4957

COMPENDIO

DE

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

18750

Log 1447

OBRA UTILÍSIMA

A LOS ALUMNOS DE SEGUNDA ENSEÑANZA

por

D. MANUEL BUIL Y BAYOD

Licenciado

en Ciencias y en Jurisprudencia, Abogado ejerciente del Itre. Colegio

de Zaragoza y graduado de Licenciado

en la

Facultad de Filosofía y Letras.

ZARAGOZA: 1876

Establecimiento tipográfico de Calisto Ariño

Coso, 108

PRÓLOGO.

ALGUNOS años de enseñanza en la asignatura de Matemáticas, me han dado á conocer una verdad palmaria y evidente que no habrá pasado desapercibida á mis compañeros de profesion.

Cuantas obras se han publicado referentes á esta asignatura, sin que dejen de tener un mérito superior á la presente, adolecen de un defecto bastante comun en todas las de este género; cual es, el de su demasiada estension. Defecto que honra á sus autores, pues demuestra su mucho caudal de ciencia; pero que no deja por esto de ser perjudicial á la enseñanza de los alumnos que tales obras han de manejar; pues hay que tener en cuenta, que la inmensa mayoría de estos no se hallan en el caso de poder aprender cinco ó seis páginas de leccion; tarea demasiado ruda para el escaso desarrollo de su jóven inteligencia, y sin embargo indispensable si se ha de repasar la asignatura en el cada vez más mermado tiempo de curso.

A salvar este inconveniente dedico mis esfuerzos en la presente obra, que no por ser de tan corta estension deja de ser completa; pues no contento con demostrar los Teoremas y procedimientos, demuestro hasta los Corolarios; ó por lo menos, hago ver clara y distintamente el lazo de union que los liga á los Teoremas de donde proceden; empleando siempre que me es posible demostraciones de raciocinio, que son las que más dicen á la inteligencia.

Y para concluir, manifestaré que la presente obrita la dedico esclusivamente á los alumnos de segunda enseñanza, á cuyo fallo me remito sobre el resultado que puedan obtener en los Exámenes, los que por ella estudien la tan difícil cuanto importante asignatura de las Matemáticas.

M. B. y B.

ARITMÉTICA.

PRIMERA PARTE.

LECCION PRIMERA.

1. *Matemáticas son las ciencias que tratan de la cantidad.*

2. *Cantidad es todo lo que puede aumentar ó disminuir.*

La cantidad será *contínua,* si las partes de que consta están unidas entre sí; y *discreta* si sucede lo contrario. La cantidad contínua se llama tambien *mensurable,* porque se mide; y la discreta *numerable,* porque se cuenta.

3. *Unidad es cada una de las partes iguales en que se considera dividida la cantidad.*

4. Las Matemáticas se dividen principalmente en tres ramas: la *Aritmética,* que trata de la cantidad discreta ó numerable; la *Geometría,* que se ocupa de la contínua ó mensurable, y el

Álgebra, cuyo objeto es la cantidad en general, prescindiendo de su naturaleza.

Ahora bien; como la cantidad discreta se espresa por medio de los números, podremos definir la Aritmética diciendo:

5. *Aritmética es la ciencia de los números.*

6. *Número es un conjunto de unidades.*

7. Los números se dividen: Primero; en *enteros* y *quebrados*. Entero es el que hemos definido, y quebrado, es el conjunto de unidades fraccionarias iguales; entendiendo por unidades fraccionarias, aquellas partes iguales en que consideramos dividida á la unidad entera. Número misto es el que consta de un entero y un quebrado. Segundo: en *abstractos* y *concretos*. Abstracto es el número que no determina la especie de sus unidades; y se llama concreto en el caso contrario. Los concretos se subdividen: 1.° En *homogéneos* y *heterogéneos*. 2.° En *complejos* é *incomplejos*. Son homogéneos los concretos de una misma especie, y heterogéneos los de especie distinta. Son complejos, los de distinta especie, pero de la misma naturaleza, é incomplejos los que tienen distinta la naturaleza y la especie.

8. La Aritmética enseña: 1.° A espresar los números. 2.° A verificar con ellos diferentes operaciones.

9. *Numeracion es la parte de la Aritmética que enseña á espresar los números.*

10. Se divide en *oral* y *escrita*, segun que nos enseñe á hacerlo por medio de palabras ó por medio de signos.

11. Nuestro sistema de numeracion se llama

décuplo ó decenario, porque el número de signos diferentes que emplea es diez, y porque todo su artificio consiste, en que *cada diez unidades de un órden cualquiera forman una del órden superior inmediato.*

12. Las unidades de órden más inferior llamadas *simples* ó de primer órden son: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y *diez*; y segun queda indicado (11), la reunion de diez unidades simples formará una *decena* ó sea unidad de segundo órden, contándose por estas, lo mismo que por las anteriores, diciendo: una decena, dos decenas, etc. La reunion de diez decenas forma una *centena*, ó unidad de tercer órden. Diez de estas constituyen un *millar*, que es la unidad de cuarto órden. Las de quinto órden se llaman *decenas de millar*, las de sesto *centenas de millar* y las de séptimo *millones*; contándose por todos estos órdenes lo mismo que por los dos primeros. A un millon de millones se le dá el nombre de *billon*. A un millon de billones *trillon*, y así sucesivamente.

13. Aunque estas son las reglas generales de la numeracion oral, la brevedad y belleza del lenguage ha obligado á admitir las reformas siguientes:

1.ª En lugar de decir, diez y uno, diez y dos, et cétera, hasta diez y seis, se emplean las palabras once, doce, trece, catorce y quince.

2.ª Las palabras, dos decenas, tres decenas, et cétera, hasta diez decenas, se han sustituido por las de veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa.

3.ª Igualmente se ha adoptado la palabra *ciento*, en lugar de centena; y así decimos: ciento, dos cientos, quinientos (y no cinco cientos), setecientos, etc.

4.ª Tambien se dice *mil* en lugar de millar, llamando á dos millares, dos mil, á tres millares tres mil, etc.

5.ª La misma innovacion se ha hecho con las decenas y centenas de millar.

Por medio de estas reformas se ha conseguido abreviar y armonizar el lenguage del modo que se observa en el siguiente ejemplo: por el sistema regular diríamos: Siete centenas de millar, cinco decenas de millar, tres millares, cinco centenas, cuatro decenas y seis unidades; mientras con las anteriores reformas decimos: setecientos cincuenta y tres mil, quinientos cuarenta y seis.

OBSERVACION. — Es evidente que del mismo modo que en nuestro sistema de numeracion se ha adoptado como base el número diez, pudiera haberse tomado otra base cualquiera como, por ejemplo; el número cinco, en cuyo caso es claro que cinco unidades de un órden cualquiera constituirían una del superior inmediato.

LECCION 2.ª

14. Numeracion escrita es, como hemos dicho (10), *la parte de la Aritmética que enseña á representar todos los números con muy pocos signos.*

15. Estos signos en el sistema decimal ó decenario son los diez siguientes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que se leen: cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve.

16. Al cero se le llama cifra *no significativa;* porque por sí sola nada vale; y á las demás se las denomina *significativas,* por la razon contraria.

17. Todo el artificio de la numeracion escrita consiste, en que *las unidades ocupen el primer lugar de la derecha, las decenas el segundo, las centenas el tercero* y *así sucesivamente;* ó para decirlo con mayor brevedad, *cada cifra debe ocupar contando de derecha á izquierda, un lugar igual al órden á que pertenezca.* Así, por ejemplo: los millones, que pertenecen al séptimo órden, se pondrán en el séptimo lugar, los millares, como pertenecientes al cuarto órden, se escribirán en el cuarto lugar y así de los demás.

18. De lo dicho se desprende, que en la numeracion escrita cada cifra tiene dos valores; uno *absoluto,* que afecta al número de unidades que espresa y otro *relativo,* que depende del lugar que dicha cifra ocupa.

19. El cero, que como queda espuesto (16) no tiene valor absoluto, sirve para ocupar los lugares que sin él quedarian vacantes alterando el valor relativo de las demás cifras.

20. Tambien es consecuencia de lo anterior, que un número se hace diez, cien, mil veces mayor ó menor, si se añaden ó quitan respectivamente uno, dos ó tres ceros á su derecha; porque al cambiar de lugar las cifras se altera su valor relativo; y por una razon análoga no se alterará

el número, aunque se añadan ó supriman á su izquierda todos los ceros que se quiera.

21. Para leer una cantidad escrita, no hay mas que *ir dando á cada cifra sus valores, absoluto y relativo, principiando por las de órden superior*. Así, 1324, se lee: un millar tres centenas dos decenas y cuatro unidades, ó sea mil trescientos veinte y cuatro.

22. Si el número de cifras fuere muy considerable, se divide de derecha á izquierda en grupos de á seis cifras, en el primero de los cuales se pone un uno que indica el lugar de los millones, en el segundo un dos que corresponde á los billones, etc., como se ve en el siguiente ejemplo:

$$3,_{2}240078,_{1}543721$$

que se lee así: tres billones, doscientos cuarenta mil setenta y ocho millones, quinientos cuarenta y tres mil setecientos veintiuno.

Observacion.—Si en lugar de ser el número diez la base de nuestro sistema fuese el cinco, tan solo emplearíamos las cinco cifras siguientes: 0, 1, 2, 3, 4, rigiendo por lo demás las mismas reglas mencionadas para el sistema que empleamos. De manera que el número 42 equivaldria á cuatro unidades de segundo órden y dos de primero ó sea veintidos de nuestro sistema, por cuanto segun hemos dicho (13, observacion), cada unidad de segundo órden en el sistema quinario vale tan solo cinco del primero.

23. Los signos que se emplean para espresar las operaciones aritméticas que luego se esplicarán, son:

$+$	significa	mas y es el signo de la adicion.
$-$	»	menos y lo es de la sustraccion.
$\times$ ó $\cdot$	»	multiplicado por, y lo es de la multiplicacion.
: ó | ó ___	»	dividido por, é indica la division.
$=$	»	igual y separa los dos miembros de la igualdad.
( )	»	paréntesis, sirve para que el signo que esté á su lado afecte á todo lo que se halla contenido dentro de aquel.

LECCION 3.ª

24. Las principales operaciones que se ejecutan con los números son cuatro: adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

25. *Adicion es una operacion cuyo objeto es reunir vários números llamados sumandos en uno solo llamado suma.*

26. En esta operacion se distinguen dos casos: 1.° Sumar un número cualquiera con otro ú otros de una sola cifra. 2.° Sumar números de várias cifras.

27. *Para resolver el primer caso, se agrega al uno de los sumandos la unidad, tantas veces consecutivas cuantas sean las unidades del otro ú otros sumandos.* Así $4+6+2$ será igual á $4+1+1+1+1+1+1+1+1=12$.

28. *Para resolver el segundo caso, es preciso ante todo plantear la operacion, para lo cual colocaremos los sumandos unos debajo de otros de manera que se correspondan las unidades del*

mismo órden: porque solo así podremos sumar unidades con unidades, decenas con decenas, et cétera, sin exponernos á una equivocacion. *Planteada la operacion, se principia á sumar por las unidades de órden inferior para que si de alguna de las sumas parciales resultan unidades del órden superior inmediato, podamos añadirlas á la suma de estas.*

Así, por ejemplo, si hubiéramos de ejecutar la adicion 432+78+1504 la plantearíamos y resolveríamos del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 432 \\ +\ 78 \\ +\ 1504 \end{array}\right\}\textit{sumandos}$$
$$\overline{\quad 2014\ \textit{suma} \quad}$$

29. *Prueba de una operacion, es otra que se practica para cerciorarse de la exactitud de la primera.*

30. Teorema.—*El órden de colocacion de los sumandos no altera la suma.*

De manera que 4+6=6+4, porque si descomponemos en unidades cada uno de estos sumandos de la siguiente manera:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$$

el mismo resultado nos producirá si sumamos de izquierda á derecha, que de derecha á izquierda.

La prueba de la operacion de sumar puede verificarse ejecutando la adicion de abajo á arriba, ó sea en un órden inverso al que se empleó en la operacion.

Porque el órden de sumandos no altera la suma.

31. La adicion de los números concretos se verifica como la de los abstractos, pero advirtiendo que todos los sumandos deben ser homogéneos.

PROBLEMA.—Cuatro comerciantes reunen sus capitales para una empresa, y aportan: el primero 54200 rs., el segundo 37420, el tercero 8547 y el cuarto 10950. ¿Qué capital reunen entre los cuatro?

LECCION 4.ª

32. *Sustraccion es una operacion por la que dados la suma y un sumando, se trata de hallar el otro sumando.*

De estos tres números, llamamos *minuendo* á la suma dada, *sustraendo* al sumando dado y *resto* ó *diferencia* al sumando que buscamos.

Segun esto, *un resto no varía añadiendo ó quitando el mismo número á minuendo y sustraendo.*

Porque al hacerlo así, añadimos ó quitamos el mismo número á la suma y á un sumando segun la definicion, y por lo tanto el resto que es el otro sumando no debe alterarse.

33. Dos casos distinguiremos en la sustraccion: 1.° Que el sustraendo tenga una sola cifra. 2.° Que tenga más de una.

34. *Para resolver el primer caso, no hay mas que buscar un número que sumado con el sus-*

traendo produzca el minuendo. Así, 8—6=2, porque 2+6=8.

35. *Para resolver el segundo caso, se plantea antes la operacion, colocando para mayor comodidad el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades del mismo órden. Se ejecuta luego la operacion restando las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, etc., principiando siempre por las de órden inferior, para que si alguna de las cifras del sustraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo, podamos agregar á esta una unidad de la cifra inmediata superior de dicho minuendo que vale por diez, teniendo luego cuidado de agregarla á la cifra siguiente del sustraendo, ó disminuirla á su correspondiente del minuendo, pues ambos procedimientos dan idéntico resultado.*

De modo, que si tratamos de ejecutar la sustraccion: 234057—84364, la operacion se planteará y resolverá del modo siguiente:

234057	minuendo
— 84364	sustraendo
149693	resto ó diferencia

36. *La sustraccion se prueba, sumando el sustraendo con el resto; y la suma debe ser igual al minuendo.*

Porque ya sabemos (32) que el sustraendo y resto son dos sumandos y el minuendo la suma de ellos.

37. La sustraccion de los números concretos

se verifica como la de los abstractos, con sola la advertencia de que minuendo y sustraendo han de ser homogéneos.

PROBLEMA.—Un estudiante que tenia 754 reales se ha gastado 286. ¿Cuánto le ha quedado?

OTRO.—De un granero en que habia 7547 cahíces de trigo se han estraido 324 en una ocasion, 1200 en otra y 3427 en otra. ¿Cuánto ha quedado?

LECCION 5.ª

38. *Multiplicacion de un número por otro, es una operacion que tiene por objeto repetir uno de ellos tantas veces por sumando como unidades tiene el otro.*

39. Los números que se nos dan para multiplicar se llaman *factores* y el resultado *producto;* y así como en la multiplicacion de números abstractos es indiferente llamar multiplicando ó multiplicador al uno ó al otro factor, en la ~~de~~ los concretos se ha convenido en tomar como multiplicando al factor de la especie del producto y como multiplicador al otro.

40. TEOREMA 1.º—*El órden de los dos factores no altera el producto.*

Es decir que $4\times5=5\times4$.

Porque si formamos un cuadro con cinco renglones, cada uno de los cuales conste de la unidad repetida cuatro veces por sumando, de este modo,

$$
\begin{array}{c}
1+1+1+1 \\
1+1+1+1 \\
1+1+1+1 \\
1+1+1+1 \\
1+1+1+1
\end{array}
$$

observaremos que el mismo resultado produce sumar por columnas, que por renglones. En el 1.^{er} caso repetimos al 5 cuatro veces por sumando; y en el 2.° repetimos el 4 cinco veces. Luego $4\times5=5\times4$.

41. En la multiplicacion pueden distinguirse cuatro casos: 1.° Multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de ceros. 2.° Multiplicar dos números de una sola cifra. 3.° Multiplicar un número de várias cifras por otro de una sola. 4.° Multiplicar dos números de várias cifras.

42. 1.^{er} CASO.—*Para multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de ceros, no hay mas que añadir á la derecha de dicho número tantos ceros cuantos sean los que acompañen á la unidad.*

Porque como el valor relativo de cada cifra depende del lugar que ocupa, por cada cero que se añada á su derecha se correrá cada cifra un lugar hácia la izquierda; y por tanto aumentará diez veces el valor de dicho número, ó lo que es lo mismo quedará multiplicado por diez.

Así $342\times100=34200$.

43. 2.° CASO.—*Para multiplicar un número de una cifra por otro tambien de una sola, bastaria segun la definicion* (38) *sumar al uno con-*

sigo mismo tantas veces como unidades tenga el otro. Así, $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Pero como la operacion sería de este modo muy prolija, puede abreviarse sabiendo de memoria la tabla de multiplicar.

44. La tabla de multiplicar llamada *Pitagórica* por haber sido Pitágoras su inventor, se forma del modo siguiente:

Las nueve primeras cifras significativas puestas por su órden, forman el renglon superior. El segundo renglon se forma sumando consigo misma cada una de las cifras del primero. Sumado del mismo modo el primer renglon con el segundo produce el tercero; y en general cada renglon se forma sumando del modo indicado el primero con el último que se formó.

La tabla así dispuesta presenta el aspecto siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para hallar por medio de ella un producto de dos factores, se busca el uno de ellos en el renglon superior y el otro en la primera columna de la izquierda; y en la casilla donde se encuentre la columna vertical del un factor con el renglon horizontal del otro, se hallará el producto que se busca.

LECCION 6.ª

45. 3.er CASO.—*Para multiplicar un número de várias cifras por otro de una sola, se toma ésta como multiplicador, y se la multiplica por*

cada una de las cifras del multiplicando, principiando por las unidades de órden inferior para que si de alguna de estas multiplicaciones parciales resultan unidades del órden siguiente, podamos agregarlas al producto que corresponda.

Porque al verificar la operacion de esta manera no hacemos mas que ejecutar tantas multiplicaciones parciales, cuantos son los órdenes de unidades del multiplicando. Ahora bien; si al multiplicar las unidades del multiplicando por el multiplicador, nos resultan tan solo unidades, las pondremos en el producto; pero si nos resultan unidades y decenas, escribiremos las unidades y nos reservaremos las decenas para añadirlas á las que resulten del producto de las del multiplicando por la cifra del multiplicador; y si á su vez en esta segunda multiplicacion parcial resultaren decenas y centenas, pondremos tan solo las decenas y guardaremos las centenas para añadirlas á las del producto parcial siguiente, y así sucesivamente.

La operacion se plantea y resuelve del modo siguiente:

$$\textit{Factores}\left\{\begin{array}{rl} 754308 & \textit{multiplicando} \\ \times\quad 7 & \textit{multiplicador} \\ \hline 5280156 & \textit{producto} \end{array}\right.$$

46. 4.° CASO.—*Para multiplicar dos números de várias cifras, se coloca el multiplicador debajo del multiplicando y se multiplica cada cifra de aquel por todas las de éste; los productos que resultan de todas estas multiplicaciones se lla-*

*

man productos parciales y la primera cifra de la derecha de cada uno de ellos se coloca debajo de la del multiplicador que sirvió para formarle. Sumados luego estos productos parciales resulta el producto total.

Porque al proceder de este modo verificamos tantas multiplicaciones parciales cuantos son los órdenes de unidades del multiplicador; y si bien la primera cifra del primer producto parcial corresponderá al órden de las unidades como resultado que es de multiplicar unidades por unidades, la primera cifra del segundo producto parcial corresponderá á las decenas por ser resultado de multiplicar las decenas del multiplicador por las unidades del multiplicando; y por esta razon la colocamos debajo de las decenas del primer producto parcial, ó lo que es igual debajo de la segunda cifra del multiplicador que es la que nos ha servido para formar este segundo producto parcial. Lo mismo puede decirse de todos los demás.

La operacion se plantea y ejecuta del modo siguiente:

$$\begin{array}{rl} 43572 & \textit{multiplicando} \\ \times\ 324 & \textit{multiplicador} \\ \hline \left.\begin{array}{r} 174288 \\ 87144 \\ 130716 \end{array}\right\} & \textit{productos parciales} \\ \hline 14117328 & \textit{producto total} \end{array}$$

47. *La prueba de la multiplicacion se verifica*

repitiendo la operacion de modo que se invierta el órden de los factores, ó sea tomando como multiplicador lo que antes era multiplicando y recíprocamente; *y el resultado tiene que ser el mismo.*

Porque el órden de los factores no altera el producto. (40)

48. TEOREMA 2.°—*El producto de vários factores no varía alterando el órden de estos.*

Porque habiendo quedado demostrado cuando solo eran dos los factores (40) tampoco variará cuando son más de dos por cuanto podremos ir cambiando su órden de dos en dos. Así, $3\times4\times2=4\times3\times2=3\times2\times4$.

49. Por lo tanto; *para multiplicar un producto de vários factores por un entero, basta multiplicarle por uno de ellos.*

Porque en este caso á dicho número se le puede considerar como un nuevo factor. Asi, $(4\times2)\times3=4\times2\times3$ ó tambien $4\times3\times2$. (48)

50. La multiplicacion puede abreviarse en los casos siguientes:

1.° *Cuando el uno ó los dos factores terminan en ceros, se prescinde de ellos, y luego se añaden al producto tantos cuantos habia en los dos factores.*

Así, $22000\times3400=74800000$.

Porque todo número terminado en ceros puede descomponerse en dos factores de los cuales el uno estará formado por las cifras significativas, y el otro por la unidad seguida de los ceros que lleve dicho número; y por consiguiente bastará multiplicarle por el primero de estos dos factores, y luego añadirle los ceros que acompañen al segundo. (42)

Así, $43\times300=43\times3\times100$.

2.° Si en el multiplicador hubiere algun cero entre las cifras significativas, tambien podrá abreviarse la operacion dejando de multiplicarle, pero teniendo cuidado siempre de colocar la primera cifra del siguiente producto parcial debajo de la del multiplicador que ha de formarle.

51. *Múltiplo de un número, es el producto que resulta de multiplicarle por un entero.*

Si este entero es *dos*, el producto se llamará *duplo;* si es *tres*, *triplo;* si *cuatro*, *cuádruplo*, y así sucesivamente, pero pudiéndosele dar tambien en estos casos el nombre de *múltiplo*.

52. *Potencia de un número, es el producto de tomarlo várias veces por factor.*

Esponente, es un número pequeño que se coloca en la parte superior de la derecha de la cantidad á la que afecta, é indica el grado de la potencia, ó sea el número de veces que la cantidad se ha de tomar por factor.

A la potencia de segundo grado se la dá el nombre de *cuadrado*.

A la de tercero se la llama *cubo*.

Desde la de cuarto grado en adelante se las llama, *cuarta potencia*, *quinta potencia*, etc.

Así, por ejemplo, $4.^2$ se lee: *cuatro elevado al cuadrado*, é indica que el cuatro se ha de tomar dos veces por factor, ó lo que es igual, se ha de multiplicar por sí mismo.

De manera que $4.^2=4\times4=16$.

La primera potencia de un número es el mismo número.

Una potencia cualquiera de la unidad es la misma unidad.

53. La multiplicacion de concretos se verifica como la de los abstractos, y los problemas más comunes que en ella ocurren, son:

1.° *Conocido el valor de una unidad, determinar el de un número cualquiera de unidades de la misma especie.*

2.° *Reducir unidades de especie superior á inferior.*

En el primer caso debe tomarse como multiplicando el número de la misma especie que el producto. (39)

Para resolver el segundo, se multiplican las unidades de especie superior, por el número de veces que cada una de ellas contiene á la inferior inmediata, repítese lo mismo con el resultado, y así se continúa hasta llegar á la especie que se quiere determinar.

PROBLEMAS.—1.° Cuánto valen 2527 arrobas de garbanzos, á 64 rs. arroba?

2.° Reducir 4 años á horas.

LECCION 7.ª

54. *Division es una operacion cuyo objeto es determinar un factor por medio del producto y el otro factor.*

El producto que se nos da se llama *dividendo,* el factor conocido *divisor* y el que tratamos de determinar *cociente*.

Como se vé *la division es una operacion contraria de la multiplicacion.*

55. De modo que, segun esto, para dividir un número por otro, tendremos que hacer al uno tantas veces menor como unidades tenga el otro.

Porque en la multiplicacion se verifica lo contrario.

56. *Llamamos á la division exacta, cuando el dividendo contiene un número exacto de veces al divisor*, *é inexacta cuando sucede lo contrario.*

57. De manera que en la inexacta, despues de restar al divisor del dividendo cuantas veces es posible, queda una cantidad que por ser menor que el divisor no nos puede servir para otra sustraccion, y á esta cantidad la llamamos *residuo.*

58. *En la division exacta, el dividendo es igual al cociente multiplicado por el divisor.*

Porque el dividendo es un producto, y el cociente y divisor sus factores. (54)

En la inexacta, el dividendo es igual al cociente multiplicado por el divisor, mas el residuo. (57)

En la division se pueden distinguir dos casos: 1.º Que el divisor y el cociente tengan una sola cifra. 2.º Que el divisor ó cociente ó ambos tengan más de una.

59. 1.er CASO. — *Para verificar la division cuando el divisor y el cociente tienen una sola cifra, se busca una que multiplicada por el divisor, produzca el dividendo; y ésta será la cifra del cociente, y si no la hay, por no ser exacta la*

division, se busca la inmediata inferior restando en este caso del dividendo, el producto del cociente entero por el divisor; y el resto de esta sustraccion formará el resíduo. (54 y 57)

Así, 56:7=8 porque 8×7=56 y 58:7=8 mas dos de resíduo porque 8×7+2=58.

60. El resíduo puede expresarse por medio de una division indicada en la que el dividendo es dicho resíduo y el divisor el mismo de la division.

Así en el ejemplo anterior tendremos, 58 : 7= 8+$^2/_7$

LECCION 8.ª

61. 2.º CASO.—*Cuando el divisor, el cociente ó ambos tienen más de una cifra, se ejecuta la operacion del modo siguiente: Se toman de la izquierda del dividendo las cifras que se necesiten para que formen un número igual ó mayor que el divisor. Estas cifras forman el primer dividendo parcial, el cual dividido por el divisor, nos da la primera cifra del cociente. Se multiplica esta cifra por el divisor, y el producto se resta del primer dividendo parcial; el resto de esta sustraccion, debe ser menor que el divisor, pues si sucede lo contrario, es prueba de que la cifra del cociente es menor que la verdadera. A la derecha de dicho resto se agrega la cifra siguiente del dividendo, y el número que resulte será el segundo dividendo parcial, el cual se divide por el divisor y así se determina la segunda*

cifra del cociente; la que multiplicada por el divisor, se resta del segundo dividendo parcial á cuya derecha se baja la cifra siguiente del dividendo, y así se continúa hasta que no queden más cifras del dividendo que bajar. Si alguna de estas divisiones es imposible por ser el dividendo parcial menor que el divisor, se pone cero en el cociente y se baja la cifra siguiente del dividendo.

