CURSO COMPLETO
ELEMENTAL
DE MATEMATICAS PURAS,

matemáticas

COMPUESTO EN FRANCES POR S. F. LACROIX:

TRADUCIDO AL CASTELLANO

POR D. JOSEF REBOLLO Y MORALES

CATEDRATICO DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

TOMO II.

ALGEBRA.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL
AÑO DE 1832.

LACROIX

ALGEBRA

2

CURSO COMPLETO

ELEMENTAL

DE MATEMATICAS PURAS.

CURSO COMPLETO
ELEMENTAL
DE MATEMATICAS PURAS,

COMPUESTO EN FRANCES POR S. F. LACROIX:

TRADUCIDO AL CASTELLANO

POR D. JOSEF REBOLLO Y MORALES
CATEDRATICO DE LOS CABALLEROS PAGES DE S. M.

TOMO II.

ALGEBRA.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL
AÑO DE 1832.

INDICE.

ADVERTENCIA.

Teniendo en consideracion lo poco comunes que son aún los prévios conocimientos de griego necesarios para la lectura de los cálculos en que se usan letras griegas, nos ha parecido conveniente poner aqui la siguiente tabla para mayor comodidad de los lectores.

Α α	Alpha.
Β β ϐ	Beta.
Γ γ Γ	Gamma.
Δ δ	Delta.
Ε ε	Epsilon.
Ζ ζ	Zeta.
Η η	Eta.
Θ θ ϑ	Theta.
Ι ι	Iota.
Κ κ	Cappa.
Λ λ	Lambda.
Μ μ	Mu.
Ν ν	Nu.
Ξ ξ	Xi.
Ο ο	Omicron.
Π π ϖ	Pi.
Ρ ρ ϱ	Rho.
Σ σ ς	Sigma.
Τ τ Ꞇ	Tau.
Υ υ	Upsilon.
Φ φ	Phi.
Χ χ	Chi.
Ψ ψ	Psi.
Ω ω	Omega.

ERRATAS DE LA ARITMETICA.

xx	15	lx	*xl*
145	11	denominador	*numerador*

TRATADO ELEMENTAL
DE ÁLGEBRA.

NOCIONES PRELIMINARES SOBRE EL TRANSITO DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA, Y EXPLICACION DE LOS SIGNOS ALGEBRAICOS.

1 En algunas de las cuestiones que hemos propuesto en el *Tratado elemental de Aritmética* (§§. 176 y siguientes) se puede ya haber notado que para resolverlas teníamos que averiguar primeramente qué operaciones, de las cuatro *fundamentales*, debíamos ejecutar con los números conocidos, para que resultasen los desconocidos que buscábamos; y cuando ya habíamos descubierto que una cierta y determinada serie de aquellas operaciones nos habia de conducir seguramente á nuestro objeto, lo único que nos restaba era efectuarlas, y las efectuábamos conforme á las reglas que para esto habíamos anteriormente establecido. A esto se reduce en suma la completa solucion de cualquier problema; pero lo mas digno de advertirse es que en aquella primera averiguacion, que sin duda es la parte mas principal, y la única que puede ofrecer dificultades, prescindimos enteramente de todo sistema de numeracion, y aun de los valores particulares de los números dados; pues dependiendo solo del modo con que en la propuesta se nos presentan enlazados con los números conocidos los incógnitos, ó lo que es lo mismo, de las mutuas relaciones de aquellos y estos, en todos casos ha de resul-

tar únicamente del desarrollo, por decirlo asi, de las consecuencias que envuelva la misma propuesta, y en esto no tienen el menor influjo los valores particulares de los números dados, ni menos el sistema adoptado para la numeracion. Mientras no sean muy complicadas aquellas relaciones, podrá no echarse de ver lo embarazosos y poco adecuados que son los idiomas vulgares para desenvolver los razonamientos que hayamos de formar en este género de investigaciones; ni será extraño que no se conozca la necesidad de otro idioma mas sencillo, y de consiguiente mas á propósito para hacernos perceptible la mutua conexion de todas las partes de nuestros discursos, y para que asi podamos discurrir con mayor rapidez y seguridad sobre estas materias. Pero aun sin necesidad de suponer que sean muy complicados los problemas que intentemos resolver, podremos convencernos de lo mucho que la sencillez del idioma, de que hagamos uso, debe facilitar la solucion de ellos, en haciéndonos cargo de que la principal dificultad está reducida á desenvolver y expresar de un modo conveniente las relaciones que con arreglo á la propuesta tengan las cantidades incógnitas entre sí y con las conocidas, y á traducir ó trasformar de tal manera aquellas primeras expresiones, que por una serie no interrumpida de proposiciones equivalentes lleguemos últimamente á dar con una concebida en estos términos: *La cantidad desconocida es igual á la suma, ó á la diferencia, ó al producto, ó al cuociente de tales ó tales cantidades conocidas.*

A fin de disipar cualquiera obscuridad que puedan todavía dejar estas nociones generales, propongámonos, por ejemplo, resolver la cuestion siguiente:

Distribuir un número dado, cualquiera que sea, *en dos partes tales, que la una lleve á la otra un exceso tambien dado*, sea el que fuere.

Tratando primeramente de averiguar qué operaciones deberemos ejecutar con las dos cantidades que suponemos conocidas, para hallar las otras dos desconocidas, observaremos que de la propuesta se infieren inmediatamente estas dos consecuencias: primera, *la parte mayor es igual á la suma de la menor y del exceso dado*: segunda, *la parte mayor sumada con la menor es igual al número que intentamos distribuir.* Asi habremos puesto en claro las relaciones que la propuesta envuelve de los números incógnitos entre sí y con los conocidos; y en seguida formaremos este razonamiento.

Una vez que la primera consecuencia de la propuesta nos viene á decir que esta expresion *la suma de la parte menor y del exceso dado* es equivalente á estotra *la parte mayor;* si sustituimos aquella expresion en lugar de esta, la segunda consecuencia se trasformará en la que sigue: *la suma de la parte menor y del exceso dado, sumada de nuevo con la misma parte menor, es igual al número que intentamos distribuir.* Y como *la suma de la parte menor y del exceso dado, sumada de nuevo con la misma parte menor*, es equivalente á *el doble de la parte menor sumado con el exceso dado*, haciendo esta nueva sustitucion se trasformará la misma segunda consecuencia en estotra: *el doble de la parte menor, sumado con el exceso dado, es igual al número que intentamos distribuir.* Y equivaliendo esto á decir *que el exceso dado y el doble de la parte menor* componen *el número que intentamos distribuir*, se infiere fácilmente *que si de este número se quita* *el exceso dado, el residuo será el doble de la parte menor;* y de consiguiente *si de este residuo se toma la mitad, esta será la parte menor.* Cuando ya esté conocida la parte menor, le añadiremos el exceso dado, y resultará la mayor.

Por manera que sin necesidad de haber determinado los valores de los dos números que en la propuesta de la cuestion se suponen conocidos, podemos ya mirarla como resuelta, porque ya hemos llegado á descubrir qué operaciones debemos ejecutar con ellos, sean los que fueren, para hallar los otros dos números desconocidos; y como bien se deja ver, lo que despues de esto falta para completar la solucion es la materialidad de efectuar aquellas operaciones, que es lo único para lo cual es indispensable determinar aquellos valores.

Si, por ejemplo, fuere *veinte* el número que nos propongamos repartir, y *seis* el exceso que una de las dos partes ha de llevar á la otra; ya sabemos que restando *seis* de *veinte*, y tomando del residuo *catorce* la mitad, esta mitad *siete* será la parte menor; y agregando á esta el exceso *seis*, la suma *trece* será la parte mayor.

2 Aunque sean muy sencillos el problema propuesto y el razonamiento que hemos hecho para resolverlo, bien pueden habernos dado á conocer que en todos los demas, y con especialidad en los mas complicados, tendremos que repetir con demasiada frecuencia las expresiones *agregando á*, *restando de*, *multiplicando* ó *dividiendo por*, con las cuales enunciamos las operaciones indicadas por las relaciones que la propuesta de la cuestion puede establecer entre las cantidades incógnitas y conocidas. No es pues dificil echar de ver que se sim-

plificarán notablemente las proposiciones, y adquirirá mayor claridad el razonamiento, si en lugar de aquellas expresiones sustituimos ciertos signos que indiquen las mismas operaciones, y por cuyo medio se representen los resultados de ellas.

De ahí es que para indicar la adicion, y en vez de la expresion *sumado con* ó *agregado á* se hace uso del signo +, que se lee mas; por manera que la combinacion 8 + 7, que se lee *ocho mas siete*, quiere decir: 8 *sumado con* 7, y representa el resultado de la adicion de 8 y 7, ó en una palabra *la suma* 15.

Para indicar la sustraccion se emplea el signo −, que se lee *menos*, antepuesto al sustraendo; de modo que la combinacion 9 − 5, que se lee *nueve menos cinco*, quiere decir: que de 9 se ha de restar 5, y representa el residuo que debe resultar en habiendo quitado 5 de 9; esto es, á 4.

Para indicar la multiplicacion de un número por otro se coloca entre los factores el signo × ó un punto, que equivale á *multiplicado por;* y asi la combinacion 6 × 5, ó 6 . 5, se lee: *seis multiplicado por cinco*, y representa el producto 30 de esta multiplicacion.

Para indicar que un número se ha de dividir por otro se coloca el primero sobre el segundo, tirando entre los dos una pequeña línea horizontal, ó se pone el divisor á la derecha del dividendo con dos puntos entre los dos. Asi que $\frac{12}{4}$ ó 12 : 4, se lee *doce dividido por cuatro*, y representa el cuociente 3 que ha de resultar de aquella division.

Ademas de estos signos adoptados para indicar las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética, y representar los resultados de ellás aun antes que esten determinados, se ha elegido el signo $=$ para sustituirlo en lugar de la expresion *es igual á*, que á cada momento tenemos que repetir en el razonamiento que formamos para resolver cualquier problema. De modo que la combinacion $8-5=\frac{12}{4}$, que se lee *ocho menos cinco es igual á doce dividido por cuatro*, quiere decir que el residuo que debe resultar en habiendo quitado 5 de 8, es igual al cuociente que ha de resultar en habiendo dividido 12 por 4.

A toda expresion semejante á la última que acabamos de proponer, y que nos indica la igualdad de los resultados de varias operaciones, ó la de otras dos cantidades cualesquiera, se le da el nombre de *ecuacion*.

No tiene duda que son ya muy considerables las abreviaciones que con el auxilio de tales signos conseguimos; pero todavía se echan menos algunos otros que nos eximan de la necesidad de hacer uso de otras varias expresiones, como *el número que intentamos repartir, el exceso dado, la parte mayor, la parte menor*, y otras semejantes que nos vemos precisados á repetir continuamente, y que haciendo demasiado difusas las proposiciones, no nos dejan percibir con toda la claridad necesaria el enlace de unas con otras, y nos hacen perder el hilo del discurso. Para evitar el uso de todas las expresiones que indicasen números conocidos ó dados, se ocurrió desde luego el arbitrio de representar á todos estos con las mismas cifras ó guarismos de que nos hemos servido en la Aritmética; pero no siendo posible valernos del mismo medio para representar los números desconocidos, fue necesario para esto elegir algunos otros signos convencionales que han variado con el tiempo. Al cabo se ha venido á establecer por general y unánime consentimiento, no solo que para este efecto se empleen letras del abecedario, sino tambien que por lo comun se prefieran las últimas á todas las demas. Por esta razon hemos hecho en la Aritmética uso de una x para representar el cuarto término de cualquiera proporcion en todos los casos en que solo conocíamos los otros tres.

Con el objeto de manifestar hasta qué punto se simplificó y facilitó con el auxilio de los signos hasta aqui adoptados la solucion de los problemas, tratemos de resolver de nuevo el que nos hemos propuesto en el párrafo anterior, á saber:

Distribuir el número 20 en dos partes tales, que la una lleve 6 de exceso á la otra.

Proponiéndonos, como antes, hallar primeramente el valor de la parte menor, la representaremos por x, y á consecuencia la parte mayor vendrá á estar bien representada por la combinacion $x+6$; la suma de las dos partes lo estará por $x+x+6$; y la segunda consecuencia que inmediatamente dedujimos de la propuesta de la cuestion, resultará expresada con mucha sencillez y claridad en estos términos.

$$x+x+6=20;$$

y como la suma de dos cantidades iguales equivalga al doble de una de ellas, poniendo $2x$ en lugar de $x+x$, ó del doble de x, se trasformará aquella ecuacion en estotra aun mas sencilla:

$$2x+6=20;$$

y como esta última expresion nos esté indicando que es necesario sumar 6 con $2x$ para que resulten 20, se infiere fácilmente de ella que

$$2x=20-6;$$

ó lo que es lo mismo, $2x = 14$;
y de consiguiente una x, que es la mitad de $2x$, será igual á la mitad de 14, lo cual se expresa de este modo:

$$x = \frac{14}{2} = 7.$$

Es, pues, la parte menor 7, y la mayor 13, como antes hemos hallado.

Si ahora comparamos con el razonamiento que acabamos de hacer, el que primeramente hicimos en idioma vulgar, no hallarémos á primera vista otra diferencia sino la de haber traducido á este otro idioma todas aquellas proposiciones; pero en llegando á cotejar los resultados de ambos razonamientos, echaremos de ver sin la menor dificultad que cuando en el primero descubrimos que *la parte menor era igual á la mitad de la diferencia de los dos números dados*, esta expresion nos daba á entender qué operaciones debiamos ejecutar con los números conocidos, cualesquiera que fuesen, para que resultase el desconocido que nos proponiamos hallar; y asi habiamos descubierto una regla general para resolver, sin necesidad de repetir el razonamiento, todos los casos particulares comprendidos en la cuestion general. Pero cuando por medio de los signos que hasta aqui hemos adoptado, hemos hallado que $x = 7$, esta expresion no nos da idea alguna del cómo se deduciria inmediatamente de los dos números dados el que nos proponiamos conocer; y de consiguiente el saber que en el caso particular en que sean 6 y 20 los números conocidos, son 7 y 13 los otros dos que buscábamos, de nada puede servirnos para resolver los innumerables casos semejantes que con solo variar los dos números conocidos pueden ocurrir.

Esta ventaja que el primer razonamiento lleva al segundo, ó por mejor decir, la que un modo de enunciar el mismo razonamiento tiene sobre el otro, proviene de que no habiendo determinado en el primero los valores particulares de los números conocidos, ó lo que viene á ser lo mismo, habiendo prescindido de aquellos valores, y habiéndolos designado con denominaciones generales, cuales son *el número que intentamos distribuir y el exceso dado*, no pudieron menos de pasar de una proposicion á otra sin alteracion alguna, y aparecer sin ella en el resultado ó consecuencia final; en lugar de que habiendo determinado en el segundo los valores particulares de los números dados, y habiéndolos representado con las cifras usuales de la Aritmética, hemos podido ejecutar, y en efecto hemos ejecutado con ellos todas las operaciones que en el progreso del discurso se han ofrecido: estas operaciones han hecho desaparecer los números primitivos, y de ahí es que cuando se nos presenta solo el resultado final $x=7$, no nos es posible descubrir en él vestigio alguno que nos indique entre las innumerables combinaciones de operaciones aritméticas, que ejecutadas con los dos números 6 y 20 pueden dar por resultado final el número 7, cuál precisamente haya sido la que en el caso presente nos ha conducido á este resultado.

3 Luego que se trató de precaver este inconveniente, se vió que el mejor medio de conseguirlo era designar los números conocidos con ciertos caracteres que no teniendo por sí valor alguno particular, pudiesen representarlos con tanta indeterminacion como las expresiones generales de que hemos hecho uso en nuestro primer razonamiento; para que no pudiéndose de este modo efectuar con ellos operacion alguna aritmé-

tica que los hiciese desaparecer, pasasen sin alteracion alguna desde la primera proposicion hasta el resultado ó consecuencia final. Entre innumerables caracteres que pudieron haberse imaginado para el intento, ningunos parecieron mas adecuados que las mismas letras del abecedario, las cuales han venido de este modo á ser los símbolos destinados á representar tanto los números conocidos como los incógnitos, sin otra diferencia que la de emplearse por lo comun, segun ya hemos dicho, las últimas para estos, y todas las restantes para aquellos. De unas y de otras tiene el calculador facultad de elegir las que guste para representar todos los números conocidos é incógnitos de que haga mencion la propuesta del problema, con tal que al tiempo de hacer la eleccion designe la letra que ha determinado sustituir á cada número. Volvamos á resolver con este nuevo auxilio el mismo problema.

Distribuir un número conocido en dos partes tales que la una lleve á la otra un exceso dado.

Una vez que está á nuestro arbitrio elegir de las primeras letras del abecedario las que queramos para representar los números conocidos, y de las últimas para los incógnitos, designaremos por a el número que intentemos repartir; por b el exceso dado; y designando como antes por x la parte menor desconocida, la parte mayor podrá representarse por la combinacion $x+b$, sin necesidad de emplear para ello otra nueva letra.

Asi la suma de las dos partes estará bien representada por la combinacion $x+x+b$; y la segunda consecuencia que dedujimos (§. 1) de la propuesta de la cuestion, estará bien expresada de este modo:

$$x+x+b=a;$$

ó de estotro equivalente: $2x+b=a$.
Y viendo en esta última expresion que la cantidad a se compone de las dos partes b y $2x$, es facil inferir que

$$2x=a-b;$$

y de consiguiente la mitad de $2x$, es decir, una x será igual á la mitad de la cantidad representada por la combinacion $a-b$; lo cual se expresará de este modo:

$$x=\frac{a-b}{2};$$

ó lo que es equivalente:

$$x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

Si ahora traducimos al lenguage vulgar cualquiera de estas dos últimas expresiones, y señaladamente la penúltima, sustituyendo en lugar de las letras y signos que entran en ellas las denominaciones de las cantidades y operaciones representadas por aquellos símbolos, resultará por consecuencia final la misma regla general que por el primer razonamiento hallamos; á saber: *la parte menor es igual á la mitad de la diferencia de los dos números dados;* lo cual es lo mismo que decir: *para hallar la parte menor se ha de restar del número que nos propongamos repartir el exceso dado, y se ha de tomar la mitad del residuo.*

La última expresion que hemos hallado $x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, traducida del mismo modo, quiere decir, *que para determinar la misma parte menor hemos de tomar la mitad, asi del número que nos propongamos repartir, como del exceso dado; y despues hemos de restar de la mitad de aquel la de este.* Aqui vemos invertido el orden de las operaciones; pero teniendo presente la regla establecida en la Aritmética para restar un quebrado de otro, no se podrá dudar de que por esta inversion no debe variar el resultado.

Dijimos (§. 1) que en habiendo determinado el valor de la parte menor, le agregaríamos el exceso dado, y resultaria la mayor; y de consiguiente si la parte menor está representada por $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$, la mayor deberá representarse por $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$. En esta expresion se nos dice que de $\frac{a}{2}$ hemos de quitar primeramente la mitad de b, y agregar despues una b entera, que aquivale á dos mitades de b; y como quitar una y añadir dos se reduce en suma á añadir una, la expresion $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$ quedará reducida á $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, la cual, segun la regla para sumar quebrados, equivale á $\frac{a+b}{2}$. Cualquiera de estas dos últimas expresiones nos suministra una regla general para deducir inmediatamente de los dos números dados el valor de la parte mayor, sin necesidad de tener anteriormente conocido el de la menor. En efecto, la penúltima expresion traducida nos viene á decir *que para determinar el valor de la parte mayor debemos sumar la mitad del exceso dado con la del número que nos propongamos repartir;* y la última nos dice que obtendremos el mismo resultado *sumando el exceso dado con el número que nos propongamos repartir, y tomando de esta suma la mitad.*

Despues de esto para completar la solucion de cualquiera de los casos particulares que pueden comprenderse bajo la misma cuestion general, solo falta la materialidad de efectuar con los números particulares que se nos den, las operaciones que estan meramente indicadas en las expresiones finales que hemos hallado.

Hemos, pues, conseguido completamente el objeto que nos habiamos propuesto de hallar un lenguage mucho mas sencillo que el vulgar, y con cuyo auxilio no solo pudiésemos seguir con mayor rapidez y seguridad el razonamiento necesario para resolver cualquier problema, sino que tambien lográsemos que la consecuencia final resultase expresada con la generalidad de que fuese susceptible, y se limitase á indicarnos la serie de operaciones que debiamos ejecutar con las cantidades conocidas para determinar las incógnitas.

Este lenguage simbólico en que asi las cantidades conocidas como las incógnitas que entran en cualquier problema estan representadas por caracteres, á los cuales no está asignado ningun valor particular, y en que las operaciones que deben ejecutarse con ellas, estan meramente indicadas por signos convencionales que á este efecto se han elegido, es lo que hablando con toda propiedad, se llama *Algebra*.

4 En el problema que hemos resuelto en los párrafos anteriores, nos hemos propuesto siempre determinar primeramente el valor de la parte menor, porque conociamos que por medio de este era muy fácil inferir el de la mayor. Para que se vea que del mismo modo pudimos determinar primeramente el valor de la parte mayor, y de este deducir despues el de la menor, representemos por z la parte mayor; y suponiendo que, como antes, a represente el número que intentamos repartir, y b el exceso dado, la parte menor resultará bien representada por la combinacion $z-b$; porque es bien claro que en quitando de la parte mayor el exceso dado, el residuo debe ser igual á la menor. La suma de las dos partes vendrá á estar representada por $z+z-b$, ó lo que es lo mismo, por $2z-b$; y como, segun la propuesta de la cuestion, la suma de las dos partes debe ser igual al número que intentemos repartir, tendremos

esta ecuacion: $2\,z-b=a.$
Examinándola atentamente se ve que $2\,z$ es un minuendo; b un sustraendo, y a el residuo; y como todo minuendo es igual á la suma del sustraendo y residuo, será

$$2\,z=a+b;$$

y tomando la mitad de $2\,z$, y de la suma que le es igual, resultará $z=\frac{a+b}{2}$;

ó lo que es lo mismo, $z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$;

expresiones que traducidas al lenguage vulgar vienen á ser las mismas reglas generales que ya antes hallamos para deducir inmediatamente de los dos números dados el valor de la parte mayor. Conocida esta, será facil inferir el de la menor; en lo cual no creemos necesario detenernos mas.

Lo expuesto hasta aqui nos da suficientemente idea de la absoluta é ilimitada facultad que tiene cualquiera que se proponga resolver una cuestion, de elegir la letra que se le antoje para representar cada una de las cantidades conocidas é incógnitas de que se haga mencion en la propuesta; bien que en habiendo elegido en uso de esta facultad una letra cualquiera para representar una de aquellas cantidades, tendrá que elegir otra cualquiera letra de las restantes para representar otra cantidad distinta, y habrá forzosamente de conservar á cada letra desde el principio del razonamiento hasta la conclusion de él la misma representacion que al tiempo de comenzarlo le haya atribuido.

Tambien podemos ya haber notado que cuando la propuesta del problema nos dé á conocer alguna relacion que tengan entre sí las cantidades incógnitas, no será necesario representar á cada una de estas con una letra distinta, sino que en habiendo representado cualquiera de ellas con la letra pue hayamos tenido á bien escoger, podremos designar todas las demas incógnitas por combinaciones de las letras que anteriormente hayamos elegido. Asi es que cuando en el problema que hemos resuelto nos proponiamos determinar primeramente la parte menor, y á consecuencia la designábamos por x, no representábamos la parte mayor por otra nueva letra, sino por la combinacion $x+b$; y cuando nos proponiamos hallar primeramente la parte mayor, y la representábamos por z, no designábamos la parte menor con otra letra distinta, sino con la combinacion $z-b$; porque la propuesta de la cuestion nos daba á conocer que la parte mayor llevaba á la menor el exceso b.

Es muy importante tener entendido que una misma relacion entre varios números conocidos é incógnitos se puede enunciar de muchos y muy diferentes modos; y como la solucion de cualquier problema dependa solo de aquella relacion, y no del modo de enunciarla, siempre que las propuestas de dos ó mas cuestiones no se diferencien mas que en el modo de expresar una misma relacion, se podrá aplicar á todas la solucion que se haya dado á cualquiera de ellas.

Si, por ejemplo, nos propusiésemos ahora *hallar dos números, cuya suma y cuya diferencia esten conocidas*, podriamos fácilmente echar de ver que las cantidades conocidas é incógnitas que entran en esta cuestion, tienen entre sí la misma relacion que las de la cuestion que antes hemos resuelto, bien que esté enunciada de un modo muy diferente; porque el número que nos proponiamos antes repartir era la suma de las dos partes desconocidas; y el exceso dado era la diferencia de ellas. Podemos, pues, aplicar á la nueva cuestion la solucion que para la anterior hemos hallado, sin otra alteracion que la de expresar las cantidades conocidas con las voces de que se hace uso en la nueva propuesta. Asi que diremos:

El menor de los dos números incógnitos es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia que se nos dan conocidas.

Y el mayor es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia.

5 Propongámonos ya otra cuestion que, aunque análoga á la anterior, es un poco mas complicada:

Distribuir un número dado en tres partes desiguales, tales que el exceso de la mayor sobre la mediana, y el de esta sobre la menor, sean tambien dos números dados.

Con el objeto de fijar las ideas atribuiremos primeramente á los tres números conocidos valores particulares y determinados, suponiendo que el número que vamos á repartir sea *doscientos y treinta*; que el exceso de la parte mayor sobre la mediana sea *sesenta*, y el de la mediana sobre la menor sea *cuarenta*.

Ahora bien, si proponiéndonos hallar primeramente la parte menor la designamos por x, la parte mediana, que segun la propuesta debe tener *cuarenta* mas que la menor, estará bien representada por la combinacion $x+40$; y la mayor, que ha de tener *sesenta* mas que la mediana, estará bien representada por la combinacion $x+40+60$. Y como las tres partes juntas han de componer todo el número *doscientos y treinta* que intentamos repartir, estará bien expresada esta condicion en estos términos:

$$x+x+40+x+40+60=230.$$

Poniendo $3x$ en lugar de $x+x+x$, y 140 en lugar de $40+40+60$, aquella expresion ó ecuacion quedará reducida á estotra mucho mas sencilla:

$$3x+140=230;$$

la cual nos está dando á entender que 230 se compone de 140 y de la cantidad representada por $3x$. De consiguiente si de 230 se resta 140, el residuo habrá de ser la cantidad representada por $3x$, lo cual se expresará de este modo: $3x=230-140$;

ó lo que es lo mismo, $3x=90$.

Si, pues, $3x$ es igual á 90, una x, que es la tercera parte de $3x$, será forzosamente igual á la tercera parte de 90; y de consiguiente tendremos estas nuevas ecuaciones:

$$x=\tfrac{90}{3};$$

$$x=30.$$

Sabiendo ya que la parte menor que buscábamos es 30, agregándole 40, resultará que 70 es la parte mediana; y agregando á esta 60, vendremos en conocimiento de que 130 es la parte mayor.

6 Aunque fuesen otros muy distintos los tres números dados en la propuesta, habriamos de seguir en la resolucion del problema el mismo rumbo que acabamos de trazar en el párrafo anterior; pero mientras designemos las cantidades conocidas con guarismos, que, como ya se sabe, representan valores particulares y determinados, á la menor variacion que padezca cualquiera de los números dados, tendremos que formar de nuevo todo el razonamiento, y ejecutar todas las operaciones, por cuyo medio hemos descubierto que en el caso particular propuesto era 30 la parte menor; porque no habiendo quedado en este resultado final vestigio algu-

no del influjo que en la formacion de él ha tenido cada uno de los números dados, no podemos ver en él cosa alguna que nos dé á conocer la serie de operaciones que se han ejecutado con los tres números 230, 40 y 60, y que efectuadas con otros tres cualesquiera, nos hayan de conducir directamente al resultado final que á cada caso particular corresponda.

A fin, pues, de conseguir una solucion general, absolutamente independiente de los valores particulares de los tres números dados, y que solo nos haga ver la serie de operaciones que se han de efectuar con ellos, sean los que fueren, para que resulte el valor de la incógnita; designaremos por a el número que nos propongamos repartir, por b el exceso que la parte mediana haya de llevar á la menor, y por c el que la mayor deba llevar á la mediana. Suponiendo que nos propongamos como antes determinar primeramente la parte menor, y que la hayamos representado por x, la parte mediana estará bien representada por la combinacion $x+b$, y la mayor por $x+b+c$. Y como el conjunto de las tres partes ha de ser igual al número que tratemos de distribuir, resultará bien expresada esta condicion en estos términos:

$$x+x+b+x+b+c=a.$$

Sustituyendo $3x$ en vez de $x+x+x$, y $2b$ en lugar de $b+b$, quedará reducida aquella expresion á estotra mas sencilla:

$$3x+2b+c=a;$$

en la cual se nos dice que el número a que intentamos repartir equivale al conjunto de las tres cantidades representadas por $3x$, $2b$ y c; y de consiguiente si del número a quitamos las dos cantidades $2b$ y c, el residuo deberá ser $3x$; lo cual expresaremos de este modo:

$$3x = a - 2b - c;$$

de donde deduciremos fácilmente que una x, tercera parte de $3x$, es igual á la tercera parte del residuo representado por la combinacion $a - 2b - c$; cuya igualdad expresaremos asi: $x = \frac{a-2b-c}{3}$.

En esta expresion del resultado final de nuestro razonamiento debemos notar que no habiéndose asignado valor alguno particular á los símbolos a, b, c que representan las tres cantidades conocidas que entran en la cuestion, no es posible que resulte valor alguno particular y determinado para el símbolo x que al principio hemos elegido para representar la menor de las tres cantidades incógnitas. Lo único que esta expresion final nos indica es la serie de operaciones que para determinar el valor de aquella incógnita deberemos efectuar con las tres cantidades conocidas cuando á cada una de estas se le haya asignado un valor particular.

En efecto, si traducimos al lenguage vulgar la expresion $x = \frac{a-2b-c}{3}$, sustituyendo en lugar de las letras las denominaciones generales de las cantidades representadas por ellas, y enunciando las operaciones indicadas por los signos, resultará la siguiente regla general: *La menor de las tres partes desconocidas se hallará restando del número que intentemos repartir, el doble del exceso que la parte mediana debe llevar á la menor, y ademas el exceso que la mayor debe llevar á la mediana, y tomando la tercera parte del residuo.*

A todas las expresiones algebráicas semejantes á la que acabamos de traducir ó descifrar, las cuales, segun hemos hecho ver, no son otra cosa que unas meras indicaciones de la serie de operaciones que se d.ben ejecutar con las cantidades conocidas para hallar las desconocidas, y de consiguiente vienen á ser unas reglas generales escritas en lenguage simbólico, se las llama por esta razon *fórmulas*.

Si despues de hallada la *fórmula* queremos resolver cualquiera de los innumerables casos particul.res comprendidos en la misma cuestion general, solo nos restará efectuar por medio de las reglas de la Aritmética las operaciones que la fórmula nos prescribe. Asi en el caso particular que antes nos hemos propuesto restaremos de 230 el doble de 40, y ademas 60, ó lo que es lo mismo 80 y 60, ó en una palabra 140; y tomando del residuo 90 la tercera parte, vendremos en conocimiento de que 30 es la parte menor que buscábamos.

Si el número que nos propusiésemos repartir fuese 520, y el exceso de la parte mediana sobre la menor 50, y el de la mayor sobre la mediana 120, restariamos de 520 el doble de 50 y ademas 120; es decir, 100 y 120, ó en una palabra 220; y tomando del residuo 300 la tercera parte, hallariamos que la menor de las tres desconocidas era 100. Agregando ahora á esta el exceso 50, resultaria la mediana 150; y por último, añadiendo á esta el otro exceso 120, resultaria la mayor 270. Asi que las tres partes que se nos pedian del número 520 son:

100, 150, 270;

las cuales sobre tener la particular desigualdad que se requeria, juntas componen el número que nos proponiamos repartir.

Parece inútil advertir que asi como hemos determinado primeramente el valor de la parte menor, pudimos habernos propuesto determinar en primer lugar el valor de la mediana ó el de la mayor, y que de consiguiente pudimos hallar fórmulas para deducir inmediatamente de los tres números dados el valor de cualquiera de los incógnitos, sin necesidad de tener anteriormente conocido ninguno de los otros dos.

Sin embargo de que la última cuestion general es algo mas complicada que la primera, no ofrece todavía gran dificultad el resolverla sin mas auxilio que el lenguage vulgar. Asi la hemos resuelto en la página siguiente, colocando á continuacion de cada una de las proposiciones del razonamiento su traduccion en caractéres ó símbolos algebráicos, para que el cotejo que de este modo puede fácilmente hacerse de las dos soluciones, ponga mas en claro qué cosa sea el Algebra; cuánta deba ser su utilidad, y qué circunstancias pueden haber contribuido á su invencion. [1]

1 Si porque hemos dado á conocer el Algebra resolviendo con su auxilio problemas aritméticos ó relativos á números, la llamásemos, como ha solido hacerse, *Aritmética universal*, limitariamos demasiado la idea que debemos formarnos de ella. Los símbolos de que el Algebra se vale son por su indeterminacion igualmente aptos para expresar las relaciones de las varias y diferentes formas de la extension que las relaciones de los números; y asi tenemos en el Algebra un lenguage tan á propósito para resolver los problemas geométricos como los aritméticos. Y puesto que no puede pertenecer á las Matemáticas cosa alguna que no sea número ó extension, ó que no pueda representarse por la extension y de consiguiente por los números, el Algebra viene á ser el idioma universal de todas las Matemáticas puras y mixtas.

PROBLEMA.

Distribuir un número dado en tres partes tales que la mediana lleve á la menor un exceso dado, y la mayor lleve á la mediana otro exceso tambien dado.

Solucion.

En lenguage vulgar.	*Con los símbolos algebráicos.*
	Desígnese el número dado por a.
	El primer exceso.............. por b.
	El segundo....... .... por c.
La parte mediana será igual á la menor, mas el exceso que á esta lleve la mediana.	La parte menor............... por x.
La mayor será igual á la mediana, mas el exceso que á esta lleve la mayor..............	La parte mediana......... por $x+b$.
	La parte mayor.... por $x+b+c$.
Las tres partes reunidas han de componer el número propuesto; y de consiguiente la parte menor, mas la parte menor y el exceso que á esta lleve la mediana, mas la parte menor y el exceso que la lleve la mediana, y el exceso que á esta lleve la mayor, componen el número propuesto..............................	$x+x+b+x+b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor, mas dos veces el exceso que á esta lleve la mediana, mas el exceso que á esta última lleve la mayor, componen el número propuesto..............................	.... $3x+2b+c=a$.
Luego tres veces la parte menor equivalen al número propuesto menos dos veces el exceso que á la parte menor lleve la mediana, y menos el exceso que á esta lleve la mayor..............................	.... $3x=a-2b-c$.
Luego finalmente la parte menor es igual á la tercera parte de lo que quede despues de quitar del número propuesto dos veces el exceso que á la parte menor lleve la mediana, y ademas el exceso que á esta lleve la mayor..............................	.... $x=\dfrac{a-2b-c}{3}$

7 Los signos que hemos dado á conocer (§. 2) como destinados á indicar las operaciones aritméticas y representar sus resultados, no son los únicos de que se hace uso en el Algebra. Mas adelante veremos que nuevas consideraciones han hecho introducir algunos otros; y ya se puede haber notado que hemos indicado la multiplicacion de la cantidad x por *dos* y por *tres*, y la de la cantidad b por *dos* con solo colocar los guarismos que representan á los multiplicadores, á la izquierda de las letras x y b sin interposicion de signo alguno. Lo mismo haremos en todos los casos semejantes que ocurran en lo sucesivo; por manera que los guarismos colocados inmediatamente á la izquierda de las letras, indicarán que las cantidades representadas por estas estan multiplicadas por los números que aquellos representan. Asi que $5a$, $7x$, $9z$ &c., equivaldrán á 5 veces la cantidad a, 7 veces la cantidad x, 9 veces la cantidad z &c.; y del mismo modo $\frac{3}{4}x$ ó $\frac{3x}{4}$ representarán las *tres cuartas* partes de la cantidad designada por x, las cuales equivalen, como ya se sabe, á una sola cuarta parte de la cantidad designada por $3x$; las expresiones $\frac{7}{9}z$, $\frac{7z}{9}$ representarán las *siete novenas* partes de la cantidad designada por z, ó lo que es lo mismo, *una novena* parte de la cantidad designada por $7z$, y asi de las demas.

En general indicaremos la multiplicacion de unas cantidades por otras, y representaremos los productos de ellas con solo poner los factores inmediatamente á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno, á no ser que sea absolutamente necesario para evitar confusion. De modo que las expresiones ax, bc, mz &c. serán equivalentes á estotras $a \times x$, $b \times c$, $m \times z$ &c.; pero esta supresion del signo de la multiplicacion no deberá tener lugar en el caso en que los factores sean números representados por guarismos; pues si por ejemplo en el lugar de la combinacion 3×5 ó $3 . 5$ que representa al *quince*, escribiésemos, suprimiendo el signo, 35, esta combinacion no podria ya representar al *quince* sin quebrantar la ley fundamental de nuestro sistema de numeracion.

De las ecuaciones.

8 Si examinamos con alguna atencion lo que hemos practicado (§§. 3 y 6) para resolver con el auxilio de este lenguage simbólico las dos cuestiones que hasta ahora nos hemos propuesto, echaremos de ver que en primer lugar con los caracteres y signos algebráicos hemos representado las cantidades conocidas é incógnitas, y los resultados de las operaciones indicadas por las relaciones que entre aquellas cantidades establecia la propuesta, ó como suele decirse, por las condiciones del problema; todo con el objeto de venir á formar una ecuacion que expresa ó implícitamente se hallaba entre las condiciones de la misma propuesta, y en la cual entraban la cantidad incógnita y todas las conocidas. Asi hemos establecido (§. 3) que $2x+b=a$; y (§. 6) que $3x+2b+c=a$.

En segundo lugar hemos deducido de esta ecuacion primitiva y fundamental una serie de consecuencias ó nuevas ecuaciones, las cuales nos han hecho descubrir que la incógnita era igual al conjunto de las cantidades conocidas, enlazadas, por decirlo asi, entre sí por medio de operaciones que en la Aritmética hemos ya aprendido á efectuar con ellas. Asi hemos descubierto (§. 3) que $x=\frac{a-b}{2}$, y (§. 6) que $x=\frac{a-2b-c}{3}$.

De estas dos partes que acabamos de hacer notar en la solucion de los problemas propuestos, y que se podrán igualmente observar en la de todos los demas á que pueda aplicarse el Algebra, la primera, que tiene por objeto traducir al lenguage simbólico las condiciones de la cuestion, ó como suele decirse, *poner el problema en ecuacion*, no puede sujetarse á reglas fijas é invariables, que observadas con exactitud nos conduzcan seguramente al intento. Lo único que sobre este particular podemos decir es que por punto general debemos hacernos completamente cargo de todas las condiciones que explícita ó implícitamente contenga la propuesta; desenvolver las relaciones que las cantidades desconocidas tengan entre sí y con las conocidas; y familiarizarnos muchísimo con el lenguage algebráico para poder expresar en este lenguage aquellas relaciones y condiciones, entre las cuales se ha de hallar forzosamente la ecuacion que nos proponemos formar.

En habiendo formado la ecuacion fundamental hay métodos generales y seguros para deducir de ella la consecuencia final ó *fórmula* que nos indique la serie de operaciones que debemos ejecutar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita; á lo cual se reduce la segunda parte de la solucion. Pero antes de explicar estos métodos creemos conveniente dar á conocer algunas denominaciones de que se hace frecuente uso en este tratado.

El conjunto de todas las cantidades que en una ecuacion cualquiera estan colocadas á un mismo lado del signo $=$, se llama *miembro de la ecuacion*. Asi que toda ecuacion está formada de dos *miembros*: el que está á la izquierda del signo de igualdad se llama el *primer miembro*, y el que se halla á la derecha del mismo signo, *el segundo*. En la ecuacion por ejemplo $2x+b=a$ la combinacion $2x+b$ es el primer miembro, y a el segundo. Cada una de las varias partes de cada miembro, que estan separadas unas de otras con los signos $+$ ó $-$, se llama *término*, por manera que el primer miembro de la ecuacion anterior tiene dos términos, y uno solo el segundo. En la ecuacion $\frac{5}{4}x+7=8x-12$ cada miembro tiene dos términos; $\frac{5}{4}x$ y 7 son los del primer miembro; $8x$ y 12 son los del segundo. Los términos que á su izquierda no tengan signo alguno de adicion ó sustracion, ó que tengan el signo $+$, se llamarán *aditivos*, y los que tengan á su izquierda el signo $-$, *sustractivos*.[1] Asi de los cuatro términos que entran en la última ecuacion, los tres primeros son *aditivos*, y solo el último es *sustractivo*.

Deducir de la ecuacion fundamental de un problema la consecuencia final ó fórmula, en la cual se halle la incógnita sola en un miembro, por lo comun en el primero, y en el otro todas las cantidades conocidas, es lo que se llama *despejar la incógnita*, ó *resolver la ecuacion*.

Como las diversas cuestiones que pueden ocurrir nos deban conducir á ecuaciones mas ó menos complicadas, ha parecido conveniente dividirlas en varias clases ó *grados*. Las mas sencillas de todas son las que se

1 No hacemos por ahora uso de las denominaciones de *positivos* y *negativos*, porque los signos $+$ y $-$ en su primitiva institucion no indicaron otra cosa que las dos operaciones *adicion* y *sustraccion*; y de consiguiente los términos á los cuales esten antepuestos no fueron considerados sino como *sumandos* y *sustraendos*. Mas adelante veremos cómo vinieron los mismos signos á tener una nueva representacion conservando siempre la primitiva.

llaman del *primer grado*, en las cuales ninguna incógnita está multiplicada por otra incógnita ni por sí misma; y de las ecuaciones del primer grado las mas sencillas son las que solo contienen una incógnita: por cuya razon vamos en primer lugar á tratar de estas.

De la resolucion de las ecuaciones del primer grado que tienen una sola incógnita.

9 Resolver una ecuacion es, segun hemos dicho, deducir de ella otra que en uno de sus miembros no tenga ninguna cantidad mas que la incógnita, y que en el otro no tenga mas cantidades que las conocidas, combinadas entre sí por medio de operaciones que ya sepamos efectuar. De esto se sigue que para reducir á este estado cualquiera ecuacion propuesta, es necesario separar de la incógnita todas las cantidades conocidas, con las cuales se nos presente combinada en el primero ó en el segundo miembro ó en entrambos. Ahora bien, de tres modos puede la incógnita, segun lo que hasta aqui hemos visto, presentársenos mezclada con cantidades conocidas.

1.º Por adicion y sustraccion, como en las ecuaciones:

$$x+5=9-x;$$
$$x+a=b-x.$$

2.º Por adicion, sustraccion y multiplicacion, como en estas:

$$7x-5=12+4x;$$
$$ax-b=c+dx.$$

3.º Por adicion, sustraccion, multiplicacion y division, como en estotras:

$$\tfrac{5x}{3}+8x-7=\tfrac{11x}{12}+9;$$

$$\tfrac{ax}{b}+cx-d=\tfrac{fx}{g}+h.$$

10 Para conseguir, como nos proponemos, que la incógnita quede enteramente *despejada* ó desembarazada de las adiciones y sustracciones por cuyo medio puede hallarse combinada con cantidades conocidas, se deben en primer lugar reunir en un solo miembro de la ecuacion todos los términos en que se halle la incógnita, y al mismo tiempo reunir en el otro miembro todos los términos que solo contengan cantidades conocidas; para lo cual es necesario saber *trasponer* ó trasladar de un miembro á otro un término cualquiera sin que deje de subsistir la igualdad de los dos nuevos miembros.

En la ecuacion, por ejemplo, $7x-5=12+4x$ es necesario antes de todo *trasponer* del segundo miembro al primero el término $4x$, y del primero al segundo el término conocido 5. Para esto conviene observar que con solo borrar ó suprimir el término aditivo $4x$ que se halla en el segundo miembro, se le quita á este la cantidad representada por aquel término; y de consiguiente para que despues de hecha esta sustraccion se conserve la igualdad de los dos miembros, es indispensable quitar la misma cantidad al primero. Esto, si no se efectúa, se indica por lo menos escribiendo $-4x$, con lo cual el primer miembro vendrá á ser $7x-5-4x$; y la ecuacion propuesta se habrá trasformado en estotra:

$$7x-5-4x=12.$$

Si ahora borramos en el primer miembro el término 5 y el signo que le acompaña, suprimimos ó dejamos de hacer una sustraccion de 5 unidades, y de consiguiente el resultado que representa la nueva combinacion $7x-4x$ debe contener 5 unidades mas que el representado por la anterior combinacion $7x-5-4x$, equivalente á $7x-4x-5$. Suprimir pues del primer miembro el término sustractivo 5 equivale á agregar á aquel miembro *cinco* unidades; por cuya razon para que despues de hecha aquella supresion subsista la igualdad de ambos miembros, es necesario agregar al segundo otras tantas unidades, ó lo que equivale á lo mismo, escribir en él $+5$. Asi tendremos esta nueva ecuacion:

$$7x-4x=12+5.$$

Efectuando ahora la sustraccion que aparece indicada en el primer miembro, y la adicion que está indicada en el segundo, se reducirá la última ecuacion á esta mucho mas sencilla:

$$3x=17.$$

Estos razonamientos, que se pueden fácilmente aplicar á cualesquiera otros ejemplos, nos hacen ver que borrando ó suprimiendo de un miembro de una ecuacion un término aditivo, y que de consiguiente contribuia al aumento del resultado de aquella combinacion de términos, es necesario para que despues de hecha aquella supresion subsista la igualdad, quitar la misma cantidad del otro miembro, ó lo que equivale á lo mismo, escribir en este otro miembro con el signo $-$ el término suprimido que antes tenia el signo $+$ ó estaba sin signo alguno; y por el contrario, siempre que suprimamos de un miembro un término sustractivo, y que de consiguiente contribuia á disminuir el resultado de la combinacion en que se hallaba, tendremos que agregar igual cantidad al otro miembro, ó lo que es equivalente, escribir en este otro miembro con el signo $+$ el término suprimido, para que asi se restablezca la igualdad que la supresion habia alterado. Podremos pues establecer la siguiente

Regla general: *Para trasponer de un miembro de* *una ecuacion al otro un término cualquiera, se le debe borrar ó suprimir del miembro en que primeramente se halle, y escribirlo en el otro miembro con signo contrario al que antes tenia.*

11 Por medio de esta regla podremos en cuantos casos ocurran semejantes á los propuestos, reunir, como es necesario, en un solo miembro de la ecuacion todos los términos que contengan la incógnita, y en el otro todos los que no la contengan. Cuando hayamos efectuado esta trasposicion, podremos considerar á toda la combinacion de términos en que se halle la incógnita, como un producto que se puede descomponer en dos factores, uno de los cuales sea la misma incógnita, y el otro una ó mas cantidades conocidas.

El modo de hacer esta descomposicion se ocurre inmediatamente en todas las ecuaciones *numéricas*, [1] y señaladamente en las que no contienen fracciones; porque en esta especie de ecuaciones todos los términos en que se halla la incógnita se reducen finalmente á uno solo. Si, por ejemplo, despues de ejecutada la trasposicion de términos tuviésemos esta ecuacion:

$$10x+7x-2x=25+7-2;$$

efectuando las adiciones y sustracciones que estan indicadas en los dos miembros, se trasformaria en estotra mucho mas sencilla:

$$15x=30.$$

Ahora bien, $15x$ es un producto cuyos factores son x y 15; y como la ecuacion nos está indicando que aquel producto equivale á 30, es fácil ver que nos hallamos en el caso de tener conocido un producto y uno de sus

1 Asi se llaman todas las ecuaciones, en las cuales no hay mas letra que la que representa la cantidad incógnita.

factores, y buscar el otro factor. Dividiremos pues el producto conocido 30 por el factor conocido 15; y el cuociente será el factor incógnito. Asi que,

$$x=\frac{30}{15}.$$

Lo mismo puede ejecutarse en todas las ecuaciones *literales* [1] semejantes á esta:

$$ax=bc,$$

porque inmediatamente se ve que ax representa un producto cuyos factores son x y a; y equivaliendo ax á la cantidad conocida bc, se determinará el factor incógnito dividiendo el valor del producto por el factor conocido. Será pues

$$x=\frac{bc}{a}.$$

Si despues de hecha la trasposicion de términos tuviese la ecuacion esta forma:

$$ax+bx=cd-ef,$$

notariamos que la combinacion de términos del primer miembro representa la suma de dos productos que tienen el factor comun x; y como *la suma de dos ó mas productos que tienen un factor comun es igual á un solo producto, cuyos factores son el mismo factor comun, y la suma de los demas factores que no son comunes,* [2] *la*

1 Asi se llaman las ecuaciones, en las cuales no solo la cantidad incógnita, sino tambien las conocidas, estan representadas por letras.

2 Sobre este principio está fundada la regla de la multiplicacion aritmética. Cuando nos proponemos, por ejemplo, multiplicar el número *cuarenta y siete* por *nueve*, multiplicamos *siete* por *nueve*, y *cuarenta* por *nueve*, y sumamos los dos productos parciales, porque estamos bien convencidos de que esta suma de los dos productos, cuyo factor comun es *nueve*, equivale á un solo producto, cuyos factores son el mismo 9 y la suma 47 de los otros dos factores.

combinacion $ax+bx$ equivaldrá al producto de la x multiplicada por $a+b$; y de consiguiente, con arreglo á lo que hemos practicado en el caso anterior, será:

$$x=\frac{cd-ef}{a+b}.$$

Para expresar en el lenguage algebráico que la combinacion $ax+bx$ equivale al producto de la x multiplicada por la suma $a+b$, se representa este producto de este modo: $x(a+b)$, encerrando dentro de un paréntesis la suma de todos los factóres que no sean comunes, y colocando inmediatamente á la izquierda ó á la derecha del paréntesis el factor comun. Asi se dice que $ax+bx$, y $x(a+b)$ ó $(a+b)x$ son tres expresiones equivalentes. Por la misma razon lo son tambien estotras: $am+bm+cm$; $m(a+b+c)$; $(a+b+c)m$.

Si la ecuacion fuese $ax-bx=cd-ef$, tendriamos presente que la combinacion de términos del primer miembro representa la diferencia de dos productos que tienen un factor comun; y como *la diferencia de dos productos cualesquiera que tengan un factor comun es equivalente á un solo producto, cuyos factores son el mismo factor comun, y la diferencia de los que no lo sean;* en lugar de la combinacion $ax-bx$ podremos sustituir la expresion $x(a-b)$, con la cual se representa aquel producto. Será pues:

$$x(a-b)=cd-ef;$$

y de consiguiente $$x=\frac{cd-ef}{a-b}.$$

Si la ecuacion propuesta fuere $ax+bx-cx=de+fg$, podremos considerar al primer miembro como equivalente á un solo producto, cuyos factores son la x y la combinacion $a+b-c$ de cantidades conocidas. Este producto se representará por la expresion $x(a+b-c)$, y la ecuacion propuesta tomará esta forma:

$$x(a+b-c)=de+fg;$$

y de esta se deducirá que

$$x=\frac{de+fg}{a+b-c}.$$

Estos razonamientos, que se pueden fácilmente aplicar á todos los demas ejemplos semejantes, nos hacen ver que *despues de haber reunido en un solo miembro de la ecuacion todos los términos en que se halle la incógnita, y en el otro miembro todos los demas términos que no la contengan, podremos siempre considerar á la combinacion de los primeros como equivalente á un solo producto, cuyos factores son la misma incógnita y el conjunto de todos sus multiplicadores combinados con los mismos signos que en la ecuacion les esten antepuestos.* A consecuencia de esto *hallaremos el valor de la incógnita*, esto es, *el de uno de los factores dividiendo el miembro enteramente conocido, y que representa el valor del producto, por aquel conjunto de multiplicadores, que es el otro factor.*

Segun esta regla la ecuacion $ax-3x=b$ equivaldrá á estotra $x(a-3)=b$; y de esta se deducirá que

$$x=\frac{b}{a-3}.$$

La ecuacion $ax+x=c-d$ equivaldrá á $x(a+1)=c-d$, porque la cantidad x, ú otra cualquiera que se halle sola en un término, se puede considerar como el producto de la misma cantidad multiplicada por 1. Ademas de que en la cantidad representada por la combinacion $ax+x$ está contenida la x una vez mas que en el producto ax; si pues en este producto está la x multiplicada por a, en la combinacion $ax+x$ lo estará por $a+1$, y de consiguiente se deducirá de la ecuacion propuesta que

$$x=\frac{c-d}{a+1}.$$

12 Bien se deja ver que si todos los términos de una ecuacion fueren exactamente divisibles por una misma cantidad ó tuvieren un factor comun, se les podrá dividir por aquella cantidad, ó suprimir el factor comun en todos ellos; porque esta supresion equivale á dividir por un mismo número todas las partes de dos cantidades que por suposicion son iguales entre sí.

Supongamos por ejemplo la ecuacion:

$$6abx-9bcd=12bdx+15abc;$$

y en ella advertiremos en primer lugar que los cuatro números 6, 9, 12 y 15 son todos exactamente divisibles por 3. Tomando pues la tercera parte de todos los términos que entran en la ecuacion, se trasformará en estotra: $2abx-3bcd=4bdx+5abc.$

En segundo lugar observaremos que la letra b se halla en todos los términos combinada con otras por multiplicacion, y de consiguiente es un factor comun de todos ellos. La podemos pues suprimir enteramente sin alterar por eso la igualdad de los dos nuevos miembros; y asi resultará:

$$2ax-3cd=4dx+5ac.$$

Aplicando ahora á esta última ecuacion las reglas prescritas (§§. 10 y 11) deduciremos estas otras:

$$2ax-4dx=5ac+3cd,$$

$$x(2a-4d)=5ac+3cd,$$

$$x=\frac{5ac+3cd}{2a-4d}.$$

13 Aunque todas las reglas hasta aqui establecidas se puedan aplicar inmediatamente aun á las ecuaciones cuyos términos tengan divisores ó denominadores siempre que ninguno de estos sea la misma incógnita, es mucho mas sencillo reducir previamente en tal caso todos los términos á quebrados que tengan un mismo denominador para poder despues suprimir enteramente este denominador ó divisor comun. Esta supresion no debe alterar la igualdad de los dos miembros, porque (*Aritm.* §. 81) equivale á multiplicar por un mismo número todas las partes de dos cantidades iguales:

Sea por ejemplo la ecuacion numérica:

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7};$$

y como ya sabemos reducir los quebrados á un comun denominador, y los enteros á quebrados de cualquiera denominacion dada, podremos fácilmente trasformar todos los términos de la ecuacion propuesta en quebrados que tengan un mismo denominador.

Comenzando por reducir las tres fracciones

$$\frac{2x}{3},\frac{4x}{5},\frac{5x}{7};$$

las trasformaremos en estotras:

$$\frac{5\times7\times2x}{5\times7\times3},\frac{3\times7\times4x}{3\times7\times5},\frac{3\times5\times5x}{3\times5\times7}.$$

Pasando despues á convertir los enteros 4 y 12 en quebrados que tengan el denominador comun representado por la combinacion de factores $5\times7\times3$, se trasformarán en estas fracciones impropias:

$$\frac{5\times7\times3\times4}{5\times7\times3},\frac{5\times7\times3\times12}{5\times7\times3}.$$

Y sustituyendo las cinco fracciones que de las dos trasformaciones han resultado, en lugar de los cinco términos de la ecuacion, resultará expresada de este modo:

$$\frac{5\cdot7\cdot2x}{5\cdot7\cdot3}+\frac{5\cdot7\cdot3\cdot4}{5\cdot7\cdot3}=\frac{3\cdot7\cdot4x}{3\cdot7\cdot5}+\frac{5\cdot7\cdot3\cdot12}{5\cdot7\cdot3}-\frac{3\cdot5\cdot5x}{3\cdot5\cdot7}.$$

Suprimiendo ahora de todos los términos el denominador comun, se reducirá la ecuacion á esta:

$$5\times7\times2x+5\times7\times3\times4=3\times7\times4x+5\times7\times3\times12-3\times5\times5x,$$

la cual viene á ser estotra:

$$70x+420=84x+1260-75x;$$

y á esta última ya es fácil aplicar las reglas anteriormente prescritas (§§. 10 y 11). Asi que trasponiendo tendremos: $70x+75x-84x=1260-420$;

y efectuando las adiciones y sustracciones indicadas en los dos miembros de esta ecuacion quedará reducida á esta: $61x=840$;

de la cual se infiere: $x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}$

Reflexionando sobre lo que hemos practicado para trasformar la ecuacion propuesta

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7},$$

en estotra: $70x+420=84x+1260-75x$,

en la cual han desaparecido las fracciones sin haberse alterado la igualdad de los dos miembros; vemos que todo está reducido á *haber multiplicado el numerador de cada fraccion por el producto de los denominadores de todas las otras, y á multiplicar los enteros por el producto de todos los denominadores.*

Esto mismo se puede ejecutar en cualquiera otra ecuacion numérica, y aun en las literales, sin mas diferencia que la de meramente indicar en estas las multiplicaciones, que por ser los denominadores números particulares y determinados podemos efectuar en aquellas.

Sea, por ejemplo, la ecuacion literal:

$$\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{c}+\frac{fg}{h};$$

y haciendo lo mismo que hemos ejecutado en la numérica anterior, la trasformaremos en estotra:

$$eh\times ax-beh\times c=bh\times dx+be\times fg;$$

resultado que puede escribirse con mayor sencillez, poniendo con arreglo al convenio adoptado (§. 7) todas las letras que sean factores de un mismo producto á continuacion unas de otras sin interposicion de signo alguno, y aun si se quiere, colocándolas segun el orden que guardan en en el alfabeto, porque asi es mas fácil enunciarlas. Tendremos pues:

$$aehx-bceh=bdhx+befg.$$

De esta ecuacion se deducen (§§. 10 y 11) estotras:

$$aehx-bdhx=befg+bceh;$$

$$x\,(aeh-bdh)=befg+bceh;$$

$$x=\frac{befg+bceh}{aeh-bdh};$$

14 Estas reglas son suficientes para resolver las ecuaciones del primer grado que tengan una sola incógnita, y conseguir que esta quede enteramente despejada de todas las cantidades conocidas, con las cuales pueda estar combinada en la ecuacion primitiva, que inmediatamente se deduce de la propuesta del problema; y aunque para formar esta ecuacion fundamental ó poner el problema en ecuacion no pueda establecerse, como ya hemos dicho (§. 8), regla alguna general, puede en su defecto sernos muy útil la siguiente, que aplicada con inteligencia no dejará de conducirnos al objeto que nos proponemos:

Represéntense por guarismos ó mas bien por letras *todas las cantidades conocidas ó dadas que entren en la cuestion, y por una letra la incógnita; y hágase el mismo razonamiento, é indíquense con el auxilio de los signos algebráicos las mismas operaciones que se deberian efectuar en el caso en que suponiendo conocido el valor de la incógnita tratásemos solo de comprobarlo, ó de averiguar si tenia todas las condiciones que la propuesta requiere.*

Ya se deja entender que no es posible hacer un uso acertado de esta regla sin haber ante todas cosas desenvuelto todas las relaciones que la propuesta de la cuestion establezca entre la incógnita y las cantidades conocidas, ó lo que es lo mismo, sin haber préviamente puesto en claro qué operaciones nos prescribe explícita ó implícitamente la misma propuesta; y en esto cabalmente consiste toda la dificultad de poner en ecuacion un problema. Con todo, para hacer ver el mucho partido que se puede sacar de la regla anterior, la aplicaremos á algunos ejemplos.

1.º *Distribuir un número dado* a *en tres partes desiguales, que tengan entre sí las mismas razones que los números tambien dados* m, n, p.

Teniendo ya representadas por letras las cuatro cantidades conocidas que entran en la cuestion, representaremos por la letra x ú otra cualquiera de las últimas del abecedario cualquiera de las tres partes desconocidas. Sea, por ejemplo, la primera de las tres; y para que se vea que ya no es necesario representar por nuevas letras las otras dos partes restantes, haremos el sigiente razonamiento:

Si conociéramos la primera parte que buscamos, formariamos para hallar la segunda esta proporcion:

$$m : n :: x : \textit{la segunda parte};$$

porque la propuesta nos prescribe que la primera parte debe ser á la segunda como la cantidad conocida m es á la cantidad tambien conocida n. Estará pues bien representada la segunda parte por $\frac{nx}{m}$, expresion del cuarto término de aquella proporcion, en la cual se suponen conocidos los otros tres.

Del mismo modo para hallar la parte restante formariamos estotra proporcion:

$$m : p :: x : \textit{la parte tercera};$$

porque la propuesta nos prescribe que la primera parte debe ser á la tercera como m es á p; y de consiguiente la última parte estará bien representada por $\frac{px}{m}$, expresion del cuarto término de la última proporcion, en la cual se suponen conocidos los otros tres.

Ahora bien, si suponiendo conocidas las tres partes, y sabiendo que ya guardan entre sí la proporcionalidad expresamente prescrita en la propuesta, quisiéramos cerciorarnos de si estaban ó no bien determinados los valores de todas ellas, las sumariamos con el fin de averiguar si la suma era igual al número que nos proponemos repartir, porque asi lo exige, bien que implícitamente, la misma propuesta. Tendremos pues esta ecuacion:

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a.$$

Con esto habremos conseguido, como nos proponiamos, poner en ecuacion el problema; y lo único que nos restará hacer será despejar la incógnita, valiéndonos para ello de las reglas prescritas (§§. 11 y 13).

Por decontado no será necesario *trasponer* término alguno, porque se hallan con separacion en un solo miembro todos los términos que contienen la incógnita; y como los dos términos fraccionarios tienen un mismo denominador, solo habrá que reducir á fracciones los dos enteros para poder suprimir enteramente el denominador. Asi resultarán las ecuaciones siguientes:

$$mx + nx + px = am;$$
$$x(m + n + p) = am;$$
$$x = \frac{am}{m + n + p}.$$

Este resultado final ó fórmula, que ya nos está indicando la serie de operaciones que se deben efectuar con las cantidades conocidas para determinar el valor de la incógnita, no es mas que la traduccion algebráica de la regla llamada de *compañía*. (*Aritm.* §. 176); porque suponiendo que m, n, p representen los capitales de tres socios, y a la ganancia total ó *dividendo*, las cuestiones de compañía se reducen á la que acabamos de resolver; la combinacion $m+n+p$ representará el fondo total de la compañía; y la expresion

$$x = \frac{am}{m+n+p}$$

nos indicará que para determinar la parte de ganancia que corresponde al socio que contribuyó con la cantidad m, se ha de multiplicar por esta la ganancia total a, y el producto se ha de partir por el fondo total $m+n+p$. Esto equivale á decir que se ha de formar esta proporcion:

$$m+n+p : m :: a : x;$$

la cual traducida al lenguage vulgar viene á ser la misma que hemos formado en la Aritmética, á saber: *el* *fondo total de la compañía es al capital de uno de los socios, como la ganancia total es á la porcion que de ella le corresponde.*

Parece inútil advertir que en habiendo determinado el valor de la incógnita x, las expresiones $\frac{nx}{m}$, $\frac{px}{m}$ nos prescriben las operaciones que deberemos ejecutar para hallar los de las otras dos cantidades desconocidas.

