241. Llámase *trigonometría rectilínea* la parte de matemáticas que trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos por medio del cálculo. Como en cada triángulo entran tres lados y tres ángulos, el objeto de la trigonometría es determinar numéricamente tres de la seis cosas de que se compone un triángulo cuando se conocen las otras, con tal que entre estas haya siempre á lo menos un lado.

242. Para la resolucion de este problema los matemáticos han inventado un sistema de líneas que se llaman líneas trigonométricas. Estas líneas toman los nombres de *seno*, *senoverso*, *tangente*, *secante*, *coseno*, *cosenoverso*, *cotangente*, y *cosecante*. Estas rectas están dotadas de dos propiedades importantes; 1.ª Con su magnitud y signo determinan la magnitud y posicion de los ángulos ó de los arcos que miden á dichos ángulos; 2.ª Son proporcionales con los lados de los triángulos.

243. Llámase *seno* de un arco la perpendicular tirada desde un extremo del arco al rádio ó diámetro que prolongado pasa por el principio del mismo arco. Llámase *senoverso* la parte de rádio interceptada entre el pie del seno y el principio del arco. Llámase *tangente trigonométrica* de un arco la parte de tangente geométrica comprendida entre el principio del arco y el rádio que prolongado pasa por el extremo del arco hasta encontrar á la tangente geométrica. Llámase *secante trigonométrica*, el rádio que prolongado pasa por el extremo del arco hasta encontrar á la tangente geométrica. De este modo se ve que, la tangente está determinada por la secante y al revés, y que conocien-

do una de estas dos rectas se conoce tambien la otra. Llámase *coseno* de un arco el *seno* de su complemento. Llámase *coseno verso* el *seno verso* del complemento. Llámase *cotangente* la *tangente* del *complemento*. Llámase *cosecante* la *secante* del complemento. Cuando las líneas del complemento de un arco se consideran con relacion al arco primitivo, toman el nombre de colíneas. Asi pues, todo arco tiene cuatro líneas directas, y cuatro indirectas: las primeras se llaman líneas y son el *seno*, *senoverso*, *tangente* y *secante*: las segundas se denominan colíneas, y se llaman *coseno*, *coseno verso*, *cotangente* y *cosecante*. Cuando estas rectas se introducen en los cálculos, se escriben abreviadamente de este modo; *sen. senver. tan. sec. cos. cosver. cotan.* y *cosec.*

244. Supongamos el círculo ABCD (fig. 132), y determinemos el arco AN, medida del ángulo AON. Si desde el punto N, extremo del arco AN, bajamos la N*g* perpendicular al rádio OA que pasa por el principio del arco, resultará por lo dicho en el número anterior que, N*g* será el seno, y *g*A será el seno verso. Si desde A levantamos la tangente geométrica AF, y desde O prolongamos el rádio ON hasta *p*, tendrémos de las definiciones dadas en el número anterior, que A*p* será la tangente del arco AN, y O*p* será la secante.

Si ahora consideramos que AB es un cuadrante, y que por consiguiente su ángulo medido AOB vale un recto, tendrémos que AN es complemento de BN, y BN lo es de AN. Suponiendo pues el arco BN que principia en B; de las definiciones del número anterior se sigue que, N*d* será el seno de dicho arco, y *d*B será el seno verso. Levantando ahora la tangente BE, y tirando el rádio ON hasta que prolongado intercepte á BE, resulta que, BE será la tangente, y OE será la secante. Refiriendo ahora las líneas del arco BN á su complemento AN, resulta que este arco tiene las ocho líneas siguientes; N*g* seno, *g*A seno verso, A*p* tangente, O*p* secante, N*d* coseno, *d*B coseno verso, BE cotangente, y OE cosecante.

245. Observando que Nd es igual y paralela con gO; siendo Nd coseno del arco AN, gO tambien será el coseno del mismo arco. Por consiguiente podrémos decir en adelante que, el coseno de un arco es aquella parte de rádio comprendida entre el pié del seno y el centro del círculo.

246. El seno de un arco es la mitad de la cuerda de un arco duplo.

Para esto sea el arco $AN = AL$, y tendrémos que arco $NAL = 2AN$, y recta $NL =$ cuerda del arco NAL. OA es perpendicular á la cuerda NL, luego, saliendo además del centro O, dividirá á NL en dos partes iguales en g, y asi $Ng = \frac{1}{2}$ NL. Luego siendo $NL =$ cuerda de $NAL = 2AN$, se sigue que, seno de $AN = Ng = \frac{1}{2}$ cuerda 2AN.

247. Conocido el rádio de un círculo, se conoce tambien el valor absoluto de tres líneas trigonométricas, á saber; el seno de un cuadrante que es igual al rádio; el seno de 30.° que es igual á la mitad del rádio, y la tangente de un arco de 45° que tambien es igual al rádio.

1.° Siendo el seno de un arco la mitad de la cuerda de un arco duplo, tendrémos que el mayor de todos los senos, será la mitad de la mayor de las cuerdas, pero la cuerda mayor de un círculo es el diámetro; luego el rádio que es la mitad del diámetro será el mayor de todos los senos. Pero el diámetro es la cuerda de dos cuadrantes, luego el rádio será seno de un cuadrante. 2.° Como el rádio es igual á la cuerda de un arco de 60° se sigue que, el seno de un arco de 30.° será igual á la mitad del rádio. 3.° Si consideramos el triángulo AOp rectángulo en A, y suponemos que Ap es tangente de 45.° se verificará que el ángulo AOp medido por el arco AN, tambien valdrá 45.° Pero como el ángulo en $A = 90.°$ por recto, se sigue que, siendo la suma de los tres ángulos de un triángulo igual á dos rectos, ó 180.° el ángulo $ApO = 180.° - (90.° + 45.°) = 180.° - 135.° = 45.°$. Luego $Ap = AO$. Luego la tangente de 45.° es igual al rádio.

248. Conocido el rádio y una línea trigonométrica de un arco, pueden determinarse en valores suyos los de las demás líneas trigonométricas.

Para esto determinémos el arco AN, y tratemos de encontrar en funciones del rádio y seno de este arco los valores del coseno, tangente, secante, cotangente y cosecante. Supongamos el triángulo NOg medido por el arco AN, cuyo seno es Ng. Como el triángulo NOg es rectángulo en g, ON será la hipotenusa, y los otros lados serán catetos. Tratando de determinar primero el coseno gO, tendrémos; $Og^2 = ON^2 - Ng^2$, (m). y $Og = \sqrt{ON^2 - Ng^2}$. Como ON es el rádio, y este rádio lo supondrémos igual á 1, resultará; $Og = \sqrt{1^2 - Ng^2}$. Por lo que, siendo $Og =$ cos. y $Ng =$ sen. saldrá finalmente; cos. $= \sqrt{1^2 - \text{sen.}^2} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2}$ Si en la ecuacion (m) en lugar de las letras sustituimos sus valores trigonométricos, resultará; cos.$^2 = 1^2 -$ sen.^{2} $= 1 -$ sen.^{2}, de la que tambien sale; sen.$^2 = 1 -$ cos.^{2}, y sen. $= \sqrt{1 - \text{cos.}^2}$.

Para hallar los valores de la tangente y secante en funciones del rádio y seno, compararémos dos triángulos en los que se hallen todas estas rectas; los cuales serán ONg, y OpA, que son semejantes, porque los ángulos del uno son iguales á los del otro; pues que el ángulo en O es comun á los dos triángulos, y el ángulo en g es igual al en A por rectos. En el triángulo ONg entran el rádio, seno y coseno, y en el otro entran el rádio, tangente y secante. Comparando pues los lados homólogos de dichos triángulos, tendrémos; $Og : OA :: gN : Ap$, y $Og : OA :: ON : Op$. Sustituyendo en estas dos proporciones los valores trigonométricos, tendrémos; cos. : 1 :: sen. : tan. (1.ª), y cos. : 1 :: 1 : sec. (2.ª). De la (1.ª) sale; tan. $= \dfrac{1 \times \text{sen.}}{\text{cos.}} = \dfrac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$

$$= \frac{\text{sen.}}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}.$$ De la (2.ª) sale; sec. $= \dfrac{1 \times 1}{\text{cos.}} = \dfrac{1}{\text{cos.}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}$$

Para encontrar ahora los valores de la cotangente y cosecante en funciones del rádio y seno, compararémos dos triángulos en los que se hallen esas líneas. Estos triángulos son ONg y OEB. Estos triángulos son semejantes por ser los ángulos del uno iguales á los del otro, pues que el ángulo en g es igual al en B por rectos, y el ángulo en O igual al en E por alternos internos entre las paralelas Og y BE siendo la secante OE. Comparando pues los lados homólogos, tendrémos; $Ng : OB :: Og : BE$, y $Ng : OB :: ON : OE$. Sustituyendo en estas dos propociones los valores trigonométricos, resulta; sen. : 1 :: cos. : cotan. (3.ª), y sen. : 1 :: 1 : cosec. (4.ª). De la (3.ª) sale;

$$\text{cotan.} = \frac{1 \times \text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}{\text{sen.}}.$$ De la (4.ª) resulta; $$\text{cosec.} = \frac{1 \times 1}{\text{sen.}} = \frac{1}{\text{sen.}}.$$ Por lo que tenemos estos valores; $$\text{cos.} = \sqrt{1 - \text{sen.}^2}\,;\quad \text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}\,;$$

$$\text{sec.} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}\,;\quad \text{cotan.} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2}}{\text{sen.}}\,;\quad \text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}}$$

Por unos procedimientos análogos podríamos hallar los valores de todas las líneas trigonométricas en funciones del rádio y del coseno, del rádio y tangente, del rádio y secante, etc.