Porque al ejecutar así la operacion, discurrimos del modo siguiente: Si queremos saber antes de dar principio cuántas cifras tendrá el cociente, multiplicaremos el divisor por diez, ciento ó mil hasta que nos dé un número mayor que el dividendo; supongamos para mayor claridad que nos lo dá al multiplicarlo por ciento; en este caso el cociente se hallará comprendido entre diez y ciento y por lo tanto tendrá dos cifras. Ahora bien; en este supuesto el dividendo será un producto de una multiplicacion en la que el multiplicador tiene dos cifras; y por lo tanto encontraremos en dicho dividendo la suma de dos productos parciales, resultado de multiplicar cada cifra del cociente por el divisor. Pero como la primera cifra del cociente en el caso que estudiamos debe pertenecer al órden de las decenas la buscaremos dividiendo las decenas del dividendo por el divisor. Hallada la cifra de las decenas del cociente la multiplicamos por el divisor y este producto que será un número exacto de decenas lo restaremos de las antedichas decenas del dividendo. De este modo descartamos al dividendo de uno de los productos parciales que contenía, puesto que era el que resultó de multiplicar las decenas del multiplicador (cociente) por el multiplicando (divisor.) Si á la derecha del resto de esta sustraccion bajamos las unidades del dividendo, formaremos el segundo dividendo parcial que es un número exacto de unidades y por lo tanto al dividirlo por el divisor nos dará la cifra de las unidades del cociente; y como en el segundo dividendo parcial se halla comprendido el otro producto parcial, resultado de multiplicar las unidades del multiplicador por el multiplicando, tenemos ahora que multiplicar las unidades del cociente (multiplicador) por el divisor (multiplicando) y el producto lo restaremos de dicho segundo dividendo parcial. Con esto terminaremos la operacion, y si el resto de esta sustraccion es cero la division será exacta y en el caso contrario será inexacta (57) y este número que será el resíduo nos indicará que no hay ningun número entero que multiplicado por el divisor produzca el dividendo.

La operacion tal como la hemos esplicado se plantea y resuelve del modo siguiente:

Dividendo.	74532	3243	*divisor*
	6486	22	*cociente*
2.° dividendo parcial	9672		
	6486		
	3186	*resíduo.*	

62. Puede sin embargo abreviarse la operacion ejecutando las sustracciones sin escribir los productos parciales.

La operacion anterior verificada de este modo se planteará y resolverá de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 74532 & 3243 \\ \cline{2-2} 9672 & 22 \\ 3186 & \end{array}$$

63. *Para determinar una cifra del cociente cuando el divisor tiene várias, se calcula á cuántas cabe tomando tan solo la primera del divisor y la primera ó las dos primeras del dividendo y se rebaja una unidad por si al verificar la multiplicacion de las unidades inferiores resultare alguna de las superiores. Esta cifra será mayor que la verdadera, si no puede verificarse la sustraccion; y será menor, cuando resulte un resto mayor que el divisor.*

Porque si el resíduo fuere mayor que el divisor nos indicaria que se podia restar del dividendo una vez más el divisor y por tanto que la cifra del cociente debia tener una unidad más.

64. *Cuando el dividendo termina en ceros y el divisor es la unidad seguida de ellos, la operacion quedará reducida á suprimir á la derecha del dividendo tantos ceros como lleve el divisor.*

Porque por cada cero que suprimimos en el dividendo lo hacemos diez veces menor por correrse todas sus cifras un lugar hácia la derecha.

65. Teorema 1.º—*Si el dividendo es un producto de vários factores, basta dividir uno de ellos por el divisor y multiplicar el cociente por el producto de los demás factores.*

Así, $(3\times5\times8):4=(8:4)\times3\times5$.

Porque el cociente así obtenido multiplicado por el divisor produce el dividendo dado.

66. Teorema 2.°—*Si al dividendo y divisor se les multiplica ó divide por un mismo número, el cociente no se altera.*

Porque al multiplicar el dividendo ó dividir el divisor por dicho número, queda el cociente multiplicado por él, y al dividir el dividendo ó multiplicar el divisor por el número indicado, queda el cociente dividido por el mismo. Luego tanto en el uno como en el otro caso, el cociente queda al propio tiempo multiplicado y dividido por un mismo número y por tanto lo mismo que antes.

67. Corolario.—*Si el dividendo y divisor terminan en ceros, puede abreviarse la operacion suprimiendo en ambos términos tantos ceros cuantos haya en el que lleve ménos.*

Así, 32000:700=320:7.

Porque así dividimos ambos términos por un mismo número que es la unidad seguida de los ceros suprimidos.

68. *La division se prueba multiplicando el cociente por el divisor. El producto más el residuo si le hay, debe ser igual al dividendo.*

Porque el dividendo es un producto y el cociente y el divisor los factores de donde provino.

69. La division de los concretos se verifica lo mismo que la de los abstractos, advirtiendo que cuando los términos son de naturaleza diferente, el cociente debe ser de la especie del dividendo porque se supone que debió ser el multiplicando. Por lo demás los problemas más generales son los contrarios de la multiplicacion, á saber:

1.° *Conocido el valor de un número cualquiera de unidades, determinar el de una de la misma especie.*

2.° *Reducir unidades de especie inferior á superior.*

PROBLEMA.—3242 arrobas de arroz costaron 247528 rs. ¿Cuánto vale la arroba?

OTRO.—378549037 horas ¿cuántos años componen?

LECCION 9.ª

70. *Quebrado es la espresion que representa una* ó *várias unidades fraccionarias iguales.*

Unidades fraccionarias, son las partes iguales en que se considera dividida la unidad entera.

71 *Todo quebrado se compone de dos términos de los cuales el uno, se llama numerador é indica el número de unidades fraccionarias que se toman; y el otro denominador y espresa las partes en que se considera dividida la unidad entera.*

72. *Para espresar un quebrado por escrito, se escribe el numerador y debajo el denominador separado de aquel por una línea horizontal.*

Para leerlo, se espresa primero el numerador con los cardinales uno, dos, tres, etc., *y luego el denominador con los partitivos medio tercio,* et cétera, *y si pasa de diez, con los cardinales terminados en avos.*

Así, $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{13}$, se leen dos tercios, doce treceavos.

73. Teorema 1.º—*Todo quebrado es una division indicada.*

Por lo tanto, toda division puede ponerse en forma de quebrado cuyo numerador sea el dividendo y cuyo denominador sea el divisor.

Porque el numerador indica las partes que se toman, lo mismo que el dividendo y el denominador el número de unidades fraccionarias entre las que se ha de repartir el numerador lo mismo que el divisor.

74. *Los quebrados se dividen en propios é impropios.*

Quebrado propio es el que tiene el numerador menor que el denominador. Como $\frac{4}{5}$

Quebrado impropio es el que tiene el numerador igual ó mayor que el denominador. Como $\frac{4}{4}$ y $\frac{5}{3}$

Al primero se le llama propio, porque propiamente es un quebrado ó fraccion; y al segundo impropio, porque impropiamente se le da el nombre de fraccion, puesto que es igual ó mayor que la unidad entera.

75. *Para hallar los enteros que contiene un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador.*

Porque todo quebrado es una division indicada. (73) Asi $\frac{8}{4}=8:4=2$

Si esta division es inexacta, escribiremos el cociente como entero y luego un quebrado cuyo numerador sea el resíduo y su denominador el mismo del quebrado, ó sea el divisor. (60) Así $\frac{10}{4} = 10 : 4 = 2\frac{2}{4}$ En este caso resulta un número misto, que es el que consta de entero y quebrado. (7)

76. Como consecuencia de lo anterior se desprende, que *para poner un entero en forma de quebrado cuyo denominador se nos dé, no hay mas que multiplicar el entero por el denominador, y el producto será el numerador.*

Porque así formamos el numerador (dividendo) multiplicando el cociente (entero) por el divisor (denominador). (57)

Así, si ponemos ocho enteros en forma de quebrado cuyo denominador sea cinco, resultará:

$$8 = \frac{40}{5} \text{ porque } 8 \times 5 = 40.$$

Recíprocamente. *Para reducir un número misto á quebrado, se multiplica el entero por el denominador, se agrega el numerador, y al resultado se pone el denominador del quebrado.*

Porque así formamos el numerador ó sea el dividendo, multiplicando el cociente por el divisor y agregando el resíduo.

$$\text{Así } 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

77. *Tambien se puede poner á un entero por denominador la unidad.*

Porque todo número dividido por la unidad, es igual al mismo número.

78. *Para poner la unidad en forma de quebrado, se forma uno que tenga sus dos términos iguales.*

Porque todo número dividido por sí mismo, es igual á la unidad.

LECCION 10.

---

79. *Un quebrado aumenta ó disminuye, como aumenta ó disminuye su numerador; ó bien como disminuye ó aumenta su denominador.*

Porque un quebrado será tanto mayor, cuanto mayor sea el número de unidades fraccionarias que se tomen y cuanto mayores sean estas unidades: ó lo que es lo mismo, cuanto menor sea el número de ellas en que se haya dividido á la unidad entera.

80. De donde se deduce; que *de dos quebrados de igual denominador, es mayor el de mayor numerador; y de otros dos de igual numerador, es mayor el de menor denominador.*

81. TEOREMA 2.º—*Si á los dos términos de un quebrado se les multiplica ó divide por un mismo número, el quebrado no se altera.*

Porque al multiplicar el numerador, queda multiplicado el quebrado por dicho número; y al multiplicar el denominador, queda dividido por el mismo.

O de otro modo: Porque todo quebrado, es una division indicada.

82. *La reduccion de quebrados á un comun*

denominador, es una operacion que tiene por objeto convertirlos en otros de igual valor pero que tengan iguales denominadores.

83. *Para reducir várias quebrados á un comun denominador, se multiplica cada numerador por el producto de todos los denominadores menos por el suyo. Estos productos forman los numeradores de los nuevos quebrados, cuyo denominador comun será el producto de todos los denominadores.*

Porque de este modo resultarán quebrados de igual valor, puesto que multiplicamos los dos términos de cada uno por el mismo número; y tendrán los denominadores iguales, porque para todos es el producto de los denominadores.

La operacion se ejecuta del modo siguiente:

$$\frac{3}{4}\ \frac{4}{3}\ \frac{7}{5} = \frac{45}{60}\ \frac{80}{60}\ \frac{84}{60}$$

LECCION 11.

84. *Simplificar un quebrado, es reducirlo á otro equivalente de términos menores.*

85. *Para simplificar un quebrado, se dividen sus dos términos por dos, todas las veces que se pueda; luego por tres, por cinco y así sucesivamente; advirtiendo que para esto, es preciso que los dos términos sean divisibles por el mismo número.*

Porque así nos resultará un quebrado de menores términos que el dado, y de igual valor puesto que hemos dividido sus dos términos por un mismo número. (81) Así $\frac{30}{45}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

Para facilitar la operacion deben tenerse presentes las reglas siguientes:

86. *Si un número divide exactamente á vários sumandos, divide tambien á la suma.*

Porque considerados dichos sumandos como dividendos de una division exacta cuyo divisor es el número dado, será cada uno igual al cociente multiplicado por el divisor; y la suma al producto del divisor por la suma de los cocientes.

Así si 4 divide exactamente á 8 y á 16 dividirá tambien á 24 que es su suma.

87. *Si un número divide exactamente á otro, dividirá tambien á cualquiera de sus múltiplos.*

Porque el múltiplo de un número es este número repetido várias veces por sumando; y como estos sumandos son divisibles por dicho número tambien lo será la suma que es dicho múltiplo.

88. *Un número es divisible por 2, si termina en cero ó cifra par.*

Porque si termina en cero es múltiplo de 10 y 10 lo es de 2 (87) y si acaba en cifra par, puede descomponerse en dos sumandos de los cuales, el primero estará formado por las decenas y el segundo por las unidades. El primero será divisible por 2 por terminar en cero, el segundo tambien lo será por ser una cifra par, luego lo será igualmente la suma de ellos, que es el número dado. (86)

89. *Un número es divisible por 5 si termina en cero ó en cinco.*

Porque aquí podemos dar la misma demostracion que en el caso anterior.

90. *Un número es divisible por 3, cuando sumados los valores absolutos de sus cifras, nos dan 3 ó uno de sus múltiplos.*

Porque á dicho número lo podemos considerar dividido en dos sumandos de los cuales, el uno está formado por un múltiplo de 9 y el otro por la suma de los valores absolutos de sus cifras. El primero de estos sumandos, como divisible por 9, lo será tambien por 3 y el segundo lo es por hipótesis, luego tambien lo será la suma de ellos, que es el número dado.

Así 432 será divisible por 3 porque $432=(99\times4)+(9\times3)+9$

91. *Un número es divisible por 9, cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es 9 ó uno de sus múltiplos.*

Se demuestra de un modo análogo al anterior.

92. *Un número es divisible por 11, cuando la suma de las cifras de lugar impar menos la de las de lugar par, es cero ó un múltiplo de 11.*

Porque al dividir la unidad seguida de ceros por 11 nos da de resíduo 1, 10, 1, 10, etc. De modo que al dividir dicha unidad seguida de un número par de ceros por 11, queda de resíduo 1 y si va seguida de un número impar de ceros el resíduo es 10, ó lo que es lo mismo 11—1. Pero si en lugar de ser la unidad fuese otro número el seguido de ceros, al dividirlo por 11 nos daria de resíduo, ó dicho número si le acompañaba un número par de ceros, ó el mismo número con signo menos si el número de ceros era impar.

Luego toda cifra seguida de un número par de ceros es igual á un múltiplo de 11 mas dicha cifra, y si va seguida de un número impar de ceros será igual á un múltiplo de 11 menos la misma cifra. Por consiguiente al número dado lo podemos descomponer en dos sumandos de los cuales el primero es un múltiplo de 11 y por lo tanto divisible por él; y el segundo es la suma de las cifras de lugar impar menos la de las de lugar par, el cual tambien es divisible por 11 por hipótesis; luego tambien lo será la suma. Si este segundo sumando es cero, tambien será el número divisible por 11; puesto que entonces quedará en él tan sólo el primero de los dos sumandos que como queda dicho es un múltiplo de 11. Así 35794 será divisible por 11.

93. Con las anteriores reglas puede abreviarse la simplificacion de quebrados, pues nos evitan hacer várias divisiones sucesivas.

94. *Se llama quebrado irreducible, aquel que no se puede simplificar por hallarse reducido á su mas mínima espresion.*

95. Con los quebrados pueden ejecutarse las mismas operaciones que con los enteros á saber: Adicion, Sustraccion, Multiplicacion y Division.

LECCION 12.

96. En la adicion de los quebrados se distinguen dos casos: 1.° Sumar quebrados. 2.° Sumar números mistos.

97. 1.^{er} CASO.—*Para sumar vários quebrados que tengan igual denominador, se suman los numeradores y á la suma se la pone por denominador el denominador comun. Si no tienen un denominador comun, se reducen primeramente á él.*

Porque para la adicion, los sumandos deben ser homogéneos; y á los quebrados de un mismo denominador se les puede considerar como tales de la especie de dicho denominador.

98. 2.° CASO.—*Para sumar números mistos se reducen á quebrados, y queda este caso reducido al anterior; ó tambien se pueden sumar los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros, principiando por aquellos para que si de su suma resulta algun entero, se pueda añadir á la suma de estos.*

Como ejemplo del primer caso se puede presentar el siguiente: $\frac{3}{4}+\frac{7}{5}+\frac{4}{2}=\frac{30}{40}+\frac{56}{40}+\frac{80}{40}=\frac{166}{40}=4\frac{6}{40}$ y como ejemplo del segundo véase el que sigue: $3\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}+\frac{6}{8}=\frac{19}{5}+\frac{13}{5}+\frac{38}{5}=\frac{70}{5}=14$ ó bien

$$\left.\begin{array}{r} 3\frac{4}{5} \\ 2\frac{3}{5} \\ 6\frac{8}{5} \end{array}\right\} \textit{sumandos}$$

$$\overline{14 \;\; » \;\; \textit{suma.}}$$

PROBLEMA.—Un comerciante compra tres partidas de café: la primera de $27\frac{1}{3}$ arrobas; la segunda de $14\frac{3}{5}$, y la tercera de $8\frac{5}{6}$: ¿cuántas arrobas ha comprado?

LECCION 13.

99. En la sustraccion de quebrados se distinguen tres casos: 1.° Restar un quebrado de otro. 2.° Restar un quebrado de un entero. Y 3.° Restar números mistos.

100. 1.er CASO.—*Para restar un quebrado de otro, se reducen á un comun denominador (si no lo tienen) y luego se restan los numeradores poniendo al resto el denominador comun.*

Porque cuando los denominadores son iguales, pueden considerarse los quebrados como números homogéneos de la especie del denominador. Así $\frac{6}{2}-\frac{5}{3}=\frac{18}{6}-\frac{10}{6}=\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$

101. 2.° CASO.—*Para restar un quebrado de un entero, se toman del entero del minuendo las unidades necesarias para formar un quebrado mayor que el sustraendo pero de igual denominador, y se verifica la sustraccion entre estos dos quebrados.*

Así $5-\frac{3}{5}=4\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=4\frac{2}{5}$

102. 3.er CASO.—*Para restar números mistos, se reducen á quebrados; ó tambien se resta el*

quebrado del quebrado y el entero del entero, dando principio porl os quebrados, para que si el quebrado del sustraendo fuere mayor que el del minuendo, se puedan tomar del entero de este las unidades necesarias, que agregadas á su quebrado lo hagan mayor que el del sustraendo.

Así $3\frac{2}{5} - 2\frac{3}{5} = \frac{17}{5} - \frac{13}{5} = \frac{4}{5}$

ó bien $3\frac{2}{5}$ *minuendo*

$-2\frac{3}{5}$ *sustraendo*

$\frac{4}{5}$ *resto.*

Problema.—Un comerciante tenia $32\frac{4}{5}$ arrobas de arroz y vendió $17\frac{2}{5}$ arrobas: ¿cuánto le queda?

LECCION 14.

103. En la multiplicacion de los quebrados pueden ocurrir tres casos: 1.° Multiplicar dos quebrados. 2.° Multiplicar un entero por un quebrado. 3.° Multiplicar números mistos.

104. 1.er caso.-*Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores y el producto se pone por numerador; y luego se multiplican los denominadores, y el producto forma el denominador del nuevo quebrado.*

Porque de este modo hacemos al un quebrado tantas veces mayor, como unidades tiene el numerador del otro quebrado; y luego tantas veces menor, como unidades tiene el denominador del mismo. (79)

Así $\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$

105. De lo anterior se desprende, que *si se multiplica un quebrado por el mismo invertido, el producto es igual á la unidad entera.*

Porque el producto será un quebrado que tendrá sus dos términos iguales.

Así $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

106. *Si son más de dos los quebrados que se han de multiplicar, se multiplican todos los numeradores, luego todos los denominadores, y con los dos productos se forma un nuevo quebrado.*

TEOREMA.—*El órden de factores quebrados no altera el producto.*

Porque este producto está formado por el de todos los numeradores y el de todos los denominadores; y sabido es que estos dos productos no se alteran por el órden de colocacion de sus factores. (48)

107. *Llamamos quebrado de quebrado, á la espresion que indica una ó várias partes de un quebrado.*

Así $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ es un quebrado de quebrado.

108. *Para reducir un quebrado de quebrado á fraccion ordinaria, se multiplican los dos quebrados de que aquel consta.*

Porque esta operacion no es mas que una multiplicacion de quebrados; puesto que el uno de ellos nos indica las veces ó fracciones de vez que el otro se ha de repetir por sumando.

109. 2.° CASO. —*Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador; ó tambien puede dividirse el denominador por el entero.*

Porque en ambos casos se hace el quebrado tantas veces mayor, cuantas son las unidades del entero. (79)

Así $4 \times \frac{3}{16} = \frac{12}{16}$ ó bien $4 \times \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$

110. 3.^{er} CASO. —*Para multiplicar números mistos, se reducen á quebrados y se multiplican estos.*

PROBLEMA.—Cuánto valen $14\frac{1}{3}$ arrobas de arroz á $4\frac{3}{5}$ duros la arroba?

LECCION 15.

111. En la division de quebrados se distinguen cuatro casos: 1.° Dividir un quebrado por otro. 2.° Un quebrado por un entero. 3.° Un entero por un quebrado. 4.° Dividir números mistos.

112. 1.^{er} CASO.—*Para dividir dos quebrados, se multiplica el numerador del primero por el denominador del segundo, y el numerador de éste, por el denominador de aquel. El primer producto forma el numerador; y el segundo el denominador del cociente.*

Porque al hacerlo de este modo, multiplicamos al dividendo por el divisor invertido; y por lo tanto el cociente multiplicado por el divisor nos dará el dividendo multiplicado por la unidad, ó lo que es lo mismo el dividendo.

Así $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{21}{20}$

113. 2.° CASO.—*Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el denominador; ó bien se divide el numerador por el entero.*

Porque de los dos modos se hace el quebrado tantas veces menor como unidades tiene el entero. (79)

114. 3.er CASO.—*Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, y este producto forma el numerador del cociente cuyo denominador será el numerador del quebrado.*

Porque este procedimiento da el mismo resultado que si pusiéramos al entero por denominador la unidad.

115. 4.° CASO.—*Para dividir números mistos, se reducen á quebrados y de este modo se convierte este caso en el primero.*

LECCION 16.

116. *Valuacion de un quebrado, es una operacion que tiene por objeto hallar su valor en unidades de especie inferior.*

117. *Para valuar un quebrado, se multiplica el numerador por el número de veces que su es-*

pecie contiene á la inmediata inferior; este producto se divide por el denominador; el cociente representa las unidades de esta especie inmediata inferior que contenia el quebrado; si queda resíduo, se multiplica por las veces que la especie á que se refiere contiene á la inferior inmediata, y el producto vuelve á dividirse por el mismo denominador; y así se continúa hasta obtener cociente exacto, ó llegar á la especie ínfima.

Porque uno de los problemas de la multiplicacion vimos que era reducir unidades de especie superior á inferior, y al ejecutar esta operacion no hacemos mas, que multiplicar el quebrado que se nos da por un entero que representa las veces que la especie del quebrado contiene á la inferior inmediata; repitiendo esta operacion tantas veces como especies distintas hay.

Así para valuar el quebrado $\frac{3}{7}$ de dia planteamos y ejecutamos la operacion del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r l}
3 & \\
\times\ 24 & \\
\hline
72 & |\ 7 \\
2 & 10\text{ h.}^{s}\ 17\text{ m.}^{s}\ 8\ ^{4}/_{7}\text{ seg.}^{s} \\
\times\ 60 & \\
\hline
120 & \\
50 & \\
1 & \\
\times\ 60 & \\
\hline
60 & \\
4 &
\end{array}
$$

LECCION 17.

118. *Llamamos fraccion decimal, á la espresion que representa una ó várias unidades decimales.*

Unidad decimal es la que lleva por denominador la unidad seguida de ceros.

119. Si el denominador de una fraccion decimal es 10, las unidades decimales se llaman *décimas*. Si es 100 *centésimas*, si 1000 *milésimas*, si 10000 *diez milésimas* y *así sucesivamente*.

120. *En el sistema decimal, cada unidad de un órden cualquiera se compone de diez unidades del órden inferior inmediato.*

Así un entero tiene 10 décimas, una décima diez centésimas, etc.

121. *Número misto, es el que se compone de un entero y una fraccion decimal.*

122. *Para escribir los decimales, se sigue la misma regla que en los enteros, advirtiendo tan solo, que el signo que separa á los enteros de los decimales es una coma.*

De modo que desde la coma hácia la izquierda se encuentran los enteros; y si no los hay se pone un cero, y desde la coma hácia la derecha se colocan las cifras decimales, poniendo *en el primer lugar, las décimas; en el segundo las centésimas, en el tercero las milésimas, supliendo con ceros los lugares que queden vacantes por la falta de cifras significativas de algun órden decimal.*

Así si queremos espresar 72 enteros, 5 décimas, 3 centésimas y 8 milésimas escribiremos: 72'538.

123. *Para leer una cantidad decimal ya escrita, se espresan primero los enteros si los hay, y luego los decimales como si fueran enteros, pero espresando al fin el órden á que pertenece la última cifra decimal.*

Así el número 72'538 se lee: 72 enteros 538 milésimas.

124. De lo anterior se deduce que *el valor relativo de las cifras decimales depende del lugar que ocupan respecto á la coma.* Y por tanto

125. *No se altera un número decimal, añadiendo ó quitando á su derecha todos los ceros que se quiera.*

Porque con esto no varía el lugar que las cifras decimales ocupan respecto á la coma.

Así 0'75 = 0'75000.

Igualmente puede ponerse un entero en forma de decimal colocando detrás de él una coma y á continuacion todos los ceros que se quieran.

Así 8 = 8'0000.

126. *Si corremos la coma hácia la derecha, de un número decimal, aumentará éste 10, 100, 1000, etc., veces segun que la corramos uno, dos ó más lugares, y disminuirá 10, 100, 1000, etc., veces si la corremos uno, dos, tres ó más lugares hácia la izquierda.*

Porque el valor relativo de las cifras decimales depende del lugar que ocupan respecto á la coma.

127. *Si se quita la coma á un número decimal*

queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales habia.

Porque se supone que se ha corrido la coma hácia la derecha tantos lugares cuantas eran las cifras decimales.

LECCION 18.

Con los quebrados decimales pueden ejecutarse las mismas operaciones que con las fracciones ordinarias, á saber: Adicion, Sustraccion, Multiplicacion, Division y Valuacion.

128. *La adicion de los decimales se plantea colocando, para evitar equivocaciones, los sumandos unos debajo de otros de modo que las comas formen columna vertical; y se ejecuta la operacion lo mismo que en los enteros colocando la coma en la suma, en el lugar correspondiente; de modo que forme columna con las de los sumandos.*

Porque con dicha colocacion se corresponden las unidades del mismo órden y en la suma verificada del modo indicado se hallan comprendidas todas las unidades de los órdenes de los sumandos.

129. *La sustraccion de los decimales se plantea colocando, para mayor comodidad, el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las comas, y se ejecuta la operacion lo mismo que la de los enteros, poniendo la coma en el resto, debajo de la de los términos. Si en uno de estos hubiere ménos cifras decimales*

que en el otro, se suplen con ceros colocados á la derecha de éste, lo cual no altera á un número decimal. (125)

Así la adicion y sustraccion de decimales se plantearán y resolverán como sigue:

$$\begin{array}{r} 3'204 \\ +\ 25'073 \\ +\ 0'82 \\ \hline 29'097 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4'728 \\ -\ 2'030 \\ \hline 2'698 \end{array}$$

LECCION 19.

En la multiplicacion de decimales se distinguen tres casos: 1.° Multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros. 2.° Multiplicar un decimal por un entero. 3.° Multiplicar dos decimales.

130. 1.er CASO.—*Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma tantos lugares hácia la derecha, como ceros acompañen á la unidad.*

Así 3'272×100=327'5

Porque por cada lugar que se corre la coma hácia la derecha, se hace el número 10 veces mayor, ó lo que es igual, se multiplica por 10. (126)

131. 2.° CASO.—*Para multiplicar un decimal por un entero, se ejecuta la operacion como si fueran números enteros; y luego se separan en el producto de derecha á izquierda con una coma, tantas cifras como decimales habia en el factor que las llevaba.*

$$\begin{array}{r} \text{Así } 32'475 \\ \times \quad 5 \\ \hline 162'375 \end{array}$$

Porque antes de poner la coma, resultaba un producto 10 veces mayor que el verdadero, por cada cifra decimal que considerábamos como entera; y por tanto para convertir aquel producto en el verdadero, se tiene que hacer 10 veces menor por cada una de las cifras decimales, lo cual se consigue colocando la coma del modo indicado. (126)

132. 3.^er^ CASO.—*Para multiplicar dos números decimales, se practica la operacion como si fuesen enteros y al producto se le separan con una coma de derecha á izquierda tantas cifras como decimales había entre los dos factores.*

Este caso se demuestra de un modo análogo al anterior.