2.° *Se pusieron dos á jugar con otros, y ambos perdieron, el uno 12 rs. y el otro 57 rs.; el dinero con que este segundo se levantó del juego era la cuarta parte del que al primero le habia quedado, siendo asi que para ponerse á jugar sacó el uno tantos reales como el otro.* Se pregunta: *¿con cuántos reales se puso á jugar cada uno de los dos?*

Bien se deja ver que si suponiendo ya conocido este número incógnito tratásemos solo de averiguar si se verificaban todas las condiciones de la propuesta, restariamos de él los 12 rs. que perdió uno de los jugadores; de igual número restariamos tambien los 57 rs. que perdió el otro; y sabiendo por este medio cuánto habia quedado á cada uno, examinariamos si el segundo residuo era, como debia ser, la cuarta parte del primero.

Pues lo mismo cabalmente ejecutaremos cuando representemos por x el número de reales que cada uno de los dos sacó para jugar; por a los 12 rs. que perdió el primero, y por b los 57 rs. que perdió el segundo. Restaremos a de x, y el residuo será $x-a$; restaremos asimismo b de x, y el residuo será $x-b$: y como sea una de las condiciones de la propuesta que este segundo residuo haya de ser la cuarta parte del primero, esta misma condicion, traducida al lenguage algebráico, se trasformará en esta ecuacion:

$$x-b=\frac{x-a}{4}.$$

Aunque en realidad está ya puesto en ecuacion el problema, es del caso notar que pudimos deducir de la misma propuesta una ecuacion sin quebrado alguno; porque si el segundo residuo representado por $x-b$ debe ser la cuarta parte del primero representado por $x-a$, es consiguiente que cuatro veces aquel sea igual á este. Pero ¿cómo representaremos el cuadruplo de aquel residuo sin tener previamente conocido el valor del mismo residuo? No es necesario reflexionar mucho para ver que la analogía nos conduce á representar aquel cuadruplo por una de estas dos expresiones.

$$4(x-b);\ 4x-4b.$$

En efecto, si un minuendo *menos* un sustraendo representa un residuo, es forzoso que la combinacion de cuatro minuendos *menos* cuatro sustraendos represente cuatro residuos ó el cuadruplo de un residuo. Y cotejando las dos últimas expresiones, que como es facil demostrar, son equivalentes, vendremos á convencernos de que *lo mismo es restar primeramente una cantidad de otra, y multiplicar despues por cualquier número el residuo, que multiplicar primeramente por el mismo multiplicador el minuendo y el sustraendo, y restar despues un producto de otro.* La inversion del orden de estas operaciones no produce alteracion alguna en el resultado final.

Si pues el cuadruplo del segundo residuo debe ser igual al primero, tendremos esta ecuacion:

$$4x-4b=x-a;$$

de la cual se deducen facilísimamente estotras:

$$4x - x = 4b - a;$$

$$3x = 4b - a;$$

$$x = \frac{4b - a}{3}.$$

Esta última fórmula nos está prescribiendo que *del cuadruplo de la pérdida mayor restemos la menor, y que del residuo tomemos la tercera parte, para que nos resulte el número que buscábamos.*

3º *Un pescador, con el objeto de estimular á un hijo suyo al trabajo, promete darle 5 cuartos por cada lance en que este saque pesca, con la condicion de que por cada lance en que no la saque le descontará 3 cuartos. Despues de 12 lances ajustaron cuentas, y tuvo el padre que pagar al hijo 28 cuartos.* Se pregunta: *en cuántos lances de los 12 sacó el hijo pesca, y en cuántos no?*

Siendo por suposicion 12 todos los lances, si representamos por x el número de los lances felices, el de los infructuosos resultará bien representado por la combinacion $12 - x$. Ahora bien, si como estos son unos meros símbolos de dos números que no conocemos, fueran los mismos números que deseamos conocer, ¿qué hariamos para comprobar el ajuste de cuentas? Claro es que multiplicariamos 5 cuartos por el número de lances felices, y 3 cuartos por el de los infructuosos; restariamos del primer producto el segundo, y el residuo ó alcance á favor del hijo deberia ser 28 cuartos, para que el resultado final fuese, como debe ser, enteramente conforme con la propuesta de la cuestion.

Pues del mismo modo multiplicaremos 5 por x, y el producto estará representado por $5x$; multiplicaremos igualmente $12 - x$ por 3, y el producto estará bien representado por la combinacion $36 - 3x$. Despues de haber ejecutado las dos multiplicaciones, ó mas bien despues de haber representado los dos productos, deberemos restar de $5x$, que representa la deuda del padre, la cantidad $36-3x$ que representa la del hijo, y el residuo deberá ser igual á 28. Pero ¿cómo podremos restar de $5x$ la cantidad representada por la combinacion $36-3x$ sin haber antes quitado $3x$ de 36, segun lo está indicando la última expresion?

Para superar esta dificultad tengamos presente que *si en dos sustracciones hay un mismo minuendo y distintos sustraendos, cuanto tenga uno de estos mas que el otro, tanto cabalmente tendrá menos que el residuo correspondiente al menor sustraendo el correspondiente al mayor.* Si pues habiendo de restar 36 de $5x$ representamos el residuo por la combinacion $5x-36$, cuando hayamos de restar del mismo minuendo $5x$ la cantidad representada por $36-3x$, que tiene $3x$ menos que el anterior sustraendo 36, el nuevo residuo deberá tener $3x$ mas que el anterior, y de consiguiente estará bien representado por la combinacion $5x-36+3x$. Tendremos pues con arreglo á la propuesta la siguiente ecuacion:

$$5x-36+3x=28;$$

de la cual se deducen fácilmente estotras:

$$5x+3x=28+36;$$

$$8x=64;$$

$$x=\tfrac{64}{8}=8.$$

Son pues 8 los lances felices, y de consiguiente 4 los infructuosos. En efecto,

Por 8 de los primeros á 5 cuartos cada uno debe el padre..............................	40 cuartos.
Por 4 de los segundos á tres cuartos cada uno debe el hijo..............................	12 cuartos.

Resultan pues de alcance á favor de este 28 cuartos, segun lo exigia la propuesta del problema.

Si quisiéremos generalizar la solucion, representaremos por a el número de cuartos que el padre prometió dar al hijo por cada lance feliz; representaremos asimismo por b el número de cuartos que determinó descontarle por cada lance infructuoso; por c el número de todos los lances, y por d el número de cuartos que en el ajuste de cuentas resultaron de alcance contra el padre y á favor del hijo. Designaremos como antes por x el número de los lances felices, y á consecuencia estará bien representado el de los infructuosos por la combinacion $c-x$, sin necesidad de emplear para esto otra nueva letra.

Ahora bien, si por cada lance feliz debe el padre al hijo a cuartos, por el número x de lances felices le deberá ax cuartos. Y si por cada lance infructuoso debe el hijo al padre b cuartos, por el número $c-x$ de lances infructuosos le deberá el producto de aquellos dos números, el cual estará representado por $b\,(c-x)$, ó por $bc-bx$.

Para quitar ahora este producto, que representa la deuda del hijo, del producto ax que representa la del padre, haremos el mismo razonamiento que cuando designábamos con guarismo los números conocidos, y diremos: si de ax hubiésemos de sustraer bc, el residuo estaria bien representado por la combinacion $ax-bc$; con que habiendo de quitar del mismo minuendo ax la cantidad representada por $bc-bx$, la cual tiene bx menos que bc, el nuevo residuo deberá tener la misma cantidad bx mas que el anterior, y deberá representarse por $ax-bc+bx$. Y puesto que segun la propuesta de la cuestion este último residuo, que representa el alcance á favor del hijo, debe ser igual á la cantidad d, tendremos esta ecuacion:

$$ax-bc+bx=d;$$

de la cual se deducen estotras:

$$ax+bx=d+bc;$$

$$x(a+b)=d+bc;$$

$$x=\frac{d+bc}{a+b}.$$

Esta fórmula, que nos indica qué operaciones debamos ejecutar con los cuatro números conocidos para determinar el incógnito, se puede fácilmente trasformar en una regla general con solo traducirla al lenguage vulgar, como ya lo hemos practicado con algunas otras; pero aun sin necesidad de ejecutar esta traduccion puede servirnos para resolver todos los problemas semejantes al propuesto, con solo sustituir los números que en cada caso particular se nos den conocidos en lugar de las letras con que en la fórmula estan representados. Haciendo uso de este segundo medio para completar la solucion del problema particular propuesto, nos resultará esta expresion:

$$x=\frac{28+3\times 12}{5+3};$$

y efectuando las operaciones indicadas vendrá á ser

$$x=\frac{28+36}{8}=\frac{64}{8}=8;$$

como antes hemos hallado.

15. Si para resolver cualquier problema que tenga una sola incógnita hemos de deducir en primer lugar de su propuesta una ecuacion, es consiguiente que toda ecuacion ya formada y expresada en lenguage alge-

bráico pueda considerarse como procedente de una cuestion, cuya propuesta se hallará fácilmente traduciendo al lenguage vulgar la expresion que se nos dé en el simbólico. Asi se podrá ver sin dificultad que la ecuacion

$$\frac{3x}{4}+7=8x-12$$

pertenece á este problema:

Hallar un número x *tal que si á sus tres cuartas partes se añaden 7, la suma sea igual al residuo que resulte quitando 12 de ocho veces el mismo número desconocido.*

Asimismo traduciendo al lenguage vulgar la ecuacion: $ax+bc-cx=ac-bx$,
en la cual suponemos que las letras a, b, c representan cantidades conocidas, y x la incógnita, veremos que debe haber provenido de esta cuestion:

Hallar un número x *tal que multiplicándolo por el número dado* a; *sumando con este producto el de los dos números dados* b *y* c; *y restando de la suma el producto de los números* c *y* x, *el residuo sea igual al que resulte quitando del producto de los dos números dados* a *y* c *el de los números* b *y* x.

Del mismo modo podremos venir en conocimiento de las cuestiones que deben haber dado origen á cuantas ecuaciones se nos propongan de la misma especie; es decir: podremos enunciar en lenguage vulgar las relaciones que la propuesta establecia entre las cantidades conocidas y la incógnita. Por lo demas ya hemos dicho (§. 4) que una misma relacion se puede enunciar de varios y muy distintos modos.

Ejercitándose mucho en traducir del lenguage ordinario al simbólico y al contrario, como se practica en el estudio de cualquier idioma extraño, se familiarizarán los principiantes con el Algebra, cuya dificultad apenas consiste en otra cosa que en la perfecta inteligencia de la representacion de los caracteres y signos, y del modo de hacer uso en ellos.

Reglas para efectuar en cuanto es posible con las cantidades representadas por letras las operaciones aritméticas.

16 En las cuestiones que hasta aqui hemos resuelto, se puede ya haber conocido la necesidad de saber representar con los símbolos y signos algebráicos el resultado final de una ó mas operaciones aritméticas ejecutadas con cantidades de valor indeterminado ó desconocido; y aunque el representar los resultados de la adicion, sustraccion, multiplicacion y division no pueda propiamente llamarse ejecutar estas operaciones, se le da sin embargo el nombre de aquella con la cual tenga mas analogía.

Cuando nos proponemos reunir muchas expresiones algebráicas en una sola equivalente al conjunto de todas ellas, llamamos á esto *sumar cantidades algebráicas*.

Cuando representamos el residuo que debe quedar en quitando de una expresion algebráica alguna otra, llamamos á esto *restar*.

Cuando representamos por el conjunto de varias expresiones de productos parciales el resultado de una multiplicacion, llamamos á esto *multiplicar*.

Finalmente, cuando representamos por el conjunto de varias expresiones de cuocientes parciales el resultado de una division, llamamos á esto *dividir*.

Pero todas estas operaciones se diferencian de las que hemos ejecutado en la Aritmética, en que no siendo sus resultados sino unas meras indicaciones de otras operaciones que aun nos resta efectuar, no presentan las mas veces otra cosa que una trasformacion de la serie de operaciones primitivamente indicadas, en otra que debe producir el mismo efecto y conducir al mismo resultado, sin mas diferencia que la de darnos de este expresiones mas sencillas, ó presentárnoslo bajo una forma mas acomodada al intento que nos proponemos.

Conviene advertir que á cada una de las expresiones que hemos llamado *términos*, se le da tambien el nombre de *monomio* ó de *cantidad monomia*; á la combinacion de dos términos ó de dos *monomios* se la llama *binomio*; la combinacion de tres términos ó *monomios* se llama *trinomio*; la de cuatro *cuadrinomio*; y generalmente la combinacion de muchos términos ó monomios se denomina *polinomio*. Cualquier *monomio* se llama tambien *cantidad incomplexa*; y todo *polinomio* desde el *binomio* en adelante se llama *cantidad complexa*. Cada una de las expresiones $2a$, $3ab$, $5bdf$ &c. es un *monomio* ó *una cantidad incomplexa*; cualquiera de las combinaciones $a+b$, $3a-5c$, $8bd-5ac$ &c. es un *binomio*; cualquiera de las combinaciones $4a-3b+2x$, $5cf+4ab+3dx$ &c. es un *trinomio*; y asi de las demas combinaciones de términos.

De la adicion de las cantidades algebráicas.

17 Cuando son *monomias* todas las cantidades que nos proponemos sumar, se ejecuta la adicion, ó mas bien se representa la suma formando una combinacion de

todas ellas, sin otra alteracion que la de tener interpuesto entre cada dos el signo $+$. Asi la suma de las cantidades a, b, c. d &c. se representa por la combinacion

$$a+b+c+d+\&c.$$

la suma de las cantidades *monomias* $2ax$, $3b$, $4cd$, $5f$ &c. se representa por la combinacion

$$2ax+3b+4cd+5f+\&c.;$$

pero es de notar que esta combinacion de *monomios*, ó lo que es lo mismo, este *polinomio*, que representa la suma, puede en muchos casos simplificarse reuniendo dos ó mas términos en uno solo, y reduciendo por este medio la combinacion total al menor número de términos que sea posible.

Esta reunion ó reduccion es la misma que ya hemos efectuado (§§. 2 y 5) cuando hemos sustituido en lugar del *binomio* $x+x$ el *monomio* equivalente $2x$; y en lugar del *trinomio* $x+x+x$ el *monomio* equivalente $3x$: por medio de los cuales ejemplos es facil echar de ver que la reduccion de que hablamos solo puede tener lugar cuando una misma letra se halle repetida en muchos términos, ó cuando sean comunes á muchos términos los mismos factores literales ó algebráicos. Estos términos se llaman en tal caso *términos semejantes*, y la reunion de todos estos en uno que equivalga á la combinacion de ellos, se llama *reduccion de términos semejantes*. En tal caso se considera la letra comun ó el conjunto de factores comunes como si fuese una unidad, la cual está repetida tantas veces cuantos sean los términos en que se halle, cuando ninguno de estos tiene ningun factor numérico. Asi es que $a+a+a+a$ equivale á $4a$; $bc+bc+bc+bc+bc$ equivale á $5bc$. Pero si los términos semejantes tuviesen factores numéricos, la combinacion de términos equivaldrá á la letra comun ó al conjunto de factores tomado tantas veces como unidades tenga la suma de los factores numéricos. Asi que $4a+3a+5a$ equivale á $12a$; la combinacion $3bcd+7bcd+2bcd+6bcd$ equivale á $18bcd$.

Se efectúa pues la adicion de los términos semejantes con los números que van antepuestos á las cantidades literales, los cuales indican cuántas veces está tomada en cada término la cantidad comun. Estos números se llaman *coeficientes*, y cada uno de ellos es multiplicador de la letra ó producto á que está antepuesto; debiéndose tener entendido que cuando en un término no haya ningun número antepuesto á la cantidad literal, el coeficiente es 1; de modo que a, por ejemplo, es lo mismo que $1a$; y asi el binomio $a+4a$ se reducirá al monomio equivalente $5a$; al trinomio $bc+2bc+5bc$ equivaldrán al monomio $8bc$.

18 Cuando tratemos de representar la suma de dos ó mas polinomios, es bien claro que si todos estos fueren resultados de otras adiciones anteriores, ó lo que es lo mismo, si todos los términos de los polinomios fueren *aditivos*, la suma total deberá componerse de todas las partes de los sumandos. Asi la suma de los binomios

$$4a+5b \text{ y } 2c+3d.$$

estará bien representada por la combinacion de los cuatro monomios

$$4a+5b+2c+3d;$$

porque en realidad esto se reduce á decir que sumar primeramente dos cantidades cualesquiera, sumar despues otras dos, y sumar por último las dos sumas, es lo mismo que sumar de una vez los cuatro sumandos que entran en ellas.

Si alguno de los polinomios que se hayan de sumar fuese resultado de alguna sustraccion anterior, ó lo que es lo mismo, si fuese sustractivo alguno de los términos de los sumandos, deberá serlo igualmente en el resultado, y aparecer en la suma con el mismo signo $-$ con que antes se hallaba. Asi la suma de los dos binomios

$$4a+5b \text{ y } 2c-3d$$

estará bien representada por la combinacion de los cuatro monomios, ó por el *cuadrinomio*

$$4a+5b+2c-3d;$$

porque sumar primeramente dos cantidades cualesquiera, restar despues de otra cantidad otra cualquiera, y sumar por último este residuo con aquella primera suma, es lo mismo que sumar las tres primeras cantidades, y restar de esta suma la cantidad que antes fue *sustraendo*.

Los dos ejemplos que acabamos de poner, bastan para hacer ver que la operacion llamada *adicion de los polinomios se efectúa escribiendo todos los términos que haya en los sumandos á continuacion unos de otros y con sus propios signos, teniendo presente que los términos que en los sumandos esten sin signo alguno, se deben considerar como aditivos, ó como si tuviesen antepuesto el signo* $+$.

Si en los sumandos hubiese algunos términos semejantes se podrán estos reducir á uno solo en la suma, efectuando con los coeficientes las operaciones indicadas por los signos que les esten antepuestos.

Propongámonos, por ejemplo, sumar los trinomios

$$4a+9b-2c,$$
$$2a-3c+4d,$$
$$7b+c-e;$$

y conforme á la regla antecedente la suma estará bien representada por el siguiente polinomio, en el cual se hallan reunidos con sus propios signos todos los términos de los tres sumandos:

$$4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+c-e.$$

Viendo ahora que al binomio $4a+2a$ es equivalente el monomio $6a$; que al binomio $9b+7b$ equivale el monomio $16b$; que los términos sustractivos $-2c$ y $-3c$ deben producir en el resultado el mismo efecto que el monomio sustractivo $-5c$; y por último, que restar por una parte $5c$, y añadir por otra $1c$, es lo mismo que quitar $4c$, vendrá á reducirse aquella primera expresion de la suma á estotra equivalente mucho mas sencilla:

$$6a+16b-4c+4d-e.$$

19 Para la reduccion de los términos semejantes, que puede y con frecuencia suele tener lugar en los resultados de todas las operaciones algebráicas, puede servir de gobierno la siguiente

Regla general: *Si todos los términos semejantes fuesen aditivos, la combinacion de todos ellos equivaldrá á un solo término aditivo, que tenga la misma letra ó los mismos factores algebráicos, y por coeficiente ó factor numérico la suma de todos los coeficientes de todos los términos que intentemos reducir.*

Si todos fuesen sustractivos, la combinacion de ellos equivaldrá á un solo término ó monomio sustractivo, que tenga la misma letra ó los mismos factores algebráicos, y por coeficiente la suma de los coeficientes de todos los términos que intentemos reducir.

Si de los términos semejantes unos fuesen aditivos y otros sustractivos, se reducirán los primeros al monomio aditivo equivalente, é igualmente los segundos al *equivalente monomio sustractivo; y en caso que sean iguales los coeficientes de estos dos monomios, desaparecerá enteramente del resultado la combinacion de aquellos términos semejantes, como que se reducen á cero, ó se destruyen mutuamente; pero cuando sean desiguales las sumas de los coeficientes aditivos y sustractivos, se restará la menor de la mayor, y el residuo será el coeficiente del monomio equivalente á la combinacion de términos semejantes, el cual tendrá el mismo signo que la mayor de las dos sumas.*

Para ejercicio de nuestros lectores pondremos aqui algunos otros ejemplos de adiciones algebráicas con sus resultados.

Ejemplo 1.

$$\text{Sumandos...}\begin{cases}7m+3n-14p+17r\\ 3a+9n-11m+2r\\ 5p-4m+8n-13r\\ 11n-2b-6r-m+s.\end{cases}$$

$$\text{Suma.}\begin{cases}7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r\\ +5p-4m+8n-13r+11n-2b-6r-m+s.\end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes se simplificará la expresion de la suma, y se trasformará en estotra:

$$-9m+31n-9p+3a-2b+s;$$

en la cual se ve que la combinacion de términos semejantes $7m-11m-4m-m$ se ha reducido al monomio sustractivo $-9m$, porque 7 es el único coeficiente aditivo, y la suma de los sustractivos es 16; que el cuadrinomio $3n+9n+8n+11n$ se ha reducido al monomio aditivo $31n$, porque aquellos cuatro términos son todos aditivos; que el binomio $-14p+5p$ se ha reducido al monomio sustractivo $-9p$; y por último, que han desaparecido enteramente los términos que contenian la letra r, porque en la combinacion $17r+2r-13r-6r$ la suma de los coeficientes aditivos es igual á la de los sustractivos.

En la colocacion de los términos de un polinomio se puede guardar el orden que se quiera ó que mas acomode; pero por lo comun ocupa el primer lugar, comenzando por la izquierda, un término aditivo, sea el que fuere, por parecer muy impropio comenzar restando sin suponer de qué. Por esta razon los términos de la última expresion que hemos hallado de la suma, se podrán colocar en este orden:

$$31n-9m-9p+3a-2a+s.$$

Ejemplo II.

$$\text{Sumandos...}\begin{cases}11bc+4ad-8ac+5cd\\ 8ac+7bc-2ad+4mn\\ 2cd-3ab+5ac+an\\ 9an-2bc-2ad+5cd.\end{cases}$$

$$\text{Suma.}\begin{cases}11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad+4mn\\ +2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc-2ad+5cd\end{cases}$$

Reduciendo términos semejantes vendrá á ser:

$$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an.$$

De la sustraccion de las cantidades algebráicas.

20 Con arreglo al convenio generalmente adoptado (§. 2) se indica la sustraccion de los monomios poniendo el signo $-$ á la izquierda del sustraendo; y la

combinacion del minuendo y del sustraendo con el signo — antepuesto á este segundo representa el residuo que debe resultar de la sustraccion. Asi cuando de la cantidad a tengamos que quitar la cantidad b, escribiremos $a-b$ para representar el residuo; si de la cantidad $8bc$ hubiésemos de restar la cantidad $3mn$, escribiremos $8bc-3mn$ para representar el residuo.

Si los dos monomios, minuendo y sustraendo, fuesen semejantes, la expresion del residuo se podrá simplificar y reducir á un solo término, que tenga por coeficiente la diferencia de los coeficientes de aquellos dos monomios. Por manera que si de $8bc$ hubiésemos de restar $3bc$, la expresion $8bc-3bc$ que representa el residuo, podria simplificarse y reducirse al solo monomio $5bc$. Aun antes de ahora hemos ejecutado reducciones de esta especie, porque se conoce á primera vista la razon de ellas.

Por lo que respecta á la sustraccion de los polinomios se deben distinguir dos casos:

1.° *Si el sustraendo representase la suma de muchos monomios*, ó lo que es lo mismo, *si todos los terminos del sustraendo fuesen aditivos ó tuviesen antepuesto el signo* +, *se representará el residuo escribiendo el minuendo segun nos lo hayan dado, y á su continuacion el sustraendo, anteponiendo á todos los términos de este el signo* —; porque, como es bien sabido, lo mismo es quitar de una vez una cantidad cualquiera, que quitar sucesivamente todas las partes de que esta se componga.

Si, por ejemplo, de la cantidad representada por el trinomio $5a-9b+2c$ quisiéramos quitar la representada por el trinomio $2d+3c+4f$, representaremos el residuo por la siguiente combinacion:

$$5a-9b+2c-2d-3e-4f.$$

2.° *Si de los términos del sustraendo unos fuesen aditivos y otros sustractivos*, ó lo que es lo mismo, *si unos tuviesen antepuesto el signo* $+$ *, y otros el signo* $-$*; cuando escribamos el sustraendo á continuacion del minuendo para representar el residuo, á los términos del sustraendo que tenian el signo* $+$ *les antepondremos el signo* $-$*, y á los que tenian el signo* $-$ *les antepondremos el signo* $+$. De modo que si nos proponemos restar de la cantidad representada por el trinomio $7m-4n+8q$, la representada por el cuadrinomio $6a-3f+2b-9c$, representaremos el residuo por esta combinacion:

$$7m-4n+8q-6a+3f-b2+9c.$$

La razon de lo que esta regla prescribe la hemos expuesto en la solucion del tercer problema que propusimos en el §. 14; y aplicándola al ejemplo que acabamos de proponer diremos que si de la cantidad $7m-4n+8q$ hubiésemos de restar el binomio $6a+2b$, el residuo estaria bien representado por la combinacion

$$7m-4n+8q-6a\ 2-b;$$

pero como el sustraendo propuesto $6a-3f+2b-9c$, equivalente á $6a+2b-3f-9c$, tenga menos que $6a+2b$ la cantidad representada por $3f+9c$, el residuo deberá tener esta misma cantidad mas, y de consiguiente deberá representarse por

$$7m-4n+8q-6a-2b+3f+9c;$$

á cuya expresion equivale la que antes hemos hallado.

Reuniendo ahora en una sola regla general las particulares que acabamos de establecer, deduciremos por conclusion que *la sustraccion de las cantidades algebráicas se efectúa escribiendo á continuacion del minuen-*

el sustraendo despues de haber cambiado de + en −, y de − en + los signos de este último.

Despues de puesta en ejecucion esta regla, si en el resultado hubiese términos semejantes, se hace la reduccion de ellos conforme á los preceptos establecidos (§. 19).

Ejemplo I.

Minuendo... $17a + 2m - 9b - 4c + 23d.$
Sustraendo. $11c - 27b + 51a - 4d$

$$\textit{Residuo.....}\begin{cases} 17a + 2m - 9b - 4c + 23d - 11c + \\ \quad 27b - 51a + 4d. \end{cases}$$

Efectuando la reduccion de los términos semejantes resultará estotra expresion:

$$-34a + 2m + 18b - 15c + 27d;$$

ó mas bien: $2m - 34a + 18b - 15c + 27d.$

Ejemplo II.

Minuendo... $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
Sustraendo. $8am - 7cd + 11ac - 2ab$

$$\textit{Residuo.....}\begin{cases} 5ac - 8ab + 9bc - 4am - 8am + 7cd \\ \quad -11ac + 2ab. \end{cases}$$

Y reduciendo términos semejantes se tendrá estotra expresion:

$$-6ac - 6ab + 9bc - 12am + 7cd;$$

ó mas bien estotra:

$$9bc - 6ac - 6ab - 12am + 7cd.$$

Bueno será advertir que sin necesidad de mudar los signos de los terminos del sustraendo *se puede represen-*

tar el residuo escribiendo el minuendo, y á continuacion el sustraendo, cual nos lo hayan dado, bien que encerrado dentro de un paréntesis con el signo $-$ *á la izquierda de este.* Por manera que si del trinomio $5a-3b+7c$ nos proponemos restar el cuadrinomio $4m-6n+3p-8q$, podemos representar el residuo de este modo:

$$5a-3b+7c-(4m-6n+3p-8q);$$

y de consiguiente esta expresion es equivalente á estotra:

$$5a-3b+7c-4m+6n-3p+8q,$$

que por la regla anterior hubiéramos hallado.

A esto es consiguiente que en habiendo en un polinomio varios términos sustractivos, podamos considerar al conjunto de estos como un sustraendo, y encerrarlos con el signo $+$ dentro de un paréntesis, anteponiendo á este el signo $-$. Asi la última expresion, que en el ejemplo segundo hemos hallado, equivaldrá á estotra:

$$9bc+7cd-(6ac+6ab+12am).$$

No es necesario para dar esta forma á cualquier polinomio que todos los términos que se hayan de encerrar dentro del paréntesis sean anteriormente sustractivos; basta que lo sea alguno de ellos, y que á todos los que se pongan dentro del paréntesis se les mude el signo. Asi la misma expresion se podrá trasformar en estotras:

$$9bc-6ac-(6ab+12am-7cd);$$
$$9bc-(6ac+6ab+12am-7cd);$$
$$9bc-6ac-6ab-(12am-7cd);$$

&c. &c. &c.

las cuales no son otra cosa que indicaciones de distintos modos de obtener el mismo resultado.[1]

1 Será muy conveniente que los principiantes se ejerciten mucho en buscar las varias expresiones equivalentes de un mismo resul-

De la multiplicacion de las cantidades algebráicas.

21 Mientras no consideremos á las letras sino como símbolos de números, deberemos formarnos de la multiplicacion algebráica la misma idea que de la multiplicacion aritmética (*Aritm.* §. 25 y 87). Por manera que *multiplicar* a *por* b *es hallar*, ó por mejor decir, *es representar una tercera cantidad que se haya con respecto á cualquiera de aquellos dos factores, del mismo modo que el otro factor se ha con respecto á la unidad.*

Ya hemos dado á conocer (§§. 2 y 7) los varios modos de indicar la multiplicacion algebráica, y de representar el producto. El de a por b, por ejemplo, se representa por $a \times b$, ó por $a \,.\, b$, ó finalmente por ab sin interposicion de signo alguno.

Ocurre con frecuencia tener que representar el producto de varias multiplicaciones sucesivas, como por ejemplo la de a por b; despues la del producto ab por c; despues la de este segundo producto por d, y asi sucesivamente; en cuyo caso bien se deja ver que el producto final deberá tener por factores á todos los números representados por las letras a, b, c, d &c. (*Aritm.* §. 22); y con arreglo al convenio adoptado para indicar la multiplicacion *se representará el producto de cualesquiera factores, escribiéndolos todos á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno.* Asi que la combinacion $abcd$ representa el producto de los cuatro números designados por las letras a, b, c, d.

tado, y en descifrar la serie de operaciones que cada una indica, porque la falta de expedicion en esta especie de traducciones, es uno de los obstáculos que mas retardan sus progresos en el estudio del Algebra.

Ya hemos hecho algun uso de esta regla, comprendiendo en ella hasta los coeficientes numéricos, que son evidentemente factores de las cantidades, en cuya expresion entran. En efecto, indicándonos la expresion $15abcd$ que la cantidad representada por $abcd$ está tomada 15 veces, viene en suma á designar el producto de los cinco factores 15 a, b, c, d.

22 A consecuencia del mismo convenio indicaremos la multiplicacion de cuantos monomios se quiera, tales como $4abc$, $5def$, $3mn$, *formando de todos ellos un solo monomio ó una combinacion, en la cual se hallen todos los factores á continuacion unos de otros sin interposicion de signo alguno.* Asi que la combinacion

$$4abc5def3mn,$$

representará el producto de los tres monomios propuestos; pero como, segun hemos demostrado en la Aritmética (§. 57), podamos colocar en el orden que mas nos acomode los factores de un mismo producto, pondremos, usando de esta facultad, todos los factores numéricos al principio de la combinacion total; bien que entonces será necesario por la razon expuesta (§. 7) hacer uso de alguno de los signos de la multiplicacion; ó si pareciere mas conveniente, se efectuará la de todos los coeficientes. Asi á la expresion anterior se le podrá dar esta forma: $4 \times 5 \times 3abcdefmn$;

ó estotra: $4 \cdot 5 \cdot 3abcdefmn$;

ó finalmente, efectuando la multiplicacion de los tres números 4, 5 y 3, estotra:

$$60abcdefmn.$$ [1]

1 Con el auxilio de los símbolos algebráicos se puede hacer mas perceptible la demostracion que hemos dado. (*Aritm.* §. 57). En

23 Cuando varios factores de un mismo producto estan designados por una misma letra, se simplifica mucho la expresion escribiendo la letra una sola vez, é *indicando por medio de un número cuantas veces debe aquella letra ser factor de aquel producto;* y como el número que para esto empleemos haya de indicar varias multiplicaciones sucesivas, será indispensable colocarlo de modo que no se le pueda confundir con el *coeficiente*, del cual hacemos uso para simplificar la expresion del resultado de varias adiciones. Por esta razon se ha determinado colocar aquel otro número á la derecha y un poco mas arriba de la letra á la cual pertenezca, en lugar de que el coeficiente se coloca siempre á la izquierda y en la misma línea horizontal.

Segun esto el producto de a por a, que estaria bien representado por aa, lo estará con mas sencillez por a^2; el producto de b por b por b, que estaria bien representado por bbb, lo estará con mas sencillez por b^3, y asi de los demas. En la expresion a^2 el 2 nos indica que el número designado por la letra a es *dos* veces factor, y de consiguiente no deberemos confundir aquella expresion con $2a$, que es una abreviacion de $a+a$: en la expresion b^3 el 3 nos indica que el número designado por la letra b es *tres* veces factor, y de consiguiente no deberemos confundir aquella expresion con $3b$, que

efecto, el producto $abcdefmn$ equivale á $ab\times cd\times ef\times mn$; y pudiéndose invertir el orden de los dos factores de un producto sin que este varíe (*Aritm.* § 27), equivaldrá tambien á $ba\times dc\times fe\times nm$, ó lo que es lo mismo, á $badcfenm$. Descomponiendo el producto primitivo de otros varios modos como $a\times bc\times de\times fm\times n$, podremos hacer que los factores vengan á estar colocados en el orden que mas nos acomode.

es una abreviacion de $b+b+b$. Para hacer todavía mas palpable el error que cometeriamos confundiendo estas expresiones, supongamos que a represente al número 5 en cuyo caso la expresion a^2 representará á 5×5, que equivale á 25; en vez de que la expresion $2a$ representará á $5+5$, ó á 2 veces 5, y en una palabra á 10. Si la letra b representare al número 8, la expresion b^3 representará á $8\times8\times8$, que equivale á 512, en lugar de que $3b$ representaria á $8+8+8$, ó á 3 veces 8, y en una palabra á 24.

La utilidad de la simplificacion que acabamos de indicar de las expresiones de los productos, se hace tanto mas perceptible cuanto mayor es el número de factores designados con una misma letra. Si hubiéramos, por ejemplo, de representar un producto en el cual la cantidad designada por a fuese factor *ocho* veces, la expresion $aaaaaaaa$ seria sumamente embarazosa, y por eso es justamente preferible la equivalente a^8

24 Estos productos formados de factores todos iguales se llaman en general *potencias* del factor repetido; y segun lo esté dos, tres, cuatro &c. veces, se llama el producto *segunda* ó *tercera* ó *cuarta* &c. *potencia*. Asi aa ó su equivalente a^2 se llama la *segunda potencia* de a; aaa ó su equivalente a^3 se llama la *tercera potencia* de a; $aaaa$ ó su equivalente a^4 se llama la *cuarta potencia* de a, y asi de las demas.[1]

1 La segunda potencia de un número se llama tambien el *cuadrado* de este número; y la tercera potencia se llama el *cubo* del mismo número; y aunque estas denominaciones pertenecientes á la Geometría, y que no guardan la uniformidad de la nomenclatura de las demas potencias, sean muy impropias en el Algebra, son las mas usadas, y por su brevedad merecen conservarse.

Por analogía se llama *primera potencia* de a la misma cantidad a, y por esta razon se puede considerar como equivalente á la expresion a^1. Lo mismo puede decirse de otra letra cualquiera.

A fin de poner mas en claro el uso que se hace de todas estas denominaciones las aplicaremos á un número determinado; y sea, por ejemplo, 5.

Primera potencia de 5... 5.
Segunda potencia........... $5\times5=25$.
Tercera potencia........... $5\times5\times5=25\times5=125$.
Cuarta potencia............ $5\times5\times5\times5=125\times5=625$.
Quinta potencia......... $5\times5\times5\times5\times5=625\times5=3125$.
&c. &c. &c.

El número con que designamos cuantas veces es factor una letra, ó lo que es lo mismo, qué potencia de la cantidad representada por la letra es el producto, se llama el *exponente* de ella. Haciendo pues uso de esta denominacion, diremos que *para formar una potencia de un número*, ó como tambien suele decirse, *para elevar un número á una potencia, se debe multiplicar el número por sí mismo tantas veces menos una como unidades tenga el exponente de la potencia.*

25 Supuesto que el exponente indica cuántas veces es factor de un producto la letra á la cual está sobrepuesto; y estando ya demostrado que el producto de dos cantidades cualesquiera debe contener todos los factores que entren en la composicion de estas cantidades, es consiguiente que si por ejemplo hubiésemos de multiplicar la cantidad a^5, en la cual es cinco veces factor la a, por la cantidad a^3, en la cual es tres veces factor la misma a, en el producto deberá ser ocho veces factor la a, y de consiguiente lo deberemos representar

por a^8. Y siendo fácil generalizar este razonamiento, estableceremos por regla general que *el producto de dos potencias de un mismo número es otra potencia del mismo número, la cual tiene por exponente la suma de los dos exponentes del multiplicando y multiplicador.*

26 De esto se sigue que *cuando hayamos de multiplicar dos monomios que tengan varias letras comunes, podremos simplificar la expresion del producto escribiendo en él una sola vez cada una de aquellas letras comunes con un exponente igual á la suma de los exponentes que tenga en el multiplicando y en el multiplicador.* Si, por ejemplo, hemos de multiplicar $a^2\ b^3\ c$ por $a^4\ b^5\ c^2\ d$, el producto, que puede representarse por $a^2\ b^3\ ca^4\ b^5c^2d$, ó variando la colocacion de los factores, por $a^2a^4b^3b^5cc^2d$, estará representado con mayor sencillez por $a^6b^8c^3d$, poniendo a^6 en lugar de a^2a^4; b^8 en lugar de b^3b^5; y c^3 en lugar de cc^2, ó lo que es lo mismo, de c^1c.

27 Asi como distinguimos las potencias por el número de factores iguales que entran en la composicion de cada una, clasificamos todos los productos con arreglo al número de factores simples ó *primos* que los forman, y damos á estas diferentes clases la denominacion comun de *grados*.[1] Asi decimos que el producto $a^2\ b^3c$, por ejemplo, es del sexto grado, porque está formado de seis factores simples, á saber dos factores a, tres

1 Siguiendo la analogía indicada en la nota del §. 24 suelen llamarse *dimensiones* los factores simples ó *primos* de cualquier producto; de modo que segun el ordinario modo de hablar el producto $a^2\ b^3\ c$ tiene seis *dimensiones*; pero este solo ejemplo basta para hacer ver lo absurda que es esta nomenclatura. Es verdad que los productos de dos factores representan las *áreas*, que tienen dos dimensiones; y los productos de tres factores representan los *volúmenes*.

factores b, y un factor c; debiéndose tener entendido que aunque estos factores se llamen *primos* ó *primeros*, porque no podemos descomponerlos en otros mas sencillos, pueden muy bien representar números compuestos; pero si atendemos al número particular que en un cierto y determinado caso representan, salen ya del estado de absoluta indeterminacion en que el Algebra los considera.

Tambien debe tenerse presente que para la determinacion del *grado* de un producto no entran en cuenta los coeficientes númericos sino solo los factores algebráicos ó literales.

Segun esto, y en consecuencia de lo demostrado (§§. 21 y 25), cuando se multiplique un monomio por otro, el número que indique el grado del producto deberá ser la suma de los que indiquen los grados del multiplicando y multiplicador.

28 Del mismo modo y por la misma razon que en la Aritmética efectuamos la multiplicacion de los números que se representan por muchas cifras, multiplicando todas las partes del *multiplicando* por cada una de las partes del *multiplicador*, y sumando los productos parciales (*Aritm.* §. 35): igualmente en el Algebra se ejecuta la multiplicacion de las cantidades complexas ó de los polinomios, multiplicando sucesivamente todas las partes ó términos ó monomios del mulplicando por cada una de las partes, términos ó monomios del multiplicador, y reuniendo por último los productos parciales

que tienen tres dimensiones: pero pasado este término deja de subsistir la correspondencia entre las expresiones algebráicas y las figuras geométricas, puesto que en la extension no pueden considerarse mas de tres dimensiones.

para tener en el conjunto de estos el producto total; pero en los polinomios algebráicos ocurre una particularidad que no se halla en las combinaciones de guarismos. Los polinomios tienen por lo comun términos sustractivos, en vez de que todos los guarismos que entran en una combinacion representan siempre partes aditivas. Las unidades, decenas, centenas &c. que entran en la formacion de un número, son otros tantos términos que en todos casos se consideran sumados unos con otros; y de ahí es que en la multiplicacion aritmética el producto total debe en todos casos ser la suma de todos los parciales, en vez de que en la algebráica no lo será sino cuando sean aditivos todos los términos de los factores.

Tratemos de multiplicar $a+b$

por c

y el producto...................... $ac+bc$

se obtendrá multiplicando cada una de las partes del multiplicando por el monomio multiplicador, y sumando los productos parciales ac y bc. Lo mismo ejecutariamos si el multiplicando tuviese tres ó mas términos todos aditivos.

Cuando el multiplicador sea tambien la suma de varios términos, habremos de multiplicar sucesivamente todas las partes ó terminos del multiplicando por cada una de las partes ó términos del multiplicador; y sumando por último todos los productos parciales, tendremos el producto total.

Conviene advertir que en estas multiplicaciones parciales no hay necesidad de guardar mas orden que el conducente á que no se omita ninguna de ellas.

Propongámonos multiplicar $a+b$
por $c+d$

productos parciales... $\begin{cases} ac+bc \\ ad+bd \end{cases}$

Producto total... $ac+bc+ad+bd$

Porque la multiplicacion de todo el multiplicando $a+b$ por la parte c del multiplicador produce $ac+bc$; y la multiplicacion de todo el multiplicando $a+b$ por la otra parte d del multiplicador produce $ad+bd$; y la suma de los dos resultados parciales es $ac+bc+ad+bd$; y de consiguiente esta es la expresion del producto total.

29 Si el multiplicando tuviese algunas partes sustractivas, los productos de estas partes deberán restarse de los de las demas, ó lo que equivale á lo mismo, se les deberá anteponer el signo $-$ para indicar aquella sustraccion. Si por ejemplo nos proponemos multiplicar $a-b$ por c, el producto será $ac-bc$, segun hemos hecho ver en la solucion del segundo problema que propusimos en el §. 14.

Si en el multiplicando hubiere varios términos sustractivos, y el multiplicador fuere un polinomio cuyos términos sean todos aditivos, tendrá lugar la misma regla. Propongámonos por ejemplo multiplicar
$a-b-c$
por $d+f$

Productos parciales... $\begin{cases} ad-bd-cd \\ af-bf-cf \end{cases}$

Producto total.... $ad-bd-cd+af-bf-cf$

Porque la multiplicacion de todas las partes del multiplicando por la parte d del multiplicador produce $ad-bd-cd$; y la multiplicacion de todo el multiplicando por la otra parte f del multiplicador produce $af-bf-cf$; y sumando los dos productos parciales resultará la expresion que hemos hallado del producto total. Y pudiéndose aplicar los razonamientos que nos han dirigido en estas operaciones á cuantos ejemplos se propongan semejantes á las anteriores, podremos establecer por regla general que *mientras sean aditivos todos los términos del multiplicador, cada una de las partes ó términos del producto tendrá el mismo signo que el término ó parte correspondiente del multiplicando.*

30 Supongamos ahora que el multiplicador tenga términos sustractivos, siendo *aditivos* todos los del multiplicando; y aunque tratándose, como aqui se trata, de números abstractos, pudiéramos tomar por *multiplicando* al multiplicador, y hallar por las reglas establecidas el producto, propongámonos determinarlo sin necesidad de hacer aquella inversion. Hayamos por ejemplo de multiplicar................................ a

por $b-c$.

Producto....... $ab-ac$

Puesto que el multiplicador no es b ni c, ni la suma de estos dos números, sino el residuo que quede en quitando c de b, el verdadero producto no deberá ser ab, ni ac, ni $ab+ac$ sino $ab-ac$, es decir, el multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en b, *menos* el mismo multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en c; de cuya sustraccion debe resultar el multiplicando a tomado tantas veces como unidades hay en $b-c$, y de consiguiente el producto que buscábamos.

Lo mismo se ejecutará cuando el multiplicando tenga dos ó mas términos todos aditivos: *se multiplicarán sucesivamente todas las partes del multiplicando por cada una de las del multiplicador, y del conjunto de los productos parciales procedentes de los términos aditivos de este se restarán todos los productos parciales procedentes de los términos sustractivos del mismo multiplicador.* Propongámonos por ejemplo multiplicar el trinomio $a+b+c$ por el trinomio $d+e-f$, y el producto será

$$ad+bd+cd+ae+be+ce-af-bf-cf.$$

Supongamos por último que tanto el multiplicando como el multiplicador tengan términos sustractivos, proponiéndonos por ejemplo multiplicar $a-b$

por $c-d$.

y el producto será... $ac-bc-ad+bd$;

porque todo el multiplicando $a-b$ se ha de multiplicar primeramente por la parte c del multiplicador; despues se debe multiplicar todo el multiplicando por la otra parte d del multiplicador; y siendo sustractiva esta segunda parte, deberemos restar del primer producto parcial el segundo. Ahora bien, el primer producto parcial es $ac-bc$; el segundo es $ad-bd$; y cambiando los signos de este para representar el residuo (§. 20) resultará el producto que buscábamos, cual lo hemos representado.

31 Resumiendo todas las consecuencias que se pue-

den deducir de los ejemplos anteriores, podremos establecer que generalmente *la multiplicacion de los polinomios se efectua, en cuanto es posible, multiplicando sucesivamente con arreglo á los preceptos dados para los monomios* (§§. 21 y sig.) *todas las partes ó términos del multiplicando por cada una de las partes ó términos del multiplicador; y teniendo presente que todo producto parcial monomio procedente de un término aditivo del multiplicador debe tener el mismo signo que el multiplicando parcial que haya concurrido á su formacion, y todo producto parcial monomio procedente de un término sustractivo del multiplicador debe tener un signo contrario al que tenga el multiplicando parcial qne haya concurrido á su formacion.*

Si particularizamos los diferentes casos comprendidos en esta regla general, deduciremos por conclusion que

1.° *Todo término aditivo multiplicado por otro término aditivo da un producto aditivo.*

2.° *Todo término sustractivo multiplicado por un término aditivo da un producto sustractivo.*

3.° *Todo término aditivo multiplicado por un término sustractivo da un producto sustractivo.*

4.° *Todo término sustractivo multiplicado por otro término sustractivo da un producto aditivo.*

Esto mismo se puede expresar mas brevemente diciendo que *si los dos factores parciales tuvieren un mismo signo, el producto parcial procedente de ellos será aditivo, ó tendrá el signo* $+$*; pero si los dos factores parciales tuvieren diferentes signos, el producto parcial será sustractivo, y de consiguiente tendrá el signo* $-$.

A fin de facilitar la practica de la multiplicacion de los polinomios, recapitularemos todas las reglas que es necesario observar en esta operacion.

1.° *Se determinará el signo que se ha de anteponer á cada término del producto total*, ó lo que es lo mismo, *á cada producto parcial monomio, con arreglo á los preceptos que acabamos de prescribir*. Esta se llama la regla de los signos.

2.° *El coeficiente de cada producto parcial monomio ha de ser el producto de los coeficientes de los dos factores parciales que concurran á su formacion* (§. 22.) Esta se llama la regla de los coeficientes.

3.° *Cada producto parcial monomio ha de contener á continuacion unas de otras todas las diferentes letras que se hallen en los dos factores parciales* (§. 21.) Esta se llama la regla de las letras.

4.° *Cada una de las letras comunes á los dos factores monomios tendrá en el producto parcial procedente de ellos un exponente igual á la suma de los exponentes que la misma letra tenga en los dos factores* (§. 25.) Esta se llama la regla de los exponentes.

32 Hagamos aplicacion de todas estas reglas al ejemplo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Multiplicando........} & 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 \\ \text{Multiplicador........} & a^3 - 4a^2b + 2b^3 \end{array}$$

$$\text{Productos parciales.}\left\{\begin{array}{l} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Producto total re-}\\ \text{ducido............}\end{array}\right\} 5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$$

En la primera línea horizontal de los productos parciales se hallan todos los que han resultado de la multiplicacion de los tres términos del multiplicando por el primer término a^3 del multiplicador; y como este término no tiene antepuesto signo alguno, y de consiguiente es aditivo, todos los productos parciales monomios á cuya formacion concurra deberán tener los mismos signos que los términos correspondientes del multiplicando (§. 31). En este supuesto el primer producto parcial $5a^7$ no tiene signo, ó lo que es lo mismo, es aditivo, porque lo es el primer término $5a^4$ del multiplicando; el coeficiente del mismo producto parcial es 5, porque siendo 5 el coeficiente del primer término del multiplicando, y 1 el del primer término del multiplicador, el producto de los dos coeficientes es 5. Los factores parciales $5a^4$ y a^3 no tienen mas letra que la a con el exponente 4 en el multiplicando, y con el exponente 3 en el multiplicador; y por esa razon en el producto parcial $5a^7$ no hay mas letra que la a con el exponente 7, suma de aquellos otros dos.

El segundo término del multiplicando es sustractivo, y de consiguiente al combinarse con el primer término del multiplicador debe dar un producto sustractivo ó con el signo $-$. El coeficiente 2 del uno multiplicado por el coeficiente 1 del otro, da 2 para coeficiente del producto á cuya formacion concurren. En los dos factores parciales no hay mas letras que la a y la b; y de consiguiente el producto debe contener estas letras y ninguna otra. La letra a es comun á los dos factores, y asi en uno como en otro tiene por exponente al 3, y de consiguiente la misma letra tendrá en el producto el exponente 6, que equivale á $3+3$. Asi que el segundo producto parcial monomio con su signo será $-2a^6b$.

Como el tercer término $4a^2b^2$ del multiplicando es aditivo, lo es tambien el producto parcial que resulta de su multiplicacion por el primer término del multiplicador; el coeficiente deberá ser 4; las letras deberán ser la a y la b, la primera con el exponente 5, y la segunda con el mismo exponente 2 que tiene en el multiplicando. Asi se formará el tercer producto parcial $+4a^5b^2$.

La segunda línea de productos parciales contiene todos los que han resultado de todos los términos del multiplicando por el segundo término del multiplicador; y por ser sustractivo este término, todos los productos parciales de esta línea tienen signo contrario al de los términos del multiplicando que han concurrido á su formacion. Para los coeficientes, las letras y los exponentes han seguido las mismas reglas que en la formacion de los productos parciales de la línea anterior.

En la tercera y última estan los productos parciales procedentes de la multiplicacion de todos los términos del multiplicando por el tercer término del multiplicador; y como es aditivo este término, todos los productos parciales á cuya formacion concurre conservan el mismo signo que los términos correspondientes del multiplicando.

Teniendo ya formados todos los productos parciales, de cuya reunion se compone el total, se les examina atentamente para ver si entre ellos hay algunos términos semejantes; y en caso que los haya, se les reduce observando para ello la regla del §. 19; y teniendo presente que *para ser semejantes dos ó mas términos no basta que tengan unas mismas letras, sino que ademas cada una de estas ha de tener en todos un mis-*

mo exponente, sin lo cual no se hallará en ellos la misma combinacion de factores simples ó *primos*, como se requiere para la semejanza de los términos y poder reducirlos. En nuestro ejemplo hemos efectuado tres reducciones, á saber:

la de $-2a^6b$ y $-20a^6b$, que equivalen á $-22a^6b$;
la de $+4a^5b^2$ y $+8a^5b^2$, que equivalen á $+12a^5b^2$;
la de $-16a^4b^3$ y $+10a^4b^3$, que equivalen á $-6a^4b^3$.

Despues de efectuadas estas tres reducciones ha resultado el producto total simplificado, cual se halla en la última línea del ejemplo.

Para ejercicio de los principiantes pondremos aqui otro, algo mas complicado, cuya inteligencia no puede ya serles dificil. En el resultado final de la operacion podrán fácilmente notar que no es posible reducir mas términos que

$$-165a^5b^3c \text{ y } +25a^5b^3c;$$

porque siendo estos los únicos en cuya composicion entran unas mismas letras con unos mismos exponentes, son los únicos términos semejantes que se hallan en todo el producto, y de consiguiente los únicos susceptibles de reduccion.

Multiplicando. $5a^4b^2+7a^3b^3-15a^5c+23b^2d^4-17bc^3d^2-9abcdm^2$

Multiplicador. $11b^3-8c^3+5abc-2bdm.$

Productos parciales

$$\left\{\begin{array}{l}55a^4b^5+77a^3b^6-165a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2\\ -40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3+120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2\\ +25a^5b^3c+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4-85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2\\ -10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m+18ab^2cd^2m^3\end{array}\right.$$

Resultado simplificado.....

$$\left\{\begin{array}{l}55a^4b^5+77a^3b^6-140a^5b^3c+253b^5d^4-187b^4c^3d^2-99ab^4cdm^2-40a^4b^2c^3-56a^3b^3c^3\\ +120a^5c^4-184b^2c^3d^4+136bc^6d^2+72abc^4dm^2+35a^4b^4c-75a^6bc^2+115ab^3cd^4\\ -85ab^2c^4d^2-45a^2b^2c^2dm^2-10a^4b^3dm-14a^3b^4dm+30a^5bcdm-46b^3d^5m+34b^2c^3d^3m\\ +18ab^2cd^2m^3\end{array}\right.$$

33 A consecuencia de lo que debemos practicar en la multiplicacion de los polinomios, es fácil ver que si todos los términos del multiplicando fueren de un mismo grado, sea cual fuese; y todos los términos del multiplicador fueren tambien de un mismo grado, cualquiera que sea; todos los términos del producto serán asimismo del grado indicado por la suma de los números que indiquen los grados de los dos factores.

En el último ejemplo, en el cual el multiplicando es del sexto grado, y el multiplicador del tercero, el producto es del noveno; y en el ejemplo anterior, en el cual el multiplicando es del cuarto grado, y el multiplicador del tercero, el producto es del séptimo; y asi de los demas.

Los polinomios, cuyos términos son todos de un mismo grado, sea cual fuere, se llaman *homogéneos*. Diremos, pues, que en siendo homogéneos dos ó mas factores complexos ó polinomios, debe tambien ser *homogéneo* el producto; y esta observacion podrá sernos muy útil para precaver ó corregir muchas equivocaciones que estamos expuestos á padecer en las multiplicaciones parciales, omitiendo por olvido algunos factores, ó poniendo algunos exponentes mayores ó menores de lo que debieran ser.

34 Por la razon que expusimos (§. 3), los resultados de las operaciones algebráicas efectuadas con cantidades literales nos dan á conocer el influjo que en ellos tiene cada una de las partes de estas cantidades, ó lo que es equivalente, cómo y cuánto ha contribuido cada parte para la formacion de los mismos resultados; y por este medio nos conducen á descubrir en los números muchas propiedades generales é independientes de todo

sistema de numeracion. Los tres ejemplos siguientes de multiplicaciones algebráicas nos manifiestan ciertas propiedades de esta clase, muy importantes por razon del frecuente uso que de ellas haremos en lo sucesivo.

I.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \\ \hline \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2\,ab+b^2 \\ \hline \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{r} a^2+2\,ab+b^2 \\ \times\ a+b \\ \hline a^3+2\,a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2\,ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3 \end{array}$$

La primera multiplicacion, en la cual el binomio $a+b$ multiplicado por el binomio $a-b$ ha producido a^2-b^2, nos hace ver que *si se multiplica la suma de dos números cualesquiera por la diferencia de los mismos números, el producto será la diferencia de los cuadrados de estos números.*

De esta propiedad podemos hacer uso para abreviar muchas multiplicaciones aritméticas; pues aunque las combinaciones de guarismos no contengan parte alguna sustractiva, ocurre no pocas veces tener que multiplicar dos números, en los cuales se echa prontamente de ver que son respectivamente la suma y la diferencia de otros dos que podemos multiplicar por sí mismos con suma facilidad, y aun sin necesidad de tomar la pluma para ello. Tengamos, por ejemplo, que multiplicar 52 por 48; y observando que el primero equivale á *cincuenta* mas *dos*, y el segundo á *cincuenta* menos *dos*, vendremos en conocimiento de que el producto será *el cuadrado* de 50 menos *el cuadrado* de 2. Ahora bien, el cuadrado de 50, ó el producto de 50 por 50, es 2500, el cuadrado de 2 es 4; y restando 4 de 2500, el residuo 2496 será el producto que buscábamos. Lo mismo puede ejecutarse en la multiplicacion de 84 por 76, y en todas las demas en que los factores tengan la circunstancia de ser la *suma* y la *diferencia* de unos mismos números, cuyos cuadrados se hallen con prontitud y facilidad.

En el segundo ejemplo vemos que tanto el multiplicando como el multiplicador es un mismo binomio $a+b$; expresion algebráica, que traducida al idioma vulgar quiere decir: *una cantidad compuesta de dos partes cualesquiera sumadas*. El resultado pues de esta multiplicacion nos da á conocer que *la segunda potencia ó el cuadrado de una cantidad compuesta de dos partes cualesquiera sumadas, se compone del cuadrado de la primera parte; de dos veces el producto de la primera multiplicada por la segunda, y del cuadrado de la segunda*. Esta es una mera traduccion de la expresion algebráica $a^2+2ab+b^2$.

Y como todo número representado por dos cifras se nos presente como compuesto de dos partes sumadas; siempre que hayamos de multiplicar por sí mismo cualquier número de esta clase, ó lo que es lo mismo, siempre que nos propongamos *cuadrarlo* ó elevarlo al cuadrado ó á la segunda potencia, podremos hacer uso de la regla que nos prescribe el resultado algebráico de la segunda multiplicacion.

En la tercera el multiplicando es el cuadrado del binomio $a+b$; y siendo este mismo binomio el multiplicador, el resultado viene á ser el cubo del mismo binomio; y traducido al idioma vulgar nos hace ver que *el cubo de cualquier cantidad compuesta de cualesquiera dos partes sumadas se compone del cubo de la primera parte; de tres veces el cuadrado de la primera multiplicado por la segunda; de tres veces la primera multiplicada por el cuadrado de la segunda, y del cubo de la segunda.* Ya se nos ofrecerán frecuentes ocasiones de hacer uso de todas estas propiedades.

35 En muchos casos, y señaladamente cuando despues que hayamos ejecutado una operacion tengamos que ejecutar la inversa, con la cual puede deshacerse en todo ó en parte lo que con la primera hayamos hecho, conviene no efectuar la primera, sino solo indicarla; y de ahí es que generalmente las operaciones algebráicas no se efectúan del modo que esto es posible, sino cuando es absolutamente indispensable; y de consiguiente será preciso valerse del medio que hemos adoptado (§. 11) para indicar la multiplicacion de las cantidades complexas.

La expresion, por ejemplo,

$$(5a^4-3a^2b^2+b^4)(4ab^2-ac^2+d^3)(b^2-c^2)$$

indica que se debe multiplicar el trinomio encerrado dentro del primer paréntesis por el trinomio encerrado dentro del segundo, y que el producto de esta primera multiplicacion se debe multiplicar por el binomio encerrado dentro del tercero; y de consiguiente representa el resultado final de estas multiplicaciones.

Algunos autores, para indicar estas multiplicaciones de cantidades complejas ó polinomias, en vez de encerrar dentro de parántesis los factores, han tirado por cima de cada uno de estos una línea horizontal, y han puesto el signo de la multiplicacion entre ellos. Si hubiésemos de seguir esta práctica, dariamos á la expresion anterior esta forma:

$$\overline{5a^4-3a^2b^2+b^4}\times\overline{4ab^2-ac^2+d^3}\times\overline{b^2-c^2};$$

pero como las líneas, si estan mas ó menos prolongadas de lo que deben, pueden inducir á muchas equivocaciones, son preferibles los paréntesis, los cuales no pueden jamas dejar duda sobre el número de términos que comprende cada factor.

De la division de las cantidades algebráicas.

36 La division algebráica, asi como la numérica, debe considerarse como una operacion cuyo objeto es *hallar uno de los factores de un producto dado, cuando se conoce el otro factor;* por manera que el divisor multiplicado por el cuociente debe reproducir al dividendo.

Aplicando estas nociones en primer lugar á las cantidades monomias, deberemos inferir (§. 21) que en la composicion del dividendo deben entrar todos lo factores del divisor y del cuociente, y que por tanto *si se suprimen en el dividendo todos los factores del divisor*, en caso que los contenga, como se requiere para poder efectuar la division, *lo que despues de aquella supresion resulte, será el cuociente que se busca.*

Propongámonos, por ejemplo, dividir el monomio $72a^5b^3c^2d$ por el monomio $9a^3bc^2$; y segun la regla que acabamos de establecer, deberemos suprimir en el primero los factores $9, a^3, b$ y c^2 del segundo; y de consiguiente para que la division pueda efectuarse, es necesario que todos estos factores esten contenidos en el dividendo. Esto quiere decir que el coeficiente 9 debe ser factor del coeficiente 72, ó lo que es lo mismo, que 72 debe ser exactamente divisible por 9; y como esto se verifica, puesto que $72 = 9 \times 8$, suprimiendo el factor 9, resultará el otro factor 8 por coeficiente del cuociente.

Tambien se sigue de las reglas de la multiplicacion (§. 35) que el exponente 5 que la letra *a* tiene en el dividendo, debe ser la suma de los exponentes que la misma letra tenga en el divisor y en el cuociente. Será pues el exponente que aquella letra debe tener en el cuociente la diferencia de los exponentes que tenga en el dividendo y en el divisor, esto es, $5 - 3 = 2$. Asi que la letra *a* tendrá en el cuociente el exponente 2. Por la misma razon la letra *b* deberá tener en el cuociente el exponente $2 = 3 - 1$. Finalmente siendo comun al dividendo y al divisor el factor c^2, no deberá aparecer la letra *c* en el cuociente; pero en cambio deberá permanecer el factor *d* segun se halla en el dividendo, por no hallarse esta letra en el divisor. De este modo resultará que el cuociente que buscamos es $8a^2 b^2 d$.

De este razonamiento, que se puede fácilmente aplicar á cualquiera otro ejemplo se deduce que generalmente *para efectuar la division de un monomio por otro, se debe*

1º *Dividir el coeficiente del dividendo por el del divisor:*

2º *Suprimir en el dividendo las letras que le sean comunes con el divisor cuando en ambos tengan un mismo exponente; y cuando el exponente que una letra tenga en* *el dividendo sea mayor que el exponente de la misma en el divisor, deberá aquella letra permanecer en el cuociente con un exponente igual á la diferencia de los otros dos.*

Por último, *todos los factores del dividendo que no se hallen en el divisor, se deben conservar en el cuociente segun esten en aquel.*

37 Si quisiésemos generalizar la regla que acabamos de dar para determinar por medio de la sustraccion el exponente que cada letra comun al dividendo y al divisor debe tener en el cuociente, y la aplicásemos al caso en que la letra comun tuviese un mismo exponente en ambos, vendria á resultar que el exponente de aquella letra en el cuociente deberia ser *cero*, puesto que *cero* es la diferencia de dos cualesquiera cantidades iguales. Por manera que el cuociente de la cantidad a^3 dividida por a^3 estaria bien representado por a^0; y como sea bien sabido que el cuociente de cualquiera cantidad dividida por otra igual á ella es la unidad, es consiguiente que *la expresion* a^0 *sea un símbolo de la unidad, y que en su lugar podamos sustituir* 1 *siempre que nos acomode.* Si hubiéramos de dividir a^3bc^2 por a^2bc^2, el cuociente estaria bien representado por $a^1b^0c^0$; y esta expresion será equivalente á a, que es el cuociente que hubiera resultado suprimiendo los factores comunes al dividendo y divisor; porque equivaliendo b^0c^0 á $1 \times 1 = 1$, $a^1b^0c^0$ equivaldrá á $a \times 1 \times 1 = a$. Podremos pues suprimir en una combinacion de factores todas las letras cuyo exponente sea cero.