249. Como en el número anterior los valores de todas las líneas trigonométricas han dependido de los del rádio, seno, y coseno; veamos que alteraciones sufrirán estas líneas á medida que vayan variando el seno y coseno. Para esto considerarémos una porcion de arcos el principio de los cuales será siempre el punto A. De este punto A saldrán todas las tangentes; del punto O saldrán todas las secantes y cosecantes; y del punto B saldrán todas las cotangentes. Los senos saldrán sucesivamente de los extremos de los ar-

cos, y los cosenos saldrán desde el pié de los senos. Todos los senos que estén en la parte superior del diámetro AC serán positivos, y serán negativos los que estén en la parte inferior del mismo diámetro AC. Todos los cosenos que se consideren desde el centro O del circulo hacia el principio del arco serán positivos, y serán negativos todos los que vayan desde O hácia la parte derecha que es en direccion opuesta al principio del arco. Todas las tangentes que estén hácia arriba serán positivas, y negativas las que vayan hácia abajo. Todas las cotangentes que vayan desde B hácia E, ó sea hácia la izquierda serán positivas, y negativas las que vayan desde B hácia G, ó sea, hácia la derecha. Todas las secantes y cosecantes serán positivas cuando cumplan con su definicion, á saber, cuando encuentren á la tangente ó cotangente por la parte en donde está el extremo del arco, y serán negativas cuando no cumplan con su definicion, esto es, cuando no encuentren á la tangente ó cotangente por la parte en donde se halle el extremo del arco, sino por la parte opuesta.

Supongamos pues, que el arco AN crezca sin llegar al cuadrante, y se convierte en Aa. En este caso su seno será ab; su coseno bO; su tangente AF; su secante OF; su cotangente BP; su cosecante OP. El seno $ab > Ng$, porque á mayor arco corresponde mayor cuerda; el coseno $Ob < Og$, porque la parte es menor que el todo; la tangente $AF > AP$, porque el todo es mayor que su parte; la secante $OF > OP$, porque el todo es mayor que su parte; la cotangente $BP < BC$, porque la parte es menor que el todo, y la cosecante $OP < OE$, porque de dos oblicuas que disten desigualmente de una misma perpendicular OB, la que menos se aleje es la mas corta. Iguales consideraciones podrian hacerse en todos los demás arcos, comparando siempre las líneas del último arco con las del anterior. Sin embargo, para mayor sencillez, bastará determinar primero los valores del seno y coseno del arco que consideremos, y las fórmulas encontradas en el número anterior nos darán inmediatamente los valores de cada una de las demás líneas. Haciéndolo respecto del mismo arco Aa, tendrémos;

sen. $Aa = ab > Ng$. cos. $Aa = Ob < Og$. Por tanto, resultará; tan. $Aa = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{>}{<} = AF >$; sec. $= \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{1}{<} = OF >$; cotan. $= \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{<}{>} = BP <$; cosec. $=$ $\frac{1}{\text{sen.}} = \frac{1}{>} = OP <$.

Supongamos que el arco crece y se convierte en el cuadrante $\overset{\frown}{AB}$. En este caso el seno es $BO = 1$, y el coseno es igual á cero, porque es la distancia que va desde el pié del seno hasta el centro O. Como, pues, el pié del seno en este caso es O, y la distancia desde O hasta O es núla, por esto este coseno $= 0$. Por lo que tendrémos; tan. $=$ $\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{1}{0} = \infty$; sec. $= \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{1}{0} = \infty$; cotan. $=$ $\frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{0}{1} = 0$; cosec. $= \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{1}{1} = 1. = OB$.

Supongamos que el arco vaya creciendo, y se convierta en ABe. En este caso el seno es $en = +$, y el coseno es $On = -$. Por lo que tendrémos; tan. $= \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{+}{-} = -$ AM; sec. $= \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{1}{-} = \frac{+1}{-} = -OM$; cotan. $=$ $\frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{-}{+} = -BG$, cosec. $= \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{+1}{+} = +OG$.

Si el arco se convierte en ABC, resultará que el seno será $+0$, y el coseno será -1. Por lo que tendrémos, tan. $= \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{+0}{-1} = -0$; sec. $= \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{+1}{-1} = -1 =$

$-OA$; $\text{cotan.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{-1}{+0} = -\infty$; $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}}$
$= \frac{+1}{+0} = +\infty$.

Si el arco se convierte en ABCJ, el seno será $-nJ$, y el coseno será $-nO$. Por lo que tendrémos; $\text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} =$
$\frac{-}{-} = +Ap$; $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{+1}{-} = -Op$; $\text{cotan.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}}$
$= \frac{-}{-} = +BE$; $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{+1}{-} = -OE$.

Si el arco se convierte en ABCD, su seno será $-OD =$ -1, y su coseno será -0. Por lo que tendrémos; $\text{tan.} =$
$\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{-1}{-0} = +\infty$; $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{+1}{-0} = -\infty$,
$\text{cotan.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{-0}{-1} = 0$; $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{+1}{-1} =$
$-1 = -OB$.

Si el arco se convierte en ABCDL, su seno será $-gL$, y su coseno será $+gO$. Por lo que tendrémos; $\text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$
$= \frac{-}{+} = -AM$; $\text{sec.} = \frac{1}{\text{cos.}} = \frac{+1}{+} = +OM$; cotan.
$= \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{+}{-} = -BG$; $\text{cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{+1}{-} =$
$-OG$.

Si finalmente el arco se convierte en toda la circunferencia ABCDA; su seno será -0, y su coseno será $+1$. Por lo que tendrémos; $\text{tan.} = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{-0}{+1} = -0$; $\text{sec.} =$

$$\frac{1}{\text{cos.}} = \frac{+1}{+1} = +1 = +\text{OA} \text{ ; cotan.} = \frac{\text{cos.}}{\text{sen.}} = \frac{+1}{-0}$$

$$= -\infty \text{ ; cosec.} = \frac{1}{\text{sen.}} = \frac{+1}{-0} = -\infty .$$

250. Si comparamos entre sí los dos arcos AN, y BN, el uno será complemento del otro por defecto. Veamos pues, qué relacion habrá entre sus senos y cosenos, suponiendo que AN empieza en A, y BN en B. Tendrémos pues; sen. AN $=$ Ng, y cos. AN $= g$O; sen. BN $=$ Nd, y cos. BN $=$ Od. Pero N$g =$ Od, y gO $=$ Nd. Luego resulta; sen. AN $=$ N$g =$ O$d =$ cos. BN; y cos. AN $= g$O $=$ N$d =$ sen. AN. De esto se deduce que, el seno de un arco es igual al coseno de su complemento por defecto, y el coseno de un arco es igual al seno de su complemento por defecto.

251. Si comparamos ahora entre sí los dos arcos ABe y Ce, suponiendo que el uno empieza en A, y el otro en e, el uno será suplemento del otro. Veamos pues qué relaciones guardarán las líneas trigonométricas de ambos arcos. Tendrémos pues; sen. AB$e = en$; y sen. C$e = en$; cos. ABe $= -$On, y cos. C$e =$ On; tan. AB$e = -$AM y tan. C$e =$ Cm; $=$AM, por la igualdad de los dos triángulos AOM y COm. Sec. AB$e = -$OM, y sec. C$e =$ O$m =$ OM, por la razon anterior; cotan. AB$e = -$BG, y cotan. C$e =$ BG; cosec. AB$e = -$ OG, y cosec. C$e =$ OG. De esto se deduce que, las líneas trigonométricas de un arco son iguales en magnitud á las de su suplemento; pero son diferentes en posicion el coseno, la tangente, y la secante; pues que son positivas para el arco Ce medida de un ángulo agudo, y son negativas para el arco ABe medida de un ángulo obtuso.

252. Dado el seno de un arco a, el seno de su mitad vendrá espresado por la fórmula siguiente; sen. $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}.$$

Sea para esto el arco MNP (fig. 133) $= a$, y MN $=$ NP $= \frac{1}{2} a$; tiremos la cuerda MP, y el radio CN que cortará á la cuerda MP en dos partes iguales en O (n.º 59), y tiremos finalmente la línea PS. Resultará pues, que, $\text{sen.}\ a = \text{sen. MNP} = \text{PS}$; $\cos.\ a = \cos.\ \text{MNP} = \text{CS}$; y $\text{sen.}\ {}^1/_2 a = \text{sen. MN} = \text{sen. NP} = \text{PO} =$

$$\text{OM} = {}^1/_2\,\text{MP} = (\text{n.º } 115)\ {}^1/_2\sqrt{2\text{MC} \times \text{MS}.} = {}^1/_2$$
$$\sqrt{2\text{MC} \times (\text{MC} - \text{CS})} = {}^1/_2\sqrt{2 \times 1 \times (1 - \cos.\ \text{MNP})}$$
$$= {}^1/_2\sqrt{2 \times (1 - \cos.\text{MNP})} = {}^1/_2\sqrt{2 - 2\cos.\ \text{MNP}} =$$
$${}^1/_2\sqrt{2 - 2\cos.\ a} = {}^1/_2\sqrt{2 - 2 \times \sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}.$$

253. Dados los senos y cosenos de dos arcos a, b, los senos y cosenos de su suma y diferencia vendrán espresados por las fórmulas siguientes.