La operacion se ejecuta de este modo:

$$\begin{array}{r} 32'\,75 \\ \times \quad 3'\,27 \\ \hline 229\,25 \\ 655\,0 \\ 9825 \\ \hline 107'09\,25 \end{array}$$

133. Si en alguna de las operaciones anteriores al correr la coma nos faltasen cifras para ello, se añaden los ceros necesarios teniendo cuidado, si es á la izquierda donde los añadimos,

de poner uno más para que delante de la coma ocupe el lugar de los enteros.

$$\begin{array}{lr} \text{Así} & 0'075 \\ \times & 0'006 \\ \hline & 0'000450 \end{array}$$

LECCION 20.

134. En la division de números decimales se distinguen tres casos: 1.° Dividir un decimal por la unidad seguida de ceros. 2.° Dividir un decimal por un entero. 3.° Dividir dos decimales.

135. 1.er CASO.—*Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma hácia la izquierda tantos lugares como ceros acompañen á la unidad, y si no hubiere bastantes cifras se suplen con ceros.*

Así 325'75 : 1000 = 0'32575.

Porque por cada lugar que se corre la coma hácia la izquierda, se hace el número diez veces menor y por lo tanto se divide por 10. (126)

136. 2.° CASO.—*Para dividir un decimal por un entero, se ejecuta la operacion como si fuesen enteros, pero teniendo cuidado de poner coma en el cociente al bajar la primera cifra decimal. Si el divisor es mayor que la parte entera del dividendo, se pone en el cociente cero y coma y se sigue la operacion.*

Porque al bajar la primera cifra decimal dividimos un número exacto de décimas por un número entero que es el divisor, luego la cifra del cociente debe pertenecer al órden de las décimas y por esto colocamos la coma en el cociente. La cifra siguiente de éste corresponderá al de las centésimas, como así debe suceder, por ser el siguiente dividendo parcial del órden de las centésimas y lo mismo podríamos decir de los demás órdenes decimales.

137. 3.er CASO.—*Cuando dividendo y divisor son decimales, se multiplican ambos términos por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor, con lo cual éste se convierte en entero, y queda este caso reducido al anterior, ó á dividir enteros.*

Porque con esta transformacion se consigue el resultado antedicho sin que se altere el cociente, pues se multiplican ambos términos por el mismo número.

Así 342'247 : 0'57 = 34224'7 : 57 y ejecutada la operacion indicada:

```
34224'7  | 57
         ------
000247    600'4
     9
```

LECCION 21.

138. *Si despues de ejecutada la division de decimales se quiere aproximar el cociente, se añade cero al resíduo y se sigue la operacion añadiendo luego nuevos ceros á los resíduos que vayan resultando hasta hallar cociente exacto; y si no hasta aproximarlo cuanto convenga.*

Porque esto es lo mismo que si se añaden estos ceros á la derecha del dividendo que como decimal que es, no se alterará. (125)

139. *Igualmente se puede aproximar por decimales el cociente de una division de enteros inexacta, añadiendo ceros á los resíduos que resulten, y coma en el cociente.*

Porque de este modo no se alterará la division, pues equivale el método indicado, á poner coma despues del dividendo y á continuacion de ella los ceros necesarios.

140. *El error que se comete tomando el cociente así aproximado como exacto, es menor que una de las unidades del órden ínfimo halladas en dicha aproximacion.*

Porque este error ó diferencia entre el cociente exacto y el hallado por la aproximacion está representado por un quebrado propio de la especie ínfima decimal formado por el resíduo como numerador y el divisor como denominador. (63)

Igualmente podemos abreviar la division de enteros, cuando el divisor termina en ceros, suprimiendo estos y separando con una coma en el dividendo tantas cifras de derecha á izquierda, cuantos sean los ceros tachados en el divisor.

Porque con esto dividimos ambos términos por un mismo número que es la unidad seguida de los ceros suprimidos.

Asi 32475 : 500 = 324' 75 : 5.

141. *Para valuar un quebrado decimal se le multiplica por el número de veces que su especie contiene á la inmediata inferior. Los enteros que resulten de esta multiplicacion forman las uni-*

dades de dicha especie inferior inmediata que el quebrado decimal contenia; las cifras decimales vuelven á multiplicarse por el número de veces que su especie contiene á la inmediata inferior; y así se continúa hasta llegar á la ínfima especie ó á un resultado entero.

Porque al verificarlo así se practica la misma operacion que para valuar quebrados ordinarios.

Así para valuar el quebrado decimal 0'76 dias ejecutaremos la operacion de este modo:

$$\begin{array}{r l}
0'76 & \textit{dias} \\
\times\ 24 & \\
\hline
304 & \\
152 & \\
\hline
18'24 & \textit{horas} \\
\times\ 60 & \\
\hline
14'40 & \textit{minutos} \\
\times\ 60 & \\
\hline
24'00 & \textit{segundos.}
\end{array}$$

Luego 0'76 dias = 18 horas, 14 minutos y 24 segundos.

LECCION 22.

142. *Número complejo, es el que consta de unidades de distinta especie, pero de la misma naturaleza.*

Antes de analizar las operaciones que se ejecutan con los números complejos que son las mismas que con los enteros, vamos á estudiar el modo de reducir un complejo á incomplejo de una especie que no sea la inferior.

143. *Para esto, se reduce primero á la especie inferior, del modo que vimos en la multiplicacion de enteros; y luego se divide el resultado por el número de veces que la especie inferior está contenida en la que se nos pide.*

Así para reducir 4 arrobas, 7 libras y 8 onzas á incomplejo de libra se hará lo siguiente:

$$
\begin{array}{r}
4 \textit{ arrobas} \\
\times\ 25 \textit{ libras} \\
\hline
100 \\
+\ \ 7 \\
\hline
107 \\
\times\ 16 \textit{ onzas} \\
\hline
642 \\
107 \\
\hline
1712 \\
+\ \ 8 \\
\hline
1720
\end{array}
$$

Luego $\frac{1720}{16}$ será el incomplejo de libra.

144. *Para sumar números complejos, se colocan para mayor claridad, los sumandos unos debajo de otros de manera que se correspondan las unidades de la misma especie. Colocados ya los sumandos se suman las unidades de especie inferior, y si de su suma resultan unidades de la especie superior inmediata, se reservan para*

agregarlas á la suma de estas; súmanse luego estas y se guardan para añadir á la siguiente especie las que de ella resulten, y así se continúa hasta sumar las unidades de especie superior.

Porque al seguir este método verificamos la adicion lo mismo que en los números enteros con la sola diferencia de no existir en los complejos una base constante que en los enteros es el número 10.

Así para sumar 45 arrobas, 3 libras, 7 onzas, con 7 arrobas, 18 libras, 12 onzas y con 20 libras, 15 onzas, ejecutaremos la operacion de este modo:

	45	*arrobas*	3	*libras*	7	*onzas*
+	7	»	18	»	12	»
+			20	»	15	»
	53	*arrobas*	18	*libras*	2	*onzas.*

145. *Para restar números complejos, se coloca para mayor comodidad el sustraendo debajo del minuendo con el mismo órden que el indicado para los sumandos, y se ejecuta la operacion restando en primer término las unidades de especie inferior para que de este modo, si alguna de las sustracciones parciales no pudiere ejecutarse por ser el minuendo menor que el sustraendo, se puedan tomar de la especie inmediata superior del minuendo las unidades necesarias para que agregadas á àquel, lo hagan mayor que el sustraendo y por tanto posible la sustraccion.*

Porque al proceder de este modo obramos impulsados por idénticos motivos que en la sustraccion de enteros sin más diferencia que la de carecer de una base fija.

La operacion se ejecuta del modo siguiente:

3	*arrobas*	5	*libras*	7	*onzas*
— 1	»	6	»	9	»
1	*arroba*	23	*libras*	14	*onzas.*

LECCION 23.

146. En la multiplicacion de complejos se distinguen dos casos: 1.° Que solo el multiplicando sea complejo. 2.° Que lo sea el multiplicador.

147. 1.^er^ CASO.—*Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplica el multiplicador por cada una de las especies del multiplicando, dando principio por la especie inferior, para que si de alguna de estas multiplicaciones parciales resultan unidades de la especie superior inmediata, se puedan agregar al verificar la multiplicacion de estas.*

Porque así hacemos lo mismo que en la multiplicacion de enteros, sin más diferencia que la carencia de la base 10.

Así para multiplicar 35 reales, 16 maravedises, por 8 arrobas, verificaremos la operacion del modo siguiente:

35	*reales*	16	*maravedises*
	×	8	*arrobas*
283	*reales*	26	*maravedises.*

148. 2.° CASO.—*Para multiplicar un complejo ó incomplejo por otro complejo, se reduce el multiplicador á incomplejo de la especie cuyo valor es el multiplicando, y queda este caso reducido al anterior ó á una multiplicacion de dos incomplejos.*

Así para multiplicar 5 arrobas y 7 libras por 35 reales y 20 maravedises, que suponemos son el valor de 1 arroba, reduciremos el multiplicador á incomplejo de arroba y se convertirá en $\frac{132}{25}$ de arroba por cuyo quebrado multiplicaremos cada una de las especies del multiplicando.

LECCION 24.

149 En la division de complejos de distinta naturaleza se distinguen dos casos: 1.° Que el divisor sea incomplejo y el dividendo complejo. 2.° Que el divisor sea complejo.

150. 1.^{er} CASO.—*Para dividir un complejo por un incomplejo, se divide cada especie del dividendo por el divisor dando principio por las unidades de especie superior, para que los resíduos que resulten puedan reducirse á la especie inmediata inferior y ser agregados al número que de su especie haya en el dividendo. La reunion de los cocientes parciales será el cociente total.*

Porque al verificar la operacion de esta manera, se ejecuta del mismo modo que la division de enteros sin más diferencia que la carencia de base.

Así para dividir 74 reales, 8 maravedises, por 35 arrobas, ejecutaremos la operacion de este modo:

74 *reales* 8 *maravedises*	35 *arrobas*
4	2 *rs.* 4 *m.*s $^4/_{35}$
× 34	
136	
+ 8	
144	
4	

Luego una arroba valdrá 2 rs. y 4 $\frac{4}{35}$ mar.s

151. 2.º CASO.—*Cuando el divisor es complejo, se reduce á incomplejo de la especie cuyo valor es el dividendo, y queda este caso reducido al anterior ó á la division de dos incomplejos.*

Así, si se nos pregunta el valor de una arroba, sabiendo que 24 arrobas y 7 libras han costado 2350 reales 27 maravedises, resolveremos la operacion reduciendo el divisor á incomplejo de arroba ó sea al quebrado $\frac{607}{25}$ arroba y la operacion queda limitada á dividir el complejo 2350 reales 27 maravedises por el incomplejo $\frac{607}{25}$ arroba

LECCION 25.

152. *Cuando dividendo y divisor son de la misma naturaleza, se reducen ambos términos á incomplejos de la misma especie.*

La operacion se plantea y ejecuta como se vé en el ejemplo siguiente:

Si se nos pregunta cuántas varas de tela se podrán comprar con 7250 reales 30 maravedises, sabiendo que el valor de una vara es 8 rs. 23 m.s, reduciremos estos dos complejos á incomplejos de maravedí, lo cual nos dará 245530 maravedises para el dividendo y 295 maravedises para el divisor, y luego se ejecuta la division de estos dos números cuyo cociente nos indicará el número de varas, que serán 832, segun puede verse en la siguiente division:

```
245530 | 295
       ----------
   953   832 varas
   680
    90
```

LECCION 26.

153. *Llamamos cuadrado, á una figura terminada por cuatro rectas iguales que forman ángulos rectos.*

Llámase *legua cuadrada, vara cuadrada* ó *pié cuadrado* á un cuadrado que tiene por cada lado una *legua,* una *vara* ó un *pié* respectivamente.

154. *Para hallar el número de veces que una medida cuadrada contiene á otra inferior, se eleva al cuadrado el número de veces que el lado de la superior contiene al de la inferior.*

Así una vara cuadrada tiene 9 piés cuadrados ó sea 3^2

Para demostrarlo, se forma un cuadrado que tenga una vara por lado y se dividen dos de sus lados opuestos en tres partes iguales; se trazan por estas divisiones rectas que formarán tres fajas de una vara de largas por un pié de anchas; si luego se dividen los otros dos lados opuestos en otras tres partes iguales, y se trazan rectas lo mismo que antes, resultarán nueve cuadrados que tendrán un pié por lado y por lo tanto serán piés cuadrados.

155. *Cubo es un cuerpo terminado por seis cuadrados iguales. Estos cuadrados se llaman càras, y arista es la línea formada por la interseccion de dos caras.*

Llámase *vara cúbica, pié cúbico* ó *pulgada cúbica,* al cubo que tiene por arista una *vara*, un *pié* ó una *pulgada* respectivamente.

156. *Para determinar las veces que una medida cúbica contiene á su inmediata inferior, se eleva al cubo el número de veces que la arista de la primera contiene á la de la segunda.*

Así una vara cúbica tiene 27 piés cúbicos ó sea 3^3

Para demostrarlo se divide una vara cúbica en tres zonas de un pié de espesor y á cada una de estas en nueve piés cúbicos, lo cual podrá verificarse porque las caras superior é inferior de estas zonas serán varas cuadradas.

Hechas las anteriores advertencias referentes á las medidas superficiales y cúbicas, vamos á entrar en el estudio del sistema antiguo de pesas y medidas para ocuparnos luego del nuevo sistema llamado *métrico decimal.*

El sistema antiguo de pesas y medidas es el siguiente:

De longitud.

La legua tiene 20000 piès.
La vara, 3 piès.
El piè, 12 pulgadas.
La pulgada, 12 líneas.
La línea, 12 puntos.

De capacidad.
(PARA ÁRIDOS).

El cahiz tiene 12 fanegas.
La fanega, 12 celemines.
El celemin, 4 cuartillos.
El cuartillo, 4 ochavos.
El ochavo, 4 ochavillos.

De capacidad.
(PARA LÍQUIDOS)

El moyo tiene 16 cántaras.
La cántara, 8 azumbres.
El azumbre, 4 cuartillos.
El cuartillo, 4 copas.
Sin embargo, el aceite se mide por las de peso.

De peso.

El quintal tiene 4 arrobas.
La arroba, 25 libras.
La libra, 16 onzas.
La onza, 16 adarmes.
El adarme, 3 tomines.
El tomin, 12 granos.
En Aragon, la arroba tiene 36 libras y la libra 12 onzas.

De superficie.

La legua cuadrada tiene 400000000 piès cuad.s
La fanega de tierra, 576 estadales cuadrados.
El estadal cuadrado, 16 varas cuadradas.
La vara cuadrada, 9 piès cuadrados.
El piè cuadrado, 144 pulgadas cuadradas.
La pulgada cuadrada, 144 líneas cuadradas.

De volúmen.

La vara cúbica tiene 27 piès cúbicos.
El piè cúbico, 1728 pulgadas cúbicas.
La pulgada, 1728 líneas cúbicas.

De dinero.

El duro tiene 20 reales.
El real, 34 maravedises.

De tiempo.

El siglo tiene 100 años.
El año, 12 meses.
El mes, 30 dias.
El dia, 24 horas.
La hora, 60 minutos.
El minuto, 60 segundos.

LECCION 27.

157. *Llamamos métrico decimal, al sistema de pesos y medidas cuyos múltiplos y divisores son decimales y que tiene por unidad fundamental el metro.*

El metro, voz que se deriva de metros (medida,) *es la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.* Se le llama *unidad fundamental*, porque de él se han sacado todas las demás medidas de este sistema.

158. Todo el artificio de éste, consiste en que *sus múltiplos se forman anteponiendo al nombre de la unidad usual de cada especie de medidas, las palabras griegas Deca, que significa diez; Hecto, que significa ciento; Kilo, mil, y Miria, diez mil; y para los divisores, se anteponen del mismo modo las palabras Deci, que significa la décima parte, Centi la centésima y Mili la milésima,*

Sentada la regla anterior vamos á examinar las diferentes especies de pesos y medidas de este sistema.

159. La unidad usual en las medidas de longitud es el *metro* y sus múltiplos y divisores se forman por la regla espresada (155) sin ninguna irregularidad.

Así por ejemplo el *Kilómetro* tendrá mil metros; el *Miriámetro* diez mil; el *decímetro* será la décima parte del metro, etc.

160. Las medidas de capacidad para áridos y

líquidos tienen por unidad usual el *litro, que es un vaso que tiene de capacidad interior un decímetro cúbico.*

Sus múltiplos y divisores se forman tambien por la regla general, así, por ejemplo, un *Decálitro* tendrá diez litros, y un *centílitro* será la centésima parte de un litro.

161. La unidad usual en las medidas de peso es el *gramo, cuyo peso es igual al de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de cuatro grados*

Aunque sus múltiplos y divisores se forman tambien por la regla general, el poco peso del gramo ha obligado al comercio á tomar como *unidad usual el Kilógramo,* que tiene mil gramos, siendo sus múltiplos, el *Miriágramo,* que tiene diez mil gramos ó sea diez kilógramos el *quintal métrico,* que tiene cien kilógramos y la *tonelada de peso,* que tiene mil kilógramos: como divisores se cuentan desde el *Hectógramo* hasta el *Miligramo.* Pero adviértase que si lo que se trata de pesar es de un peso muy reducido se hace uso del gramo como unidad usual y de sus múltiplos y divisores.

162. La unidad usual en las medidas de superficie es el *Área, que es un cuadrado que tiene por cada lado diez metros;* y por lo tanto tendrá cien metros cuadrados. Su múltiplo es la *Hectárea,* que tiene cien áreas; y su divisor la *centiárea,* que es la centésima parte del área; pero debe tenerse presente que tambien puede tomarse como unidad usual el metro cuadrado con sus múltiplos y divisores, en los cuales tan solo

hay que advertir, que segun la regla dada para la formacion de los múltiplos y divisores de las medidas cuadradas, *estos aumentarán y disminuirán respectivamente de cien en cien*. Así, por ejemplo, el *decámetro cuadrado* tendrá cien metros cuadrados y el *decímetro cuadrado* será la centésima parte del metro cuadrado.

163. La unidad usual en las medidas de volúmen es el *metro cúbico, que es un cubo que tiene por arista un metro*. Sus múltiplos y divisores son los mismos que los del metro, advirtiendo tan solo que estos aumentan y disminuyen respectivamente de mil en mil. (156) Así, por ejemplo, un *decámetro cúbico* tendrá mil metros cúbicos y un *decímetro cúbico,* será la milésima parte del metro cúbico.

164. La unidad usual en el sistema monetario es el *escudo,* su múltiplo es el *doblon* ó *centin,* que tiene diez escudos y sus divisores, el *real,* que es una décima de escudo, la *décima de real,* que es una centésima de escudo y el *céntimo de real,* que es una milésima de escudo. Hoy, sin embargo, rige la peseta como unidad usual.

LECCION 28.

165. *Para escribir una cantidad cualquiera de medidas del sistema métrico, se la considera como un número decimal cuyos enteros están formados por la unidad usual con sus múltiplos, y los decimales por sus divisores.* A continuacion de la cantidad se pone la letra inicial de la clase de medidas á que pertenece.

Así para escribir 4 hectómetros, 7 decámetros, 8 metros, 6 decímetros y 8 milímetros, lo cual equivale evidentemente á 478 metros y 608 milímetros pondremos: 478'608 m.s

166. *Se exceptúan de la regla anterior las medidas de superficie; de las cuales, cada órden ocupa dos lugares por aumentar y disminuir sus múltiplos y divisores de cien en cien; y las medidas cúbicas, que por análoga razon, necesitan tres lugares para cada órden; y tanto en las unas como en las otras, se llenan con ceros los lugares que queden vacantes.*

Así para escribir 57 hectómetros cuadrados, 7 metros y 58 centímetros cuadrados pondremos: 570007'0058 m.s c.s

Igualmente para escribir 7 decámetros cúbicos, 8 metros y 34 milímetros cúbicos pondremos: 7008'000000034 m.s c.s

167. Tambien hay que advertir que si se toma como unidad usual un múltiplo como por ejemplo el *Kilógramo*, éste ocupará el lugar de los enteros y todos los órdenes inferiores á él el de los divisores por su órden correspondiente, teniendo cuidado de escribir al fin de dicha cantidad la inicial del múltiplo que tomamos por unidad.

Así 72 kilógramos, 8 gramos y 7 milígramos se escribirá: 72'008007 kilóg.s

168. Es evidente que las operaciones que se ejecutan con las cantidades del sistema métrico se rigen en todo por las reglas dadas para los números decimales, facilitándolas esto en gran manera, especialmente cuando se trata de reducir unidades de un órden á otro cualquiera, pues

para esto, *basta correr la coma los lugares necesarios á la derecha ó á la izquierda segun los casos*, como puede verse en los siguientes ejemplos:

758'034 m.^{s} reducidos á kilómetros nos dan: 0'758034 kilóm.^{s}

24'058 lit.^{s} reducidos á centílitros dan: 2405'8 centílitros.

LECCION 29.

169. Las ventajas más notables del sistema métrico decimal sobre el antiguo, son:

1.ª *Las medidas del sistema métrico léjos de ser arbitriarias como en el antiguo, dependen todas del metro* que por esto se llama unidad fundamental, el cual á su vez depende de la magnitud de la tierra, siendo por lo tanto *medida fija é inalterable.*

2.ª *Los áridos y líquidos tienen las mismas medidas en el sistema métrico, mientras en el antiguo las tienen distintas.*

3.ª *Las operaciones del sistema métrico son mucho más sencillas que las del antiguo, pues estas se verifican por los complejos, y aquellas por los decimales.*

Esta tercera ventaja podrá apreciarse mejor resolviendo el siguiente

PROBLEMA.—Reducir 24 leguas á líneas y 24 kilómetros á milímetros.

170. Para reducir unidades del uno al otro sistema, tiene que hacerse uso de la manera que luego esplicaremos de las tablas de reduccion de las cuales presentamos aquí una ligera muestra.

TABLAS de reduccion de medidas métricas á las del antiguo sistema.

DE LONGITUD.

Metros.	Varas.	Piés.	Pulgadas.
1	1'136	3'588	43'07
2	2'392	7'177	86'13
3	3'588	10'766	129'20
4	4'785	14'355	172'27
5	5'981	17'944	215'34
6	7'177	21'533	258'40
7	8'374	25'122	301'47
8	9'570	28'711	344'54
9	10'766	32'300	387'60

DE PESO.

Kilóg.s	Libras.	Onzas.	Adarmes
1	2'173	34'78	556'4
2	4'346	69'55	1112'8
3	6'520	104'33	1669'2
4	8'693	139'10	2225'6
5	10'867	173'88	2782'0
6	13'040	208'65	3338'5
7	15'214	243'43	3894'9
8	17'387	278'20	4451'3
9	19'561	312'98	5007'7

TABLAS de reduccion de medidas del antiguo sistema, á las métricas.

DE LONGITUD.

Varas.	Piés.	Pulgadas.	Metros.
1	3	36	0'8359
2	6	72	1'6718
3	9	108	2'5077
4	12	144	3'3436
5	15	180	4'1795
6	18	216	5'0154
7	21	252	5'8513
8	24	288	6'6872
9	27	324	7'5231

DE PESO.

Arrob.s	Libr.s	Onzas.	Kilógramos
1	16	256	11'502
2	32	512	23'005
3	48	768	34'507
4	64	1024	46'009
5	80	1280	57'512
6	96	1536	69'014
7	112	1792	80'516
8	128	2048	92'019
9	144	2304	103'521

*

Una vez á la vista las anteriores tablas, *para reducir un número cualquiera de unidades del sistema métrico al antiguo, se busca la equivalencia de las unidades del número dado, en unidades del sistema antiguo, luego se hace lo mismo con las decenas, para lo cual, se consideran como unidades, y se corre la coma un lugar hácia la derecha en el número decimal que indiquen las tablas, luego se verifica lo mismo con las centenas corriendo la coma dos lugares, y lo mismo se repite con los demás órdenes de unidades. La suma de todos los decimales resultantes será la equivalencia que se busca.*

La misma operacion se practica para reducir medidas antiguas á métricas, sin más diferencia que la de hacer uso de las tablas semejantes al segundo modelo.

Así, por ejemplo, para reducir 7845 varas á metros, plantearemos la operacion como sigue:

	5 v.s =	4'1795	m.s
	40 » =	33'436	»
	800 » =	668'72	»
	7000 » =	5851'3	»
Luego	7845 v.s =	6557'6355	m.s

LECCION 30.

171. *Número primo, factor primo ó factor simple, es todo número que tan solo es divisible por sí mismo y por la unidad.* Como 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc.

172. *Número compuesto ó factor compuesto, es el que es divisible por algun otro número además de serlo por sí mismo y por la unidad.* Como 4, 6, 8, 9, 10, etc.

173. *Para examinar si un número es primo, se divide sucesivamente por 2, por 3, por 5 y por los demás números primos hasta que nos dé cociente exacto ó resulte un cociente menor que el divisor; en el primer caso el número será compuesto; en el segundo será simple.*

Porque si con ninguna de estas divisiones se halla cociente exacto, es prueba de que el número en cuestion tan solo es divisible por sí mismo y por la unidad. No se prueba á dividirle por los números compuestos, porque de ser divisible por estos tambien lo sería por los factores simples de que se componen.

Por último, se da por terminada la operacion cuando resulta un cociente menor que el divisor, porque en la division exacta el dividendo no solo es divisible por el divisor, sino tambien por el cociente; y á medida que se continuára la operacion, resultarian cocientes cada vez menores, los cuales no podrian ser divisibles por el número dado, puesto que no lo fueron cuando figuraron como divisores.

174. *Dos ó más números son primos entre sí, cuando su único divisor comun es la unidad.*

Así 8, 3 y 7 son primos entre sí porque el único número que divide á los tres exactamente es 1.

175. *Si un número primo no es divisor exacto de otro cualquiera, los dos son primos entre sí.*

Porque no siendo el primo divisible mas que por sí mismo y por la unidad, y no siéndolo el otro por el primo, no pueden tener más divisor comun que la unidad.

Así 3 y 8 son primos entre sí porque el 3 no divide al 8.

176. *Dos números primos, tienen que ser primos entre sí.*

Porque ninguno de ellos es divisible por el otro que es primo.

177. Observacion.-Aunque en el número 173 hemos dado la regla para averiguar si un número es primo, pueden para mayor comodidad construirse tablas de factores simples; para lo cual, no hay mas que escribir por su órden todos los números desde 1 hasta donde se quiera, é ir luego tachando todos los múltiplos de 2, luego de 3, de 5, de 7, etc. ó sea de los que vayan quedando sin tachar, cuya reunion, una vez que hayamos concluido la operacion, formará la tabla de factores primos.

La de los comprendidos entre 1 y 100 es la siguiente:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

LECCION 31.

178. *Máximo comun divisor de vários números, es el mayor divisor de todos ellos.*

179. Teorema.—*El número que divide exactamente á minuendo y sustraendo, divide tambien al resto.*

Porque considerado cada término de la sustraccion como dividendo, será igual al producto del cociente por el divisor; y por consiguiente su diferencia ó sea el resto, será igual á la diferencia entre los cocientes multiplicada por el divisor. Luego dicha diferencia ó resto, es múltiplo del divisor y por tanto divisible por éste.

180. COROLARIO.—*El número que divide exactamente á dividendo y divisor, divide tambien al resíduo.*

Porque este caso puede reducirse al anterior, con solo suponer al resíduo como resto de una sustraccion, cuyo minuendo es el dividendo y cuyo sustraendo es el producto del cociente por el divisor. El minuendo es divisible por el número dado por hipótesis; y el sustraendo, porque es múltiplo del divisor que tambien lo es por hipótesis; luego lo será igualmente el resto que es el resíduo. (179)

181. *Recíprocamente si un número divide exactamente al divisor y al resíduo, tambien dividirá al dividendo.*

Porque este dividendo puede considerarse como una suma; uno de cuyos sumandos es el producto del cociente por el divisor, y el otro es el resíduo. El primer sumando es divisible por el número dado, por ser múltiplo del divisor que lo es por hipótesis; y el segundo sumando lo es tambien por hipótesis; luego lo será tambien la suma que es el dividendo. (86)

LECCION 32.