Por lo expuesto se ve que esta proposicion: *toda cantidad cuyo exponente sea cero, equivale á la unidad,* no es, propiamente hablando, sino la explicacion de un resultado, al cual nos conduce el convenio que hemos adoptado sobre el modo de representar las potencias de una cantidad cualquiera, valiéndonos para ello de los exponentes.

38 Para que pueda efectuarse la division de un monomio por otro, es necesario, segun hemos visto, *que el divisor no tenga letra alguna que no se halle en el dividendo; que el exponente de cada una de las letras comunes no sea mayor en el divisor que el que la misma letra tenga en el dividendo; y que el coeficiente de este sea exactamente divisible por el coeficiente del divisor.* Luego que falte alguna de estas tres condiciones, nos limitamos á indicar la division, y representamos el cuociente formando una fraccion (§. 2), cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor. Lo único que despues de esto hacemos es *simplificar la fraccion*, suprimiendo en sus dos términos los factores que le sean comunes, si es que los hay; pues si bien se reflexiona, los principios fundamentales sobre que estriba toda la teórica de las fracciones aritméticas, son independientes de todo sistema de numeracion, y de consiguiente son aplicables igualmente á las algebráicas.

Cuando pueda verificarse la *simplificacion, se suprimirán en primer lugar los factores numéricos que sean comunes á los coeficientes del dividendo y divisor; y despues las letras que tambien les sean comunes, cuando tengan un mismo exponente en ambos términos; pero si fueren desiguales los dos exponentes de alguna letra comun, permanecerá esta letra en el término en que antes tenia el mayor exponente, con otro igual á la diferencia de los dos anteriores.* El ejemplo siguiente aclarará lo prescrito en esta regla.

Propongámonos dividir el monomio $48a^3b^5c^2d$ por $64a^3b^3c^4e$; y como en primer lugar el coeficiente del dividendo no es divisible por el del divisor; como en segundo la letra comun c tiene en el divisor un exponente mayor que en el dividendo; y por último como este no contiene la letra e que se halla en el divisor; en una palabra, como faltan en este caso todas las condiciones indispensables para que pueda efectuarse la division de dos monomios algebráicos, habremos forzosamente de contentarnos con una mera indicacion, y representaremos el cuociente con esta fraccion ó quebrado:

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e}.$$

Tratando ahora de simplificar esta expresion, notaremos que los coeficientes 48 y 64 son ambos exactamente divisibles por 16; y de consiguiente suprimiendo este factor comun, el coeficiente del numerador se reducirá á 3, y el del denominador quedará reducido á 4. La letra comun a tiene el mismo exponente en ambos términos de la fraccion, y de consiguiente se puede suprimir enteramente la cantidad representada por a^3. La letra comun b tiene en el numerador el exponente 5, y en el denominador el exponente 3; y siendo $b^5=b^3\times b^2$, despues de suprimir en ambos términos el factor comun b^3 deberá permanecer b^2 en el numerador. La letra comun c tiene en el denominador el exponente 4, y en el numerador el exponente 2; y siendo $c^4=c^2\times c^2$, en habiendo suprimido en ambos términos el factor comun c^2, permanecerá otro c^2 en el denominador. Se ve pues que en no siendo iguales los exponentes de una letra comun al dividendo y divisor, ó á los dos términos de la fraccion con que representamos el cuociente, permanece despues de la simplificacion la misma letra en el término en que tenia el mayor exponente, con otro igual á la diferencia de los dos anteriores. Por último, no siendo comunes la letras *d* y *e*, deberá permanecer cada una en el mismo término en que antes se hallaba.

Asi habremos reducido la fraccion propuesta á estotra: $\frac{3b^2d}{4c^2e}$;
la cual será la expresion *algebráica* mas sencilla que puede darse del cuociente que nos proponiamos hallar; sin que por esto deba entenderse que cuando sustituyamos en lugar de las letras *b*, *d*, *c*, *e* los números que hayamos designado por ellas, no sea nuevamente reducible la fraccion á menores términos, si es que sus valores numéricos contienen algun divisor comun. Entonces deja ya de ser algebráica la fraccion, y pasa á ser aritmética; deja de ser indeterminado su valor, y pasa á ser determinado; y cuando decimos que la fraccion $\frac{3b^2d}{4c^2e}$ es enteramente *irreducible*, la consideramos en el primer estado, y no en el segundo.

39 Es muy digno de ser notado *que si todos los factores, sin exceptuar el coeficiente, del dividendo se hallasen en el divisor, y si ademas contuviese este algunos otros que le sean peculiares; en habiendo suprimido todos los factores comunes, deberemos poner la unidad por numerador de la fraccion reducida.* En efecto, suprimiendo asi en el denominador como en el numerador todos los factores de este, se dividen los dos términos del quebrado por el mismo numerador; y ya se sabe que cualquiera cantidad divida por otra igual, ó como se dice, por sí misma, da por cuociente la unidad.

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd}$;

en la cual observamos que los factures 4, a^2, b y c se hallan en ambos términos. Si pues los suprimimos tanto en el numerador como en el denominador, dividimos asi al uno como al otro por la cantidad $4a^2, bc$. Ahora bien, esta cantidad divida por sí misma da por cuociente la unidad; y la cantidad $12a^2b^3cd$ dividida por $4a^2bc$, da por cuociente $3b^2d$. Asi que la fraccion reducida á su mas sencilla expresion será

$$\frac{1}{3b^2d}$$

40 Supongamos ahora que hayamos de dividir por un monomio un polinomio cuyos términos sean todos aditivos; y cotejando este caso con el de la division aritmética, echaremos de ver que el mismo principio fundamental que nos dirigió en la una, debe igualmente dirigirnos en la otra; á saber, *si dividimos sucesivamente por el divisor todas las partes ó términos de que se compone el dividendo, el conjunto de todos los cuocientes parciales será el cuociente total.*

Propongámonos, por ejemplo, dividir $18a^3b^2c^4 + 15a^4b^3c^2 + 12a^2b^4cd^2$ por $3a^2b^2c$; y dividiendo sucesivamente por el divisor (§. 36) los tres términos del dividendo, la suma de los tres cuocientes parciales será el total que buscamos. Será pues $\frac{18a^3b^2c^4 + 15a^4b^3c^2 + 12a^2b^4cd^2}{3a^2b^2c}$

$= 6ac^3 + 5a^2bc + 4b^2d^2$

Si alguna parte del polinomio dividendo fuere sustractiva, lo será tambien el cuociente parcial procedente de ella; y aunque á primera vista parezca que en la Aritmética no ha ocurrido caso alguno análogo á este, si bien reflexionamos la regla establecida para restar de un quebrado otro que tenga el mismo denominador, veremos que estriba en el mismo principio que aqui nos dirige; á saber: *lo mismo es ejecutar dos divisiones, en las cuales haya el mismo divisor, y restar un cuociente de otro, que restar un dividendo de otro, y dividir el residuo por el divisor comun.* Si pues nos proponemos dividir el polinomio $20a^4b^2c^3 - 12a^3b^5c + 16a^5bc^2d$ por $4a^3bc$ será $\frac{20a^4b^2c^3 - 12a^3b^5c + 16a^5bc^2d}{4a^3bc} = 5abc^2 - 3b^4 + 4a^2cd$.

41 Cuando el dividendo y el divisor son polinomios, nos contentamos por lo comun con indicar la division, y representamos el cuociente por una fraccion cuyo numerador es el dividendo, y cuyo denominador es el divisor; y como de las reglas de la multiplicacion se siga que cuando se multiplica por un monomio un polinomio, aquel viene á ser factor comun de todos los términos del producto, que es otro polinomio, nos aprovechamos de esta observacion para simplificar aquella primera expresion del cuociente siempre que todos los términos del numerador y denominador tengan algun factor comun.

Sea, por ejemplo, la expresion

$$\frac{6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2}{9a^2b - 15a^2c + 24a^3};$$

y examinando los términos del numerador veremos que todos los coeficientes son exactamente divisibles por 3, y que á todos los términos es comun el factor a^2. Examinando igualmente los términos del denominador, veremos que todos los coeficientes son exactamente divisibles por 3, y que á todos los términos es comun el factor a^2. Serán pues exactamente divisibles por $3a^2$ el numerador y el denominador de la fraccion propuesta; y efectuando esta division de sus términos, quedará simplificada y reducida á estotra:

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

Si todos los factores sin exceptuar el coeficiente de alguno de los términos del numerador ó del denominador fueren comunes á todos los demas; al tiempo de efectuar la simplificacion pondremos en aquel término la unidad.

Sea por ejemplo la expresion

$$\frac{24a^3b^3c^2d - 18a^4b^2cm^2 + 12a^2b^5cn}{30a^5b^2c + 42a^3b^2cf - 6a^2b^2c};$$

y viendo en ella que todos los factores del último término del divisor ó denominador son comunes á todos los demas términos asi del numerador como del mismo denominador, suprimiremos en todos ellos los factores comunes, ó lo que es lo mismo, dividiremos por $6a^2b^2c$ el numerador y el denominador de la fraccion propuesta; y por este medio la trasformaremos en estotra enteramente irreducible:

$$\frac{4abcd - 3a^2m^2 + 2b^3n}{5a^3 + 7af - 1}.$$

42 Si nos propusiéramos dividir el polinomio $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ por el trinomio $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$, podriamos ciertamente contentarnos con indicar la division y representar el cuociente por medio de esta fraccion:

$$\frac{5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5}{5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2};$$

y observando que todas las partes del numerador y del denominador son exactamente divisibles por a^2, podriamos trasformar aquella primera expresion en estotra:

$$\frac{5a^5-22a^4b+12a^3b^2-6a^2b^3-4ab^4+8b^5}{5a^2-2ab+4b^2}.$$

Mas como veamos que en los términos del dividendo, aun despues de reducidos, se hallan las mismas letras que en los del divisor, podrémos sopechar que el dividendo puede haber resultado de alguna multiplicacion efectuada con el divisor y algun otro polimonio que no conocemos. Y puesto que el divisor multiplicado por el cuociente debe reproducir al dividendo, es necesario que este último contenga todos los productos parciales de cada término del divisor multiplicado por cada término del cuociente; por manera que si eligiendo cualquiera de los términos del divisor, pudiésemos á primera vista determinar en el dividendo cuáles son los productos parciales á cuya formacion concurrió aquel término elegido, en dividiendo sucesivamente por este todos aquellos productos parciales, tendriamos todas las partes de que debiera formarse el cuociente; del mismo modo que en la Aritmética veniamos en conocimiento de las diversas partes del cuociente, dividiendo sucesivamente ciertas partes del dividendo por la primera parte del divisor. Pero en los números representados por guarismos no cabe duda alguna sobre el lugar que en el dividendo total debe ocupar cada uno de los productos parciales á cuya formacion ha concurrido la primera parte del divisor; pues con arreglo á ley establecida en la numeracion cada uno de aquellos productos parciales debe estar en la primera parte, comenzando á contar por la izquierda, de cada dividendo parcial. En el Algebra por el contrario puede cada producto parcial estar en el lugar que se quiera, sin que por eso se altere su valor, y de ahí procede la dificultad de determinar en el dividendo cuáles son los productos parciales á cuya formacion ha concurrido un término elegido en el divisor.

Para superar esta dificultad reflexionaremos de nuevo sobre lo que hemos ejecutado en la multiplicacion de los polinomios; debiendo estar bien persuadidos de que nada puede manifestarnos con tanta claridad el camino que debemos seguir en la ejecucion de todas las operaciones cuyo objeto sea descomponer las cantidades como la observacion del que en las operaciones inversas hemos seguido para componerlas. Con el fin de que esta observacion produzca en este caso todo el efecto que deseamos, hemos propuesto como dividendo y divisor el producto y el multiplicando de la primera multiplicacion efectuada en el §. 32.

En primer lugar en el trinomio $5a^4-2a^3b+4a^2b^2$, que alli fue multiplicando y aqui va á ser divisor, notaremos que en el primer término tiene la letra a el exponente 4; en el segundo el exponente 3, y en el tercero el exponente 2: y sepamos que esta circunstancia se expresa diciendo que *los términos de aquel trinomio*, que pudieran estar colocados con cualquier orden, *estan ordenados con respecto á la letra* a. Notemos en segundo lugar que el trinomio $a^3-4a^2b+2b^3$, que alli fue multiplicador y aqui debe ser el cuociente que buscamos, está igualmente *ordenado con respecto á la misma letra* a; porque esta letra tiene en el primer término el exponente 3; en el segundo el exponente 2; y no se halla en el último, lo cual equivale á decir que en este tiene el exponente *cero* (§. 37.)

En vista de este orden que se observa en los términos de los dos factores, es facil inferir que si el producto está ordenado con respecto á la misma letra, en el primer término deberá esta tener el exponente 7, que es la suma de los dos exponentes mas elevados que tiene en los dos factores. Y por la inversa, estando, como se supone, ordenado con respecto á la letra a el divisor; si lo está con respecto á la misma letra el dividendo, el primer término de este deberá ser el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el primer término del cuociente. He aqui pues el medio que se ha descubierto de superar la dificultad que para efectuar en los casos que es posible la division algebráica, ofrece la absoluta libertad que tenemos de colocar las varias partes ó términos de un polinomio con el orden que se nos antoje ó que mas nos acomode.

En uso de esta misma facultad ordenamos con respecto á una misma letra los términos del dividendo y los del divisor, segun lo estan ya con respecto á la a los términos de los dos polinomios propuestos al principio de este párrafo. Luego que esten asi *ordenados* los términos, debemos tener certeza de que, sea cual fuere el cuociente total, el primer término $5a^7$ del dividendo es el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el primer término del cuociente ordenado con respecto á la misma letra a. Dividiendo pues el monomio $5a^7$ por el monomio $5a^4$, el cuociente a^3 será el primer término del factor desconocido que buscamos, ó lo que es lo mismo, del cuociente total. Y como segun las reglas de la multiplicacion el producto total deba contener todos los productos parciales procedentes de todas las partes del multiplicando multiplicadas por cada una de las del multiplicador, es consiguiente que en el dividendo propuesto deban hallarse todos los productos de las tres partes del divisor multiplicadas por el primer término a^3 del cuociente. Si pues restamos del dividendo el conjunto de estos productos parciales, que es $5a^7-2a^6b+4a^5b^2$, el residuo $-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$, no contendrá ya mas productos que los procedentes de la multiplicacion del divisor por el segundo, por el tercero &c. términos del cuociente.

El residuo que ha resultado se debe considerar como un nuevo dividendo, y de consiguiente debe tener lugar en él la misma observacion que hicimos con respecto al dividendo primitivo; á saber: que su primer término, en el cual tiene la a el mayor exponente, debe ser el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el segundo del cuociente. Mirando pues como un producto parcial al término $20a^6b$, y observando que tiene antepuesto un signo contrario al del término del multiplicando que ha concurrido á su formacion, deberemos inferir (§. 31) que ha de ser sustractivo ó tener el signo $-$ el término correspondiente del multiplicador, ó lo que es lo mismo, del cuociente que buscamos. Dividiendo el monomio $-20a^6b$ por el monomio $5a^4$, resultará $-4a^2b$ por cuociente parcial, y este será el segundo término del total. Si multiplicamos por este nuevo término todo el divisor, y restamos del dividendo el producto, en el residuo $10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ no se hallarán ya mas productos parciales que los procedentes de la multiplicacion del divisor por el tercero, cuarto &c. términos del cuociente.

Considerando como un nuevo dividendo al residuo que acabamos de hallar, su primer término $10a^4b^3$, en el cual la letra a tiene el mayor exponente, deberá ser el producto parcial á cuya formacion concurrieron el primer término del divisor y el tercero del cuociente. Dividiendo pues $10a^4b^3$ por $5a^4$, resultará $2b^3$; y multiplicando por este término todo el divisor, y restando del último dividiendo parcial el producto, veremos que no resulta residuo alguno; lo cual nos hace ver que el cuociente total está ya completo, y que de consiguiente no tiene mas de los tres términos que hemos hallado.

Si hubiese de tener mas términos, los hallariamos del mismo modo que los anteriores; y si, como se supone, fuese factor del dividendo el divisor, cuando llegásemos á restar del último dividendo parcial el producto del divisor por el último término del cuociente, no deberia resultar residuo alguno; ó lo que es lo mismo, deberia quedar enteramente exhausto el dividendo total.

43 Pudiéndose fácilmente aplicar á cualquiera otro caso el razonamiento que hemos hecho en el ejemplo propuesto, se ha formado la siguiente

Regla general: *Para efectuar en los casos que sea posible, la division algebráica de los polinomios, se colocan el dividendo y el divisor en la misma disposicion que en la division aritmética, y con la advertencia de que los términos de ambos esten ordenados con respecto á una misma letra; es decir: de modo que los exponentes de esta letra desde el primer término hasta el último vayan constantemente en disminucion.*

Se dividirá el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y se escribirá el resultado de esta division en el lugar generalmente asignado al cuociente.

Se multiplicará todo el divisor por el cuociente par-

cial que se acaba de hallar; se restará del dividendo este producto, y se reducirán los términos semejantes que entonces haya.

Se considerará el residuo como un nuevo dividendo; y de consiguiente se dividirá su primer término por el primer término del divisor; el resultado de esta division será la segunda parte del cuociente; se multiplicará por esta segunda parte ó término todo el divisor; se restará del dividendo el producto, reduciendo los términos semejantes; y el residuo vendrá á ser otro nuevo dividendo, con el cual se ejecutará la misma serie de operaciones que con los anteriores.

Del mismo modo se continuará hasta que venga á resultar cero por último residuo, ó lo que es lo mismo, hasta que esten enteramente apurados todos los términos del dividendo.

Teniendo presente que en siendo un monomio aditivo el multiplicador, cada producto parcial tiene el mismo signo que el término correspondiente del multiplicando (§. 31); y que en siendo sustractivo el multiplicador, el producto debe tener un signo contrario al del multiplicando; es facil inferir que *cuando el primer término del dividendo y el primer término del divisor tengan un mismo signo, el cuociente deberá tener el signo +; pero si tuvieren signos contrarios, el cuociente deberá tener el signo −.* Esta es la regla de los signos.

Todas las divisiones parciales se ejecutan conforme á las reglas establecidas para los monomios; es decir:

Se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor; y he aqui la que se llama regla de los coeficientes.

Las letras que sean comunes al dividendo y divisor, *y que en ambos tengan un mismo exponente, no deberán aparecer en el cuociente; pero las que tengan en el dividendo un exponente mayor que en el divisor, deberán permanecer en el cuociente con un exponente igual á la diferencia de aquellos dos. Por último se escribirán en el cuociente las letras que sean peculiares de solo el dividendo.* Estas son las reglas llamadas de las letras y de los exponentes.

Presentemos ahora toda la operacion ejecutada conforme á estas reglas con los polinomios propuestos en el párrafo anterior, á fin de que pueda servir de norma para todas las demas que puedan ofrecerse.

Dividendo.	*Divisor.*
$5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$	$5a^4-2a^3b+4a^2b^2$
$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2$	*Cuociente.* $a^3-4a^2b+2b^3$

Primer residuo.

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$$
$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3$$

Segundo residuo.

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$$
$$-10a^4b^3+4a^3b^4-8a^2b^5$$

Residuo final...... o o o

Viendo que el primer término del dividendo y el primer término del divisor son ambos aditivos, sabremos ya que el primer término del cuociente debe tener el signo $+$; y de consiguiente, siendo como es primer término, se puede omitir el signo. Dividiendo $5a^7$ por $5a^4$ resulta por cuociente a^3, que se escribe en el lugar acostumbrado debajo del divisor.

Se multiplican sucesivamente por este primer término del cuociente los tres términos del divisor, y se escriben debajo de los primeros términos del dividendo los del producto con signos contrarios á los que las reglas de la multiplicacion les asignan para ejecutar la sustraccion; con lo cual venimos á tener

$$-5a^7+2a^6b-4a^5b^2.$$

Efectuada entonces la reduccion de términos semejantes, resulta el primer residuo

$$-20a^6b+8a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5,$$

el cual se debe considerar como un segundo dividendo.

Observando que el primer término de este y el primer término del divisor tienen signos contrarios, inferiremos que el segundo término del cuociente deberá tener el signo $-$. Asi que, dividiendo $-20a^6b$ por $5a^4$, el resultado será $-4a^2b$; este será el segundo término del cuociente total, y de consiguiente se le escribirá á continuacion del primero a^3. Multiplicando por aquel segundo término todo el divisor, y cambiando los signos, se formará el trinomio

$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3;$$

el cual se escribirá debajo de los primeros términos del segundo dividendo; y efectuada la reduccion de términos semejantes, resultará por segundo residuo

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Este se considerará como un tercer dividendo; y efectuada la division de su primer término por el primero del divisor, resultará $2b^3$ con el signo $+$, porque aquellos términos tienen un mismo signo. Escribiremos en el cuociente $+2b^3$ á continuacion de a^3-4a^2b; multiplicaremos por aquel tercer término todo el divisor; y cambiando los signos de todos los términos del producto lo escribiremos debajo del tercer dividendo; y como efectuada la reduccion de términos semejantes no resulta residuo alguno, vendremos en conocimiento de que el término que acabamos de hallar es el último del cuociente, y de que $a^3-4a^2b+2b^3$ es su expresion completa.

44 En la division de los polinomios conviene advertir que de las varias multiplicaciones sucesivas de todo el divisor por los diferentes términos del cuociente suelen con frecuencia resultar algunos términos que no tienen semejantes en el dividendo propuesto, y que se deben dividir por el primer término del divisor. Estos términos extraños son los que en la primitiva multiplicacion, que siempre podemos suponer ejecutada para formar el dividendo, desaparecieron al tiempo de reducir los términos semejantes del producto. He aqui á continuacion un ejemplo muy notable de lo que acabamos de indicar.

Division.

$$
\begin{array}{c|l}
a^3-b^3 & a-b \\
\cline{2-2}
-a^3+a^2b & a^2+ab+b^2 \\
\hline
+a^2b-b^3 & \\
-a^2b+ab^2 & \\
\hline
+ab^2-b^3 & \\
-ab^2+b^3 & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Multiplicacion.

$$
\begin{array}{c}
a-b \\
\times\ a^2+ab+b^2 \\
\hline
a^3-a^2b \\
+a^2b-ab^2 \\
+ab^2-b^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Producto reducido.... $\}\ a^3-b^3$

El primer término a^3 del dividendo, dividido por el primer término del divisor, da por cuociente a^2. Multiplicando por este cuociente parcial todo el divisor, y cambiando los signos de los términos del producto, resultará $-a^3+a^2b$. El primer término de este resultado destruye al primer término del dividendo propuesto; pero como el segundo término a^2b no tiene semejante en el dividendo, y contiene la letra a, se le podrá dividir exactamente por el primer término del divisor; y hecha la division resultará ab por segundo cuociente parcial. Escrito este á continuacion del primero, y multiplicado por él todo el divisor, el producto con los signos cambiados será $-a^2b+ab^2$. El primer término de este resultado destruye el anterior semejante; pero permanece ab^2, el cual es exactamente divisible por el primer término del divisor; y efectuada la division resulta b^2 por tercer cuociente parcial. Colocado este á continuacion de los otros dos, se multiplica por él todo el divisor; y el producto con los signos cambiados es $-ab^2+b^3$. El primer término de este resultado destruye á su semejante é igual; y el segundo destruye al único término que aun quedaba del dividendo propuesto. Asi que será el cuociente completo a^2+ab+b^2.

Para hacer mas perceptible todo el mecanismo de la division, hemos puesto al lado de ella la multiplicacion del divisor por el cuociente, la cual como es bien sabido, se puede en todos casos considerar como la operacion primitiva con que se formó el dividendo. Cotejando las dos operaciones veremos que los términos, al parecer extraños, que de nuevo aparecen en la division, son justamente los productos parciales que por ser semejantes, iguales y con signos contrarios, se desvanecieron en el resultado final de la multiplicacion.

La misma observacion puede hacerse dividiendo a^4-b^4, ó a^5-b^5, ó a^6-b^6 &c. por $a-b$; cuyos cuocientes son muy dignos de ser examinados con la mayor atencion.

45 A veces ocurre que la letra, con respecto á la cual se ordenan los términos del dividendo y del divisor, tiene un mismo exponente en dos ó mas términos de uno de los dos polinomios ó de entrambos; y en tal caso se colocan en coluna todos los términos en que aquella letra tiene el mismo exponente; ó si se quiere, se ponen á continuacion unos de otros, cuidando de que esten al mismo tiempo ordenados con respecto á alguna otra letra que en ellos concurra con la principal.

Propongámonos, por ejemplo, dividir $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$ por $a^2-b^2-c^2$.

Teniendo como tenemos la absoluta facultad de ordenar los términos de los dos polinomios con respecto á cualquiera de las letras que entran en ellos, los ordenaremos con respecto á la a. Colocaremos pues por primer término del dividendo á $-a^6$; y cuando tratemos de poner el segundo, nos ocurrirán dos, $-a^4b^2$ y $+2a^4c^2$, que por tener la letra a con el exponente inmediato inferior, pueden con igual razon ocupar aquel lugar: los pondremos pues ambos en coluna á la derecha de primer término. En otra coluna pondremos los dos términos a^2b^4 y $-a^2c^4$ que con igual razon pueden ocupar el tercer lugar; finalmente en la última coluna pondremos los tres términos $+b^6$, $+2b^4c^2$, y $+b^2c^4$, en los cuales no se halla la letra a, ordenándolos con respecto á la letra b, segun puede verse á la vuelta de la página siguiente.

El primer término $-a^6$ del dividendo, dividido por el primer término a^2 del divisor, da por cuociente $-a^4$. Multiplicando por este cuociente parcial todo el divisor;

cambiando todos los signos del producto para restarlo del dividendo; colocando en una misma coluna todos los términos en que la a tenga un mismo exponente; y reduciendo por último los términos semejantes, el residuo que resulte será un segundo dividendo parcial.

El primer término $-2a^4b^2$ de este nuevo dividendo, dividido por el primer término a^2 del divisor, da por segundo cuociente parcial $-2a^2b^2$, que escribiremos á continuacion del primero. Multiplicando todo el divisor por el término que acabamos de hallar; cambiando todos los signos del producto para restarlo del dividendo; colocando en una misma coluna todos los términos en que la letra a tenga el mismo exponente; y reduciendo los términos que haya semejantes, el residuo que resulte será un tercer dividendo parcial.

Del mismo modo se continuará la operacion, y se hallarán todavía otros tres términos del cuociente. En habiendo multiplicado por el último todo el divisor, y cambiando todos los signos del producto para restarlo, al tiempo de la reduccion de términos semejantes veremos que se destruyen todos, lo cual nos hará conocer que el cuociente está completo, y que la division es exacta.

Dividendo.	Divisor.
$-a^6-a^4b^2+a^2b^4+b^6$ $+2a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2$ $+b^2c^4$	$a^2-b^2-c^2$
	$\left.\begin{array}{l}-a^4-2a^2b^2-b^4\\ \quad +a^2c^2-b^2c^2\end{array}\right\}$ Cuoc.

$$\begin{array}{l}+a^6-a^4b^2\\ \quad -a^4c^2\end{array}$$

1.r residuo.. $\left\{\begin{array}{l}-2a^4b^2+a^2b^4+b^6\\ +a^4c^2-a^2c^4+2b^4c^2\\ \qquad +b^2c^4\end{array}\right.$

Producto restado........ $\left\{\begin{array}{l}+2a^4b^2-2a^2b^4\\ \qquad -2a^2b^2c^2\end{array}\right.$

2.º residuo.. $\left\{\begin{array}{l}+a^4c^2-a^2b^4\ldots\ldots+b^6\\ \qquad -2a^2b^2c^2+2b^4c^2\\ \qquad -a^2c^4 \quad +b^2c^4\end{array}\right.$

Producto restado........ $\left\{\begin{array}{l}-a^4c^2+a^2b^2c^2\\ \qquad +a^2c^4\end{array}\right.$

3.º residuo.. $\left\{\begin{array}{l}-a^2b^4\ldots+b^6\\ -a^2b^2c^2+2b^4c^2\\ \qquad +b^2c^4\end{array}\right.$

Producto restado........ $\left\{\begin{array}{l}+a^2b^4 \quad -b^6\\ \qquad -b^4c^2\end{array}\right.$

4.º residuo.. $\left\{\begin{array}{l}-a^2b^2c^2+b^4c^2\\ \qquad +b^2c^4\end{array}\right.$

Producto restado........ $\left\{\begin{array}{l}+a^2b^2c^2-b^4c^2\\ \qquad -b^2c^4\end{array}\right.$

Residuo final... o........ o ....

46 En algunas ocasiones se efectúa con mucha prontitud y facilidad la division de los polinomios, des-

componiendo el dividendo en factores de una manera que suele ocurrirse á primera vista. Si hubiésemos, por ejemplo, de dividir $8a^6-4a^3b^2+4a^3+2a^3-b^2+1$ por $2a^3-b^2+1$, observariamos que los términos del divisor son los tres últimos del dividendo, y de ahi infeririamos que para poderse efectuar la division es indispensable que el primer trimonio $8a^6-4a^3b^2+4a^3$ del dividendo sea exactamente divisible por el divisor $2a^3-b^2+1$. Ahora bien, pronto se echa de ver que $4a^3$ es un factor comun de todos los términos de aquel trinomio, y que $8a^6-4a^3b^2+4a^3=4a^3(2a^3-b^2+1)$; por manera que todo el dividendo propuesto viene á ser:

$$4a^3(2a^3-b^2+1)+2a^3-b^2+1;$$

cuya expresion equivale á estotra:

$$(2a^3-b^2+1)(4a^3+1).$$

Suprimiendo pues de esta expresion el factor $2a^3-b^2+1$, estaria efectuada la division, y hallado el cuociente exacto $4a^3+1$, que es el otro factor.

Sobre este género de abreviaciones no es posible dar regla alguna general; la práctica del cálculo algebráico, que, como cualquiera otra, no puede adquirirse sino ejercitándose mucho en las operaciones, y observando y cotejando sus resultados, es la única que puede sugerir no pocas veces medios de hallarlos fácilmente, y con mucho ahorro de tiempo y de trabajo. Lo que creemos oportuno advertir de nuevo es que cuando sepamos que á una ó mas multiplicaciones se han de seguir una ó mas divisiones, conviene por lo comun no efectuar, sino meramente indicar aquellas, para que permaneciendo mas á las claras los factores del dividendo, se efectúen con mas prontitud y facilidad estas.

De las fracciones algebráicas. [1]

47 Siempre que no sea exactamente divisible por un polinomio otro polinomio, y nos empeñemos en efectuar la division, llegaremos despues de un cierto número de operaciones parciales á un residuo cuyo primer término no podrá dividirse por el primer término del divisor, y que por este medio nos hará conocer la imposibilidad de conseguir nuestro intento, á lo menos completamente. Sirva de ejemplo la division siguiente:

$$\begin{array}{ll|l}
\text{Dividendo......} & a^3+a^2b+2b^3 & a^2+b^2\text{.... Divisor} \\
 & -a^3-ab^2 & \overline{a+b\text{.... Cuociente}} \\
\hline
1.^\circ \text{ residuo......} & a^2b-ab^2+2b^3 & \\
 & -a^2b-b^3 & \\
\hline
2.^\circ \text{ residuo......} & -ab^2+b^3; &
\end{array}$$

en la cual el primer término ab^2 del segundo residuo no es exactamente divisible por el primer término a^2 del divisor, y de consiguiente no se ve cómo pueda continuarse la division. En este caso y en todos los demas semejantes se puede, á semejanza de lo practicado en la Aritmérica, agregar al cuociente una fraccion, cuyo numerador sea el residuo, y cuyo denominador sea el divisor. Asi que en la division propuesta el cuociente completo será

$$a+b+\frac{b^3-ab^2}{a^2+b^2}.$$

Segun esto *deberá terminarse la division de los po-*

1 No siendo cualquier quebrado, y con especialidad los algebráicos, sino la expresion del cuociente de una division indicada, se deberá considerar este capítulo como una continuacion del anterior.

linomios, luego que lleguemos á un residuo cuyo primer término no contenga la letra con respecto á la cual se los haya ordenado, ó en caso que la contenga, sea con un exponente menor que el de la misma letra en el primer término del divisor.

48 Cuando por no poderse efectuar la division de los polinomios es forzoso contentarnos con representar el cuociente por medio de una fraccion, cuyo numerador sea el dividendo, y cuyo denominador sea el divisor, nos queda todavía el recurso de simplificar esta expresion; y para ello tenemos que averiguar si los dos términos de la fraccion tienen algun *factor*, *divisor*, ó *medida comun*. Ya hemos expuesto (§. 41) el modo de simplificar una fraccion siempre que sea un monomio el factor comun de sus dos términos; pero como este factor comun pueda ser un polinomio que no podamos fácilmente descubrir á primera vista, nos valemos para hallarlo cuando lo hay, y aun para averiguar si la fraccion es *irreducible*, del mismo método del cual hemos hecho uso en la Aritmética para determinar el *máximo divisor comun* de dos números cualesquiera.

Tratamos pues de hallar un divisor comun de dos polinomios, al cual se le llama el *máximo*, sin embargo de que no se pueda generalmente determinar la magnitud relativa de una expresion algebráica, mientras no se asignen valores particulares á las letras que entran en ella. La denominacion de *máximo* se da en el Algebra al divisor comun que tenga mas términos y mas factores en cada término, ó que sea de grado mas elevado; y su investigacion está fundada en el mismo principio que la del máximo divisor comun aritmético, á saber: *Todo divisor comun de dos cantidades cualesquiera debe ser divisor exacto del residuo que resulte en la division de la cantidad mayor por la menor.*

En efecto, si representamos por D el divisor comun de dos cantidades cualesquiera; si representamos asimismo por A el cuociente que resulta de la division de la cantidad mayor por el divisor comun D; y por B el cuociente que resulta de la division de la cantidad menor por el mismo divisor comun, las dos cantidades estarán bien representadas por AD y BD, es decir, por los productos formados del divisor comun y del factor por el cual está multiplicado en cada una de ellas. Por último si representamos por Q el cuociente *entero* y por R el residuo de la division de la cantidad mayor por la menor, tendremos (*Aritm.* §. 51) esta ecuacion:

$$AD = BD \times Q + R.$$

Si ahora dividimos por D ambos miembros de la ecuacion, resultará

$$A = BQ + \frac{R}{D}$$

la cual nos dice que la cantidad representada por A se compone de las dos partes BQ y $\frac{R}{D}$. Siendo pues *enteros* A y una de sus partes BQ; deberá forzosamente serlo la otra parte $\frac{R}{D}$; lo cual es lo mismo que decir que R debe ser exactamente divisible por D.

Con arreglo á este principio *averiguaremos en primer lugar si la cantidad mayor es exactamente divisible por la menor; y si en esta primera division resultare algun residuo final, dividiremos por este residuo la cantidad menor; y si en esta segunda division resultase tambien residuo, dividiremos por este segundo al primero; asi continuaremos dividiendo cada uno de los residuos por el inmediato siguiente; y si alguna de las divisiones fuere exacta, la cantidad que en ella haya servido de divisor será el máximo comun divisor de las dos cantidades propuestas.* Mas para aplicar esta regla á las expresiones algebráicas se requieren ciertas observaciones y preparaciones que no eran necesarias en la Aritmética.

Por decontado será vano el empeño de hallar un divisor comun de dos cantidades que no tengan siquiera alguna letra comun; y en caso que tengan, como debe suponerse, algunas, deberemos ordenar todos los términos de ambos polinomios con respecto á una misma letra; escoger para dividendo el polinomio, en el cual tenga aquella letra el mayor exponente, y dejar para divisor el otro.

Sean, por ejemplo, las dos cantidades

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3$$

cuyos términos estan ya ordenados con respecto á la letra a; y en las cuales escogeremos la primera para dividendo, y la segunda para divisor. Ya desde el principio de la operacion se nos presenta una dificultad que jamas puede ocurrir en los números representados por guarismos; y es que el primer término del dividendo no es exactamente divisible por el primer término del divisor á causa de los factores 4 y b que se hallan en este y no en aquel. Por lo que hace al factor b, fácilmente se nota que es comun á todos los términos del divisor, y no siéndolo á todos los del dividendo, se le puede suprimir de aquellos sin que por eso varíe el divisor comun de las dos cantidades propuestas; porque siendo el polinomio $4a^2b - 5ab^2 + b^3$ igual á $(4a^2 - 5ab + b^2)\,b$, ó lo que es lo mismo, siendo exactamente divisible por b el polinomio $4a^2b - 5ab^2 + b^3$, y no siéndolo el otro polinomio propuesto, es consiguiente que b no sea factor comun de los dos, y que el divisor comun, si es que lo hay, deba ser la cantidad representada por $4a^2 - 5ab + b^2$ ó algun factor de esta. Queda pues reducida la cuestion á buscar el máximo divisor comun de las dos cantidades

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Por la misma razon que hemos podido suprimir de la segunda cantidad un factor b, que siendo comun á todos sus términos, no lo era tambien á los de la primera, podemos introducir en cualquiera de las dos un nuevo factor, con tal que no sea comun á todos los términos de la otra; sin que por eso varíe el máximo comun divisor de las dos, el cual es, como se sabe, el producto de los factores comunes de entrambas. De esta observacion nos aprovechamos para multiplicar el polinomio $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ por 4, que no es factor del polinomio $4a^2 - 5ab + b^2$, á fin de que por este medio venga á ser exactamente divisible por el primer término del divisor el primer término del dividendo [1]. Asi que tendremos para dividendo al polinomio $12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3$,

1 Lo expuesto en este párrafo se puede facilmente generalizar y reducir á este principio: *El máximo divisor comun de dos cantidades cualesquiera no padece alteracion alguna, porque se multiplique ó se divida una de ellas por cantidades que no contengan ningun factor de la otra.*

y para divisor al polinomio

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Efectuando despues de estas preparaciones la division de los primeros términos, resultará el cuociente parcial $3a$. Multiplicando todo el divisor por este cuociente, y restando del dividendo el producto, resultará el residuo

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3;$$

al cual consideraremos como un nuevo dividendo, porque el mas alto exponente de la a no es todavia menor que el de la misma letra en el primer término del divisor. Haciendo pues uso de las observaciones anteriores, suprimiremos el factor b comun á todos sus términos, y los multiplicaremos por 4 para que el primero de ellos sea exactamente divisible por el primero del divisor. Asi tendremos por segundo dividendo al polinomio

$$12a^2 + 4ab - 16b^2$$

y por divisor al mismo que antes.

Efectuando la division de los primeros términos, el segundo cuociente parcial será 3. Multiplicando todo el divisor por este cuociente, y restando del segundo dividendo el producto, resultará por segundo residuo, ó mas bien, por residuo final

$$19ab - 19b^2;$$

y la cuestion habrá quedado reducida á buscar el máximo comun divisor de este segundo residuo y de

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Notando que en este polinomio tiene la a, es decir, la letra que al principio de la operacion hemos escogido para ordenar los términos, mayor exponente que en el residuo final, nos deberá este servir de divisor; y el que antes lo era pasará á ser dividendo. Pero antes de comenzar esta nueva division, suprimiremos del divisor $19ab - 19b^2$ el factor $19b$ comun á todos sus términos sin ser factor del dividendo; y de este modo tendremos por dividendo á

$$4a^2 - 5ab + b^2$$

y por divisor á $\quad a - b$

Efectuando la division vemos que es exacta; y de consiguiente sabemos que el binomio $a - b$ es el máximo divisor comun de las dos cantidades propuestas.

Retrocediendo desde esta última division hasta la primera, podemos cerciorarnos no solo de que el binomio $a-b$ es efectivamente divisor comun de los dos polinomios propuestos, sino tambien de que estos no pueden ambos dividirse exactamente por otra cantidad mas compuesta, ó de grado mas elevado que aquel binomio. Por otra parte, si dividimos por $a-b$ los dos polinomios

$$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3,\ \text{y}\ 4a^2b-5ab^2+b^3$$

los trasformaremos en estotras expresiones:

$$(3a^2+b^2)(a-b),\ \text{y}\ (4ab-b^2)(a-b);$$

los cuales nos estan indicando que su máximo comun divisor es $a-b$.

En habiéndose enterado de todo el pormenor de las operaciones que hemos ejecutado en el caso anterior, será facil resolver otros muchos. Con el objeto de ejercitarse pueden los principiantes proponerse el hallar el máximo comun divisor de los polinomios.

$$6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2,$$
$$9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3;$$

el cual es el binomio $3a^2-2c^2$.

49 Cuando la letra, con respecto á la cual se hayan ordenado los polinomios propuestos, tenga el mismo exponente en muchos términos del divisor, ocurre una dificultad, que juntamente con el modo de superarla daremos á conocer en el ejemplo siguiente:

Propongámonos hallar el máximo divisor comun de los dos trinomios

$$a^2b+ac^2-d^3\ \text{y}\ ab-ac+d^2$$

y los colocaremos como para una division ordinaria.

Dividendo... $a^2b+ac^2-d^3$	$ab-ac+d^2$.... Divisor
$-a^2b+a^2c-ad^2$	a .... Cuociente

Residuo......... $a^2c+ac^2-ad^2-d^3$.

Dividiendo como es costumbre, el primer término del dividendo por el primer término del divisor, resulta por cuociente a. Multiplicando por este cuociente parcial todo el divisor, y restando del dividendo el producto, el residuo, que debe servir de nuevo dividendo, contendrá un término, en el cual se hallará la letra a con el exponente 2, lo mismo que en el dividendo primitivo; por manera que despues de la primera division parcial nos hallamos en el mismo estado que antes de comenzar la operacion; y continuándola de este modo, jamas se terminaria. En efecto, si considerando al residuo como segundo dividendo lo multiplicamos por b para que su primer término sea exactamente divisible por ab, tendremos esta segunda division parcial

$$\begin{array}{l|l} a^2bc+abc^2-abd^2-bd^3 & ab-ac+d^2 \\ -a^2bc+a^2c^2-acd^2 & ac \\ \hline \end{array}$$

Residuo.......... $a^2c^2+abc^2-acd^2-abd^2-bd^3$;
en cuya expresion vemos que de nuevo aparece la letra a con el exponente 2, ó elevada al cuadrado como antes.

Para precaver este inconveniente observaremos que el divisor $ab-ac+d^2=a(b-c)+d^2$, reuniendo en un solo término los dos en los cuales tiene el mismo exponente la letra que hemos elegido para ordenar los dos polinomios propuestos. Si ahora hacemos para mayor sencillez $b-c=m$, se trasformará el divisor en $am+d^2$; y en tal caso será indispensable multiplicar por m todo el dividendo $a^2b+ac^2-d^3$, para que su primer término sea exactamente divisible por am. De este modo tomará la operacion este otro aspecto.

$$\begin{array}{ll|l} \text{Dividendo....} & a^2bm+ac^2m-d^3m & am+d^2 \text{......... Divisor} \\ \cline{3-3} & -a^2bm-abd^2 & ab+c^2 \text{......... Cuociente} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1.^\circ \text{ residuo...} & +ac^2m-abd^2-d^3m \\ & -ac^2m-c^2d^2 \\ \hline 2.^\circ \text{ residuo......} & -abd^2-c^2d^2-d^3m. \end{array}$$

En el primer residuo se ve que ya ha desaparecído del dividendo la segunda potencia de a, y que solo ha quedado en él la primera potencia de la misma cantidad. Para hacer desaparecer tambien esta potencia, dividiremos el primer término ac^2m por am, y resultará por segundo cuociente parcial c^2. Multiplicando por este cuociente todo el divisor, y restando del primer residuo ó segundo dividendo el producto, resultará el segundo residuo. Considerando ahora á este segundo residuo como un tercer dividendo, suprimiremos de todos sus términos el factor comun d^2, que no se halla en todos los términos del divisor, y para poder efectuar la division los multiplicaremos de nuevo por m. Asi tendremos que hacer esta tercera operacion parcial:

$$\begin{array}{r|l} -abm - c^2m - dm^2 & am + d^2 \\ +abm + bd^2 & -b \\ \hline \end{array}$$

Residuo.................. $bd^2 - c^2m - dm^2$.

No apareciendo ya en este último residuo la letra a, es de inferir que esta letra no debe entrar en la expresion del divisor comun que buscamos, si es que existe.

En habiendo llegado á este punto nos es imposible conservar ordenados los términos y continuar la division con respecto á la letra a; y puesto que el divisor comun, si lo hay, debe ser independiente de esta letra, es consiguiente que no solo haya de dividir exactamente al residuo

$$bd^2 - c^2m - dm^2$$

y al divisor $am + d^2$,

sino tambien á cada uno de los términos de estas cantidades con separacion. Porque en general, *siempre que los términos de un polinomio cualquiera esten ordenados con respecto á una letra, en siendo exactamente divisible todo el polinomio por una cantidad en cuya expresion no entre aquella letra, tambien será exactamente divisible por la misma cantidad cada uno de los términos de por si.*

Para convencerse de la verdad de este principio basta reflexionar que no hallándose, como se supone, en el divisor la letra que se ha escogido para ordenar los términos del polinomio, debe aparecer en el cuociente la misma letra con los mismos exponentes que tenia en el dividendo; y por la inversa, hallándose en este y en el cuociente la misma letra con los mismos exponentes, la diferencia que exista entre aquellas cantidades, no puede ser otra que la de que en el dividendo cada potencia de la letra ha de estar multiplicada no solo por la cantidad que la multiplique en el cuociente, sino tambien por todo el divisor.

A fin de que no quede oscuridad alguna en este razonamiento, supongamos que habiendo dividido por una cantidad monomia ó polinomia M, en cuya expresion no entre la letra a, á un polinomio cuyos términos estaban ordenados con respecto á la letra a, haya resultado este cuociente exacto y ordenado con respecto á la misma letra:

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E;$$

en cuya expresion las letras mayúsculas A, B, C, D, E representan cantidades monomias ó polinomias independientes de la letra a. Si ahora multiplicamos por el divisor M todo el cuociente, vendremos en conocimiento de que el polinomio dividido es el siguiente:

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME;$$

en el cual es facil observar que no contiene mas ni menos potencias de a que el cuociente; y que el coeficiente [1] de cada una de estas potencias es exactamente divisible por la misma cantidad M, por la cual suponemos exactamente dividido todo el polinomio. Habiendo demostrado esta proposicion, volvamos á nuestro asunto.

Si tanto en el residuo $bd^2 - c^2m - dm^2$ como en el divisor $am + d^2$ restituimos el binomio $b - c$ en lugar de la letra m que lo representa, aquellas expresiones se trasformarán en estotras:

$$bd^2 - c^2(b - c) - d(b - c)^2,$$

$$a(b - c) + d^2;$$

y viendo que $b - c$ y d^2 no tiene divisor alguno comun, podemos estar ciertos de que tampoco lo tienen los dos trinomios primitivos.

Si no hubiésemos podido conocer á primera vista que las cantidades $b - c$ y d^2 no tenian divisor alguno comun, habriamos tenido que hacer esta averiguacion por el método general de las divisiones sucesivas; y suponiendo que lo tuviesen, y lo hubiésemos hallado, todavía nos restaba examinar si podria dividir exactamente al polinomio

$$bd^2 - c^2(b - c) - d(b - c)^2.$$

50 En vez de dejar para el fin de la operacion el averiguar si los dos polinomios propuestos tienen ó no algun divisor comun independiente de la letra que haya servido para ordenar sus términos, es mucho mas ventajoso hacer antes de todo esta investigacion, porque de lo contrario se van complicando mas y mas los residuos de las diferentes divisiones parciales, y á consecuencia va siendo cada vez mas penoso el cálculo.

1 Aunque (§. 17) hayamos asignado la denominacion de *coeficiente* al factor numérico que entra en la composicion de un término, se suele con frecuencia dar el mismo nombre á cualquier factor ó á cualquier combinacion de factores que en un término acompañen á una letra que por alguna razon es mirada como la principal.

Propongámonos por ejemplo hallar el máximo divisor comun de los polinomios.

$$a^4b^2+a^3b^3+b^4c^2-a^4c^2-a^3bc^2-b^2c^4$$

$$\text{y}\quad a^2b+ab^2+b^3-a^2c-abc-b^2c;$$

y ordenando sus términos con respecto á la letra a, adquirirán esta forma:

$$(b^2-c^2)\,a^4+(b^3-bc^2)\,a^3+b^4c^2-b^2c^4$$

$$(b-c)\,a^2+(b^2-bc)\,a+b^3-b^2c.$$

Ahora bien, si estos polinomios tienen algun divisor comun en cuya expresion no entre la letra a, cada uno de los coeficientes de las diferentes potencias de la misma a será exactamente divisible por el mismo divisor comun de los polinomios (§. 49), y de consiguiente lo serán tambien los dos binomios finales $b^4c^2-b^2c^4$ y b^3-b^2c, que se pueden mirar como coeficientes de a^0.

Comenzando pues nuestro examen por los coeficientes b^2-c^2 y $b-c$ de las potencias mas elevadas de a, indagaremos primeramente si tienen uno ó muchos divisores comunes; y despues veremos si todos los demas coeficientes de las otras potencias de a son exactamente divisibles por la misma cantidad que aquellos dos primeros; es decir, si el divisor comun de los binomios b^2-c^2 y $b-c$ lo es igualmente.

$$\text{de } b^3-bc^2 \text{ y } b^2-bc;\ \text{de } b^4c^2-b^2c^4 \text{ y } b^3-b^2c.$$

Dividiendo b^2-c^2 por $b-c$ resulta el cuociente exacto $b+c$; es pues $b-c$ divisor comun de los binomios b^2-c^2 y $b-c$; y no pueden estos tener ningun otro divisor comun por cuanto $b-c$ no es exactamente divisible sino por sí mismo y por la unidad. Ahora solo nos resta averiguar si $b-c$ es divisor comun de los demas coeficientes de las otras potencias de a. Lo es en efecto, como lo comprueba el que dividiendo por $b-c$ los dos polinomios propuestos, resultan los cuocientes exactos

$$(b+c)\,a^4+(b^2+bc)\,a^3+b^3c^2+b^2c^3;$$

$$a^2+ba+b^2.$$

A fin de reducir, si es posible, estas últimas expresiones á mayor grado de sencillez, convendrá examinar si la primera de ellas es exactamente divisible por el binomio $b+c$ coeficiente de a^4. Viendo que lo es, y no siéndolo la segunda, efectuaremos aquella division, y así tendremos estas otras dos expresiones bastante sencillas:

$$a^4 + ba^3 + b^2c^2,$$
$$a^2 + ba + b^2;$$

cuyo máximo divisor comun nos propondremos por último hallar.

Efectuando para ello las operaciones que prescribe la regla general (§. 48) resultará de la segunda division parcial un residuo que no tiene otra potencia de a sino la primera, y no siendo divisor comun de las dos cantidades este segundo residuo, se infiere que la letra a no entra en la expresion del máximo divisor comun de los dos polinomios primitivos, y que de consiguiente no tienen estos otro divisor comun que el binomio $b - c$.

Si ademas de este hubiésemos hallado algun otro en cuya expresion entrase la letra a, habria sido necesario multiplicar uno por otro para tener en el producto el máximo divisor comun que buscábamos.

Estas observaciones podrán ser suficientes para hallar sin gran dificultad el máximo comun divisor de dos polinomios cualesquiera, mayormente cuando se haya adquirido algun manejo y expedicion en las operaciones algebráicas.

51 Las cuatro *operaciones fundamentales*, es decir, la adicion, la sustraccion, la multiplicacion y la division se efectúan, del modo que es posible, con las fracciones algebráicas lo mismo que con las aritméticas; sin otra diferencia que la de observar, en todas las operaciones que prescriben las reglas establecidas para estas, los preceptos que en los capítulos anteriores hemos dado para sumar, restar, multiplicar y partir las cantidades algebráicas. Nos limitaremos pues á recordar aquellas reglas, aplicando cada una de ellas á un solo ejemplo; y comenzaremos, como en la Aritmética, por la multiplicacion y la division de las fracciones, porque estas dos operaciones no requieren ninguna trasformacion preparatoria.

1.° Por lo que respecta á la multiplicacion:

$$\frac{a}{b} \times c = c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}; \text{(}\textit{Aritm.}\ \text{§. 82 y 89)}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ (}\textit{Aritm.}\ \text{§. 82).}$$

2.° Por lo que hace á la division:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \text{ (}\textit{Aritm.}\ \text{§. 92)}$$

$$c : \frac{a}{b} = c \times \frac{b}{a} = \frac{bc}{a} \text{ (}\textit{Aritm.}\ \text{§. 95)}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \text{ (}\textit{Aritm.}\ \text{§. 96).}$$

3.° Las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, reducidas á un comun denominador se trasforman en estotras:

$$\frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd} \text{ (}\textit{Aritm.}\ \text{§. 99).}$$

Las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, se trasforman, por medio de igual reduccion, en las siguientes:

$$\frac{adfh}{bdfh}, \frac{cbfh}{dbfh}, \frac{ebdh}{fbdh}, \frac{gbdf}{hbdf}.$$

52 El método que expusimos (*Aritm.* §. 100) para obtener en ciertos casos un denominador comun mas sencillo que el que por la regla general resultaria, puede aplicarse facilmente á las fracciones algebráicas. Si estas fueren, por ejemplo, $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, será muy facil ver que los dos denominadores serian enteramente iguales si f fuera factor del primero, y c lo fuera del segundo. Se reducirán pues las dos fracciones propuestas á un comun denominador, multiplicando los dos términos de la primera por f, y los de la segunda por c; con lo cual ten-

dremos las fracciones $\frac{af}{bcf}$, $\frac{cd}{bcf}$, mas sencillas que $\frac{abf}{bbcf}$, $\frac{bcd}{bbcf}$ que por la regla general hubieran resultado.

Generalmente, *reúnanse en un producto todos los factores diferentes que se hallen en los denominadores de todas las facciones propuestas, y asi se tendrá el denominador comun de todas ellas; despues multiplíquese el numerador de cada fraccion por todos los factores de aquel producto que no se hallen en el denominador primitivo de aquella fraccion, y asi se tendrán los nuevos numeradores.*

Si las fracciones fueren, por ejemplo, $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, formaremos el producto b^2cfg, y este deberá ser el denominador comun; despues multiplicaremos el numerador de la primera fraccion por fg; el de la segunda por bcg, y el de la tercera por b^2f; y asi resultarán

$$\frac{afg}{b^2cfg}, \frac{bcdg}{b^2cfg}, \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

Si en el denominador primitivo de alguna de las fracciones propuestas estuviesen reunidos como factores los denominadores de todas las demas, solo habrá que ejecutar la segunda parte de la regla anterior.

53 Por lo que hace á la adicion de las fracciones que tengan un mismo denominador, como $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$,

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}$$

es decir, se suman los numeradores, y á la suma se le pone el denominador comun.

Por lo que respecta á la sustraccion de las fracciones que tengan un mismo denominador, como si hubiésemos de restar $\frac{b}{d}$ de $\frac{a}{d}$ será $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$; es decir, restaremos del numerador del minuendo el del sustraendo, y al residuo le pondremos el denominador comun.

Si las fracciones que se hayan de sumar ó restar no tuvieren un mismo denominador, será muy facil hacer que lo tengan.

Finalmente, por lo respectivo á las reducciones de expresiones *mixtas* á fracciones, y al contrario, será

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}\ (\textit{Arit.}\ \S.\ 91)$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$$

$$\frac{b}{c}-a=\frac{b}{c}-\frac{ac}{a}=\frac{b-ac}{c}$$

Por la inversa:

$$\frac{ac+b}{a}=\frac{ac}{a}+\frac{b}{a}=c+\frac{b}{a}$$

$$\frac{ac-b}{a}=\frac{ac}{a}-\frac{b}{a}=c-\frac{b}{a}$$

$$\frac{b-ac}{a}=\frac{b}{a}-\frac{ac}{a}=\frac{b}{a}-c.$$

En todos los ejemplos que hemos propuesto son monomios los términos de las fracciones; en caso que sean polinomios se ejecutarán las mismas operaciones, observando para ello las reglas establecidas para la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de las cantidades complexas. Asi que

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}=\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{c^2-d^2};$$

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}:\frac{a-b}{c-d}=\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)}=$$

$$\frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd}$$

y asi de todns las demas operaciones que suelen ejecutarse con los quebrados.

54 Cuando los principiantes hayan comprendido todo lo que hasta aqui hemos expuesto, y sobre todo cuando hayan adquirido cierta expedicion en la ejecucion de las operaciones que hemos enseñado á hacer con las cantidades algebráicas, se hallarán en estado de resolver cualquiera ecuacion de primer grado por complicada que sea.

Si, por ejemplo, de la propuesta de alguna cuestion se hubiere deducido la ecuacion siguiente:

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

lo primero que haremos será hacer desaparecer los denominadores; é indicando las operaciones que debemos ejecutar para ello (§. 13) será:

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)=$$
$$2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b).$$

Efectuando ahora las multiplicaciones indicadas, resultará:

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c+12a^2b-8ab^2-4b^3$$
$$=6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc.$$

Reuniendo por medio de la trasposicion en un solo miembro todos los términos en que se halla la x, y en otro todos los términos que no contienen esta letra, y reduciendo términos semejantes tendremos estas otras ecuaciones:

$$-3a^2x+8abx+3b^2x=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$
$$3b^2x+8abx-3a^2a=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^8;$$
$$x(3b^2+8ab-3a^2)=2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3;$$

y últimamente,

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{3b^2+8ab-3a^2}$$

De las ecuaciones del primer grado que tienen dos incógnitas; y explicaicon de ciertas expresiones que resultan de los cálculos algebráicos.

55 En las cuestiones que al principio de este tratado hemos resuelto con el auxilio de los símbolos algebráicos, tan solo una de las letras de que nos valíamos para representar todas las cantidades de que hacia mencion la propuesta, denotaba una cantidad desconocida; y todas las demas letras eran símbolos de cantidades conocidas. A veces es mucho mas cómodo representar dos de las cantidades incógnitas con dos letras distintas; y en tal caso es absolutamente necesario que la propuesta contenga explícita ó implícitamente dos ecuaciones, independientes la una de la otra; pues de lo contrario no se podrán determinar los valores de las incógnitas.

La cuestion, por ejemplo, que propusimos (§. 3), enunciada en los términos en que se halla al fin del §. 4, nos está á primera vista indicando que en ella podemos emplear dos letras distintas para representar los dos números desconocidos.

En efecto; si designamos

por x al número menor de los incógnitos;
por y al mayor;
por a la suma de ellos, conocida;

por b la diferencia de ellos, tambien conocida; la propuesta nos da estas dos ecuaciones:

$$x+y=a;$$
$$y-x=b.$$

Aunque ninguna de estas dos ecuaciones es por sí sola suficiente para determinar el valor de ninguno de los números desconocidos; si en cualquiera de ellas despejamos una de las incógnitas, por ejemplo en la segunda la y, resultará:

$$y=b+x.$$

Esta última ecuacion no nos da á conocer, es verdad, el valor que buscamos de la y, ó lo que es lo mismo, del número mayor incógnito; pero nos hace ver que la combinacion ó binomio $b+x$ es equivalente á la y. Si pues en la primera ecuacion sustituimos el binomio $b+x$ en lugar de la y, se trasformará aquella ecuacion en otra que no tendrá mas incógnita que la x, y de la cual podremos por el método ya expuesto deducir el valor de esta incógnita.

En efecto, hecha que sea la sustitucion, tendremos

$$x+b+x=a$$

ó lo que es lo mismo, $2x+b=a$

$$2x=a-b$$

$$x=\frac{a-b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}.$$

Sustituyendo ahora esta expresion del valor de x en la ecuacion

$$y=b+x,$$

resultará

$$y=b+\frac{a-b}{2}=\frac{2b+a-b}{2}=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}.$$

Asi que, tendremos de los números que buscamos las mismas expresiones que antes habiamos hallado (§. 3.) No podia menos de ser asi, en atencion á que si bien se reflexiona, la última solucion no se diferencia de la anterior sino en que en la una se ha traducido al lenguage algebráico una ecuacion que en la otra habiamos expresado en lenguage vulgar; pero de ella, expresada de uno y de otro modo, hemos deducido que el mayor número desconocido era equivalente á $x+b$.

56 He aqui otra cuestion:

Un artesano ha estado trabajando 12 dias en una obra; y tanto por sus jornales como por los de un hijo suyo, que ha trabajado en la misma obra por espacio de siete dias, ha recibido 222 reales. Volvieron á trabajar él por espacio de ocho dias, y su hijo por el de cinco dias; y ganando iguales jornales que antes, ha recibido 150 reales. Se pregunta: *¿cuántos reales ganaba diariamente el padre, y cuántos el hijo?*

Representemos por x el número de reales que el padre ganaba por dia, y por y el número de reales que ganaba diariamente el hijo:

12 jornales del padre vendrán á ser $12x$ reales;

7 jornales del hijo serán $7y$;

Tendremos pues con arreglo á la propuesta de la cuestion

$$12x+7y=222.$$

8 jornales del padre serán $8x$;

5 jornales del hijo serán $5y$;

y de consiguiente $8x+5y=150$.

Discurriendo como en el ejemplo anterior, deduciremos de la primera ecuacion

$$y=\frac{222-12x}{7}$$

Multiplicando por 5 esta última expresion, y sustituyendo el producto en lugar del término $5y$ de la segunda ecuacion, se trasformará esta en estotra:

$$8x+\frac{1110-60x}{7}=150,$$

la cual no tiene ya mas incógnita que la x; y resolviendo la última ecuacion tendremos estas otras:

$$56x+1110-60x=1050;$$

$$1110-4x=1050.$$

Trasponiendo al segundo miembro el término sustractivo $4x$ con el fin de hacerlo aditivo, ó mas bien con el de quitarle el signo, tendremos:

$$1110-1050=4x.$$

Sin necesidad de trasponer al segundo miembro el término sustractivo $4x$, pudiéramos haber deducido de la ecuacion $1110-4x=1050$ que $4x=1110-1050=60$, en habiendo advertido que $4x$ representa el *sustraendo*, 1110 el *minuendo*, y 1050 el *residuo*; y teniendo presente que *todo sustraendo es igual al minuendo menos el residuo.*

Si pues $4x=60$, será $x=\frac{60}{4}=15$.

Ganaba pues el padre 15 reales al dia; y sustituyendo este valor en la expresion que antes hemos hallado, $y=\frac{222-12x}{7}$ se trasformará en

$$y=\frac{222-12\times15}{7}=\frac{222-180}{7}=\frac{42}{7}=6.$$

Son pues 6 reales los que el hijo ganaba por dia.

57 Si observando á la letra la regla general de la trasposicion de términos (§. 10), hubiésemos dejado solo en el primer miembro el único término $-4x$ en

que se halla la incógnita, hubiera resultado

$$-4x=1050-1110;$$

y puesto que 1110 equivale á $1050+60$, esta última ecuacion se hubiera trasformado en estotra:

$$-4x=1050-1050-60;$$

y por último en estotra:

$$-4x=-60.$$

Asi hubiéramos venido á parar en una ecuacion, en la cual tanto el primer miembro como el segundo son *sustraendos* sin minuendo alguno; y acaso no habríamos sabido descifrarla. Ahora que ya sabemos que de la ecuacion $1110-4x=1050$ se deduce seguramente que $4x=1110-1050=60$, podremos venir en conocimiento de que la ecuacion

$$-4x=-60$$

nos quiere decir que lo mismo es restar de cualquier minuendo la cantidad $4x$ que restar 60; y en una palabra que $4x$ es lo mismo que 60; y de consiguiente que $x=15$.