1.ª $\text{sen.}\,(a + b) = \text{sen.}\ a \cos.\ b + \text{sen.}\ b \cos.\ a.$

2.ª $\cos.\,(a + b) = \cos.\ a \cos.\ b - \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b.$

3.ª $\text{sen.}\,(a - b) = \text{sen.}\ a \cos.\ b - \text{sen.}\ b \cos.\ a.$

4.ª $\cos.\,(a - b) = \cos.\ a \cos.\ b + \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b.$

Para su demostracion sea la (fig. 134). Sean los dos arcos MO, y OP. Hagase $\text{PO} = \text{ON}$. Tírese la cuerda PN, y el rádio CO que dividirá á dicha cuerda en dos partes iguales en Q. Si bajamos ahora las rectas PD, OH, y NF, y hacemos $\text{MO} = a$, y $\text{PO} = b$, resultará que, $\text{MOP} = \text{MO} + \text{OP} = a + b$; y como $\text{PO} = \text{OM}$, resultará tambien; $\text{MN} = \text{MO} - \text{ON} = a - b$, y por consiguiente tendrémos:

$$(m).\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{PD} = \text{sen.}\,(\text{MO} + \text{OP}) = \text{sen.}\,(a + b).\\
\text{CD} = \cos.\,(\text{MO} + \text{OP}) = \cos.\,(a + b).\\
\text{NF} = \text{sen.}\,(\text{MO} - \text{ON}) = \text{sen.}\,(a - b).\\
\text{CF} = \cos.\,(\text{MO} - \text{ON}) = \cos.\,(a - b).\\
\text{OH} = \text{sen. MO} = \text{sen.}\ a.\\
\text{CH} = \cos.\ \text{MO} = \cos.\ a.\\
\text{PQ} = \text{sen. OP} = \text{sen.}\ b.\\
\text{CQ} = \cos.\ \text{OP} = \cos.\ b.
\end{array}\right.$$

Si tiramos ahora la QR paralela á OH, y las NE, y QG paralelas á MC, resultarán los triángulos NQE y QPG iguales por tener $NQ = QP$, el ángulo $E = G$ por rectos, y el ángulo $NQE = P$ por correspondientes entre las paraparalelas QR y PD siendo la secante NP. Por lo que resulta; $NE = QG = RD$; $QE = PG$; y $QR = GD = PD - PG$. Asi pues, las líneas que tratamos de despejar, las podrémos espresar del modo siguiente:

$$(n).\quad \left\{\begin{array}{l} PD = PG + GD = PG + QR. \\ CD = CR - RD = CR - QG. \\ NF = ER = QR - QE = QR - PG. \\ CF = CR + RF = CR + NE = CR + QG. \end{array}\right.$$

Observando ahora los dos triángulos COH, y CQR, verémos que son semejantes, por tener el ángulo C comun, y los ángulos en H y R iguales por rectos. Formando pues, proporcion con los lados homólogos, tendrémos; $CO : CQ :: OH : QR$ (1.ª), y $CO : CQ :: CH : CR$ (2.ª), ó bien, haciendo el rádio igual á 1, y sustituyendo las líneas trigonométricas espresadas en las proporciones, se nos convertirán en las dos siguientes; $1 : \cos. b :: \operatorname{sen}. a : QR$ (3.ª) y $1 : \cos. b :: \cos. a : CR$ (4.ª). Despejando los cuartos términos de 3.ª y 4.ª, tendrémos; $QR = \frac{\operatorname{sen}. a \times \cos. b}{1} = \operatorname{sen}. a \cos. b$, y $CR = \frac{\cos. a \times \cos. b}{1} = \cos. a \cos. b$.

Además los triángulos COH y PQG son semejantes por tener los lados perpendiculares. Formando pues proporcion con los lados homólogos, tendrémos; $CO : PQ :: OH : QG$, y $CO : PQ :: CH : PG$. Sustituyendo ahora en estas proporciones los valores trigonométricos, resulta; $1 : \operatorname{sen}. b :: \operatorname{sen}. a : QG$ (5.ª), y $1 : \operatorname{sen}. b :: \cos. a : PG$ (6.ª). Despejando los cuartos términos de las proporciones 5.ª y 6.ª sale; $QG = \frac{\operatorname{sen}. a \times \operatorname{sen} b}{1} = \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b$, y $PG =$

$\frac{\text{sen. } b \times \text{cos. } a}{1} = \text{sen. } b \text{ cos. } a$. Por tanto ha resultado; $QR = \text{sen. } a \cos b$; $CR = \text{cos. } a \text{ cos. } b$; $QG = \text{sen. } a \text{ sen. } b$; $PG = \text{sen. } b \text{ cos. } a$.

Si ahora en las ecuaciones (m) y (n) sustituimos los valores encontrados, tendrémos;

sen. $(a + b) = PD = QR + PG = \text{sen. } a \text{ cos. } b. + \text{sen. } b \text{ cos. } a$.

cos. $(a + b) = CD = CR - QG = \text{cos. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } a \text{ sen. } b$.

sen. $(a - b = NF = QR - PG = \text{sen. } a \text{ cos. } b - \text{sen. } b \text{ cos. } a$.

cos. $(a - b) = CF = CR + QG = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b$.

254. Dado el seno y coseno de un arco podemos encontrar fácilmente el seno y coseno de un arco duplo, triplo, cuádruplo, quíntuplo, etc., con solo hacer $b = a$, $2a$, $3a$, $4a$, etc., en las fórmulas de sen. $(a + b)$ y cos. $(a + b)$ del número anterior. Por consiguiente tendrémos;

sen. $2a = \text{sen. } (a + a) = \text{sen. } a \text{ cos. } a + \text{sen. } a \text{ cos. } a = 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } a$.

cos. $2a = \text{cos. } (a + a) = \text{cos. } a \text{ cos. } a - \text{sen. } a \text{ sen. } a = \text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a$.

sen. $3a = \text{sen. } (a + 2a) = \text{sen. } a \text{ cos. } 2a + \text{sen. } 2a \text{ cos. } a = \text{sen. } a \times (\text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a) + 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } a \text{ cos. } a = \text{sen. } a \text{ cos.}^2 a - \text{sen.}^3 a + 2 \text{ sen. } a \text{ cos.}^2 a = 3 \text{ sen. } a \text{ cos.}^2 a - \text{sen.}^3 a$.

cos. $3a = \text{cos. } (a + 2a) = \text{cos. } a \text{ cos. } 2a - \text{sen. } a \text{ sen. } 2a = \text{cos. } a \times (\text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a) - \text{sen. } a \; 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } a = \text{cos.}^3 a - \text{sen.}^2 a \text{ cos. } a - 2 \text{ sen.}^2 a \text{ cos. } a = \text{cos.}^3 a - 3 \text{ sen.}^2 a \text{ cos. } a$.

Por un raciocinio semejante hallaríamos los senos y cosenos de $4a$, $5a$, $6a$, etc.

255. Las líneas trigonométricas son proporcionales con los rádios de los círculos con que están trazados los arcos. Así, espresando los rádios de dos círculos por R, r; por Sen. sen. sus senos; por Cos. cos. sus cosenos; por Tan. tan. sus tangentes; por Sec. sec. sus secantes; por Cotan. cotan. sus cotangentes, y por Cosec. cosec. sus cosecantes, se verifica; R : r : : Sen. : sen. : : Cos. : cos. : : Tan. : tan : : Sec. : sec. : : Cotan. : cotan. : : Cosec. : cosec.

Porque, si desde el centro C (fig. 135) con dos rádios de círculo CG, y CB describimos dos arcos GD y BA que tendrán igual número de grados, por ser ambos medida de un mismo ángulo, y si desde los puntos D, y A bajamos las perpendiculares DE y AP; se verificará que, DE será el seno del arco mayor GD, y AP será el seno del arco menor BD. CE será el coseno de GD y CP lo será de BD. Si desde los puntos G, B levantamos las perpendiculares GM, y BN, estas rectas serán las tangentes de dichos arcos, y CM y CN serán las secantes.

Ahora observando los dos triángulos CDE y CAP, verémos que son semejantes por tener el ángulo C comun, y ser rectos los en E y P. Formando pues proporcion con los lados homólogos, tendrémos; CD : CA : : DE : AP, y CD : CA : : CE : CP. Si en estas proporciones sustituimos los valores trigonométricos representados en ellas, y ponemos R, r, en lugar de los rádios, y al mismo tiempo espresamos por letras mayúsculas las del arco mayor, y por letras minúsculas las del arco menor, tendrémos; R : r : : Sen. : sen. (1.ª), y R : r : : Cos. : cos. (2.ª).

Los dos triángulos CGM y CBN son tambien semejantes por igual razon que la del caso anterior. Por tanto tendrémos; CG : CB : : GM : BN, y CG : CB : : CM : CN. Sustituyendo como en el caso anterior los valores trigonométricos, resulta; R : r : : Tan. : tan. (3.ª), y R : r : : Sec. : sec. (4.ª).

Prolongando ahora los dos arcos GD y BA hasta completar el cuadrante, y tirando las rectas RS, y QO, estas rectas serán las cotangentes de los arcos primitivos, siendo sus cosecantes CS, y CO. Los triángulos CRS, y CQO son semejantes por tener el ángulo C comun, y por ser iguales los ángulos en O y S por correspondientes. Formando pues proporcion con los lados homólogos, tendrémos; CR : CQ : : RS : QO, y CR : CQ : : CS : CO. Sustituyendo ahora los valores trigonométricos como en los dos casos anteriores, resulta; R : r : : Cotan. : cotan. (5.ª), y R : r : : Cosec : cosec. (6.ª).

Observando ahora las seis proporciones encontradas, verémos que todas tienen la primera razon comun; por tanto podrán enlazarse y resultará;

R : r : : Sen. : sen. : : Cos. : cos. : : Tan. : tan. : : Sec. : sec. : : Cotan. : cotan. : : Cosec. : cosec.

Luego si respecto de un rádio cualquiera se calcularan estas líneas para todos los arcos, y al lado de cada arco se fijara el valor de las líneas trigonométricas que le correspondieran; esas tablas que las contuvieran servirían para hallar esas mismas líneas cuando correspondieran á otro rádio. Las tablas formadas de este modo se llamarían *tablas trigonométricas naturales*; pero no hay necesidad de esto, por existir ya *tablas trigonométricas artificiales*, en las que se halla fácilmente el logaritmo correspondiente.

Dejamos para el profesor la esplicacion y manejo de dichas tablas.

Resolucion de los triángulos rectángulos.