182. *Para determinar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor por el menor, y si resulta cociente exacto, el menor de los dos números será el máximo comun divisor. En el caso contrario, se divide el menor por el resíduo, y si tampoco da cociente exacto, se divide dicho resíduo por el segundo resíduo, y así se continúa hasta hallar un cociente exacto, ó llegar á obtener por resíduo la unidad; en el primer caso el último divisor es el m. c. d. pedido, y en el segundo, los números dados son primos entre sí.*

Porque el m. c. d. de los dos números dados, lo es tambien del resíduo de su division, é igualmente lo es del segundo resíduo, resultado de dividir el menor de los dos números por el primer resíduo; y lo será de todos los resíduos que vayan resultando hasta el último; luego el m.c.d. del último y penúltimo resíduo, será el de los dos números dados.

183. *Si al verificar la operacion un divisor primo no da cociente exacto, puede ya asegurarse que los números dados son primos entre sí.*

Porque ya hemos visto (175) que si un número primo no es divisor exacto de otro cualquiera, los dos son primos entre sí.

184. TEOREMA.—*Si un número divide á otros dos, tambien dividirá al m. c. d. de estos.*

Porque este m. c. d., si no es el uno de los dos números, es un resíduo de la division del mayor por el menor ó de éste por el primer resíduo, etc.

185. *Para hallar el m. c. d. de más de dos números, se halla el de dos de ellos, luego entre el últimamente hallado y el tercero, etc.*

Porque dicho m. c. d. al dividir exactamente á los dos primeros números tambien dividirá á su m. c. d.; (184) de dividir á éste y al tercer número, dividirá igualmente al que sea m. c. d. de los dos y así sucesivamente hasta el último. [1]

Dadas las anteriores reglas presentamos el siguiente ejemplo, para que pueda verse el modo de plantear y resolver la operacion por la que se trate de hallar el m. c. d. de dos números.

Sea hallar el m. c. d. de 186 y 48.

186	48	42	6
42	(3	(1	7
	6	00	

Luego el m. c. d. de 186 y 48, es 6.

LECCION 33.

186. TEOREMA 1.º—*Si á los dos términos de una division inexacta se les multiplica ó divide*

(1) Más adelante señalaremos otro procedimiento para determinar el m. c. d. del cual no nos podemos ocupar ahora por no haber estudiado la descomposicion de un número en factores simples.

por un mismo número, el cociente no se altera, y el resíduo queda multiplicado ó dividido por el mismo número.

Porque con dicha multiplicacion ó division, no debe alterarse (66) el resultado de la division de los dos números dados; y para que así suceda es preciso que el cociente quede igual, y que tampoco se altere el quebrado formado por el resíduo y el divisor, para lo cual es indispensable que por el mismo número que se multiplica ó divide el denominador, se multiplique ó divida el numerador que es el resíduo.

187. COROLARIO 1.º—*Si se multiplican ó dividen dos números por un entero, el m. c. d. de ambos queda multiplicado ó dividido por el mismo número.*

Porque en último resultado el m. c. d. es ó uno de los dos números, ó un resíduo.

188. COROLARIO 2.º—*Si dos números se dividen por su m. c. d., los cocientes son primos entre sí.*

Porque al hacerlo así queda su m. c. d. dividido por sí mismo, y por tanto el m. c. d. de los números que resulten será la unidad.

LECCION 34.

189. TEOREMA 2.º—*Si un entero divide á un producto de dos factores y es primo con el uno de ellos, dividirá al otro.*

Así si 3 divide exactamente á (6 × 4) y es primo con 4 dividirá á 6.

Porque el m. c. d. de 4 y de 3 será uno por ser primos; luego el m. c. d. de 4×6 y 3×6 será (187) $1 \times 6 = 6$. Ahora bien; 3 divide á 4×6 por hipótesis, y á 3×6 por ser múltiplo suyo; luego tambien dividirá á su m. c. d. que es 6. (184)

190. Corolario 1.°—*Si un entero es divisor de un producto de vários factores, dividirá exactamente á alguno de estos.*

Porque este producto se puede descomponer en dos factores, encerrando dentro de un paréntesis todos sus factores menos uno. Ahora bien; si el número dado no divide al factor que está fuera del paréntesis, tiene que dividir al que está dentro (189) con el cual puede volver á hacerse la misma descomposicion, hasta encontrar el factor múltiplo del número dado.

191. Corolario 2.°—*Si un número primo divide á una potencia de otro número cualquiera, tambien dividirá á este número.*

Porque una potencia, es el resultado de tomar al número várias veces por factor.

192. Corolario 3.°—*Si dos ó más primos son divisores de otro, tambien lo será el producto de todos ellos.*

Porque al número dado se le puede descomponer en dos factores, uno de los cuales será cualquiera de los primos dados. Ahora bien; como el segundo de los primos dados es primo con el factor simple antes tomado y divisor de su producto por el otro factor (por hipótesis,) será divisor de este otro factor, con el cual se puede hacer análoga descomposicion en otros dos factores, uno de los cuales será el segundo número primo, y como esta descomposicion puede repetirse tantas veces cuantas sean los primos dados, resultará en último término, que el número dado será múltiplo de todos los primos y tambien de su producto.

193. *Para descomponer un número en factores simples, se le divide todas las veces que se pueda por 2, luego por 3, por 5 y demás números primos; y cuando resulte un factor simple, se dividirá por sí mismo.*

El producto de todos estos divisores que son sus factores simples, es igual al número propuesto.

Porque esta operacion se funda en el corolario 3.° que hemos demostrado. (192)

Así para descomponer el número 225 en factores primos se planteará y ejecutará la operacion del modo siguiente:

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Luego $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 3^2 \times 5^2$

LECCION 35.

194. *Mínimo comun múltiplo de vários números, es el menor múltiplo de todos ellos.*

195. Teorema. — *Un número no puede des-*

componerse de dos modos distíntos en factores simples.

Porque la diversidad entre ambas descomposiciones, ó provendria de admitir la una un factor que no entraba en la otra, ó de estar algun factor en la una elevado á mayor potencia que en la otra. En ambos casos resultaria un absurdo de formar una igualdad, cuyos miembros estuvieren formados por las dos descomposiciones.

196. Corolario.—*Para que un número sea divisible por otro, es preciso que por lo ménos contenga todos los factores simples de éste elevados á la misma potencia.*

Porque de lo contrario el número dado admitiria dos descomposiciones distintas en factores simples, lo cual es imposible. (195)

197. *Para determinar el mínimo comun múltiplo de vários números, se descomponen en factores simples, y se forma un producto con los factores diferentes elevados á la mayor potencia que lleven en las distintas descomposiciones.*

Porque en dicho producto, que será el mínimo comun múltiplo, se encontrarán todos los factores simples de los números dados, elevados á igual ó mayor potencia, y por tanto será múltiplo de todos ellos; (196) y será el *mínimo,* porque en él no se halla ningun factor simple repetido.

198. *Si entre los números dados hubiere alguno divisor de otro, podrá prescindirse de él.*

Porque todos los factores simples del divisor se hallarán en su múltiplo.

La operacion se ejecuta como sigue:

Sea hallar el número comun múltiplo de 36, 24, 72 y 48. Podemos prescindir del 24 por ser divisor del 48 y del 36 por serlo del 72.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De modo que $48=2^4 \times 3$ y $72=2^3 \times 3^2$ luego el mínimo comun múltiplo será igual á $2^4 \times 3^2 = 144$.

Observacion.—*Tambien puede determinarse el m. c. d. por medio de la descomposicion en factores simples, para lo cual seguiremos un método opuesto al empleado para el mínimo comun múltiplo; es decir, supriremos los números dados que sean múltiplos de otros, y despues de descomponer los restantes en factores primos, se formará un producto de todos los factores comunes á todos los números, elevados á la menor potencia que lleven en las distintas descomposiciones.*

Porque de este modo, el número que resulte será el m. c. d. de todos los dados; puesto que entran á formarle todos los factores comunes á ellos.

Sea, por ejemplo, hallar el m. c. d. de 48, 76, 54 y 24.

Suprímase desde luego el 48 por ser múltiplo del 24 y hecha la descomposion de los tres restantes, resultará: $76 = 2^2 \times 19, 54 = 2 \times 3^4$ y $24 = 2^3 \times 3$ luego, el único factor que entra en todas las descomposiciones es el 2 que formará el m. c. d. elevado á la primera potencia.

LECCION 36.

199. Por medio del m. c. d. puede facilitarse la simplificacion de quebrados; y por medio del mínimo comun múltiplo, pueden reducirse al menor denominador comun posible como veremos á continuacion.

200. TEOREMA.—*Un quebrado que tiene sus dos términos primos entre sí, es irreducible.*

Porque no habrá ningun número distinto de la unidad, por el cual podamos dividir ambos números para simplificarlo.

201. *Para simplificar un quebrado, se dividen sus dos términos por el m. c. d. de ellos.*

Porque los cocientes que formen el nuevo quebrado, serán primos entre sí (188) siendo por lo tanto éste irreducible. (200)

Así para simplificar el quebrado $\frac{36}{48}$ hallaremos el m. c. d. de los dos términos que es 12, por cuyo número dividiremos á numerador y denominador, cuya operacion nos dará por resultado el quebrado irreducible $\frac{3}{4}$

LECCION 37.

202. *Para reducir vários quebrados al mínimo comun denominador, se simplifican si se puede, y el mínimo comun múltiplo de los denominadores de los quebrados restantes, formará el denominador comun de los nuevos quebrados, cuyos numeradores se forman multiplicando el de cada quebrado, por el cociente que resulte de dividir su denominador por el mínimo comun múltiplo antes hallado.*

Se simplifican, para que no compliquen la operacion los factores simples que inútilmente se hallaban repetidos. Se pone por denominador el mínimo comun múltiplo de los denominadores, porque teniendo que ser el denominador comun un múltiplo de todos los denominadores, el menor múltiplo de ellos será su mínimo comun múltiplo; y por último al formar los numeradores del modo indicado, quedan el numerador y denominador de cada quebrado multiplicados por un mismo número, con lo cual el quebrado no se altera.

Así $\frac{3}{4}\ \frac{7}{8}\ \frac{5}{6}=\frac{18}{24}\ \frac{21}{24}\ \frac{20}{24}$

LECCION 38.

203. *Para reducir un quebrado ordinario á decimal, se divide el numerador por el denominador, y se aproxima por decimales el cociente.*

Porque un quebrado es una division indicada.

204. *Si el quebrado es propio y por tanto no puede verificarse la division, se pone en el cociente cero y coma, y cero en el dividendo, y se sigue la operacion como en el caso anterior.*

Así $\frac{3}{4}$ será igual á 0'75 porque así resulta de verificar la operacion indicada

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0'75 \\ 0 & \end{array}$$

205. *Fraccion decimal exacta, es aquella que dá cociente exacto y por lo tanto tiene un número limitado de cifras.*

Ejemplo de esta tenemos en la anterior.

206. *Fraccion decimal periódica, es aquella en que se repite indefinidamente un número de cifras llamado período.*

Esta, se divide en pura y mixta.

207. *Fraccion periódica pura, es aquella en que el período da principio en la coma.*

Así 0'6363.... será una fraccion periódica pura.

208. *Fraccion periódica mixta, es aquella en que entre la coma y el primer período, existe alguna ó algunas cifras decimales.*

Como 0'5333.....

209 *Llámase fraccion generatriz, al quebrado ordinario equivalente á una fraccion decimal que se nos dá.*

210. *Para hallar la fraccion generatriz de una fraccion decimal exacta, se pone por numerador la fraccion decimal considerada como*

entero, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales había.

Porque así se desprende de lo que hemos dicho al tratar de la numeracion de los decimales.

Así $3'754 = \frac{3754}{1000}$

LECCION 39.

211. *Para determinar la fraccion generatriz de una fraccion decimal periódica pura, se ponen por numerador las cifras que forman el período, y por denominador tantos nueves como cifras tenga dicho período.*

Porque si formamos la igualdad: fr. g.= 0'1919..... y multiplicamos sus dos miembros por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período, nos dará: fr. g. $\times$ 100 = 19'1919..... y restando la anterior de ésta resultará: fr. g. $\times$ 99 = 19, espresion que puesta en forma de division indicada producirá: fr. g. = $\frac{19}{99}$ (54)

212. *Para hallar la fr. g. de una fraccion decimal periódica mixta, se pone por numerador la diferencia entre la parte no periódica, y ésta unida con el período, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros cuantas sean las cifras no periódicas.*

Porque si formamos la igualdad: fr. g.= 0'3745656.... y multiplicamos sus dos miembros por la unidad seguida de tantos ceros como sea necesario para que la coma se coloque al fin del primer período, resulta: fr. g. $\times$ 100000 = 37456'5656.

Y si luego multiplicamos de nuevo á la primera igualdad por la unidad seguida de los ceros que se necesiten para que la coma se coloque al fin de las cifras no periódicas, nos dará: fr. g. $\times$ 1000=374'5656.... que restada de la anterior dará por resultado: fr. g. $\times$ 99000=37456—374, espresion que evidentemente puede ponerse en esta forma: fr. g. $= \frac{37456-374}{99000}$ que es precisamente lo que se trataba de demostrar.

LECCION 40.

213. *La fr. g. de una fraccion decimal exacta, hemos visto que lleva por denominador la unidad seguida de ceros. Por lo tanto los factores simples de su denominador serán el 2 y el 5 ó uno de estos tan solo; y el mayor esponente de estos factores, será igual al número de cifras decimales que tenia la fraccion.*

Tendrá el denominador por factores simples al 2 y al 5, porque dicho denominador es un múltiplo de 10; y sus mayores esponentes serán iguales al número de cifras decimales, porque segun hemos visto por cada una de estas se aumenta un cero al denominador; y como por otra parte, 10 es igual á 2×5; $100=2^2\times5^2$; $1000=2^3\times5^3$, et cétera, vemos que por cada cero que se aumenta al denominador, aumentan en una unidad

*

los esponentes de sus factores simples. Si simplificamos el quebrado, no podrá desaparecer mas que el uno de sus factores; porque el numerador no será divisible por 10 y por lo tanto el otro factor simple quedará con el mismo esponente que llevaba.

214. Del anterior principio se deduce, que *un quebrado ordinario, producirá una fraccion decimal exacta, cuando los factores simples de su denominador, despues de simplificado, el quebrado son 2 y 5 ó uno de estos.*

215. *El denominador de la fr. g. de una fraccion decimal periódica pura, no puede tener por factores simples ni al 2 ni al 5.*

Porque dicho denominador es un múltiplo de nueve. (211)

216. Del anterior principio se deduce, que *un quebrado ordinario producirá una fraccion decimal periódica pura, cuando los factores simples de su denominador despues de simplificado, el quebrado no son ni el 2 ni el 5.*

Así $\frac{2}{3}$=0'666.....

217. *El denominador de la fraccion generatriz procedente de una fraccion decimal periódica mixta, debe tener por factores simples el 2 y el 5 ó uno de estos, y además algun otro diferente.*

Porque dicho denominador puede descomponerse en dos factores; el uno compuesto de los nueves, y el otro de la unidad seguida de los ceros que les siguen; el segundo tiene por factores simples al 2 y al 5 y el primero á otro número.

218. Del anterior principio se deduce, que *un quebrado ordinario producirá una fraccion decimal periódica mixta, cuando los factores simples de su denominador despues de simplificado el quebrado sean el 2 y el 5, ó uno de estos, y además otro diferente.*

Así $\frac{7}{15} = 0'4666.....$

LECCION 41.

219. *Potencia de un número, es el producto que resulta de tomarlo várias veces por factor.* (52)

220. *Para elevar un quebrado á una potencia, se elevan á dicha potencia numerador y denominador.*

Porque elevarlo á dicha potencia, es tomarlo várias veces por factor y al multiplicar estos factores nos dan el resultado indicado.

Así $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125} = \frac{3^3}{5^3}$

221. *Para elevar á una potencia un número mixto, se reduce á quebrado y se eleva éste á dicha potencia.*

Así $\left(3\,\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{5}\right)^2 = \frac{361}{25}$.

222. *Una potencia de un número terminado en ceros, lleva duplo, triplo, etc., número de ceros segun que la potencia sea de 2.°, 3.°,* etc., *grado.*

Así $200^2 = 200 \times 200 = 40000$. (50)

223. *Las potencias de los números mayores que la unidad, los aumentan á medida que aumenta el grado de dicha potencia, y las de los menores que la unidad, los disminuyen en el mismo caso.*

Así $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{16}{4}$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{4}{16}$

224. *Para elevar á una potencia un producto de vários factores, se elevan estos á dicha potencia y se multiplican.*

Así $(4 \times 5)^2 = 4^2 \times 5^2$ porque $(4 \times 5)^2 = (4 \times 5) \times (4 \times 5) = 4 \times 4 \times 5 \times 5 = 4^2 \times 5^2$.

225. *Raíz de cierto grado de un número, es otro número que elevado á una potencia igual á dicho grado, produce el dado.*

226. *Segun esto, raíz cuadrada de un número, es otro número que elevado al cuadrado produce el dado.*

227. Para expresar por escrito una raíz se usa del radical que tiene esta forma: $\sqrt{}$ debajo de él, se escribe la cantidad de la que se trata de estraer la raíz; y entre sus ramas se escribe el grado de la raíz que se llama *índice*. Así la raíz cúbica, de 374 se escribe: $\sqrt[3]{374}$.

Para expresar la raíz cuadrada no hay necesidad de colocar índice en el radical. Así para representar la raíz cuadrada de 36, se escribe: $\sqrt{36}$.

228. *Se dice que un número tiene raíz de cierto grado exacta, cuando existe un número entero, que elevado á una potencia de igual grado que la raíz, produce el número dado. Se*

dice que la tiene inexacta ó entera, cuando no existiendo el número entero antes indicado, tiene que tomarse el inmediato inferior. En este caso se llama resíduo á la diferencia entre el cuadrado de la raiz entera y el número dado.

Así 4 tiene por raíz cuadrada exacta á 2; pero 8 no tiene raíz cuadrada exacta, siendo la entera 2 con el resíduo 4.

229. *Una raíz inexacta, no puede expresarse por un número mixto.*

Porque reducido á quebrado y convertido en irreducible, elevado á una potencia de igual grado sería igual al número dado que es un entero, lo cual es imposible por tener sus dos términos primos entre sí. (200)

No pudiéndose, pues, expresar estas raíces ni por un entero, ni por un quebrado y por lo tanto tampoco por un decimal, se las ha llamado *inconmensurables.*

230. *Así, pues, número inconmensurable ó irracional, es la raíz de un número que no la tiene exacta.*

231. *Para estraer la raíz de un producto de vários factores, se estrae la raíz de cada uno de los factores, y se multiplican entre sí.*

Porque este principio se funda en lo que hemos visto (224) respecto á su elevacion á potencias.

Para estraer la raíz de un quebrado, se estraen las de sus dos términos, y se divide la del numerador por la del denominador.

Porque así se desprende de lo manifestado para elevarlos á una potencia cualquiera. (220)

LECCION 42.

232. *Raíz cuadrada de un número, es otro número que elevado al cuadrado produce el propuesto.*

En la estraccion de la raíz cuadrada se distinguen dos casos: 1.° Que el número no pase de 100. 2.° Que sea mayor que 100.

233. Para estraer la raíz cuadrada de un número menor que 100 deben saberse de memoria los cuadrados de los diez primeros números y son los siguientes:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.

Segun la definicion de la raíz cuadrada, cada número del renglon superior, es la raíz cuadrada del número que tiene debajo. Así; $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$.

234. Los números del renglon inferior son los diez únicos enteros que desde 1 hasta 100 tienen raíz cuadrada exacta, todos los demás la tienen entera, y por lo tanto, queda resíduo.

235. *Para estraer la raíz cuadrada de un número menor que 100 que no la tenga exacta, se estrae, la del cuadrado inmediato inferior, y ésta será la raíz entera.*

El resíduo será la diferencia entre el cuadrado de la raíz y el número dado.

Así $\sqrt{40} = 6 +$ el resíduo 4.

236. TEOREMA.—*El cuadrado de la suma de*

dos números, es igual al cuadrado del 1.° mas el duplo del 1.° multiplicado por el 2.° mas el cuadrado del 2.°

Así $(4+2)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 2 + 2^2$.

Porque así resulta de multiplicar estos dos sumandos por cada uno de ellos, y de sumar luego estos dos productos.

Así $(4+2)^2 = (4+2) \times (4+2) = 4 \times 4 + 4 \times 2 + 2 \times 4 + 2 \times 2 = 4^2 + 2 . 4 \times 2 + 2^2$.

237. COROLARIO.-*El cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, es igual al cuadrado de las decenas mas el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, mas el cuadrado de las unidades.*

Porque dicho número puede descomponerse en dos sumandos, de los cuales el 1.° estará formado por las decenas y el 2.° por las unidades. Así $48^2 = (40+8)^2$.

OBSERVACION.—El cuadrado de las decenas es un número exacto de centenas, pues como cuadrado de un número que termina en un cero tiene que terminar en dos; (222) el duplo de decenas por unidades, son decenas, como producto de un número cualquiera por otro que termina en un cero, y el cuadrado de unidades, son unidades, porque ninguno de los cuadrados de las nueve cifras significativas termina en cero.

238. COROLARIO 2.°—*Los cuadrados de dos números de los que el uno escede al otro en una unidad, se diferencian en el duplo del menor mas uno.*

Así 7^2 se diferencia de 6^2 en $12 + 1$.

Porque así resulta de verificar la siguiente sustraccion:

$$\begin{array}{rcl} 7^2 = (6+1)^2 & = & 6^2 + 2 \times 6 \times 1 + 1^2 \\ - & & 6^2 \\ \hline \text{Resto} & = & 2 \times 6 + 1 \end{array}$$

239. De donde se desprende: *Que el resíduo de una raíz entera tiene que ser menor que el duplo de la raíz mas uno.*

Porque si fuera mayor, la raíz hallada se diferenciaría de la verdadera en una unidad, ó más lo cual nos indicaría que la operacion estaba mal hecha.

LECCION 43.

240. 2.º CASO.-*Para estraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100, se divide por medio de puntos en grupos de á dos cifras, principiando por la derecha. Se estrae luego la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda, y el número que resulte será la 1.ª cifra de la raíz, cuyo cuadrado se resta del grupo que la produjo. A la derecha del resto, se baja el siguiente grupo y el número que resulte despues de separar la primera cifra de la derecha, se divide por el duplo de la raíz hallada; el cociente que resulte será la segunda cifra de la raíz que se colocará á continuacion del duplo de la primera, y el número resultante multiplicado por la misma se-*

gunda cifra, se resta del resíduo anterior; se baja luego á la derecha de este resto, el tercer grupo y se divide del mismo modo que el anterior por el duplo de la raíz hallada; el cociente formará la tercera cifra de la raíz con la que se ejecuta idéntica operacion que con la segunda, y así se continúa hasta que se hayan bajado todos los grupos del número dado.

Porque al verificar la operacion de la manera indicada, discurrimos del modo siguiente: Si se quiere saber cuántas cifras tendrá la raíz, no hay mas que recordar que el cuadrado de 10 es 100; el de 100, 10000, etc., (222) y por consiguiente si el número tiene cuatro cifras y por tanto se halla comprendido entre 100 y 10000, su raíz cuadrada tendrá dos por hallarse incluida entre 10 y 100. Ahora bien; en este supuesto, ya sabemos que el número dado, es el cuadrado de uno que consta de decenas y unidades, y por consiguiente en él se encontrarán: el cuadrado de las decenas, mas el duplo de las decenas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades, mas el resíduo si le hay. Si estraemos por lo tanto la raíz cuadrada de sus centenas, y restamos de ella el cuadrado de la cifra hallada, lo habremos descartado del cuadrado de las decenas de su raíz. Al duplicar luego éstas, observaremos que el duplo de decenas por unidades, son decenas (237) y por tanto, en las decenas del resto anterior unido al grupo siguiente, se buscará la cifra de las unidades y por esto se hace abstraccion de la primera cifra del resto indicado. Hallada la cifra de las unidades, se coloca á continuacion del duplo de las decenas, y el número que resulta se multiplica por la misma cifra de las unidades, y este producto que contendrá el duplo de las decenas por las unidades, y el cuadrado de las unidades se resta del resto anterior, con lo cual ya no quedará del número dado mas que el resíduo si le hay. La operacion se plantea y ejecuta de este modo:

Sea estraer la raíz cuadrada de 754238.

Número dado	75.42.38	868. . . . *raíz entera.*
	— 64	
	114.2	166×6
	— 99 6	
	14 63.8	1728×8
	— 13 82 4	
Resíduo.	814	

Luego la raíz cuadrada de 754238 es 868 mas 814 de resíduo.

Puede sin embargo abreviarse la operacion ejecutando las sustracciones al tiempo de multiplicar, del modo siguiente:

754238	868
114.2	166×6
1463.8	1728×8
814	

241. Observacion.—Una cifra hallada para la raíz será mayor que la verdadera, cuando no se pueda verificar la sustraccion, y menor, cuando

resulte un resíduo mayor que el duplo de la raíz (239)

242. *La prueba de esta operacion se verifica elevando al cuadrado la raíz hallada, y agregando el resíduo si le hay. El resultado tiene que ser el número dado.*

Porque todo número, es el cuadrado de su raíz cuadrada.

LECCION 44.

243. *Para estraer la raíz cuadrada de una fraccion decimal, se observa el mismo procedimiento que en los enteros, advirtiendo tan solo que una vez terminada la operacion, se separan con una coma, de derecha á izquierda tantas cifras de la raíz cuantos eran los grupos de cifras decimales. Si el número de estas en el número dado es impar, se agrega un cero á su derecha con lo cual no se altera su valor.* (125)

Porque al considerar como entero á un número que por ejemplo tiene cuatro cifras decimales, lo hacemos 10000 veces mayor, y por tanto la raíz que resulte será 100 veces mayor que la verdadera, cuyo error enmendamos al dividirla por 100 con la coma indicada.

244. *Si una vez terminada la operacion, se quiere aproximar por decimales el resultado de una raíz decimal inexacta, se agregan dos ceros al resíduo y se continúa la operacion, agregando nuevos grupos de dos ceros á los resíduos que vayan resultando; debiendo tenerse presente que*

nunca se obtendrá por este medio un resultado exacto, pues ya se ha dicho que el resíduo de una raiz es un número inconmensurable. (229)

Porque el añadir estos ceros á los resíduos, es lo mismo que añadirlos á la derecha del decimal dado, con lo que éste no se altera.

245. *Igualmente se puede aproximar por decimales la raiz inexacta de un número entero, colocando una coma á continuacion de la raiz, y dos ceros en cada uno de los resíduos que vayan resultando.*

Porque esto es lo mismo que añadir la coma y luego los ceros á la derecha del número dado, lo que no lo altera.

LECCION 45

246. *Para estraer la raiz cuadrada de un quebrado, se estrae la de numerador y denominador, y se divide aquella por esta.* (231) *Si el uno ó ambos términos no tienen raiz exacta, se simplifica; y si tampoco así la tienen, se reduce á decimal, y se estrae la de éste.*

247. *Para estraer la raiz cuadrada de un número mixto, se reduce á quebrado y se estrae la de éste.*

Así, por ejemplo, la raiz cuadrada de $3\frac{1}{5}$ ó sea de $\frac{16}{5}$ aproximada por decimales hasta las milésimas, se estrae del modo siguiente: $\frac{16}{5}=3'2$.