De aqui podremos deducir que generalmente *tenemos facultad de cambiar los signos de los términos de uno de los miembros de una ecuacion, con tal que cambiemos los de todos los términos del otro miembro.*

58 Antes de buscar con el auxilio de las letras la solucion general del problema propuesto (§. 56) examinemos aun otro caso particular del mismo problema. Supongamos que se nos diga que la primera suma cobrada por el artesano fue 138 reales, y la segunda 90; y siendo las mismas todas las demas circunstancias de la cuestion, se nos pregunte como antes: *¿cuánto ganaba el padre y cuánto el hijo por dia?*

Las ecuaciones de esta nueva cuestion serán:

$$12x+7y=138;$$
$$8x+5y=90.$$

De la primera se deduce que

$$y=\frac{138-12x}{7}.$$

Multiplicando por 5 esta última expresion, y sustituyendo el producto en lugar de $5y$ en la segunda ecuacion, se trasformará en estotra:

$$8x+\frac{690-60x}{7}=90.$$

Multiplicando por 7 para que desaparezca el denominador, resultará:

$$56x+690-60x=630;$$

y de consiguiente

$$56x-60x=630-690;$$

ó cambiando los signos de ambos miembros para que los minuendos sean, como deben ser, mayores que los sustraendos: $60x-56x=690-630$;

y efectuando las sustracciones:

$$4x=60;$$

de donde se deduce:

$$x=\frac{60}{4}=15.$$

Sustituyendo este valor de la x en la expresion que antes hemos hallado del valor de y, resultará:

$$y=\frac{138-180}{7}=\frac{138-138-42}{7}=\frac{-42}{7}.$$

La expresion que acabamos de hallar del valor de y nos está indicando que de 138 se ha de restar 180, y que el residuo se ha de dividir por 7; pero siendo absolutamente impracticable la sustraccion, ¿qué querrá decirnos aquella fórmula ó esta otra, á la cual viene á reducirse

$$y=\frac{-42}{7}?$$

Ya sabemos lo que significa una combinacion de dos cantidades, en la cual la que tiene antepuesto el signo — es menor que la otra; pero cuando la cantidad sustractiva es mayor que la otra, y sobre todo cuando está enteramente sola, ¿qué podrá esto significar? El mejor medio de aclarar esta duda será retroceder á las ecuaciones primitivas que la han originado; pues siendo estas una verdadera traduccion de la propuesta, será mas fácil descubrir en ellas las circunstancias de la cuestion que han ocasionado la dificultad de que tratamos.

Si en la primera ecuacion

$$12x+7y=138$$

sustituimos en lugar de la x su valor 15, se trasformará en estotra:

$$180+7y=138;$$

la cual nos dice que los jornales de solo el padre importaban mas que los del padre y del hijo juntos; y siendo esto un absurdo, es claro que la propuesta envuelve condiciones incompatibles.

Si en la segunda ecuacion primitiva hacemos igual sustitucion, resultará:

$$120+5y=90,$$

la cual nos está indicando el mismo absurdo que la anterior.

Vemos, pues, que de la propuesta se infiere que los jornales de solo el padre importaban mas que los del padre y del hijo juntos; y de consiguiente podemos estar ciertos de que la cuestion es absurda, y su solucion enteramente imposible. Pudiéramos muy bien quedar satisfechos con haber descubierto esta verdad; pero si empeñándonos en profundizar mas, nos propusiéramos averiguar qué alteracion deberian padecer las condiciones para que conservándose los mismos números dados resultase una cuestion sin absurdo alguno, no seria dificil echar de ver que si el hijo hubiese disminuido con sus gastos el haber del padre en vez de aumentarlo con sus jornales, hubiera sido necesario restar de la suma que el padre habia ganado todo lo que importaban las expensas del hijo; y ya entonces no habria incompatibilidad ni contradiccion alguna en la propuesta, ni de consiguiente en las ecuaciones procedentes de ella; pues en tal caso serian:

$$180-7y=138$$
$$120-5y=90;$$

y de cualquiera de ellas se deduciria que

$$y=6;$$

lo cual quiere decir que asi en cada uno de los siete dias de la primera temporada como en cada uno de los cinco de la segunda habia ocasionado el hijo un gasto de 6 reales; y de ahi es que el padre, sin embargo de ganar 15 reales diarios, no habia sacado de producto neto en los doce primeros dias mas de 138 reales, ni en los ocho segundos mas de 90.

Ahora no será ya dificil presentar la propuesta de la cuestion en términos que no envuelva contradiccion alguna, y que sin alterar los números dados sea posible su solucion.

Un artesano, diremos, *ha estado trabajando doce dias en una obra, y por haber tenido siete dias en su compañía á un hijo suyo, que gastaba una parte del jornal del padre, no ha venido este á recibir al fin de la temporada mas de 138 reales. Volvió á trabajar en la misma* *obra por espacio de ocho dias, y á causa del gasto que en cinco dias le ocasionó su hijo no percibió al cabo de esta segunda temporada mas de 90 reales.* Suponiéndose que en ambas temporadas ha sido uno mismo el jornal del padre, y que tambien lo ha sido el gasto diario del hijo, se pregunta: *¿cuánto ganaba el padre, y cuánto gastaba el hijo en cada dia?*

Designando por x el número de reales que el padre ganaba, y por y el de los que gastaba el hijo, las ecuaciones propias de esta cuestion serán:

$$12x-7y=138;$$
$$8x-5y=90.$$

Deduciendo de la segunda, por ejemplo, que

$$x=\frac{90+5y}{8};$$

multiplicando esta última expresion por 12, y sustituyendo el producto en vez de $12x$ en la primera ecuacion, se trasformará esta en

$$\frac{1080+60y}{8}-7y=138;$$

y de esta última se deducirán estotras:

$$1080+60y-56y=1104;$$
$$4y=1104-1080=24;$$
$$y=\frac{24}{4}=6.$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuacion

$$x=\frac{90+5y}{8}$$

se trasformará en $x=\frac{90+30}{8}=\frac{120}{8}=15.$

Ganaba pues el padre 15 reales, y gastaba el hijo 6 reales en cada dia.

59 Aunque un resultado absurdo de un razonamiento bien formado no arguya por lo comun otra cosa sino lo absurdo del principio sobre que está fundado; siempre que hallemos para valor de una incógnita un número que tenga antepuesto el signo $-$, es decir, un número que indique ser *sustraendo* sin *minuendo*, no solo inferiremos que la cuestion, en los términos en que se nos haya propuesto, envuelve alguna contradiccion é incompatibilidad en sus condiciones, sino tambien que en rectificando alguna de estas, habrá de resultar otra cuestion análoga á la primera, sin absurdo alguno, y á la cual dará solucion el mismo número que antes hemos hallado. La rectificacion que en tales casos es necesario hacer en las condiciones se reduce á que se deba sumar alguna cantidad que la propuesta nos mandaba restar, ó al contrario; ó á que deba ser minuendo el que la propuesta nos indicaba como sustraendo, y *vice versa.*

Supongamos, por ejemplo, que habiendo resuelto primeramente la cuestion propuesta al fin del §. anterior, nos propusiésemos en seguida la del §. 56 en la hipótesi de que el hijo habia disminuido con sus gastos los salarios del padre; en cuyo caso las ecuaciones fundamentales serian:

$$12x-7y=222;$$
$$8x-5y=150;$$

de las cuales vendríamos á deducir finalmente que

$$x=15; \quad y=\frac{-42}{7}.$$

Esta última expresion nos indicaria que la propuesta de la cuestion contenia algun absurdo, ó lo que es lo mismo, condiciones incompatibles; y si tratando de descubrir cuál sea el absurdo que la propuesta contiene, sustituimos en las ecuaciones primitivas el valor de x, se trasformarán en estas otras:

$$180-7y=222;$$

$$120-5y=150.$$

Estas ecuaciones nos hacen bien perceptible el absurdo que deseábamos conocer; pues es bien manifiesta la imposibilidad de que despues de quitar de 180 una cantidad cualquiera haya quedado de residuo 222; y despues de quitar de 120 otra cantidad cualquiera, por pequeña que sea, haya quedado de residuo 150. En la suposicion de que los números 180 y 120 sean verderos, es absolutamente imposible deducir de ellos los resultados 222 y 150 por sustraccion; es indispensable por el contrario hacerles alguna adicion, y de consiguiente la propuesta de la cuestion y las ecuaciones fundamentales deberán ser las que ya hemos visto (§. 56); de las cuales hemos deducido que $x=15$; $y=\frac{42}{7}=6$.

Siempre que á causa de haber alguna incompatibilidad en las condiciones del problema, resulta sustractivo el valor de alguna incógnita, se dice que la solucion es *negativa*.

60 Por medio de estos ejemplos podemos venir en conocimiento de que las cuestiones del primer grado pueden contener ciertas condiciones incompatibles, ó sean ciertas contradicciones, que el Algebra no solo nos da á conocer conduciéndonos á un resultado sustractivo ó con el signo $-$, sino que tambien nos indica el modo de rectificar las propuestas, haciendo sustractivas algunas cantidades que se habian supuesto aditivas, ó al contrario.

Esto es lo que se debe entender cuando se dice que las *soluciones negativas* resuelven los problemas en un sentido contrario al de sus propuestas; y aunque en realidad el problema propuesto, que suponemos absurdo, sea muy distinto del problema rectificado y libre de toda contradiccion, se les mira sin embargo como idénticos, porque ademas de contener ambos los mismos números conocidos é incógnitos, para pasar del uno al otro y hacer útil la *solucion negativa*, ó por mejor decir, para que la solucion deje de ser *negativa*, basta una mera mutacion de los signos + y −.

61 Aunque estos signos no designaron en su primitiva institucion sino las operaciones de sumar y restar; cuando se echó de ver que de la resolucion de las ecuaciones resultaban en ciertos casos para valores de las incógnitas números con el signo −, es decir, números que se debian restar sin haber de qué, no se contentaron los algebristas con haber conocido por este medio que las cuestiones que los habian conducido á estos resultados absurdos, eran imposibles, ni tampoco con haber descubierto el modo de rectificar las condiciones para que desapareciese la incompatibilidad que antes habia, sino que ademas hicieron este razonamiento:

Si de un problema bien puesto en ecuacion se deduce que una incógnita debe ser $=-6$, por ejemplo, es consiguiente que si mirando como un símbolo de una cantidad á la combinacion -6 del guarismo y del signo que le antecede, la sometemos á todas las operaciones indicadas en la cuestion, el resultado deba satisfacer á esta segun esté propuesta, y sin necesidad de variar previamente ninguna de sus condiciones.

Sirva de ejemplo la misma cuestion que hemos propuesto (§. 58). Despues de haberla traducido fielmente al lenguage algebráico, y haber deducido de las ecuaciones en que la hemos trasformado, que

$$x=15;\ y=\frac{-42}{7},$$

deberemos inferir que si ejecutamos con el número 15 y con la expresion, bien que absurda, $\frac{-42}{7}$ las operaciones indicadas en la propuesta y representadas en las ecuaciones

$$12x+7y=138,$$
$$8x+5y=90,$$

los resultados deberán ser exactamente conformes á lo que la misma propuesta requiere; pues de lo contrario no estarian bien deducidos los valores de x é y.

Sustituyendo primeramente el valor de x, se trasformarán aquellas dos ecuaciones en estotras:

$$180+7y=138,$$
$$120+5y=90.$$

Solo nos restará ahora sustituir en estas dos últimas ecuaciones la expresion $\frac{-42}{7}$ que hemos hallado del valor de y. Al efectuar esta sustitucion nos ocurre la dificultad de que no siendo $\frac{-42}{7}$ ninguno de los símbolos que conocemos de las cantidades, no sabemos cómo ejecutar con aquella expresion las operaciones indicadas en las dos ecuaciones.

Para superar esta dificultad se ocurrió efectuar por via de ansayo estas operaciones, haciendo uso de las reglas de los signos establecidas (§§. 31 y 43) para los símbolos de las verdaderas cantidades. Conforme á lo prescrito en aquellas reglas, se tuvo á -6 por equivalente á $\frac{-42}{7}$, en lugar de $7y$ se sustituyó -42; y en lugar de $5y$ se sustituyó -30.

De este modo, y haciendo uso de la regla de los signos (§. 18), se trasformaron las ecuaciones en

$$180-42=138;$$
$$120-30=90;$$

las cuales son rigurosamente verdaderas, y las mismas que hemos hallado despues de haber rectificado las condiciones de la propuesta, y haber hecho desaparecer la incompatibilidad que en ellas habia.

Asimismo, despues de haber deducido de las ecuaciones que hemos formado (§. 59),

$$12x-7y=222,$$
$$8x-5y=150,$$

que los valores de las incógnitas eran

$$x=15;\ y=\frac{-42}{7};$$

si sustituimos estos valores deberán resultar las cantidades que la propuesta requiere.

Sustituyendo primeramente el valor de x, que no ofrece dificultad alguna, tendremos:

$$180-7y=222,$$
$$120-5y=150.$$

Si ahora en lugar de $7y$ ponemos -42,
y en lugar de $5y$.............. -30;

si teniendo ademas presente que en las ecuaciones estan indicadas dos sustracciones, hacemos uso de la regla de los signos establecida (§. 20), se trasformarán las últimas ecuaciones en estotras:

$$180+42=222;$$
$$120+30=150;$$

las cuales son verdaderas y las mismas que resultan de la propuesta del problema, segun se hallan en el §. 56, es decir, corregida y sin que haya contradiccion ó incompatibilidad alguna en sus condiciones.

Luego que se observó que la aplicacion de las reglas de los signos á estas expresiones absurdas procedentes de cuestiones imposibles producia resultados verdaderos, fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de *cantidades negativas*; se las sometió á todas las operaciones del cálculo; y se dijo que si las soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de la cuestion, el Algebra lo corregia.

62 Puesto que las cantidades negativas resuelven en cierto sentido los problemas de donde han dimanado, conviene examinar el modo de emplearlas en los cálculos, y establecer reglas seguras para efectuar las operaciones que las cuestiones puedan exigir que se ejecuten con ellas.

Las reglas de los signos establecidas (§§. 18, 20, 31 *y* 43) no se han demostrado hasta ahora en el supuesto de que las operaciones se hayan de ejecutar con cantidades sustractivas aisladas. Establecimos, por ejemplo, que si de a hubiésemos de restar la cantidad representada por la combinacion $b-c$, el residuo debia representarse por $a-b+c$; pero no hemos hecho ver que si de a se ha de restar la cantidad, si puede asi llamarse, $-c$, el residuo deberá representarse por $a+c$. Pudiera ciertamente decirse que el razonamiento que hicimos para demostrar la exactitud del residuo $a-b+c$, era independiente de la magnitud de las cantidades representadas por estos símbolos, y que de consiguiente debia tener lugar aun cuando llegase á ser $b=o$, con lo cual la expresion $b-c$ se reduciria á $-c$, y la combinacion $a-b+c$ quedaria reducida á $a+c$. Pero acaso no satisfará á todos esta prueba; y como la teoría de las cantidades negativas ha venido á ser una de las mas importantes del Algebra, y ha dado ocasion á varias disputas; es necesario apoyarla sobre los fundamentos mas sólidos que sea posible. Para conseguirlo retrocedamos al origen de las cantidades negativas.

Todas las que se llaman *cantidades negativas* proceden de sustracciones, en las cuales el sustraendo es mayor que el minuendo; y como la mayor cantidad que se puede restar de otra sea la igual á ella, en cuyo caso el residuo es cero; cuando se nos manda quitar de una cantidad otra mayor hacemos mas palpable la imposibilidad de ejecutarlo, indicando cuánto falta para que el minuendo sea igual al sustraendo, y de consiguiente para que sea *cero* el residuo. Restamos pues, contra lo que se nos ha mandado, del sustraendo el minuendo, y á este residuo le anteponemos el signo $-$ para indicar que hemos efectuado la operacion en un orden inverso. Sí por ejemplo nos prescribe una fórmula que quitemos 5 de 3, ó lo que es lo mismo, si tenemos en ella $3-5$, equivalente á $3-3-2$; viendo que la sustraccion prescrita es verdaderamente imposible, y que de consiguiente es vano el intento de determinar el resultado, sustituimos en su lugar -2, ó lo que es lo mismo restamos 3 de 5, y al residuo le anteponemos el signo $-$ para tener un indicio de haber ejecutado la operacion al reves; y lo que en realidad debe representarnos el símbolo -2, no es el residuo, pues en el caso propuesto es un absurdo suponer que pueda haberlo, sino solo que es necesario añadir 2 á la combinacion $3-5$ para que se iguale el minuendo con el sustraendo, y se reduzca á cero toda la combinacion. En efecto $3-5+2=0$. Lo mismo puede decirse de cualquiera de estos símbolos algebráicos que se llaman cantidades negativas; $-a$, por ejemplo, debe indicarnos que una fórmula prescribia restar de una cantidad otra mayor; y siendo esto imposible, se ha ejecutado al reves la operacion; y al resultado a de esta se le antepuso el signo $-$, para que con esta modificacion nos diese á conocer que es necesario añadir la cantidad a á la combinacion de cantidades, de la cual provino el símbolo $-a$, para reducir á cero el resultado de toda la combinacion. Esto ha dado ocasion á que se dijese que *las cantidades negativas son menores que cero;* expresion que para dejar de ser absurda, debe entenderse en el sentido que acabamos de darla. Pasemos ya á hacer ver que las reglas de los signos pueden en todos casos aplicarse sin rezelo alguno á los símbolos algebráicos llamados *cantidades negativas.*

Nadie puede dudar de que las expresiones $a-a$; $b-b$; $c-c$ &c. son equivalentes á *cero*, y de consiguiente son otros tantos símbolos del mismo *cero*. Ahora bien, si á una cantidad cualquiera representada por a le agregamos la combinacion $b-b$, la que de nuevo resulta $a+b-b$ no vendrá á ser otra cosa que un nuevo modo de representar la misma cantidad a; el cual por entrar en la nueva combinacion los símbolos $+b$ y $-b$, nos hace ver con mas claridad el efecto que en la cantidad a debe producir la sustraccion de b, ó la de $-b$; pues para ello basta borrar de aquella expresion cualquiera de las dos cantidades que nos propongamos quitar. En efecto si de a nos proponemos quitar b, ó como dicen, $+b$, borrando esta cantidad en la expresion $a+b-b$, el residuo será $a-b$; resultado enteramente conforme con el convenio adoptado (§. 2). Si por el contrario nos proponemos quitar de a la cantidad negativa $-b$, suprimiendo este término en la expresion $a+b-b$, el resultado será $a+b$, como lo hubiéramos hallado aplicando á este caso la regla de los signos establecida (§. 20).

Por lo que hace á la multiplicacion es fácil echar de ver que el producto de $a-a$ por $+b$ debe ser $ab-ab$; porque siendo igual á *cero* el multiplicando, debe tambien ser igual á *cero* el producto; y siendo indudablemente ab el primer término de este, el segundo deberá ser $-ab$, para que destruya al primero. De aqui se deducirá que $-a\times+b=-ab$.

Si nos proponemos multiplicar a por $b-b$, el producto deberá ser $ab-ab$; porque siendo igual á *cero* el multiplicador, debe tambien ser igual á *cero* el producto; y como el primer término de este sea indudablemente ab, el segundo deberá ser $-ab$ para destruir al primero. Será pues $a\times-b=-ab$.

Finalmente, si tratamos de multiplicar $-a$ por $b-b$, sabiendo ya que el primer término del producto es $-ab$, el segundo no podrá menos de ser $+ab$, para que todo el producto se reduzca, como debe, á *cero*, por ser igual á *cero* el multiplicador. Asi que, será $-a\times-b=+ab$.

Cotejando estos resultados con los que hubiéramos inmediatamente hallado aplicando á estas cantidades sustractivas aisladas, ó sean cantidades negativas, las reglas de los signos establecidas (§. 31), veremos que son exactamente los mismos.

Por lo que respecta á la division, teniendo presente que el divisor y el cuociente son los factores del dividendo, y que de consiguiente el signo de este debe resultar, si asi puede decirse, de los signos de sus factores; será facil deducir el signo del cuociente cuando se conozcan el del dividendo y el del divisor; y asi se verá que la regla establecida (§. 42) es tambien aplicable al caso presente.

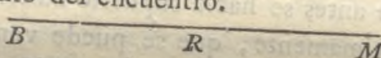
En general, *cuando tratemos de efectuar cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales con las cantidades sustractivas aisladas, ó como dicen, con las cantidades negativas, deberemos observar para los signos de los resultados las mismas reglas que si aquellas cantidades fuesen partes de polinomios.*

63 Recapitulando cuanto hemos expuesto tocante á las que se llaman *cantidades negativas*, diremos que en realidad son unas expresiones absurdas de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la cuestion, de la cual hayan dimanado; de consiguiente nos dan á conocer que no es posible resolver la cuestion sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones, haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se habia supuesto aditiva, ó al contrario; y últimamente, que se puede venir en conocimiento del modo de ejecutar esta rectificacion considerando á las expresiones realmente absurdas -6; -8; $-a$; $-b$; &c., como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades, y haciendo uso de las reglas anteriormente establecidas de los signos, en las operaciones que nos propongamos ejecutar con aquellas expresiones. Estos son por lo menos hechos constantemente observados, y que se pueden observar en todos los casos en que resulten tales

expresiones; por manera que cuando se dice, por ejemplo, que restando $-b$ de a, el residuo es $a+b$, el único modo de interpretar esta expresion en términos que tenga sentido, es decir que la regla de los signos establecida para efectuar la sustraccion con los verdaderos símbolos de las cantidades, aplicada aun á aquellos otros que no lo son, corrige el absurdo que habia en lo que se nos mandaba ejecutar: se nos decia que restásemos, y debiamos sumar. Para nueva confirmacion de todo esto propongámonos estotro problema.

64 *Un correo ha salido de Barcelona para Madrid al mismo tiempo que otro ha salido de Madrid para ir por el mismo camino á Barcelona: se sabe cuánta es la distancia de un pueblo á otro, y cuántas leguas anda por hora cada uno de los dos correos*: y se nos pregunta *¿en qué punto del camino*, ó lo que viene á ser lo mismo, *á cuántas leguas de cualquiera de aquellos dos pueblos se encontrarán los dos correos?*

A fin de presentar con mayor claridad las circunstancias de la cuestion representaremos con una línea la distancia de los dos puntos de partida, é indicaremos estos dos pnntos por las letras mayúsculas B y M, y por R el punto del encuentro.



Reprentaremos ademas, como es de costumbre, por letras minúsculas las cantidades conocidas é incógnitas que entran en la cuestion; á saber:

por a el número de leguas que distan uno de otro los puntos de partida, ó como se suele decir, la distancia BM;

por b el número de leguas que anda por hora el correo que ha salido del punto B;

por c el número de leguas que anda por hora el correo que ha salido del punto M;

por x el número de leguas que el primer correo ha andado desde el punto B hasta el punto R del encuentro;

por y el número de leguas que el segundo correo ha andado desde el punto M hasta el mismo punto R.

Esto supuesto, es facil echar de ver que cuando los dos correos se encuentren habrán corrido entre los dos toda la distancia que hay desde uno de los puntos de partida al otro, puesto que la distancia total BM se compone de las dos parciales BR y MR. Tendremos, pues, en primer lugar esta ecuacion:

$$x+y=a.$$

Considerando ahora que en la propuesta se nos dice que los dos correos salieron á un mismo tiempo de sus respectivos puntos de partida, inferiremos que anduvieron en un mismo número de horas las distancias parciales representadas por x é y. Sabiendo por otra parte que dividiendo el número total de leguas que cada correo haya andado por el número de leguas que ande por hora, ha de resultar el número de horas que ha empleado en el camino, inferiremos que el símbolo $\frac{x}{b}$ del cuociente de aquella division representará el número de horas que ha gastado el primer correo en ir desde el punto B hasta el punto R; y que el símbolo $\frac{y}{c}$ representa el número de horas que el segundo correo ha necesitado para ir desde M á R. Y puesto que segun la propuesta de la cuestion deben ser iguales estos dos números de horas, tendremos esta segunda ecuacion:

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Son pues las dos ecuaciones fundamentales de la cuestion estas:

$$x+y=a;$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

De la segunda se deduce facilmente que

$$x=\frac{by}{c};$$

y sustituyendo esta expresion del valor de x en la primera ecuacion, se trasformárá esta en estotra:

$$\frac{by}{c}+y=a;$$

de la cual se deducen sin dificultad alguna las siguientes:

$$by+cy=ac;$$

$$y(b+c)=ac:$$

$$y=\frac{ac}{b+c}.$$

Si ahora sustituimos esta expresion del valor de y, en la que antes hallamos del de x,

$$x=\frac{b}{c}y,$$

se trasformará esta en

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c}=\frac{abc}{c(b+c)}=\frac{ab}{b+c}.$$

No hallándose el signo $-$ en ninguna de las dos fórmulas que nos prescriben la serie de operaciones que debemos efectuar con las tres cantidades conocidas para hallar las incógnitas, ó lo que es lo mismo, no habiendo que ejecutar sustraccion alguna para hallar estos va-

lores, no hay que temer que, sean cuales fueren los nú-
meros representados por las letras a, b, c, pueda re-
sultar *cantidad negativa* para valor de alguna de las in-
cógnitas; y de consiguiente será posible en todos casos la solucion de la cuestion propuesta y de todas las que sean enteramenre semejantes á ella, sin necesidad de hacer alteracion alguna en las condiciones que encierra. En efecto, bien fácil es ver que necesariamente se deben encontrar dos correos que á un mismo tiempo y por un mismo camino vayan el uno desde B á M, y el otro desde M á B, ó como se dice, que caminen en *sentidos opuestos*.

65 Supongamos ahora que habiendo salido como antes los dos correos á un mismo tiempo de los puntos B y M, se dirijan ambos por un mismo camino hácia otro punto C situado á la derecha de M; ó como suele decirse, que caminen *en un mismo sentido*:

B ——— M ——— R ——— C

en cuyo caso no podrá ya tratarse de averiguar dónde se encontrarán los dos correos, sino dónde alcanzará el que ha salido de B al que ha salido de M, suponiendo, como es indispensable para ello, que el primero ande con mas velocidad que el segundo; ni el punto R podrá ya estar entre B y M, sino á la derecha de este último.

Conservando las mismas letras para representar las cantidades análogas á las del problema anterior, observaremos en primer lugar que en este caso la distancia BM de los dos puntos de partida es la diferencia de las distancias BR y MR andadas en un mismo tiempo por los dos correos desde sus respectivos puntos de partida hasta el punto en que el primero alcanzó al segundo. Tendremos, pues, esta primera ecuacion:

$$x-y=a;$$

y la segunda $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$

que expresa la igualdad de los tiempos empleados en correr los espacios *BR* y *MR*, permanecerá la misma que antes.

Estas dos últimas ecuaciones, resueltas como las anteriores, dan: $x=\frac{by}{c}$;

$\frac{by}{c}-y=a;$ $by-cy=ac;$ $y(b-c)=ac;$

$$y=\frac{ac}{b-c};$$

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b-c}=\frac{abc}{c(b-c)};$$

y finalmente $x=\frac{ab}{b-c}$.

Como en estas fórmulas está indicada una sustraccion en la cual *b* es el minuendo y *c* el sustraendo; para que sea practicable esta sustraccion, y á consecuencia sea posible la solucion del problema en los términos en que lo hemos propuesto, es absolutamente necesario que la cantidad representada por *b* sea mayor que la representada por *c;* es decir, que el correo que haya salido de *B* ande con mas velocidad que el que haya salido de *M.* Solo en este caso serán, como suele decirse, *positivos* los valores de *x* é *y*.

Si por ejemplo fuese

$$b=3;\ c=1\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{4};$$

seria $b-c=3-1\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$;

y de consiguiente $x=\frac{12}{7}a$;

$$y=\tfrac{5}{7}a;$$

y asi sabriamos cuánto distaba el punto en que debe verificarse el alcance, de cada uno de los puntos de partida, puesto que se supone conocida la mutua distancia de estos representada por a.

Pero si en la propuesta de algun caso particular se nos hubiese dado el valor de b menor que el de c, ya dejaba de ser practicable la sustraccion que las fórmulas prescriben; seria imposible la solucion del problema en los términos en que lo hemos propuesto; y asi nos lo indicarian los valores negativos de las incógnitas.

Si por ejemplo fuese

$$b=1\tfrac{1}{2};\ c=2;$$

seria $b-c=-\tfrac{1}{2};\ x=-3a;\ y=-4a.$

B M R C

Las expresiones que acabamos de hallar de los valores de x é y, por lo mismo que son absurdas, estando como estan rectamente deducidas de la propuesta, nos dan inmediatamente á conocer que el problema es insoluble como no se varíe alguna de sus condiciones. Y en efecto ¿qué cosa mas absurda que suponer que dirigiéndose los dos correos hácia el punto C, situado segun nos lo presenta la figura; y saliendo á un mismo tiempo de los puntos B y M, pueda el que salga de B alcanzar jamas al otro, caminando mas despacio que él?

66 Sin embargo, si con aquellas expresiones absurdas ejecutamos las operaciones indicadas en las ecuaciones fundamentales, de donde han dimanado,

$$x-y=a;$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c};$$

haciendo uso para ello de las reglas de los signos, tendremos estotras:

$$-3a+4a=a;$$

$$-3a\times\frac{2}{3}=-\frac{4a}{2};$$

las cuales son rigorosamente verdaderas y exactas; y con solo atender á los signos que estan antepuestos á los términos del primer miembro de la primera ecuacion, vendremos en conocimiento del modo de rectificar la propuesta de la cuestion y de hacer desaparecer el absurdo que contenia.

En efecto, en aquel primer miembro vemos que de $4a$ está restado $3a$; ó lo que es lo mismo, del camino andado por el correo que salió de M está restado el camino andado por el correo que salió de B, y asi resulta la distancia de los dos puntos de partida. Ahora bien, es muy facil echar de ver que esto no puede absolutamente verificarse sin que los correos se dirigiesen á un punto C, no situado á la derecha del punto M como la propuesta suponia, sino á la izquierda del punto B, segun lo representa la siguiente figura:

C R B M

en cuyo caso deberá alcanzar el correo que salió de M al otro, y no al contrario, en un punto R situado á la izquierda del B, y no á la derecha del M.

En este caso la distancia MR menos la distancia BR será igual á BM; y de consiguiente tendremos esta primera ecuacion

$$y-x=a;$$

y siendo la segunda $\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$;

será facil deducir de ellas estas otras:

$$x=\frac{ab}{c-b};\qquad y=\frac{ac}{c-b};$$

y sustituyendo en estas fórmulas los valores supuestos de b y c, resultarán

$$x=3a;$$
$$y=4a;$$

es decir, valores sin nota alguna de absurdos; valores, como suele decirse, *positivos*, y que resuelven la nueva cuestion en los mismos términos y sin necesidad de alterar ninguna de las condiciones con que últimamente la hemos propuesto.

67 En la cuestion del §. 65, propuesta con toda la generalidad de que es susceptible, ocurre un caso en el cual es absolutamente imposible la solucion, sin que por mas alteraciones y modificaciones que se hagan en las condiciones pueda desaparecer el absurdo. Esto se verifica cuando sean iguales los valores de b y de c, ó lo que es lo mismo, cuando se suponga que los dos correos caminan con velocidades iguales. En tal caso, hácia cualquier lado que marchen en un mismo sentido los dos correos, conservarán constantemente una distancia igual á la que haya entre los puntos de partida, y de consiguiente ninguno de los dos llegará jamas á alcanzar al otro. Este absurdo, que ninguna modificacion de las condiciones hará desaparecer, se deja ver con bastante claridad en las mismas ecuaciones fundamentales de la cuestion; porque si en ellas hacemos $b=c$, ó lo que es lo mismo, si sustituimos b en lugar de c, la segunda ecuacion

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

se trasformará en estotra:

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b};$$

de la cual se deduce que $x=y$.

A consecuencia de esto la primera ecuacion

$$x-y=a;\ \text{ó}\ y-x=a;$$

se trasformará en

$$x-x=a;\ \text{ó}\ o=a;$$

resultado evidentemente absurdo; pues que nos presenta como nula una distancia cuya magnitud se nos ha dado en la propuesta del problema.

68 Este absurdo se nos manifiesta de un modo muy singular en las fórmulas ó últimas expresiones de los valores de las incógnitas

$$x=\frac{ab}{b-c};\ y=\frac{ac}{b-c};$$

pues suponiendo en ellas $b=c$, el denominador ó divisor se hace *cero*, y se trasforman en estas:

$$x=\frac{ab}{0};\ y=\frac{ac}{0}.$$

No es fácil imaginarse cuál pueda ser el cuociente de una division cuando el divisor sea *cero*. Lo único que se ve es que si fuere muy pequeño el exceso que b lleve á c, serán muy grandes los valores de x é y; y que cuanto menor sea aquel exceso, tanto mayores serán estos valores; porque suponiendo, como aqui se supone, un dividendo constante, cuanto menor sea el divisor, tanto mayor será el cuociente (*Arit.* §. 50.) En efecto, si fuere $b=2$; $c=1,99$; será $b-c=0,01$; y de consiguiente $x=\frac{2a}{0,01}=200a$; $y=\frac{1,99a}{0,01}=199a$.

Si fuere $b=2$; $c=1,9999$; será $b-c=0,0001$; y de consiguiente

$$x=\frac{2a}{0,0001}=20000a;\ y=\frac{1,9999a}{0,0001}=19999a;$$

donde se ve que cuanto menor es la diferencia representada por $b-c$, tanto mayores van siendo los valores de x é y.

Pero como por mas pequeña que sea una cantidad no pueda decirse con verdad que es rigorosamente igual á *cero;* por mas pequeña que supongamos la diferencia representada por $b-c$, y de consiguiente por grandes que imaginemos los valores de x é y; jamas podremos llegar á expresar los que corresponden al caso en que sea $b=c$.

Esta particularidad de no ser posible designar en tal caso por ningun número, por grande que se le suponga, el valor de ninguna incógnita, se expresa diciendo que este valor es *infinito;* y á toda expresion de la forma $\frac{m}{o}$, cuyo denominador es *cero*, se la mira como un símbolo de un valor que por grande es *inasignable*, ó como suele decirse, es *infinito.*

No es pues el *infinito* matemático otra cosa que una idea negativa, de la cual nos valemos para expresar la absoluta imposibilidad de asignar número alguno tan grande, que sea capaz de resolver la cuestion que nos haya conducido á fórmulas semejantes á las que acabamos de examinar.

Una vez que un razonamiento rectamente formado nos ha conducido á tales expresiones ó fórmulas, se nos podria preguntar, ¿cómo satisfacen á las ecuaciones fundamentales de la cuestion los valores que hemos hallado

$$x=\frac{ab}{o};\ y=\frac{ac}{o}?$$

puesto que es una propiedad esencial del Algebra que en ejecutando conforme á sus reglas las operaciones indicadas en la propuesta con los símbolos que finalmente resulten de los valores de las incógnitas, sean los que fueren, han de satisfacer á las ecuaciones fundamentales del problema.

En contestacion á esta pregunta sustituiremos aquellas expresiones en las ecuaciones

$$x-y=a;\ \frac{x}{b}=\frac{y}{b};$$

que corresponden al caso en que $b=c$; y se trasformará la primera en estotra:

$$\frac{ab}{0}-\frac{ab}{0}=a;$$

de la cual se deducen estas:

$$\frac{ab-ab}{0}=a;\ ab-ab=a\times0;\ a(b-b)=a\times0;\ 0=0;$$

por ser $a\times0=0$.

La segunda ecuacion se trasforma por medio de la sustitucion en estotra:

$$\frac{ab}{0\times b}=\frac{ab}{0\times b};$$

cuyos miembros son enteramente iguales. Estan pues completamente satisfechas las dos ecuaciones fundamentales del problema.

Todavía tenemos otro medio de venir en conocimiento del absurdo que la propuesta envuelve, y de descubrir si es ó no posible hacerlo desaparecer por alguna modificacion de las condiciones. Para esto dividiremos por x los miembros de la ecuacion $x-x=a$, en la cual se trasforma la primera ecuacion fundamental despues que de la segunda deducimos que $x=y$. Aquella division nos dará

$1-1=\frac{a}{x}$; ó lo que es lo mismo, $0=\frac{a}{x}$.

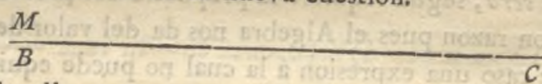
Esta última ecuacion, rectamente deducida de la propuesta, nos da á conocer que todo el absurdo de la cuestion viene á reducirse á exigir que sea igual á *cero* el quebrado ó cuociente $\frac{a}{x}$; cosa que jamas podrá verificarse como no sea tambien igual á *cero* el numerador ó dividendo a. Con todo, como á medida que crece el divisor, disminuye el cuociente, cuanto mayor sea el valor que asignemos á x, tanto mas se aproximará á *cero* el valor de $\frac{a}{x}$; bien que jamas podrá ser exactamente igual á *cero*, segun requiere la propuesta del problema[1].

Con razon pues el Algebra nos da del valor de la x en este caso una expresion á la cual no puede equivaler exactamente número alguno por grande que sea; con razon nos da á entender que aquel valor es *inasignable* por grande, ó como se dice, es *infinito*; indicándonos por este medio que de ningun modo es posible hacer desaparecer enteramente el absurdo que la propuesta envuelve. Lo mas que podremos hacer será disminuir, cuanto queramos, el error, aumentando mas y mas el valor que asignemos á x; como nos lo indica la gran magnitud

1 Puesto que $\frac{a}{x}$ no puede jamas ser exactamente igual á *cero*, pero puede aproximarse á serlo cuanto se quiera, será *cero* el *límite* de la fraccion $\frac{a}{x}$ (*Aritm.* §. 101.) Algunos llaman *infinitamente pequeñas* á las cantidades cuyo *límite* es *cero*; otros llaman *cantidad infinitamente pequeña* al mismo *cero*, considerado como *límite* de aquellas otras cantidades. Ni en uno ni en otro sentido tiene aquella expresion la propiedad, exactitud y claridad apetecibles; pero por su brevedad podrá admitirse siempre que préviamente se fije el sentido en que se la use.

que esta incógnita va adquiriendo á medida que se va acercando á *cero* el residuo $b-c$.

69 Si caminando los dos correos con igual velocidad y en un mismo sentido, se supusiese ademas que hubiesen salido de un mismo punto y á un mismo tiempo, seria ridículo el querer determinar el punto en que se reunian; pues esta reunion debia en tal caso verificarse en todos los puntos del espacio que anduviesen. Sin embargo, es digno de verse cómo nos manifiestan esta particularidad las expresiones que antes hemos hallado de los valores de x é y, modificadas segun lo exigen las circunstancias de la nueva cuestion.



En ella se supone que los puntos B y M de partida se han confundido en uno solo, y de consiguiente la distancia de ellos $a=0$; por otra parte se supone que $b=c$. Vendrán pues á trasformarse las fórmulas generales en estotras: $x=\frac{0\times b}{0}=\frac{0}{0}$; $y=\frac{0\times c}{0}=\frac{0}{0}$.

Hé ahi dos expresiones de cuocientes en las cuales el dividendo y el divisor son ambos *cero*. Para descifrarlas volvamos á las ecuaciones fundamentales, y veremos que se reducen en este caso á

$$x-y=0;$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}.$$

y deduciéndose de la segunda que $x=y$, se trasformará la primera en una de estotras:

$$x-x=0;\ \text{ó}\ x=x;$$

$$y-y=0;\ \text{ó}\ y=y.$$

Expresiones semejantes á estas últimas, á las cuales se les ha dado el nombre de *ecuaciones idénticas*, y que dejan enteramente indeterminado el valor de la incógnita, son generalmente el resultado final á que nos conducen todas aquellas cuestiones en que se supone peculiar de alguna sola cantidad una propiedad comun á todas las de su especie. En el caso presente nos indican que sea la que fuere la distancia á que los dos correos se hallen del punto de partida, estarán constantemente reunidos, y asi queda absolutamente indeterminada aquella distancia. Se ve pues, que la expresion $\frac{0}{0}$ que de la fórmula general dedujimos para este caso particular, no es aqui otra cosa que un símbolo de una cantidad indeterminada. Decimos *aqui*, porque hay casos en que no es este el significado de aquella expresion; pero tambien el origen de ella es muy diferente.

70 Daremos un ejemplo de estos otros casos en la expresion

$$\frac{a(a^2-b^2)}{b(a-b)}$$

la cual se trasforma en $\frac{0}{0}$ si dejándola en la forma en que se nos presenta, suponemos que sea $a=b$; pero si echamos de ver que los dos términos de la fraccion tienen el factor comun $a-b$, y suprimiendo este factor comun reducimos la fraccion á su mas simple expresion, se trasformará primeramente en

$$\frac{a(a+b)}{b};$$

y haciendo en esta expresion $a=b$, será su valor $2a$.

Vemos pues que en este caso la expresion $\frac{0}{0}$ tiene un valor determinado cual suponemos ser $2a$, porque el orígen de ella ha sido un factor comun al numerador y al denominador de la fórmula propuesta, el cual se reducia á *cero* en el supuesto de ser $a=b$. Pero las fórmulas generales de los valores de x é y, que en el párrafo anterior se redujeron á $\frac{0}{0}$ no tenian factor alguno comun al numerador y al denominador, y de consiguiente eran irreducibles á mas sencilla expresion.

De esto se sigue que cuando alguna sustitucion particular trasforme en $\frac{0}{0}$ una fórmula general fraccionaria, debemos ante todas cosas averiguar si el numerador y el denominador tienen algun factor comun, que reduciéndose á *cero* por medio de la sustitucion, haga que tambien se reduzcan á *cero* los dos términos de la fraccion. En caso que lo tengan deberemos suprimirlo antes de hacer la sustitucion, y de este modo vendremos en conocimiento del verdadero valor de la expresion propuesta. Es necesario confesar que no siempre basta esto para determinar aquel valor; pero los límites á que nos hemos propuesto ceñir este tratado no nos permiten extendernos mas sobre este asunto, y nos obligan á diferir para cuando tratemos del cálculo diferencial la exposicion de los métodos generales para hallar el verdadero valor de las expresiones trasformadas por alguna sustitucion en $\frac{0}{0}$.

71 Lo expuesto hace ver con bastante claridad que en habiendo traducido fielmente al lenguage algebráico la propuesta de un problema, las fórmulas algebráicas que por último resultado deduzcamos de las ecuaciones

fundamentales nos darán valores que satisfarán completamente á todas las condiciones de la cuestion siempre que su solucion sea posible. Cuando no lo sea por razon de algun absurdo que la propuesta envuelva, las mismas fórmulas nos lo darán á conocer juntamente con la modificacion que á veces basta hacer en las condiciones para que desaparezca la incompatibilidad que antes tenian, y venga asi á formarse con los mismos datos otra cuestion algo parecida á la anterior, y cuya solucion sea posible. Si el absurdo que la propuesta envuelve fuere tal que ninguna modificacion de las condiciones pueda hacerlo desaparecer, el Algebra tiene tambien medios de manifestarnos con ciertas expresiones que con las cantidades que se suponen conocidas no es posible resolver cuestion alguna análoga en cierto sentido á la propuesta; y no menos los tiene para indicarnos que alguna propiedad, que se ha supuesto peculiar de una sola cantidad desconocida, es comun á todas las de su especie. En suma, con el auxilio del lenguage algebráico no solo resolvemos las cuestiones, cuya solucion es posible, sino que tambien descubrimos los que se pueden muy bien llamar *diferentes grados de imposibilidad* para conseguirlo; de todo lo cual iremos viendo nuevas pruebas en lo sucesivo.

72 Es muy digno de observarse cómo representa el Algebra la diferencia que fácilmente se advierte en las circunstancias de las dos cuestiones propuestas en los §§. 64 y 65, en la primera de las cuales caminaba hácia B el correo que habia salido de M, y en la segunda hácia el lado opuesto. Cotejemos con este objeto las ecuaciones primitivas y las fórmulas finales correspondientes á entrambas cuestiones, y veremos que en la

una la primera ecuacion fundamental es:

$$x+y=a;$$

y en la otra:

$$x-y=a;$$

y siendo en ambas una misma la segunda ecuacion, pasemos á hacer igual cotejo de las fórmulas finales. En la primera cuestion hemos hallado que

$$x=\frac{ab}{b+c}; \qquad y=\frac{ac}{b+c};$$

y en la segunda:

$$x=\frac{ab}{b-c}; \qquad y=\frac{ac}{b-c};$$

En las ecuaciones vemos que la *y*, símbolo del camino andado por el correo que salió de *M*, está sumada en la primera cuestion y restada en la segunda; en la primera tiene el signo $+$, y en la segunda el signo $-$; ó como suelen decir, en la primera es *positiva*, y en la segunda *negativa*.

En el denominador de las fórmulas respectivas á la primera cuestion, la *c* que representa el número de leguas que el mismo correo anda en cada hora, está sumada con la *b*; y en las de la segunda está restada de la misma *b*. Por manera, que con la mera mutacion de un signo se pueden aplicar á la segunda cuestion las fórmulas de la primera, y al contrario; por cuya razon en habiendo resuelto la una se puede mirar como resuelta la otra. Asi que se dice quo el Algebra nos da en la solucion de una cuestion las de otras muchas cuestiones análogas.

El problema tercero del §. 14 puede ser un nuevo ejemplo de esto. En la propuesta de aquel problema supusimos que el padre debia al hijo una cantidad representada por d, y hallamos por fórmula final

$$x=\frac{bc+d}{a+b}.$$

Pues ahora, si quisiéramos que esta fórmula sirviese aun para el caso en que el alcance hubiese sido contra el hijo y á favor del padre, no tendriamos que hacer otra cosa sino mudar el signo de la d símbolo del alcance; y resultaria para este nuevo caso:

$$x=\frac{bc-d}{a+b}.$$

Y si supiéramos que en el ajuste de cuentas habian quedado padre é hijo en paz, con solo hacer la $d=0$, ó lo que equivale á esto, con solo suprimir de la fórmula anteriormente hallada la d, tendríamos:

$$x=\frac{bc}{a+b}.$$

Es sumamente fácil comprobar estas dos soluciones, poniendo separadamente en ecuacion los dos últimos problemas, y resolviéndolos como si cada uno de ellos fuese el primero de su especie que se nos hubiese propuesto.

Esta aplicacion, que con frecuencia suele hacerse de una fórmula hallada para cierto caso particular á otros casos análogos, es orígen de muchos valores *negativos*, que indican, no precisamente que los nuevos problemas contienen algun absurdo, como lo indicarian si directamente los hubiésemos puesto en ecuacion, sino que para aplicar á los nuevos casos la fórmula anteriormente hallada es necesario hacer alguna mutacion de signos por razon de alguna diferencia de circunstancias que haya entre el caso para el cual se halló primitivamente la fórmula, y los nuevos á que se la haya aplicado. Ya se nos presentarán ocasiones de manifestar toda la importancia de esta observacion.

73 Si hemos designado con dos letras distintas las cantidades que nos proponíamos hallar en los problemas de los §§. 56 y 64, ha sido solo con el objeto de presentar ejemplos de ecuaciones con dos incógnitas, y de dar á conocer el modo de resolverlas; pero pudimos muy bien haberlos resuelto ambos por medio de una ecuacion con una sola incógnita.

En efecto, habiéndosenos dicho en la propuesta del primero que el artesano habia recibido al fin de la primera temporada 222 reales por valor de sus 12 jornales y de los 7 de su hijo, es consiguiente que si representamos, como antes, por y cada jornal del hijo, $7y$ represente la suma de los 7 jornales de este; $222, -7y$ representará la de los 12 jornales del padre, y $\frac{222-7y}{12}$ vendrá á ser una expresion de cada uno de los jornales de este último.

Habiéndosenos igualmente dicho que al cabo de la segunda temporada habia recibido 150 reales por valor de sus 8 jornales y de los 5 de su hijo, $\frac{150-5y}{8}$ vendrá á ser otra expresion de cada uno de los jornales del padre.

Podremos, pues, formar esta ecuacion:

$$\frac{222-7y}{12}=\frac{150-5y}{8};$$

la cual es suficiente para resolver el problema.

En el del §. 64 es fácil ver que si se designa por x el

$$\overline{B\qquad\qquad\qquad R\qquad\qquad M}$$

camino BR andado por el correo que salga de B, $a-x$ representará el camino MR andado por el correo que salga de M, en el número de horas que medien entre el momento de la salida y el del encuentro. La fraccion $\frac{x}{b}$ será una expresion de aquel número de horas; $\frac{a-x}{c}$ será otra expresion del mismo número, y de consiguiente podremos formar esta ecuacion:

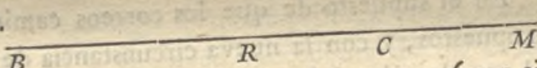
$$\frac{x}{b}=\frac{a-x}{c};$$

de la cual se deducen fácilmente estotras:

$$cx=ab-bx;\ cx+bx=ab;\ x(b+c)=ab;\ x=\frac{ab}{b+c}.$$

Entre estas soluciones y las que anteriormente hemos dado (§§. 56 y 64) de los mismos problemas, no hay mas diferencia que el haber aqui formado y resuelto la primera ecuacion en lenguage vulgar, y sin valernos del algebráico; y bien se ve que cuanto mas adelantemos en el razonamiento sin mas auxilio que el idioma ordinario, tanto menos habrá que hacer con el simbólico para llegar á la conclusion.

74 Suele proponérsenos el problema del §. 64 con una nueva circunstancia que no hace mas dificil su solucion.

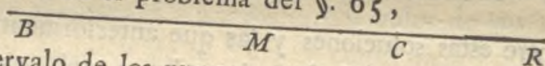


Se supone que uno de los dos correos (por ejemplo, el que salió del punto M) *se puso en camino un número* d *de horas antes que el otro.*

Todo el efecto que esta nueva circunstancia produce no viene á ser en realidad otra cosa que haber trasferido el primer punto de partida á otro punto C, y haber por consiguiente disminuido la distancia de los dos puntos de partida; porque el correo que sale de M, y anda en cada hora c leguas, en d horas habrá caminado cd leguas, y se hallará en otro punto C cuando llegue á salir de B el otro correo. Asi que la distancia de uno á otro no será ya la que hay de B á M, sino la de B á C; no será ya a, sino $a-cd$. Sustituyendo $a-cd$ en lugar de a en la ecuacion del §. anterior, se trasformará esta en la siguiente: $\frac{x}{b}=\frac{a-cd-x}{c}$;

de la cual se deduce que $x=\frac{ab-bcd}{b+c}$.

Si los correos caminasen en un mismo sentido, como supusimos en el problema del §. 65,

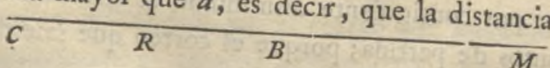


el intervalo de los nuevos puntos de partida B y C seria $a+cd$. Siendo pues x el camino BR andado por un correo hasta el punto R de la reunion, el camino CR andado en el mismo tiempo por el otro correo será $x-a-cd$, y de consiguiente tendremos esta ecuacion:

$$\frac{x}{b}=\frac{x-a-cd}{c};$$

de la cual se deduce que $x=\frac{ab+bcd}{b-c}$.

75 En el supuesto de que los correos caminen en sentidos opuestos, y con la nueva circunstancia de haber salido el uno de ellos del punto M un número d de horas antes que el otro saliese del punto B, puede resultar para la x un valor negativo, cuya interpretacion ofrece alguna dificultad. Esto será en el caso en que los números d y c sean tales que su producto cd, símbolo del camino MC andado por un correo antes de la salida del otro, sea mayor que a, es decir, que la distancia MB.



En tal caso el correo que ha salido de M se hallará en un punto C situado á la izquierda de B antes de haber salido de este último punto el otro correo; y puesto que este otro camina hácia M, es un absurdo suponer que sin hacer alguna variacion en las condiciones de la propuesta puedan ya encontrarse.

Si por ejemplo fuese $a=100$ leguas; $b=2$ leguas; $c=3$ leguas; $d=40$ horas; seria $cd=120$ leguas; y el punto C estaria á 20 leguas de distancia del punto B, y á su izquierda. Sustituyendo estos valores en la fórmula, resultará:

$$x=\frac{100\times2-2\times3\times40}{2+3}=\frac{200-240}{5}=\frac{-40}{5}=-8.$$

Por decontado esto nos indica que la cuestion contiene condiciones incompatibles, y que no es posible resolverla en los términos en que se nos ha propuesto: indica ademas que es susceptible de cierta modificacion por medio de la cual se formará otra cuestion en que entren las mismas cantidades conocidas, y cuyo resultado sea que los correos deban encontrarse en un punto R situado á la izquierda del punto B, y á 8 leguas de distancia de este; en una palabra, situado entre los puntos B y C, sin embargo de que á primera vista parezca que hallándose en C el correo procedente de M cuando el otro salió de B, no se podrán reunir sino en un punto situado á la izquierda de C.

Para venir en conocimiento de la nueva cuestion, y de la modificacion que debemos hacer en la anterior, representemos por $-m$ el valor negativo que nos ha resultado para la incógnita, es decir, para el camino andado por el correo procedente de B hasta encontiar al otro. Sustituyamos aquel valor en lugar de la x en la ecuacion, haciendo para ello uso de las reglas de los signos; y asi tendremos esta ecuacion verdadera y sin absurdo alguno:

$$-\frac{m}{b}=\frac{a-cd+m}{c};$$

de la cual mudando los signos en ambos miembros, resultará estotra:

$$\frac{m}{b}=\frac{cd-a-m}{c};$$

y como el numerador de la segunda fraccion representa el camino andado por el correo procedente de *M*, desde que se hallaba en el nuevo punto de partida *C* hasta el punto del encuentro, es claro que este punto debe hallarse á la derecha de *C*, puesto que el minuendo cd es mayor que el sustraendo $a+m$. Tambien es claro que el mismo punto se halla á la izquierda de *B*, puesto que $a+m$ es lo que se debe restar de cd para que resulte el camino andado por el correo procedente de *M*. Ni lo uno ni lo otro puede verificarse sin que el correo procedente de *B* se haya dirigido hácia *C* y no hácia *M*; y sin que el correo procedente de *M*, despues de haber llegado á *C*, haya retrocedido hácia *B*. Este retroceso, que puede parecer muy extraordinario, es indispensable en el supuesto de que los correos se hayan de reunir caminando en sentidos opuestos; de lo contrario, ó no se reunirian, ó no se verificaria esta reunion caminando los dos correos en sentidos contrarios.

He aqui pues la nueva cuestion, ó sea la anterior modificada en términos que no contenga absurdo alguno, y que sea posible su solucion:

C *R* *B* *M*

Salió de M un correo caminando 3 leguas por hora;

y habiendo corrido por espacio de 40 horas y llegado al punto C, *retrocedió. Al tiempo en que empezó á retroceder, salió de otro punto* B *situado en la misma carrera y distante 100 leguas de* M *otro correo caminando 2 leguas por hora, y dirigiéndose hácia* C. Se pregunta *¿á qué distancia del punto* B *se encontraron los dos correos?*

Si nos propusiéramos resolver directa é inmediatamente esta cuestion, hallariamos por resultado final que

$$x=8 \textit{ leguas}.$$

76 El problema del §. 56, generalizado se puede proponer en estos términos:

Un artesano y un hijo suyo trabajaron en una obra, el primero por espacio de a *dias, y el segundo por espacio de* b *dias, é importaron los jornales de ambos* c *reales; volvieron á trabajar en la misma obra, el primero por espacio de* d *dias, y el segundo por el de* e *dias, é importaron los jornales de entrambos* f *reales.* Se pregunta *¿cuántos reales ganaba cada uno de los dos por dia?*

Representemos, como antes, por x el jornal del padre; y en a dias habrá ganado ax; por y el jornal del hijo; y en b dias habrá ganado by.

Asi que tendremos esta primera ecuacion:

$$ax+by=c.$$

Del mismo modo, los jornales del padre en d dias importarán dx; y los del hijo en e dias serán ey. Tendremos pues esta segunda ecuacion:

$$dx+ey=f;$$

y he ahí las dos ecuaciones fundamentales del problema.

De la primera ecuacion se deduce que

$$x=\frac{c-by}{a},$$

y multiplicando por d esta expresion del valor de x será $dx=\frac{cd-bdy}{a}$. Sustituyendo ahora esta última expresion en la segunda ecuacion fundamental, se trasformará esta en estotra:

$$\frac{cd-bdy}{a}+ey=f.$$

Multiplicando por a todos los términos de la ecuacion, tendremos:

$$cd-bdy+aey=af;$$

de donde deduciremos:

$$aey-bdy=af-cd;$$
$$y\,(ae-bd)=af-cd;$$
$$y=\frac{af-cd}{ae-bd}.$$

Pudiendo ya mirar como enteramente conocido el valor de y, lo sustituiremos en la expresion que antes hallamos del de x, y se trasformará esta en la siguiente:

$$x=\frac{c-b\times\frac{af-cd}{ae-bd}}{a},$$

la cual podremos tambien mirar como enteramente conocida.

A fin de simplificar la última expresion efectuaremos en primer lugar la multiplicacion indicada de las cantidades

$$b \text{ y } \frac{af-cd}{ac-bd} \text{ (§. 51)};$$

cuyo producto es $\frac{abf-bcd}{ae-bd}$; y de consiguiente será

$$y=\frac{c-\frac{abf-bcd}{ae-bd}}{a}.$$

Reduciendo á quebrado el entero y quebrado que forman el numerador ó dividendo de esta expresion, se convertirá en estotra:

$$x=\frac{\frac{ace-bcd-abf+bcd}{ae-bd}}{a},$$

y reduciendo términos semejantes;

$$x=\frac{\frac{ace-abf}{ae-bd}}{a}.\ 1$$

1 Si alguno tuviese duda sobre el significado de estas expresiones, tenga presente que en la fórmula $x=\frac{A}{B}$ el numerador A representa al dividendo, y el denominador B al divisor, y asi el uno como el otro pueden ser números enteros, quebrados ó mixtos. En esta atencion $x=\frac{\frac{M}{N}}{D}$ significa que x es igual al cuociente que debe resultar de la division del quebrado $\frac{M}{N}$ por D, y de consiguiente equivale á $\frac{M}{DN}$. La fórmula $x=\frac{M}{\frac{N}{D}}$ quiere decir que x es igual al cuociente que debe resultar de la division de la cantidad M por la fraccion $\frac{N}{D}$, y de consiguiente equivale á $\frac{MD}{N}$. La fórmula $x=\frac{\frac{M}{F}}{\frac{N}{D}}$ significa que la x es igual al cuociente que debe resultar de la division del quebrado $\frac{M}{F}$ por el quebrado $\frac{N}{D}$, y de consiguiente equivale á $\frac{MD}{FN}$; y asi de otras varias expresiones. Las que hemos descifrado pueden bastar para dar á conocer lo mucho que importa colocar las líneas de division segun sea el resultado que nos propongamos indicar.

Efectuando la division por a, resultará:

$$x=\frac{ace-abf}{a^2e-abd};$$

y suprimiendo el factor a comun al numerador y al denominador (§. 38), tendremos por último:

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd};$$

Luego que hayamos hallado las fórmulas generales

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}; \qquad y=\frac{af-cd}{ae-bd};$$

podremos aplicarlas á la solucion de todos los problemas particulares semejantes al propuesto, sustituyendo en lugar de cada letra el número representado por ella, y efectuando las operaciones indicadas; segun ya lo hicimos (§. 14) en una ecuacion que tenia una sola incógnita.

En efecto, si hacemos

$$a=12;\ b=7;\ c=222;$$
$$d=\ 8;\ e=5;\ f=150;$$

y efectuamos las operaciones que estan indicadas en la fórmula, resultarán los valores particulares que hemos hallado en el §. 56.

Y si hacemos

$$a=12;\ b=7;\ c=138;$$
$$d=\ 8;\ e=5;\ f=90;$$

en efectuando las operaciones indicadas, hallaremos el mismo resultado que en el §. 58.

77 Las ecuaciones fundamentales

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

pueden representar las de todos los problemas que pueden resolverse por medio de dos ecuaciones del primer grado que contengan dos incógnitas; y las fórmulas que por resultado final hemos hallado para expresar los valores de x y de y, pueden aplicarse á cuantos problemas puedan ocurrir de esta clase; con tal que se consideren las letras a, b, d, e como símbolos de las cantidades conocidas que multipliquen respectivamente á las incógnitas despues que se hayan traspuesto al primer miembro todos los términos en que estas se hallen, y las letras c y f como símbolos de todos los términos enteramente conocidos, despues de traspuestos al segundo miembro.

Asimismo lo que hemos practicado para deducir de las dos ecuaciones fundamentales propuestas las fórmulas finales, se puede tambien mirar como un modelo de lo que deberemos ejecutar en todos los casos semejantes; lo cual se reduce en suma á que *en una de las ecuaciones se despeja una de las dos incógnitas; de este modo se obtiene una expresion de su valor, la cual sustituida en la otra ecuacion, hace que esta no tenga mas de una incógnita, y que ya entonces se le puedan aplicar las reglas establecidas* (§§. 10 y sig.)

Por último haremos las dos advertencias siguientes:

1.ª No son suficientes dos ecuaciones cualesquiera para determinar los valores de otras tantas incógnitas que haya en ellas; es necesario que una ecuacion no esté deducida de la otra, pues de lo contrario equivaldrán las dos á una sola. Asi que las ecuaciones

$$2x+3y=12$$
$$4x+6y=24$$

no son reputadas por dos sino en la apariencia; pero en realidad se reducen á una sola, porque en multiplicando por 2 los miembros de la primera resulta la segunda; y en tomando la mitad de los miembros de esta resulta la primera. Téngase pues entendido que en cuantos casos hablemos de cualquier número de ecuaciones, suponemos que son realmente distintas é independientes las unas de las otras.

Es necesario ademas que las dos ecuaciones no sean entre sí contradictorias ó incompatibles. Si, por ejemplo, se deducen de la propuesta de un problema estas dos ecuaciones,

$$2x+3y=12$$
$$4x+6y=20$$

es muy fácil echar de ver que estas dos ecuaciones no pueden de modo alguno verificarse á un mismo tiempo, y que de consiguiente la cuestion que asi lo requiere es enteramente absurda.

2.ª Cuando en mas de dos ecuaciones independientes no haya mas de dos incógnitas, las ecuaciones que haya ademas serán superfluas en caso que las condiciones expresadas en ellas sean compatibles con las contenidas en las otras dos; pero si fueren incompatibles, será imposible la solucion del problema. Asi que, si de la traduccion algebráica de la propuesta de una cuestion resultasen estas tres ecuaciones:

$$2x+3y=22$$
$$3x+2y=23$$
$$4x+5y=40$$

una de ellas será superflua; porque en habiendo determinado por medio de cualesquiera dos de ellas los valores de las dos incógnitas, estos valores satisfacen á la tercera. Pero con solo variar cualquiera de los términos de una de ellas vendria á ser imposible la solucion del problema.

De la resolucion de tres ó mas ecuaciones que contengan igual número de incógnitas.