256. La resolucion de los triángulos rectángulos se funda en dos analogías. La primera contiene las dos proporciones siguientes; 1.ª El rádio de las tablas es al seno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo; 2.ª El rádio de las tablas es al coseno de uno de los ángulos agudos, como la hipotenusa es al cateto adyacente á dicho ángulo. La segunda analogía contiene la siguiente proporcion; el rádio de las tablas es á la

tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo es al cateto opuesto.

Para su demostracion supongamos el triángulo ABC (fig. 136). Haciendo centro en A con un rádio AD describamos el arco de círculo DG medida del ángulo agudo A, y tiremos las perpendiculares DF y CG. Tendrémos pues que DF será el seno del arco DG, y por consiguiente del ángulo A; AF será el coseno, y GE será la tangente. Los dos triángulos ADF y ABC son semejantes, por tener el ángulo A comun, y ser iguales los ángulos F, y C, por rectos. Por consiguiente tendrémos; AD : DF : : AB : BC, y AD : AF : : AB : AC. Sustituyendo en estas proporciones los valores trigonométricos representados en ellas, y representando el rádio por R, resulta; R : sen. A : : hip. : cat. op. (1.ª), y R : cos. A : : hip. : cat. ady. (2.ª).

Además los dos triángulos AGE y ACB tambien son semejantes, y dan; AG : GE : : AC : BC. Sustituyendo los valores trigonométricos como en los casos anteriores, resulta;

R : tan. A : : cat. ady. : cat. op. (3.ª).

Las dos primeras proporciones, ó sea, la primera analogía sirve para hallar un cateto cuando se conoce la hipotenusa y uno de los ángulos agudos; para hallar la hipotenusa cuando se conoce un cateto y uno de los ángulos agudos; y para hallar un ángulo agudo cuando se conoce la hipotenusa y un cateto.

La tercera proporcion, ó sea, la segunda analogía sirve para hallar un cateto cuando se conoce un ángulo agudo y el otro cateto, ó para hallar un ángulo agudo cuando se conocen los catetos.

Así, si dado el triángulo ABC (fig. 137), conociéramos el ángulo agudo A, y la hipotenusa AB, y tratáramos de conocer el cateto BC, diríamos; R : sen. A : : AB : BC $=$

$$\frac{AB \times \text{sen. } A}{R}.$$

Si conociéramos el mismo ángulo A, y la hipotenusa AB, y quisiéramos despejar el cateto AC, diríamos; R : cos. A : : AB : AC.

Si conociéramos el ángulo agudo B, y la hipotenusa AB, y quisiéramos despejar el cateto AC, diríamos; R : sen. B : : AB : AC.

Si conociéramos el mismo ángulo B y la hipotenusa AB, y tratáramos de despejar el cateto BC, diríamos; R : cos. B : : AB : BC.

Si conociéramos el ángulo A, y el cateto AC, y quisiéramos conocer el otro cateto BC, diríamos; R : tan. A : : AC : BC.

Si conociéramos la hipotenusa AB, y el cateto AC, y tratáramos de buscar el coseno de A, diríamos; R : cos. A : : AB : AC, y tendríamos; $\cos. A = \frac{R \times AC}{AB}$.

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

257. Para la resolucion de los triángulos oblicuángulos sirve la siguiente proposicion general.

Los senos de los ángulos son como sus lados opuestos.

Así, siendo A, B, C, los ángulos de un triángulo oblicuángulo, y representando por *a*, *b*, *c*, sus lados opuestos, tendríamos; sen. A : sen. B : sen. C : : *a* : *b* : *c*.

Para su demostracion supongamos el triángulo ABC (fig. 138). Si circunscribimos el círculo ADBECF, tendrémos que AB, BC, y CA serán cuerdas de dicho círculo. Si ahora desde el centro O tiramos las perpendiculares OD, OE, OF, dividirán á estas cuerdas en dos partes iguales en los puntos L, M, G, (n.° 59). Tirando ahora á los vértices las rectas OB, OC, OA tendrémos que, ángulo ABC = ángulo AOF (n.° 64), y por lo mismo, BCA = BOD, y CAB = COE. Luego, sen. ABC = sen. AOF; sen. BCA = sen. BOD, y sen. CAB = sen. COE. Pero, sen. AOF = $\frac{1}{2}$ AC, (n.° 246). Luego, sen. ABC = $\frac{1}{2}$ AC, y por la misma razon, tendrémos; sen. BCA $= \frac{1}{2}$ AB, y sen. CAB $= \frac{1}{2}$ BC. Formando ahora una serie de razones iguales con las tres últimas ecuaciones, resultará;

sen. ABC : sen. BCA : sen. CAB : : $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ BC : : $\frac{1}{2}$ AC $\times 2$: $\frac{1}{2}$ AB $\times 2$: $\frac{1}{2}$ BC $\times 2$: : AC : AB : BC.

Tomando ahora de esta serie los tres primeros términos y los tres últimos, resulta; sen. ABC : sen. BCA : sen. CAB : : AC : AB : BC ó bien, sen. B : sen. C : sen. A : : *b* : *c* : *a*, ó bien; sen. A : sen. B : sen. C : : *a* : *b* : *c*.

258. La proposicion demostrada (n.° 255) sirve para resolver un triángulo oblicuángulo en los casos siguientes; 1.° cuando se conocen dos ángulos y un lado; 2.° cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Así, si dado el triángulo ABC (fig. 139), conociéramos el ángulo A, el ángulo B, y el lado BC, y tratáramos de despejar el lado AC, diríamos; sen. A : sen B : : BC : AC $= \dfrac{\text{sen. B} \times \text{BC}}{\text{sen. A.}}$.

Conociendo A y C, y el lado BC, despejaríamos el lado AB, diciendo; sen. A : sen. C : : BC : AB.

Conociendo los ángulos B, C, y el lado BC, despejaríamos el lado AC, diciendo; 1.° ángulo A $= \pi - (\text{B} + \text{C})$. Conocido pues tambien el ángulo A, diríamos, 2.° sen. A : sen. B : : BC : AC.

259. Conviene dar por sentado que, la suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos á dichos lados es á la tangente de la mitad de la diferencia. Esto nos servirá para cuando se nos dé un triángulo en el cual se conozcan dos lados y el ángulo comprendido; porque por medio de esta proporcion se determina la mitad de la diferencia de los ángulos desconocidos; y como ya era co-

nocida la mitad de la suma, tendrémos que el ángulo mayor será la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y el ángulo menor será la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. De esta manera conocidos los tres ángulos determinarémos el lado desconocido aplicando la proposicion demostrada en el número anterior.

Así, si conociéramos los lados AB, y AC, y el ángulo comprendido A, antes de despejar alguno de los otros dos lados, buscaríamos el valor del ángulo B, y del ángulo C por medio de la proporcion establecida, y diríamos; $AC + AB : AC - AB :: \tan. \frac{1}{2}(B+C) : \tan. \frac{1}{2}(B-C) = \frac{(AC-AB) \times \tan. \frac{1}{2}(B+C)}{AC-AB}$. Por lo que, conociendo la suma de $B+C$ que es igual á $\pi - A$, conoceríamos tambien el valor de la $\tan. \frac{1}{2}(B+C)$; así que el cuarto término $\tan. \frac{1}{2}(B-C)$ vendría espresado en valores puramente conocidos. Así pues, conociendo ya los tres ángulos del triángulo despejaríamos fácilmente cada uno de los otros lados diciendo; $\text{sen. } C : \text{sen. } A :: AB : BC$.

260. Solo nos falta considerar el caso en el que los datos son los tres lados, siendo así que para la resolucion de los triángulos oblicuángulos se necesita el conocimiento de alguno de los ángulos, en el concepto de haber de entrar los senos de estos ángulos en la proporcion.

Antes de aplicar en este caso la proposicion general establecida (n.º 257), desde el vértice opuesto á la base bajarémos una perpendicular á la base, si el triángulo es acutángulo, ó á su prolongacion, si es obtusángulo. Entonces podrémos fácilmente conocer un ángulo que necesitemos por medio de una de las proporciones establecidas en la resolucion de los triángulos rectángulos, y despues podrémos inmediatamente despejar cualquiera de los ángulos del triángulo oblicuángulo por medio de la proposicion general (n.º 257).

Así, si dado el triángulo acutángulo ABC (fig. 140), conociéramos los tres lados, y tratáramos de despejar los ángulos, bajaríamos primero la perpendicular BD, y habría resultado un triángulo rectángulo BCD del cual conocemos la hipotenusa BC, y el cateto DC, porque en el supuesto de conocer todo el lado AC, conocerémos tambien una parte DC. Por tanto, para conocer el ángulo C, dirémos, R : cos. C : : hip. BC : cat. ady. DC; de donde sale; cos. C $= \dfrac{\text{R} \times \text{cat. ady. DC}}{\text{hip. BC}}$. Ahora pues podrémos inmediatamente conocer cualquiera de los otros ángulos, diciendo; sen. A : sen. C : : BC : AB, de donde sale; sen. A $= \dfrac{\text{sen. C} \times \text{BC}}{\text{AB}}$.

Si el triángulo fuera obtusángulo, como ABC (fig. 141) y conociéramos los tres lados, tiraríamos primero la perpendicular BD, y la prolongacion CD que nos sería conocida. Habría pues resultado el triángulo rectángulo BCD en el cual conocemos la hipotenusa BC y el cateto CD. Diríamos pues, primero; R : Cos. C : : hip. BC : cat. ady. CD, de donde sale; cos. C $= \dfrac{\text{R} \times \text{cat. ady. CD}}{\text{hip. BC}}$.

Conocido ahora el ángulo BCD conocemos inmediatamente su contiguo BCA $= \pi -$ BCD. Por tanto podrémos luego conocer cualquiera de los ángulos del triángulo oblicuángulo, diciendo; sec. C : sen. A : : AB : BC, de donde sale; sen. A $= \dfrac{\text{sen. C} \times \text{BC}}{\text{AB}}$.

Topografía.