3'20	1'788
2 2.0	27×7
310.0	348×8
3160.0	3568×8
3056	

LECCION 46.

248. *Raiz cúbica de un número, es otro que elevado al cubo produce el propuesto.*

En la estraccion de la raiz cúbica de un número, se distinguen dos casos: 1.° Que el número no pase de 1000. 2.° Que sea mayor.

249. 1.er CASO.—*Para resolver este caso, es preciso saber de memoria los cubos de los diez primeros números tal como se espresan á continuacion:*

Cubos. .	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000
Raices. .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Cada miembro del renglon superior tiene por raiz cúbica su correspondiente del inferior.

Así $\sqrt[3]{125}=5$.

Los indicados diez números son los únicos enteros comprendidos entre uno y mil que tienen raíz cúbica exacta, y *para estraer la raiz cúbica entera de cualquier otro, se toma la raiz del cubo inmediato inferior.*

Así $\sqrt[3]{54}=3$ enteros y 27 de resíduo.

250. TEOREMA.—*El cubo de la suma de dos números consta: del cubo del primero, mas triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas cubo del segundo.*

Así $(5+8)^3 = 5^3 + 3\times 5^2 \times 8 + 3\times 5\times 8^2 + 8^3$

Porque $(5+8)^2 = 5^2 + 2\times 5\times 8 + 8^2$ (A)

Y como $(5+8)^3 = (5+8)^2 \times (5+8)$

Si multiplicamos el 5 por el segundo miembro de la igualdad A y luego el 8 por el mismo miembro, al sumar luego los dos productos nos resultará lo que tratamos de demostrar, como se vé á continuacion:

$5^2 + 2\times 5\times 8 + 8^2 \times (5+8) = 5^2.5 + 2\times 5\times 8.5 + 8^2.5 + 5^2.8 + 2\times 5\times 8.8 + 8^2.8 = 5^3 \times 3 \times 5^2 \times 8 + 3\times 5\times 8^2 + 8^3$

251. COROLARIO 1.°—*El cubo de un número compuesto de decenas y unidades consta: del cubo de decenas, mas triplo del cuadrado de decenas por unidades, mas triplo de decenas por el cuadrado de unidades, mas cubo de unidades.*

Porque este número se puede descomponer en dos sumandos de los cuales el uno estará formado por las decenas, y el otro por las unidades. Así $57^3 = (50+7)^3$

OBSERVACION.—El cubo de las decenas es un número exacto de millares, pues como cubo de un número que termina en un cero, terminará en tres. El triplo del cuadrado de decenas por unidades, pertenece á las centenas como producto que es de un número cualquiera por otro que termina en dos ceros (237, observacion) el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, pertenecerá á las decenas como resultado de multiplicar un número cualquiera por otro que termina en un cero, y el cubo de unidades es un número exacto de unidades, porque ninguno de los cubos de las nueve primeras cifras significativas termina en cero.

252. Corolario 2.º—*Los cubos de dos números de los cuales el uno excede al otro en una unidad, se diferencian en el triplo del cuadrado del menor, mas el triplo de éste, mas uno.* Así 9^3 se diferencia de 8^3, en $3 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1$.

Porque así resulta de verificar la siguiente sustraccion:

$$\begin{array}{r} 9^3 = (8+1)^3 = 8^3 + 3\times 8^2 \times 1 + 3\times 8 \times 1^2 + 1^3 \\ - \quad 8^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline 3\times 8^2 + 3 \times 8 + 1 \end{array}$$

253. De donde se desprende: *Que el resíduo de una raíz cúbica entera, tiene que ser menor que el triplo del cuadrado de la raíz, mas el triplo de esta, mas uno.*

Porque si fuera mayor, la raíz hallada se diferenciaría de la verdadera en más de una unidad, lo que nos indicaría que la operacion estaba mal hecha.

LECCION 47.

254. *Para estraer la raíz cúbica de un número mayor que 1000, se divide por medio de*

puntos en grupos de á tres cifras principiando por la derecha. Se estrae luego la raíz cúbica del primer grupo de la izquierda, y el número que resulte, será la 1.ª cifra de la raíz, cuyo cubo se resta del grupo que la produjo. A la derecha del resto, se baja el grupo siguiente, y el número que resulte despues de separar las dos primeras cifras de la derecha, se divide por el triplo del cuadrado de la raíz hallada; el cociente que resulte, será la segunda cifra de la raíz, la cual se multiplica por el triplo del cuadrado de la primera, y lo que resulte se suma con el triplo de la primera multiplicado por el cuadrado de la segunda, y con el cubo de ésta, teniendo cuidado de colocar estos tres sumandos de tal manera, que la 1.ª cifra de la derecha de cada uno, se encuentre un lugar más hácia la derecha que el anterior. Esta suma, se resta del resto total anterior, y á la derecha del resto que resulte, se baja el grupo siguiente y se divide en la misma forma que el anterior, por el triplo del cuadrado de la raíz hallada. El cociente que resulte, será la tercera cifra de la raíz, con la cual se ejecutan idénticas operaciones que con la segunda, y así se continúa hasta que se hayan bajado todos los grupos del número dado.

Porque al verificar la operacion del modo indicado, discurrimos del modo siguiente: Si se quiere saber cuántas cifras tendrá la raíz, no hay más que recordar, que el cubo de 10, es 1000; el de 1000, 1000000 etc. (222) por consiguiente, si el número tiene seis cifras y por tanto se halla comprendido entre 1000 y 1000000 su raíz cúbica tendrá dos, por hallarse incluida entre 10 y 100. Ahora bien; en este supuesto, ya sabemos que el número dado, es el cubo de uno que consta de decenas y unidades, y por consiguiente, en él se encontrarán el cubo de las decenas, mas el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, mas el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, mas el cubo de las unidades, mas el residuo si le hay. Si estraemos por lo tanto la raíz cúbica de los millares, y restamos de estos el cubo de la cifra hallada, lo habremos descartado del cubo de las decenas de la raíz. Al hallar luego el triplo del cuadrado de las decenas, observaremos que resultan centenas, y por tanto en las centenas del resto anterior unido al grupo siguiente, se buscará la cifra de las unidades, y por esto se hace abstraccion de las dos primeras cifras de la derecha, del resto indicado. Hallada la cifra de las unidades, ya se pueden formar las otras tres partes del cubo de la raíz para restarlo del resíduo anterior, para lo cual, se multiplica el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, y se suma lo que resulte, con el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, y con el cubo de las unidades. Estos tres sumandos se colocan de la manera indicada en la regla, porque el 1.° corresponde al órden de las centenas, el 2.° al de las decenas, y el 3.° al de las unidades (251, observacion). Una vez restado el número resultante del resto anterior, ya no queda del número dado mas que el resíduo si la raíz es entera, y cero, si es exacta.

*

La operacion se plantea y ejecuta como sigue

Sea estraer la $\sqrt[3]{575428}$

número dado. 575.428	83........raiz entera.
$-$ 512	192. .....triplo del cuadrado de decenas.
634.28	$\times$3. .....unidades.
$-$ 59787	576. .....triplo del cuadrado de decenas por unidades.
resíduo.... 3641	+216. ..triplo de decenas por cuadrado de unidades
	+ 27. .cubo de unidades.
	59787

Luego $\sqrt[3]{575428}$=83 enteros, y 3641 de resíduo.

255. Observacion: Una cifra hallada para la raíz será mayor que la verdadera, cuando no pueda verificarse la sustraccion; y menor cuando resulte un residuo mayor que el triplo del cuadrado de la raíz mas el triplo de ésta, mas uno (253).

256. *La prueba de esta operacion se verifica elevando al cubo la raíz hallada y agregando el resíduo si le hay. El resultado tiene que ser el número dado.*

Porque todo número es el cubo de su raíz cúbica.

LECCION 48.

257. *Para estraer la raíz cúbica de una fraccion decimal, se observa el mismo procedi-*

miento que en los enteros; advirtiendo tan solo que una vez terminada la operacion, se separan con una coma de derecha á izquierda tantas cifras de la raíz, cuantos eran los grupos de cifras decimales. Si el número de estas en el número dado no es múltiplo de tres, se agregan á su derecha los ceros necesarios para que lo sea con lo cual no se altera su valor.

Porque al considerar como entero á un número, que por ejemplo tiene seis cifras decimales, lo hacemos un millon de veces mayor y por tanto la raíz que resulte será 100 veces mayor que la verdadera, cuyo error enmendamos al dividirla por 100 por medio de la coma indicada.

258. *Si una vez terminada la operacion se quiere aproximar por decimales el resultado de una raíz cúbica decimal inexacta, se agregan tres ceros al resíduo y se continúa la operacion agregando nuevos grupos de tres ceros á los resíduos que vayan resultando; debiendo tenerse presente, que nunca se obtendrá por este medio un resultado exacto, pues ya se ha dicho que el resíduo de una raíz es un número inconmensurable* (229).

Porque el añadir estos ceros á los resíduos, es lo mismo que añadirlos á la derecha del decimal dado, con lo que éste no se altera.

259. *Igualmente se puede aproximar por decimales la raíz cúbica inexacta de un número entero, colocando una coma á continuacion de la raíz, y tres ceros en cada uno de los resíduos que vayan resultando.*

Porque esto es lo mismo que añadir la coma y luego los ceros á la derecha del número dado, lo que no lo altera.

LECCION 49.

260. *Para estraer la raíz cúbica de un quebrado, se estrae la del numerador y denominador, y se divide aquella por esta. (231) Si el uno ó ambos términos no tienen raíz cúbica exacta, se simplifica el quebrado; y si tampoco así la tienen, se reduce á decimal y se estrae la de éste.*

Para estraer la raíz cúbica de un número mixto, se reduce á quebrado y se estrae la de éste.

Así, por ejemplo, la raíz cúbica de $2\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$ espresion que reducida á fraccion decimal nos da 2'6 se estraerá del modo siguiente:

2'600 —1	1'375
16.00	9
—1197	
4030.00	507
—374353	
286470.00	56307
—28256375	
390625	

Luego la raíz cúbica de $2\frac{3}{5}$ aproximada hasta las milésimas, es, 1'375 con 390625 de resíduo.

Observacion general. Si la fraccion decimal es periódica, para aproximar su raíz, cuadrada ó cúbica, en lugar de añadir ceros á los resíduos, se iran agregando períodos de dos ó tres cifras periódicas respectivamente, conservando siempre el órden que estas tengan en el período.

Porque á toda fraccion periódica, se le puede agregar á la derecha el período cuantas veces se quiera con lo cual se va aproximando á un resultado exacto, sin que sea posible llegar á él jamás.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

hasta las milésimas, esto 4375 con 399935 de residuo.

Observacion general. Si la fraccion decimal es periódica, para aproximar su raíz, cuadrada ó cúbica, en lugar de añadir ceros á los residuos, se irán agregando períodos de dos ó tres cifras periódicas respectivamente, conservando siempre el órden que estas tengan en el período.

Porque á toda fraccion periódica, se le puede agregar á la derecha el período cuantas veces se quiera; con lo cual se va aproximando á un resultado exacto, sin que sea posible llegar á él jamás.

FIN DE LA ARITMETICA.

ÁLGEBRA.

SEGUNDA PARTE.

LECCION 50.

1. *Álgebra es la ciencia que trata de la cantidad en general, prescindiendo de su naturaleza.* (4, Arit.ª)

2. Por consiguiente el Álgebra, necesita signos privados de todo valor numérico, y estos son los siguientes:

1.° *Para espresar una cantidad simple, emplea las primeras letras del alfabeto minúsculo.* Así, por ejemplo, el número 200 puede espresarse con la letra *a*.

2.° *Para las cantidades compuestas, como por ejemplo, un complejo, las letras del alfabeto mayúsculo.*

3.° *Para las incógnitas ó desconocidas, las últimas letras del alfabeto;* siendo la x la que se emplea más comunmente.

4.° *Las cantidades análogas se emplean acentuando las letras.* Así x x' x'' x''' indican cantidades análogas y se leen: x, x prima, x segunda, x tercera.

5.° *A veces para fórmulas importantes, se adoptan algunas letras del alfabeto griego.*

Con estos signos pueden expresarse todas las cantidades imaginables; pues si bien una letra no puede tener dos valores numéricos diferentes en el mismo problema, estos valores pueden variar cuanto se quiera desde el momento en que se emplee para problemas distintos.

3. Los signos empleados por el Álgebra para indicar las operaciones, son los mismos que en Aritmética con las adiciones siguientes:

1.ª Además de los signos $+$ y $-$ para la adicion y sustraccion, se emplea el signo $\pm$ que se lee *más ménos* y se llama *signo de ambigüedad.* Nos indica que la cantidad que se halla detrás de él, puede sumarse ó restarse de la que está delante.

2.ª Además de los signos $\times$ ó. que en Aritmética se emplean para la multiplicacion, se puede indicar en Álgebra esta operacion, con sólo colocar los dos factores juntos sin signo alguno.

Así $2\,a\,b\,c = 2 \times a \times b \times c$.

La division, potencias, y raices, se indican lo mismo que en Aritmética.

3.ª Contrario al signo de igualdad, existe el de *desigualdad* que cuando se escribe así; $>$ se lee *mayor que;* y si de este otro modo; $<$ *menor que.*

Así; $a > b$ se lee: a mayor que b.

4. *Llámase coeficiente de una espresion al-*

gebráica, el factor numérico ó literal que la precede.

Así en la espresion; $4\,a\,b\,c\,e$ el coeficiente de $a\,b\,c\,e$ será 4. El de $b\,c\,e$ será $4\,a$, y el de e será $4\,a\,b\,c$.

5. *Esponente de una espresion, es el número ó letra que indica el grado de la potencia á que se ha de elevar.*

Así en la espresion; $4\,a^2\,b^4\,c^m$ serán exponentes los números *2* y *4* y la letra m.

6. De lo expuesto se deduce, que el *coeficiente* de una espresion algebráica, indica las veces que esta se ha de repetir *por sumando*, y el *exponente*, las que se ha de tomar *por factor*.

Así; $4\,a\,b = a\,b + a\,b + a\,b + a\,b.$

Y $a^3 = a \times a \times a. = a\,a\,a.$

7. El paréntesis, tiene mucha aplicacion en Álgebra; y se emplea, para que los signos que á él se refieran, afecten á todo el resultado de las operaciones indicadas que contiene.

Así $(a + b)\ (a - b)$ indica que la suma de a y de b se ha de multiplicar por su diferencia.

8. El lenguaje algebráico lleva sobre el aritmético dos importantísimas ventajas y son: *la brevedad y la generalidad.* La primera procede de que una cantidad por grande que sea, puede representarse con una letra; y la segunda de que en Álgebra no desaparecen los datos por dejarse indicadas todas las operaciones; y una vez resuelto un problema, resulta una fórmula que es una espresion abreviada por medio de la cual pueden resolverse todos los problemas de la misma naturaleza.

LECCION 51.

9. Las cantidades algebráicas se dividen en *positivas* y *negativas*.

Cantidad positiva, es la que vale más que cero, y por tanto, añadida á otra cantidad, la aumenta, y negativa es la que siendo menor que cero, añadida á otra cantidad, la disminuye.

10. Para espresar la cualidad de una cantidad, se la antepone el signo + si es positiva, y — si es negativa; advirtiendo, que si una cantidad positiva va sola, ó al principio de una cantidad compuesta, no necesita llevar el signo +.

Así $4a^2b^3 - 7a^8 + 4 - a$ nos indica que la primera y tercera cantidad son positivas; y la segunda y cuarta, negativas.

11. *En álgebra, puede restarse de una cantidad menor otra mayor; para lo cual, se resta la menor de la mayor, y al resultado se pone signo menos, por ser cantidad negativa.*

Así $7 - 12 = -5$ porque $7 - 12 = 7 - 7 - 5$ y como $7 - 7$ se destruyen, queda de resultado -5.

12. *Se llama espresion algebráica ó literal, el conjunto de números y letras, unidos por los signos de las operaciones.*

13. Las cantidades algebráicas pueden ser:

1.° *Enteras, si no llevan ningun denominador.* Como $4a^2bc$.

2.° *Fraccionarias si lo llevan.* Como $\frac{5a^7b}{3a^4}$

3.° *Racionales, si no llevan ningun radical.* Como $-7a^4b$.

4.° *Radicales si lo llevan.* Como $\sqrt{3a^2bc}$

14. *Término, es cada una de las partes de una espresion comprendida entre signos + ó —.*

15. Una espresion algebráica recibe el nombre de *monomio*, si solo consta de un término; *binomio* si consta de dos; *trinomio* si de tres, y *polinomio* si de más de tres.

Así $\frac{4a^2}{b}$ es un monomio; $a - b$, un binomio; $3a + \frac{4}{a} - \sqrt{56}$ un trinomio, y $2a + 5ab - 3 + a^4 + 8 - \frac{2}{a} + 2$, un polinomio. Hay que advertir sin embargo, que muy frecuentemente se da el nombre de polinomio á toda espresion que tiene más de un término.

16. *Dimension de un término, es cada uno de sus factores literales; y grado del mismo, es el número de dimensiones.* Así $a^2b^3 = aabbb$ es de quinto grado por tener cinco dimensiones.

17. Un polinomio es *homogéneo*, cuando tiene todos sus términos de igual grado; y *heterogéneo* en el caso contrario.

El grado de un polinomio homogéneo, es el de uno de sus términos.

18. Polinomio ordenado, es aquel cuyos términos se hallan colocados de manera, que los esponentes de la letra más repetida, vayan creciendo ó decreciendo gradualmente.

Así el polinomio; $4a^2 - 7a^5b + 3a - 8 + a^6 - bc$, ordenado con relacion á las potencias descendentes de la letra a, nos da por resultado;

$a^6 - 7a^5b + 4a^2 - 3a - bc - 8$; y si lo colocamos en un órden inverso, resultará ordenado por las potencias ascendentes de la misma letra *a*.

LECCION 52.

19. *Valor numérico de una espresion literal, es el que resulta de colocar en lugar de las letras sus valores numéricos, y ejecutar las operaciones indicadas.*

Así en el supuesto de que *a* sea igual á 2, $b=3$, y $c=4$ tendremos: $4\,a^2\sqrt{c}+2\,b^3=4\times 2^2\times\sqrt{4}+2\times 3^3=16-2+54=68$.

20. *El órden de los términos no altera un polinomio.*

Porque cualquiera que sea el lugar donde se encuentren, los términos positivos, aumentarán el valor de la espresion, y los negativos la disminuirán.

21. Como puede observarse, en un término algebráico pueden considerarse cuatro elementos, á saber: *signo, coeficiente, letras* y *esponentes.*

Ahora bien; dos términos son *iguales*, si lo son estos cuatro elementos; y *semejantes*, si tan solo tienen iguales las letras y sus esponentes respectivos. Así $4a^2b^3\,c$, y $-7a^2\,b^3\,c$ son semejantes.

22. *Para reducir términos semejantes, se suman los coeficientes positivos, y se restan los negativos dejando en el resultado las mismas letras y esponentes.*

Si el polinomio que se trata de reducir ó simplificar consta de muchos términos, se reducen primero los que sean semejantes al primero, luego los que lo sean al primero que quede sin reducir, y así sucesivamente.

Así $4a^2 - 7a^2b + 3a^4 - c + 7a^2 - 5a^4 + 8 - 12a^2b = 11a^2 - 19a^2b - 2a^4 - c + 8$.

Porque al verificar así la reduccion, consideramos á los términos semejantes como números homogéneos, cuya especie está formada por el conjunto de letras y esponentes.

23. *Adicion algebráica, es una operacion que tiene por objeto reunir en una sola várias espresiones algebráicas, conservando su cualidad.*

24. *Por consiguiente, para sumar cantidades algebráicas, se escriben unas á continuacion de otras con los mismos signos que lleven.*

Así $(4a^2b - 3a^5) + (-8a^4 + 2a - 5) + (3a^2b - 7a^5 + 8) = 4a^2b - 3a^5 - 8a^4 + 2a - 5 + 3a^2b - 7a^5 + 8$ y reduciendo los términos semejantes $= 7a^2b - 10a^5 - 8a^4 + 2a - 3$.

Observacion.—Si los sumandos fuesen muy complicados, puede hacerse más fácil la reduccion, ordenándolos con relacion á una letra, y colocándolos unos debajo de otros.

LECCION 53.

25. *La sustraccion algebráica tiene por objeto, hallar un sumando algebráico dada la suma y el otro sumando.*

26. *Para verificar esta operacion, se escriben*

todos los términos del minuendo, con los mismos signos que lleven, y á continuacion los del sustraendo con signos contrarios.

Porque el resto que resulte, sumado algebráicamente con el sustraendo, producirá el minuendo.

Así $(2a^4b+7ac-5+3a^4b)-(-7a^5+8+4a^2)=2a^4b+7ac-5+3a^4b+7a^5-8-4a^2$ y simplificado$=5a^4b+7ac-13+7a^5-4a^2$

27. Observaciones.—1.ª En esta operacion tambien se puede colocar el sustraendo debajo del minuendo ambos ordenados para facilitar la reduccion.

2.º Para mudar de signo á vários términos de una espresion, se encierran en un paréntesis delante del cual se pone signo —

Porque si se verifica la sustraccion indicada que resulta de hacerlo así, producirá el número dado.

Así $4a-2ab+c-5-8a^2c+4a^2=-2ab-5+4a^2-(-4a-c+8a^2c)$ en cuya espresion aparecen con diferente signo los tres términos del paréntesis.

LECCION 54.

28. *Multiplicacion de dos factores literales, es una operacion que tiene por objeto, determinar una espresion algebráica que sea en cantidad y cualidad respecto á uno de ellos, lo que el otro es respecto á la unidad positiva.*

29. Tres casos pueden presentarse en esta

operacion: 1.° Multiplicar un monomio por otro: 2.° Un polinomio por un monomio: 3.° Dos polinomios.

30. 1.er CASO.—*Para determinar la cualidad del producto, ó sea el signo que ha de llevar, se sigue la regla siguiente, llamada de los signos:*

$$+ \times + = + \qquad + \times - = -$$
$$- \times - = + \qquad - \times + = -$$

ó lo que es lo mismo; *factores de igual cualidad, dan producto positivo; y de cualidad distinta, negativo.*

Para demostrarlo, no hay mas que aplicar á cada uno de los cuatro casos anteriores el principio que de la definicion se desprende, de que el signo del producto ha de ser respecto al de uno de los factores, lo que el del otro es respecto al signo $+$

31. De la regla anterior se desprende, que *un producto será negativo, cuando entre á constituirlo un número impar de factores negativos; y por tanto, todas las potencias de grado impar de una cantidad negativa, serán negativas.*

32. Dada la regla de los signos, que debe observarse en los tres casos de la multiplicacion, ya podemos pasar á enunciar; que *para multiplicar un monómio por otro, se multiplican los coeficientes, se suman los exponentes de las letras iguales, y las que tan solo entren en un factor, se dejan en el producto con el mismo esponente que llevaban.*

Así; $4a^2 b^3 c \times -7 a b^5 fg = -28a^3 b^8 cfg.$

Porque así, resulta de descomponer las potencias en factores, y alterar el órden de estos de manera que queden próximos los de la misma índole. De modo, que en el ejemplo anterior tendremos:

$4a^2b^3c \times -7ab^2fg = 4 \times -7.\ a.\ a.\ a.\ b.\ b.\ b.\ b.\ b.\ c.\ fg = 28a^3b^5cfg.$

LECCION 55.

33. 2.º CASO.—*Para multiplicar un polinómio por un monómio, se multiplica cada término del polinomio por el monómio; y la reunion de estos productos parciales, forma el producto total.*

Así; $(4a^2b - 7a^4 + 8a^3c - 9) \times 5a^2bd = 20a^4b^2d - 35a^6bd + 40a^5cbd - 45a^2bd.$

Porque en realidad, este caso se reduce á buscar un producto en el que se encuentren con la cualidad que les corresponda, todos los productos parciales resultantes de multiplicar por el monomio dado, cada uno de los términos del polinomio; y la generalidad con que se ha demostrado la regla de los signos (30) nos indica, que no es un inconveniente la existencia de términos negativos en el polinomio dado.

34. OBSERVACION. — Si en vários términos entra un mismo factor, puede éste sacarse por factor comun; para lo cual, *se escribe fuera de un paréntesis en cuyo interior se coloca lo que quedó de los términos que lo llevaban.*

Así; $4a^2b + 7abc - 5a^3 = (4ab + 7bc - 5a^2)a.$

Porque con este procedimiento no se hace mas que deshacer una multiplicacion algebráica, ó sea colocar en forma de multiplicacion indicada la que ya estaba resuelta.

LECCION 56.

35. 3.^{er} CASO—*Para multiplicar un polinómio por otro, se multiplica cada término del multiplicador por todo el multiplicando, y la reunion de todos estos productos parciales, formará el producto total.*

Así; $(3a^4+7a^2bc-8-5b^2)(5a^2-7a^4+5)$ $=15a^6+35a^4bc-40a^2-25a^2b^2-21a^8-49a^6bc+56a^4+35a^4b^2+15a^4+35a^2bc-40-25b^2$.

Porque en este caso se trata de multiplicar á un polinomio por várias cantidades, y sea cualquiera la cualidad de éstas, es evidente que el producto que cuente sumados algebráicamente todos los resultados de estas multiplicaciones parciales del 2.° caso, será el verdadero producto total.

Para facilitar la reduccion de los términos semejantes del producto, se puede colocar el multiplicador debajo del multiplicando, y ambos ordenados con relacion á una letra, en cuyo caso los términos semejantes que resulten en los productos parciales, deberán escribirse en columna.

36. OBSERVACIONES.—1.ª *El númerode términos del producto, es igual al número de términos del multiplicando, multiplicado por el número de términos del multiplicador.*

Así; si el multiplicando lleva 8 términos y el multiplicador 4, el producto llevará 32.

Porque cada término del multiplicador, al multiplicarlo por cada uno de los del multiplicando, nos da tantos términos como éste llevaba.

2.ª—La multiplicacion de polinomios enseña á determinar fórmulas tan importantes como las siguientes:

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$ (A) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (B).

La fórmula (A) nos indica que el *cuadrado de la diferencia entre dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, menos el duplo de la primera por la segunda, mas el cuadrado de la segunda, y la fórmula* (B) nos dice, que *el cubo de la diferencia de dos cantidades, es igual al cubo de la primera, menos el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, mas el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.*

LECCION 57.

37. *Division algebráica es una operacion que tiene por objeto, hallar una cantidad que multiplicada por el divisor produzca el dividendo.*

En esta operacion se distinguen tres casos, lo mismo que en la multiplicacion: 1.° Dividir un monomio por otro: 2.° Un polinomio por un monomio. 3.° Un polinomio por otro.

38. La regla de los signos en la division es análoga á la multiplicacion, de manera que *términos de la misma cualidad dan cociente positivo, y de cualidad distinta negativo;* lo cual se puede expresar de éste modo:

$$\frac{+}{+}=+\quad \frac{+}{-}=-\quad \frac{-}{+}=-\quad \frac{-}{-}=+$$

Porque en todos los casos así resueltos, el cociente multiplicado por el divisor produce el dividendo, y por consiguiente, la operacion está bien hecha (37).

39. 1.er caso.—*Para dividir un monomio por otro, se pone al cociente el signo que resulte segun la regla anterior; luégo se dividen los coeficientes, y se restan los exponentes de las letras iguales, colocando en el cociente las letras que entran tan solo en el dividendo, lo mismo que en él se hallan.*

Así: $12\,a^4\,b^2\,cf : -4a^2\,b\,c = -3\,a^2\,bf$.