78 Cuando la propuesta de una cuestion contiene explícita ó implícitamente tantas condiciones distintas cuantas sean las cantidades incógnitas, cuyos valores nos propongamos averiguar, cada una de las condiciones se traduce, como ya hemos visto, á una ecuacion algebráica. La cuestion en tal caso se llama *determinada*, porque se pueden determinar con certeza los valores de las cantidades desconocidas; pero como en cada una de las ecuaciones pueden y suelen con frecuencia estar mezcladas muchas incógnitas, el primer paso que debemos dar para resolver tales ecuaciones es deducir de todas ellas una que no contenga mas de una incógnita. *Siempre que en ninguna de las cuestiones fundamentales haya mas potencia de las incógnitas que la primera, es fácil deducir de cualquiera de las ecuaciones una expresion del valor de cualquiera de las incógnitas, y sustituyendo esta expresion en todas las demas ecuaciones, las que de nuevo resulten tendrán ya una incógnita menos. Repitiendo en estas nuevas ecuaciones el mismo procedimiento, obtendremos al cabo una ecuacion, en la cual no habrá mas de una sola incógnita.*

Esta operacion, por medio de la cual hacemos, por decirlo asi, desaparecer de las ecuaciones una ó mas incógnitas, se llama *eliminacion*. Con su auxilio deducimos de tres ecuaciones que tienen tres incógnitas dos ecuaciones que contengan solo dos incógnitas: de las dos nuevas ecuaciones deducimos por último una que no contiene mas de una incógnita; y determinado el valor de esta, determinamos fácilmente los de todas las otras. Del mismo modo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas deducimos tres ecuaciones con una incógnita menos; de estas tres deducimos dos con otra incógnita menos; y últimamente de estas dos deducimos una con una sola incógnita; y determinado el valor de esta se determinan fácilmente los de todas las demas. Lo mismo puede decirse de cualquier otro número de ecuaciones que contengan igual número de incógnitas que se hallen todas en primera potencia.

Propongámonos ya una cuestion que nos conduzca á tres ecuaciones con tres incógnitas.

79 *Uno ha comprado el trigo, la cebada y el centeno que en tres viages han conducido unos arrieros. En el primer viage fueron 30 las fanegas de centeno, 20 las de cebada, y 10 las de trigo, é importaron todas 2300 reales. En el segundo fueron 15 las fanegas de centeno, 6 las de cebada, y 12 las de trigo; y á los mismos precios que las del primer viage importaron 1380 reales. En el tercer viage fueron 10 las fanegas de centeno, 5 las de cebada, y 4 las de trigo; y á los mismos precios que las anteriores importaron 750 reales.* Se pregunta: *¿á cómo costó cada fanega de centeno, cada fanega de cebada, y cada una de trigo?*

Representemos por x el número de reales, precio de cada fanega de centeno;

por y el de cada fanega de cebada;

por z el de cada fanega de trigo;

y de consiguiente el valor total de 30 fanegas de centeno será $30x$;

el de 20 fanegas de cebada será $20y$;

el de 10 fanegas de trigo será $10z$.

Y como la suma de estas tres cantidades deba ser, con arreglo á la primera condicion del problema, igual á 2300 reales, tendremos esta primera ecuacion:

$$30x+20y+10z=2300.$$

Asimismo el valor total
de 15 fanegas de centeno será $15x$;
de 6 fanegas de cebada será $6y$;
de 12 fanegas de trigo será $12z$;
y traduciendo al lenguage algebráico la segunda condicion, resultará estotra ecuacion:

$$15x+6y+12z=1380.$$

Por último el valor total
de 10 fanegas de centeno será $10x$;
de 5 fanegas de cebada será $5y$;
de 4 fanegas de trigo será $4z$;
y la traduccion algebráica de la tercera condicion del problema será esta ecuacion:

$$10x+5y+4z=750.$$

Tendremos pues fielmente traducida al lenguage algebráico la cuestion que se nos ha propuesto, en las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}30x+20y+10z&=2300\\15x+\ 6y+12z&=1380\\10x+\ 5y+\ 4z&=750.\end{aligned}$$

Antes de emprender la resolucion de estas ecuaciones veamos si son susceptibles de alguna simplificacion; examinemos si los dos miembros de alguna ó de algunas de ellas son divisibles por un mismo número (§. 12); y veremos que los de la primera son ambos exactamente divisibles por 10, y los de la segunda por 3. Efectuemos estas dos divisiones, y podremos sustituir en lugar de aquellas tres ecuaciones estotras:

$$3x + 2y + z = 230;$$
$$5x + 2y + 4z = 460;$$
$$10x + 5y + 4z = 750.$$

Estando á nuestro arbitrio elegir la ecuacion que mejor nos parezca para deducir de ella una expresion del valor de cualquiera de las incógnitas, deduzcamos de la primera ecuacion una expresion del valor de z; pues no teniendo esta incógnita coeficiente en aquella ecuacion, la expresion de su valor resultará sin divisor, y por tanto será mas fácil sustituirla en las demas ecuaciones. De la primera pues se deduce que

$$z = 230 - 3x - 2y;$$

y sustituyendo esta expresion en las otras dos, se trasformarán en estotras:

$$5x + 2y + 920 - 12x - 8y = 460;$$
$$10x + 5y + 920 - 12x - 8y = 750.$$

Reduciendo, trasponiendo y mudando los signos, tendremos:

$$7x + 6y = 460;$$
$$2x + 3y = 170.$$

Ya que hemos eliminado la z, y que las ecuaciones estan reducidas á dos con dos incógnitas, deduciremos de la primera la expresion que de ella resulta para el valor de y, la cual será:

$$y = \frac{460 - 7x}{6};$$

y sustituyéndola en la otra ecuacion se trasformará esta en la siguiente:

$$2x + 3 \times \frac{460 - 7x}{6} = 170;$$

la cual viene á ser esta:

$$2x + \frac{460 - 7x}{2} = 170.$$

Habiendo ya eliminado dos de las tres incógnitas y obtenido una ecuacion con una sola incógnita, nos será facil determinar el valor de esta por medio de las reglas establecidas (§§. 10 y sig.). En efecto, de la última ecuacion se deducen estotras:

$$4x+460-7x=340$$
$$4x-7x=340-460$$
$$7x-4x=460-340$$
$$3x=120$$
$$x=\tfrac{120}{3}=40.$$

Sustituyendo este valor de la x en la expresion que antes hemos hallado del de y, se trasformará esta en las que siguen:

$$y=\frac{460-7\times 40}{6}=\frac{460-280}{6}=\frac{180}{6}=30.$$

Finalmente, sustituyendo los valores que ya hemos determinado de x é y en la expresion que al principio hallamos del de z, se trasformará esta en estotra:

$$z=230-3\times 40-2\times 30=230-180=50.$$

Costó pues cada fanega de centeno 40 reales;
cada fanega de cebada 30 reales,
y cada fanega de trigo 50 reales.

Este ejemplo puede servir de modelo para resolver otras tres cualesquiera ecuaciones del primer grado con tres incógnitas; y por otra parte merecen tenerse presentes las abreviaciones y reducciones que en él hemos ejecutado, para otros muchísimos casos en que podremos efectuarlas.

80 Del mismo modo resolveremos el problema siguiente:

Se obligó uno á trasportar una partida de loza, en la cual habia piezas de tres distintos tamaños, con *la condicion de que por cada pieza que se quebrase pagaria tantos reales como hubiera cobrado por el porte si la hubiese entregado sana.*

Se le entregaron primeramente dos piezas pequeñas; cuatro medianas y nueve grandes: quebró todas las medianas; y despues de descontar del porte de las otras lo que debia pagar por las quebradas, percibió 56 reales.

Despues se le entregaron siete piezas pequeñas, tres medianas y cinco grandes; quebró todas las grandes; y por el porte de las otras, despues de hecho el descuento correspondiente, percibió solo 6 reales.

Por último se le entregaron nueve piezas pequeñas, diez medianas y once grandes; quebró todas estas once, y por este viage percibió 8 reales.

Se pregunta: *¿cuánto llevaba por el porte de cada una de las piezas?*

Representemos por x el número de reales, porte de cada pieza pequeña;

por y el de cada pieza mediana;

por z el de cada pieza grande.

Y puesto que la cantidad percibida por el conductor ha sido, con arreglo á la contrata, la diferencia entre lo que hubiera cobrado por las piezas que ha entregado sanas, y lo que debia pagar por las quebradas, las tres condiciones de la cuestion, traducidas al lenguage algebráico, se trasformarán en las ecuaciones siguientes:

$$2x - 4y + 9z = 56;$$
$$7x + 3y - 5z = 6;$$
$$9x + 10y - 11z = 8.$$

De la primera de estas ecuaciones se deduce que

$$x = \frac{56 + 4y - 9z}{2};$$

y sustituyendo esta expresion en las otras dos ecuaciones, se trasforman en estotras:

$$\frac{392+28y-63z}{2}+3y-5z=6;$$

$$\frac{504+36y-81z}{2}+10y-11z=8.$$

Multiplicando por 2 todos los términos de ambas ecuaciones, producirán estotras:

$$392+28y-63z+6y-10z=12;$$
$$504+36y-81z+20y-22z=16.$$

Reduciendo y trasponiendo términos, y mudando los signos, tendremos las siguientes:

$$73z-34y=380$$
$$103z-56y=488.$$

De la primera de estas se deduce que

$$y=\frac{73z-380}{34};$$

y sustituyendo esta expresion en la segunda, se trasformará en estotra:

$$103z-56\times\frac{73z-380}{34}=488.$$

Multiplicando por 34 los términos de esta, producirá la que sigue:

$$34\times103z-56\times73z+56\times380=34\times488.$$

Efectuando las multiplicaciones indicadas, resultará esta:

$$3502z-4088z+21280=16592;$$

de la cual se deducen estotras:

$$3502z-4088z=16592-21280$$
$$4088z-3502z=21280-16592$$
$$586z=4688$$

$$z=\frac{4688}{586}=8.$$

Sustituyendo ahora este valor ya conccido en la expresion que antes hallamos del de y, se trasformará esta en las siguientes:

$$y=\frac{584-380}{34}=\frac{204}{34}=6.$$

Ultimamente, sustituyendo los valores, que ya conocemos, de x é y en la expresion que al principio dedujimos del de x, tendremos estotra:

$$x=\frac{56+24-72}{2}=\frac{80-72}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

Se ajustó pues el porte de cada pieza pequeña en 4 reales;

el de cada pieza mediana en 6 reales;

y el de cada pieza grande en 8 reales.

Estos ejemplos pueden bastar para hacer ver lo que deberá practicarse en todos los demas casos.

81 Muchas veces sucede que no se hallan todas las incógnitas en todas las ecuaciones fundamentales de la cuestion; pero no por eso dejaremos de resolverlas por el mismo método. Es verdad que en tales casos no será tan arbitrario el deducir de cualquiera de las ecuaciones la expresion del valor de cualquiera de las incógnitas, sino que será necesario elegir una incógnita comun á dos ó mas ecuaciones para poder pasar de unas á otras.

Sean por ejemplo las cuatro ecuaciones

$$3u-2y=2$$
$$2x+3y=39$$
$$5x-7z=11$$
$$4y+3z=41$$

en las cuales se hallan, como se ve, las cuatto incógnitas u, x, y, z.

Examinando con alguna atencion estas ecuaciones, se ve fácilmente que deduciendo de la segunda una expresion del valor de x, y sustituyéndola en la tercera, resultará una nueva ecuacion que solo contendrá las incógnitas y, z. Por medio de esta nueva ecuacion y de la última de las propuestas se determinarán los valores de z y de y. Luego que esten conocidos estos valores se les sustituirá en las dos primeras ecuaciones, y se determinarán los de u y de x. Con arreglo á este plan de operaciones haremos el cálculo siguiente:

$$x=\frac{39-3y}{2};$$

$$5\times\frac{39-3y}{2}-7z=11;$$

$$195-15y-14z=22$$

Nueva ecuacion: $15y+14z=173;$

que combinada con: $4y+\ 3z=41;$

dará por resultado final

$$y=5;\ z=7.$$

Estando ya conocidos estos valores, será facil trasformar la expresion del valor de x en estotra:

$$x=\frac{39-15}{2}=\frac{24}{2}=12;$$

y la expresion del valor de u que se deduce de la primera ecuacion, á saber:

$$u=\frac{2+2y}{3}$$

se trasformará, por medio de la sustitucion, en estotra:

$$u=\frac{2+10}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

Son pues los cuatro números que se buscaban

4, 12, 5 y 7.

82 Aunque no hayamos aplicado el método expuesto para la eliminacion á otras ecuaciones que las numéricas, bien se deja conocer que se le podria igualmente aplicar á las literales; pero es necesario confesar que en pasando de dos las ecuaciones y las incógnitas, el gran número de letras que es menester emplear para representar de un modo general las cantidades que se suponen conocidas, hacen algo embarazoso el cálculo; y de ahi es que los algebristas, despues de presentar con la mayor sencillez que es posible las ecuaciones fundamentales, se han empeñado en descubrir, y efectivamente han descubierto, medios de deducir inmediatamente de ellas las fórmulas finales, sin necesidad de repetir toda la serie de operaciones que el método anteriormente expuesto prescribe. En el capítulo siguiente daremos alguna idea de lo que mas importa saber sobre esta materia; entre tanto concluiremos este reuniendo varias cuestiones, cuyas soluciones indicaremos, con el fin de que los principiantes se ejerciten en ponerlas en ecuacion y en resolverlas.

1.ª *Uno á quien se preguntó cuántos años tenia un hijo suyo, respondió: si del doble de su actual edad se quita el triple de la que tenia 6 años ha, resultará el número de años que en el dia tiene.*

Respuesta: *el hijo tiene ahora 9 años.*

2.ª *Diofanto, autor del libro mas antiguo que conocemos de Algebra, pasó en su niñez la sexta parte de toda su vida; una duodécima ó dozava parte en su adolescencia, y entonces se casó; despues de haber estado casado 5 años mas de la séptima parte de su vida, tuvo un hijo, el cual murió á la mitad de la edad que llegó á cumplir el padre; y 4 años despues de la muerte* *de aquel falleció este.* Se pregunta: *¿cuántos años tenia Diofanto al tiempo de su fallecimiento?*

Respuesta: *84 años.*

3.ª *Un comerciante separa al principio de cada año de los fondos que maneja, 3000 pesos para los gastos de su casa, y sin embargo, por haber logrado ganar en cada año la tercera parte del resto, con el cual ha negociado, ha duplicado al cabo de tres años el capital que al principio tenia.* Se pregunta: *¿cuánto era este capital primitivo?*

Respuesta: *44400 pesos.*

4.ª *Dispuso uno en su testamento que de su caudal se diesen al mayor de sus hijos 1000 pesos y la décima parte de todo lo restante; que al hijo segundo se diesen 2000 pesos y la décima parte de lo que restase; al tercero 3000 pesos y la décima parte de lo que hubiese quedado despues de hechas todas las anteriores deducciones; y que por el mismo orden se fuese distribuyendo la herencia entre todos los demas hijos. Cumplida que fue esta disposicion, se halló que todas las porciones eran iguales.* Se pregunta: *¿á cuántos pesos ascendia toda la herencia; cuántos eran los hijos; y cuánta la porcion que correspondió á cada uno?*

Respuesta: *la herencia total ascendia á 81000 pesos: los hijos eran 9; y á cada uno tocaron 9000 pesos.*

Observ. Es digno de notarse en esta cuestion el que sin embargo de ser tres las cantidades desconocidas, se la puede resolver con una sola ecuacion, porque representando cualquiera de las incógnitas por una letra, no es necesario emplear letras distintas para representar las otras dos, en vista de la mutua relacion que la propuesta establece entre ellas. Bien es verdad que si el número de los hijos fuese la incógnita que elijamos para designarla con una letra, la ecuacion, aunque facil de resolver, no será ya de primer grado. Esto dará alguna idea de la importancia de hacer en tales casos una eleccion acertada de la que determinemos mirar como principal incógnita.

5.ª *Un mercader tiene dos clases de té; la una de á 42 reales la libra, y la otra de á 54 reales la libra; y quiere saber cuántas libras deberá tomar de cada clase para componer 100 libras, cuyo valor total sea 5040 reales?*

Respuesta: *30 libras de la primera clase, y 70 de la segunda.*

Observ. Esta es una de las cuestiones que los aritméticos llaman de *aligacion simple.* Véase la nota puesta al fin del §. 201 de la Aritmética.

6.ª *Se ha llenado de agua en 12 minutos una vasija de 39 azumbres de cabida, habiéndola expuesto primeramente á un caño que arrojaba 3 azumbres de agua en cada minuto, y despues á otro que arrojaba 4 azumbres en cada minuto.* Se pregunta: *¿cuántos minutos estuvo expuesta á cada uno de los caños?*

Respuesta: *9 minutos al primero, y 3 al segundo.*

7.ª *Siendo en un relox las doce en punto, y estando por consiguiente el minutero sobre el índice de las horas,* se pregunta: *¿qué hora será cuando vuelvan á reunirse los dos índices?*

Respuesta: *la* 1^h *y* $5\frac{5}{11}$ *minutos.*

Observ. Este problema es análogo al del §. 65.

8.ª *Queriendo uno distribuir los cuartos que tenia entre varios pobres, vió que le faltaban 10 cuartos para dar á cada pobre 25; y que dando á cada uno*

20 cuartos, le sobraban 25. Se pregunta: *¿cuántos cuartos tenia, y cuántos eran los pobres?*

Respuesta: *los cuartos eran 165, y los pobres 7.*

9.ª Tres hermanos han tenido que asociarse para comprar una finca apreciada en 200000 reales; porque al primero le faltaba para poder comprarla por sí solo la mitad del dinero que el segundo tenia; á este le faltaba la tercera parte del dinero que tenia el primero; y al tercero la cuarta parte de la misma cantidad del primero. Se pregunta: *¿á cuántos reales ascendia el dinero de cada uno?*

Respuesta: *el primero tenia 120000 reales; el segundo 160000 reales; y el tercero 170000 reales.*

10.ª Se pusieron tres á jugar, y en la primera mano el primero y el segundo ganaron al tercero tantos reales como cada uno de aquellos dos habia sacado para jugar; en la segunda mano ganaron el primero y el tercero al segundo tantos reales como cada uno de aquellos dos tenia despues de la primera mano; en la tercera ganaron el segundo y el tercero al primero tantos reales como cada uno de los dos tenia despues de la segunda mano; y concluida la tercera, tenia cada uno de los tres 120 reales. Se pregunta: *¿con cuántos reales se puso á jugar cada uno?*

Respuesta: *el primero con 60 reales;*
el segundo con 105 reales;
y el tercero con 195 reales.

Fórmulas generales para la resolucion de las ecuaciones del primer grado.

83 Para precaver el inconveniente de que hemos hablado al principio del §. anterior han ideado en primer lugar los algebristas

el representar con una misma letra todos los coeficientes que una misma incógnita puede tener en las diferentes ecuaciones fundamentales de una misma cuestion; y para dar á entender que la misma letra representa distintas cantidades, marcan con un acento las que pertenecen á la segunda ecuacion; con dos acentos las de la tercera, con tres las de la cuarta; y asi de las demas.

Las dos ecuaciones generales, por ejemplo, que contienen dos incógnitas, se representan de este modo;

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

en las cuales los coeficientes de la incógnita x estan designados por la letra a; los de la y por b; la cantidad enteramente conocida por c; y para que no se crea que las cantidades representadas por estas letras en una ecuacion son precisamente iguales á las de la otra, tienen un acento la a, la b y la c de la segunda. Por manera que a' no representa la misma cantidad que a, sino otro coeficiente de la misma incógnita x; b' no designa la misma cantidad que b, sino otro coeficiente de la misma incógnita y.

Tres ecuaciones con tres incógnitas y pertenecientes á un mismo problema se representan generalmente de este modo:

$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$

en las cuales los coeficientes de la x estan representados por la letra a; los coeficientes de la y por b; los de la z por c; los términos enteramente conocidos por d; y los acentos puestos á estas letras nos indican que no son precisamente iguales las tres cantidades designadas por cada una de ellas. Asi que a, a', a'' son símbolos de cantidades distintas, y que solo tienen de comun el ser todas tres coeficientes de una misma incógnita x. Lo mismo puede decirse de las otras letras que representan cantidades conocidas.

Con arreglo al mismo sistema cuatro ecuaciones con otras tantas incógnitas, y pertenecientes á una misma cuestion, se representarán con la mayor sencillez y generalidad del modo siguiente:

$$ax+by+cz+du=e:$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e';$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e'';$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e''';$$

y por el mismo orden se podrán representar cualquier número de ecuaciones que contengan igual número de incógnitas, y pertenezcan á un mismo problema.

84 Deduzcamos ahora de estas ecuaciones generales las fórmulas ó últimas expresiones de los valores de las incógnitas, y para evitar en la eliminacion la sustitucion de expresiones faccionarias, hagamos que tenga un mismo coeficiente en todas las ecuaciones la incógnita que nos propongamos eliminar, observando para ello un método análogo al que hemos seguido para hacer que tuviese un mismo denominador muchos quebrados.

Comencemos por las dos ecuaciones generales:

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c';$$

de las cuales se eliminaria fácilmente la x, por ejemplo, si esta incógnita tuviera un mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pues en tal caso bastaria, para conseguirlo, restar una ecuacion de otra. Esto se puede hacer mas perceptible en las ecuaciones numéricas:

$$10x+11y=27$$
$$10x+9y=15;$$

de las cuales, restando de la primera la segunda, se deduce estotra:

$$11y-9y=27-15$$
$$\text{ó } 2y=12;\ \text{ó } y=6.$$

Para hacer pues uso de este mismo expediente en las ecuaciones generales, es necesario prepararlas de modo que tenga en ambas un mismo coeficiente la incógnita x que de ellas queremos eliminar; y para conseguir esta preparacion bastará multiplicar los dos miembros de la primera ecuacion por el coeficiente a' que la x tiene en la segunda, y los dos miembros de esta por el coeficiente a que la misma x tiene en la primera. De este modo se trasformarán las ecuaciones propuestas

$$ax+by=c;$$
$$a'x+b'y=c';$$

en estotras:
$$aa'x + a'by = a'c$$
$$aa'x + ab'y = ac'.$$

Restando ahora de la segunda la primera, resultará esta:
$$(ab' - a'b)\, y = ac' - a'c;$$
de la cual, no habiendo ya mas incógnita que la y, se deduce que
$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Si hubiésemos multiplicado los dos miembros de la primera ecuacion por el coeficiente b' que la incógnita y tiene en la segunda, y los dos miembros de esta por el coeficiente b que la misma incógnita tiene en la primera, la hubiéramos eliminado por medio de la sustraccion, y hubiéramos hallado que
$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

Este método de eliminar cualquiera incógnita es aplicable á cualquier número de ecuaciones del primer grado. Aplicándolo á las tres ecuaciones generales con tres incógnitas,
$$ax + by + cz = d;$$
$$a'x + b'y + c'z = d';$$
$$a''x + b''y + c''z = d'';$$
multiplicaremos, para eliminar la x, los dos miembros de la primera ecuacion por el producto $a'\,a''$ de los dos coeficientes que aquella incógnita tiene en las ecuaciones segunda y tercera; los dos miembros de la segunda por el producto aa'' de los coeficientes de la misma incógnita en la primera y la tercera; últimamente los dos miembros de la tercera por el producto aa' de los coeficientes que tiene en la primera y la segunda. Teniendo ya entonces la x un mismo coeficiente $aa'a''$ en todas tres ecuaciones, restaremos sucesivamente una de ellas de las otras dos; y los residuos serán dos ecuaciones, que solo contendrán la y y la z.

Del mismo modo eliminaremos de estas dos ecuaciones la y, y el resultado será una ecuacion que no contendrá mas incógnita que la z, y será facil deducir de ella la expresion final del valor de esta incógnita; pero es de advertir que esta expresion, que como bien se deja conocer, será fraccionaria, tendrá un factor comun á los dos términos de la fraccion, y de consiguiente no será la mas sencilla que pudiera haberse obtenido.

85 Debemos á *Bezout* un método muy sencillo para deducir inmediatamente de cualquier número de ecuaciones del primer grado que contengan igual número de incógnitas, una ecuacion que no tenga mas de una incógnita, y de la cual por consiguiente se hayan eliminado á un mismo tiempo todas las demas; y aunque las ventajas de este método no sean enteramente perceptibles sino cuando pasan de dos las ecuaciones, lo daremos á conocer comenzando por este número de ellas para hacer ver su generalidad.

Sean, pues, las dos ecuaciones:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

y multiplicando una de ellas, la primera, por una cantidad indeterminada m, se trasformará en esta:

$$amx + bmy = cm;$$

y restando de esta última la segunda de las propuestas, resultará:

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c';$$
$$\text{ó } (am - a')\,x + (bm - b')\,y = cm - c'.$$

Y puesto que siendo indeterminada la cantidad m está enteramente á nuestro arbitrio atribuirle el valor que mas nos acomode, podremos suponer que sea tal que $bm = b'$; en cuyo caso, haciéndose igual á *cero* el coeficiente que la y tiene en la última ecuacion, quedará eliminada esta incógnita, y permaneciendo la x sola se deducirá fácilmente que

$$x = \frac{cm - c'}{am - a'}.$$

Reflexionando ahora que el suponer $bm = b'$ equivale á hacer $m = \frac{b'}{b}$; si sustituimos en vez de m esta fraccion en la expresion que hemos hallado del valor de x, se trasformará en estotra:

$$x = \frac{c\frac{b'}{b} - c'}{a\frac{b'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Si en vez de suponer $bm=b'$ hubiésemos supuesto $am=a'$ se habria eliminado la x; y quedando la y sola hubiéramos deducido que

$$y=\frac{cm-c'}{bm-b'};$$

y como esta nueva suposicion equivalga á haber hecho $m=\frac{a'}{a}$, sustituyendo esta fraccion en la expresion que hemos hallado del valor de la y, resultará:

$$y=\frac{c\frac{a'}{a}-c'}{b\frac{a'}{a}-b'}=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}.$$

Si quisiéremos que la expresion del valor de y tenga el mismo denominador que la de x, mudaremos los signos del numerador y del denominador de aquella; lo cual nos es permitido hacer siempre que nos acomode, porque equivale á multiplicar por -1 los dos términos de la fraccion. Asi tendremos:

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

86 Propongámonos ahora las tres ecuaciones generales del primer grado

$$ax+by+cz=d;$$
$$a'x+b'y+c'z=d';$$
$$a''x+b''y+c''z=d'';$$

y ya la analogía nos conducirá á multiplicar dos cualesquiera de ellas, la primera y la segunda, respectivamente por dos cantidades indeterminadas m y n; á sumar las dos nuevas ecuaciones, y á restar de esta suma la tercera de las propuestas. En la expresion de este residuo entran todas tres ecuaciones, y de consiguiente todas las incógnitas; pero estando á nuestro arbitrio dar á las indeterminadas m y n los valores que nos acomoden, podrán estos ser tales que á un mismo tiempo desaparezcan de aquel resultado dos incógnitas. Efectuando las operaciones que acabamos de indicar, y reuniendo del modo que es posible en un solo término todos los que en la expresion del residuo pertenezcan á una misma incógnita, tendremos
$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z=dm+d'n-d''$

Si ahora queremos eliminar á un mismo tiempo la x y la y, supondremos, como nos es permitido:

$$am+a'n=a''$$
$$bm+b'n=b'';$$

y quedando entonces la z sola, se deducirá fácilmente que

$$z=\frac{dm+d'n-d''}{cm+c'n-c''}.$$

Solo falta sustituir en esta expresion los valores que correspondan á m y á n, los cuales se deben deducir de las dos ecuaciones que, usando de la absoluta facultad que teniamos, supusimos, á saber:

$$am+a'n=a'',$$
$$bm+b'n=b'';$$

las cuales vienen á ser dos ecuaciones con las dos incógnitas m y n. Si pues cotejamos estas dos ecuaciones con las generales que hemos resuelto en el párrafo anterior, resultará del cotejo que los símbolos de las incógnitas, que antes eran x é y, han venido á ser respectivamente m y n, y los símbolos de las cantidades conocidas que antes eran

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \end{matrix}\right\} \text{ han venido á ser } \left\{\begin{matrix} a, & a', & a'', \\ b, & b', & b''. \end{matrix}\right.$$

Con que sustituyendo en las fórmulas que antes hemos hallado los nuevos símbolos en lugar de los anteriores, resultarán estotras expresiones:

$$m=\frac{a''b'-b''a'}{ab'-ba'};$$
$$n=\frac{ab''-ba''}{ab'-ba'}.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la que poco antes hemos hallado del valor de z, se trasformará en la que sigue:

$$z=\frac{d(a''b'-b''a')+d'(ab''-ba'')-d''(ab'-ba')}{c(a''b'-b''a')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.$$

Del mismo modo podemos eliminar la x y la z, y dejar la y sola, suponiendo para determinar la m y la n estas dos ecuaciones:

$$am+a'n=a''; \qquad cm+c'n=c'';$$

y efectuando la misma serie de operaciones que antes, hallaremos que

$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')-d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')-b''(ac'-ca')}.$$

Ultimamente, para eliminar la y y la z, y dejar la x sola, supondremos:

$$bm+b'n=b''; \qquad cm+c'n=c'';$$

y efec.uando las mismas operaciones, resultará:

$$x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b\,c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

Ordenando los términos de las tres fórmulas que hemos hallado, de modo que sean alternativamente positivos y negativos, colocando los factores de cada término segun el orden de los acentos; y mudando los signos del numerador y denominador de las expresiones de la z y la x para que todas tres tengan un denominador comun, resultarán estas:

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''};$$

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

87 Sean las cuatro ecuaciones generales:

$$ax+by+cz+du=e$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e'$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e''$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e''';$$

y multiplicaremos la primera por m; la segunda por n; la tercera por p; sumaremos las tres que de nuevo resulten; y de la suma restaremos la cuarta. La expresion del residuo, ordenada como las de los anteriores, será la siguiente:

$$(am+a'n+a''p-a''')\,x+(bm+b'n+b''p-b''')\,y+\ldots\ldots$$
$$(cm+c'n+c''p-c''')\,z+(dm+d'n+d'p-d''')\,u=\ldots\ldots$$
$$em+e'n+e''p-e'''.$$

Para eliminar á un mismo tiempo las tres incógnitas x, y, z, y determinar el valor de la u, supondremos las tres ecuaciones que siguen:

$$am+a'n+a''p=a'''$$
$$bm+b'n+b''p=b'''$$
$$cm+c'n+c''p=c''';$$

y de este modo resultará:

$$u=\frac{em+e'n+e''p-e'''}{dm+d'n+d''p-d'''}.$$

De las tres ecuaciones supuestas se deducirán, con el auxilio de las fórmulas del §. anterior, los valores de m, n, p; y se les sustituirá en la expresion que acabamos de hallar del valor de u. Del mismo modo hallaremos las fórmulas respectivas á la z, á la y y á la x.

En vista de la generalidad, sencillez ó comodidad de este método, apenas habria cosa alguna que añadir á lo expuesto, si luego que se han hallado las primeras fórmulas, y que se ha observado el orden que todos sus términos guardan en su composicion, no se hubiese descubierto un medio aun mas sencillo para hallar cualquiera que necesitemos de ellas.

88 Con el fin de darlo mejor á conocer, comencemos por la ecuacion $$ax=b$$
de la cual se deduce $$x=\frac{b}{a};$$
en cuya expresion se ve que el numerador es el término enteramente conocido, y el denominador el coeficiente de la incógnita.

De las dos ecuaciones generales

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$

se han deducido las fórmulas igualmente generales

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'};\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

en las cuales se puede fácilmente observar que en el denominador no entran mas cantidades que los coeficientes de las incógnitas combinados de un modo tan sencillo, que basta invertir el orden de los factores del producto ab, anteponer el signo $-$ al producto ba que de aquella inversion resulta, y marcar con un acento la segunda letra ó factor de aquellos dos productos; y he ahí formado el denominador $ab'-ba'$.

Por lo que hace al numerador, es facil echar de ver que el respectivo á la x no se diferencia del denominador sino en que la c ocupa el lugar de la a; y el respectivo á la y no se diferencia del denominador sino en que la *c* ocupa el lugar de la *b;* por manera que asi en uno como en otro numerador ocupa la *c* el lugar que en el denominador comun corresponde al coeficiente de la incógnita, cuyo valor intentamos expresar. Del denominador comun $ab'—ba'$ se deduce pues el numerador $cb'—bc'$ para el valor de la x; y el numerador $ac'—ca'$ para el valor de la y. De consiguiente asi en el caso de dos incógnitas como en el de una sola *se deduce del denominador el numerador, poniendo el término enteramente conocido en lugar del coeficiente de la incógnita cuyo valor se busque, y conservando los acentos segun esten en el denominador.*

Basta dar una ojeada á las fórmulas que han resultado de las tres ecuaciones con tres incógnitas, para ver observada en todas ellas la misma regla; por manera que toda la dificultad queda reducida á formar el denominador. Para la formacion de este tendremos presente que en el caso de las dos incógnitas se hacian todas las permutaciones posibles con los coeficientes *a* y *b*; y esta observacion nos inducirá á pensar que cuando las incógnitas sean tres, el denominador se compondrá de todas las permutaciones posibles de los tres coeficientes *a*, *b*, *c*. Formemos pues estas permutaciones del modo siguiente:

Teniendo ya formadas las permutaciones $ab—ba$ de dos coeficientes, escribamos á continuacion de la primera ab el tercer coeficiente *c*, y asi tendremos la combinacion abc; y haciendo que la *c* ocupe sucesivamente todos los lugares en la combinacion, sin invertir el orden que en ella guardan los letras *a* y *b*; y mudando el signo á cada nueva permutacion que resulte tendremos:

$$abc—acb+cab.$$

Ejecutemos lo mismo con la segunda permutacion de las dos letras $—ba$, y resultarán estotras: $—bac+bca—cba$.

Reuniendo estos tres productos á los tres anteriores, y marcando con un acento la segunda letra de cada producto, y la tercera con dos, resultará:

$$ab'c''—ac'b''+ca'b''—ba'c''+bc'a''—cb'a'';$$

que es cabalmente el denominador comun de las fórmulas que hemos deducido de las tres ecuaciones generales con tres incógnitas.

Del mismo modo se formaria el denominador en el caso de haber cuatro ecuaciones con otras tantas incógnitas, introduciendo la letra d en cada uno de los seis productos

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

y haciendo que vaya sucesivamente ocupando todos los lugares, y alternando los signos. Por manera que el primer término abc deberá producir los cuatro siguientes:

$$abcd - abdc + adbc - dabc.$$

Ejecutando lo mismo con los otros cinco productos, y marcando la segunda letra con un acento, la tercera con dos, y la cuarta con tres, tendremos los 24 términos de que se compondrá el denominador; y de este se deducirán los cuatro numeradores por la regla establecida anteriormente.[1]

89 Para aplicar las fórmulas que hemos hallado á la resolucion de las ecuaciones numéricas, es necesario cotejar cualquiera que se nos proponga de estas, con las generales que hemos resuelto en los párrafos anteriores. Por medio de este cotejo vendremos en conocimiento del valor que en aquel caso particular corresponda á cada uno de los símbolos a, b, c &c.; y sustituyendo estos valores en las fórmulas, resultarán los de las incógnitas.

Si por ejemplo nos propusiésemos resolver las tres ecuaciones

$$7x + 5y + 2z = 79$$
$$8x + 7y + 9z = 122$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

las compararíamos con las generales (§. 86), y del cotejo resultaria que en este caso

$$a = 7;\ b = 5;\ c = 2;\ d = 79;$$
$$a' = 8;\ b' = 7;\ c' = 9;\ d' = 122;$$
$$a'' = 1;\ b'' = 4;\ c'' = 5;\ d'' = 55.$$

Sustituyendo estos números en las fórmulas ó expresiones generales de los valores de las tres incógnitas, y efectuando las operaciones que estan indicadas en ellas: hallaremos que

$$x = 4;\ y = 9;\ z = 3.$$

Conviene tener entendido que las mismas fórmulas pueden ser-

1 *Laplace* ha demostrado *à priori* estas reglas en la segunda parte de las Memorias de la Academia de Ciencias, año de 1772, pág. 294.

vir para determinar los valores de las incógnitas, aun cuando no todos los términos de las ecuaciones numéricas que se nos propongan tengan el signo $+$, como á primera vista puede parecer que lo exigen las ecuaciones generales, de donde se han deducido aquellas expresiones. Lo único que en faltando aquella condicion se requiere ademas, es tener muy presentes las reglas de los signos para determinar el que corresponda á cada uno de los términos que entren en la expresion del valor de cada incógnita; puesto que aplicamos unn fórmula calculada para ciertas y determinadas circunstancias á un caso en que ya estas no se verifican.

Si por ejemplo se nos propusiesen las ecuaciones

$$3x-9y+8z=41;$$
$$-5x+4y+2z=-20,$$
$$11x-7y-6z=37;$$

cotejándolas con las generales veriamos que

$$a=3;\ b=-9;\ c=8;\ d=41;$$
$$a'=-5;\ b'=4;\ c'=2;\ d'=-20;$$
$$a''=11;\ b''=-7;\ c''=-6;\ d''=37.$$

Ahora, al tiempo de hacer la sustitucion de estos valores veremos que siendo el primer término del denominador, por ejemplo, $ab'c''$ vendrá á ser en este caso $+3\times+4\times-6$; y de consiguiente el producto será -72. Efectuando lo mismo con todos los demas términos asi de los numeradores como del denominador, sumando por una parte todos los términos aditivos, y por otra todos los sustractivos; y últimamente restando la suma de los unos de la de los otros resultará:

$$x=\frac{2774-2834}{592-622}=\frac{2834-2774}{622-592}=\frac{60}{30}=2;$$
$$y=\frac{3022-2932}{592-622}=\frac{2932-3022}{622-592}=\frac{-90}{30}=-3;$$
$$z=\frac{3859-3889}{592-622}=\frac{3889-3859}{622-592}=\frac{30}{30}=1.$$

De las ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita.

90 En las ecuaciones que hasta aqui hemos resuelto no estaban las incógnitas multiplicadas unas por otras, ni elevadas á otra potencia mas alta que la primera; por cuya razon se las llama del *primer grado:* pero si nos propusiéramos *hallar un número que multiplicado por su quíntuplo produjese* 125, en representando el número incógnito por x, su quíntuplo seria $5x$, y tendriamos esta ecuacion:

$$5x^2=125;$$

la cual se llama del *segundo grado*, porque contiene la segunda potencia x^2 de la incógnita. Si dividiendo por 5 los dos miembros de la ecuacion despejamos aquella segunda potencia, resultará

$$x^2=25.$$

Para deducir ahora de esta ecuacion el valor de la incógnita son necesarios otros medios que los indicados (§. 11); pues tenemos que hallar un número que multiplicado, como dicen, por sí mismo produzca 25, y para esto no son suficientes aquellos medios. Es verdad que basta un poco de atencion para echar de ver que el número que buscamos es 5; pero como muy pocas veces se podrá descubrir con tanta facilidad el número que satisfaga á cada una de las innumerables ecuaciones de esta clase que pueden presentársenos, será muy conveniente prescribir un método general para dar solucion á esta nueva cuestion numérica: *hallar un número que multiplicado por sí mismo produzca otro número dado*, ó lo que viene á ser lo mismo, *retroceder de la segunda* *potencia al número que la ha producido*, y que se llama su *raiz cuadrada.* En habiendo resuelto esta cuestion general, tendremos un medio seguro para determinar los valores de las incógnitas en todas las ecuaciones de segundo grado.

91 El método que vamos á exponer para hallar, ó como se dice, para *extraer la raiz cuadrada* de cualquier número, supone que se tengan de antemano conocidos los cuadrados ó las segundas potencias de todos los números dígitos; por cuya razon creemos conveniente poner aqui la siguiente tabla:

Raices.......	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrados..	1	4	9	16	25	36	49	64	81

en la cual vemos que la segunda potencia de un número representado por una sola cifra no puede estar representada por mas de dos. Por otra parte sabemos que 10, es decir, el número mas pequeño de todos los que pueden representarse por una combinacion de dos cifras, tiene ya tres en su cuadrado 100; que el cuadrado de 20 es 400; el de 30 es 900; el de 40 es 1600; y generalmente que el cuadrado de cualquier número representado por una sola cifra significativa con uno ó mas ceros á su derecha tiene por decontado las mismas cifras significativas que si la de la raiz estuviese enteramente sola, y ademas un número de ceros doble del que la raiz tenga.

Cuando la raiz esté representada por dos ó mas cifras significativas, convendrá observar cuánto influye el valor de cada una de ellas en el de todo el cuadrado;

pues tratándose como se trata de la descomposicion de la segunda potencia, debe sernos sumamente útil averiguar cómo se la compone. Indaguemos pues con este objeto qué influjo tiene en la composicion cada una de las partes de un número representado por dos cifras significativas, y sea este por ejemplo, 47.

Las dos cifras con que está representado el número propuesto nos lo presentan como equivalente á un binomio $a+b$, cuya primera parte a es 4 *decenas*, y la segunda b es 7 *unidades*. Y habiendo demostrado en el ejemplo segundo del §. 34 que el cuadrado del binomio $a+b$ es $a^2+2ab+b^2$; inferiremos que el cuadrado del número propuesto, ó de otro cualquiera compuesto de decenas y unidades, contendrá las tres partes siguientes: primera, *el cuadrado de las decenas:* segunda, *dos veces el producto de las decenas por las unidades:* tercera, *el cuadrado de las unidades.*

Asi que en la composicion del cuadrado de 47 deberán entrar las tres siguientes partidas:

$$a^2 = 40 \times 40 = 1600$$
$$2ab = 80 \times 7 = 560$$
$$b^2 = 7 \times 7 = 49$$
$$\text{Total.....}\ a^2 + 2ab + b^2 = 2209.$$

Si ahora queremos retroceder del número 2209 á su raiz 47, observaremos en primer lugar que el cuadrado 1600 de las decenas no tiene cifra alguna significativa de un orden inferior al de las centenas, y que 16 centenas es el mayor cuadrado contenido en las 22 centenas del número 2209; puesto que 22 se halla entre 16 y 25, es decir, entre el cuadrado de 4 y el de 5, asi como 47 se halla entre 4 decenas ó 40 unidades, y 5 decenas ó 50 unidades.

Por consiguiente viendo que el mayor cuadrado contenido en las 22 *centenas* es 16 *centenas*, y que la raiz cuadrada de 16 *centenas* es 4 *decenas*, inferiremos que la raiz del número 2209 no puede tener mayor número de *decenas* que 4. Si despues quitamos del número propuesto el cuadrado 16 *centenas* ó 1600 *unidades*, el residuo 609 deberá contener el doble producto de las decenas por la unidades, y el cuadrado de las unidades de la raiz. Y como la primera de estas dos últimas partidas no contenga unidades de orden inferior al de las decenas, es claro que deberá hallarse en el número 60 representado por las primeras cifras del residuo 609; bien que en aquellas 60 *decenas* estarán tambien las procedentes del cuadrado de las unidades absolutas de la raiz. Si, pues, dividimos aquellas 60 *decenas* por 8 *decenas*, doble de las 4 que antes hemos hallado, el cuociente 7 será el número de las unidades absolutas de la raiz; porque multiplicando por 7 las 8 *decenàs*, y restando del número 609 las 56 *decenas* ó 560 *unidades*, quedan de residuo 49, que justamente es el cuadrado de las 7 unidades.

Despues de haber expuesto los principios en que se funda esta operacion, la efectuaremos del modo siguiente:

```
Cuadrado........ 22,09 | 47...... Raiz cuadrada.
                 16    |-------------------------
           ------------| 87
                 60,9
                 60 9
           ------------
                 00 0
```

Se escribe el número propuesto como si tratásemos de dividirlo por otro, destinando á su raiz el lugar que deberia ocupar el divisor. En seguida se separan con una coma las dos cifras de unidades y decenas para considerar solamente el número representado por las dos primeras cifras de la izquierda, que debe contener el cuadrado de las decenas de la raiz. Se busca el mayor cuadrado 16 contenido en aquel número; se pone la raiz 4 en el lugar que le está destinado; y se resta su cuadrado 16 de 22. Al lado del residuo 6 se bajan las otras dos cifras 09 del número propuesto; se separa la última, porque no pertenece al doble producto de las decenas por las unidades; se divide la parte restante á la izquierda por 8, duplo de las decenas de la raiz; y asi resultan por cuociente 7 unidades. Para formar ahora á un mismo tiempo las dos últimas partes del cuadrado que deben hallarse en 609, se escribe 7 á la derecha de 8, por cuyo medio resulta el número 87, igual al duplo de las decenas mas las unidades, y representado generalmente por $2a+b$, el cual multiplicado por 7 ó por b reproduce $609=2ab+b^2$, ó el duplo de las decenas multiplicadas por las unidades, mas el cuadrado de las unidades. Efectuando la sustraccion no queda residuo alguno; y asi venimos en conocimiento de que se ha finalizado la operacion, y de que 47 es la raiz cuadrada de 2209.

Si nos propusiéramos ahora extraer la raiz cuadrada de 324, dispondríamos la operacion de este modo:

Cuadrado........	3,24	18..... Raiz cuadrada.
	1	28
	22,4	
	224	
	000	

é imitando cuanto hemos practicado en el ejemplo anterior hallariamos que 1 es la cifra de las decenas, ó la primera parte de la raiz. Siendo el cuadrado de 1 decena 1 centena, restaremos esta de las 3 que hay en el número propuesto, y á la derecha del residuo 2 centenas pondremos las 24 unidades, con lo cual tendremos el número 224. Dividiremos por el duplo 2 de la 1 decena que hemos hallado, el número 22 representado por las dos primeras cifras de 224. Ahora bien, 22 contiene al 2 once veces; y la segunda parte que buscamos de la raiz no solo no puede llegar á 10, sino que en este caso debe ser menor que 9, porque escribiendo 9 á la derecha de 2, y multiplicando 29 por 9 como prescribe la regla, hallariamos por resultado 261, que no se puede restar de 224. No debemos pues mirar la division del 22 por 2 sino solamente como un medio aproximativo de hallar las unidades; y será preciso disminuir el cuociente hallado hasta que resulte un producto que no exceda al 224; condicion que se verifica en el número 8, puesto que 8 multiplicado por 28 es igual á 224. Haciendo pues la sustraccion no queda residuo alguno; y esto nos indica que la raiz que buscamos es 18.

Formando las tres partes del cuadrado de 18 hallaremos:

$$\begin{aligned} a^2 &= 100 \\ 2ab &= 160 \\ b^2 &= \ \ 64 \\ \hline \text{Total.......}\ &324 = 18 \times 18; \end{aligned}$$

por cuyo medio vemos que las 6 decenas que contiene el cuadrado de las unidades, reunidas á las 16 del doble producto de las decenas por las unidades, alteran este producto en términos que la division de las 22 decenas por el duplo de la decena de la raiz, no puede ya dar exactamente las unidades de esta.

92 En vista de lo que hemos practicado en los ejemplos anteriores no puede ya ofrecer dificultad alguna la extraccion de la raiz cuadrada de un número representado por tres ó cuatro cifras; mas para poner al lector en estado de extraer la raiz de un número representado por cuantas cifras se quieran, son todavía necesarios ciertos pormenores que fácilmente se deducen de los principios establecidos.

Mientras no llegue á 100 un número, su cuadrado no podrá estar representado por mas de cuatro cifras, puesto que el cuadrado de 100 es 10000, que es el número menor de cuantos se pueden representar por una combinacion de cinco cifras; pero todo número que pase de 100 y no llegue á 1000, habrá de tener en su cuadrado mas de cuatro y menos de siete cifras. Esto supuesto, para examinar la formacion del cuadrado de un número mayor que 100 y menor que 1000, de 473 por ejemplo, se podrá descomponer este número en $470+3$ ó en 47 decenas mas 3 unidades; y para deducir su cuadrado de la fórmula

$$a^2+2ab+b^2,$$

haremos $a=47$ decenas$=470$ unidades; $b=3$ unidades; y asi tendremos:

$$\begin{aligned} a^2 &= 220900 \\ 2ab &= 2820 \\ b^2 &= 9 \end{aligned}$$

$$\text{Total.......}\ 223729=473\times473;$$

en cuyo ejemplo se ve que el cuadrado de las 47 decenas no tiene cifras significativas de un orden inferior á las centenas como debe ser en general; puesto que decenas multiplicadas por decenas producen siempre centenas.

Debemos pues buscar el cuadrado de las decenas en la parte 2237 que queda á la izquierda del número propuesto despues de haber separado las decenas y las unidades; y como 473 está entre 47 decenas ó 470 y 48 decenas ó 480, es consiguiente que 2237 sea mayor que el cuadrado de 47 y menor que el de 48. De donde se sigue que el mayor cuadrado contenido en 2237 será el de 47 ó el de las decenas de la raiz. Para hallar el mayor cuadrado contenido en 2237 procederemos como si intentásemos extraer la raiz cuadrada de aquel número; pero deberemos tener entendido que en vez de llegar á un resultado exacto, quedará un residuo, que contendrá las centenas procedentes del doble producto de las 47 decenas multiplicadas por las unidades.

Para efectuar el cálculo se dispone la operacion del modo siguiente:

Cuadrado........	22,37,29	473....... Raiz.
	16	87
	63,7	943
	60 9	
	282,9	
	282,9	
	0	

Se separan primeramente las dos últimas cifras 29; y para extraer la raiz del número 2237 que queda á la izquierda, se separan del mismo modo las dos últimas cifras 37 de este número; y de esta manera se halla dividida la combinacion de cifras del número propuesto en porciones ó secciones de á dos cifras empezando por la derecha. Se ejecutan con las dos primeras secciones de la izquierda las mismas operaciones que se han hecho en el ejemplo anterior con el número 2209; por cuyo medio obtendremos las dos primeras cifras 47 de la raiz; bien que resulta un residuo 28, el cual combinado con la última seccion 29 nos presentará el número 2829 que debe contener al doble producto de las 47 decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades. Separemos la cifra 9 que no forma parte del doble producto de las decenas por las unidades, y dividamos 282 por 94, duplo de las 47 decenas; escribamos el cuociente 3 inmediatamente á la derecha de 94; multipliquemos 943 por 3; restemos del 2829 el producto; y puesto que no resulta residuo alguno, estará concluida la operacion.

93 Para manifestar las operaciones que se han de ejecutar con otro número cualquiera, nos propondremos extraer la raiz de 22391824. Sea cual fuere esta raiz, la podremos considerar como compuesta de decenas y de unidades, lo mismo que en los ejemplos antecedentes; y como el cuadrado de las demas no debe contener ninguna cifra significativa de orden inferior á las centenas, no podrán entrar en él las dos últimas cifras 24. Separémoslas pues, y vendrá á parar la cuestion en buscar el mayor cuadrado contenido en la parte 223918 que queda á la izquierda. En atencion á que esta parte se compone de mas de dos cifras, es necesario concluir que el número que exprese las decenas de la raiz que se busca, se ha de representar por mas de una cifra; y por consiguiente se le puede mirar tambien como compuesto de decenas y unidades. Al cuadrado de

estas segundas decenas no pueden pertenecer las dos últimas cifras 18 de la parte 223918, sino solo las restantes 2239, que quedan á la izquierda; y puesto que el número 2239 está representado por cuatro cifras, la raiz del mayor cuadrado contenido en él, se representará por dos cifras; tendrá pues decenas y unidades; y no debiendo pertenecer al cuadrado de estas últimas decenas las dos cifras 39 de la derecha, será necesario buscar en el 22 el cuadrado del número de unidades de orden superior que puede haber en la raiz pedida. Por esta serie de raciocinios, que se puede continuar al infinito, resultará dividida la combinacion de cifras del número propuesto en secciones de á dos cifras de derecha á izquierda; bien que podrá muy bien suceder y frecuentemente sucede, que en la última seccion de la izquierda quede tan solo una cifra.

Dividida asi la combinacion de cifras del número propuesto en secciones; y dispuesto como aqui lo presentamos, se hacen con las tres primeras secciones las mismas operaciones que hemos ejecutado en el ejemplo del párrafo anterior; y cuando se han hallado las tres primeras cifras 473, se baja la cuarta seccion 24 á la derecha del residuo 189; se considera el número 18924 como que contiene al doble producto de las 473 decenas por las unidades que buscamos, y al cuadrado de estas unidades, se separa la última cifra 4, que no pertenece á aquel doble producto; se divide el número 1892 que

22,39,18,24	4732
16	
63,9	87
60 9	943
301,8	9462
282 9	
1892,4	
1892 4	
0000 0	

queda á la izquierda por 946, duplo de 473; y se hace en seguida la comprobacion del cuociente 2 del mismo modo que en las operaciones precedentes.

Con esto hemos terminado la operacion; pero se ve claramente que si hubiese aun otra seccion, las cuatro cifras halladas 4732 representarian el número de las decenas de una raiz cuyas unidades tendriamos aun que buscar; y por consiguiente seria necesario dividir el residuo que nos quedase, combinado con la primera cifra de la seccion siguiente, por el duplo de aquellas decenas. Del mismo modo continuariamos la operacion si aun quedasen otras nuevas secciones de cifras que poder bajar.

94 Es necesario advertir que si despues de haber bajado alguna seccion, el residuo precedente, combinado con la primera cifra de ella no contuviese al duplo del número representado por las cifras que hasta entonces hayamos hallado de la raiz, deberemos poner á continuacion de estas un *cero*, porque en este caso la raiz no tendrá unidades de este orden; y bajaremos en seguida la seccion siguiente para continuar la operacion como de ordinario. El siguiente ejemplo presenta ya ejecutado lo que acabamos de prescribir; bien entendido que en él hemos efectuado las sustracciones sin escribir los sustraendos, é imitando lo que hemos practicado en la division. (*Aritm.* §. 47.)

49,42,09	703
04,20,9	1403
0 00 0	

95 La tabla que hemos puesto (§. 90) de los cuadrados de los números dígitos nos hace venir en conocimiento de que existen muchos números comprendidos entre dos cuadrados inmediatos, y que de consiguiente no tienen raiz exacta: 45, por ejemplo, no es

un cuadrado, puesto que se halla entre 36 y 49. No serán, pues, cuadrados perfectos, ó lo que es lo mismo, no tendrán raiz cuadrada exacta todos los números que se nos propongan, antes por el contrario las mas veces sucederá que el número cuya raiz se nos pida no la tendrá; pero efectuando con él las mismas operaciones que si las tuviese, el resultado será la raiz del mayor cuadrado que en él esté contenido. Si se busca, por ejemplo, la raiz de 2276, se hallará 47, quedando de residuo 67; lo cual manifiesta que el mayor cuadrado contenido en 2276 es el de 47 ó 2209.

En estos casos en que despues de haber hallado la raiz del que creamos el mayor cuadrado contenido en un número, quede algun residuo final, podrá ocurrir la duda de si habremos puesto en la raiz alguna parte menor de lo que debiera ser. Para salir de esta duda, y ver al mismo tiempo si el residuo final podrá desvanecerse, ó por lo menos disminuirse, tengamos presente que siendo el cuadrado de $a+b$

$$a^2+2ab+b^2,$$

si hacemos $b=1$, el cuadrado de $a+1$ será

$$a^2+2a+1.$$

Esta expresion, traducida nos viene á decir que si dos números cualesquiera representados por a y $a+1$ se diferencian en una sola unidad, el cuadrado del mayor contendrá el cuadrado del menor, mas el doble de este, mas la unidad. De consiguiente, para que debamos añadir una unidad á la raiz que hayamos hallado, es indispensable que el residuo que haya resultado contenga por lo menos el doble de la raiz hallada, y ademas una unidad. Siempre que no se verifique esta circunstancia, la raiz hallada será efectivamente la del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

96 Supuesto que para multiplicar una fraccion por otra es necesario multiplicar los numeradores entre sí, y los denominadores tambien entre sí, es evidente que el producto de una fraccion multiplicada por sí misma, ó *el cuadrado de una fraccion es igual al cuadrado de su numerador dividido por el cuadrado de su denominador*. De aqui se sigue que *para extraer la raiz cuadrada de una fraccion es necesario extraer la de su numerador y la de su denominador*. Asi que, la raiz de $\frac{25}{64}$ es $\frac{5}{8}$, porque 5 es la raiz cuadrada de 25, y 8 la de 64.

Conviene observar que cualquier potencia de un quebrado propio no solo es otro quebrado propio, sino que tambien este quebrado debe ser tanto menor que su raiz, cuanto mas elevado sea el grado de la potencia. Tambien es muy importante notar que no solamente los cuadrados de las fracciones propias son siempre fracciones, sino que tambien todo quebrado impropio que no sea exactamente reducible á entero, multiplicado por sí mismo dará siempre un resultado fraccionario igualmente irreducible. Lo cual equivale á decir que *el cuadrado de cualquier número mixto debe necesariamente ser otro número mixto, y jamas puede ser un número puramente entero*.

97 Esta proposicion está fundada en esta otra: *Todo número primo* P *que sea divisor exacto del producto* AB *de dos números enteros cualesquiera* A y B, *ha de ser necesariamente divisor exacto de alguno de los dos factores, cuando no lo sea de entrambos*.

Supongamos que sea B mayor que P sin ser exactamente divisible por P; representemos por Q el número entero que en tal caso formará parte del cuociente $\frac{B}{P}$; y designemos por B' el residuo final de la division; con lo cual vendrá á ser:

$$B=PQ+B' \text{ (Aritm. §. 78)},$$

de donde deduciremos: $AB=APQ+AB'$;

y dividiendo los dos miembros de esta ecuacion por P, tendremos esta otra:

$$\frac{AB}{P}=AQ+\frac{AB'}{P};$$

la cual hace ver que siendo, como se supone, exactamente divisible por P el producto AB, y no siéndolo el factor B, debe necesariamente serlo el producto AB'. Pero siendo B' el residuo de la division de B por P, es necesariamente menor que P: y asi no podrá dividirse B' por P.

Ya que por esta razon no es posible dividir á B' por P, supongamos efectuada la division de P por B'; representemos por Q' al número entero que deberá resultar en el cuociente de esta division, y por B'' al residuo. Supongamos asimismo efectuada la division del mismo número P por el residuo B''; representemos al entero del cuociente por Q'', y al residuo por B'''. Continuemos dividiendo siempre el mismo número P por el residuo que haya resultado en la division inmediata anterior; y sabiendo, como sabemos, por una parte que P es un número *primo*, y por otra que los residuos han de ir disminuyendo mas y mas hasta llegar á uno que sea igual á la unidad y de consiguiente divisor exacto de P; si suponemos que este último residuo sea B^{IV}, tendremos esta serie de ecuaciones:

$$P=Q'B'+B''; \; P=Q''B''+B'''; \; P=Q'''B'''+B^{IV}=Q'''B'''+1.$$

Multiplicando los miembros de estas ecuaciones por A, resultarán estotras:

$$AP=Q'AB'+AB''; \; AP=Q''AB''+AB'''; \; AP=Q'''AB'''+A.$$

Dividiendo por P los miembros de estas ecuaciones, resultarán estotras:

$$A=Q'\frac{AB'}{P}+\frac{AB''}{P}; \; A=Q''\frac{AB''}{P}+\frac{AB'''}{P}; \; A=Q'''\frac{AB'''}{P}+\frac{A}{P}.$$

Ahora bien, ya hemos hecho ver que para ser P divisor exacto de AB sin serlo de B, era absolutamente necesario que lo fuese del producto AB'; y de consiguiente podemos mirar como demostrado que $\frac{AB'}{P}$ representa un número entero. No podrá, pues, verificarse la primera de las tres últimas ecuaciones sin que $\frac{AB''}{P}$ sea un número entero; y siéndolo, no podrá verificarse la segunda ecuacion sin que sea número entero el cuociente $\frac{AB'''}{P}$; y entonces no podrá verificarse la última ecuacion sin que A sea exactamente divisible por P.

Es, pues, visto que todo número primo que sea divisor exacto de otro número compuesto, ha de ser indispensablemente divisor exacto de alguno, por lo menos, de los factores de este; y por la inversa, si un número primo no fuere divisor exacto de ninguno de los factores de un producto, de ningun modo podrá serlo del mismo producto.[1]

98 Ahora bien, cuando la fraccion $\frac{b}{a}$ es irreducible, no hay número *primo* alguno que pueda dividir exactamente sus dos términos b y a; y como por lo que acabamos de demostrar todo número *primo* que no sea divisor exacto de a, tampoco puede serlo del producto aa ó a^2; y todo número *primo* que no sea divisor exacto de b, tampoco puede serlo de $b \times b$ ó b^2: es consiguiente que la fraccion $\frac{b^2}{a^2}$ sea tan irreducible como $\frac{b}{a}$.

99 De esta última proposicion se deduce fácilmente que como la raiz exacta de un número entero no sea otro número entero, tampoco podrá ser número mixto, ó lo que es equivalente, no hay número alguno que multiplicado por sí mismo dé por producto alguno de los números enteros comprendidos entre dos cuadrados inmediatos. Sin embargo, sea cual fuere el número que se nos proponga, nos podemos imaginar que ha resultado de la multiplicacion de alguna otra cantidad por

1 De este principio dimos ya alguna idea en la Aritmética (§. 117). La demostracion que de él acabamos de dar es sustancialmente la misma que *Legendre* ha dado en su *Teoría de los números*.

sí misma; y aunque en muchas ocasiones nos será imposible determinarla exactamente, podremos á lo menos aproximarnos á ella cuanto queramos.

Supongamos por ejemplo que se nos haya propuesto el número 2276, cuya raiz cuadrada está comprendida entre 47 y 48, porque 47×47 da un producto menor que aquel número, y 48×48 lo da mayor. Si pues suponemos dividido por medio de quebrados el intervalo que se halla entre 47 y 48, podremos hallar cuantos números queramos que multiplicados por sí mismos den productos mayores que el cuadrado de 47 y menores que el de 48, y que por consiguiente se vayan aproximando mas y mas al número 2276; bien que jamas hallaremos uno que multiplicado por sí mismo dé por producto 2276.

Asi como la division da origen á los quebrados, la extraccion de la raiz cuadrada de los números que no son cuadrados perfectos da origen á otra nueva especie de cantidades; pero entre las fracciones y las raices de los números que no son cuadrados perfectos hay la diferencia de que las fracciones se componen siempre de un número exacto de partes de la unidad, y de consiguiente toda fraccion y la unidad tienen alguna *medida comun*, ó la misma razon que dos números enteros; lo cual no puede tener lugar en las raices de los números que no son cuadrados perfectos.

Si suponemos que cada unidad esté dividida en 5 partes iguales, por ejemplo, 9 de estas partes vendrán á ser el cuociente de la division de 9 por 5 ó $\frac{9}{5}$; y puesto que $\frac{1}{5}$ está contenido 5 veces en la unidad y 9 veces en $\frac{9}{5}$, la medida comun de la unidad y de la fraccion $\frac{9}{5}$ será $\frac{1}{5}$, y la razon de la unidad al quebrado $\frac{5}{9}$ será la de los números enteros 5 y 9.

En vista de que no solamente los números enteros, sino tambien las fracciones tienen con la unidad una medida comun, se dice que estas cantidades son *comensurables* con la unidad, ó simplemente *comensurables*; y por cuanto las razones de estas cantidades á la unidad se pueden expresar por otras de números enteros, asi estos como las fracciones se designan tambien con el nombre comun de *cantidades racionales*.

Por el contrario la raiz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es *incomensurable* ó *irracional*, porque no pudiendo estar representada exactamente por ninguna fraccion, es claro que, sea cual fuere el número de partes en que se suponga dividida la unidad, jamas las habrá tan pequeñas que una de ellas pueda ser medida comun exacta de la raiz y de la unidad; ni por consiguiente será posible designar dos números que tengan entre sí la misma razon que la raiz incomensurable y la unidad.