261. Llámase *topografía* la aplicacion de la geometría á la medicion de las líneas en la superficie de la tierra, ya con el fin de hallar la distancia entre varios objetos accesibles ó inaccesibles, ya con el de valuar proporciones mas ó menos considerables de dicha superficie. Esta aplicacion forma el objeto principal de la *topografía*, ó sea, *geometría práctica*, que mirada bajo este aspecto se llama tambien *geodésia*.

262. Para llenar este objeto son necesarios diferentes instrumentos; unos para operar sobre el terreno, otros para trasladar al papel el resultado de las operaciones geodésicas.

Los principales instrumentos geodésicos son: 1.º los jalones que son unos palos labrados de diferentes tamaños, armados de una punta para clavarlos al suelo, y hendidos en el otro estremo para aplicarles un papel ó carton que les haga distinguir de léjos. 2.º Una cuerda ó cadena dividida en pies. 3.º La escuadra de agrimensor que es un prisma cuadrado que tiene dos hendiduras muy estrechas en la direccion de sus diagonales, ó un cilindro recto que tiene tambien dos hendiduras en la direccion de dos diámetros perpendiculares. Algunas en lugar de las hendiduras tienen pínulas, esto es, unas planchitas que por lo regular son de laton, perpendiculares al plano del instrumento y situadas en los estremos de los diámetros del cilindro ó de las diagonales del prisma. Una de estas planchitas tiene una hendidura muy estrecha y la otra la tiene mayor con un hilo muy fino perpendicular tambien al plano del instrumento que sirve para dirijir las visuales. 4.º La plancheta que es una tabla cuadrada que se afirma sobre tres pies; sobre ella se estiende un papel, y para dirigir las visuales se usa de una regla que se llama alidada en cuyos estremos hay dos pínulas. 5.º El grafómetro que es un semicírculo graduado con una alidada igual en longitud al diámetro del semicírculo: fija por su punto medio al centro del semicírculo y susceptible de girar en su plano al rededor del centro. El diámetro y la alidada tienen pínulas en sus estremos. Para hacer uso de este instrumento, se coloca sobre tres pies como la plancheta.

Es mas ventajoso substituir al semicírculo un círculo entero que tenga movimiento de rotacion sobre los tres pies que le sostienen: esta nueva disposicion permite el obtener el valor de un múltiplo cualquiera del ángulo que se ha de medir con la misma aprocsimacion que se obtendría el valor del ángulo simple. Entonces si se divide el múltiplo obtenido por el número de observaciones sucesivas, el error posible se halla dividido por el mismo número; y de este modo se obtiene el ángulo buscado con el grado de aprocsimacion que se quiera. Cuando el instrumento ha recibido esta modificacion se llama círculo repetidor.

Cuando se han de dirijir visuales á objetos muy distantes, en lugar de las pínulas se ponen anteojos. 6.° La brújula cuya construccion y uso se fundan en que las agujas tocadas al iman se dirijen hácia el norte.

263. La brújula sirve para medir el ángulo que forma una recta en el terreno con la línea norte sur del horizonte. Llámase así la comun seccion del plano del horizonte con el meridiano, círculo máximo de la esfera que pasa por los polos del mundo y por el zenit, es decir por el punto del cielo perpendicular sobre la cabeza del observador.

264. Aunque este instrumento no es aplicable en las operaciones delicadas, sirve en las aproximadas como son los reconocimientos militares, para indicar sobre un plano las cimas de una montaña, las posiciones y formas de sus mesas, el principio y fin de sus cuestas, las inflecsiones de un rio etc.

265. Los instrumentos que sirven para trasladar al papel los resultados de las operaciones del terreno son la regla, el compás, la escuadra, las escalas y el semicírculo graduado. La escuadra se compone por lo regular de dos reglas unidas por uno de sus estremos de modo que forman un ángulo recto; estas reglas se llaman lados de la escuadra. Tambien hay escuadras que tienen la forma de un triángulo rectángulo.

Nivelacion.

266. Antes de entrar á la esplicacion de las operaciones geodésicas diremos que se llama línea vertical la direccion que sigue un cuerpo que se deja caer libremente.

La direccion vertical se obtiene por medio de un hilo á cuyo estremo está suspendida una esferilla de plomo ú otro cuerpo cualquiera. Este hilo sujeto por el otro estremo toma naturalmente la posicion vertical.

267. Todo plano perpendicular á la línea vertical se llama plano horizontal. Tal es la superficie de un líquido en reposo. En muchas operaciones de geodésia es preciso situar un plano en posicion horizontal, y para esto se emplea un instrumento llamado nivel. Este instrumento, reducido á su mayor grado de sencillez, consiste en una escuadra que en uno de sus lados tiene un hilo á plomo que sirve para conocer cuando el otro lado está en posicion horizontal; ó en un triángulo isósceles en cuyo vértice está suspendido un hilo á plomo, que cuando se dirije al centro de la base indica que esta está en posicion horizontal.

Este instrumento sirve pues para conocer si un plano es horizontal; y como dos rectas determinan la posicion de un plano, para asegurar que la superficie satisface á esta condicion, basta observar si en dos posiciones diferentes del instrumento la direccion del hilo á plomo coincide con la recta señalada de antemano en el plano del instrumento para indicar la vertical. Además de los instrumentos groseros que acabamos de describir hay otros mas ecsactos que son: el nivel de aire que consiste en un tubo cilíndrico cerrado en sus estremos, lleno de agua ú otro líquido cualquiera; pero con una pequeña porcion de aire que forma una burbujita. Cuando esta se halla en medio del cilíndro, su eje es horizontal. El nivel de agua consiste en un tubo de vidrio abierto y encorvado en sus dos estremos, de modo que termina en dos pequeños tubos verticales. El tubo está casi enteramente lleno de agua, y por lo mismo toda visual tirada por las dos superficies del agua, es una línea de nivel aun cuando el instrumento no esté bien horizontal.

268. Se llama nivelacion la operacion por la cual se determina la diferencia en altura vertical entre dos puntos. Las alturas verticales son sensiblemente paralelas cuando la distancia de los objetos es pequeña, pues en distancias cortas el plano del horizonte tangente á la superficie de la

tierra se confunde con esta. Asi las pequeñas masas líquidas cuando están en quietud, son sensiblemente planas; pero los lagos de mucha estension y los mares forman una superficie esférica cuyo centro es el de la tierra. Esta superficie se llama nivel verdadero, y la de un plano tangente á la superficie de la tierra se llama nivel aparente.

269. Esto supuesto, todos los puntos de la superficie de las aguas, cuando están en quietud, ó en general, dos ó mas puntos equidistantes del centro de la tierra están en un mismo *nivel*, ó en el *nivel verdadero*, y todos los puntos que disten desigualmente del centro de la tierra están en el *nivel aparente*. Así, suponiendo la tierra representada por la (fig. 132), cuyo centro es O, todos los puntos A,B,C,D etc., que son equidistantes de O, están á un mismo *nivel*, ó en el *nivel verdadero*; y los puntos E,P,B,G que distan desigualmente de O estarán en el *nivel aparente*. Por tanto, la línea ABCD, ó cualquiera otra concéntrica con ella se denominará *línea de nivel verdadero*, y la EG será la línea de *nivel aparente*.

270. La diferencia entre los puntos de nivel aparente que son los de una tangente v. gr. BG (fig. 132) y los de nivel verdadero que son los de un arco de círculo máximo de la tierra, es la diferencia entre la secante OG, y el rádio O*e*, es decir *e*G; de modo que los puntos B, G que están en un mismo nivel aparente, tienen *e*G de diferencia en nivel verdadero.

271. Para hallar la diferencia de nivel entre dos puntos, se coloca el nivel en medio de ellos, para evitar la correccion de la diferencia entre el nivel aparente y verdadero. Se coloca en el primer punto una mira, que es una percha dividida en pies, pulgadas, etc. la cual tiene una tablilla rectángular la mitad blanca, y la mitad negra, que pueda correr por su longitud, y fijarse cuando sea necesario con un tornillo. El que opera dirije la visual horizontal del nivel, y el ayudante sube ó baja la tablilla hasta que la línea divisoria de los colores se corta con la visual, y se vé la altura señalada en el estadal. Este se transporta al otro

punto, y se hace la misma operacion. Si las dos alturas son iguales, los dos puntos están en un mismo nivel; pero si son desiguales, el mas bajo será el que tenga mas altura en la mira, y la diferencia de ambas alturas será la diferencia de nivel.

Cuando la distancia entre los puntos que se quieren nivelar es muy grande, se divide la operacion en diversas estaciones. Se suman despues todas las alturas que se han hallado dirijiendo las visuales hácia el punto donde empezó la operacion: se suman tambien las alturas que se han hallado dirijiendo las visuales hácia la parte opuesta; si estas dos sumas son iguales, los dos puntos están en un mismo nivel; si son desiguales la diferencia indicará lo que el punto á quien corresponde la suma menor está mas alto que aquel á quien corresponde la suma mayor.

Medicion de los ángulos.

272. Se ha dicho (n.° 365.) cuales eran los instrumentos que servían para trasladar al papel los resultados de las operaciones sobre el terreno. Cuando quiera hacerse por medio del *semicírculo graduado*, se coloca de modo que el centro caiga en el vértice del ángulo dado, tomando el diámetro del semicírculo la direccion de uno de los dos lados del ángulo. Así, si queremos graduar el valor del ángulo BOD (fig. 142), aplicaremos el semicírculo ACB, haciendo que el centro O caiga sobre el vértice del ángulo BOD, y harémos de manera que el diámetro AB tome la misma direccion del lado OB del ángulo dado. De este modo el otro lado OD determinará en el semicírculo el número de grados de dicho ángulo que será medido por el arco BD. Si pues, el punto D marca 47.° dirémos que el ángulo BOD tambien es de 47.°

273. Para que en uno de estos semicírculos pudieran trazarse medios grados, se necesitaría que fuese de un radio muy grande, y sería muy embarazoso el uso de este instrumento, especialmente cuando quisieran apreciarse por

su medio minutos, y segundos. Para evitar este inconveniente se ha ideado el siguiente sencillo medio.