Porque el cociente así obtenido, multiplicado por el divisor, produce el dividendo.

40. Observaciones.—1.a *Si á los dos términos se cambia de signo, el cociente no se altera.*

Porque el mismo resultado da $\frac{+}{+}$ que $\frac{-}{-}$ y $\frac{+}{-}$ que $\frac{-}{+}$ (38).

2.a Si una letra lleva igual exponente en ámbos términos, puede optarse entre no colocarla en el cociente, ó colocarla con exponente cero, puesto que en ámbos casos multiplicado el cociente por el divisor, dará el dividendo; y como solamente la unidad tiene la propiedad de no alterar un producto aunque se la coloque como factor, deduciremos; *que toda cantidad con exponente cero, es igual á la unidad.*

Así: $a^0 = 1$ $-20^0 = 1$ $a^2 b^0 = a^2$.

3.ª *La division no será posible en Álgebra, cuando en el divisor exista una letra que falte en el dividendo, ó que lleve en éste menor exponente que en aquel. Entonces la division se deja indicada.*

Porque en este caso, cualquiera que fuere el exponente que pusiéramos á dicha letra en el cociente, sumado con el de la misma letra del divisor, nos daría uno mayor que el del dividendo.

LECCION 58.

41. 2.º CASO.—*Para dividir un polinómio por un monómio, se divide cada término del polinómio, por el monómio, y la reunion de todos los cocientes parciales con la cualidad que les corresponda, forma el cociente total.*

Porque en la division así practicada, el cociente multiplicado por el divisor tiene que ser igual al dividendo; y por tanto la operacion está bien hecha.

Así; $(8a^4 b^2 - 6a^2 b^3 c + 5a^8 c) : 2a^2 = 4a^2 b^2 - 3b^3 c + \frac{5}{2} a^6 c.$

42. 3.^{er} CASO.—*Para dividir un polinómio por otro, se ordenan ámbos con relacion á una letra, y se divide el primer término del dividendo, por el 1.° del divisor; el resultado será el 1.° del cociente, que multiplicado por todo el divisor se resta algebráicamente del dividendo. Redúcense luego los términos semejantes, y la division del 1.^{er} término del resto por el 1.° del divisor, dará el 2.° del cociente, que se multiplica por el divisor y se resta algebráicamente del resto anterior. Así se continúa hasta llegar á un resíduo cero, ó á una division parcial imposible; en cuyo caso se deja la parte restante de la operacion en forma de division indicada.*

Porque siendo el dividendo un producto, y el cociente y divisor sus factores, en dicho dividendo se halla comprendida la suma algebráica de todos los productos parciales resultado de multiplicar cada término del multiplicador, por todo el multiplicando; y al verificar la operacion del modo indicado, no hacemos más, que ir restando algebráicamente de dicho dividendo los indicados productos parciales; advirtiendo, que si para hallar un término del cociente dividimos tan sólo el 1.^{er} término del dividendo por el 1.° del divisor, es porque el 1.^{er} término del dividendo, ó sea del producto ordenado, era el resultado de multiplicar el 1.° del multiplicando, por el 1.° del multiplicador; y otro tanto puede decirse de la formacion de los demás términos del cociente.

La operacion se plantea y ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{l|l} 8a^{11}b-12a^9-28a^8bc+42a^6c & -4a^7b+6a^5. \\ \underline{-8a^{11}b+12a^9\qquad\qquad\qquad\qquad} & \overline{-2a^4+7ac.} \\ \quad -28a^8bc+42a^6c & \\ \quad \underline{+28a^8bc-42a^6c} & \\ \text{Resíduo. } 0 & \end{array}$$

Como se vé en la operacion anterior, las sustracciones se hacen al propio tiempo que las multiplicaciones con sólo cambiar de signo álos productos.

LECCION 59.

43. *Llámase fraccion literal, á toda cantidad algebráica que lleva un denominador ó divisor.*

Así; $\frac{a}{b}$, $\frac{3a^2b}{-4a}$ son fracciones literales.

44. *Una fraccion literal cuyos términos son de igual cualidad, aumenta ó disminuye como aumenta ó disminuye su numerador, y como disminuye ó aumenta su denominador.*

Porque siendo en este caso el quebrado positivo, (38) se halla sujeto á las reglas de los quebrados numéricos.

Una fraccion literal cuyos términos sean de cualidad contraria, aumenta de un modo contrario al anteriormente mencionado.

Porque siendo en este caso el quebrado negativo (38) cuanto más aumente su valor absoluto, más disminuirá el relativo á la unidad positiva.

Así; $\frac{2a}{b} > \frac{a}{b}, \frac{-a}{-2b} < \frac{a}{b}, \frac{-a}{b} > \frac{-2a}{b}, \frac{-a}{2b} > \frac{-a}{b}$

45. *Para simplificar una fraccion literal, se suprimen los factores comunes á numerador y denominador, para lo cual se simplifica el quebrado formado por los coeficientes, y se restan los exponentes de las letras iguales, dejando éstas tan sólo en el término en que llevaba exponente mayor.*

Así; $\frac{12a^4b^3cfm}{3a^2bn} = \frac{4a^2b^2cfm}{n}$

Porque de este modo dividimos ambos términos por una misma cantidad que es la formada por los factores suprimidos, con lo cual el quebrado no se altera.

46. *Para reducir fracciones literales á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás.*

Así; $\frac{a^2}{b}, \frac{3b}{2}, \frac{b^2}{c} = \frac{2a^2c}{2bc}, \frac{3b^2c}{2bc}, \frac{2b^3}{2bc}$

Porque al verificarlo así, multiplicamos los dos términos de cada una por el mismo número con lo cual no se altera.

47. *Para determinar el mínimo comun múltiplo de várias expresiones algebráicas, no hay mas que formar una expresion compuesta de todas las letras diferentes con el mayor exponente que lleven, y ponerla por coeficiente el mínimo comun múltiplo de todos los de las expresiones dadas.* (Arit. 197).

Porque con este procedimiento, obramos exáctamente lo mismo que en Aritmética.

48. Por medio del mínimo comun múltiplo pueden reducirse vários quebrados literales al menor denominador comun posible, del mismo modo que en Aritmética. (Arit. 202).

LECCION 60.

49. *La adicion de las fracciones literales se verifica, reduciéndolas á un comun denominador si no lo tienen, y sumando luego algebráicamente los numeradores, á cuya suma se pondrá el denominador comun.*

Así; $\frac{a}{b^2}+\frac{2a^2}{b^2}+\frac{4a}{b^2}=\frac{a+2a^2+4a}{b^2}=\frac{5a+2a^2}{b^2}$

Porque así quedó demostrado en la adicion de quebrados numéricos. (Arit. 97).

50 *La sustraccion de fracciones literales se verifica restando los numeradores y poniendo al resto el denominador comun, y si no lo tienen, se reducen á él.* (Arit. 100.)

Así $\frac{4a}{2ab}-\frac{7b^2}{3ac}=\frac{12a^2c}{6a^2bc}-\frac{14ab^3}{6a^2bc}=\frac{12a^2c-14ab^3}{6a^2bc}$

51. *Para reducir una expresion mista á fraccion literal, se multiplica la parte entera por el denominador, y se suma ó resta al producto el numerador, segun la cualidad del quebrado. Al resultado se pone el mismo denominador.*

Así; $4a^2+\frac{3bc}{5a}=\frac{20a^3+3bc}{5a}$ $\quad 7a^2-\frac{4a}{5b}=\frac{35a^2b-4a}{5b}$

LECCION 61.

52. *Para multiplicar dos fracciones literales, se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.*

53. *Para multiplicar una expresion entera por una fraccion literal, se multiplica la expresion entera por el numerador de la fraccion, y al producto se pone el denominador de esta.*

Así; $\frac{3a}{2b} \times \frac{2c^2}{d} = \frac{6ac^2}{2bd}$ y $5ab^2 \times \frac{3ab}{5d} = \frac{15a^2b^3}{5d}$

54. *Para dividir una fraccion literal por otra, se multiplica el dividendo por el divisor invertido.*

Así; $\frac{4a^2}{5b^3} : \frac{3ab^2}{7bc} = \frac{28a^2bc}{15ab^5}$

55. *Para dividir una expresion entera por una fraccion literal, se multiplica la espresion entera, por la fraccion invertida.*

Así; $3a^2b : \frac{4a^5c}{7b^4d} = \frac{21a^2b^5d}{4a^5c}$

56. *Para dividir una fraccion literal por una expresion entera, se multiplica el denominador por la expresion entera, dejando el mismo numerador.*

Así; $\frac{4a^2c}{7c^3} : 3a^7b = \frac{4a^2c}{21a^7bc^3}$

LECCION 62.

57. *La adicion, sustraccion, multiplicacion y division de las espresiones mixtas, se resuelven reduciéndolas á fracciones literales, con lo cual*

quedan estas operaciones reducidas á las anteriormente esplicadas.

Veansé algunos ejemplos:

$$(1.^o)\ \left(2a^3+\frac{a^4}{2b}\right)+\left(3b^2-\frac{7a^2}{b}\right)=\frac{4a^3b+a^4}{2b}$$

$$+\frac{3b^3-7a^2}{b}=\frac{4a^3b^2+a^4b}{2b^2}+\frac{6b^4-14a^2b}{2b^2}$$

$$=\frac{4a^3b^2+a^4b+6b^4-14a^2b}{2b^2}$$

$$(2.^o)\ \left(a^2+\frac{b^2}{c}\right)\times\left(b^3+\frac{2a}{4c}\right)=\frac{a^2c+b^2}{c}\times$$

$$\frac{4b^3c+2a}{4c}=\frac{4a^2b^3c^2+4b^5c+2a^3c+2ab^2}{4c^2}$$

58. Observacion. Como ha podido verse, las operaciones que se ejecutan con las fracciones literales, son las mismas que las de los quebrados numéricos y en su ejecucion, no hay mas diferencia que la que proviene de la cualidad negativa que tienen algunas fracciones literales. Por esta razon pueden servir de demostraciones las dadas para los quebrados numéricos.

LECCION 63.

59. *Se llama ecuacion, á toda igualdad en que entran una ó varias cantidades desconocidas, llamadas incógnitas.*

La diferencia entre igualdad y ecuacion consiste, en que en la 1.ª no entran incógnitas.

60. La ecuacion se llama *numérica*, cuando en ella no entran mas letras que las incógnitas, y *literal*, cuando entra alguna letra que no sea incógnita.

61. *Identidad es una igualdad que siempre es verdadera, cualquiera que sea el valor que se dé á sus términos.*

Así $4a^2 \times 3b^3c = 12a^2b^3c$ es una identidad.

62. *Resolver una ecuacion, es hallar los valores de sus incógnitas; entendiendo por valor de una incógnita, la cantidad numérica equivalente á ella.*

63. Las ecuaciones se llaman de *primer grado*, cuando el mayor exponente de la incógnita es 1; de *segundo grado*, cuando es 2; y así sucesivamente.

La ecuacion se llama *determinada*, cuando sus incógnitas tienen un número limitado de valores, é *indeterminada*, en el caso contrario.

64. Toda ecuacion necesita para ser resuelta, estar preparada, ó sea reunir ciertas condiciones necesarias para su resolucion.

Estas condiciones son las siguientes:

1.ª Carecer de denominadores.

2.ª Hallarse ejecutadas todas las operaciones indicadas.

3.ª Hallarse en un miembro todas las cantidades incógnitas y en otro las conocidas.

4.ª Hallarse ejecutada la reduccion de términos semejantes.

5.ª Ser positivo el término donde entre la incógnita con mayor potencia.

Casi todas estas operaciones se fundan en el siguiente

65. Axioma. *Una ecuacion no se altera sumando, restando, multiplicando, dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad signifi-*

cativa, ni tampoco elevándolos á la misma potencia ó extrayendo de ellos una raíz del mismo grado.

66. *Para quitar los denominadores á una ecuacion, se multiplica el numerador de cada fraccion, por el producto de los denominadores de las demás, y los términos enteros, por el producto de todos los denominadores.*

Porque de este modo quedan todos los términos multiplicados por un mismo número, que es el producto de los denominadores, con lo cual la ecuacion no se altera. (65)

Si los denominadores tienen factores comunes, es mas sencillo multiplicar todos los términos por el mínimo comun múltiplo de los denominadores.

67. *Para cambiar un término de un miembro á otro, no hay mas que ponerle signo contrario al hacer la traslacion.*

Porque así resulta de restar algebráicamente dicho término, de los dos miembros; con lo que la ecuacion no se altera. (65)

Así $4x^2-8=2x+20$ será igual á $4x^2-8+8-2x=2x+20+8-2x$ ó lo que es lo mismo, $4x^2-2x=28$, en cuya ecuacion se ha trasladado un término desconocido al primer miembro, y otro conocido al segundo.

68. *Para cambiar de signo al término en donde la incógnita lleve mayor exponente, se cambia el signo á todos los términos de la ecuacion.*

Porque así resulta de multiplicarlos todos por -1 con lo que la ecuacion no se altera.

69. Por medio de las reglas anteriores se puede preparar una ecuacion, ó sea conseguir que reuna las circunstancias antes mencionadas, advirtiendo, que no siempre es preciso ejecutar todas las transformaciones anteriores, por reunir la ecuacion algunas de las condiciones.

Prepárese la ecuacion siguiente:

$$-\frac{4x}{3}-\frac{x}{2}+8=13+\frac{2}{5}-\frac{3x}{3}$$

Quitando los denominadores resulta: (66)

$$-120x-45x+720=1170+36-90x$$

No habiendo operaciones indicadas, pasaremos á hacer la *transposicion* de términos desconocidos al primer miembro, y de los conocidos al segundo. (67)

$$-120x-45x+90x=1170+36-720.$$

Verificada la reduccion de términos semejantes resulta:

$$-75x=486$$

Y cambiando de signo á toda la ecuacion con objeto de que el término de la incógnita sea positivo, tendremos la ecuacion preparada.

$$75x=-486.$$

LECCION 64.

70. *Ecuacion de primer grado con una incógnita, es aquella en que tan solo entra una incógnita, y esta, elevada á la 1.ª potencia.*

71. Una ecuacion de esta clase, una vez preparada queda, reducida á la siguiente fórmula general.

$$A\,x = \pm B$$

lo que evidentemente significa: A el coeficiente de la incógnita, que ha de ser una cantidad conocida; x, la incógnita de primer grado; $=$ el signo de igualdad; $\pm$ que el segundo miembro puede ser positivo ó negativo; y B, una cantidad conocida.

Para obtener la fórmula de resolucion de estas ecuaciones se dividen los dos términos de la anterior fórmula por A lo que nos da.

$$\frac{A\,x}{A} = \pm \frac{B}{A}$$

y suprimiendo en el primer miembro el factor A comun á numerador y denominador, resulta la importante fórmula:

$$x = \pm \frac{B}{A}$$

la que traducida al lenguage vulgar nos indica que

72. *Para resolver una ecuacion de primer grado con una incógnita, se divide el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita.*

Así en la ecuacion preparada $3\,x = 27$ tendremos; $x = \frac{27}{3} = 9$.

73. *La prueba de la operacion se verifica, sustituyendo el valor hallado para la incógnita*

en el lugar de esta; y la ecuacion tiene que convertirse en una identidad.

Verificándolo así en la anterior ecuacion resulta; $3 \times 9 = 27$. Luego la operacion está bien hecha.

74. OBSERVACION.—Toda ecuacion de 1.er grado con una incógnita, debe ser determinada, pues tan sólo hay una cantidad que pueda convertirla en identidad.

75. *La resolucion de un problema de ecuaciones, consta de dos partes: 1.ª Planteo del problema. 2.ª Resolucion de las ecuaciones que lo constituyan.*

76. *Para plantear un problema que haya de resolverse por una ecuacion de 1er grado, se forma con los datos una ecuacion, en la que aparezcan indicadas las operaciones que se practicarian para comprobar el valor de la incógnita, si este fuere conocido; y para resolverlo se prepara la ecuacion, y luego se despeja la incógnita por medio de las reglas dadas anteriormente.*

Resuélvase por vía de ejemplo el siguiente

PROBLEMA.—¿Cuántos alumnos asisten á una cátedra, en el supuesto de que el duplo de ellos, mas el cuádruplo menos su mitad, mas su cuarta parte menos 12 componen 80?

Llamando x al número de alumnos que es la cantidad que se trata de determinar, tendremos:

$$2x + 4x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - 12 = 80$$

Ecuacion que preparada nos dá; $46x=736$ y resulta; $x=\frac{736}{46}=16$

LECCION 65.

77. *Al resolver una ecuacion de 1er grado con una incógnita, puede resultar para esta un valor entero, quebrado, positivo, negativo, cero, infinito é indeterminado.*

78. *Se dice que el valor hallado para la incógnita, satisface á la ecuacion, cuando sustituido este valor en la ecuacion primitiva, la convierte en identidad.*

79. *El valor entero y positivo resulta, cuando el segundo miembro de la ecuacion es positivo y divisible por el coeficiente de la incógnita; y nos indica que la ecuacion es posible, y queda satisfecha por el valor hallado.* Tal sucede en el problema anterior.

80. *El valor quebrado positivo resulta cuando el segundo miembro aunque es positivo, no es divisible por el coeficiente de la incógnita; y nos indica que la ecuacion es posible, y queda satisfecha por el valor hallado, escepto en el caso de que la índole del problema no admita fracciones.*

Así; en la ecuacion

$$7x=3 \qquad x=\frac{3}{7}$$

El valor de la incógnita es quebrado.

81. *El valor negativo resulta, cuando el segundo miembro lo es; é indica que la ecuacion aunque queda satisfecha por el valor hallado, es imposible, ó está mal planteada.*

Así; en la ecuacion

$$4x = -8 \qquad x = \frac{-8}{4} = -2$$

El valor de la incógnita es negativo.

82. *El valor cero resulta, cuando el 2.º miembro queda reducido á cero, puesto que cero partido por una cantidad es igual á cero. Indica que aun cuando la ecuacion queda satisfecha por el valor hallado, es absurda.*

Así en la ecuacion

$$6x = 4 - 2^2 \text{ ó sea } 6x = 0 \qquad x = \frac{0}{6} = 0$$

El valor de la incógnita es cero.

83. *El valor infinito indica que la ecuacion es absurda, y no puede ser satisfecha por ninguna cantidad determinada, aunque sí por el infinito. Resulta, cuando el coeficiente de la incógnita se reduce á cero; puesto que en este caso, al resolver la ecuacion resultará un quebrado cuyo denominador será cero; y como un quebrado es tanto mayor cuanto menor es su denominador, el que nos ocupa, que lleva por denominador cero, será igual al infinito, ó sea á la mayor cantidad posible.*

Así; en la ecuacion

$(6 - 2 \times 3)x = 8$ ó sea ; $0x = 8$ tendremos:

$x = \frac{8}{0} = \infty$ cuyo signo indica el infinito.

84. *El valor* $\frac{a}{\infty}$ *que puede tambien resultar en una ecuacion, cuando el coeficiente de la incógnita queda reducido al infinito, es igual á cero; porque este quebrado tiene por denominador el mayor número posible, y por tanto su valor será el memor número que pueda existir ó sea cero.*

85. *El valor $\frac{0}{0}$ hallado para la incógnita, llamado valor indeterminado, es consecuencia de quedar reducidos á cero, el segundo miembro, y el coeficiente de la incógnita. Indica que la incógnita admite un número ilimitado de valores; puesto que toda cantidad es igual á $\frac{0}{0}$ porque multiplicada por el denominador cero, dará tambien cero que es el numerador. La ecuacion en este caso, es una identidad.*

LECCION 66.

86. *Para resolver una ecuacion de primer grado con más de una incógnita, es preciso dar valores arbitrarios á todas las incógnitas ménos una, y se despeja esta.*

De donde se desprende, que estas ecuaciones son *indeterminadas;* puesto que tantos cuantos sean los valores que demos á las demás incógnitas, tantos serán los diferentes que resulten para la que se trata de despejar.

87. Para poder hallar el verdadero valor de las incógnitas en estas ecuaciones indeterminadas, ès para lo que se hace uso de los *sistemas de ecuaciones.*

88. *Llámase sistema de ecuaciones, la reunion de dos ó más que son resueltas al mismo tiempo, por tener en ellas las incógnitas, valores iguales.*

Solucion del sistema, es el conjunto de soluciones de sus incógnitas.

El sistema será *determinado* ó *indetermina-*

do, segun que admita un número *limitado* ó *ilimitado* de soluciones.

89. *Eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, es deducir de ellas otra equivalente en que no se encuentre dicha incógnita.*

90. Los métodos más sencillos de eliminacion son dos: 1.° *el de adicion y sustraccion.* 2.° *el de sustitucion é igualacion.*

91. *Método de adicion y sustraccion. Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones por medio de este método, se multiplica cada ecuacion por el coeficiente que la incógnita que se elimina lleva en la otra. Con esto, que no altera las ecuaciones, se consigue que la incógnita lleve igual coeficiente en las dos; y luego se suman ó restan algebráicamente ambas, segun que la incógnita sea en ellas de distinta ó de igual cualidad.*

Porque con esto que no altera las ecuaciones (pues añadimos ó quitamos á los dos miembros una cantidad igual), se destruirán los términos en donde entre la incógnita al verificar la reduccion de términos semejantes en la ecuacion resultante.

Elimínese la incógnita x entre las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 4x-3y=24 \\ 2x+4y=16 \end{array}\right\} \text{ó lo que es igual} \left\{\begin{array}{l} 8x-6y=48 \\ 8x+16y=64 \end{array}\right.$$

y restándolas ordenadamente resulta:
$8x-6y-8x-16y=48-64$ ecuacion que se convierte una vez hecha la reduccion en la siguiente: $22\,y=16$; en la cual ha desaparecido la incógnita x que es la que se trataba de eliminar.

Observacion.—Es evidente que si la incógnita que se trata de eliminar lleva ya igual coeficiente en las dos ecuaciones, no habrá necesidad de efectuar la multiplicacion destinada á conseguir este resultado.

LECCION 67

92. *Método de sustitucion é igualacion. Para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones por este método, se despeja la incógnita en la una ecuacion, considerando á las demás como cantidades conocidas, y se sustituye el valor hallado en el lugar de la misma incógnita en la otra ecuacion. O tambien puede despejarse la incógnita en ámbas ecuaciones, é igualar luego los valores hallados. En el 1er caso el método empleado se llama de sustitucion, y en el 2.º de igualacion.*

Elimínese la incógnita *y* entre las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y &= 32 \\ -2x + 7y &= 24 \end{aligned}\right\}$$ Despejando la incógnita *y* en la 1.ª ecuacion resulta: $y = \frac{32 - 3x}{5}$ y sustituyendo este valor en la 2.ª ecuacion nos dá;

$$-2x + 7 \times \frac{32 - 3x}{5} = 24$$

en cuya ecuacion no se encuentra la incógnita *y* que es la que se trataba de eliminar.

Por el método de igualacion tendremos en el mismo ejemplo.

$$y = \frac{32 - 3x}{5} \text{ en la 1.ª ecuacion.}$$

$$y = \frac{24 + 2x}{7} \text{ en la 2.ª}$$

luego igualando estos valores, resulta:

$$\frac{32 - 3x}{5} = \frac{24 + 2x}{7}$$

93. *Reducir un sistema de ecuaciones, es convertirlo en otro equivalente de menor número de ecuaciones é incógnitas.*

94. *Para reducir un sistema de ecuaciones, se elimina una incógnita entre dos de las ecuaciones; luego se elimina la misma incógnita entre una de las ecuaciones anteriores, y otra del sistema; luego entre una de las primeras y otra nueva del sistema, y así se continúa hasta formar otro sistema que tenga una ecuacion y una incógnita ménos.*

Así por ejemplo; si el sistema dado tiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, se eliminará una de estas en la 1.ª y 2.ª luego entre la 2.ª y 3.ª y por fin entre la 3.ª y 4.ª y resultará un sistema de tres ecuaciones que tendrá de ménos la incógnita eliminada.

LECCION 68.

95. *Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado, se reduce el sistema dado, luego vuelve á reducirse el resultante, y vuelven á hacerse nuevas reducciones hasta que resulte una sola ecuacion de 1.er grado con una incógnita. Despéjase esta, y se sustituye su valor en una ecuacion del anterior sistema que tendrá dos*

incógnitas, pero que con esta sustitucion queda con una sola. Despéjase esta, y se sustituyen los valores hallados para las dos incógnitas en una de las ecuaciones del sistema anterior, con lo cual dicha ecuacion, quedará con una incógnita, la cual se despeja, y así se continúa hasta llegar al primer sistema, ó sea hasta hallar los valores de todas las incógnitas.

Véase el siguiente ejemplo:

Sistema dado.	Sistema reducido.
$2x-4y+3z=7$	
$3x+2y+4z=32$	$16y-z=43$
$4x-3y+z=4$	$17y+13z=116$

Ecuacion resultante.; $225y=675$; en la que $y=\frac{675}{225}=3$

Sustituyendo el valor de y en una ecuacion del sistema anterior resulta.

$16\times 3-z=43$, ó sea; $z=16\times 3-43=5$.

Y sustituyendo por fin los valores hallados para las incógnitas x é y en una ecuacion del 1.er sistema tendremos:

$2x-4\times 3+3\times 5=7$ ó sea;

$2x=7+4\times 3-3\times 5$ en la que $x=\frac{4}{2}=2$

Luego $x=2, y=3, z=5$.

96. *Para resolver un problema de* 1.er *grado con várias incógnitas, se plantea un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, y se reduce y resuelve éste del modo indicado.*

Observacion.—*Para que el sistema de ecuaciones sea posible y determinado, es preciso que* *cuente tantas ecuaciones como incógnitas, y que cada una de dichas ecuaciones exprese distinta condicion, no debiendo ser contradictorias.*

LECCION 69.

97. *Para elevar un monómio al cuadrado se cuadra el coeficiente y se duplican los exponentes.*

Porque así resulta de multiplicarlo por sí mismo.

Así; $(3a^4b^2fl)^2 = 3a^4b^2fl \times 3a^4b^2fl = 9a^8b^4f^2l^2$.

98. *Al cuadrado de un monómio, debe ponerse siempre signo positivo.*

Porque aun cuando el monómio fuese negativo, sabido es que $- \times - = +$.

Así $(-2a^2b^3)^2 = 4a^4b^6$.

99. *Para elevar un polinómio al cuadrado, se cuadra el primer término, y el duplo de éste se multiplica por todos los restantes; se cuadra el segundo, y su duplo se multiplica por todos los que le siguen, y lo mismo se hace con todos los demás términos, hasta llegar á cuadrar el último.*

Porque sabiendo que $(a+b)^2$ es igual á $a^2+2ab+b^2$, y llamando K á la espresion $(b+c)$ tendremos; $(a+b+c)^2 = a^2+2ak+k^2$ cuya espresion, una vez sustituido el valor de K, se transforma en la siguiente: $(a+b+c)^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = a^2 + {}^2ab + 2ac + b^2$

$+2bc+c^2$ que es lo que se trataba de demostrar.

100. *Para elevar al cuadrado una fraccion literal, se forma un nuevo quebrado con los cuadrados de ambos términos.*

Porque así resulta de multiplicar dicha fraccion por sí misma.

Así; $\left(\frac{4a^2bc}{3a^5f}\right)^2=\frac{16a^4b^2c^2}{9a^{16}f^2}$

LECCION 70.

101. *Para estraer la raíz cuadrada de un monómio entero, se estrae la del coeficiente y se dividen por dos los esponentes.*

Porque la espresion que resulte, elevada al cuadrado, producirá el monómio propuesto.