Para indicar en general que se ha de extraer una raiz, y representar el resultado final de esta operacion, ora sea una cantidad comensurable, ora incomensurable, hacemos uso del signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*. Asi que

$\sqrt{16}$ es lo mismo que 4; y de consiguiente es una cantidad *comensurable*;

$\sqrt{2}$ es *incomensurable* ó *irracional*.

100 Aunque en realidad no es posible obtener una expresion exacta de $\sqrt{2}$ en números enteros ni en mixtos, podemos sin embargo aproximarnos cuanto quera-

mos á su verdadero valor, convirtiendo el número que está debajo del radical en una fraccion cuyo denominador sea un cuadrado; y tomando el número entero que mas se aproxime á la raiz cuadrada del numerador, tendremos el de otro quebrado, cuyo denominador será la raiz cuadrada del anterior denominador; y este nuevo quebrado será próximamente la raiz del número propuesto.

Convirtiendo, por ejemplo, el número 2 en *veinticincavos*, tendremos la expresion fraccionaria equivalente $\frac{50}{25}$, y puesto que 7 es el número entero que mas se aproxima á $\sqrt{50}$; y 5 es exactamente $\sqrt{25}$, el quebrado impropio $\frac{7}{5}$, ó el número mixto $1\frac{2}{5}$, será la raiz de 2 tan aproximada que no le falta ni $\frac{1}{5}$ de la unidad para ser exacta.

101 Esta operacion está fundada en lo que hemos dicho en el §. 96, á saber, que el cuadrado de cualquier fraccion es otra nueva fraccion, cuyo numerador es el cuadrado del numerador primitivo, y cuyo denominador es el cuadrado del denominador primitivo; y siendo este principio generalmente aplicable á toda especie de fracciones, se le podrá aplicar á las decimales con mas facilidad que á las demas. Por decontado, de este principio se sigue que el cuadrado de cualquier número de *décimas* ha de ser un número de *centésimas*; que el cuadrado de cualquier número de *centésimas* debe ser otro número de *diezmilésimas*, y asi sucesivamente. Por manera que en los cuadrados de las fracciones decimales el número de cifras es siempre doble del de la raiz. Esto mismo puede deducirse tambien de la regla establecida para la multiplicacion de las canti-

dades decimales; pues en ella se nos prescribe que el producto haya de tener tantas cifras decimales como tienen ambos factores. Si pues consideramos al cuadrado como producto que es de su raiz multiplicada por sí misma, es claro que en el cuadrado debe haber dos veces tantas cifras decimales como haya en la raiz.

De lo dicho es facil inferir que si nos propusiéremos obtener la raiz cuadrada de 227, por ejemplo, tan aproximada que no le falte ni una centésima, deberemos convertir aquel número en el equivalente de *diezmilésimas* multiplicándolo por 10000, ó lo que es lo mismo, poniendo cuatro ceros á su derecha, lo cual nos dará 2270000 *diezmilésimas*. Ahora extraeremos la raiz de este último número considerándolo como si fuese de unidades enteras; y para indicar que el resultado debe ser de *centésimas*, separaremos con una coma las dos últimas cifras de la derecha. De este modo hallaremos que la raiz de 227, con diferencia de menos de una centésima, es 15,06 segun puede verse en la operacion siguiente:

Cuadrado...... 2,27,00,00	15,06...... Raiz.
12,7	25
2000,0	3006
1994	

Si el número propuesto tuviere de antemano cifras decimales, será necesario hacer que el número de estas sea par; pues segun hemos demostrado, para cada cifra decimal de la raiz debe haber dos en el cuadrado. Por ejemplo, para extraer la raiz de 51,7 pondremos desde luego un cero á la derecha de este número para que tenga por lo menos centésimas; y extrayendo la raiz de

51,70 resultará próximamente 7,1. Si quisiéremos que esta raiz tenga mas decimales, ó lo que es lo mismo, resulte mas aproximada, pondremos á la derecha del número 51,70 tantos pares de ceros como nuevas cifras haya de tener la raiz.

Los que deseen ejercitarse en estas operaciones podrán extraer las raices cuadradas de los números 2 y 3 con siete cifras decimales, para lo cual tendrán que poner catorce ceros á la derecha de aquellas cifras significativas, y hallarán los resultados siguientes:

$$\sqrt{2}=1,4142136;\ \sqrt{3}=1,7320508.$$

102 Cuando hayamos hallado mas de la mitad del número de cifras que se desea en la raiz, podemos obtener las restantes por medio de la simple division. Si, por ejemplo, nos proponemos extraer la raiz cuadrada de 32976, aproximada hasta las centésimas, hallaremos primeramente por la regla general el número entero 181 que mas se le aproxima; y ya que estan determinadas tres de las cinco cifras que ha de tener la raiz, hallaremos las dos cifras decimales que faltan, considerando al residuo 215 como si fuese el de una division ordinaria, en la cual 362, doble de la raiz hallada, fuera el divisor. Pondremos pues dos ceros á la derecha del residuo; y dividiendo 21500 por 362, resultarán por cuociente 59 centésimas, que agregadas á las 181 unidades darán 181,59, y esta será la raiz del número propuesto aproximada hasta las centésimas.

Para demostrar la legitimidad de este procedimiento designaremos por N el número propuesto; por a la parte que suponemos hallada de la raiz; por b la parte que falta para completarla; y estando representada por el binomio $a+b$ la raiz exacta del número propuesto N, tendremos esta ecuacion:

$$N=a^2+2ab+b^2;$$

de la cual se deducen estotras:

$$N-a^2=2ab+b^2;$$

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Esta última nos hace ver que en habiendo restado del número propuesto el cuadrado de la parte que suponemos hallada de la raiz, si dividimos por el doble de esta parte el residuo, el cuociente será siempre mayor que la otra parte b. Sin embargo, pueden ser tales las cantidades a y b, que sea despreciable la fraccion $\frac{b^2}{2a}$; y entonces la última ecuacion quedará reducida á

$$b=\frac{N-a^2}{2a}.$$

Por decontado en nuestro caso a representa un número de unidades de orden mas elevado que las de b; y tales que para reducir aquellas al mismo orden que estas, como es necesario para comparar dos cantidades, deberemos poner á la derecha de las cifras de a tantos ceros como cifras haya en b. Si pues suponemos que a tenga primitivamente mas cifras que b, en reduciendo estas cantidades á unidades de un mismo orden, vendrá la primera á tener mas de dos veces tantas cifras como tenga la segunda: y como el número de cifras de un cuadrado no pueda ser mas del doble de las que haya en la raiz, es claro que a y con mas razon $2a$ tendrá mas cifras que b^2, y por tanto $\frac{b^2}{2a}$ será un quebrado propio de la unidad de ínfimo orden que haya en b.

Esto supuesto, cuando nos hemos propuesto aproximar hasta las *centésimas* la raiz de un número, y hemos hallado en primer lugar la parte $a=181$ unidades, vimos que para llegar al grado propuesto de aproximacion nos faltaba un número que se habia de representar con dos cifras. Supongamos que este número de centésimas sea 99, que es el mayor de su clase, y de consiguiente el menos favorable para nuestro intento. La parte a reducida á centésimas será 18100; $2a=36200$; y $\frac{b^2}{2a}$ seria en tal caso $\frac{99\times 99}{36200}$ $=\frac{9801}{36200}$ de una centésima. Es decir que aun en el caso menos favorable el error que puede resultar de este medio de abreviacion es menos de un tercio de una centésima; será pues menor en todas las demas circunstancias mas favorables. Asi que, se podrá sin rezelo tomar el cuociente $\frac{N-a^2}{2a}$ por equivalente á b siempre que el número de cifras del cuociente sea menor que el de las que haya en a.

103 Las mismas reflexiones que hemos hecho sobre la ecuacion $\frac{N-a^2}{2a}-=b+\frac{b^2}{2a}$, y que nos han conducido á la fórmula de aproximacion

$$b=\frac{N-a^2}{2a},$$

nos hacen ver un método de aproximar por medio de las fracciones ordinarias cualquiera raiz incomensurable. En efecto, despues de haber hallado el número entero a que mas se aproxime á la raiz exacta del número propuesto, la parte b que falta, debe ser un quebrado propio; $\frac{b^2}{2a}$ será otro quebrado mucho menor que b; de consiguiente será despreciable, y podrá mirarse como exacta la fórmula

$$b=\frac{N-a^2}{2a}.$$

A fin de manifestar cómo pueda esta fórmula servirnos para aproximar cuanto queramos la raiz repitiendo una misma operacion, propongámonos extraer la raiz cuadrada de 2. Desde luego vemos que 1 es el entero que mas se aproxima á esta raiz: y que $\frac{N-a^2}{2a}=\frac{1}{2}$. Si pues suponemos que sea $b=\frac{1}{2}$, la raiz aproximada del número propuesto será $1\frac{1}{2}$ ó $\frac{3}{2}$. Haciendo ahora $a=\frac{3}{2}$, será $\frac{N-a^2}{2a}=-\frac{1}{12}$; y suponiendo que sea $b=-\frac{1}{12}$, la raiz mas aproximada será $\frac{3}{2}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$. Haciendo de nuevo $a=\frac{17}{12}$, será $\frac{N-a^2}{2a}=-\frac{1}{408}$: y suponiendo que sea $b=-\frac{1}{408}$; la raiz aun mas aproximada será $\frac{17}{12}-\frac{1}{408}=$

$\frac{577}{408}$. Del mismo modo podrá continuar sin término de la aproximacion, designando por a la raiz que se haya acabado de hallar, y suponiendo que sea $b = \frac{N - a^2}{2a}$ *.

104 Para aproximar la raiz cuadrada de una fraccion cuyos términos no sean cuadrados perfectos, el primer medio que se nos presenta es extraer aproximadamente la raiz del numerador y la del denominador; pero reflexionando un poco, echaremos de ver que puede en todos casos ser exacta una de estas dos raices haciendo que uno de los términos de la fraccion, por ejemplo el denominador, sea un cuadrado perfecto: lo cual se consigue multiplicando los dos términos de la fraccion propuesta por su denominador. Si tuviéremos, por ejemplo, que extraer la raiz cuadrada de $\frac{3}{7}$, trasformaremos esta fraccion en

$$\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{21}{49}$$

multiplicando sus dos términos por el denominador 7; y siendo 4 el número entero que mas se aproxima á la raiz de 21, será $\frac{4}{7}$ la raiz de $\frac{3}{7}$, aproximada de modo que para ser exacta no le faltan ni $\frac{1}{7}$.

Si deseáremos mayor aproximacion, será necesario convertir, por lo menos aproximadamente, la fraccion

* En el complemento de este tratado daremos otras fórmulas generales mas cómodas para aproximar cuanto se quiera las raices incomensurables de cualquier grado que sean.

propuesta $\frac{3}{7}$ en otra cuyo denominador sea el cuadrado de un número mayor que 7.

Si queremos, por ejemplo, que la raiz se diferencie de la verdadera en menos de $\frac{1}{15}$, trasformaremos $\frac{3}{7}$ en el número equivalente de *doscientosveinticincavos*, es decir, en otro quebrado cuyo denominador sea el cuadrado de 15. De este modo tendremos (*Aritm.* §. 116, pág. 193 *en la nota*) el quebrado $\frac{96}{225}$, que se diferencia de $\frac{3}{7}$ en menos de $\frac{1}{225}$; y puesto que la raiz de $\frac{96}{225}$ se halla entre $\frac{9}{15}$ y $\frac{10}{15}$, aproximándose mas á esta segunda fraccion que á la primera por estar 96 mas cerca de 100 que de 81, es consiguiente que $\frac{10}{15}$ ó $\frac{2}{3}$ sea la raiz de $\frac{3}{7}$ con diferencia de menos de $\frac{1}{15}$.

Haciendo uso de las decimales para aproximar la raiz del numerador de la fraccion $\frac{21}{49}$, hallaremos que la raiz de 21 es próximamente 4,583; y de consiguiente la raiz de $\frac{21}{49}$ ó de su equivalente $\frac{3}{7}$ será $\frac{4,583}{7}$; y efectuando la division indicada resultará 0,655; raiz aproximada hasta las milésimas. Para que en esta última division sea siempre número entero el divisor, se hace que sea cuadrado perfecto el denominador del quebrado, cuya raiz intentemos extraer; y para esto no siempre es necesario multiplicar ambos términos por el denominador. Si, por ejemplo, hubiésemos de extraer la raiz de $\frac{7}{8}$; multiplicando por 2 sus términos, tendremos la fraccion equivalente $\frac{14}{16}$, cuyo denominador es cuadrado.

Con el mismo objeto de hallar aproximadamente la raiz de un quebrado ordinario cuyos términos no sean cuadrados perfectos, se le suele reducir previamente á decimal; y se extrae la raiz de este nuevo quebrado equivalente al propuesto. En caso que este no sea exactamente reducible á decimal, se toma en la reduccion un número de cifras doble del que nos propongamos hallar en la raiz. Proponiéndonos, por ejemplo, aproximar hasta las milésimas la raiz de $\frac{3}{7}$, convertiremos esta fraccion en la decimal equivalente 0,428571; y extrayendo la raiz de esta última fraccion hallaremos que la raiz de $\frac{3}{7}$ está entre 0,654 y 0,655.

105 Con estos conocimientos nos hallamos ya en estado de resolver todas las ecuaciones, en las cuales no entre mas que la segunda potencia de la incógnita combinada con cantidades conocidas.

En efecto, si conforme á las reglas del §. 11 *reunimos en un solo miembro todos los términos que lleven esta potencia, y la despejamos de sus multiplicadores y divisores, tendremos el valor de la incógnita extrayendo la raiz cuadrada del otro miembro.*

Ser, por ejemplo la ecuacion

$$\frac{5}{7}x^2-8=4-\frac{2}{3}x^2.$$

Haciendo desaparecer los divisores hallamos desde luego:

$$15x^2-168=84-14x^2;$$

trasladando al primer miembro el término $14x^2$ y al segundo el término 168, resultará:

$$15x^2+14x^2=84+168,$$

$$29x^2=252,$$

$$x^2=\frac{252}{29},$$

$$x=\sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Conviene advertir que para indicar la raiz de la fraccion $\frac{252}{29}$ hemos hecho descender el signo $\sqrt{}$ hasta por bajo de la línea que separa al numerador del denominador. Si hubiésemos escrito $\frac{\sqrt{252}}{29}$, esta expresion nos indicaria el cuociente que da la raiz cuadrada del número 252 cuando se la divide por 29, resultado diferente del primero, en el cual debe efectuarse la division antes de extraer la raiz, ó habrá que extraer dos raices y dividir la una por la otra.

Sea ademas la ecuacion literal

$$ax^2+b^3=cx^2+d^3;$$

y operando del mismo modo que en la anterior, tendremos sucesivamente

$$ax^2-cx^2=d^3-b^3,$$

$$x^2=\frac{d^3-b^3}{a-c}$$

$$x=\sqrt{\frac{d^3-b^3}{a-c}}.$$

Haremos observar con esta ocasion que cuando se haya de indicar la raiz cuadrada de una cantidad complexa, es necesario prolongar la línea superior del signo radical, de modo que quede debajo de ella toda la cantidad.

La raiz de la cantidad $4a^2 b-2b^3+c^3$ se escribirá

así: $$\sqrt{4a^2 b-2b^3+c^3};$$

ó de este otro modo:

$$\sqrt{}(4a^2b-2b^3+c^3);$$

sustituyendo á la línea superior del radical un paréntesis que comprenda todas las partes de la cantidad cuya raiz se ha de extraer; y esta última expresion debe preferirse á la primera (§. 35).

En general á toda ecuacion de segundo grado de la especie de las que aqui consideramos, se le podrá dar por medio de la trasposicion de sus términos la forma siguiente:

$$\frac{px^2}{q}=a,$$

designando por $\frac{p}{q}$ el coeficiente de x^2, sea el que fuere; y de esta última ecuacion deduciremos:

$$x^2=\frac{aq}{p};$$

$$x=\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

106 Pudiéramos ya mirar como resuelta la ecuacion general propuesta, una vez que la fórmula que hemos deducido de ella nos manifiesta una serie de operaciones aritméticas que ya sabemos efectuar, y que efectuadas nos han de conducir seguramente á la determinacion exacta ó aproximada del número desconocido. Y á la verdad, nada habria que añadir á lo dicho si jamas se hubiesen mirado como símbolos de verdaderas cantidades las expresiones algebráicas realmente absurdas, designadas comunmente con el nombre de *cantidades negativas*. Pero luego que se sometieron al cálculo aquellos símbolos como si representasen una cierta especie de cantidades, era consiguiente que todo número que se nos propusiese como un cuadrado hubiese de tener no una sola sino dos raices; porque se pueden en todos casos designar, no dos cantidades, sino dos símbolos que sometidos á la misma operacion algebráica den por resultado el que representa al número propuesto.

En efecto, la ecuacion $x^2=25$ nos indica que x es la cantidad que elevada al cuadrado ó multiplicada por sí misma produce 25; y como algebráicamente hablando no solo $+5$ multiplicado por $+5$, sino tambien -5 multiplicado por -5 produce 25, es consiguiente que de la ecuacion propuesta se deduzcan estas dos:

$$x=+5;$$
$$x=-5.$$

Por la misma razon deduciremos de la ecuacion general.

$$x^2=\frac{aq}{p}$$

estas otras dos:

$$x=+\sqrt{\frac{aq}{p}};$$
$$x=-\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Estas dos expresiones se suelen reunir en la siguiente:

$$x=\pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

en la cual el signo doble $\pm$, que se lee *mas ó menos*, indica que al valor númerico representado por

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}$$

se le puede anteponer cualquiera de los dos signos $+$ ó $-$; y que tanto con el uno como con el otro satisface á la ecuacion algebráica propuesta.

De lo dicho resulta la regla general de que *se debe anteponer á la raiz cuadrada de cualquiera cantidad el signo doble* $\pm$.

Habiendo la misma razon para aplicar esta regla al primer miembro que al segundo, se podria con fundamento decir que de la ecuacion $x^2=25$, por ejemplo, no solo se deduce $x=\pm5$, sino tambien $\pm x=\pm5$, en la cual estan comprendidas no dos, sino las cuatro ecuaciones siguientes:

$$+x=+5;+x=-5;-x=+5;-x=-5.$$

Pero observando que con solo mudar, como siempre nos es permitido, los signos de los dos miembros de las dos últimas ecuaciones resultan las dos primeras, se echa de ver que aquellas no se distinguen realmente de estas, y que de consiguiente de la ecuacion propuesta se deduce solo $x=\pm 5$, en la cual estan comprendidas estas otras realmente distintas:

$$x=5;x=-5.$$

Por esta razon se dice que toda ecuacion de segundo grado nos da dos distintos valores de la incógnita en vez de que ninguna ecuacion del primer grado puede darnos mas de un solo valor de la misma incógnita.

107 Si despues de haber despejado la segunda potencia de la incógnita, y haber ejecutado todas las reducciones que sean posibles en las expresiones de las cantidades, resultare con el signo $-$, ó como dicen, fuere negativo el segundo miembro de la ecuacion, será imposible asignar, ni aun entre los meros símbolos algebráicos llamados *cantidades negativas*, uno que represente el valor de la incónita; y por tanto será enteramente absurda la ecuacion.

Si, por ejemplo, tuviésemos esta:

$$x^2+25=9;$$

y de ella dedujésemos

$$x^2=9-25;$$

$$x^2=-16;$$

variamos que ni $+4$ ni -4 pueden ser el valor de la incógnita, porque tanto $+4$ como -4 multiplicado

Doblones.	*Pesos.*	*Reales.*	*Maravedis.*
984	3	12	28
38	1	6	16
1413	2	14	30
319	0	10	22
2756	0	14	28

Estan escritos, como se ve, los números propuestos, de modo que se hallan en la primera coluna todos los que se refieren al doblon como unidad; en la segunda los que se refieren al peso; en la tercera los que se refieren al real; y en la última los que se refieren al maravedí; y con el cuidado de que las cifras que representan unidades absolutas, decenas, centenas &c. en cada uno de estos números esten colocadas unas debajo de otras con arreglo á lo prescrito (§. 15). Comenzando en seguida la adicion por la derecha, hemos sumado todos los maravedís, y en la suma han resultado 96: y como cada 34 maravedís equivalen á un real, dividiendo los 96 por 34, hemos visto que la primera suma parcial equivale á 2 reales y 28 maravedís. Hemos escrito solo estos 28 en la coluna de los maravedís, y hemos reservado los 2 reales para agregarlos á los que aparecen en la coluna inmediata. El resultado de la adicion de los números de esta segunda coluna es 42 reales, los cuales con la agregacion de los dos que con este objeto se han reservado de la suma parcial anterior, vienen á ser 42 reales. Teniendo ahora presente que cada 15 reales equivalen á un peso, hemos dividido los 44 por 15, y asi hemos visto que la segunda suma parcial equivale á 2 pesos y 14 reales. Hemos escrito solo estos 14 en la segunda coluna, y reservado los 2 pesos para agregarlos á los que desde luego existen en la tercera. La suma de estos es 6 pesos, que con la agregacion de los dos que se reservaron de la suma de los reales, vendrán á ser 8 pesos: y equivaliendo cada 4 pesos á un doblon, los 8 equivaldrán á dos doblones, los cuales se han reservado para agregarlos á los doblones que aparecen en la última coluna, escribiendo un cero en la anterior para indicar que no hay peso alguno que agregar á los doblones. Hemos sumado por último los que aparecen en la última coluna, agregándoles los dos que se han reservado para ello de la suma de los pesos; y asi ha resultado que la suma total es el número complejo 2756 doblones 14 reales y 28 maravedis.

Si á los números que se refieren á la unidad menor acompañasen quebrados, serán estos los primeros que deban sumarse, practicando para ello cuanto hemos prescrito (§. 98).

134 Lo que hemos practicado en el ejemplo anterior, aunque solo sea un caso particular, puede darnos á conocer que toda adicion de números complejos puede ejecutarse con arreglo á los mismos principios, y que todo se reduce á sumar separadamente números que se refieren á distintas y desiguales unidades, comenzando por los que se refieren á la unidad menor, y transportando á la coluna siguiente las unidades inmediatamente mayores que esten contenidas en la suma parcial que se acabe de determinar. De modo que si los números propuestos hubiesen sido de varas, pies y pulgadas, habríamos sumado primeramente las pulgadas; y si esta primera suma parcial hubiese sido menor que 12, se la habria escrito en la misma coluna de las pulgadas; mas siendo igual ó mayor

sitivo el término en que se halla el cuadrado de la incógnita, y resultará:

$$\tfrac{3}{5}x^2-6x=-4;$$

multiplicando todos los términos por el divisor 5, tendremos:

$$3x^2-30x=-20;$$

y últimamente diviéndolos por el multiplicador 3, se trasformará en

$$x^2-10x=-\tfrac{20}{3}.$$

Si comparamos esta ecuacion con la general

$$x^2+px=q$$

tendremos en este caso particular

$$p=-10;\ \text{y}\ q=-\tfrac{20}{3}.$$

109 Despues que esten reducidas á esta forma las ecuaciones para resolverlas deberemos tener presente que (§. 34) el cuadrado de una cantidad compuesta de dos términos contiene en todos casos el cuadrado del primer término, el duplo del primer término multiplicado por el segundo, y el cuadrado del segundo; y que por consiguiente el primer miembro de la ecuacion

$$x^2+2ax+a^2=b$$

en la cual a y b son cantidades conocidas, es el cuadrado perfecto de $x+a$. Se la podrá pues dar esta forma:

$$(x+a)(x+a)=b.$$

Extrayendo ahora la raiz cuadrada del primer miembro, é indicando la misma operacion en el segundo tendremos:

$$x+a=\pm\sqrt{b};$$

cuya ecuacion es solo de primer grado; y trasponiendo da:

$$x=-a\pm\sqrt{b}.$$

Se resolveria pues con facilidad cualquiera ecuacion de segundo grado si se la diese la forma de

$$x^2+2ax+a^2=b;$$

es decir, si su primer miembro fuese un cuadrado.

Ahora bien, el primer miembro de la ecuacion general $x^2+px=q$, contiene ya dos términos, que se pueden considerar como dos de las tres partes del cuadrado de un binomio; esto es, x^2, que será el cuadrado del primer término x; y px, que será el duplo del primero multiplicando por el segundo, el cual por consiguiente no puede ser mas de la mitad de p ó $\frac{1}{2}p$. Para completar el cuadrado del binomio $x+\frac{1}{2}p$, se necesita todavía el cuadrado del segundo término $\frac{1}{2}p$; pero es fácil formar este cuadrado puesto que p y $\frac{1}{2}p$ son cantidades conocidas. Si pues añadimos el cuadrado $\frac{1}{4}p^2$ al primer miembro; añadiéndolo igualmente al segundo para conservar la igualdad, conseguiremos que el primer miembro sea el cuadrado completo del binomio $x+\frac{1}{2}p$, sin que deje de ser enteramente conocido el segundo miembro.

De este modo la ecuacion general primitiva

$$x^2+px=q,$$

se trasformará en

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=q+\tfrac{1}{4}p^2;$$

y siendo el primer miembro de esta última el cuadrado de $x+\frac{1}{2}p$; si extraemos la raiz de ambos miembros tendremos:

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};\ (\S.\ 105);$$

y trasponiendo resulta:

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

en la cual estan comprendidas estas dos:

$$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

$$x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}.$$

Si al tiempo de extraer la raiz hemos dado el signo + al segnndo término $\frac{1}{2}p$ del binomio cuyo cuadrado se hallaba en el primer miembro de la ecuacion, ha sido porque era positiva el segundo término de este miembro; pero en caso que sea negativo, se deberá poner el signo − á la segunda parte del binomio, porque el cuadrado $x^2-2ax+a^2$ corresponde al binomio $x-a$.

Teniendo ya resuelta la ecuacion general completa del segundo grado, podemos mirar como igualmente resueltas todas las particulares del mismo grado, refiriendo cada una de estas á la general

$$x^2+px=q;$$

ó efectuando inmediatamente en cada ecuacion que se nos proponga, la misma serie de operaciones que acabamos de ejecutar, y que se prescriben en la regla siguiente:

Hágase un cuadrado perfecto el primer miembro de la ecuacion propuesta, añadiendo á los dos miembros el cuadrado de la mitad de la cantidad conocida que multiplique á la primera potencia de la incógnita; extráigase despues la raiz cuadrada de cada miembro, observando que la del primero ha de componerse de la incógnita y de la mitad de la cantidad conocida que la multiplique en el segundo término, tomada con el signo de este mismo término; y que la raiz del segundo miembro debe estar con el signo doble $\pm$*, é indicada con el signo* $\sqrt{}$*, si no* *se la puede extraer inmediatamente. Por último, despéjese la incógnita trasponiendo al segundo miembro la parte conocida que la acompañe en el primero.*

Propongámonos ya algunos ejemplos.

110 *Hallar un número tal que en añadiendo su séptulo á su cuadrado la suma sea 44.*

Representando por x al número desconocido, la ecuacion fundamental vendrá á ser:

$$x^2+7x=44;$$

la cual tiene desde luego la forma que debe, para que inmediatamente le apliquemos la regla que acabamos de establecer. Tomaremos pues $\frac{7}{2}$, mitad del coeficiente 7 que multiplica á x, y elevando aquella mitad al cuadrado resultarán $\frac{49}{4}$ que añadidos á los dos miembros, trasformarán la ecuacion propuesta en la siguiente:

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4};$$

la cual, reduciendo el segundo miembro á una sola fraccion, vendrá á ser estotra:

$$x^2+7x+\frac{49}{4}=\frac{225}{4}.$$

La raiz del primer miembro es, segun la regla anterior, $x+\frac{7}{2}$; y la del segundo es $\frac{15}{2}$. Tendremos pues la ecuacion:

$$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2};$$

de la cual se deduce por último:

$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2},$$

equivalente á estas dos:

$$x=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=\frac{8}{2}=4;$$

$$x=-\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{22}{2}=-11.$$

El primer valor de x resuelve la cuestion segun está propuesta y sin necesidad de hacer alteracion alguna en sus condiciones; puesto que si $x=4$, será

$$x^2=16;$$
$$7x=28;$$

y la suma $x^2+7x=44$.

Por lo que respecta al segundo, estando precedido del signo $-$, y convirtiéndose $7x$ en

$$7\times-11=-77,$$

es claro que en tal caso el séptuplo deberá restarse del cuadrado del número, y que de consiguiente para que el número 11 satisfaga á la cuestion es indispensable modificar su propuesta de modo que venga á ser esta:

Hallar un número tal, que en quitando de su cuadrado su séptuplo, resulten 44.

Asi que el valor negativo viene á ser aquí, lo mismo que en las ecuaciones del primer grado, un indicio de cierta modificacion, que debe hacerse en la propuesta del problema para que satisfaga completamente á todas sus condiciones la misma cantidad sin el signo $-$. Por manera que aunque toda ecuacion del segundo grado tenga dos soluciones, no por eso tendrá siempre dos soluciones el problema que nos haya conducido á la ecuacion.

Si tradujésemos al lenguage algebráico la cuestion que hemos propuesto últimamente, tendriamos esta ecuacion:

$$x^2-7x=44;$$

y resolviéndola resultaria:

$$x^2-7x+\tfrac{40}{4}=44+\tfrac{40}{4};$$
$$x^2-7x+\tfrac{40}{4}=\tfrac{225}{4};$$
$$x-\tfrac{7}{2}=\pm\tfrac{15}{2};$$
$$x=\tfrac{7}{2}\pm\tfrac{15}{2};$$
$$x=\tfrac{7}{2}+\tfrac{15}{2}=\tfrac{22}{2}=11;$$
$$x=\tfrac{2}{7}-\tfrac{15}{2}=-\tfrac{8}{2}=-4.$$

En esta solucion es facil advertir que el valor que en la anterior era negativo se ha convertido en positivo, porque satisface exactamente á la nueva propuesta; y por el contrario el valor que antes era positivo, resulta aqui negativo, porque es necesario alterar una de las condiciones de la nueva cuestion para que 4 sea el número que buscábamos.

Suele pues el Algebra reunir en cada ecuacion de segundo grado dos distintas cuestiones, cuyas propuestas tienen entre sí cierta analogía.

111 Algunas veces sucede que la cuestion que nos conduce á una ecuacion de segundo grado es susceptible de dos distintas soluciones, sin necesidad de alterar ninguna de las condiciones de la propuesta. Esto es lo que por lo comun nos indica el que sean positivos los dos valores de la incógnita; segun puede verse en la cuestion siguiente:

Hallar un número tal, que si á su cuadrado se añaden 15, la suma sea igual al óctuplo del mismo número desconocido.

Sea x este número; y la ecuacion fundamental será:

$$x^2+15=8x.$$

Ejecutando en esta ecuacion las operaciones prescritas (§. 108) tendremos:

$$x^2-8x=-15;$$
$$x^2-8x+16=-15+16;$$
$$x^2-8x+16=1;$$
$$x-4=\pm 1;$$
$$x=4\pm 1;$$
$$x=5;$$
$$x=3.$$

Siendo, como se ve, positivos ó sin nota alguna de absurdos los dos valores de la incógnita, es de inferir que la cuestion, segun está propuesta y sin necesidad de modificacion alguna, podrá ser susceptible de dos soluciones. Y en efecto, si al cuadrado de 5 se le añaden 15, resultan 40, que es 8 veces 5; y si al cuadrado de 3 le añadimos 15, resultan 24, óctuplo de 3. Se verifican pues en dos distintos números las condiciones que comprende la propuesta del problema.

112 Otras veces resultan negativos los dos valores; y esta circunstancia nos indica que no es posible resolver la cuestion propuesta, sin alterar de tal modo sus condiciones que venga á mudar de signo el término en que se halle la primera potencia de la incógnita. Supongamos, por ejemplo, que la cuestion traducida al lenguage algebráico esté cifrada en esta ecuacion:

$$x^2+5x+6=2;$$

la cual nos está indicando que *buscamos un número cuyo cuadrado sumado con el quíntuplo del mismo número y con seis unidades mas, dé por suma el número dos*; y aunque lo absurdo de esta cuestion se deja conocer á primera vista, es importante averiguar cómo nos lo manifiesta el Algebra, porque nos indicará al mismo tiempo la modificacion que debe hacerse en la propuesta para que desaparezca enteramente la incompatibilidad que ahora se advierte entre sus condiciones. En efecto, resolviendo la ecuacion propuesta hallaremos sucesivamente:

$$x^2+5x=-4;$$
$$x^2+5x+\tfrac{25}{4}=\tfrac{25}{4}-4=\tfrac{9}{4};$$
$$x+\tfrac{5}{2}=\pm\tfrac{3}{2};$$
$$x=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}=-1;$$
$$x=-\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}=-4.$$

El signo $-$ que antecede á los dos números 1 y 4 se puede mirar no solo como una nota del absurdo que envuelve la cuestion segun esta propuesta, sino tambien como un indicio de que si en vez de sumar el quíntuplo del número desconocido con su cuadrado y con 6, se hubiese de restar aquel quíntuplo de la suma de las otras dos cantidades, satisfarian completamente á la cuestion los dos números 1 y 4. Por manera que para que desparezca la incompatibilidad que habia entre las condiciones de la cuestion, es indispensable proponerla de esta otra manera:

Hallar un número tal que si de su cuadrado se resta su quíntuplo, y al residuo se le añade el número 6, resulte el número 2.

Esta propuesta, traducida al lenguage algebráico, se trasforma en la siguiente ecuacion:

$$x^2-5x+6=2;$$

de la cual se deduce que cualquiera de los dos números 1 y 4 tiene las condiciones que abraza la nueva cuestion.

113 Supongamos que se nos haya propuesto el siguiente problema:

Distribuir un número p *en dos partes cuyo producto sea igual á* q.

Indicando por x una de estas partes, estará bien representada la otra por $p-x$; y su producto será $px-x^2$; tendremos pues la ecuacion

$$px-x^2=q;$$

ó mudando los signos,

$$x^2-px=-q;$$

y resolviendo esta última ecuacion hallaremos:

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

Si particularizando la cuestion hiciésemos

$$p = 10 \text{ y } q = 21,$$

tendriamos:

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21};$$

$$x = 5 \pm 2;$$

$$x = 7;$$

$$x = 3.$$

Es decir que una de las partes seria 7, y la otra seria por consiguiente $10 - 7$ ó 3.

Si, por el contrario, tomásemos 3 por valor de x la otra parte seria $10 - 3$ ó 7; de manera que las dos soluciones de la cuestion no vienen á ser mas de una sola de la cuestion segun esta propuesta; porque la segunda no es mas que una variacion en el orden de las mismas partes que se han determinado en la primera.

La fórmula que hemos deducido de la ecuacion $px - x^2 = q$ manifiesta que en la cuestion de que se trata no se pueden tomar indistintamente los números p y q, porque si q fuere mayor que $\frac{p^2}{4}$ ó que el cuadrado de $\tfrac{1}{2}p$, el residuo representado por el binomio $\frac{p^2}{4} - q$ seria negativo, y vendriamos á dar con el indicio de absurdo, de que hemos hablado (§. 107).

Si hiciésemos, por ejemplo,

$$p = 12 \text{ y } q = 45,$$

resultaria:

$$12x - x^2 = 45;$$

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 45} = 6 \pm \sqrt{-9};$$

luego con estos datos seria imposible el problema.

Sin embargo, asi como los valores negativos de la incógnita nos manifiestan no solo la imposibilidad de resolver el problema, sino tambien el modo de rectificar su propuesta; los valores imaginarios pueden servirnos de indicios de que para ser posible la solucion, debia la propuesta ser tal que resultase cambiado el signo del término en que se halle el cuadrado de la incógnita. En efecto, si en vez de la ecuacion

$$12x-x^2=45,$$

á la cual nos ha conducido el problema particular propuesto, hubiese resultado cualquiera de estas:

$$x^2+12x=45;$$
$$x^2-12x=45;$$

hubiéramos obtenido las siguientes expresiones de los valores de la incógnita:

$$x=-6\pm\sqrt{81}=-6\pm9;$$
$$x=6\pm\sqrt{81}=6\pm9;$$

en las cuales han desaparecido enteramente los símbolos absurdos que resultaron de la ecuacion propuesta, y que nos dieron á conocer la imposibilidad de resolver el problema que nos condujo á ella.

Las expresiones particulares

$$\sqrt{-9};\ 6+\sqrt{-9};\ 6-\sqrt{-9};$$

y las generales

$$\sqrt{-b};\ a+\sqrt{-b};\ a-\sqrt{-b};$$

y en una palabra, todas las que sean ó contengan raices cuadradas de cantidades negativas son conocidas con el nombre de *cantidades imaginarias;* pero con mas exactitud deberian llamarse *símbolos imaginarios*, porque representando el resultado final de operaciones impracticables, no pueden ser cantidades, sino unos vanos simulacros que hacen las veces de los verdaderos valores que se hubieran obtenido si hubiese sido posible la cuestion de donde hayan dimanado.

Sin embargo, los algebristas lejos de haber despreciado enteramente estos símbolos imaginarios, no solo los han mirado como indicios de la modificacion que debia hacerse en la propuesta de la cuestion, sino que ademas los han sometido á las operaciones del cálculo, como si representasen verdaderas cantidades; porque han visto que combinándolos bajo ciertas leyes y reglas desaparece lo que en estas expresiones habia de absurdo, y se obtienen resultados verdaderos y reales, es decir, fórmulas que no prescriben operacion alguna impracticable. Esto, que á primera vista parece incomprehensible, no tiene nada de maravilloso, si atendemos á que b, por ejemplo, es un símbolo de una verdadera cantidad, y á que si $-b$ y $\sqrt{-b}$ no lo son, es porque representan resultados de operaciones impracticables. Si pues para el logro del intento que nos propongamos en una cuestion, descubrimos una serie de operaciones, en la cual se inutilicen ó se eviten todas las que sean impracticables; deberá ser real y efectivo el resultado final.[1]

114 Despues de conocer, por medio de las raices imaginarias que aparecen en el resultado final del cálculo, el absurdo de la cuestion, es natural que se desee descubrir entre las condiciones de la propuesta, cuál

1 De esto daremos algunos ejemplos mas adelante, y sobre todo en el *Complemento del Algebra*.

de ellas sea el origen de la imposibilidad de la solucion. Concretándonos, por ejemplo, al problema general propuesto al principio del párrafo anterior, podremos hacer la reflexion siguiente:

Si representamos por d la diferencia de las dos partes del número propuesto, la mayor será (§. 3) $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, y la menor $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$; y habiendo demostrado en el ejemplo primero del §. 34 que

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\times\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4};$$

es visto que mientras d tenga algun valor, el producto de las dos partes del número propuesto, cualesquiera que sean estas, será siempre menor que $\frac{p^2}{4}$, ó que el cuadrado de la mitad de la suma de ellas ó del número propuesto; y en siendo nulo el valor de la diferencia d, ó lo que es lo mismo, en siendo iguales las dos partes, cada una de estas será igual á $\frac{p}{2}$, y su producto será $\frac{p^2}{4}$. Es, pues, absurdo suponer que el producto de algunas dos partes del número propuesto pueda ser mayor que el cuadrado de su mitad; y todo razonamiento fundado en esta falsa suposicion ha de venir por precision á parar en una conclusion igualmente absurda. Asi que, no es extraño que el álgebra nos prescriba, para determinar en tal caso los valores de las dos partes desconocidas, la ejecucion de operaciones impracticables, dándonos por este medio á conocer que no existe lo que buscabamos.

115 A poco que reflexionemos sobre lo expuesto acerca de la naturaleza de las ecuaciones completas de segundo grado con una sola incógnita, inferiremos que todas ellas se pueden reducir á estas cuatro expresiones generales:

1.ª... $x^2+px=q$; 3.ª... $x^2+px=-q$;
2.ª... $x^2-px=q$; 4.ª... $x^2-px=-q$;

las cuales se reunen todas en esta otra:
$x^2\pm px=\pm q$.

Resolviéndolas, deduciremos las cuatro fórmulas siguientes:

1.ª... $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$;

2.ª... $x=\ \frac{1}{2}\ p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$;

3.ª... $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$;

4.ª... $x=\ \frac{1}{2}\ p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$.

Si examinamos atentamente estas fórmulas, vendremos en conocimiento de que las únicas ecuaciones de donde pueden resultar raices imaginarias, son las que tengan negativa la cantidad enteramente conocida q despues de estar traspuesta al segundo miembro; y para ello es necesario que esta cantidad sea mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente p de la primera potencia de la incógnita. En ninguno de los demas casos habrá raices imaginarias; pero serán incomensurables siempre que el valor numérico del binomio que se halla debajo del signo radical no sea un cuadrado perfecto. Todos los valores que no sean ó no contengan raices imaginarias se llaman *valores reales*.

La última fórmula nos manifiesta que en todas las ecuaciones semejantes á la cuarta, y en las cuales sea q menor que $\frac{1}{4}p^2$, los dos valores de la incógnita, ora sean comensurables, ora incomensurables, son ambos positivos; porque $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$ es siempre menor que $\frac{1}{2}p$.

La penúltima fórmula nos hace ver que en las ecuaciones semejantes á la tercera, cuando q sea menor que $\frac{1}{4}p^2$. los valores de la incógnita, ya sean comensurables ó inconmensurables, serán ambos negativos, porque $\frac{1}{2}p$ es siempre mayor que $\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$.

En todos los demas casos uno de los valores de la incógnita será positivo, y el otro negativo.

Aunque todas estas diferentes especies de valores satisfagan á las ecuaciones de donde hayan dimanado, los positivos son los únicos que pueden satisfacer á las cuestiones en los mismos términos en que esten propuestas, y sin necesidad de modificar ninguna de sus condiciones; los valores negativos y los imaginarios no son mas que unos vanos símbolos que nos pueden indicar, no solo la imposibilidad de las cuestiones, sino tambien el modo de rectificar sus propuestas en términos que desaparezca la incompatibilidad que anteriormente habia. No quiere esto decir que todo valor positivo de la incógnita satisfaga siempre á la cuestion segun esté propuesta; pues si nos propusiéramos, por ejemplo, *hallar un número* x *menor que* 1, *tal que el cuadrado de* 1 − x *fuese igual á* $\frac{1}{4}$ tendríamos esta ecuacion:

$$(1-x)^2=\frac{1}{4};$$

y de ella deduciriamos con suma facilidad que

$$1-x=\pm\frac{1}{2};$$

y por consiguiente estotras dos:

$$x=\tfrac{1}{2};$$

$$x=\tfrac{3}{2}.$$

De estos dos valores, sin embargo de que ambos sean positivos, y de que ambos satisfagan á la ecuacion fundamental, solo el primero satisface completamente á la cuestion.

Aun los valores incomensurables indican que no es posible hallar un número que satisfaga completamente á la cuestion, bien que podamos encontrar números que mas y mas se aproximen al que busquemos, el cual nos es absolutamente imposible determinar[1].

116 Como sea muy interesante que los principiantes adquieran ideas exactas de todos los hechos analíticos que no parecen conformes á las nociones vulgares, he creido conveniente añadir á lo ya expuesto (§. 106) algunas nuevas razones que hagan ver la necesidad que hay de admitir dos soluciones en las ecuaciones de segundo grado.

Nos proponemos pues demostrar *que como exista una cantidad ó un mero símbolo, designado por* a, *que sustituido en lugar de* x *satisfaga á la ecuacion de segundo grado* $x^2+px=q$, *y que por consiguiente sea valor de* x; *debe forzosamente haber otra cantidad ú otro símbolo que satisfaga á la misma ecuacion; y que de consiguiente será otro valor de la misma incógnita.* Si, con efecto, sustituimos a en lugar de x, resultará $a^2+pa=q$; y pues que a es por suposicion valor de x, será q precisamente igual á la cantidad a^2+pa; luego

1 En el trarado de la *aplicacion del Algebra á la Geometría*, completaremos estas nociones relativas á las diferentes especies de raices de las ecuaciones.

podremos sustituir esta expresion en lugar de q en la ecuacion propuesta, y de este modo se trasformará en estotra:

$$x^2+px=a^2+pa.$$

Trasladando todos los términos del segundo miembro al primero, resultará:

$$x^2+px-a^2-pa=0;$$

la cual se puede escribir de este modo:

$$x^2-a^2+p(x-a)=0;$$

y siendo (§. 34)

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a);$$

se ve inmediatamente que el primer miembro es divisible por $x-a$, y da un cuociente exacto, que es $x+a+p$; luego, segun esto; tendremos:

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

Ahora, es evidente que un producto es igual á cero cuando lo es cualquiera de sus factores; luego debemos tener $\quad(x-a)(x+a+p)=0$

no solo cuando $x=a$, lo cual da

$$x-a=0;$$

sino tambien cuando $x+a+p=0$, de donde resulta

$$x=-a-p.$$

Queda pues probado que si es a uno de los valores de la incógnita, $-a-p$ será precisamente otro.

Este resultado concuerda con los dos valores comprendidos en la fórmula

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2};$$

porque suponiendo que sea $a=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, por ejemplo vendrá á ser

$$-a-p=\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2}-p=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2},$$

el cual es con efecto el segundo valor de la incógnita, ó como se dice, la *segunda raiz* de la ecuacion.

Mas adelante volveremos á estas observaciones que contienen el gérmen de la teoría general de las ecuaciones de todos los grados.

117 La dificultad de poner en ecuacion los problemas de segundo grado y de todos los demas superiores es la misma que hemos hecho notar (§§. 8 y 14) en los del primero; pues consiste siempre en el modo de poner en claro todas las condiciones comprendidas en la propuesta, y de expresarlas por medio de caracteres algebráicos. Las cuestiones que hasta aqui hemos propuesto del segundo grado no presentan dificultad alguna en esta parte; y aunque los principiantes deban ya haberse ejercitado en los problemas que propusimos (§§ 82 y ant.) del primer grado, vamos sin embargo á proponer y resolver algunas otras cuestiones que darán ocasion á muchas observaciones muy importantes.

De dos artesanos que han estado trabajando en una obra y ganaban diferentes jornales, el primero cobró por los dias que habia trabajado 384 reales; el segundo trabajó seis dias menos, y percibió por sus jornales 216 reales; pero es de advertir que si por la inversa el segundo hubiese trabajado tantos dias como el primero, y este hubiese trabajado seis dias menos, ganando cada uno de ellos el mismo jornal que antes, hubiera percibido tanta cantidad el uno como el otro por valor de todos sus respectivos jornales. En esta suposicion se pregunta: *¿cuantos dias ha trabajado cada uno de ellos y cuánto ganaba al dia?*

Aunque en realidad son cuatro las cantidades desconocidas que nos proponemos determinar en este problema, no es necesario representar mas de una de ellas por alguna de las últimas letras del alfabeto, porque conocemos las relaciones que cada una tiene con todas las demas. En efecto, representando por x el número de los dias que estuvo empleado el primer artesano, será $x-6$ el de los dias de trabajo del segundo;

el jornal del primero será $\frac{384}{x}$;

y el del segundo vendra á ser $\frac{216}{x-6}$.

Ahora, si este último hubiese trabajado por espacio de x dias hubiera ganado

$$x\times\frac{216}{x-6} \text{ ó } \frac{216x}{x-6};$$

y si el primero hubiese trabajado tan solo $x-6$ dias, no hubiera percibido mas de

$$(x-6)\frac{384}{x} \text{ ó } \frac{384(x-6)}{x};$$

luego la ecuacion fundamental del problema vendrá á ser:

$$\frac{216x}{x-6}=\frac{384(x-6)}{x}.$$

Puesto ya el problema en ecuacion, lo primero que deberemos hacer en esta es eliminar los denominadores por medio de la multiplicacion que llaman en *cruz*. Asi tendremos:

$$216x^2=384(x-6)(x-6);$$

y siendo los números 216 y 384 exactamente divisibles por 6, se simplificará este resultado por medio de esta division, y quedará reducido á

$$36x^2=64(x-6)(x-6).$$

Para resolver esta ecuacion pudiéramos efectuar las multiplicaciones indicadas, y preparar el resultado con arreglo á lo prescrito (§. 108); pero siendo el objeto de aquella regla el facilitar la extraccion de la raiz cuadrada de los dos miembros de la ecuacion propuesta, no es necesario observarla en este caso, porque se nos presentan desde luego los dos miembros en forma de cuadrados; pues $36x^2$ es el cuadrado de $6x$; y $64(x-6)(x-6)$ es el cuadrado de $8(x-6)$: luego inmediatamente y sin necesidad de preparacion alguna podremos deducir, extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros:

$$6x=\pm 8(x-6)$$

de donde resultan sucesivamente los dos valores de la incógnita:

$$6x=8x-48;\ x=24;$$
$$6x=-8x+48;\ x=\tfrac{24}{7}.$$

El primer valor nos manifiesta que el primer jornalero ha trabajado 24 dias, y ha ganado por consiguiente $\frac{384}{24}$ de real ó 16 reales al dia; que el segundo ha trabajado 18 dias y ganado $\frac{216}{18}$ de real ó 12 reales al dia.

El segundo valor, aunque tambien satisface á la ecuacion fundamental del problema, no satisface á este segun está propuesto, sino con cierta modificacion; y de consiguiente viene á ser la solucion de otro problema análogo, segun hemos observado (§. 110).

118 *Se presentan á un banquero dos letras á cargo de un mismo comerciante para que las descuente; la primera de 550 pesos pagadera á los siete meses; y la segunda de 720 pesos pagadera á los cuatro meses; el banquero da por las dos la cantidad de 1200 pesos; y* se nos pregunta: *¿cuál es el tanto por ciento anual de interes á que se han descontado estas letras?*

Con el objeto de evitar las fracciones en la expresion del *tanto por ciento* correspondiente á los siete meses y á los cuatro, representaremos por $12x$ el respectivo á un año y á una cantidad de 100 pesos; con lo cual vendrá á ser x el interes mensual. En este supuesto se obtendrá el valor actual de la primera letra haciendo (*Aritm.* §. 188) la siguiente proporcion:

$$100+7x:100::550:\frac{55000}{100+7x};$$

y el valor actual de la segunda letra resultará de esta otra proporcion semejante:

$$100+4x:100::720:\frac{72000}{100+4x}.$$

Reuniendo estos dos valores tendremos para ecuacion fundamental del problema:

$$\frac{55000}{100+7x}+\frac{72000}{100+4x}=1200.$$

Los dos miembros se pueden dividir por 200, y asi resulta: $\frac{275}{100+7x}+\frac{360}{100+4x}=6;$

y haciendo desaparecer los denominadores (§. 13) hallaremos sucesivamente:

$$275(100+4x)+360(100+7x)=6(100+7x)(100+4x);$$

$$27500+1100x+36000+2520x=$$
$$60000+6600x+168x^2;$$

la cual ordenada, se reduce á

$$168x^2+2980x=3500;$$

y dividiendo todos los términos por 2, resulta:

$$84x^2+1490x=1750,$$

la cual da por último:

$$x^2+\frac{1490}{84}x=\frac{1750}{84}.$$

Y comparando esta ecuacion particular con la general $x^2+px=q$;

resulta: $p=\frac{1490}{84}$; $q=\frac{1750}{84}$;

y la expresion de la fórmula general

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

se convierte en

$$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745\times745}{84\times84}+\frac{1750}{84}}.$$

Es necesario reducir desde luego á una sola las fracciones que se hallan debajo del radical, y asi resultará:

$$\frac{745\times745+1750\times84}{84.84}=\frac{702025}{84.84};$$

y observando que el denominador de esta fraccion es un cuadrado perfecto, solo faltará extraer la raiz cuadrada del numerador. Aproximándola hasta las milésimas hallarémos que $\sqrt{702025}$ es 837,869; y dándole el denominador 84, serán los dos valores de la incógnita:

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837,869}{84}=\frac{92,869}{84}=1,1056;$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837,869}{84}=-\frac{1582,869}{84}=-18,843.$$

El primero de estos dos valores, que no tiene nota alguna de absurdo, es el único que resuelve la cuestion segun está propuesta; y asi dirémos que el *tanto por ciento anual* que deseábamos conocer, y que hemos representado por $12x$, será:

$$12x=13,267.$$

119 La cuestion siguiente es digna de atencion por las particularidades que ofrecen las expresiones de los valores de la incógnita.

Distribuir un número en dos partes, cuyos cuadrados tengan entre sí una razon dada.

Sea a el número dado;

m la razon de los cuadrados de sus dos partes;

x una de estas partes;

la otra será $a-x$;

y segun la propuesta de la cuestion tendremos la ecuacion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m.$$

Para resolverla se nos presentan dos medios; porque ó la podemos preparar para darle la forma de la ecuacion general $x^2+px=q$; ó aprovecharnos de la observacion que fácilmente se puede hacer de que la fraccion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

es un cuadrado, pues lo son su numerador y su denominador. Haciendo uso de esta observacion deduciremos inmediatamente:

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m};$$

$$x=\pm(a-x)\sqrt{m};$$

y resolviendo separadamente las dos ecuaciones de primer grado comprendidas en la última, que son:

$$x=+(a-x)\sqrt{m};$$

$$x=-(a-x)\sqrt{m};$$

nos resultarán

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Del primer valor de la incógnita se deduce que la segunda parte del número propuesto es:

$$a-\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a+a\sqrt{m}-a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

y las dos partes vienen á ser:

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \text{ y } \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

las cuales son, segun lo exige la cuestion, menores ambas que el número propuesto.

Del segundo valor se infiere que la otra parte del número propuesto es:

$$a+\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a-a\sqrt{m}+a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

y entonces las dos partes son:

$$\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \text{ y } \frac{a}{1-\sqrt{m}};$$

y siendo contrarios sus signos, no es ya realmente la suma de ellas igual al número propuesto; lo es su diferencia, y asi hemos venido á resolver al mismo tiempo otro problema.

Haciendo $m = 1$, esto es, suponiendo que hayan de ser iguales los cuadrados de las dos partes que se buscan, tendremos:

$$\sqrt{m} = 1;$$

y el primer valor de la incógnita da dos partes iguales

$$\frac{a}{2} \text{ y } \frac{a}{2};$$

resultado evidente por sí mismo. Pero el segundo valor da por resultado el símbolo del infinito (§. 68), á saber:

$$\frac{-a}{1-1} \text{ ó } \frac{-a}{0}, \text{ y } \frac{a}{1-1} \text{ ó } \frac{a}{0}.$$

Lo que estas expresiones quieren decir es que la suposicion de dos cantidades cuya diferencia sea a, y cuyos cuadrados sean iguales, es enteramente absurda; y de consiguiente jamas se las podrá designar. Sin embargo cuanto mayores se elijan aquellas dos cantidades con aquella diferencia, tanto mas se aproximarán á tener la otra condicion.

Con efecto, sean x y $x-a$ las dos cantidades, y la razon de sus cuadrados estará bien representada por

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2};$$

y dividiendo los dos términos de esta fraccion por x^2, resultará

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}}.$$

Ahora es claro, que cuanto mayor sea el número x, tanto menores serán las fracciones $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$, y tanto mas se aproximará la razon anterior á ser igual á $\frac{1}{1}$ ó á 1, sin que jamas pueda llegar á ser igual á 1. Por manera que 1 es el *límite* de aquella razon (*Arit.* §. 121); y esto es lo que se ha querido decir cuando se ha dicho que para que aquel quebrado ó razon fuese exactamente igual á 1, como requiere la propuesta, es necesario que fuese *infinito* el valor de la x; lo cual es manifiestamente imposible.

120 Para comparar el método general de resolver las ecuaciones completas de segundo grado con el que acabamos de seguir, deduciremos de la ecuacion

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m$$

las siguientes:

$$x^2=m(a-x)(a-x);$$
$$x^2=a^2m-2amx+mx^2;$$
$$x^2-mx^2+2amx=a^2m;$$
$$(1-m)x^2+2amx=a^2m;$$
$$x^2+\frac{2am}{1-m}x=\frac{a^2m}{1-m}.$$

Cotejando esta última ecuacion con la general $x^2+px=q$, resultará:

$$p=\frac{2am}{1-m}, \text{ y } q=\frac{a^2m}{1-m};$$

y la fórmula general se trasformará en estotra:

$$x=-\frac{am}{1-m}\pm\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}.$$

Estos valores de x parecen muy diferentes de los que se han hallado antes; y sin embargo deben reducirse á aquellos; y esto es cabalmente en lo que puede sernos útil este ejemplo, porque manifiesta la importancia de las trasformaciones que las diferentes operaciones algebráicas producen en las expresiones de las cantidades.

En primer lugar es necesario reducir á un mismo denominador las dos fracciones comprendidas debajo del radical; lo cual se efectuará multiplicando por $1-m$ los dos términos de la segunda, y resultará:

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}=\frac{a^2m^2+a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)}=$$
$$\frac{a^2m^2+a^2m-a^2m^2}{(1-m)(1-m)}=\frac{a^2m}{(1-m)(1-m)};$$

y siendo el denominador un cuadrado, podremos efectuar inmediatamente la extraccion de su raiz, é indicaremos la del numerador. Asi tendremos:

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)}+\frac{a^2m}{1-m}}=\frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

pero la expresion $\sqrt{a^2m}$ se puede todavía simplificar.

Es claro que el cuadrado de un producto viene á ser el producto de los cuadrados de sus factores, puesto que, por ejemplo,

$$bcd\times bcd=b^2c^2d^2,$$

y que por consiguiente la raiz de $b^2c^2d^2$ no es mas que el producto de las raices b, c y d de los factores b^2, c^2 y d^2. Aplicando esta observacion al producto a^2m, se ve que su raiz debe ser el producto de a, raiz de a^2, multiplicada por $\sqrt{m}$, que es la indicacion de la raiz de m; ó que $\sqrt{a^2m}=a\sqrt{m}$.

De estas diferentes trasformaciones se sigue que

$$x=-\frac{am}{1-m}\pm\frac{a\sqrt{m}}{1-m};$$

cuya expresion comprende estas dos:

$$x=-\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m};\ x=\frac{-am-a\sqrt{m}}{1-m}\text{*}.$$

Por sencillas que sean estas expresiones no son todavía las del párrafo anterior; y si se quiere aplicarlas al caso en que $m=1$, se convierten en

$$x=\frac{-a+a}{1-1}=\frac{0}{0};$$

$$x=\frac{-a-a}{1-1}=\frac{-2a}{0}.$$

Volvemos aqui á encontrar en la segunda el símbolo del infinito como anteriormente; pero la primera presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, de que ya hemos visto algunos ejemplos (§§. 69 y 70); y antes de decidir acerca de su valor convendrá examinar si se halla ó no en el caso indicado (§. 70), es decir, si algun factor comun al numerador y al denominador es el que hace que cuando $m=1$, se reduzca á $\frac{0}{0}$ la expresion del valor de la incógnita.

* Las dos últimas expresiones equivalen á estotras: $x=-\frac{am-a\sqrt{m}}{1-m}$; $x=-\frac{am+a\sqrt{m}}{1-m}$, las cuales estan ambas comprendidas en esta: $x=-\frac{am\mp\sqrt{am}}{1-m}$. Tambien equivalen á las siguientes: $x=\frac{am-a\sqrt{m}}{m-1}$; $x=\frac{am+a\sqrt{m}}{m-1}$; $x=\frac{am\mp a\sqrt{m}}{m-1}$. Estas trasformaciones estan fundadas en que *podemos cambiar el signo del dividendo, con tal que tambien mudemos el del cuociente ó el del divisor.*

La expresion $\frac{-am+a\sqrt{m}}{1-m}$ se trasforma en

$$\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m}=\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}.$$

Por lo que hace al numerador de esta fraccion, bien se ve que se convierte en cero por razon del factor $\sqrt{m}-m$: es preciso pues averiguar si este último factor y el denominador tienen algun divisor comun. Para evitar el embarazo que en esta investigacion podria ocasionar el signo radical, supondremos que $\sqrt{m}=n$; y de consiguiente que elevando al cuadrado sea $m=n^2$. Por este medio se trasformarán las expresiones

en $\sqrt{m}-m$ y $1-m$

$$n-n^2 \text{ y } 1-n^2.$$

Ahora, $n-n^2=n(1-n)$; y $1-n^2=(1-n)\times(1+n)$; restituyendo pues en lugar de n su equivalente $\sqrt{m}$, resultará que

$$\sqrt{m}-m=\sqrt{m}\times(1-\sqrt{m}),$$

$$\text{y } 1-m=(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m});$$

y por consiguiente

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}=\frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}};$$

resultado enteramente igual al del §. 119.

Del mismo modo se simplifica la expresion del segundo valor de x, observando que

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m}=\frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$$

como en el §. 119 [1].

No es dificil conocer que hubiéramos podido evitar los radicales en los cálculos precedentes, representando por m^2 la razon de los cuadrados de las dos partes del número propuesto. En tal caso hubiera sido m la raiz cuadrada de aquella razon; y puesto que suponemos conocida esta, podríamos considerar como dada su raiz; pero acaso no se hubiera echado entonces de ver la utilidad de semejante variacion en los datos, de la cual se valen con frecuencia los algebristas para simplificar los cálculos. Ahora que ya se pueden haber conocido las ventajas de aquella variacion, recomiendo á mis lectores que vuelvan á comenzar la solucion del problema, poniendo m^2 en lugar de m; en la inteligencia de que lo practicado en esta cuestion podrá servirles de norma para todas las demas literales.

1 El ejemplo que acabamos de exponer con tanta extension viene á ser en sustancia un problema resuelto por *Clairaut* en su Algebra, y propuesto en estos términos: *Hallar en la línea que une dos luces cualesquiera, el punto en que estas dos luces alumbran con igual intensidad.* Hemos despojado este problema de las circunstancias físicas: porque ademas de ser agenas del objeto de esta obra distraen la atencion que exigen las particularidades algebráicas, muy notables por sí mismas, y que por esta razon hemos desenvuelto mas que *Clairaut*.

De la extraccion de la raiz cuadrada de las cantidades algebráicas.

121 La trasformacion que en el párrafo anterior hemos ejecutado de $\sqrt{a^2 m}$ en $a\sqrt{\ m}$ es de la mayor importancia; porque nos proporciona un medio de reducir al menor número posible los factores contenidos debajo del radical, y de simplificar otro tanto la extraccion que aun haya que efectuar.

Esta trasformacion consiste, como se ha visto, *en tomar separadamente la raiz de cada uno de los factores que sean cuadrados; en escribir todas estas raices fuera del radical como multiplicadores ó coeficientes suyos; y en dejar debajo de él, tales como sean, los factores que no sean cuadrados.*

Esta regla supone por decontado que tenemos medios de reconocer si es ó no un cuadrado una cantidad algebráica, y que siéndolo sabemos extraer la raiz. Para que sobre esto no quede la menor duda, trataremos primeramente de las cantidades monomias, y despues pasaremos á las polinomias.

122 De la regla de los exponentes prescrita para la multiplicacion (§. 31) resulta claramente que *la segunda potencia de una cantidad cualquiera tiene un exponente doble del de esta cantidad.*

Sabiendo, por ejemplo, como sabemos que

$$a^1 \times a^1 = a^2;\ a^2 \times a^2 = a^4;\ a^3 \times a^3 = a^6,\ \&c.$$

nos es facil inferir que *todo factor que sea un cuadrado ha de tener un exponente par; y que se obtiene su raiz escribiendo la misma letra con un exponente igual á la mitad del exponente primitivo.*

Y asi tenemos $\sqrt{a^2}=a^1$ ó a; $\sqrt{a^4}=a^2$; $\sqrt{a^6}=a^3$, &c.

Por lo que respecta á los factores numéricos que sean cuadrados se ejecuta la extraccion de sus raices por las reglas establecidas anteriormente.