Se colocan dos piezas de igual magnitud, y ordinariamente de un mismo metal. Una de estas piezas se llama *limbo* y la otra *núñez* del nombre de su inventor. Divídese el limbo en un número arbitrario de partes iguales, y el núñez en el mismo número de partes mas una. Así, si el limbo se hubiera dividido, por ejemplo en 11 partes iguales, el núñez se dividiría en 12. Como 12 partes del núñez son iguales á 11 partes del limbo, por la igualdad de las dos piezas, y sabiendo el valor de muchas unidades se averigua el valor de una dividiendo el valor total por el número de ellas (arit. n.° 47 4°.), tendremos que si estas 11 partes del limbo representan 11.° cada parte ó division del núñez valdrá $^{11}/_{12}$ de grado, ó sea, $\frac{11 \times 60'}{12} = \frac{660'}{12} = 55$ minutos. Y si cada division del limbo vale un grado, ó sea 60 minutos, y cada parte del núñez vale 55 minutos; la diferencia entre una division del limbo y otra del nuñez será $60' - 55' = 5$ minutos.

La pieza donde está el núñez se aplica sobre el limbo, y gira al rededor del centro del instrumento (ó al contrario, permanece fijo el núñez y gira el limbo); la primera division del núñez tiene por lo regular una *flor de lis*, y se llama *línea de fé*; esta se hace que coincida con la division 0° ó 180° en general, ó sobre otra graduacion cualquiera del limbo; y la magnitud de un ángulo se aprecia por lo que se separa la línea de fé de dicha graduacion. Ahora, si la linea de fé coincide exactamente con una division del limbo, el valor del ángulo será el número de grados comprendido desde cero hasta dicha línea; pero si la línea de fé cae entre dos divisiones del limbo, el ángulo pedido valdrá un cierto número de grados, y una parte de grado que se valúa por la regla siguiente: *véase la division del núñez que mas coincide con una del limbo*; *cuéntense los espacios del núñez desde la línea de fé hasta la* *que coincide con la del limbo; multiplíquese el número de espacios hallado por la diferencia* 5′ (en nuestro caso, ó por lo que valga segun otra division) *que hay entre el espacio del limbo al del núñez; y el producto serán los minutos que se deberán añadir al número de grados hallado.*

Medicion geométrica de distancias y alturas.

274. Toda operacion geodésica debe principiar por la medicion de una recta que se llama base. Para medir una recta es preciso primero alinear la distancia, lo que se hace plantando jalones en los puntos intermedios de modo que se cubran perfectamente; alineada la distancia se empieza la medicion con la cadena ó cuerda procurando que esté bien tirante, y segun las veces que se coloque se deducirá el número de pies de que consta la recta dada.

275. En la practica de la geodésia ocurre con frecuencia el tirar una perpendicular ó una paralela á una recta dada.

Para tirar una perpendicular á una recta, se alinea con la recta dada una visual tirada con la escuadra de agrimensor; en la direccion de la otra se fijan jalones, y estos determinan la direccion de la perpendicular pedida. La paralela á una recta dada se determina tirando una perpendicular á dicha recta y despues otra perpendicular á la que se tiró primero. Esto supuesto vamos á resolver las cuestiones siguientes.

276. *Propongámonos medir una linea accesible por un extremo, é inaccesible por otro.*

Sea para esto la linea AB accesible por el punto B, é inaccesible por A. Desde B tírese á BA una perpendicular BL; divídase en dos partes iguales en H, y desde L tírese á BL otra perpendicular LD. Búsquese en esta última perpendicular un punto D que coincida con H, y tírese una visual que pase por D, y H, y termine en D. Entonces la recta LD será igual á la altura BA; pues que los dos triángulos ABH, y DLH son iguales por el 2.° caso de igualdad de triángulos (n.° 74 2°.)

277. *Mídase la altura de una torre accesible por su pié, pero inaccesible por el otro extremo.*

Para medir geométricamente una altura, se elevan dos jalones verticales uno mas alto que otro de modo que la visual que pase por sus extremos pase tambien por el punto superior de la altura, y otro de la misma con direccion paralela á la base escogida.

Así, sea que hayamos de medir la altura BA (fig. 144), accesible por el punto B, pero inaccesible por A. Tírese primero la base RB. En R, y N levántense dos jalones RD, y NM. Por el punto D tírese la visual DMA al extremo de la torre, y otra DC igual y paralela á RB.

De este modo han resultado dos triángulos semejantes ACD y MOD, y podrá formarse esta proporcion; DO : OM :: DC : CA. En esta proporcion tenemos los tres primeros términos conocidos; pues que conociendo la base RB tambien conocemos su igual DC, y su parte DO. Conociendo además la altura del jalon NM, conocemos tambien su parte OM. Luego despejando el término CA, y añadiendo á su valor la parte CB igual con ON, conocerémos toda la altura BA.

Si no se puede llegar al pié de la altura, se mide una base en el terreno de que pueda disponerse, y se determina la distancia de uno de los extremos de la base al pié de la altura, por el método esplicado (n.º 276). Hallada esta distancia se procede como en el caso anterior.

278. Con solo la cadena y los jalones, *fórmese un ángulo recto, ó tírese una perpendicular á una recta dada.*

Para esto tómense 12 unidades en la cadena. Descompónganse estas 12 unidades en las tres partes 3, 4, y 5; y con estas partes fórmese un triángulo que será rectángulo, del cual será hipotenusa el lado que contendrá 5 unidades; pues que, $3^2 + 4^2 = 5^2$, ó bien $9 + 16 = 25$.

Para formar con la cuerda un ángulo de 60.º se formaría con las 12 unidades un triángulo equilátero.

Medicion trigonométrica de distancias y alturas accesibles é inaccesibles.

279. *Mídase una altura accesible por su pié.*

Cuando pueda llegarse al pié de la altura, mídase desde él una base horizontal, y desde el otro extremo con el instrumento diríjase una visual al punto superior de la altura. Así, si hemos de medir la altura AB (fig. 145), accesible por su pié, tiraremos á arbitrio una base AD, que será perpendicular á la altura. Desde D con el instrumento dirijiremos una visual al punto B que vendrá representada por la línea DB. Entonces pues conoceremos en el triángulo rectángulo ABC, un cateto AD, y el ángulo agudo D. Por lo que, podrémos formar esta proporcion (n.º 256); R : tan. D : : cat. ady. AD : $AB = \frac{\text{tan. D} \times \text{AD}}{\text{R}}$.

280. *Mídase una altura inaccesible por sus dos extremos.*

Sea para esto la altura DA (fig. 146). Desde el punto F hasta donde podemos acercarnos, medíremos una base arbitraria FE que será en la misma direccion FD. Colocarémos sucesivamente el instrumento en los extremos de esta base EF, y dirijiendo con el anteojo del instrumento visuales al punto A, estarán representadas por las líneas EA, y FA, y tendrémos un triángulo oblicuángulo, y conocidos los ángulos E, y AFE, y por consiguiente el ángulo AFD que es contiguo á AFE. De este modo será tambien inmediatamente conocido el ángulo EAF, y podrémos formar esta proporcion; sen. A : sen. E : : EF : AF, y tendrémos conocido este lado AF. Ahora observamos que AF es hipotenusa del triángulo AFD. Por lo que, conociendo ya esta hipotenusa y el ángulo agudo F, pódremos formar esta proporcion; R : sen. F : : hip. AF : $DA = \frac{\text{sen. F} \times \text{hip. AF}}{\text{R}}$.

281. *Mídase una distancia accesible por un extremo.*

Sea para esto la distancia AB (fig. 139), accesible por el punto A. Tírese á arbitrio desde A una base AC. Colóquese sucesivamente el instrumento en los dos extremos de esta base, y diríjanse desde cada uno visuales al extremo B, que estarán representadas por AB y CB. Con esto habremos obtenido un triángulo oblicuángulo en el cual conocemos el lado AC, y los ángulos agudos A y C. Luego podremos inmediatamente conocer el tercer ángulo B, y formaremos la siguiente proporcion; sen. B : sen. C : : AC :

$$AB = \frac{\text{sen. } C \times AC}{\text{sen. } B}.$$

282. *Mídase una distancia inaccesible por sus dos extremos.*

Sea para esto la distancia AB (fig. 147). Tírese á arbitrio una base CD, que si es posible, sea paralela á la distancia pedida AB. Colóquese el instrumento en C y diríjanse visuales á los puntos A, B y D, que estarán representadas por las rectas CA, CB y CD. Con esto tendrémos conocidos los tres ángulos ACD, ACB y BCD. Trasládese el instrumento en D, y diríjanse visuales á los puntos C, A y B, que estarán representadas por las rectas DC, DA y DB. Con esto tendrémos conocidos los tres ángulos BDC, BDA y ADC.

Ahora en el triángulo ACD conocemos el lado CD, y los dos ángulos ACD y ADC; por lo que, conocemos tambien inmediatamente el tercer ángulo DAC. Por tanto, determinaremos el lado AC, diciendo; sen. A : sen. D : : CD : AC.

En el triángulo BCD, conocemos el lado CD, y los ángulos agudos BCD, y BDC, luego conoceremos inmediatamente el tercer ángulo CBD. Por tanto despejaremos el lado CB, diciendo; sen. B : sen. D : : CD : CB.

Ahora, pues, nos queda el triángulo ACB. En este conocemos ya el ángulo ACB, y los dos lados AC y CB. Luego podrémos despejar el lado AB, diciendo; 1.° CB + CA : CB — CA : : tan. $\frac{1}{2}$ (B + A) : tan. $\frac{1}{2}$ (B — A). Conociendo pues ahora por medio de esta proporcion los ángulos B y A dirémos; sen. B : sen. C : : AC : AB.