Así; $\sqrt{4a^2b^4c^6}=\pm 2ab^2c^3$.

102. *Al resultado de toda raíz cuadrada algebráica, tiene que ponerse el signo* $\pm$.

Porque como todo cuadrado de un monómio es positivo (98) no es dable determinar la cualidad del monómio cuyo cuadrado produjo la espresion que se halla debajo del radical.

103. *Llámase espresion imaginaria de 2.º grado, á la raíz cuadrada de una espresion negativa.*

Llámase imaginaria, porque es imposible determinar la cualidad de dicha raíz, puesto que tanto si se la considera como positiva como negativa, elevada al cuadrado nunca podrá dar la cantidad negativa que se halla bajo el radical. (98).

104. ***Espresion real es, la que no es imaginaria.***

Así $\sqrt{-4a^2}$ es espresion imaginaria y $\sqrt{4a^2}$ es real.

105. La raíz cuadrada de un monomio no será exacta, si no lo es la del coeficiente, ó si alguno de los exponentes no es divisible por dos.

106. *Para estraer la raíz cuadrada de una fraccion literal, se forma una nueva fraccion con las raíces cuadradas de ambos términos.*

Porque la fraccion resultante elevada al cuadrado, producirá la fraccion propuesta.

Así $\sqrt{\frac{16a^4b^2}{9c^4f^6}} = \frac{\pm 4a^2b}{\pm 3c^2f^2} = \pm \frac{4a^2b}{3c^2f^3}$

107. *Para estraer la raíz cuadrada de un polinomio, se ordena con relacion á una letra, y la raíz cuadrada del primer término, formará el 1.º de la raíz, cuyo cuadrado se resta algebráicamente del polinomio propuesto. El primer término del resto, se divide por el duplo de la raíz hallada; y el cociente, que forma el 2.º término de la raíz, se escribe á continuacion del indicado duplo. Este binomio se multiplica por el término hallado, y el producto se resta algebráicamente del resto anterior. El primer término del resto, se divide por el primer término del duplo de la raíz hallada, y se ejecuta con este cociente, que forma el tercer término de la raíz, idénticas operaciones que con el 2.º, y así se continúa hasta lograr resultado exacto, ó hasta encontrar alguna division imposible.*

Porque constando el polinomio propuesto del cuadrado del primer término, de la raíz, duplo de este por los restantes, cuadrado del 2.º duplo de este por los que siguen etc. (99) al practicar la operacion del modo indicado, vamos descartando á dicho polinomio de todas estas partes que lo componian, de un modo análogo al empleado en Aritmética.

Estraígase por ejemplo la raíz cuadrada del polinomio siguiente:

$16a^4-24a^3b+9a^2b^2+16a^2b^2c-12ab^3c+4b^4c^2$	$4a^2--3ab+2b^2c$.(Raíz).
$-16a^4$	
$-24a^3b+9a^2b^2+16a^2b^2c-12ab^3c+4b^4c^2$	$(8a^2-3ab)-3ab$
$24a^3b-9a^2b^2$	
$16a^2b^2c-12ab^3c+4b^4c^2$	$(8a^2-6ab+2b^2c)2b^2c$
$-16a^2b^2c+12ab^3c-4b^4c^2$	
Residuo.............O	

108. *Un binomio no puede tener raiz cuadrada exacta.*

Porque si la tuviera, tendria que ser un monomio, ó un binomio; pero si era lo 1.° su cuadrado sería un monomio; y si lo 2.° elevado el cuadrado daría un trinomio; y por tanto, no hay espresion alguna cuyo cuadrado sea un binomio.

109. La raíz de un polinomio es inexacta, cuando no es posible alguna de las divisiones ó estraccion de raíz que la regla menciona, y en este caso la parte inexacta se deja indicada; y como en muchos casos sucede esto mismo, se hace preciso conocer algunas de las mas importantes transformaciones que puede sufrir un radical de 2.° grado.

110. TEOREMA. *La raíz cuadrada de un producto de varios factores, es igual al producto de las raíces de estos.*

Porque este producto elevado al cuadrado, produce la cantidad que se halla debajo del radical propuesto; lo cual prueba que es igual á su raíz.

Así $\sqrt{mn}$ será igual á $\sqrt{m} \times \sqrt{n}$

Porque $(\sqrt{m} \times \sqrt{n})^2 = \sqrt{m} \times \sqrt{m} \times \sqrt{n} \times \sqrt{n} = (\sqrt{m})^2 \times (\sqrt{n})^2 = m \times n$; puesto que toda cantidad es el cuadrado de su raíz cuadrada.

111. *Para simplificar una espresion radical de segundo grado, se descompone en dos factores, de los cuales. el uno tenga raíz exacta; el otro factor quedará debajo del radical que llevará por coeficiente la raíz cuadrada del 1.°*

Porque este procedimiento se apoya en el teorama anterior.

Así; $\sqrt{12a^3b^4c} = \sqrt{4a^2b^4 \times 3ac} = 2ab^2\sqrt{4ac}$

Recíprocamente.—Para hacer desaparecer el coeficiente de un radical se eleva al cuadrado dicho coeficiente, y se multiplica por la cantidad que se halla bajo el radical.

Así; $2ab^2\sqrt{3ac} = \sqrt{4a^2b^4 \times 3ac} - \sqrt{12a^3b^4c}$

112. *Radicales semejantes, son los que llevan la misma cantidad bajo el radical.*

Así; $4a^2b\sqrt{3ac}$ y $-3ab\sqrt{3ac}$ son semejantes.

113. *Para reducir radicales semejantes, se suman algebráicamente sus coeficientes, y el resultado forma el coeficiente de la misma cantidad radical.*

La reduccion de los dos anteriores dá por resultado; $(4a^2b - 3ab)\sqrt{3ac}$

114. *La adicion y sustraccion de espresiones radicales se verifica como en las espresiones enteras; y la multiplicacion y division, multiplicando y dividiendo respectivamente los coeficientes si los tienen, y luego las cantidades que se hallen bajo los radicales cuyo resultado se coloca bajo un radical del mismo grado.*

Así; $2bc\sqrt{3ab} \times -3ab\sqrt{bc} = -6ab^2c\sqrt{3ab^2c}$ que simplificado dá $-6ab^3c\sqrt{3ac}$

$$\frac{6a^2b\sqrt{3bc}}{-2ac\sqrt{bd}} = -3a\frac{b}{c}\sqrt{\frac{3c}{d}}$$

115. *El cuadrado de un radical de 2.° grado,*

es igual á la cantidad radical considerada como entera.

Porque toda cantidad es el cuadrado de su raíz cuadrada.

Así; $(\sqrt{3a^2b})^2 = 3a^2b$

116. *La raiz cuadrada de un radical de 2.° grado, es la raiz de 4.° grado de la cantidad que se encuentra bajo el radical.*

Porque la espresion $\sqrt{\sqrt{A}}$ elevada á la 4.ª potencia, produce A.

LECCION 71.

---

117. *Ecuacion de segundo grado, es aquella en la que el mayor esponente de la incógnita, es 2.*

Se dividen en completas, é incompletas. Se llaman completas, las que una vez preparadas, quedan reducidas á la fórmula siguiente:

$$Ax^2 + Bx + C = O.$$

en la que el 1.er término indica la incógnita cuadrada, con coeficiente; el 2.°, la incógnita sin cuadrar, con otro coeficiente, el 3.° una cantidad conocida, y el cero del segundo miembro, que habiendo pasado la cantidad conocida al 1.er miembro, en el 2.° no ha quedado cantidad alguna significativa.

118. Para convertir dicha fórmula en la de resolucion, observaremos, que trasladando en

aquella el término conocido al 2.° miembro, resultará: $Ax^2 + Bx = -C$ cuya ecuacion, una vez multiplicada por $4A$, y sumada con B, ^{2} se convierte en la siguiente:

$$4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = B^2 - 4AC.$$

Ahora bien; el 1.er miembro de esta ecuacion es igual á $(2Ax + B)^2$ y por tanto tendremos:

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC$$

en cuya ecuacion se observará, que el 2.° miembro es igual al cuadrado de $(2Ax + B)$ luego esta cantidad es su raíz cuadrada y por consiguiente

$$2Ax + B = \pm\sqrt{B^2 - 4Ac}$$

y despejando la incógnita en esta ecuacion de 1.er grado resulta:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4Ac}}{2A}$$

que es precisamente la fórmula general de la resolucion de las ecuaciones completas de segundo grado, con una incógnita.

119. Traducida dicha fórmula al lenguaje vulgar, nos dice: Que *la incógnita en una ecuacion de esta especie es igual, á una fraccion, cuyo numerador está formado por el coeficiente de la incógnita sin cuadrar con cualidad contraria, $\pm$ la raíz cuadrada, del cuadrado del mismo coeficiente, restando de él algebráicamente el cuádruplo del coeficiente de la incógnita cuadrada multiplicado por el término conocido; y*

cuyo denominador es el duplo del coeficiente de la incógnita cuadrada.

120. *Raices de una ecuacion son los valores de la incógnita que la satisfacen; ó sea, que sustituidos en ella la convierten en identidad.*

121. *Toda ecuacion de segundo grado tiene dos raices, resultado de descomponer el signo* $\pm$ *que lleva.*

Ejemplo.—Resuélvase la siguiente ecuacion de segundo grado completa:

$2x^2+3x=44$ ó reducida á la fórmula, $2x^2+$

$$3x-44=o; x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-(4\times2\times-44)}}{2\times2}=\frac{-3\pm\sqrt{361}}{4}$$

$$=\frac{-3\pm19}{4}$$

Y por consiguiente, sus dos raices ssrán:

$$x'=\frac{-3+19}{4}=\frac{16}{4}=4.\ y\ x''=\frac{-3-19}{4}=\frac{-22}{4}=-5\frac{1}{2}$$

Luego $x'=4$; y $x''=-5\frac{1}{2}$

LECCION 72.

122. *Ecuacion de segundo grado incompleta, es la que despues de preparada, queda reducida á una de las dos fórmulas siguientes:*

(1.ª) $Ax^2+Bx=O$. (2.ª) $Ax^2+C=O$.

123. Estas ecuaciones resultan, cuando en la completa se reduce el segundo ó tercer término á cero; y para obtener la fórmula de su re-

solucion, no hay mas que reducir á cero, ó sea suprimir en la fórmula general los términos en donde entre la *C* ó la *B* respectivamente.

124. De manera que haciéndolo así en la primera de estas ecuaciones, tendremos que si en la fórmula general: $x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ se suprimen los términos en donde entra el factor *O*, resultará: $x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2}}{2A}=\frac{-B\pm B}{2A}$ que es precisamente la fórmula de la resolucion de las ecuaciones incompletas de la primera especie, y traducida al lenguaje vulgar nos dice; que *la incógnita es igual en esta ecuacion, al coeficiente de la incógnita sin cuadrar, con signo contrario, $\pm$ el mismo, partido todo por el duplo del coeficiente de la incógnita cuadrada.*

125. Las dos raices de esta ecuacion son:

$$x'=\frac{-B+B}{2A}=\frac{O}{2A}=0. \text{ y } x''=\frac{-B-B}{2A}=\frac{-2B}{2A}=-\frac{B}{A}$$

ó lo que es lo mismo, *la una raíz es igual á cero, y la otra al coeficiente del segundo término, partido por el del primero, con signo contrario.*

Resuélvase por via de ejemplo la siguiente ecuacion:

$x^2+x^2=x+13x$ que preparada queda reducida á $2x^2-14x=O$

$$x'=\frac{O}{2\times 2}=O \text{ y } x''=\frac{14}{2}=7.$$

126. Para determinar la fórmula de las ecuaciones de segundo grado de la forma $Ax^2+C=0$, convertiremos en la fórmula general

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$ en cero todos los términos en que entre el factor B, y resultará;

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4AC}}{2A}$$ y para reducirla á otra fórmula equivalente pero más sencilla, incluiremos el denominador bajo el radical, para lo cual habrá de elevarse al cuadrado y resultará:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{4AC}{4A^2}}$$ y simplificando el quebrado resultará por fin: $x=\pm\sqrt{-\frac{C}{A}}$ que es la fórmula que tratábamos de encontrar, y que traducida al lenguaje vulgar nos dice; que *la incógnita en una ecuacion de esta clase, es igual á ± la raiz cuadrada del término conocido, partido por el coeficiente de la incógnita, todo con signo contrario.*

127. Las dos raices de esta ecuacion son:

$$x'=\sqrt{-\frac{C}{A}} \quad \text{y} \quad x''=-\sqrt{-\frac{C}{A}}$$

Ejemplo; resuélvase la siguiente ecuacion: $x^2-7=-3x^2+29$ ó preparada $4x^2-36=0$

$$x'=\sqrt{\frac{36}{4}}=\sqrt{9}=3 \text{ y } x''=-\sqrt{\frac{36}{4}}=-\sqrt{9}=-3.$$

128. *Ecuacion bicuadrada, es la que una vez*

preparada queda reducida á la fórmula; $A\,x^4 + B\,x^2 + C = O$.

129. Para hallar la fórmula de su resolucion se observará, que esta ecuacion no es mas que una de segundo grado elevada al cuadrado; y por tanto tendremos; $x^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ y estrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros resultará $x = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$ que es la fórmula de su resolucion.

130. Estas ecuaciones tienen *cuatro raices* resultado de descomponer los signos de ambigüedad que llevan.

LECCION 73.

131. *Llámase razon á una division indicada.* Al dividendo se le denomina *antecedente*, al divisor *consecuente*, y á ambos, *términos de la razon.*

Se escribe del modo siguiente:

A : B ó bien; $\frac{A}{B}$ y se lee: A es á B.

132. *Una razon no varía multiplicando ó dividiendo ambos términos por la misma cantidad.*

Porque es una division indicada, ó lo que es lo mismo un quebrado.

133. Por igual motivo, las razones se multiplican como los quebrados, y al resultado se denomina razon compuesta.

Así; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times\frac{g}{h}=\frac{a\times c\times e\times g}{b\times d\times f\times h}$ es una razon compuesta.

134. *Proporcion es la igualdad de dos razones.*

Se escribe; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ó bien $a:b::c:d$ y se lee: a es á b, como c es á d.

Términos *medios,* son el segundo y tercero, y *estremos,* el primero y cuarto.

Si los medios son iguales, la proporcion es *contínua,* y si desiguales, *discreta.*

Así; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ es contínua; y $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, discreta.

135. TEOREMA FUNDAMENTAL.—*En toda proporcion, el producto de los estremos es igual al de los medios.*

Porque así resulta al quitarla los denominadores del modo que se hace en la preparacion de las ecuaciones.

Así; en la proporcion, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ quitando los denominadores resulta; $ad=bc$.

136. El anterior teorema sirve para determinar un término desconocido conocidos los restantes, para lo cual, *se igualan los productos de medios y estremos, y se resuelve la ecuacion resultante.*

Así; en la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ tendremos: $ax=bc$ en cuya ecuacion, $x=\frac{bc}{a}$. Así mismo, en la proporcion $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ tendremos; $x^2=ab$ en donde $x=\sqrt{ab}$

137. RECÍPROCAMENTE. — *Con la igualdad de dos productos, se puede formar una proporcion, colocando por estremos los factores del un producto, y por medios los otros dos.*

Porque si en la proporcion resultante, se quitan los denominadores, quedará reducida á la igualdad propuesta.

Así, de $ab=cd$ se forma; $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ porque quitando los denominadores en esta proporcion resulta; $ab=cd$, que es la igualdad propuesta.

138. COROLARIO.—*El órden de los términos, no altera una proporcion, siempre que el producto de los estremos quede igual al de los medios.*

Porque mientras así suceda, con todas las transformaciones resultará la misma igualdad al multiplicar medios y estremos.

LECCION 74.

139. Una proporcion, puede sufrir várias transformaciones, ya en la colocacion de sus términos, ya en el valor de estos. Las más importantes son las siguientes:

140. *Una proporcion se alterna, cuando se cambian de lugar los medios.*

Se invierte, cuando se ponen los antecedentes de las razones, por consecuentes y viceversa.

Se permuta, cuando se cambia el lugar de las razones.

Así la proporcion $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}$ alternada se convierte en $\frac{6}{2}=\frac{2}{4}$, invertida, en $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$ y permutada, en $\frac{12}{4}=\frac{6}{2}$

En todas estas transformaciones, queda igual el producto de los estremos, al de los medios; y por tanto la proporcion dada no se altera.

141. *Los productos que resultan de multiplicar ordenadamente várias proporciones forman una nueva proporcion.*

Así de $\frac{6}{4}=\frac{12}{8}$ y $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$ se forma: $\frac{6.2}{4.6}=\frac{12.6}{8.18}$

Porque en la proporcion resultante el producto de los estremos, tiene que ser igual al de los medios.

142. *Si dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos se puede formar otra proporcion.*

Así; de las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n}=\frac{c}{d}$

resulta; $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$

Porque dos cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí.

143. De lo anterior se desprende, que *siempre que dos proporciones tengan dos términos respectivamente iguales, con los cuatro restantes se podrá formar una proporcion, si transfor-*

mando antes las propuestas pueden reducirse al caso anterior.

Así; de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{m}{b}=\frac{q}{d}$ resultará; $\frac{a}{c}=\frac{m}{q}$

Porque alternadas las propuestas se convierten en $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y $\frac{m}{q}=\frac{b}{d}$ que tienen una razon comun.

144. Teorema.—*En toda proporcion, la suma ó diferencia de los términos de una razon es al uno ó al otro de ellos, como la suma ó diferencia de los términos de la otra razon es al uno ó al otro de ellos.*

Porque así resulta de sumar ± 1 con los dos miembros de la igualdad, y de reducir luego á quebrados las espresiones mistas que resultan.

Así; si á la proporcion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la agregamos ± 1 resulta; $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$ y reduciendo estos mistos á quebrados, $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ que es una de las proporciones del teorema. Y como ésta tiene los consecuentes iguales que la propuesta, tendremos (143) $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$

145. Corolario 1.°—*En toda proporcion, la suma ó diferencia de los términos de una razon es á la de la otra, como un antecedente es al otro, ó como un consecuente es al otro.*

Porque así resulta de alternar las proporciones del teorema.

Así; de las proporciones $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ y $\frac{a \pm b}{a}$ $= \frac{c \pm d}{c}$ del teorema anterior, resulta al alternarlas: $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}$

146. Corolario 2.°—*En toda proporcion, la suma de los términos de una razon es á su diferencia, como la suma de los términos de la otra razon, es á su diferencia.*

Porque descomponiendo los signos de ambigüedad de una de las proporciones del corolario anterior, resultan dos proporciones con una razon comun, de las cuales se deduce la de este corolario.

Así por el corolario anterior sabemos; que $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$ y $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d}$ de cuyas proporciones resulta: (142) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ que alternada produce: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

147. Corolario 3.°—*En toda proporcion, la suma ó diferencia de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Porque así resulta de alternarla, y aplicarla el corolario 1.°

Así $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alternada da $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ y aplicando el corolario 1.º $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{c}{d}$ ó $=\frac{a}{b}$

148. Corolario 4.º—*En toda proporcion, la suma de antecedentes es su diferencia, como la de consecuentes es á la suya.*

Porque así resulta de descomponer el signo de ambigüedad en una proporcion de las del corolario 3.º; y como las dos proporciones que resulten tendrán una razon comun, se forma con ellas otra, que alternada dará la que se demuestra.

Así por el corolario 3.º sabenos, que $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ y $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}$

De cuyas proporciones resulta: $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ que alternada da; $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$

LECCION 75.

149. *Série de razones iguales, es el conjunto de razones unidas por signos de igualdad.*

150. Teorema. *En toda série de razones iguales, la suma de vários antecedentes es á la de sus consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

Porque así resulta de aplicar el corol. 3.º (147) á las dos primeras razones, luego á la proporcion formada por la 1.ª razon resultante, y la 3.ª de la série, y así sucesivamente.

Así en la série; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$

tendremos (147) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ de cuya proporcion y la formada por la 2.ª y 3.ª razon, se deduce; $\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$ y repitiendo con esta lo mismo que se ha hecho con la 1.ª $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$ ó sea $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{g}{h}$

151. Corolario.—*Si un antecedente vale como la suma de otros vários antecedentes, su consecuente valdrá como la suma de los consecuentes de aquellos.*

Porque de lo contrario, la proporcion del teorema no podria ser cierta; pues en ella el producto de los extremos no sería igual al de los medios.

Sentados los principios anteriores, puede ya entrarse en el estudio del planteo y resolucion de un problema que ha de resolverse por una proporcion.

152. En todo problema de esta clase, entran cuatro cantidades homogéneas dos á dos, de las cuales, se llaman *principales las dos homogéneas conocidas; y relativas, las otras dos, de las que, la una es incógnita.*

153. Se dice que estas cantidades están en *razon directa*, cuando á medida que crecen las principales, aumentan del mismo modo las relativas correspondientes, y en *razon inversa*, cuando á medida que crece una principal, disminuye del mismo modo su relativa.

154. Si las cantidades están *en razon directa*, ó lo que es lo mismo, son directamente proporcionales, para plantear la proporcion deberá seguirse la regla siguiente: *Una cantidad principal es á la otra, como la relativa á la* 1.ª *es á la relativa á la* 2.ª

155. Si las cantidades están en *razon inversa*, ó lo que es igual, son inversamente proporcionales, se planteará la proporcion teniendo presente que *una cantidad principal es á la otra como la relativa á la* 2.ª *es á la relativa á la* 1.ª

156. Y poniendo estas dos reglas en forma de fórmulas, y llamando P y P' á las dos principales, y R y R' á sus relativas correspondientes, tendremos:

Para la razon directa.

$$\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$$

Para la inversa

$$\frac{P}{P'}=\frac{R'}{R}$$

Ejemplos.—1.º ¿Cuánto valen 9 varas de tela en el supuesto de que 13 varas valen 65 rs?

Este problema es de *razon directa*, pues á medida que aumenta el número de varas, crece el número de reales; por tanto se planteará por la fórmula 1.ª y tendremos:

$\frac{13}{9}=\frac{65}{x}$ cuya proporcion nos dá: $13x=9\times 65$.

y en esta ecuacion, $x=\frac{9\times 65}{13}=\frac{585}{13}=45$

Luego el valor de 9 varas es 45 rs.

2.º ¿Cuántas varas de tela de á 9 rs. se podrán comprar con el valor de 45 vs. de á 7 rs?

Este problema es de *razon inversa*, pues á medida que aumente el precio, disminuirá el número de varas que pueden comprarse con igual cantidad.

Por tanto, se planteará por la 2.ª fórmula y tendremos:

$\frac{7}{9}=\frac{x}{45}$ ó lo que es lo mismo, $9x=7\times 45$; y

en esta ecuacion $x=\frac{315}{9}=35$

Luego se podrán comprar 35 varas de á 9 rs.

LECCION 76.

157. *Para eliminar una incógnita entre dos proporciones, se transforman antes estas hasta que se consiga que la incógnita se encuentre; como antecedente en la una proporcion, y como consecuente en la otra pero en la misma razon y luego se multiplican ordenadamente las dos proporciones.*

Así; si se quiere eliminar la x entre las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ y $\frac{m}{x}=\frac{n}{z}$ se alternará la 2.ª el resultado que es $\frac{m}{n} = \frac{x}{z}$ se multiplica ordenadamente con la 1.ª lo cual dará $\frac{a\,m}{b\,n} = \frac{c\,x}{x\,z}$ y suprimiendo la x como factor comun á los dos términos de la 2.ª razon resulta por fin: $\frac{a\,m}{b\,n} = \frac{c}{z}$

158. *Para resolver un problema en que entre más de una proporcion, se plantean cuantas proporciones sean necesarias para espresar las condiciones del problema, y luego se eliminan todas las incógnitas menos las del problema, la cual se despeja en la última proporcion resultante.*

Ejemplo. — Si 7 tejedores fabrican en 3 dias, 50 varas de tela, ¿cuántas varas fabricarán 5 tejedores en 8 dias?

En este problema se plantearán las dos proporciones siguientes, de las que, la primera se refiere al número de tejedores, y la segunda al número de dias, que son las dos de razon directa; $\frac{7}{5} = \frac{50}{z}$ $\frac{3}{8} = = \frac{z}{x}$ y eliminando la z entre estas dos proporcionos resulta: $\frac{7 \times 3}{5 \times 8} = \frac{50\,z}{z\,x}$ ó sea $\frac{21}{50} = 4\frac{50}{x}$ en cuya prop.ⁿ, $x = \frac{2000}{21} = 95\frac{5}{21}$ varas

LECCION 77.

159. *Llámase interés simple, el rédito que produce un capital por sí solo, prestado al tanto por 100.*

Tanto por 100, es el rédito producido por 100 reales en la unidad de tiempo.

160. *Interés compuesto es el rédito que produce el capital junto con los intereses devengados.*

161. Para hallar la fórmula de la resolucion del problema de interés simple, bastará observar que el interés es directamente proporcional al capital y al tiempo; y por tanto es un problema de dos proporciones que con la mayor generalidad se espresa del modo siguiente:

¿Qué interés produce el capital c en t tiempo y al i de tanto por 100?

Planteando este problema resultan las dos proporciones: $\frac{100}{c} = \frac{i}{z}$, $\frac{1}{t} = \frac{z}{y}$ y despejando en ellas la z, $\frac{100}{c\,t} = \frac{i}{y}$ cuya proporcion al multiplicar medios y estremos nos da:

$$100\,y = c\,i\,t$$

de cuya importante fórmula general, se pueden deducir todas las que se necesiten para resolver los problemas particulares, siendo la más usual la siguiente que se refiere al interés,

$$y = \frac{c\,i\,t}{100}$$

que traducida nos dice, que *el interés es igual al capital, multiplicado por el tanto por ciento y por el tiempo, reducido á su unidad, partido todo por ciento.*

Eiemplo.—¿Qué interés producen 15000 reales en 7 meses al 6 por 100 anual?

$$y = \frac{15000 \times 6 \times \frac{7}{12}}{100} = \frac{15000 \times \frac{7}{2}}{100} = 150 \times \frac{7}{2} =$$

525 reales.

162. Observacion.—Para deducir de la fórmula general las relativas al tiempo, al tanto por ciento, y al capital, se despeja en la fórmula general la *t*; la *i* ó la *c* respectivamente una vez que se conozcan tres de las cuatro cantidades.

Así; $t = \frac{100\,y}{ci.}$, $i = \frac{100\,y}{ct.}$, $c = \frac{100\,y}{it.}$

LECCION 78.

163. *Descuento es la cantidad en que disminuye el valor de un documento á plazo por cobrarse á la vista.*

164. *Valor nominal es el que el documento representa para el dia del vencimiento del plazo, y valor actual es el que tiene en el momento del cobro.*

De donde se deduce que el descuento viene á ser la diferencia entre el valor nominal y el actual, y por tanto una vez llegado el dia del vencimiento, el descuento se reduce á cero, por haberse igualado ambos valores.

165. El problema general es el siguiente:

¿Qué descuento debe hacerse á una letra de c rs. que vence al t tiempo siendo i el tanto por ciento?

Para su resolucion, que dará la fórmula general, debe tenerse presente que el problema sería idéntico al de interés, si el descuento se hiciese por el valor nominal; pero como debe hacerse por el valor actual, se tendrá que añadir al coeficiente de la incógnita en la fórmula general de la regla de interés la cantidad it que es el rédito producido por 100 rs. con lo cual resulta;

$$(100 + it)\,d = cit.$$

que es la fórmula general del descuento.