Si queremos pues simplificar la expresion $\sqrt{64a^6b^4c^2}$, observaremos que son cuadrados los factores $a^6b^4c^2$, por que todos tienen exponente par; y puesto que sabemos que 64 es el cuadrado de 8, inferiremos que siendo la cantidad que está debajo del radical el producto de cuatro factores cuadrados, su raiz deberá ser el producto de las cuatro raices; y por consiguiente $\sqrt{64a^6b^4c^2}$ $=8a^3b^2c$.

123 Cuando no se verifique esta circunstancia, se debe descomponer el producto propuesto en otros dos, uno de los cuales contenga únicamente los factores cuadrados, y el otro los que no lo sean; para lo cual se deben examinar uno por uno todos los factores.

Si nos proponemos, por ejemplo $\sqrt{72a^4b^3c^5}$, echaremos fácilmente de ver que entre los divisores del número 72 hay cuadrados perfectos, á saber: 4, 9 y 36; y tomando el mayor de estos tendremos $72=36\times2$; el factor a^4 es un cuadrado; y pasando despues al factor b^3, que no es un cuadrado por ser impar el exponente 3, observaremos que este factor se puede descomponer en otros dos b^2 y b, el primero de los cuales es un cuadrado; y asi tendremos:

$$b^3=b^2\times b;$$

del mismo modo

$$c^5 = c^4 \times c;$$

é igual trasformacion hariamos con cualquiera otra letra que tuviese un exponente impar. Todas estas descomposiciones dan

$$72a^4b^3c^5 = 36 \times 2a^4b^2bc^4c;$$

y reuniendo por una parte todos los factores cuadrados y por otra todos los que no lo son, la misma expresion se trasformará en

$$36a^4b^2c^4 \times 2bc;$$

y por último, tomando la raiz del primer producto, é indicando la del segundo, tendremos

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

He aqui algunos otros ejemplos de reducciones semejantes precedidas de los cálculos que nos conducen á ellas.

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2 \times \frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2} = 6\sqrt{\frac{25 \times 3\,ab^2}{49 \times 2}} = 6\sqrt{\frac{25b \times 3a}{49 \times 2}} =$$

$$\frac{6 \times 5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{6a}{4}} =$$

$$\frac{30b}{14}\sqrt{6a} = \frac{15b}{7}\sqrt{6a}.$$

En ambos ejemplos hemos hecho últimamente salir fuera del radical el denominador de las fracciones algebráicas, haciéndolo un cuadrado, segun lo que hemos dicho (§. 104) con respecto á las fracciones numéricas.

124 Por lo que hace á la raiz cuadrada de los po-

linomios, convendrá tener presente que ningun binomio algebráico puede ser un cuadrado perfecto de cantidad representada por las mismas letras de que se componga el binomio; porque todo monomio elevado al cuadrado produce solo un monomio; y el cuadrado de un binomio viene siempre á ser un trinomio (§. 34).

Seria pues un error muy craso el tomar el binomio $a+b$ como equivalente á $\sqrt{a^2+b^2}$, aunque la raiz de a^2 tomada separadamente sea a, y b la de b^2; porque siendo $a^2+2ab+b^2$ el cuadrado de $a+b$ contiene ademas del binomio a^2+b^2 el término $+2ab$ que no se halla en la expresion $\sqrt{a^2+b^2}$.

Todavia seria mayor el error que se cometeria en tomar el binomio $a-b$ como equivalente á $\sqrt{a^2-b^2}$; porque siendo $a^2-2ab+b^2$ el cuadrado de $a-b$, este binomio equivaldrá á $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$; y esta expresion no puede, como se ve, ser igual á $\sqrt{a^2-b^2}$.

La única simplificacion de que son susceptibles las raices de cantidades algebráicas binomias, podrá tener lugar solo en el caso en que los dos términos tengan uno ó mas factores comunes, y que estos sean cuadrados. En efecto

$$\sqrt{12a^2b^4c^3+20a^3b^3c^2d}=\sqrt{4a^2b^2c^2(3b^2c+5abd)}=$$
$$2abc\sqrt{3b^2c+5abd};$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2}+\frac{a^2m}{n}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+a^2mn}{n^2}}=$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2+mn)}=\frac{a}{n}\sqrt{m^2+mn}.$$

Pasando ya á los trinomios propongámonos por ejemplo extraer la raiz de

$$24a^2b^3c+16a^4c^2+9b^6;$$

y teniendo á la vista el cuadrado $a^2+2ab+b^2$, tratemos de hallar en el trinomio propuesto las tres partes de que debe constar el cuadrado de cualquier binomio. Con este objeto ordenaremos sus términos con respecto á una de sus letras, á la letra a, por ejemplo, y resultará:

$$16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6.$$

Ahora, cualquiera que sea la raiz que buscamos, en suponiéndola ordenada con respecto á la misma letra a, el cuadrado de su primer término debe precisamente ser el primer término $16a^4c^2$ de la cantidad propuesta; el duplo del producto del primer término de la raiz por el segundo, debe dar el segundo término $24a^2b^3c$ de la cantidad propuesta; y por último el cuadrado del último término de la raiz debe ser precisamente el último término $9b^6$ de la cantidad propuesta. Hechas estas consideraciones se dispone la operacion como aquí se ve:

$$\begin{array}{ll}
\text{Cuadrado...}\ 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & \left\{\begin{array}{l} 4a^2c+3b^3\ldots\ \text{Raiz.} \\ \hline 8a^2c+3b^3 \end{array}\right. \\
\quad -16a^4c^2 & \\
\hline
\qquad +24a^2b^3c+9b^6 & \\
\qquad -24a^2b^3c-9b^6 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Extraigamos primero (§. 122) la raiz cuadrada del primer término $16a^4c^2$, y el resultado $4a^2c$ es el primer término de la raiz, el cual se escribe á la derecha en la misma línea que la cantidad propuesta.

Quitemos de esta cantidad el cuadrado $16a^4c^2$ del primer término $4a^2c$ de la raiz; y haciendo esta reduccion solo quedan los dos términos $24a^2b^3c+9b^6$.

Debiendo ser el término $24a^2b^3c$ el duplo del producto del primer término de la raiz $4ac^2$ por el segundo, obtendremos este segundo, dividiendo $24a^2b^3c$ por $8a^2c$, duplo de $4a^2c$; el cual duplo se escribe debajo de la raiz. El cuociente $3b^3$ es el segundo término de la raiz.

Con esto quedará determinada la raiz que nos proponiamos hallar; pero se necesita para que sea exacta que el cuadrado del segundo término componga $9b^6$; ó mas bien, que el duplo $8a^2c$ del primer término de la raiz, sumado con el segundo $3b^3$, y multiplicada la suma por el segundo, reproduzca los dos últimos términos del cuadrado (§. 91); por consiguiente, al lado de $8a^2c$ escribiremos $+3b^3$; multiplicaremos $8a^2c+3b^3$ por $3b^3$; y restando de los dos últimos términos de la cantidad propuesta el producto, no queda nada, y de aqui inferiremos que la raiz que buscamos es exactamente $4a^2c+3b^3$.

Bien se deja ver que el mismo razonamiento y la misma serie de operaciones se pueden hacer con todas las cantidades compuestas de tres términos.

125 Cuando la cantidad de que se quiere extraer la raiz, tenga mas de tres términos, la raiz deberá tener mas de dos; y suponiendo que estos sean tres, observaremos primeramente la formacion del cuadrado de un trinomio para venir por este medio en conocimiento no solo de las condiciones que deben reunirse en un polino-

mio para que sea un cuadrado, sino tambien del modo de averiguar su raiz.

Propongámonos, por ejemplo, elevar al cuadrado el trinomio $m+n+p$; y con solo representar por la letra l al binomio $m+n$, el trinomio propuesto se trasformará en el binomio $l+p$; y el cuadrado de este equivaldrá al de aquel. Ahora bien, el cuadrado del binomio $l+p$ es $l^2+2lp+p^2$; restituyendo pues $m+n$ en lugar de l será:

$$(m+n+p)^2=(m+n)^2+2(m+n)p+p^2;$$

y siendo $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$, el cuadrado de $m+n+p$ vendrá á ser

$$m^2+2mn+n^2+2(m+n)p+p^2.$$

Este resultado nos hace ver que estando ordenados los términos del polinomio que suponemos ser cuadrado de un trinomio, el primer término de aquel ha de ser forzosamente el cuadrado del primer término de este, es decir, de la raiz; el segundo término de aquel será el doble producto de la primera parte de la raiz multiplicada por la segunda; y de consiguiente dividiendo aquel segundo término de la cantidad propuesta por el doble del primer término que ya suponemos hallado de la raiz, el cuociente deberá ser el segundo término ó la segunda parte de la misma raiz.

Conociendo entonces los dos primeros términos de la raiz que se busca, se completará el cuadrado de estos dos términos, que representamos aqui por $(m+n)^2$; y quitándolo de la cantidad propuesta restará

$$2(m+n)p+p^2;$$

cuya cantidad contiene el duplo del producto del primer binomio $m+n$ por el tercer término de la raiz, mas el cuadrado de este tercer término; y nos hace ver que es necesario ejecutar con el binomio $m+n$, que suponemos ya determinado, lo mismo que se ha hecho con el primer término m de la raiz.

Sea por ejemplo la cantidad

$$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^2c^2-80ab^2c;$$

y ordenando sus términos con respecto á la letra a, dispondremos la operacion segun acabamos de indicar.

$$\begin{array}{l|l}
16a^4-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & 4a^2-5ab+8bc \\
\qquad\qquad +64a^2bc & \overline{8a^2-5ab} \\
-16a^4 & 8a^2-10ab+8bc \\
\hline
1.^r\ \text{resid.}\ -40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & \\
\qquad\qquad +64a^2bc & \\
\qquad +40a^3b-25a^2b^2 & \\
\hline
2.^o\ \text{resid.}\ +64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 & \\
\qquad -64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Hecho esto, extraemos la raiz cuadrada del primer término $16a^4$, y hallamos $4a^2$ para el primer término de la raiz que se busca; formamos su cuadrado, y lo restamos de la cantidad propuesta.

Doblamos el primer término de la raiz, y escribimos debajo de él el resultado $8a^2$; por el cual dividimos el término $-40a^3b$, que es el primero del primer residuo; y siendo $-5ab$ el cuociente, venimos en conocimiento de que este es el segundo término de la raiz; lo escribimos al lado de $8a^2$; multiplicamos el todo por este segundo término, y el resultado lo restamos del primer residuo.

De este modo habremos ya quitado de la cantidad propuesta el cuadrado del binomio $4a^2-5ab$; y puesto que en la raiz debe haber algun otro término, en el segundo residuo deberán existir el duplo del producto del binomio hallado por el tercer término que buscamos de la raiz, y el cuadrado de este término. Doblamos pues la cantidad $4a^2-5ab$, y el duplo $8a^2-10ab$ lo escribimos debajo de $4a^2-5ab$ para que sirva de divisor del segundo residuo; y efectuando la division del primer término de este por el primer término de aquel duplo, el cuociente $8bc$ será el tercero de la raiz.

Lo escribimos inmediatamente al lado de $8a^2-10ab$; multiplicamos por el mismo cuociente el trinomio $8a^2-10ab+8bc$, y restando del segundo residuo el producto total de aquella multiplicacion, se destruyen enteramente todos los términos; y esto nos demuestra que la cantidad propuesta es el cuadrado de $4a^2-5ab+8bc$. Si despues de efectuada la tercera sustraccion quedasen aun mas términos del polinomio propuesto, seria este indicio de que la raiz deberia tener algun otro término; y continuariamos del mismo modo, cuanto fuese necesario, la operacion, imitando lo que hemos practicado para hallar los dos últimos términos anteriores, y lo que hemos ejecutado en la extraccion de la raiz de los números.

De la formacion de las potencias en general, y de la extraccion de sus raices.

126 Hemos visto que la resolucion de las ecuaciones de segundo grado dependia de una operacion aritmética, por medio de la cual retrocediamos del cuadrado á la cantidad que se habia multiplicado por sí misma para formarlo, ó á la raiz cuadrada; y es facil ver que esta operacion es un caso particular de esta otra cues-

tion general: *sabiéndose ó suponiéndose que un número dado sea una cierta potencia de otro desconocido, ¿cómo se determina cuál es este otro?* Ya se deja entender que la serie de operaciones que deberemos ejecutar en esta investigacion, deberá ser la inversa de la que nos sirve para hallar la potencia; y de consiguiente debe sernos muy útil examinar cómo se forma esta para saber cómo se la deberá descomponer.

Siendo muy cómodo el uso de los símbolos algebráicos para investigar cuanto pertenece á la composicion y á la descomposicion de las cantidades, procederemos desde luego á la formacion de las potencias de las expresiones algebráicas; pues para hallar las de los números basta lo que hemos dicho en el §. 24, con arreglo á lo cual hemos formado las potencias que se hallan en la tabla siguiente:

1.ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3.ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5.ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6.ª	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7.ª	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Hemos puesto aqui esta tabla principalmente con el objeto de hacer notar la rapidez con que crecen las potencias de los números á proporcion que van siendo de grado mas elevado; observacion muy importante para lo sucesivo. Se ve con efecto que la séptima potencia de 2 es ya 128, y que la de 9 asciende á 4.782,969.

De esto se infiere con facilidad que las potencias de las fracciones propias disminuyen con mucha rapidez; porque las potencias del denominador van siendo tanto mayores que las del numerador cuanto mas elevadas sean.

La séptima potencia de $\frac{1}{2}$, por ejemplo, será $\frac{1}{128}$; y la de $\frac{1}{9}$ será $\frac{1}{4782969}$.

127 Puesto que en todo producto cada letra tiene por exponente la suma de los exponentes que tenga en los dos factores (§. 26), es consiguiente que *la potencia de una cantidad monomia se forme multiplicando el exponente de cada factor por el exponente de la potencia.*

La tercera potencia de a^2b^3c, por ejemplo, resultará multiplicando los exponentes 2, 3 y 1 de las letras a, b y c por el exponente 3 de la potencia que se busca; y se tendrá $a^6b^9c^3$. Con efecto esta potencia es lo mismo que

$$a^2b^3c \times a^2b^3c \times a^2b^3c = a^{2\cdot3}b^{3\cdot3}c^{1\cdot3}.$$

Si la cantidad propuesta tuviese algun coeficiente numérico, seria necesario elevar tambien este coeficiente á la potencia indicada; y asi la cuarta potencia de $3ab^2c^5$ es $81a^4b^8c^{20}$, porque la de 3 es 81.

128 Por lo tocante á los signos que precedan á las cantidades monomias, debemos observar que *todas las potencias, cuyo exponente sea par, han de tener el signo +; y que todas las de exponente impar deben llevar el mismo signo que la cantidad que las haya formado.*

Con efecto las potencias de un grado par resultan de la multiplicacion de un número par de factores; y ya se sabe que los signos — combinados de dos en dos en la multiplicacion dan siempre al producto el signo + (§. 31). Por el contrario, si el exponente de la potencia, ó lo que viene á ser lo mismo, si el número de los factores fuere impar, el producto tendrá el signo — siempre que este signo preceda á los factores, porque en este caso se ha de terminar forzosamente la operacion multiplicando un producto positivo por un factor negativo.

129 Para retroceder de la potencia á la cantidad que la ha formado, y que se llama la *raiz*, no hay mas que invertir las reglas que acabamos de dar, es decir: 1.° *Se ha de dividir el exponente de cada letra por el que indique el grado de la raiz que se quiera extraer.*

De esta manera hallaremos la raiz cúbica ó de tercer grado de la expresion $a^6b^9c^3$, dividiendo por 3 los exponentes 6, 9 y 3; lo cual dará a^2b^3c.

2.° *Cuando la expresion propuesta tenga algun coeficiente numérico, se debe tomar tambien su raiz* para obtener el coeficiente de la cantidad literal que se deduzca por la regla anterior.

Si se nos pidiese, por ejemplo, la raiz cuarta de $81\,a^4b^8c^{20}$, veriamos en la tabla del §. 126 que 81 es la cuarta potencia de 3, ó lo que es lo mismo, que la raiz cuarta de 81 es 3; y dividiendo por 4 los exponentes de las letras, tendriamos por resultado $3ab^2c^5$.

En caso que no se pueda hallar por medio de la tabla citada la raiz del coeficiente numérico, se la extraerá por los métodos que mas adelante daremos á conocer.

130 Ya se deja entender que la extraccion de las raices de los factores literales de las cantidades mono-

mias no se podrá efectuar sino cuando cada exponente sea exactamente divisible por el de la raiz. En no verificándose esta circunstancia, lo único que se puede hacer es indicar la operacion aritmética que habremos de efectuar cuando se sustituyan números á las letras.

Para esta indicacion se hace tambien uso del signo $\sqrt{}$; pero á fin de no confundir las raices de un grado con las de otro se escribe entre las líneas de que se forma el signo radical el exponente de la raiz que con él intentamos representar. Asi cuando veamos las expresiones $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a^2}$, sabremos que la primera representa la raiz cúbica ó del tercer grado de la cantidad a; y la segunda la raiz quinta de a^2.

De cualquier grado que sean las expresiones precedidas del signo $\sqrt{}$, se las puede frecuentemente simplificar haciéndose cargo de que (§. 127) *una potencia cualquiera de un producto es el producto de las potencias del mismo grado de todos los factores de la raiz;* y que por consiguiente, *cualquiera raiz de un producto es el producto de las raices del mismo grado de todos sus factores.* De este último principio se deduce que *si la cantidad puesta debajo del radical tiene factores que sean potencias exactas del mismo grado que el de la raiz indicada, se pondrán tomar separadamente las raices de estos factores, y multiplicar el producto de estas por la raiz indicada de los otros factores.*

En la expresion $\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}$, por ejemplo, se ve

que $96=32\times3=2^5\times3$;
que a^5 es la quinta potencia de a;

que $b^7 = b^5 \times b^2$;

que $c^{11} = c^{10} \times c$;

y por consiguiente

$$96a^5b^7c^{11} = 2^5a^5b^5c^{10} \times 3b^2c;$$

y siendo $2abc^2$ la raiz quinta del primer factor del último producto, resulta que

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

131 Debiendo llevar toda potencia de un grado indicado por número par el signo $+$ (§. 128), ninguna cantidad precedida del signo $-$ podrá ser potencia de grado par, ni de consiguiente podrá tener raiz de este grado. De lo cual se sigue que *todo radical de un grado par que tenga debajo de sí una cantidad negativa, es una expresion imaginaria.* Asi que

$$\sqrt[4]{-a},\ \sqrt[6]{-a^4},\ b+\sqrt[8]{-ab^7}$$

son expresiones imaginarias.

Por manera que cuando el exponente del radical sea par, no se podrán designar ni exactamente ni por aproximacion, ni en expresiones positivas ni en negativas, mas que las raices de las cantidades positivas, y *estas raices podrán estar precedidas indiferentemente del signo $+$ ó del signo $-$*, porque en ambos casos reproducen igualmente la cantidad propuesta con el signo $+$; lo cual debe entenderse en el supuesto que se ignore qué signo tenia la que se supone haberla producido.

No se verifica lo mismo cuando el exponente de la raiz sea impar; pues debiendo las potencias de exponente impar tener el mismo signo que sus respectivas raices (§. 128), *debe por la inversa darse á las raices de estos grados el mismo signo que preceda á la po-*

tencia; y asi en tales casos se podrá designar de la raiz una expresion que no sea imaginaria.

132 Es interesante observar que la regla dada (§. 129) para la extraccion de las raices de los monomios por medio de los exponentes de sus factores conduce naturalmente á indicar con símbolos mas cómodos para el cálculo que el signo $\sqrt{}$, las raices que no se pueden extraer algebráicamente con exactitud.

Si, por ejemplo, se nos pidiese la raiz tercera ó cúbica de a^5, deberiamos, conforme á la regla citada, dividir el exponente 5 por 3; pero no pudiendo efectuarse exactamente la division, resulta el número fraccionario $\frac{5}{3}$; y la forma que adquiere entonces el exponente del resultado indica que no se puede verificar la extraccion en el estado actual de la cantidad propuesta. Debemos pues mirar como equivalentes las dos expresiones $\sqrt[3]{a^5}$ y $a^{\frac{5}{3}}$.

Esta segunda tiene sin embargo la ventaja de conducirnos inmediatamente á la simplificacion de que es susceptible la expresion $\sqrt[3]{a^5}$; porque extrayendo el entero contenido en la fraccion $\frac{5}{3}$, tendremos $1+\frac{2}{3}$, y por consiguiente

$$a^{\frac{5}{3}}=a^{1+\frac{2}{3}}=a^1\times a^{\frac{2}{3}} \text{ (§. 25)};$$

donde se ve que la cantidad $a^{\frac{5}{3}}$ está compuesta de dos factores, de los cuales el primero es racional, y el otro se convierte en $\sqrt[3]{a^2}$.

Lo mismo pudimos haber deducido de la expresion $\sqrt[3]{a^5}$, observando lo prescrito (§. 130); pero el exponente fraccionario conduce inmediatamente á aquel resultado. Ya se nos ofrecerán en otras operaciones que hayamos de ejecutar con las cantidades radicales nuevas ocasiones de reconocer las ventajas de los exponentes fraccionarios.

Por ahora basta observar que correspondiendo la division de los exponentes, en los casos en que se la puede efectuar, á la extraccion de las raíces; en estando meramente indicada aquella division, se la debe considerar como símbolo del resultado de la misma operacion; y de consiguiente deberemos tener por equivalentes las expresiones $\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{\frac{m}{n}}$.

Asi vemos de nuevo que el convenio adoptado para representar las diferentes potencias de una cantidad nos conduce por analogía y por extension á símbolos particulares, del mismo modo que segun vimos (§. 37), nos condujo á la expresion $a^0 = 1$.

133 Observarémos con este motivo que la regla de los exponentes relativa á la division (§. 36), combinada con la de los signos relativa á la sustraccion (§. 20), nos conduce tambien á nuevas expresiones de cierta clase de fracciones algebráicas.

Con efecto, por medio de estas reglas tenemos:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

y de esto es facil inferir que si el exponente n del denominador fuere mayor que el exponente m del numerador, será negativo en el segundo miembro el exponente de la letra a.

Por ejemplo, si $m=2$ y $n=3$, tendremos:

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1};$$

y como por otra parte sepamos que simplificando la fraccion $\frac{a^2}{a^3}$ se trasforma en $\frac{1}{a}$, vendremos á concluir que son equivalentes las expresiones $\frac{1}{a}$ y a^{-1}.

En general tenemos por la regla de los exponentes $\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n}$; y por otra parte sabemos que $\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{a^m}{a^m\times a^n}=\frac{1}{a^n}$. Resulta pues que son equivalentes las expresiones $\frac{1}{a^n}$ y a^{-n}.

En efecto, el signo $-$ que precede al exponente n, tomado en el sentido indicado en el §. 62, manifiesta que el exponente negativo propuesto procede de una fraccion cuyo denominador contenia n factores a mas que el numerador, la cual simplificada es $\frac{1}{a^n}$. Se puede pues, en encontrando cualquiera de estas expresiones, sustituir en lugar de ella la otra.

Con arreglo á esta observacion la cantidad $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$, que es equivalente á $a^2\times b^5\times\frac{1}{c^2}\times\frac{1}{d^3}$, se puede trasformar en estotra $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$; es decir, *que se pueden trasferir al numerador todos los factores del denominador con los mismos exponentes que tengan, sin otra novedad que la de estar precedidos estos del signo* $-$.

Y recíprocamente, *cuando una cantidad contenga* *factores con exponentes negativos, los podremos trasladar al denominador, dando á sus exponentes el signo* $+$; y de este manera la cantidad $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$ se convierte en $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$

De la formacion de las potencias de las cantidades complexas.

134 Observaremos ante todas cosas que se indican las potencias de las cantidades complexas encerrando estas cantidades dentro de un paréntesis, sobre el cual se pone á la derecha el exponente de la potencia. La expresion $(4a^2-2ab+5b^2)^3$ denota la tercera potencia de la cantidad $4a^2-2ab+5b^2$. La misma potencia se puede tambien indicar del modo siguiente;

$$\overline{4a^2-2ab+5b^2}^{\,3}.$$

135 Siendo las cantidades binomias las mas sencillas despues de las monomias, deberán ser entre las complexas las primeras cuyas potencias nos propongamos determinar; y asi como por medio de multiplicaciones sucesivas de un binomio hemos hallado (§. 34) su segunda y su tercera potencia, pudiéramos igualmente hallar por el mismo medio cualquiera otra potencia que necesitásemos del mismo binomio; pero asi no obtendriamos mas que resultados particulares, como los que se hallan en la siguiente tabla:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3;$$
$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4 \text{ \&c.}$$

la cual se podrá fácilmente continuar cuanto se quiera; pero no será igualmente facil descubrir en ella la ley que siguen los coeficientes numéricos de estos resultados. Reflexionando sobre lo que practicamos en estas multiplicaciones, echaremos de ver que los coeficientes numéricos provienen de las reducciones que origina la igualdad de los factores que forman cada una de las potencias; y que si descubrimos algun medio de impedir estas reducciones, lograremos poner mas claro la ley que se observa en la composicion de estos productos.

El medio que para esto se ocurre desde luego es suponer por un momento que sean desiguales los segundos términos de los binomios que se hayan de multiplicar, representándolos por los siguientes:

$$x+a;\ x+b;\ x+c;\ x+d\ \&c.$$

Efectuando sucesivamente las multiplicaciones de dos, de tres, de cuatro &c. de estos binomios, y colocando en una misma columna los términos en que se halle la primera parte x elevada á una misma potencia, tendremos:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + ax + ab;\\ & + bx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) &= x^3 + ax^2 + abx + abc;\\ & + bx^2 + acx\\ & + cx^2 + bcx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) &= x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd\\ & + bx^3 + acx^2 + abdx\\ & + cx^3 + adx^2 + acdx\\ & + dx^3 + bcx^2 + bcdx\\ & + bdx^2\\ & + cdx^2\end{aligned}$$

&c. &c. &c.

Sin necesidad de efectuar mas multiplicaciones de estas, se puede ya venir en conocimiento de la ley con que estan formados sus productos; pues reputando por un solo término á la combinacion de todos aquellos en los cuales se halle una misma potencia de la x, y que por esta razon estan colocados en una misma columna, es decir, teniendo presente que por ejemplo,

$$ax^3 + bx^3 + cx^3 + dx^3 = (a+b+c+d)\,x^3\ (\S.\ 11);$$

se puede ya observar en los productos que hemos hallado:

1.º Que en cada uno de ellos hay un término mas que unidades hay en el número de sus factores:

2.º Que el exponente de x *en el primer término es igual al número de los factores; y que despues va disminuyendo una unidad en cada uno de los términos que siguen:*

3.º Que la mas elevada potencia de x *no tiene otro coeficiente que la unidad; la inmediata inferior, cuyo exponente tiene una unidad* *menos, está multiplicada por la suma de los segundos términos de los binomios; la que tiene dos unidades menos en su exponente lo está por la suma de todos los diferentes productos que se pueden obtener multiplicando de dos en dos los segundos términos de los binomios* [1]*; la que tiene tres unidades menos en su exponente lo está por la suma de todos los diferentes productos que se pueden obtener multiplicando de tres en tres los segundos términos de los binomios* [2]*, y así de las demas. Finalmente en el último término, que es el producto de todos los segundos términos de los binomios, y en el cual no aparece la* x*, podemos suponer que se halla esta letra con el exponente cero (§. 37), y que de consiguiente el exponente mas alto de la* x *se ha disminuido de tantas unidades como hay en el número de los factores.*

Aunque no es dificil ver que la forma de estos productos debe permanecer sujeta á las mismas leyes, cualquiera que sea el número de sus factores, se puede demostrar esta verdad de un modo mas convincente que por medio de la analogía.

136 Por decontado es evidente que todo producto de esta especie debe contener todas las potencias sucesivas de x desde aquella cuyo exponente es igual al número de los factores que se han multiplicado, hasta aquella cuyo exponente es cero. Por manera que si representamos por m el número de factores, aquellas potencias vendrán á ser

$$x^{m};\ x^{m-1};\ x^{m-2}\ \text{\&c. hasta } x^{0}.$$

Representemos por las letras A, B, C..............Y los respectivos multiplicadores, ó sean coeficientes de aquellas potencias, comenzando desde x^{m-1}; y como mientras permanezca indeterminado el número m de los factores, debe igualmente permanecer indeterminado el número $m+1$ de términos del producto, no podremos designar mas términos de este que los primeros y los últimos, y tendremos que contentarnos con indicar por medio de una serie de puntos suspensivos los demas términos intermedios que puedan fal-

1 Estos productos se llaman binarios.

2 Estos otros se llaman productos ternarios.

tar para completarlo. Asi que todo el producto vendrá á tener esta forma:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Tx^2 + Ux + Y;$$

y esta expresion representará el producto de un número cualquiera m de factores $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ &c.

Ahora bien, si al producto que acabamos de suponer hallado lo multiplicamos por otro nuevo factor $x+l$, deberá resultar una expresion de esta forma:

$$x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx^3 + Ux^2 + Yx$$
$$+ lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots + lSx^3 + lTx^2 + lUx + lY$$

la cual nos hace ver:

1.º Que si A es la suma de los m segundos términos a, b, c, d &c., será $A+l$ la de los $m+1$ segundos términos a, b, c, d &c. l; y que por consiguiente si la ley indicada para la composicion del coeficiente del segundo término es verdadera en el producto del grado m, se la deberá igualmente observar en la formacion del segundo término del producto del grado $m+1$.

2.º Si es B la suma de todos los productos binarios de las m cantidades a, b, c, d &c., $B+lA$ representará la de los productos binarios de las $m+1$ cantidades a, b, c, d &c. l: porque siendo A la suma de las primeras m cantidades, será lA la de los nuevos productos binarios que pueden formarse combinándose la nueva cantidad l con todas las anteriores; luego si la ley que hemos supuesto para la composicion del tercer término del producto es verdadera cuando este sea del grado m, tambien será verdadera cuando el producto sea del grado $m+1$.

3.º Si es C la suma de todos los productos ternarios de las m cantidades a, b, c, d &c., será $C+lB$ la de todos los productos ternarios de las $m+1$ cantidades a, b, c, d &c. l; pues si B representa la suma de todos los productos binarios de las m cantidades a, b, c, d &c., vendrá á ser lB la suma de todos los nuevos productos ternarios que se pueden formar combinándose la nueva cantidad l con todos los productos binarios de las anteriores; y de consiguiente si en el producto del grado m es verdadera la ley que hemos indicado para la composicion del coeficiente del cuarto término, tambien será verdadera en el producto del grado $m+1$.

Fácilmente se ve que se puede hacer un razonamiento semejante sobre cada uno de todos los demas términos hasta llegar al último lY, el cual será el producto de los $m+1$ segundos términos siempre que Y lo sea de los m segundos términos.

De esto se deduce que pues en el producto de cuatro factores, ó como dicen del cuarto grado, hemos ya observado (§. 135) que el coeficiente del segundo término es la suma de las segundas partes de los factores; que el coeficiente del tercer término es la suma de todos los productos binarios de las mismas segundas partes &c.; se deberá verificar lo mismo en el producto del quinto grado, y por consiguiente en el del sexto; y asi podremos ir subiendo de grado en grado hasta venir en conocimiento de que es general la ley indicada. Por manera que si al producto de un número cualquiera m de factores binomios $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$ &c. lo representamos por

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots\ldots+Tx^2+Ux+Y,$$

será generalmente A la suma de las m cantidades a, b, c &c.; B la de todos los productos binarios de estas cantidades; C la de todos los productos ternarios de estas cantidades, y asi sucesivamente.

Si no contentos con haber ya descubierto la ley de la formacion de todos los términos de esta clase de productos, quisiéremos cifrarla en una expresion algebráica, podremos representar por Nx^{m-n} un término cualquiera del producto, y deberemos tener presente que cuando sea $n=1$, el término representado será el segundo del producto, y N será la suma de las m cantidades a, b, c, d &c.; cuando sea $n=2$, el término será el tercero, y N designará la suma de los productos binarios; cuando sea $n=3$, el término será el cuarto, y N representará la suma de los productos ternarios; cuando $n=10$, el término será el undécimo, y N representará la suma de los productos *denarios*, y asi sucesivamente.

137 Para hacer ahora que los productos de factores binomios que solo tienen el primer término comun.

$$(x+a)(x+b);$$
$$(x+a)(x+b)(x+c);$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ \&c.$$

se trasformen en las potencias de uno cualquiera de ellos, por ejemplo, de $(x+a)$; ó lo que es lo mismo en $(x+a)^2$; $(x+a)^3$; $(x+a)^4$ &c. basta suponer que todas las cantidades b, c, d &c. han venido á ser iguales á a, y sustituir por consiguiente en el producto la letra a en donde quiera que se halle cualquiera de las demas. De este modo todas las cantidades que multipliquen una misma potencia de x, serán iguales entre sí; y el coeficiente del segundo término, que en el producto de cuarto grado, por ejemplo,

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \text{ es } a+b+c+d.$$

se convertirá en $4a$; y siendo el del tercer término del mismo producto

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

se convertirá en $6a^2$; y de aqui es fácil inferir que el coeficiente de cada una de las diferentes potencias de x se convertirá en una sola potencia de a, repetida tantas veces cuantos términos tenga en el producto aquel coeficiente, y designada par el número de factores que contenga cada término. Asi el coeficiente N de la potencia x^{m-n} será la potencia a^n repetida tantas veces cuantos productos diferentes se puedan formar tomando n letras de un número m de ellas; y de consiguiente á la investigacion del número de estos productos se reduce la del coeficiente numérico del término en que se halle la potencia x^{m-n}

138 Para llegar á descubrir aquel número es necesario en primer lugar distinguir las diferentes alternaciones ó permutaciones ó situaciones que pueden tomar las letras ó factores de un producto, de los diferentes productos ó combinaciones que pueden formarse con un cierto número de letras. Con dos letras, por ejemplo a y b, no se puede formar mas de un producto *binario*; pero sus factores son susceptibles de dos alternaciones ó permutaciones ab y ba; con tres letras a, b, c no se puede formar mas de un producto *ternario*; pero sin que varíe el valor del producto, sus factores son susceptibles de seis alternaciones ó permutaciones: abc, acb, bac, bca, cab, cba (§. 88). Con las mismas tres letras se pueden formar tres pro-

ductos binarios enteramente diferentes *ab*, *ac*, *bc*; pero si se atiende á la diferente situacion de los factores, aquellos tres productos vendrán á ser seis: *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.

Esto basta para darnos á conocer que para determinar el número de combinaciones que se pueden formar con cualquier número de letras, es necesario atender á estas tres circunstancias: 1.ª cuántas son todas las letras que se nos proponen: 2.ª de cuántas ha de constar cada una de las combinaciones: 3.ª cuántas son las diferentes situaciones de que en una misma combinacion ó producto son susceptibles las letras ó factores de que se compone.

Para fijar las ideas supongamos que habiéndosenos dado las nueve letras siguientes

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i,$$

se nos pregunte cuántas son las combinaciones de á siete letras que, comprendiendo las permutaciones, pueden resultar de las nueve; y por de contado nos ocurrirá que tomando arbitrariamente una combinacion de seis de estas letras, por ejemplo, *a b c d e f*, podremos agregar á estas sucesivamente cada una de las tres letras restantes *g*, *h*, *i*, y de esta manera tendremos las tres combinaciones de á siete letras:

$$a\,b\,c\,d\,e\,f\,g,\quad a\,b\,c\,d\,e\,f\,h,\quad a\,b\,c\,d\,e\,f\,i.$$

Lo que acabamos de decir respecto de una combinacion particular de seis letras, convendrá igualmente á todas las demas combinaciones de á seis; y de esto deberemos concluir que cada combinacion de á seis letras dará tres de á siete, esto es, tantas como letras falten para que todas estuviesen á un mismo tiempo en una sola combinacion. Luego si representamos por P el número de las combinaciones de á seis letras, tendremos el de las combinaciones de á siete letras multiplicando P por tres ó por $9 - 6$. Poniendo m y n en lugar de los números 9 y 7, y considerando á P como el número de las combinaciones que pueden formarse con m letras entrando en cada combinacion $n - 1$ letras, y atendiendo á las permutaciones, el número de combinaciones de á n letras que de las mismas m letras podrán resultar, deberá representarse por

$$P(m - (n - 1)) \text{ ó } P(m - n + 1).$$

Lo único que á primera vista parece que hemos adelantado con esta fórmula, es haber averiguado que en sabiendo el número de productos *cuaternarios*, por ejemplo, que se pueden sacar de m letras, nos será fácil determinar el de los *quinarios*; en sabiendo el de los *ternarios* se determinará el de los *cuaternarios*; en sabiendo el de los *binarios* determinaremos el de los *ternarios*, y asi sucesivamente; porque suponiendo como suponemos conocidos los valores de m y de n, lo único que falta conocer en la fórmula es el valor de P para poder despues efectuar con las tres cantidades m, n, P las operaciones que la misma fórmula prescribe.

A fin de hacer ver que en esta fórmula estan comprendidos implícitamente todos los casos particulares, propongámonos averiguar cuántos productos binarios ó combinaciones de á dos letras se pueden formar con m letras atendiendo á las permutaciones. En este caso será $n = 2$; y para hacer uso de la fórmula deberemos tener sabido de antemano el número P de combinaciones, si asi pueden llamarse, que se pueden formar con las mismas m letras, tomándolas una á una; porque en este caso $n - 1 = 1$. Ahora bien, este número $P = m$, y de consiguiente la fórmula general se trasformará en $m(m - 2 + 1)$ ó $m(m - 1)$.

Ya que sabemos el número de productos *binarios*, nos será fácil determinar el de los *ternarios* con solo sustituir en la fórmula 3 en lugar de n, y $m(m - 1)$ en lugar de P. Asi tendremos:

$$m(m - 1)(m - 3 + 1);\ \text{ó}\ m(m - 1)(m - 2).$$

Si ahora que ya sabemos el número de los productos *ternarios*, queremos averiguar el de los *cuaternarios*, en la fórmula sustituiremos 4 en lugar de n, y $m(m-1)(m-2)$ en lugar de P, y resultará:
$m(m-1)(m-2)(m-4+1)$; ó $m(m-1)(m-2\ (m-3)$.

Del mismo modo podremos determinar el número de productos *quinarios*, que será $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4)$; y asi podremos calcular progresivamente el número de combinaciones que se pueden formar con m letras, entrando en cada combinacion cualquier número n de ellas y atendiendo á las permutaciones. Este número, que segun hemos visto, está representado por $P(m-n+1)$, lo estará con mas claridad por $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m - n + 1)$: en cuya expresion los puntos suspensivos nos dan á entender que se deben continuar los factores hasta que haya tantos como letras hayan de entrar en cada una de las combinaciones, ó lo que es lo mismo, hasta que el guarismo sustractivo que forma parte de cada factor valga tantas unidades menos una, como letras hayan de entrar en cada combinacion [1].

139 Para pasar ahora del número de las combinaciones que hemos determinado de n letras, al de los productos diferentes, es decir, al de aquellas combinaciones en que no se atiende á las permutaciones, es necesario conocer de antemano el número de permutaciones ó alternaciones de que son susceptibles los factores de un mismo producto. Para esto observaremos que si en cualquiera de las combinaciones se fija en el primer lugar una de las letras, se podrán hacer entre todas las demas tantas permutaciones cuantas permita un producto de $n - 1$ letras. Tomemos, por ejemplo, la combinacion ó producto *abcdefg* compuesto de 7 letras; y fácilmente veremos que dejando en el primer lugar la a, podemos escribir este mismo producto de tantas maneras cuantas sean las permutaciones de que sean susceptibles los factores del producto de seis letras *bcdefg*; y pudiendo cada una de las 7 letras ocupar el primer lugar que hemos supuesto ocupado por la a; es claro que si llamamos Q

1 En el número que acabamos de determinar de combinaciones, no estan comprendidas aquellas en las cuales se halla repetida muchas veces una misma letra; porque no pueden sernos útiles para el asunto de que aqui tratamos. Sin embargo, como pueden serlo para el cálculo de las probabilidades que tiene por fundamento la teoría de las combinaciones y permutaciones, observaremos en el ejemplo propuesto que cada combinacion de á 6 letras *abcdef*, pudiéndose combinar de nuevo con cada una de las 9, producirá 9 combinaciones de á 7. De consiguiente si P representa el número de combinaciones de á 6, el de las de á 7 estará representado por $P \times 9$, y generalmente si m es el número de todas las letras, y P el de las combinaciones en que entran $n - 1$ de ellas, Pm será el número de las combinaciones, en cada una de las cuales entran n letras. Siendo pues m el número de combinaciones, si asi pueden llamarse, de las letras tomadas una á una, será $m \times m$ ó m^2 el de las combinaciones binarias; $m^2 \times m$ ó m^3 el de las ternarias; y finalmente m^n representará el número de combinaciones que pueden formarse con m letras, entrando en cada combinacion n de ellas, y atendiendo no solo á las permutaciones de las diferentes letras que entran en cada una, sino tambien á las repeticiones de una misma letra.

el número de permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de 6 letras, $Q \times 7$ representará el de las permutaciones de los factores de un producto compuesto de 7 letras. De aqui se sigue que si representamos por Q el número de las permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de $n-1$ letras Qn representará el número de las permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto de n letras.

La sencillísima fórmula Qn comprende cuantos casos particulares pueden ocurrir; porque si suponemos $n=2$, es decir, si queremos averiguar de cuantas permutaciones son susceptibles los dos factores de un producto binario, en observando que cuando no hay mas de una letra es $Q=1$, resulta $1 \times 2=2$ para el número de permutaciones de un producto de dos letras. Suponiendo ahora $Q=1 \times 2$, y $n=3$, tendremos $1 \times 2 \times 3=6$ para el número de permutaciones de un producto de tres letras. Haciendo del mismo modo $Q=1 \times 2 \times 3$, y $n=4$, resultarán $1 \times 2 \times 3 \times 4$ ó 24 permutaciones posibles en un producto de 4 letras, y asi sucesivamente. Por manera que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n$, vendrá á ser la expresion general del número de permutaciones de que son susceptibles los factores de un producto formado de n letras.

140 En habiendo comprendido lo que acabamos de exponer, se verá con facilidad que dividiendo el número total de las combinaciones de á n letras que se pueden formar con las m letras propuestas, por el número de las permutaciones de que son susceptibles las n letras que entran en cada combinacion, el cuociente será el número de los diferentes productos que se pueden hacer tomando de todas las maneras posibles n factores entre las m letras. Estará pues, bien representado este número por la expresion fraccionaria $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$, ó mas claramente por estotra............

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots \times n}$$; y de consiguiente la expresion Nx^{m-n} (§. 136) se trasformará en $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$,

ó mas bien en $$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots\ldots \times n} a^n x^{m-n};$$

y cualquiera de estas vendrá á ser la expresion general de cualquiera de los términos del polinomio equivalente á $(x+a)^m$, *

Estando representado por $\frac{P(m-n+1)}{Qn}a^n x^{m-n}$ un término cualquiera de aquel polinomio, el término que inmediatamente le anteceda lo deberá estar por $\frac{P}{Q}a^{n-1}x^{m-n+1}$; porque retrocediendo hácia el primer término, aumenta una unidad el exponente de x; el de a disminuye otro tanto; y ademas P y Q son las cantidades relativas al número $n-1$.

141 Si hacemos $\frac{P}{Q}=M$, se convertirán aquellos dos términos consecutivos en $Ma^{n-1}x^{m-n+1}$, y $M\frac{(m-n+1)}{n}a^n x^{m-n}$; cuyos resultados nos manifiestan cómo formaremos cualquier término del polinomio epuivalente á $(x+a)^m$, por medio del que le anteceda.

En efecto, sabiendo como sabemos que el primer término es x^m, hallaremos el segundo haciendo $n=1$; y puesto que el coeficiente de x^m es la unidad, será $M=1$; y vendrá á ser el segundo término $\frac{1\times m}{1}ax^{m-1}$, ó $\frac{m}{1}ax^{m-1}$. Para pasar el tercer término haremos $M=\frac{m}{1}$, y $n=2$; lo cual da $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$. Del mismo modo hallaremos el cuarto, suponiendo $M=\frac{m(m-1)}{1.2}$, y $n=3$;

* Es importante observar que haciendo sicesivamente $n=2$; $n=3$; $n=4$&c. se convierte la fórmula $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ en $\frac{m(m-1)}{1.2}$;.......... $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$; $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ &c.; expresiones que nos dan á conocer respectivamente cuántos productos binarios, ternarios, cuaternarios &c. se pueden formar con un número cualquiera m de letras, y de consiguiente cuántos *ambos*, *ternos*, *cuaternos* &c. hay en m números, ó cuántas combinaciones binarias, ternarias &c. se pueden formar con m cosas cualesquiera, excluyendo las permutaciones.

de donde resulta $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}$, y asi sucesivamente: por cuyo medio hallaremos la siguiente serie, conocida con el nombre de *fórmula de binomio de Newton:*

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \&c.$$

de la cual se puede deducir esta regla:

Para pasar de un término al inmediato siguiente se multiplicará el coeficiente numérico por el exponente que x *tenga en aquel primero, y se le dividirá por el número que designe el lugar que ocupe el mismo término; se agregará una unidad al exponente de* a, *y se quitará otra al de* x.

Aunque no sea posible fijar el número de los términos de esta fórmula mientras no se determine el valor particular de m, no debe sin embargo quedar ya duda alguna sobre la ley que siguen todos los términos, por distantes que se los suponga del primero; por manera que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}$$

representará del modo mas general que es posible al término que tenga antes de sí n términos.

Esta última fórmula se llama el *término general de la serie*

$$x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + \&c.;$$

porque haciendo en ella sucesivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$ &c. resultan todos los términos de esta serie.

142 Hagamos ahora uso de la regla del párrafo anterior para desenvolver en un polinomio la quinta potencia del binomio $x+a$, ó lo que es equivalente, la expresion $(x+a)^5$. Debiendo ser el primer término

$$x^5 \text{ ó } 1a^0x^5 \text{ (§. 37);}$$

el segundo será $\quad \frac{5}{1}a^1x^4$ ó $5ax^4$;

el tercero $\frac{5\times4}{2}a^2x^3$ ó $10a^2x^3$;

el cuarto $\frac{10\times3}{3}a^3x^2$ ó $10a^3x^2$;

el quinto $\frac{10\times2}{4}a^4x^1$ ó $5a^4x$;

el sexto $\frac{5\times1}{5}a^5x^0$ ó a^5.

Aqui se termina la operacion; porque para pasar al término siguiente, en caso que lo hubiese, seria necesario multiplicar por el exponente de x en el sexto término, y ya se ve que este exponente es *cero*.

Esto mismo nos lo manifiesta la expresion ó fórmula del término general; porque teniendo el séptimo término por coeficiente numérico $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3(m-4)(m-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$, contiene el factor $m-5$, que en el caso actual se convierte en $5-5$ ó en 0; y como deba entrar este mismo factor en todos los términos siguientes, los hace nulos ó los reduce todos á *cero*.

Reuniendo los términos que hemos hallado mas arriba, tendremos:

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

143 La fórmula general que hemos determinado (§. 141) puede igualmente servirnos para *desenvolver* cualquier potencia de otro cualquier binomio. Si tuviésemos, por ejemplo, que formar la sexta potencia del binomio $2x^3-5a^3$; sustituyendo en aquella fórmula general 6 en lugar de m; $2x^3$ en lugar de x; y $-5a^3$ en lugar de a, se trasformaria en esta expresion:

$$\begin{aligned}(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 &+ 15(-5a^3)^2(2x^3)^4 \\ +20(-5a^3)^3(2x^3)^3 &+ 15(-5a^3)^4(2x^3)^2 \\ + 6(-5a^3)^5(2x^3) &+ (-5a^3)^6;\end{aligned}$$

y efectuando las operaciones que solo estan indicadas en cada uno de los términos resultaria

$$\begin{aligned}64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 \\ + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.\end{aligned}$$

Los términos de este polinomio son alternativamente positivos y negativos; y ya se deja ver que lo mismo sucederá siempre que el segundo término del binomio propuesto tenga el signo —, ó sea sustractivo.

144 A fin de facilitar la aplicacion de la fórmula general á otros innumerables casos que pueden ocurrir análogos al que acabamos de proponer, se la suele dar otra forma deducida de las observaciones siguientes:

Segun lo expuesto (§§. 36 y 133)

$$x^{m-1}=\frac{x^m}{x};\ x^{m-2}=\frac{x^m}{x^2};\ x^{m-3}=\frac{x^m}{x^3}\ \&c.;$$

y de consiguiente la fórmula general se puede trasformar en esta otra:

$$x^m+\frac{m}{1}\times\frac{a}{x}x^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\times\frac{a^2}{x^2}x^m+\&c.$$

y habiendo conseguido por medio de esta trasformacion que sea comun á todos los términos del polinomio el factor x^m, se podrá escribir la fórmula de este modo:

$$x^m\left(1+\frac{m}{1}\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\times\frac{a^4}{x^4}+\&c.\right)$$

sacando fuera del paréntesis el factor comun x^m. Para hacer ahora uso de esta fórmula es necesario primeramente *formar la serie de los números representados por las expresiones*

$$\frac{m}{1},\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4}\ \&c.;$$

multiplicar inmediatamente el primero de estos números por la fraccion $\frac{a}{x}$; *multiplicar despues el resultado por el segundo número, y otra vez por la fraccion* $\frac{a}{x}$; *despues este resultado por el tercer número y por la fraccion* $\frac{a}{x}$; *y así sucesivamente: reunir todos estos términos; añadirles la unidad; y últimamente multiplicarlo todo por el factor* x^m.

En el ejemplo $(2x^3-5a^3)^6$ seria necesario escribir $(2x^3)^6$ en lugar de x^m, y $-\frac{5a^3}{2x^3}$ en el de $\frac{a}{x}$. Dejamos al lector el cargo de efectuar el cálculo.

145 Aun para desenvolver las potencias de los polinomios puede servirnos la misma fórmula que hemos hallado para las de los binomios, con tal que sepamos dar la forma de binomio á cualquier polinomio que se nos proponga. Tratemos, por ejemplo, de desenvolver la tercera potencia del trinomio $a+b+c$; y con solo suponer que $b+c=l$, vendrá á ser $a+b+c=a+l$, y de consiguiente

$$(a+b+c)^3=(a+l)^3=a^3+3a^2l+3al^2+l^3.$$

Restituyendo ahora en lugar de l el binomio $b+c$, al cual representa, tendremos

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3;$$

y ya entonces no faltará mas que desenvolver las potencias del binomio $b+c$, y efectuar con estas potencias las multiplicaciones indicadas en cada uno de los términos. Asi tendremos

$$\begin{aligned}&a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\&\quad+3a^2c+6abc+3b^2c\\&\qquad\quad+3ac^2+3bc^2\\&\qquad\qquad\quad+c^3\end{aligned}$$

La misma fórmula general que, como acabamos de hacer ver, nos puede servir para desenvolver cualquier potencia de cualquier binomio ó polinomio, cuando el exponente m de la potencia sea un número entero y positivo, es igualmente aplicable aun á los casos en que m sea un quebrado propio ó impropio, ó cualquiera de las expresiones llamadas *cantidades negativas*. Esta particularidad importante necesita demostraoion; pero como por ahora no pueda sernos de utilidad alguna, la remitiremos al *complemento del Algebra*.

De la extraccion de las raices de las cantidades complexas.

146 Conociendo ya el modo de componer las potencias de las cantidades complexas, pasaremos á descomponerlas, ó lo que es lo mismo, á la extraccion de

sus raices, comenzando por la raiz cúbica de los números.

Para extraer la raiz cúbica de cualquier número es necesario ante todas cosas conocer los cubos de los números dígitos, y por esta razon los presentamos en la segunda línea de la tabla siguiente:

Raic. cúbs.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos.......	1	8	27	64	125	216	343	512	729

y siendo 1000 el cubo de 10, debemos inferir que mientras no esté representado por mas de tres cifras un número, su raiz cúbica no podrá estar representada por mas de una cifra.

La formacion del cubo de un número representado por una combinacion de dos cifras se efectúa de un modo análogo á la del cuadrado, porque descomponiendo el número propuesto en *decenas y unidades*; representando despues el número de las primeras por a y el de las segundas por b; y teniendo presente que (§. 34)

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

inferiremos que *el cubo ó la tercera potencia de cualquier número compuesto de decenas y de unidades consta de cuatro partes, que son: 1.ª el cubo de las decenas: 2.ª tres veces el cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades: 3.ª tres veces las decenas multiplicadas por el cuadrado de las unidades; y últimamente 4.ª el cubo de las unidades.*

Sea, 47, por ejemplo, el número cuya tercera potencia nos propongamos hallar; y haciendo $a=4$ *decenas*, ó 40; y $b=7$ *unidades*, tendremos:

$$
\begin{array}{ll}
1.^{a} & a^3 = 64000 \\
2.^{a} & 3a^2b = 33600 \\
3.^{a} & 3ab^2 = 5880 \\
4.^{a} & b^3 = 343 \\
\hline
\text{Total....} & = 103823 = 47 \times 47 \times 47.
\end{array}
$$

Para retroceder ahora del cubo 103823 á su raiz 47, observaremos en primer lugar que 64000, cubo de las 4 decenas, no tiene cifras significativas de un orden inferior á los millares, podemos pues, cuando busquemos el cubo de las decenas, desentendernos de las centenas, de las decenas y de las unidades del número 103823. En este supuesto, disponiendo la operacion á semejanza de lo que hemos practicado (§. 91) para la extraccion de la raiz cuadrada, separaremos con una coma las tres primeras cifras de la derecha; y el mayor cubo contenido en el número 103, representado por las restantes, será el de las decenas. En la tabla anterior veremos que este cubo es 64, cuya raiz es 4; pondremos pues 4 en el sitio destinado para la raiz; restaremos despues 64 de 103; y al lado del residuo 39 bajaremos las tres últimas cifras. El residuo total 39823 deberá contener aun las tres partes que segun la fórmula faltan para completar el cubo de cualquier binomio, á saber: *tres veces el cuadrado de las decenas multiplicado por las unidades*, ó $3a^2b$; *tres veces las decenas multiplicadas por el cuadrado de las unidades*. ó $3ab^2$, *y el cubo de las unidades* ó b^3. Si supiésemos cuál era el valor del producto $3a^2b$, conociendo ya como conocemos las decenas a, obtendriamos las unidades b, dividiendo aquel producto por $3a^2$. Pero aunque en realidad no conocemos el valor de $3a^2b$, sabemos sin embargo que este producto no debe tener cifra alguna significativa de un orden inferior á las centenas, puesto que contiene el factor a^2 que expresa el cuadrado de las decenas; no puede por consiguiente hallarse sino en la parte 398 que queda del número 39823 despues de haber separado de él las decenas y las unidades; parte que contiene ademas las centenas procedentes del triple producto $3ab^2$ de las decenas por el cuadrado de las unidades y del cubo b^3 de las unidades.

Dividiendo 398 por 48 ó por 3×16, que en el ejemplo propuesto viene á ser el triple del cuadrado de las decenas $3a^2$, hallaremos por cuociente 8. Pero no por eso hemos de creer que son 8 las unidades que buscamos de la raiz, sin ejecutar previamente la comprobacion, formando con este número las partes del cubo que deben estar contenidas en el residuo 39823, y viendo si la suma de aquellas tres partes se puede restar de este residuo. Suponiendo pues que sea $b=8$, será:

$$\begin{aligned} 3a^2b &= 38400 \\ 3ab^2 &= 7680 \\ b^3 &= 512 \\ \hline \text{total....}\ & 46592; \end{aligned}$$

y como este resultado no pueda restarse de 39823, inferiremos que el número de las unidades de la raiz debe ser menor que 8. Asi que supondremos que sea 7; y ejecutando con este número las mismas operaciones que con el 8; y siendo exactamente igual á 39823 la suma de las tres partes; restándolas del residuo que nos ha quedado del número propuesto, no queda nada; y asi vendremos en conocimiento de que 47 es la raiz cúbica que buscamos.

En vez de la comprobacion que acabamos de ejecutar para ver cuál de los números 8 y 7 era el de las unidades de la raiz, suelen algunos elevar inmediatamente al cubo el número representado por las dos cifras que suponemos halladas, y comparar este cubo con todo el número propuesto. Por este método hallariamos que el cubo de 48, ó lo que es lo mismo,

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

y siendo este número mayor que el propuesto 103823 echariamos de ver, como antes, que debe ser menor que 8 el número de las unidades de la raiz.

147 Lo que hemos ejecutado en el ejemplo anterior, puede servirnos de norma para extraer la raiz cúbica de todos los números representados por mas de tres y menos de siete cifras. En todos ellos, despues de haber separado las tres primeras cifras de la derecha, buscaremos el mayor cubo contenido en el número representado por las restantes de la izquierda: pondremos su raiz en el sitio destinado para ella; y el cubo lo restaremos de aquella primera parte del número propuesto; á la derecha del residuo escribiremos las tres últimas cifras; separaremos las dos de la derecha, y al número representado por todas las restantes lo consideraremos como un dividendo; el divisor será el triple del cuadrado de la parte que suponemos hallada de la raiz; efectuaremos la division; y antes de escribir el cuociente á la derecha de la primera parte de la raiz, formaremos las tres últimas partidas del cubo de un binomio, y veremos si la suma de ellas se puede restar de todo lo que haya quedado del número propuesto despues de haberle quitado el cubo de la primera parte de la raiz; ó elevaremos al cubo el número representado por la

cifra hallada de la raiz y la del cuociente; y veremos si este cubo se puede restar de todo el número propuesto. Si no pudiere efectuarse la una ó la otra sustraccion, vendremos en conocimiento de que hemos dado al cuociente mayor valor del que debiamos; le quitaremos pues una unidad: repetiremos la comprobacion, y asi sucesivamente hasta que hallemos un resultado con el cual se pueda efectuar la sustraccion. Efectuada que sea, si no quedase residuo alguno, será esto señal de que el número propuesto es un cubo perfecto, y de que su raiz cúbica exacta es el número representado por la combinacion de las dos cifras que ya suponemos halladas; pero si hubiese quedado algun residuo, el número que habremos hallado no será la raiz exacta del propuesto, sino la del mayor cubo contenido en él. En este último caso suele á veces ser tan considerable el residuo, que nos infunde rezelos de que acaso habremos dado á la segunda parte de la raiz menos valor del que debiéramos.

Para salir de esta duda tendremos presente que el cubo de $a+b$, cuando $b=1$, es lo mismo que el de $a+1$, y tiene por expresion

$$a^3+3a^2+3a+1;$$

cantidad que excede á a^3 cubo de a, en

$$3a^2+3a+1.$$

Esto nos da á conocer que *por crecido que sea el residuo, mientras sea menor que tres veces el cuadrado de la raiz hallada, mas tres veces esta misma raiz, mas la unidad, no habrá que añadir ninguna unidad á la segunda parte de la raiz.*

148 Para extraer la raiz cúbica de 105823817, observaremos en primer lugar que, sea cual fuere el número de cifras con que se haya de representar la raiz,

podemos considerarla como compuesta de unidades y decenas; y sabiendo, como sabemos, que al cubo de estas no pueden pertenecer las tres últimas cifras de la derecha, es consiguiente que deberá hallarse en 105823. Pero el cubo mayor contenido en 105823 tendrá en su raiz mas de un guarismo, y podrá por consiguiente descomponerse en unidades y decenas, y no bajando de millar el cubo de estas decenas, no podrán ser parte de él las tres últimas cifras 823. Si despues de la separacion de estas quedasen aun mas de tres cifras á la izquierda, se volverá á repetir el mismo razonamiento, y se llegará de esta manera á señalar el sitio del cubo de las unidades del orden mas elevado de la raiz que se busca, dividiendo las cifras con que esté representado el número propuesto, en trozos ó secciones de á tres guarismos, procediendo de derecha á izquierda; bien entendido que la última seccion podrá contener menos de tres cifras.

Esto supuesto, buscaremos por el método prescrito en el párrafo precedente la raiz cúbica del número representado por las dos primeras secciones de la izquierda, y hallaremos que el resultado es 47; restaremos el cubo de este número del representado por las dos primeras secciones, y á la derecha del residuo 2000 bajaremos la seccion siguiente 817; y el número 2000817 deberá

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
1038,23	
20008,17	
1058238,17	
0000000,00	

contener las tres últimas partes del cubo de un número cuyas decenas son 47, y cuyas unidades buscamos; hallaremos pues estas unidades imitando lo que hemos practicado en el ejemplo anterior, es decir, separando las dos últimas cifras 17 de hácia la derecha, y dividiendo 20008 que queda á la izquierda por 6627, triple del cuadrado de 47, nos resultará de esta division el cuociente 3, y elevando al cubo el número 473, se hallará por resultado el mismo número propuesto; por manera que efectuando la sustraccion no quedará residuo alguno, y esto nos hará ver que el número propuesto es un cubo perfecto, y que su raiz cúbica exacta es 473.

La explicacion de lo que hemos practicado en este ejemplo puede servir de regla general; pues si el número propuesto hubiese tenido alguna otra seccion de cifras, se hubiera hecho con ella lo mismo que hemos ejecutando con la tercera, y asi podriamos continuar cuanto fuese necesario la operacion: debiendo tener entendido que si alguno de los números que en estas operaciones parciales nos sirven de dividendos fuese menor que su respectivo divisor, deberemos poner un cero á la derecha de las cifras que hayamos hallado de la raiz; y hecho esto, bajaremos la siguiente seccion de cifras; separaremos las dos de la derecha; pondremos dos ceros á continuacion del divisor anterior; y efectuada la division se practicará con el cuociente lo mismo que con los anteriores.

149 Una vez *que se obtiene el cubo de una fraccion multiplicándola por su cuadrado, ó lo que es lo mismo elevando al cubo su numerador y su denominador, es consiguiente que por la inversa se vuelva á obtener la raiz cúbica de cualquier fraccion extrayendo la del númerador y la del denominador*. Si, por ejemplo, elevando al cubo el numerador y el denominador de la frac-

cion $\frac{5}{6}$ hallamos que el cubo de ella es $\frac{125}{216}$, por la inversa extrayendo la raiz cúbica del numerador y del denominador hallaremos que la raiz cúbica de $\frac{125}{216}$ es $\frac{5}{6}$; porque la de 125 es 5, y la de 216 es 6.

Esta regla es general, y la mejor que puede seguirse siempre que se sepa que son cubos perfectos el numerador y el denominador; pero cuando ninguno de los dos términos sea cubo perfecto, será muy conveniente hacer que uno de ellos lo sea, multiplicando ambos términos por el cuadrado de cualquiera de ellos. Por lo comun se prefiere en tal caso el multiplicar los dos términos de la fraccion propuesta por el cuadrado de su denominador; porque en el denominador que resulta de esta operacion se halla el cubo del denominador primitivo; y solo falta extraer la raiz del numerador, y dividirla por el primitivo denominador. Si nos propusiésemos, por ejemplo, extraer la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$, multiplicariamos los dos términos de esta fraccion por 25, cuadrado del denominador, y tendriamos la fraccion equivalente $\frac{75}{5\times5\times5}$. Ahora, la raiz cúbica del nuevo denominador es 5; y por lo tocante á la del numerador 75, solo sabemos que es mayor que 4 y menor que 5. Si nos atenemos al 4, tendremos que la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$ es $\frac{4}{5}$, no exactamente, pero sin faltaale para ser exacta un quinto de la unidad. Para que resulte con mayor aproximacion será necesario aproximar mas á la exactitud la raiz cúbica de 75 por los medios que daremos á conocer dentro de poco.