Levantamiento de planos.

283. Se llama mapa ó plano topográfico el dibujo en que están representados todos los objetos de un país de corta estension.

La operacion que debe hacerse para obtenér este dibujo se llama levantar el plano de un terreno.

Para esto se elijen primero dos puntos A, E, (fig. 148), desde los cuales se pueden ver todos los demas. Se fija el instrumento en el punto A; se dirigen visuales á E, D, C, B, F, tirando en el papel rectas que indiquen sus direcciones; se pasa el instrumento al punto E, se hace que la recta E*a* coincida con la EA del terreno, se tiran las visuales ED, EC, EB, EF, y si el instrumento es la plancheta, el concurso de las visuales en el papel determinará los objetos: sino lo es, en los estremos de una recta que contenga tantas unidades de la escala cuantas unidades lineales tiene la base medida se forman con un semicírculo ángulos del mismo número de grados que los observados en el terreno, cuyos lados prolongados determinan con su concurso los puntos cuya situacion se intenta fijar.

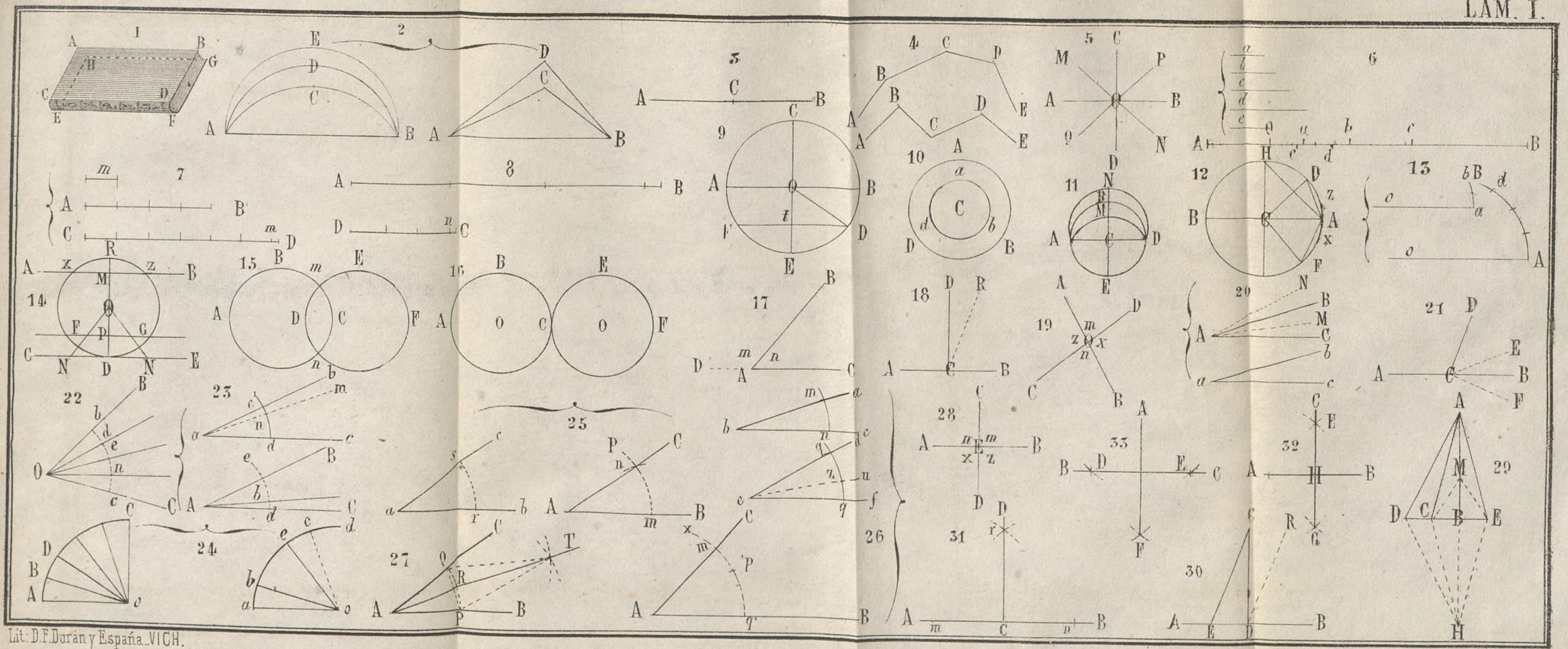
284. Para hallar la superficie de un terreno cuya figura no esté comprendida en las que hemos considerado en la geometría elementar, se inscribe en él el mayor rectángulo posible, y las porciones que queden se miden como triángulos, ó se inscriben en ellas otras figuras, hasta que los recodos sean bastante pequeños para poderlos valuar á ojo.

FIN DE LA GEOMETRÍA.

ÍNDICE GENERAL.

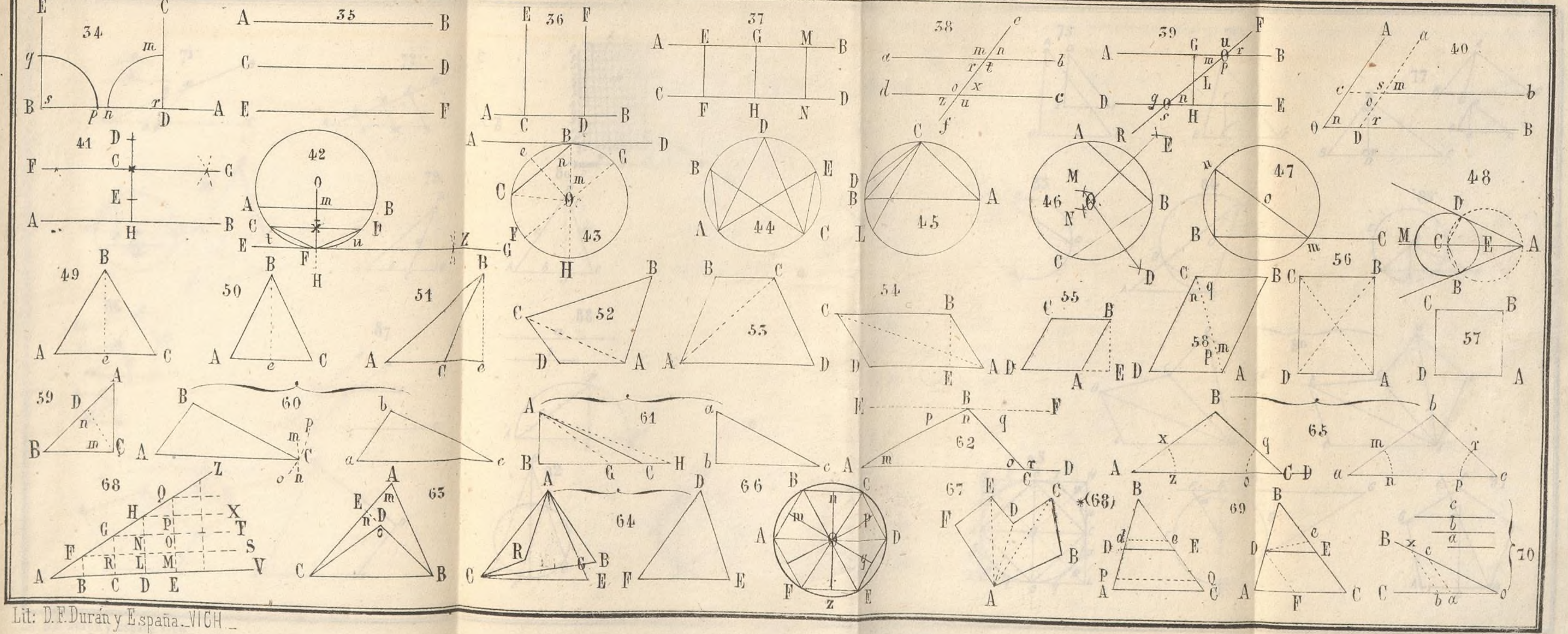
ÍNDICE DE LA GEOMETRÍA.

FIN DEL ÍNDICE.

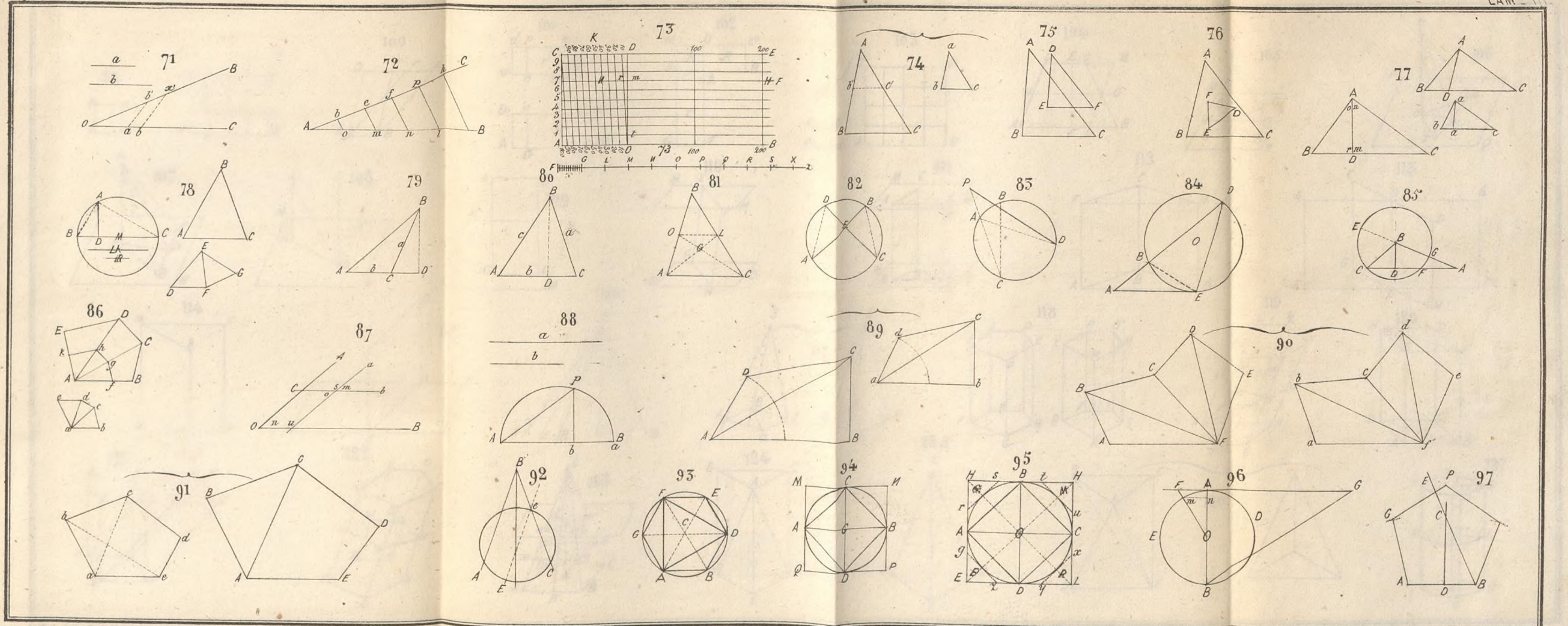


Lit: D.F. Durán y España_VICH.