166. Despejando en esta ecuacion la incógnita d resulta la fórmula siguiente que es la más usual.

$$d = \frac{cit}{100 + it}$$

que traducida nos dice: *Que el descuento es igual al producto del capital por el tanto por ciento y por el tiempo, partido todo por 100, mas el tanto por ciento multiplicado por el tiempo.*

Ejemplo.—¿Cuál es el descuento de una letra de 15000 rs. á 4 meses vista y al 6 por 100?

$$d = \frac{15000 \times 6 \times \frac{4}{12}}{100 + 6 \times \frac{4}{12}} = \frac{15000 \times \frac{4}{2}}{100 + \frac{4}{2}} = \frac{30000}{102} = 294 \text{ rs. } 2 \text{ m.}$$

167.—Observacion.—De la fórmula general pueden deducirse las que se refieren al tiempo, al capital y al tanto por 100 despejando la t, la c ó la i una vez conocidas las otras tres cantidades.

168. El descuento se resuelve en muchos casos por la fórmula de la regla de interés, y la diferencia entre este método y el anterior consiste, en que en este se calcula el descuento por el valor nominal, y en el anterior que es el verdadero por el valor actual.

LECCION 79.

169. *La regla de las partes proporcionales, tiene por objeto dividir una cantidad en várias partes que sean proporcionales á otras dadas.*

170. El problema general puede enunciarse del modo siguiente:

Dividir la cantidad c en partes que sean proporcionales á las cantidades c', c'' y c'''.

171. Para su resolncion que nos dará la fórmula general, debe observarse, que si llamamos x', x'' y x''' á las partes proporcionales que se tratan de determinar se puede plantear la siguiente série de razones iguales:

$$\frac{c'}{x'} = \frac{c''}{x''} = \frac{c'''}{x'''} \text{ ó lo que es igual (150)} \frac{c' + c'' + c'''}{x' + x'' + x'''}$$
$$= \frac{c'}{x'} = \frac{c''}{x''} = \frac{c'''}{x'''}$$

y como la suma de $x' + x'' + x'''$ es igual á la cantidad dada, tendremos

$$\frac{c' + c'' + '''}{C} = \frac{c'}{x'} \text{ ó } = \frac{c''}{x''} \text{ ó } = \frac{c'''}{x'''}$$ para cada una de las partes proporcionales respectivamente, cuyas proporciones una vez resueltas nos dan

las siguientes fórmulas para cada una de las partes:

$$x' = \frac{C}{c' + c'' + c'''} \times c', \quad x'' = \frac{C}{c' + c'' + c'''} \times c''$$

$$\text{y } x''' = \frac{C}{c' \times c'' \times c'''} \times c'''$$

que traducidas nos dicen; *que cada parte proporcional es igual, á la cantidad dada partida por la suma de las cantidades á que las partes han de ser proporcionales, multiplicado todo por la cantidad proporcional á la parte que se determina.*

EJEMPLO.—Entre tres propietarios tienen que satisfacer 1000 duros de contribucion. Al 1.° le producen sus bienes una renta de 3500 duros de líquido imponible. Al 2.° de 2000 duros y al 3.° de 4000. ¿Cómo se repartirá la indicada contribucion?

Pagará el 1.°:

$$\frac{1000}{3500 + 2000 + 4000} \times 3500 = \frac{1000}{9500} \times 3500 = 368\frac{8}{19} \text{ ds.}$$

El 2.° . . . . $\frac{1000}{9500} \times 2000 = 210\frac{10}{19}$ ds.

El 3.° . . . . $\frac{1000}{9500} \times 4000 = 421\frac{1}{19}$ ds.

TOTAL. . . 1000 ds.

172. Como se vé en el anterior ejemplo, *la prueba de la operacion, se practica sumando los resultados obtenidos, y si la suma es igual á la cantidad que se reparte, la operacion está bien hecha.*

LECCION 80.

173. *La regla de compañía tiene por objeto repartir la ganancia ó pérdida que han esperimentado vários sócios, en proporcion al capital de cada uno y al tiempo que estuvo en el fondo. Se divide, en simple, y compuesta.* Es simple, cuando hay diferencia tan sólo en los capitales ó en el tiempo, y compuesta cuando la hay en ambas circunstancias.

174. *Tanto la simple como la compuesta, se resuelven por la fórmula de las partes proporcionales, sin más diferencia entre ámbas, que la siguiente:*

En la regla de compañía simple, la ganancia ó pérdida, *se reparte proporcionalmente, al capital, ó al tiempo, segun los casos*, pues así se desprende de la definicion.

En la compuesta, se reparte proporcionalmente al capital de cada uno multiplicado por el tiempo correspondiente.

Porque así resulta de multiplicar ordenadamente las dos proporciones siguientes que se refieren la una al capital y la otra al tiempo:

$\frac{c}{c'}=\frac{g}{x}$, $\frac{t}{t'}=\frac{x}{g'}$ nos dan $\frac{c\,t}{c'\,t'}=\frac{g}{g'}$.

LECCION 81.

175. *Regla de aligacion, es la que enseña á determinar el valor medio en cantidad ó cualidad resultante de la mezcla de vários artículos que tengan distinta alguna de estas circunstancias, ó bien la razon en que deben mezclarse para que resulte un valor medio dado.*

176. El modo de resolver los dos problemas principales que esta regla comprende, es el siguiente:

177. 1.er PROBLEMA.—Para averiguar el precio medio de una mezcla, conocidos los precios y cantidades de los artículos mezclados, *se divide la suma de los valores por la suma de las medidas.*

Porque una vez sumados los valores parciales de los artículos, resulta el valor total de la mezcla; y al tratar de averiguar el valor de la unidad de medida, queda este problema reducido á uno de los de la division á saber: conocido el valor de várias unidades, determinar el de una.

EJEMPLO.—¿Cuál es el precio medio de la mezcla de 10 cahices de trigo de á 37 pesetas 15 cahices de á 25 pesetas y 23 de á 34 pesetas?

$$\text{Precio medio} = \frac{10\times37+15\times25+23\times34}{10+15+23} = \frac{1527}{48}$$

$=31$ rs. 28 ms.

178. 2.º PROBLEMA.—Para determinar la razon en que deben mezclarse dos artículos, dados

sus precios y el medio, se sigue la regla siguiente: *La cantidad del artículo de más precio, debe ser igual á la diferencia entre el precio medio y el inferior; y la cantidad del artículo de menos precio, á la diferencia entre el superior y el medio.*

Porque las mencionadas cantidades se hallan en razon inversa de sus diferencias al precio medio; puesto que habiendo de ser las ganancias iguales á las pérdidas, y dependiendo estas de la razon en que se mezclen los diversos artículos, es evidente que cuanto mayor sea la diferencia entre cada precio y el medio, menor será la cantidad que de él entre en la mezcla.

Ejemplo.—¿En qué razon debe mezclarse trigo de á 32 pesetas con otro de á 40, para que el precio medio sea el de 35 pesetas?

$$35\begin{cases}40. \;.\;.\;.\;.\; = 3 \text{ de precio superior.}\\ 32. \;.\;.\;.\;.\; = 5 \text{ del inferior.}\end{cases}$$

179. Observacion.—Si fueren mas de dos los artículos que han de mezclarse, se combinan los de precios superiores con los inferiores.

LECCION 82.

180. *Regla conjunta, es la que determina la relacion entre dos cantidades, por medio de la que existe entre estas y otras intermedias.*

Su resolucion se funda en el siguiente

181. Teorema.—*Si se multiplican ordenadamente várias igualdades que tengan su segundo miembro de la especie del primero de la*

siguiente, resulta una igualdad cuyo primer miembro es de la primera especie, y el segundo de la última.

Porque si suponemos que las igualdades del teorema son las siguientes,

A metros = B varas
C varas = D líneas,

y multiplicamos la primera igualdad por C y la segunda por B, tendremos:

A C metros = B C varas
B C varas = B D líneas,

de cuyas igualdades se desprende:

A C metros = B D líneas,

que es la igualdad que se queria demostrar.

182. *Para rasolver un problema de la regla conjunta, se plantea una série de igualdades de la forma mencionada en el teorema, y cuyo primero y último miembro sean de la especie de la incógnita se multiplican luego ordenadamente, y se despeja la incógnita en la ecuacion que resulta.*

Ejemplo.—¿Cuántas libras castellanas componen 5016 libs. catalanas, en el supuesto de que una libra aragonesa equivale á 0'876 libs. catalanas, y una libra castellana equivale próximamente á 1'314 libs. de Aragon?

x lib.^{s} cast.^{s} = 5016 lib.^{s} catalana.
0'875 » cat.^{s} = 1 » arag.^{a}
1'314 » arag^s. = 1 » cast.^{a}

$$x \times 0'875 \times 1'314 = 5016 \times 1 \times 1$$

ó lo que es lo mismo; 1'149750 x = 5016.

en cuya ecuacion $x = \frac{5016}{1'149750} = 4362'687$ libras castellanas.

LECCION 83.

183. *Progresion por diferencia ó Aritmética es una série de términos que se diferencian todos en una misma cantidad llamada razon de la progresion.*

184. Se llama *creciente* cuando por ser la razon positiva, va aumentando el valor de los términos, y *decreciente* cuando disminuye este valor, por ser negativa la razon.

185. Se escriben de este modo.

$\div$ 4.6.8.10.12.14.16.18.......

$\div$ 10.5.0.—5.—10.—15.......

La primera es *creciente* y su razon es 2, y la segunda *decreciente* y su razon es 5.

Se leen; 4 es aritméticamente á 6, es á 8, es á 10, es á 12, etc.

186. Los problemas que por ellas se resuelven son los dos siguientes:

1.er Problema.-*Para hallar un término cualquiera de una progresion Aritmética, conociendo el primero, la razon y el número de términos, se suma el primero con el producto de la razon por el número de términos menos uno.*

Porque si planteamos la progresion general siguiente;

$$\div a.(a+d).(a+2d).(a+3d) \text{ etc.}$$

observaremos que cada término es igual al primero mas la razon multiplicada por el número de términos menos uno; de manera que llamando

u al término que se busca, y n al número de términos, resultará:

$$u = a + (n-1)d$$

que es precisamente la fórmula que se buscaba.

Ejemplo.—Determínese el 15.° término de la progresion; ÷6.9.12.15..... etc.

$$u = 6 + 14 \times 3 = 48.$$

187. Observacion.—Por medio de la fórmula anterior pueden obtenerse otras para determinar cualquiera de las otras tres cantidades conocidas las restantes.

Así, por ejemplo, para obtener la razon de una progresion, se despeja la letra d en la fórmula general, y resulta:

$$d = \frac{u-a}{n-1}$$

cuya fórmula nos dice que la razon de una progresion Aritmética es igual á la diferencia entre el último y el primer término, partida por el número de términos menos uno.

188. Por medio de la fórmula anterior, puede interpolarse un número cualquiera de términos en una progresion, pues este problema queda reducido á determinar la razon.

189. 2.° Problema.-*Para hallar la suma de los términos de una progresion Aritmética, se multiplica el número de términos por la suma de los extremos, y el resultado se divide por dos.*

Porque llamando s á dicha suma y u al último término, tendremos:

$$s = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots\ldots + u$$

ó bien; $s = u + (u-d) + (u-2d) + (u-3d) + \ldots\ldots + a$

y sumando las dos igualdades resulta;
$2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)$
en cuya igualdad se observa que la cantidad $(a+u)$ se repite tantas veces cuantos son los términos de la progresion y por tanto

$$2s=(a+u)n$$

en cuya ecuacion $s=\frac{(a+u)\,n}{2}$ que es la fórmula que se buscaba.

EJEMPLO.—Determínese la suma de los términos de una progresion aritmética cuyo primer término es *4*, *12* el número de términos y *37* el último.

$$s=\frac{(4+37)12}{2}=\frac{492}{2}=246$$

LECCION 84.

190. *Progresion Geométrica ó por cociente, es una série de términos resultantes de multiplicar al anterior por una cantidad constante llamada razon de la progresion.*

191. Se llama *creciente* cuando por ser la razon mayor que la unidad va aumentando el valor de los términos; y *decreciente* cuando disminuye este valor por ser la razon menor que la unidad.

192. Se escriben de este modo;

$$\div\!\!: 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \ldots \text{ etc.}$$

$$\div\!\!: 24 : 6 : \frac{6}{4} : \frac{6}{16} : \frac{6}{64} : \ldots\ldots \text{ etc.}$$

La primera es *creciente* y su *razon* es *2* y la segunda *decreciente* y su razon es $\frac{1}{4}$

Se leen; 4 es geométricamente á 8 es á 16 es á 32 es á 64 es á 128 etc.

193. Los problemas que por ellas se resuelven son los siguientes.

1.er PROBLEMA.-*Para hallar un término cualquiera de una progresion Geométrica conociendo el primero, la razon y el número de términos, se multiplica el primero por la razon elevada á una potencia igual al número de términos menos uno.*

Porque si planteamos la progresion general siguiente;

$$\div a : a q : a q^2 : a q^3 : a q^4 \ldots\ldots \text{etc.}$$

observaremos que cada término es igual al primero multiplicado por la razon elevada á una potencia de un grado igual al número de términos menos uno; de manera que llamando *u* al término que se busca y *n* al número de términos resultará:

$$u = a q^{n-1}$$

que es precisamente la fórmula que se buscaba.

EJEMPLO.—Determínese el 12.° término de la progresion $\div 4 : 8 : 16 : 32 \ldots$ etc.

$$u = 4 \times 2^{11} = 4 \times 2048 = 8192.$$

194. OBSERVACION.—Por medio de la fórmula anterior, pueden obtenerse otras para determinar cualquiera de las otras tres cantidades conocidas las restantes.

Así, por ejemplo; para obtener la razon de una progresion, se despeja la letra q en la fórmula general y resulta

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

cuya fórmula nos dice; que la razon de una progresion Geométrica es igual á la raíz de un grado igual al número de términos menos uno, del cociente que resulta de dividir el último término por el primero.

195. Por medio de la fórmula anterior puede interpolarse un número cualquiera de términos en una progresion Geométrica, pues este problema se reduce á determinar la razon.

196. 2.° PROBLEMA.— *Para hallar la suma de los términos de una progresion Geométrica se divide la diferencia entre el producto del último término por la razon y el primero, por la razon menos uno.*

Porque llamando s á dicha suma, q la razon, y u el último término, en la progresion general, tendremos:

$$s=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots\ldots+aq.^{n-1}$$

multiplicando esta ecuacion por q, resulta:

$$qs=aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots\ldots aq.^n$$

y restando ambas ecuaciones nos dan;

$$qs-s=aq^n-a$$

de donde $s=\frac{aq^n-a}{q-1}$ ó lo que es lo mismo, —

$=\frac{aq^{n-1}\times q-a}{q-1}$ y por último como aq^{n-1} es el valor del último término, tenemos: $s=\frac{uq-a}{q-1}$

Ejemplo.—Determínese la suma de los términos de una progresion Geométrica cuyo último término es 256, la razon 2, y 4 el primero.

$$s=\frac{256\times2-4}{2-1}=512-4=508$$

LECCION 85.

197. *Logaritmos, son los términos de una progresion aritmética que principia por 0, correspondientes á los de una geométrica que principia por la unidad.*

Los términos de la progresion geométrica se llaman números.

Así en las progresiones,

Números. . $\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots q^n$

Logaritmos. $\div\; 0 . d . 2d : 3d . 4d \ldots\ldots\ldots nd$

cada término de la progresion aritmética es el logaritmo del de la geométrica que se halla sobre él.

198. Segun se desprende de la definicion, *la unidad, tiene de logaritmo, cero.*

199. *Todo número positivo mayor que la unidad, tiene logaritmo positivo; y lo tendrá negativo si es menor que 1.*

Porque así resulta de continuar ambas progresiones hácia la izquierda.

En efecto, al verificarlo así, resulta:

$$\ldots\ldots\frac{1}{q^3}:\frac{1}{q^2}:\frac{1}{q}:1:q:q^2:q^3\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots-3d.-2d.-d.\ 0\ .\ d.2d.3d.\ldots\ldots$$

Luego; $L.q^2=2d$ y $L.\frac{1}{q^2}=-2d$.

Los números negativos, no tienen logaritmos.

200. Teorema.—*El logaritmo de un producto de vários factores, es igual á la suma de los logaritmos de estos.*

Porque si se examinan las progresiones fundamentales se observará, que el mismo esponente lleva la razon de la progresion geométrica para formar el número, que coeficiente la razon de la aritmética para formar el logaritmo y por tanto tendremos: $L.\ (q^3 \times q^5)$ ó sea; $L.\ q^{3+5}=(3+5)d=3d+5d$ cuyas cantidades constituyen evidentemeute los logaritmos de los números q^3 y q^5 respectivamente.

Luego $L.\ (q^3 \times q^5)=L.\ q^3+L.\ q^5$

201. Del anterior teorema se deducen consecuencias tan importantes como las siguientes:

1.ª *El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del dividendo, menos el del divisor.*

Porque si $4=\frac{8}{2}$ tendremos: $4\times 2=8$ y por tanto (200) $L.4+L.2=L.8$ ó lo que es igual; $L.4=L.8-L.2$.

2.ª *El logaritmo de la potencia de una cantidad, es igual al esponente multiplicado por el logaritmo de la cantidad.*

Porque como $4^3 = 4 \times 4 \times 4$, tendremos; $L.4^3 = L.(4 \times 4 \times 4) = (200)\ L.4 + L.4 + L.4 = 3 \times L.4$ y por tanto; $L.4^3 = 3 \times L.4$.

3.ª *El logaritmo de una raíz, es igual al resultado de dividir el logaritmo de la cantidad, por el índice de la raíz.*

Porque si $4 = \sqrt{16}$ tendremos; $4^2 = 16$ y por tanto, $2 \times L.4 = L.16$.

De donde $L.4 = \frac{L.16}{2}$

LECCION 86.

202. *Llámase sistema de logaritmos, la reunion de dos progresiones, la una geométrica que principia por la unidad, y la otra aritmética que principia por cero.*

203. Y como la razon de estas progresiones puede variar hasta lo infinito, de aquí que el número de sistemas de logaritmos que pueden formarse sea indefinido. Distínguense unos de otros en la *base que es, el número que tiene la unidad por logaritmo.*

204. El sistema más generalizado es el de Brigs cuya base es el número 10, que es la razon de la progresion geométrica. Sus progresiones son.

Núm.ˢ $\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000.$

Log.ˢ $\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots$

205. *Tablas de logaritmos, son aquellas en las que se encuentran en columna los números*

enteros desde 1 en adelante y próximo á cada uno, su correspondiente logaritmo.

206. Todo el artificio de la formacion de una tabla de logaritmos consiste, *en interpolar entre los términos de la progresion geométrica los medios necesarios para que resulte una progresion formada por los números naturales consecutivos y entre los de la aritmética, otros tantos términos que serán los logaritmos de aquellos.*

Esto se consigue, determinando la razon de una y otra progresion en cada uno de los casos por medio de las fórmulas;

$$d=\frac{u-a}{n-1} \text{ y } q=\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

207. Fácilmente se comprende, que al hacerlo del modo indicado no nos producirá un resultado exacto, pero puede éste aproximarse tanto como se quiera, interpolando un gran número de medios. Así, por ejemplo, si se desea que el error sea menor que 0'001, se interpolarán entre cada dos términos consecutivos de ambas progresiones más de 1000 medios; y si bien esto parece imposible, por la índole radical de la fórmula de la razon geométrica, no lo es si se tiene en cuenta que siendo el número de medios interpolados, arbitrario, podemos elegir uno que sea potencia exacta de dos una vez que le hayamos agregado la unidad, y de éste modo se consigue el resultado apetecido, tan solo con verificar várias estracciones de raices cuadradas sucesivas.

A pesar de todo, no debe olvidarse, que por mucha que sea la aproximacion, siempre queda un pequeño error en los logaritmos de los números diferentes de la unidad seguida de ceros.

LECCION 87.

208. Los logaritmos ordinarios ó de Brigs cuentan además de las propiedades generales las particulares siguientes:

Se llama característica, la parte entera de un logaritmo; y mantisa la parte decimal.

El logaritmo de la unidad seguida de ceros, solo tiene característica, el de los números menores de 10, solo mantisa y el de los demás números, característica y mantisa.

La característica de un logaritmo, tiene tantas unidades, como cifras menos una tiene el número.

Así la característica del logaritmo de 19750 será 4.

209. Recíprocamente.—Un número entero, tiene tantas cifras, como unidades mas una, tiene la característica de su logaritmo.

210. *Para convertir un logaritmo negativo en otro que tan solo tenga negativa la característica, se añade á ésta una unidad, colocando sobre ella el signo — y se restan todas las cifras decimales de 9 y la última significativa de 10.*

Así $-2'478523=\bar{3}'521477$.

Porque $-2'478523$ es igual á $-2=0'478523$ y agregando á esta segunda espresion la cantidad $-1+1$ que no lo altera, resulta demostrada la regla.

211. RECÍPROCAMENTE.—*Para convertir un logaritmo que tan solo tenga negativa la característica, en otro que sea completamente negativo, se rebaja una unidad á la característica, y se restan las cifras decimales de 9, y la última significativa de 10.*

212. *Si se multiplica ó divide un número por una potencia de 10, la mantisa de su logaritmo, no varía; y la característica, aumenta ó disminuye respectivamente en tantas unidades como tenia el esponente.*

Porque $L.(a \times 10^m) = L.a + L.10^m$ y como $L.10^m = m$, tendremos: $L.(a \times 10^m) = L.a + m$. Y $L.\frac{a}{10^m} = L.a - L.10^m = L.a - m$.

213. De lo anterior se desprende, que *la mantisa del logaritmo de una fraccion decimal no varía, aunque se corra la coma ó derecha é izquierda.*

De manera que para los números 3240 . 324 . 32'4 . 3'24 . 0'324 la mantisa de sus logaritmos es la misma, y la característica tiene una unidad ménos en cada uno de ellos.

LECCION 88.

214. Para hacer uso de las tablas de logaritmos es preciso saber resolver los dos problemas que colocamos á continuacion (*)

(*) En la explicacion de esta materia, nos referimos á las tablas de La Lande en las que podrá estudiarse con más detencion, pues no teniendo las tablas á la vista, es muy difícil su comprension.

215. 1er PROBLEMA.—*Dado un número entero que no esté en las tablas, hallar su logaritmo.*

Para resolverlo, se separan con una coma á la derecha del número las cifras necesarias para que la parte entera quede con cuatro cifras. Se busca luego el logaritmo de dicha parte entera, y agregando á su característica tantas unidades cuantas sean las cifras separadas con la coma, resultará la característica que buscamos.

Para determinar la mantisa, se multiplica la parte decimal del número, por la diferencia tabular de los dos logaritmos entre los cuales se encuentra el de él, y se añade el resultado á la mantisa que tenía el logaritmo.

Porque la mantisa así determinada resulta de resolver la siguiente proporcion:

La diferencia *1* entre los dos enteros anterior y posterior al decimal dado, es á la diferencia entre dicho decimal y el entero anterior, como la diferencia tabular es á x.

EJEMPLO. — Determínese el logaritmo de 4732524.

$4732524 = 4732,524 \times 1000$

L. $4732 = 3,6750447$ segun las tablas.

$+0,0000481$ segun la regla.

L. $4732,524 = 3,6750928$

Luego L. $(4732,524 \times 1000)$ ó sea L. $4732524 = 6,6750928$.

216. OBSERVACION.—El logaritmo de un quebrado es igual al logaritmo del numerador, ménos el del denominador; y el logaritmo de una fraccion decimal es igual al de la misma con s.-

derada como número entero, una vez rebajada la característica en tantas unidades como cifras decimales llevaba la fraccion.

217. 2.° PROBLEMA.—*Dado un logaritmo cuya mantisa no esté en las tablas, determinar el número á que pertenece.*

La parte entera del número que se busca, es igual al número correspondiente al logaritmo inmediato inferior de las tablas. Para determinar la parte decimal, se divide la diferencia entre la mantisa dada y la del logaritmo anterior inmediato, por la diferencia tabular.

Porque la parte decimal así determinada, resulta de resolver la siguiente proporcion:

La dif. tabular, es á la dif. entre el número dado y el anterior, como 1 es á x.

EJEMPLO.—Determínese el número correspondiente al logaritmo 3,4215782

Parte entera$=2639$. Parte decimal$=\frac{1388}{1645}=0{,}843$

Luego $3{,}4215782=$L. $2638{,}843$.

218. OBSERVACION.—Si la característica del logaritmo no fuere 3, se reduce á este número, y en el decimal que resulte en este supuesto, se corre la coma á la derecha ó á la izquierda tantos lugares como unidades se hayan suprimido ó añadido á la característica.

LECCION 89.

219. *Complemento á cero de un logaritmo, es otro logaritmo que sumado algebráicamente con el primero, produce cero.*

220. *Para determinar el complemento á cero de un logaritmo, se cambia la cualidad de éste, teniendo cuidado de reducirle si resulta uno negativo, á otro de característica positiva y mantisa negativa; y de practicar lo contrario antes de ejecutar la operacion, si el dado tuviere esta forma.*

Porque el logaritmo que resulte será de igual valor absoluto pero de cualidad contraria, y por tanto sumado algebráicamente con el dado, tiene que producir cero.

EJEMPLO.—C_0 de 3'3247825=(210) $\overline{4}$'6752175.

221. *El complemento á cero se emplea, paro convertir la sustraccion de logaritmos en adicion;* pues el mismo resultado produce restar una cantidad de otra, que sumar la primera con la segunda con cualidad contraria.

De modo que L. m—L. n=L. m+C_0 L n.

LECCION 90.

222. Los logaritmos se emplean para simplificar y facilitar las operaciones de multiplicacion, division, elevacion á potencias y extraccion de raices.

Veamos cómo se consigue esto.

223. *Para ejecutar la multiplicacion se suman los logaritmos de los factores, y se busca en las tablas el número correspondiente al logaritmo que resulta en la suma.* (200)

224. *Para verificar la division, se resta el logaritmo del divisor, del del dividendo, y se busca el número que corresponde al logaritmo que resulta en el resto.* (201, 1.ª)

225. *Para la elevacion á potencias. se multiplica el esponente por el logaritmo de la cantidad y se busca el número del logaritmo resultante.* (201, 2.ª)

226. *Para la estraccion de raices, se divide el logaritmo de la cantidad por el índice de la raíz, y se determina el número que corresponde al cociente considerado como logaritmo.* (201, 3.ª)

Ejemplos.—Elévese el número 8 á la 6.ª potencia.

$$\begin{array}{r} \text{L. } 8=0{,}90308999 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 5{,}41853994 = \text{L. } 262144 \end{array}$$

Luego $8^6=262144$

Estráigase la $\sqrt[6]{4096}$

L. 4096 = 3,6123599 que dividido por 6 resulta; 0,6020599 cuyo logaritmo corresponde al número *4*.

Luego $\sqrt[6]{4096}=4$

Como se vé por los anteriores ejemplos, los logaritmos no solamente facilitan las principales operaciones aritméticas, sino que proporcionan el medio de ejecutar operaciones que sin ellos serian imposibles.

FIN DEL ÁLGEBRA.

ERRATAS.

PÁGINA.	LÍNEA	DICE.	LÉASE.
48	20	327'5.	327'2
58	13	es el dividendo. .	se pregunta.
110	12	16—2+54=68. . .	32+54=86

Precio de un ejemplar, 15 reales.

Todo pedido que pase de seis ejemplares, se hará á casa del autor, calle de Blancas, número 4, piso 2.º en cuyo caso tan solo será **12** reales el coste de la obra.

Los pedidos para fuera de Zaragoza, se servirán francos de porte remitiendo préviamente libranza de fácil cobro.