LAM. II.

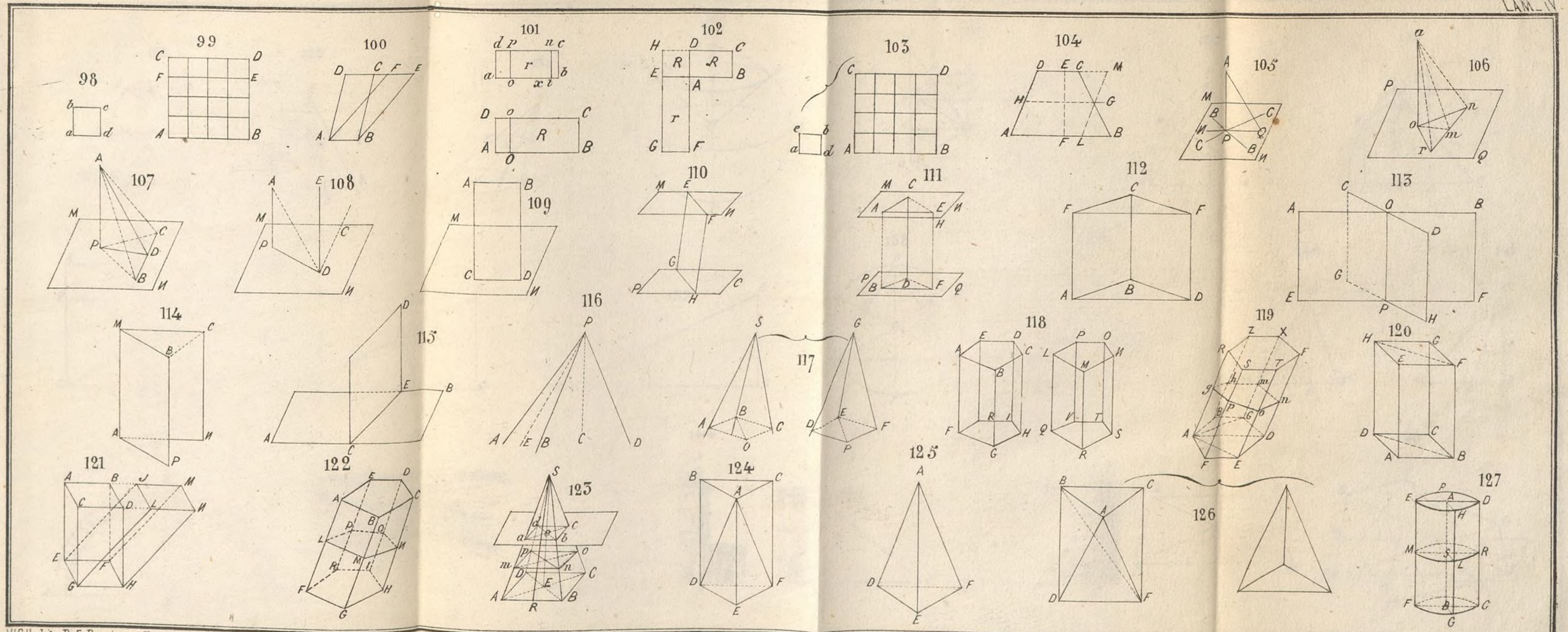


Lit: D.F. Durán y España_VICH_



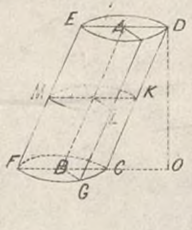
Lit: D.F. Durán y España VICH

LAM_IV

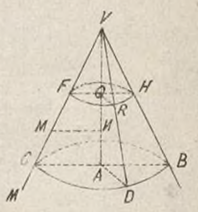


VICH_Lit: D.F. Durán y España.

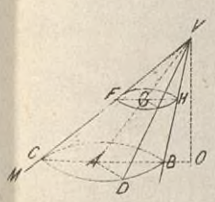
128



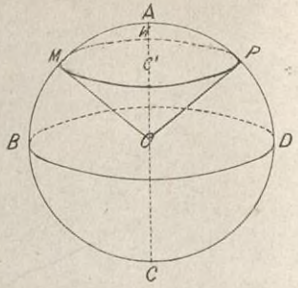
129



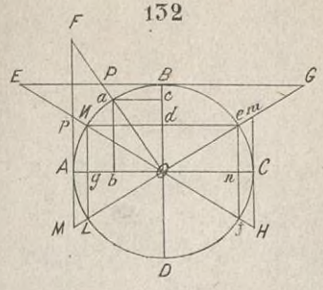
130



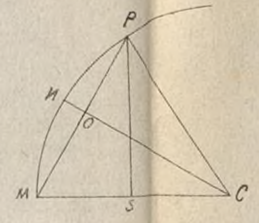
131



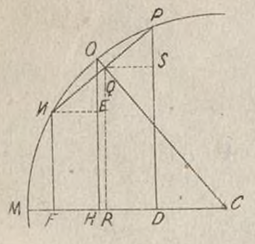
132



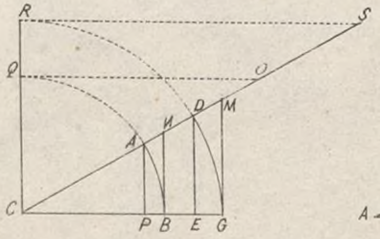
133



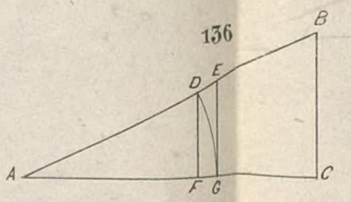
134



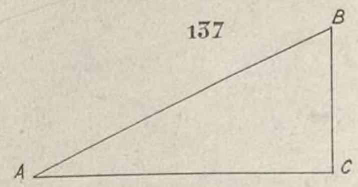
135



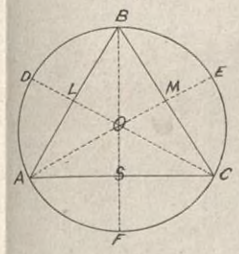
136



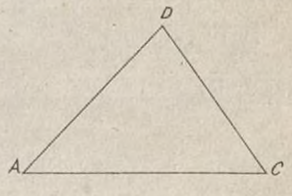
137



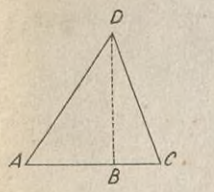
138



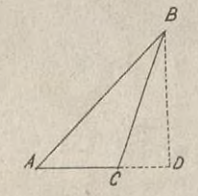
139



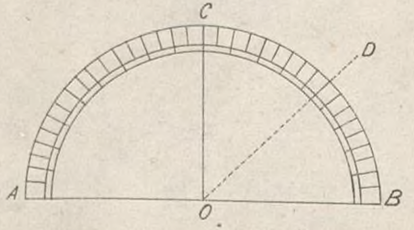
140



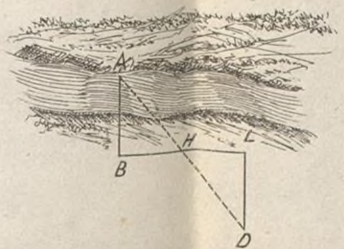
141



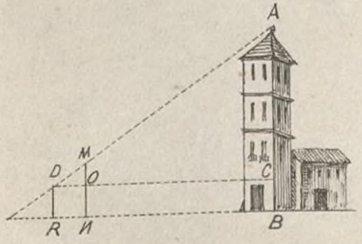
142



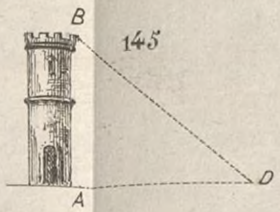
143



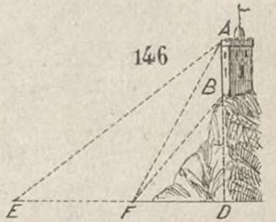
144



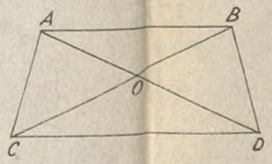
145



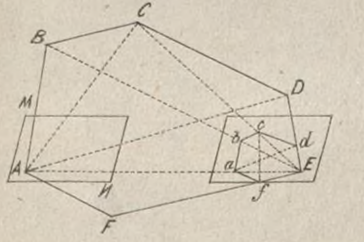
146



147



148



VICH_Lit: D.F. Durán y España