Cuando el denominador sea desde luego un cuadrado perfecto, será suficiente multiplicar los dos términos de la fraccion por la raiz cuadrada del denominador. Asi para hallar la raiz cúbica de $\frac{4}{9}$, multiplicaremos los dos términos por 3, raiz cuadrada de 9, y resultará la fraccion equivalente $\frac{12}{3\times3\times3}$. Extrayendo ahora la raiz del mayor cubo 8 contenido en 12, nos resultará que la raiz buscada es $\frac{2}{3}$ sin faltarle, para ser exacta, ni un tercio siquiera de la unidad.

Aun cuando no sea cuadrado el denominador de la fraccion propuesta, se la puede á veces trasformar en otra equivalente cuyo denominador sea cubo, sin necesidad de multiplicar los dos términos por el cuadrado del denominador primitivo. Si nos propusiéramos extraer la raiz cúbica de $\frac{29}{32}$, con solo doblar los dos términos tendriamos la equivalente $\frac{58}{64}$ ó $\frac{58}{4\times4\times4}$, cuyo denominador es ya un cubo perfecto, y de consiguiente se la podrá aplicar la misma regla que á las anteriores.

150 De lo demostrado (§. 97) se sigue que la raiz cúbica de todo número que no sea un cubo perfecto, no puede ser expresada exactamente por fraccion alguna, por grande que sea el denominador de esta fraccion: es pues una cantidad irracional, pero de una especie diferente de la raiz cuadrada de un número que no sea cuadrado; de manera que es absolutamente imposible designar alguna raiz cuadrada incomensurable que sea igual á otra raiz cúbica de un número que no sea cubo perfecto [1].

[1] Si suponiendo que b no sea un cubo perfecto, ni a un cuadrado perfecto, pudiera ser $\sqrt[3]{b}=\sqrt{a}$, seria $b=a\sqrt{a}$, y $\frac{b}{a}=\sqrt{a}$. Seria pues comensurable $\sqrt{a}$, contra lo supuesto.

Los principios en que se funda esta demostracion, se hallan en los §§. 164 y sig.

151 Siguiendo un método análogo al que expusimos (§. 103) para aproximar la raiz cuadrada, podriamos igualmente aproximar la raiz cúbica de los números que no la tienen exacta, valiéndonos para ello de las fracciones ordinarias; y si no nos detenemos á manifestar los fundamentos de la fórmula $b = \frac{N - a^3}{3a^2}$, que nos puede servir de norma para esta aproximacion, es porque ya no debe ser dificultoso el hallarla, y sobre todo porque no es nada cómodo este medio de aproximar la raiz.

En caso de querer hacer uso de las fracciones ordinarias para esta aproximacion, lo mejor es proponernos expresar la raiz en partes de una denominacion determinada, y á consecuencia trasformar el número propuesto en una fraccion equivalente cuyo denominador sea el cubo del que la raiz deba tener. Si, por ejemplo, nos propusiéremos extraer la raiz cúbica de 22 expresada en quintos, ó de modo que no la falte para ser exacta $\frac{1}{5}$ de la unidad, trasformaremos el número propuesto en la fraccion equivalente $\frac{2750}{125}$, cuyo denominador es el cubo de 5; y como el número entero que mas se aproxima á la raiz exacta de 2750 es 14, inferiremos que $\frac{14}{5}$ ó $2\frac{4}{5}$ es la raiz cúbica de 22, aproximada de modo que no la falta para ser exacta $\frac{1}{5}$ de la unidad.

152 El método que por mas cómodo es el mas usado para aproximar cuanto se quiera á la exactitud la raiz cúbica de un número que no sea cubo perfecto, consiste en convertir este número en fraccion decimal; bien que teniendo presente que es necesario trasformarlo en milésimas para que en la raiz resulten décimas; en millonésimas para que en la raiz resulten centésimas; en milmillonésimas para que en la raiz haya mi-

lésimas &c.; porque por la inversa del cubo de cualquier número de décimas es un número de milésimas; el cubo de cualquier número de centésimas es un número de millonésimas, y en general el número de las cifras decimales del cubo es triple del de la raiz. De esto se infiere que se deben poner á la derecha de las cifras con que esté representado el número propuesto tres veces tantos ceros cuantas hayan de ser las decimales que se quieran sacar en la raiz. Despues se efectuará por la regla expuesta (§. 148) la extraccion de la raiz del número representado por la nueva combinacion de cifras, y en el resultado se separará el número que se haya pedido de cifras decimales.

Si quisiéremos, por ejemplo, extraer la raiz cúbica de 327, aproximada de modo que no la falte para la exactitud una centésima, escribiremos seis ceros á continuacion de aquellas tres cifras, y extraeremos por la regla dada la raiz de 327000000. He aqui la operacion:

327,000,000	688
216	
1110,00	108
314432	13872
125 680,00	
3256 606 72	
13 393 28	

Se separan despues dos cifras decimales en el resultado, y será 6,88 la raiz aproximada que buscábamos; pero seria aun mas aproximada 6,89; porque aunque el cubo de este número es mayor que 327, se le aproxima mas que el de 6,88.

Si el número propuesto tuviere ya decimales, deberemos poner á su derecha, antes de comenzar la extraccion, tantos ceros cuantos sean necesarios para que el número de cifras decimales sea múltiplo de 3. Si, por ejemplo, nos propusiéremos extraer la raiz cúbica de 0,07, escribiremos 0,070, y sacando la raiz de 70 milésimas hallaremos 0,4; y si desde luego nos hubiésemos propuesto llevar la aproximacion hasta las centésimas, hubiéramos puesto tres ceros mas, con lo cual habriamos tenido 0,070000, y siendo 41 el número entero que mas se aproxima á la raiz de 70000, será 0,41 la de 0,07 con diferencia de menos de una centésima.

153 Despues de haber expuesto los medios de extraer la raiz cuadrada y la raiz cúbica de los números, podremos fácilmente deducir de la fórmula del binomio un método análogo para obtener la raiz de cualquier grado; pero antes de exponer este método, haremos algunas observaciones acerca de la extraccion de las raices cuyo exponente es un número compuesto de dos ó mas factores.

La raiz cuarta, por ejemplo, se puede extraer por medio de dos extracciones sucesivas de raices cuadradas; porque tomando primeramente la raiz cuadrada de toda cuarta potencia a^4, venimos á parar al cuadrado a^2; y extrayendo de nuevo la raiz cuadrada de aquel primer resultado, tendremos a, que es justamente la raiz cuarta de la cantidad primitiva a^4.

La extraccion de la raiz octava de cualquier número se podrá efectuar por medio de tres extracciones sucesivas de raices cuadradas, porque representando, como nos es permitido, por a^8 el número propuesto, es facil ver que la raiz cuadrada de a^8 es a^4; que la de

a^4 es a^2; y que últimamente la de a^2 es a.

Del mismo modo se puede hacer ver que toda raiz de un grado indicado por alguno de los números 16, 32, 64 &c., y en general por alguna potencia de 2, se puede obtener por medio de una serie de extracciones de raices cuadradas. Igualmente la extraccion de cualquiera raiz de un grado indicado por alguna potencia de 3 como 9, 27, 81 &c., se podrá efectuar extrayendo sucesivamente dos ó mas raices cúbicas.

Las raices cuyos exponentes sean números compuestos de potencias de 2 y de 3 se podrán reducir á raices cuadradas y cúbicas; y en general, *toda raiz cuyo exponente sea un número compuesto de dos ó mas factores podrá convertirse en dos ó mas raices, cuyos exponentes sean estos factores.* Obtendremos, por ejemplo, la raiz sexta, extrayendo primero la raiz cuadrada del número propuesto, y en seguida la raiz cúbica de aquella raiz cuadrada, ó *vice versa.* Para convencernos de esto bastará hacernos cargo de que ejecutando estas operaciones con a^6, que puede representar cualquier número propuesto, hallamos primeramente a^3, y despues a; ó hallamos primeramente a^2, y despues a. Esto nos hace ver que es indiferente el orden con que debemos extraer las dos raices en que se resuelve la sexta que nos proponiamos extraer.

154 Pasemos ahora á manifestar cómo se pueda deducir de la fórmula del binomio una regla general para extraer una raiz de cualquier grado; y para hacerlo mas perceptible supongamos que hayamos de extraer la raiz quinta de algun número. El razonamiento que vamos á hacer para resolver esta cuestion particular, cotejado con el que nos ha dirigido en la extraccion de las raices cuadrada y cúbica, nos dará á conocer el modo de generalizarlo.

Propongámonos pues extraer la raiz quinta de 231554007. Observemos en primer lugar que el menor número representado por una combinacion de dos cifras, es decir, el 10, tiene seis en su quinta potencia, que es 100000; y de aqui inferiremos que la raiz quinta del número propuesto tiene por lo menos dos cifras. Asi que, podremos representar esta raiz por el binomio $a+b$, designando por a las decenas, y por b las unidades; á lo cual es consiguiente que el número propuesto deba representarse por la quinta potencia de $a+b$, ó lo que es lo mismo por

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \&c.$$

No es necesario poner de manifiesto todos los términos de esta potencia, porque nos basta conocer la composicion de los dos primeros como lo vamos á hacer ver.

Esto supuesto, es claro que no pudiendo a^5 ó la quinta potencia de las decenas de esta raiz tener cifras significativas de orden inferior á las *centenas de millar*, no la deben pertenecer las cinco primeras cifras de la derecha: separemos pues estas cinco cifras; y si quedasen mas de cinco á la izquierda, haremos con respecto á ellas el mismo razonamiento que acabamos de hacer; y de este modo vendrán las cifras del número propuesto á quedar divididas en trozos ó secciones de á cinco cifras, procediendo de derecha á izquierda; y en la última seccion, que podrá tener menos de cinco cifras, se hallará la quinta potencia de las unidades del orden superior que deba haber en la raiz.

En la tabla de las quintas potencias de los números dígitos vemos que 2315 se halla entre la quinta potencia de 4, que es 1024, y la de 5, que es 3125.

2315,54007	47
1024	
12915,4007	1280

Sabemos pues que 4 es el número de las decenas de la raiz que buscamos; y restando la quinta potencia de este número ó 1024 de la primera seccion 2315 del número propuesto, tenemos el residuo 1291, á cuyo lado bajamos la seccion siguiente 54007. El número representado por la combinacion de las nueve cifras deberá contener las cinco partes ó términos $5a^4b + 10a^3b^2 + \&c.$ restantes de $(a+b)^5$ despues de haber sustraido la primera parte ó término a^5; pero el término que tiene unidades de orden mas elevado es $5a^4b$ ó cinco veces la cuarta potencia de las decenas multiplicada por las unidades, porque no puede tener cifras significativas de orden inferior al de las *decenas de millar*, y de consiguiente debe hallarse en el número 12915. Separaremos pues las cuatro últimas cifras de la derecha, que no pertenecen al término $5a^4b$; y el número 12915 que queda á la izquierda contendrá este término, mas las decenas de millar procedentes de los términos siguientes. Por manera que 12915 es mayor que $5a^4b$; y de ahí es que dividiendo 12915 por $5a^4$, ó por cinco veces la cuarta potencia de las cuatro decenas halladas, no podemos tener seguridad alguna de que el cuociente sea el número que buscábamos de las unidades de la raiz; lo que únicamente sabemos con certeza es que este número no puede ser mayor que aquel cuociente. Asi es que dividiendo 12915 por $5a^4$ ó por 1280, hallaremos por cuociente 10; pero no deberemos poner en la raiz mas de 9; y aun antes de adoptar este valor debemos ver si el número 49 representado por las dos cifras 4 y 9 combinadas produce ó no una quinta potencia mayor que el número propuesto. Por este medio hallamos que se deben rebajar del 49 dos unidades, y que la verdadera raiz es 47; bien que resulta un residuo igual á 2209000; porque la quinta potencia de 47 es 229345007; y de consiguiente la raiz exacta del número propuesto está entre 47 y 48.

Si en el número propuesto hubiese alguna otra seccion de cifras, la escribiriamos á la derecha del residuo que ha resultado de la última sustraccion; y con el número representado por toda la nueva combinacion practicariamos la misma serie de operaciones que hemos ejecutado con el que resultó despues de haber puesto á la derecha del primer residuo la segunda seccion; y asi sucesivamente.

Ya es fácil ver que todo lo que hemos practicado para extraer las raices cuadrada y cúbica de las fracciones, y para aproximar las raices incomensurables de aquellos dos grados, se podria de un modo análogo aplicar á la raiz quinta; y aun podriamos sin gran dificultad generalizarlo para la extraccion de la raiz de cualquiera otro grado.

155 En los mismos principios está fundado el método de extraer las raices de las cantidades literales. Un solo ejemplo bastará

para manifestar cómo se deberá extraer la de cualquier grado.

Ya que hemos hallado (§. 143) la sexta potencia de $2x^3 - 5a^3$; propongámonos hallar la raiz sexta del polinomio que allí hemos determinado, y dispongamos la operacion del modo siguiente:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 & \\ \qquad + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 & 2x^3 - 5a^3 \\ \hline \qquad\qquad + 15625a^{18} & 192x^{15} \\ -64x^{18} & \\ \hline \end{array}$$

Residuo........ $-960a^3x^{15} +$ &c.

Despues de haber ordenado con respecto á la x los términos del polinomio propuesto, debemos estar ciertos de que su primer término es la sexta potencia del primer término de la raiz ordenada del mismo modo; tomando por consiguiente la raiz sexta de $64x^{18}$, segun la regla del §. 129, tendremos $2x^3$. Elevando este resultado á la sexta potencia, y restándola de la cantidad propuesta, el residuo debe comenzar precisamente por el segundo término de polinomio equivalente á la sexta potencia de los dos primeros términos de la raiz. Ahora, en la expresion $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b +$ &c. el segundo término es el producto de seis veces la quinta potencia del primer término de la raiz por el segundo: y de consiguiente dividiéndolo por $6a^5$, el cuociente será el segundo término b de la raiz.

Es preciso pues formar el producto igual á *seis veces la quinta potencia* del primer término $2x^3$ de la raiz; lo cual dará $6 \times 32x^{15}$ ó $192x^{15}$; y dividiendo por esta cantidad el término $-960a^3x^{15}$, con el cual comienza el residuo de la sustraccion precedente, el cuociente $-5a^3$ será el segundo término de la raiz. Para comprobarlo elevaremos á la sexta potencia el binomio $2x^3 - 5a^3$; y siendo el resultado enteramente igual á la cantidad propuesta, restándolo de ella no quedará residuo alguno; y esto nos hará ver que la operacion está concluida.

Si aun despues de esta segunda sustraccion hubiesen quedado algunos otros términos, vendriamos en conocimiento de que la raiz deberia tener algun otro; y para hallarlo ejecutariamos la misma serie de operaciones que para determinar el segundo; es decir, el primer término del segundo residuo representado generalmente por

$6a^5b$ lo dividiriamos por $6\,(2x^3 - 5a^3)^5$; el cuociente seria el tercer término de la raiz; y se le comprobaria formando la sexta potencia del trinomio que suponemos hallado, y restándola de la cantidad propuesta. Del mismo modo procederíamos para hallar todos los demas términos que pudiera tener la raiz, cualquiera que fuese el número de ellos.

Como el exponente 6 de la raiz sexta es producto de los exponentes 2 y 3 de las raices cuadrada y cúbica, pudimos haber extraido del polinomio propuesto la raiz cuadrada, y en seguida la raiz cúbica de ella, ó al contrario. Los principiantes deberán efectuar estas operaciones para familiarizarse con ellas, y para tener en la identidad del resultado final una mutua comprobacion de todas.

De las ecuaciones de dos solos términos.

156 Toda ecuacion que solo contiene una potencia de la incógnita, combinada con cantidades conocidas, puede siempre reducirse á dos solos términos, uno de los cuales sea el conjunto de todos los que contienen la incógnita, siendo el otro conjunto de las cantidades conocidas. Ya hemos visto (§. 105) tratando de las ecuaciones del segundo grado, un ejemplo de esta reduccion, y es facil hacerse cargo de cómo deberá ejecutarse en las de cualquiera otro grado.

Si se nos propone, por ejemplo, la ecuacion $a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5$; pasando todos los términos en que se halle x á un solo miembro, tendremos: $a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2$; ó $(a^2 - ac)\,x^5 = b^4c^3 + a^5b^2$. Si representamos ahora por p al binomio $a^2 - ac$, y por q al binomio $b^4c^3 + a^5b^2$, se trasformará la ecuacion anterior en estotra $px^5 = q$; y despejando la cantidad x tendremos $x^5 = \frac{q}{p}$; de donde concluiremos que $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$

En general, dando, como siempre es posible, á toda ecuacion de dos terminos la forma de $px^m = q$, siempre se podrá deducir $x^m = \frac{q}{p}$; y por último, extrayendo la raiz del grado m de ambos miembros, resultará $x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}$

157 Debemos advertir que si el exponente m fuere un número impar, la raiz no tendrá mas de un solo signo, el cual será el de la cantidad que esté debajo del radical (§. 131); pero si fuere número par, la raiz tendrá el doble signo $\pm$; y si ademas fuere negativa la cantidad representada por $\frac{q}{p}$, la raiz será imaginaria, y nos dará á conocer, lo mismo que las de segundo grado, que es absurda la cuestion de donde haya dimanado. He aqui algunos ejemplos.

De la ecuacion $x^5 = -1024$ se deduce que $x = \sqrt[5]{-1024} = -4$; porque el exponente 5 es impar.

De la ecuacion $x^4 = 625$ se infiere que $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$; porque es par el exponente 4.

Ultimamente, la ecuacion $x^4 = -16$, de la cual se infiere que $x = \pm \sqrt[4]{-16}$, nos conduce á expresiones imaginarias, porque siendo par el exponente 4, es negativa la cantidad que se halla debajo del radical.

158 Antes de pasar mas adelante haremos una observacion muy importante asi para lo que resta de este tratado, como para su *complemento*, y que ademas merece por sí misma la mayor atencion; y es que todas las expresiones $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3, y en general x^m-a^m (siendo m un número cualquiera entero y positivo) son exactamente divisibles por $x-a$. La proposicion es evidente por lo que respecta á la primera expresion pro-

puesta; por lo que hace á la segunda sabemos (§. 34) que $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$; y por medio de la division seria fácil descomponer todas las demas. En efecto, dividiendo la expresion general x^m-a^m por $x-a$, resultará por cuociente $x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+$ &c. en cuyos términos irá disminuyendo siempre el exponente de x una unidad, y aumentando otro tanto el de a, hasta llegar á un término en el cual el exponente de a sea igual á $m-1$; pues entonces se terminará la operacion sin quedar residuo alguno final. En prueba de esto supondremos que sea

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}\ldots\ldots\ldots+$$

$a^{m-2}x+a^{m-1}$; y multiplicando el segundo miembro por $x-a$, tendremos:

$$\begin{array}{l} x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}\ldots+a^{m-2}x^2+a^{m-1}x \\ \qquad -ax^{m-1}-a^2x^{m-2}\ldots-a^{m-2}x^2-a^{m-1}x-a^m; \end{array}$$

donde se ve que todos los términos de la primera línea, excepto el primero, son respectivamente iguales á los de la segunda excepto el último; y como los de la primera sean todos aditivos, y los de la segunda sustractivos, el conjunto de unos y otros, ó lo que es lo mismo, el producto total viene á reducirse á solo el binomio x^m-a^m, es decir, al dividendo propuesto.

En efecto, á continuacion del término a^2x^{m-2} ha de estar precisamente en la línea superior el término a^3x^{m-3}, que queda destruido por su correspondiente en la inferior; y del mismo modo en la línea inferior se ha de hallar antes del término $-a^{m-2}x^2$ un término $-a^{m-3}x^3$ que destruye á su correspondiente en la superior. Si estos términos no estan expresamente escritos en la línea en que cada uno de ellos debe estar es porque despues de estar bien manifiesta la ley que unos y otros siguen, es facil imaginarse que estan indicados por los puntos suspensivos.

159 La observacion que acabamos de hacer nos conduce á consecuencias muy importantes, relativas á la ecuacion general de dos términos $x^m=\frac{q}{p}$. Representando por a el número que hallariamos extrayendo de $\frac{q}{p}$ la raiz del grado m vendrá á ser $\frac{q}{p}=a^m$; y la ecuacion primitiva se trasformará en $x^m=a^m$, ó en $x^m-a^m=0$.

Ahora bien, ya sabemos que el binomio x^m-a^m es exactamente divisible por $x-a$; por manera que suponiendo efectuada esta division podremos sustituir en lugar de x^m-a^m el producto siguiente:

$$(x-a)\,(x^{m-1}+ax^{m-2}...+a^{m-2}x+a^{m-1});$$

y en lugar de la ecuacion fundamental $x^m-a^m=0$ la equivalente $(x-a)\,(x^{m-1}+ax^{m-2}..+a^{m-2}x+a^{m-1})=0$. Siendo cero el segundo miembro de esta ecuacion, resolverla no es otra cosa que determinar el valor ó valores que sustituidos en lugar de la x, reduzcan á cero todo el primer miembro. Y como para que un producto sea cero basta que lo sea cualquiera de sus factores, es consiguiente que si ademas del valor a, que reduce á cero el primer factor, existiesen algunos otros valores que reduzcan á cero el segundo factor, estos mismos valores satisfarán á la ecuacion propuesta. Para hacer ver que estos valores existen efectivamente, y que tienen con la unidad relaciones muy sencillas, hagamos que la ecuacion propuesta se trasforme en otra cuyo término conocido sea la misma unidad. Esto lo conseguiremos haciendo $x=ay$; y sustituyendo a^my^m en lugar de x^m, la ecuacion propuesta se convertirá en $a^my^m-a^m=0$, ó $y^m-1=0$, Por manera que en habiendo determinado los valores de y que satisfagan á esta última ecuacion, con solo multiplicarlos por a, tendremos todos los valores de x que satisfacen á la propuesta.

La ecuacion $y^m - 1 = 0$ da inmediatamente $y^m = 1$; $y = \sqrt[m]{1} = 1$; y supuesto que $y^m - 1$ equivale á

$$(y-1)\,(y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots y^2 + y + 1)$$

la ecuacion $y^m - 1 = 0$ vendrá á ser:

$$(y-1)\,(y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots\ldots + y^2 + y + 1) = 0;$$

la cual nos da á conocer que todos los valores que reduzcan á cero el segundo factor del primer miembro, satisfarán á la ecuacion propuesta lo mismo que el que inmediatamente hemos hallado; y todos por consiguiente tienen la propiedad de que su potencia del grado m sea igual á la unidad.

De esto se infiere una consecuencia muy singular á primera vista, y es que *la unidad puede tener muchas raices de un mismo grado ademas de ella misma.* Es verdad que estas otras raices son unos meros símbolos llamados *raices negativas* ó *imaginarias*; pero siendo de un frecuente uso en el analísis, convendrá darlas á conocer por lo menos en el supuesto de que el exponente m sea 2 ó 3 ó 4, que son los únicos casos en que por lo expuesto hasta ahora podemos determinarlas.

En efecto, si fuere $m = 2$, tendremos $y^2 - 1 = 0$; y de aqui deduciremos $y = +1$; $y = -1$.

Haciendo $m = 3$, resulta $y^3 - 1 = 0$; y siendo $y^3 - 1 = (y-1)\,(y^2 + y + 1)$, la ecuacion propuesta vendrá á ser $(y-1)\,(y^2 + y + 1) = 0$.

Suponiendo igual á cero el primer factor, se deduce $y = 1$; pero si suponemos $y^2 + y + 1 = 0$, resolviendo esta última ecuacion, tendremos $y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$;

$y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; y asi los tres valores de y, ó lo que es lo mismo, las tres raices cúbicas de la unidad estarán indicadas por estas expresiones: $y=1$; $y=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; $y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Aunque estas dos últimas son imaginarias, efectuando con ellas las operaciones que se practican para elevar al cubo los símbolos de las verdaderas cantidades, resultará $y^3=1$, lo mismo que si se hubiesen ejecutado las mismas operaciones con el primer valor $y=1$.

Haciendo $m=4$ la ecuacion propuesta vendrá á ser $y^4-1=0$, ó la equivalente $(y-1)(y^3+y^2+y+1)=0$. Suponiendo igual á cero el primer factor, resulta $y=1$; pero suponiendo que sea $y^3+y^2+y+1=0$, no se ve desde luego cómo se podrá resolver esta ecuacion, por ser de tercer grado; pero si echamos de ver que (§. 34) $y^4-1=(y^2+1)(y^2-1)$, nos será facil inferir que para satisfacer á la ecuacion $y^4-1=0$ podremos suponer sucesivamente: $y^2-1=0$; $y^2+1=0$; de las cuales se deducen los cuatro valores siguientes: $y=+1$; $y=-1$; $y=+\sqrt{-1}$; $y=-\sqrt{-1}$. De estos cuatro valores solo dos son reales, y los otros dos imaginarios; pero en todos cuatro se verifica la propiedad de que elevados á la cuarta potencia dan por resultado la unidad, y asi tenemos las cuatro raices cuartas de la unidad.

Este gran número de raices de la unidad es procedente de una ley general de las ecuaciones, segun la cual una incógnita debe tener tantos valores como unidades haya en el mas alto exponente que ella tenga en la ecuacion de que nos valgamos para determinarla, ó lo qué es lo mismo, en el exponente que designa el grado de la ecuacion; y cuando la cuestion no admite tantas soluciones reales, se completa el número de los valores de la incógnita con símbolos puramente algebráicos, que sometidos á las operaciones indicadas en la ecuacion producen el resultado que ella requiere: por manera que todos estos valores satisfacen á la ecuacion, aunque no satisfagan al problema.

Si, como hemos propuesto las tres ecuaciones $y^2-1=0$; $y^3-1=0$; $y^4-1=0$, y deducido de ellas las dos raices cuadradas, las tres raices cúbicas y las cuatro raices cuartas ó *cuadro-cuadradas* de la unidad, nos hubiésemos propuesto las tres ecuaciones $x^2-a^2=0$; $x^3-a^3=0$; $x^4-a^4=0$; seria facil deducir de la primera de estas las dos raices cuadradas de a^2; de la segunda las tres raices cúbicas de a^3; y de la tercera las cuatro raices cuartas de a^4. En efecto, multiplicando por a las dos raices cuadradas de la unidad, tendremos las dos raices cuadradas a y $-a$ del número conocido representado por a^2. Del mismo modo, multiplicando por a las tres raices cúbicas de la unidad, resultarán a; $a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$; $a\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; es decir, las tres raices cúbicas del número conocido representado por a^3. Ultimamente, multiplicando por a las cuatro raices cuartas de la unidad, resultarán las cuatro raices cuartas a; $-a$; $a\sqrt{-1}$; $-a\sqrt{-1}$ de la cantidad representada por a^4.

De aqui se sigue que las raices de los números tienen dos especies de expresiones ó valores; á la primera especie, que llamaremos *determinacion aritmética*, pertenece el número que se halla por los métodos expuestos en el §. 154; el cual no es mas de uno en cada caso particular, y es el que en los tres casos precedentes hemos representado por a. A la segunda, que comprende los valores negativos y las expresiones imaginarias, la designaremos con el nombre de *determinaciones algebráicas*, porque deben su existancia á la aplicacion que se ha hecho de las reglas de los signos del álgebra aun á símbolos que no representan cantidades.

De las ecuaciones que se pueden resolver como las de segundo grado.

160 El carácter de estas ecuaciones consiste en que no contienen mas de dos distintas potencias de la incógnita, y que el exponente de la una es doble del exponente dè la otra. Todas ellas se pueden representar por la siguiente fórmula general:

$$x^{2m}+px^m=q,$$

en la cual estan designadas por p y q las cantidades conocidas.

Mirando primeramente como incógnita la potencia x^m, ó lo que viene á ser lo mismo, si hacemos $x^m=u$, vendrá á ser $x^{2m}=u^2$; y la fórmula general propuesta se trasformará en estotra: $u^2+pu=q$; de la cual se deduce (§. 109) $u=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; y restituyendo x^m en lugar de u, tendremos: $x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; ecuacion de dos solos términos, puesto que indicando la expresion $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, operaciones que se han de ejecutar con cantidades conocidas, y que ya sabemos efectuar, podemos mirar el resultado de ellas como una sola cantidad conocida.

Representando por a y por a' los dos valores de esta última cantidad, la fórmula $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$ se descompondrá en estotras dos: $x^m = a$; $x^m = a'$; de las cuales se deducen los dos siguientes valores de la incógnita $x = \sqrt[m]{a}$; y $x = \sqrt[m]{a'}$; bien que si el exponente m fuere número par, se deducirán no solo dos, sino cuatro valores de la incógnita, porque en tal caso á cada uno de los dos radicales se le antepondrá el doble signo $\pm$, y las dos últimas fórmulas se descompondrán en estas cuatro:

$$x = +\sqrt[m]{a};\ x = +\sqrt[m]{a'};\ x = -\sqrt[m]{a};\ x = -\sqrt[m]{a'}.$$

Estos cuatro valores serán todos reales siempre que sean positivas las cantidades representadas por a y a': serán todos imaginarios si fueren negativas las mismas cantidades; ó dos de ellos serán reales y los otros dos imaginarios, si la cantidad a fuese positiva y la a' negativa; ó al contrario.

Todos estos valores de la x pueden comprenderse en una sola fórmula, indicando inmediatamente la raiz de los dos miembros de la ecuacion $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; de la cual se deduce $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}$.

La cuestion siguiente conduce á una ecuacion de esta especie.

161 *Descomponer el número 6 en dos factores tales que la suma de sus cubos sea 35.*

Si representamos por x uno de los factores desconocidos, el otro será $\frac{6}{x}$; y siendo sus cubos x^3 y $\frac{216}{x^3}$, la ecuacion fundamental de la cuestion será:

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35;$$

de la cual se deducen estotras:

$$x^6+216=35x^3;$$
$$x^6-35x^3=-216.$$

Si ahora consideramos como incógnita á x^3, obtendremos por la regla de las ecuaciones de segundo grado

$$x^3=\frac{35}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{35}{2})^2-216};$$

efectuando los cálculos numéricos indicados, hallaremos: $(\frac{35}{2})^2=\frac{1225}{4}$; $\sqrt{(\frac{35}{2})^2-216}=\sqrt{\frac{361}{6}}=\frac{19}{4}$, y por consiguiente $x^3=\frac{35}{2}\pm\frac{19}{2}$; en donde se hallan reunidas las dos siguientes expresiones: $x^3=\frac{35}{2}+\frac{19}{2}=\frac{54}{2}=27$; $x^3=\frac{35}{2}-\frac{19}{2}=\frac{16}{2}=8$; y de estas es facil concluir que

$x=\sqrt[3]{27}=3$; y que $x=\sqrt[3]{8}=2$.

El primer valor de la x da $\frac{6}{3}$ ó 2 para el segundo factor, al paso que el segundo valor conduce á $\frac{6}{2}$ ó 3; son pues en un caso 3 y 2 los factores que buscábamos, y en el otro 2 y 3. Estas dos soluciones solo se diferencian en la mera inversion del orden de los factores del número dado 6.

162 Como las ecuaciones que acabamos de considerar no deben estar exentas de la ley general de que hemos hablado (§. 159), deberemos multiplicar los va-

lores aritméticos de $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[m]{a'}$ por las *m* raices que la unidad debe tener en el grado *m*.

Asi que, despues de haber determinado los valores aritméticos 3 y 2 equivalentes á los radicales $\sqrt[3]{27}$ y $\sqrt[3]{8}$ que resultaron de la ecuacion $x^6 - 35x^3 = -216$, multiplicaremos cada uno de ellos por las tres raices cúbicas de la unidad, y tendremos las seis raices siguientes:

$$1^{a} \ldots\ x = 1 \times 3\,; \qquad 2^{a} \ldots\ x = 1 \times 2\,;$$

$$3^{a} \ldots\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 3\,; \quad 4^{a} \ldots\ x = \frac{-1-\sqrt{+3}}{2} \times 2\,;$$

$$5^{a} \ldots\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3\,; \quad 6^{a} \ldots\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2\,;$$

de las cuales solo las dos primeras son reales y positivas, y las únicas que resuelven el problema.

Del cálculo de las cantidades radicales. *

163 El gran número de casos en que no se pueden extraer exactamente las raices, y lo penoso de la operacion que es necesario ejecutar para obtenerlas con la aproximacion suficiente, han sido motivos para que los algebristas hayan procurado representar los resultados de las operaciones que debieran ejecutarse con las raices extraidas, sin detenerse á extraerlas previamente, como á primera vista podria parecer necesario. De este

* Llámanse asi las raices indicadas ó representadas por un signo radical antepuesto á la cantidad cuya raiz deba extraerse. Cuando dos ó mas signos radicales tienen un mismo exponente, y es una misma la cantidad que se halla debajo de ellos, las raices indicadas se llaman *cantidades radicales semejantes*; pero en faltando cualquiera de las dos condiciones, se las llama *desemejantes*.

modo difieren la extraccion hasta el fin del cálculo, y no la efectúan mientras no han simplificado cuanto sea posible los resultados; y asi logran que la operacion mas complicada y dificil no se deba ejecutar sino con los números mas pequeños ó con las expresiones mas sencillas que las cuestiones propuestas permitan.

La adicion y la sustraccion de las cantidades radicales desemejantes solo se pueden indicar por los signos + y −. Por ejemplo, las sumas representadas por los binomios $\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, y las diferencias ó residuos representados por $\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ no pueden admitir otra expresion mas sencilla, á lo menos mientras los símbolos algebráicos permanezcan en toda la indeterminacion que les es propia; pero no sucede asi con $4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b}$, porque los radicales que componen este trinomio pueden hacerse semejantes por medio de la simplificacion indicada en el §. 130. En efecto, $\sqrt[3]{16a^3b}$ equivale á $\sqrt[3]{8a^3\times 2b}$, ó á $\sqrt[3]{8a^3}\times\sqrt[3]{2b}$, ó á $2a\sqrt[3]{2b}$; el tercer radical $\sqrt[3]{2a^6b}$ equivale á $\sqrt[3]{a^6\times 2b}=\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{2b}=a^2\sqrt[3]{2b}$; y por consiguiente el trinomio propuesto se trasformará en

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b};$$

ó en $(4a+2a-\frac{5a^2c}{ad})\sqrt[3]{2b}=(6a-\frac{5ac}{d})\sqrt[3]{2b}=$

$$(6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164 Por lo que respecta á las demas operaciones estriba el cálculo de los radicales sobre este principio ya citado: *Elevar á una misma potencia los diferentes factores de un producto equivale á elevar el producto á la misma potencia.* Se debe ademas tener presente que *la mera supresion del signo radical equivale á elevar la raiz que con él estaba indicada, á la potencia del mismo grado que la raiz.* Si por ejemplo, en vez de $\sqrt[7]{a}$ escribimos solo a suprimiendo enteramente el signo radical, habremos con esta mera supresion elevado á la séptima potencia la raiz séptima de a, que estaba representada por la expresion primitiva $\sqrt[7]{a}$; porque si despues de haber extraido de cualquier cantidad una raiz cualquiera, elevamos esta raiz á la potencia del mismo grado, debe resultar la cantidad primitiva; y como $\sqrt[7]{a}$ representa el resultado de la primera operacion, a deberá ser el de la segunda.

Sentado esto, si suprimimos los signos radicales de la expresion $\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}$, por ejemplo, habremos elevado á la séptima potencia los dos factores de un producto; y el resultado ab será la séptima potencia del producto indicado. Tomando pues la raiz séptima, hallaremos que $\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}=\sqrt[7]{ab}$.

Este razonamiento, aplicable á cualquiera otro caso, nos manifiesta que *para multiplicar dos expresiones radicales de un mismo grado debemos efectuar la multiplicacion de las cantidades que se hallen debajo de los signos radicales, y anteponer al producto un signo radical del mismo grado.* Lo cual nos viene á decir que *extraer sucesivamente las raices de un mismo grado de los diferentes factores de un producto equivale á extraer la raiz del mismo grado de todo el producto.*

Mediante esta regla tendremos:

$$3\sqrt{2ab^3}\times 7\sqrt{5a^3bc}=21\sqrt{10a^4b^4c}=$$
$$21a^2b^2\sqrt{10c};$$
$$4\sqrt{a^2-b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=$$
$$4\sqrt{a^4-b^4};$$
$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}}\times\sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}\times\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4}\times\frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}=$$
$$\sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2}\times\frac{(2a^6-b^6)}{a^2-b^2}};$$

por ser $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.

165 Teniendo presente que la séptima potencia de la expresion $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, por ejemplo, es $\frac{a}{b}$, inferiremos, tomando la raiz séptima de este último resultado, que $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}=\sqrt[7]{\frac{a}{b}}$; de donde se sigue: *que para dividir una por otra dos cantidades radicales de un mismo grado, es necesario representar el cuociente de las cantidades que se hallan debajo de los radicales, y anteponerle un solo signo radical del mismo grado.* Lo cual

quiere decir que *lo mismo es ejecutar primeramente una division, y extraer una raiz cualquiera del cuociente, que extraer primeramente las raices del mismo grado del dividendo y del divisor, y concluir dividiendo la raiz del primero por la del segundo.* En suma, la inversion en el orden de estas operaciones no produce alteracion alguna en el resultado final de ellas.

Por esta regla hallamos que

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{6ab}{3a}}=\sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4 b}}{\sqrt[5]{b^3 c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4 b}{b^3 c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2 c^2}}$$

166 De la regla de la multiplicacion de las cantidades radicales de un mismo grado (§. 164) se sigue que *para elevar una cantidad radical á una potencia no se necesita mas que elevar á esta potencia la cantidad puesta debajo del radical, y anteponer al resultado el mismo signo radical;* porque elevar, por ejemplo, á la tercera potencia la cantidad representada por $\sqrt[5]{ab}$ es lo mismo que hallar el producto de la multiplicacion que aqui indicamos: $\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}$; y como por ser de un mismo grado los radicales debamos (§. 164) multiplicar entre sí las cantidades que estan debajo de

ellos y anteponer el mismo signo radical al producto el resultado será $\sqrt[5]{a^3b^3}$.

Del mismo modo, la cantidad $\sqrt[7]{a^2b^3}$ elevada á la cuarta potencia da $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, que se reduce á $ab\sqrt[7]{ab^5}$ descomponiendo a^8b^{12} en $a^7b^7 \times ab^5$, y extrayendo (§. 130) la raiz séptima del factor a^7b^7.

Es muy digno de notarse que cuando el exponente del radical es exactamente divisible por el de la potencia á que se haya de elevar la cantidad propuesta, se efectúa la operacion con solo dividir el exponente del radical por el de la potencia. El cuadrado, por ejemplo, de $\sqrt[6]{a}$; ó $(\sqrt[6]{a})^2 = \sqrt[3]{a}$; porque $\frac{6}{2} = 3$.

Con efecto $\sqrt[6]{a}$ representa una cantidad que es seis veces factor de a; y como la cantidad $\sqrt[3]{a}$ que hemos obtenido dividiendo el exponente 6 por 2, sea solo tres veces factor de la misma a, es consiguiente que $\sqrt[3]{a}$ equivalga al producto de dos de los primeros factores, ó lo que es lo mismo, al cuadrado ó la segunda potencia de uno de estos factores ó de $\sqrt[6]{a}$.

El mismo razonamiento se puede aplicar al ejemplo que sigue, y á otro cualquiera: $\left(\sqrt[8]{a^2b}\right)^2 = \sqrt[4]{a^2b}$.

167 Invirtiendo las reglas del artículo precedente resultan las que deberemos seguir para la extraccion de las raices de las cantidades radicales.

En efecto, de la primera se deduce sin la menor difacultad, *que si los exponentes de los factores que estan debajo del radical son exactamente divisibles por el de la raiz que se quiera extraer, se efectuará la operacion como si no hubiese radical alguno, y al resnltado se le antepondrá el radical primitivo.*

Asi es, por ejemplo, que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}$.

De la segunda regla del párrafo precedente se infiere igualmente que *se representa en general cualquiera raiz de cantidades radicales, multiplicando el exponente del radical por el de la raiz que se quiera extraer.*

Por esta última regla se halla que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

Con efecto, $\sqrt[5]{a^4}$ es una cantidad que es cinco veces factor de a^4 (§§. 24 y 129); pero como por otra parte la raiz cúbica de $\sqrt[5]{a^4}$ deba ser tres veces factor de esta última cantidad, es consiguiente que $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}$ deba ser 3×5 veces ó 15 veces factor de la primitiva cantidad a^4: luego $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Del mismo modo se probará que $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$; lo cual nos da á conocer que *lo mismo es extraer primeramente la raiz quinta de una cantidad cualquiera, y extraer despues la raiz cúbica de aquella raiz quinta, que extraer primeramente la raiz cúbica de la cantidad primitiva, y concluir por la extraccion de la raiz quinta de la cúbica:*

el resultado final no varía por esta inversion en el orden de las operaciones. Lo mismo puede demostrarse de otras raices cualesquiera.

168 Supuesto que multiplicando por cualquier número el exponente de una cantidad que está debajo de un radical (§. 166), se eleva la raiz que con este signo estaba representada, á la potencia que indique aquel multiplicador, y que multiplicando por el mismo número el exponente del radical (§. 167) se extrae del resultado anterior la raiz del grado indicado por el mismo multiplicador, es consiguiente que esta segunda operacion restituya á su primitivo estado la cantidad propuesta. Lo que esto quiere decir en suma es, que *multiplicando por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que esté debajo de él, no se altera el valor de la expresion.*

La expresion $\sqrt[5]{a^3}$, por ejemplo, puede convertirse en $\sqrt[35]{a^{21}}$ multiplicando por 7 los exponentes 5 y 3; y la segunda expresion es enteramente equivalente á la primera, porque multiplicar por 7 el exponente de a^3, y formar el radical $\sqrt[5]{a^{21}}$, es hallar la séptima potencia del radical propuesto; y multiplicar por 7 el exponente 5 del radical $\sqrt[5]{a^{21}}$, es tomar la raiz séptima de este primer resultado; deshacemos pues con la segunda operacion lo que habiamos hecho con la primera.

169 Por medio de esta doble multiplicacion *se reducen á un mismo grado ó exponente dos, tres ó mas radicales de diferentes grados, multiplicando á un mismo tiempo el*

exponente de cada radical y el de la cantidad á que esté antepuesto, por el producto de los exponentes de todos los demas radicales. La identidad de los nuevos exponentes de los radicales es evidente pot sí misma, puesto que todos ellos vendrán á ser el producto de todos los exponentes de los radicales primitivos; y segun lo que acabamos de demostrar, no habrá mudado de valor ninguna de las cantidades radicales propuestas, por haber multiplicado por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que primitivamente se halle debajo de él.

Por esta regla se trasforman las cantidades radicales $\sqrt[5]{a^3b^2}$ y $\sqrt[7]{c^4d^3}$ en $\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}$ y $\sqrt[35]{c^{20}d^{15}}$; asimismo las cantidades radicales $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[5]{a^2c^3}$ y $\sqrt[7]{b^4c^3}$ se convierten respectivamente en $\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}$, $\sqrt[105]{a^{42}c^{63}}$, y $\sqrt[105]{b^{60}c^{45}}$.

Esta trasformacion es análoga á la reduccion de los quebrados á un comun denominador, y de consiguiente es susceptible de las mismas abreviaciones que ella (*Arit.* §. 100).

Si hubiese coeficientes numéricos debajo de los radicales será necesario elevarlos á la potencia indicada por el producto de los exponentes de los demas radicales.

170 Tambien se infiere fácilmente que *dividiendo por un mismo número el exponente del radical y el de la cantidad que esté debajo de él, no mudará por eso el valor de la expresion.* Asi tendremos una nueva trasformacion de las expresiones radicales análoga á la de reducir los quebrados á sus mínimos términos ó á su mas sencilla expresion. Ultimamente, *se puede introducir de-*

bajo de un radical cualquiera un factor que esté fuera de él, elevándolo á la potencia indicada por el exponente del radical, y multiplicando por esta potencia la cantidad que primitivamente estaba debajo.

Se convertirá, por ejemplo, a^2 en $\sqrt[5]{a^{10}}$; y $2a\sqrt[3]{b}$ en $\sqrt[3]{8a^3b}$.

171 Despues de haber reducido á un mismo exponente ó grado cualesquiera radicales por medio de la trasformacion precedente, se les aplicarán sin dificultad alguna las reglas dadas (§§. 164 y 165) para la multiplicacion y la division de las cantidades radicales de un mismo grado.

Propongámonos, por ejemplo, simplificar el producto representado por $\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s}$; y en primer lugar trasformaremos los factores $\sqrt[m]{a^pb^q}$ y $\sqrt[n]{b^rc^s}$ en $\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}$ y $\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}$; y por la regla del §. 164 hallaremos que

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$$

es el producto de los radicales propuestos.

Hallaremos tambien por la regla del §. 165 que

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}$$

Advertencias sobre algunos casos singulares que ocurren en el cálculo de las cantidades radicales.

172 Las reglas que acabamos de prescribir para el cálculo de las cantidades radicales se aplican sin dificultad á los símbolos de las verdaderas cantidades, ó sea á las cantidades reales; pero aplicadas á las que se llaman cantidades imaginarias, nos podrian inducir á error si no hiciésemos algunas advertencias deducidas de las propiedades de las ecuaciones de dos solos términos.

Si nos propusiésemos, por ejemplo, elevar al cuadrado la expresion $\sqrt{-a}$, y observásemos á la letra la regla prescrita (§. 164) para la multiplicacion de las cantidades radicales, hallariamos $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{-a\times-a}=\sqrt{a^2}$; y si ahora nos contentásemos con tomar $+a$ en lugar de $\sqrt{a^2}$, habriamos venido á parar á un resultado evidentemente falso, porque el cuadrado de $\sqrt{-a}$ debe obtenerse con suprimir el signo radical, y es por consiguiente $-a$.

Bezout ha desatado perfectamente esta dificultad, observando que cuando ignoramos cómo se haya formado el cuadrado a^2, y se nos pide su raiz, debemos indicar igualmente $+a$ y $-a$, porque no sabemos con cuál de estas dos expresiones se efectuó la multiplicacion; pero cuando sabemos de antemano cuál de estas cantidades se ha multiplicado por sí misma para formar a^2, entonces ya no se puede dudar de cuál sea su raiz, ni menos tomar la una por la otra. Este caso es evidentemente el de la expresion $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, pues se sabe aqui que la cantidad a^2 que está debajo del radical en el producto $\sqrt{a^2}$, procede de $-a$ multiplicada por $-a$, y por consiguiente no debe quedarnos la menor duda de que su raiz es $-a$, y no $+a$. Asi como por la inversa, cuando multiplicamos $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, su producto $\sqrt{a^2}$ se reduce á $+a$; y no nos es permitido tomar $-a$ por equivalente á $\sqrt{a^2}$, porque sabiendo como sabemos que el cuadrado a^2 ha provenido de la multiplicacion de $+a$ por $+a$, no podemos dudar de que la raiz cuadrada de a^2 es en este caso particular $+a$, y de ningun modo $-a$. En suma, lo único que la ecuacion idéntica $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a^2}$, rectamente traducida, nos quiere decir, es que *el cuadrado de* $\sqrt{-a}$ *es una de las raices cuadradas de* a^2; pero no cualquiera de ellas, sino sola y determinadamente $-a$.

Estos razonamientos no dejan duda alguna sobre el verdadero resultado de la operacion en el caso particular que acabamos de considerar; pero aun hay algunos otros, en los cuales, para determinar el resultado, nos es forzoso acudir á las propiedades de las ecuaciones de dos solos términos.

173 Si se nos pidiese, por ejemplo, el producto de $\sqrt[4]{a} \times \sqrt{-1}$, reduciriamos el segundo radical al mismo grado que el primero (§. 169), y tendriamos $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a}$; resultado

real, aunque es bien claro que la cantidad real $\sqrt[4]{a}$, multiplicada por la expresion imaginaria $\sqrt{-1}$, debe dar un producto imaginario. Sin embargo, no debemos creer que la expresion $\sqrt[4]{a}$, que hemos hallado por producto de la multiplicacion propuesta, sea enteramente falsa, sino tan solo que por lo comun no se la da el verdadero sentido que debe tener. Lo único que nos dice la ecuacion idéntica $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}$ es que *multiplicando por* $\sqrt{-1}$ *una de las cuatro raices cuartas de* a, *resulta otra de las mismas raices cuartas de* a.

Con efecto, considerando $\sqrt[4]{a}$ algebráicamente, y como que es la expresion de la incógnita x en la ecuacion de dos solos términos $x^4-a=0$, echaremos fácilmente de ver que es susceptible de cuatro diferentes determinaciones (§. 159); porque si representamos por α el número que inmediatamente resulta de la extraccion de la raiz cuarta de a, ó el que hemos llamado la *determinacion aritmética* de esta raiz cuarta, vendrá á ser $a=\alpha^4$; y las cuatro raices cuartas de a se hallarán multiplicando α por las cuatro raices cuartas de la unidad. Serán pues: $\alpha\times+1$; $\alpha\times-1$; $\alpha\times+\sqrt{-1}$; $\alpha\times-\sqrt{-1}$; y de consiguiente si en el primer miembro de la ecuacion $\sqrt[4]{a}\times\sqrt{-1}=\sqrt[4]{a}$ la expresion $\sqrt[4]{a}$ quiere decir α, en el segundo vendrá á significar $\alpha\sqrt{-1}$; por manera que la verdadera traduccion de la ecuacion propuesta es la siguiente: *multiplicando por* $\sqrt{-1}$ *la primera raiz cuarta de* a, *resulta la tercera raiz cuarta de la misma cantidad* a.

Basta un poco de atencion para descubrir el orígen de la duda que ha motivado el producto que hallamos por la regla del §. 169. La segunda potencia $+1$ de la expresion -1 que estaba debajo del radical cuadrado, puede muy bien proceder de $+1\times+1$ igualmente que de -1×-1, y hace que la expresion $\sqrt[4]{1}$ pueda admitir mas determinaciones que la expresion $\sqrt{-1}$.

En general, cuando las expresiones algebráicas que forman los dos miembros de una ecuacion sean susceptibles de diferentes valores, la ecuacion no quiere siempre decir que cualquiera de los valores de su primer miembro es igual á otro cualquiera de los del segundo; sino que alguno de aquellos es igual á otro de estos. Sabemos por ejemplo que, algebráicamente hablando, á la expresion $\sqrt[3]{8}$ corresponden estos tres valores:

$$2;\ -1+\sqrt{-3};\ -1-\sqrt{-3};$$

que á la expresion $\sqrt[4]{16}$ corresponden estos cuatro:

$$2;\ -2;\ 2\sqrt{-1};\ -2\sqrt{-1};$$

y sin embargo la ecuacion $\sqrt[3]{8}=\sqrt[4]{16}$ no nos quiere decir otra cosa sino que el primero de aquellos tres valores es igual al primero de estos cuatro; y solo en este sentido es verdadera*.

Lo que hemos practicado para venir en conocimiento

* El lenguage algebráico nos parece en esta parte expuesto á los mismos inconvenientes que los idiomas que carecen de artículos. Cuando en el latino se nos dice: *Regis filius est exercitûs dux*, las circunstancias en que se enuncie esta proposicion son las únicas que pueden determinar su verdadero sentido.

de la regla de que hacemos uso para formar el producto $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}$, se reduce á elevar este producto á la potencia mn; porque si lo hubiéramos representado por z, ó lo que es lo mismo, si hubiéramos hecho $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=z$; elevando primeramente á la potencia m los dos miembros de esta ecuacion, tendriamos $a\sqrt[n]{b^m}=z^m$; y elevando despues á la potencia n los dos miembros de esta última, resultaria $a^nb^m=z^{mn}$.

Asi tendriamos ya conocido, no el producto que buscábamos, sino su potencia del grado mn; ó lo que es lo mismo, tendriamos una ecuacion de este grado con dos solos términos, y en la cual la incógnita, que en este caso representa el producto que buscábamos, deberia tener, generalmente hablando, mn determinaciones (§. 159). Esto se concibe con facilidad atendiendo á que los factores $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ son las expresiones de los valores que corresponden á las incógnitas x é y en las siguientes ecuaciones de dos solos términos: $x^m-a=0$; $y^m-b=0$; y siendo por consiguiente la x susceptible de m determinaciones, y la y de n determinaciones, se podrán obtener mn determinaciones del producto pedido, combinando cada una de las m determinaciones de x con cada una de las n determinaciones de y.

Cuando sean reales las cantidades que se han de multiplicar, no ocurrirá dificultad alguna en la eleccion, porque el número de determinaciones de esta especie jamas pasa de dos (§. 157), que solo se diferencian en el signo.

174 Haciendo uso de la trasformacion de que

nos hemos valido (§. 159), conseguiremos en todos casos que recaiga toda la dificultad sobre las raices de $+1$ ó de -1; porque suponiendo $x=\alpha t$; é $y=\beta u$, indicando con α y β las determinaciones numéricas de $\sqrt[m]{a}$, y $\sqrt[n]{b}$ sin atender al signo, se convierten las ecuaciones $x^m \mp a=0$; $y^n \mp b=0$; en $t^m \mp 1=0$; $u^n \mp 1=0$; y se halla la expresion $xy=\sqrt[m]{\pm a}\times\sqrt[n]{\pm b}=\alpha\beta\sqrt[m]{\pm 1}\times\sqrt[n]{\pm 1}$; en la cual $\alpha\beta$ representa el producto de los números $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ó la determinacion aritmética de la raiz del grado mn del número $a^n b^m$.

Cuando se haya de particularizar el producto de los radicales $\sqrt[m]{\pm a}$ y $\sqrt[n]{\pm b}$, por razon de estar determinados los grados de las cantidades radicales que son factores, será necesario hallar por medio de las ecuaciones $t^m \mp 1=0$, y $u^n \mp 1=0$ las diferentes expresiones de $\sqrt[m]{\pm 1}$ y $\sqrt[n]{\pm 1}$, y combinarlas como corresponda.

Por fortuna son raras las veces en que hay necesidad de efectuar estas operaciones, á no ser en algunos casos muy sencillos. Hé aqui algunos de los que ocurren con mas frecuencia:

1.º.... $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1})$;

y suprimiendo el radical de $\sqrt{-1}$, obtendremos:

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{ab}\times-1=-\sqrt{ab}.$$

2.º.... $\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2$.

Para evitar en este caso la duda de que hablamos (§. 173), no multiplicaremos -1 por -1; sino observaremos que el cuadrado de la raiz cuarta de cualquier cantidad equivale á la raiz cuadrada de la misma cantidad, y asi tendremos:

$$\sqrt[4]{-a}\times\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{ab}\times\sqrt{-1}.$$

$$3.^{\circ}\ldots\sqrt[6]{-a}\times\sqrt[6]{-b}=\sqrt[6]{ab}\times(\sqrt[6]{-1})^2=$$

$$\sqrt[6]{ab}\times\sqrt[3]{-1}=\sqrt[6]{ab}\times-1=1-\sqrt[6]{ab}.$$

De este modo hallaremos los productos de los radicales imaginarios de otros cualesquiera grados, y veremos que resultan alternativamente reales é imaginarios.

Del cálculo de los exponentes fraccionarios.

175 Cuando en lugar de los signos radicales se hace uso de los exponentes fraccionarios para representar las raices que les corresponden (§. 132), entonces se puede aplicar inmediatamente á estos las reglas generales de los exponentes, y se hallan por medio de ellas los mismos resultados que por los métodos de que nos valemos para calcular las cantidades radicales.

Con efecto, si trasformamos, por ejemplo, $\sqrt[5]{a^3b^2}$ y $\sqrt[5]{a^3c^2}$ en $a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}$ y $a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}$, tendremos $\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt[5]{a^3c^2}=a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}\times a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$. Observando despues que $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$, y que por consiguiente $a^{\frac{6}{5}}=a^{1+\frac{1}{5}}=a\times a^{\frac{1}{5}}$ (§. 25); y que $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$ equivale á $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, resultará $\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt[5]{a^3c^2}=a\sqrt[5]{ab^2c^2}$; resultado no solamente exacto, sino ademas reducido á su mas sencilla expresion.

Sea el ejemplo general $\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}$; y trasformando los radicales propuestos en $a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}$, $b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$ hallaremos por medio de las reglas de los exponentes (§. 25) $a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}$. Si quisiésemos efectuar ahora la adicion de las fracciones $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, seria necesario reducirlas á un mismo denominador; y para dar uniformidad á los resultados es necesario hacer otro tanto con las fracciones $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$. Por este medio nos resulta $a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq+mr}{mn}}c^{\frac{ms}{mn}}$; y restituyendo los signos radicales, tendremos: $\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$.

176 La division se efectúa tambien sencillamente: es fácil ver, por ejemplo, que

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}} \text{ (§. 38)},$$

lo cual se reduce á $\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}}$; y reponiendo los signos radicales, resulta: $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}$; y en general

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

y reduciendo á un comun denominador los exponentes fraccionarios para efectuar la sustraccion indicada, se hallará:

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{nm}} b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Ya se deja conocer que la reduccion de los exponentes fraccionarios á un mismo denominador produce aqui el mismo efecto que la reduccion de los radicales á un mismo grado, y conduce precisamente á los mismos resultados (§. 171).

177 Tambien es evidente (§. 127) que $(\sqrt[m]{a^p})^n = (a^{\frac{p}{m}})^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}}$; y (129) que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}$.

El cálculo de los exponentes fraccionarios nos ofrece uno de los ejemplos mas notables de la utilidad de los signos cuando se los elige con inteligencia y acierto. La analogía que hay entre los exponentes fraccionarios y los enteros hace que las reglas que se deben seguir para el cálculo de estos sean aplicables al de aquellos; en vez de que son necesarios, como hemos visto, razonamientos particulares para descubrir las reglas del cálculo de las cantidades radicales, porque el signo $\sqrt{}$ que las acompaña no tiene conexion alguna con la operacion que con él se indica. Cuanto mas nos internemos en el Algebra, tanto mas echaremos de ver las numerosas ventajas que ha producido en esta ciencia la notacion de los exponentes, inventada por *Descartes*.

Teoría general de las ecuaciones.

178 Aunque las ecuaciones de primero y segundo grado son, propiamente hablando, las únicas que hasta ahora se saben resolver completamente; se han descubierto ciertas propiedades generales de las ecuaciones de todos los grados, cuyo conocimiento es muy conducente para resolverlas cuando sean numéricas; y para otras varias investigaciones que ocurren en las partes mas sublimes del Algebra. El descubrimiento de estas propiedades se ha debido á una cierta forma particular que puede darse á cualquiera ecuacion.

Por decontado toda ecuacion completa de cualquier grado debe contener todas las potencias de la incógnita desde la de este grado hasta la primera inclusive, multiplicadas cada una de ellas por cantidades conocidas, y ademas un término enteramente conocido.

La ecuacion completa del quinto grado, por ejemplo, contendrá todas las potencias de la incógnita desde la primera hasta la quinta inclusive; y si hubiese en ella muchos términos en que se halle la incógnita elevada á una misma potencia, será necesario imaginarlos reunidos en uno solo, como lo hemos hecho en las ecuaciones de segundo grado (§. 108). Se pasarán despues al primer miembro todos los términos de la ecuacion, ordenándolos con respecto á las potencias de la incógnita; y asi el otro miembro será precisamente igual á cero: se hará positivo el primer término cambiando, si fuese necesario, los signos de todos los términos de la ecuacion. Por este medio la que se llama ecuacion general del quinto grado vendrá á tener esta forma:

$$nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0;$$

en la cual se debe observar que las letras n, p, q, r, s, t pueden representar números sustractivos ó negativos, igualmente que aditivos ó positivos. Dividiendo despues por n todos los términos para no dejar en el primero mas coeficiente que la unidad; y haciendo $\frac{p}{n}=P$; $\frac{q}{n}=Q$; $\frac{r}{n}=R$; $\frac{s}{n}=S$; $\frac{t}{n}=T$; nos resultará:

$$x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0.$$

En lo sucesivo daremos por supuesto que cualquiera ecuacion está ya preparada del modo que acabamos de indicar; y asi no habrá ecuacion de grado alguno que no pueda estar representada por la siguiente, que se llama *la ecuacion general de todos los grados:*

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2}\ldots\ldots + Tx + U = 0.$$

El vacío indicado por los puntos suspensivos se llena cuando al exponente n se le da un valor particular.

Cualquiera cantidad ó cualquier símbolo algebráico, ora sea de los que se denominan cantidades reales, ora de las imaginarias, que puesto en lugar de la incógnita x en una ecuacion ya preparada, reduce á cero el primer miembro, y por consiguiente satisface á la ecuacion, se llama *raiz* de esta. Pero no tratándose aqui de potencias, ya se deja entender que la voz *raiz* se toma en este tratado en sentido muy distinto del que hasta ahora la hemos dado (§§. 90 y 129).

179 La proposicion que hemos demostrado (§§. 126 y 159) con respecto á ciertas ecuaciones, se verifica en todas las de cualquier grado; por manera que puede considerarse como principio fundamental de toda esta teoría el siguiente: *Si suponemos representada por* a *cualquiera raiz de cualquiera ecuacion* $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2}\ldots + Tx + U = 0$, *el primer miembro de esta será exactamente divisible por el binomio* $x - a$.

En efecto, suponer que a es valor de x, ó raiz de la ecuacion propuesta, equivale á decir que $a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2}\ldots + Ta + U = 0$, y por consiguiente $U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2}\ldots - Ta$; de manera que la ecuacion propuesta es enteramente la misma que esta:

$$\left.\begin{array}{r} x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2}\ldots + Tx \\ -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2}\ldots - Ta \end{array}\right\} = 0;$$

la cual puede escribirse de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) \\ + R(x^{n-3} - a^{n-3})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + T(x - a) \end{array}\right\} = 0;$$

y como las cantidades $x^n - a^n$; $x^{n-1} - a^{n-1}$; $x^{n-2} - a^{n-2}\ldots\ldots$ $x - a$, son todas exactamente divisibles por el binomio $x - a$ (§. 158), es claro que el primer miembro de esta última ecuacion será exactamente divisible por el mismo binomio, y de consiguiente lo será tambien el primer miembro de la ecuacion propuesta, que es equivalente á la última.

Dalembert demuestra la misma proposicion del modo siguiente: si imaginamos efectuada la division del primer miembro de la ecuacion propuesta por el binomio $x - a$, y que se haya continuado la operacion hasta apurar, como es posible, todos los términos que contengan la x, el residuo final de esta division, en caso que lo haya, no podrá tener x. Si pues representamos por R este residuo y por Q el cuociente que suponemos hallado, tendremos precisamente (*Aritm.* §. 78.): $x^n + Px^{n-1} \ldots + \&c. = Q\,(x - a) + R$. Ahora, si en lugar de x sustituimos a, el primer miembro debe reducirse á cero, puesto que a es valor de x; tambien se reduce á cero el término $Q\,(x - a)$, porque se reduce á cero el factor $x - a$; debe pues ser $R = 0$ sin tener influjo en esto la sustitucion; porque no existiendo en el residuo la x, no se puede efectuar en él la sustitucion, ni menos podrá esta alterar el valor que antes tenia Si pues, haciendo la sustitucion debe ser $R = 0$, deberá serlo aun antes de hacerla, y de consiguiente el primer miembro de la ecuacion propuesta es exactamente divisible por el binomio $x - a$.

180 Para hallar el cuociente de esta division basta sustituir en lugar de les cantidades $x^n - a^n$; $x^{n-1} - a^{n-1}$; $x^{n-2} - a^{n-2} \ldots x - a$ los cuocientes que dan cuando se las divide por $x - a$; los cuales son, como ya sabemos (§. 158), los siguientes:

$$\begin{array}{r} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-1} \\ x^{n-2} + ax^{n-3} \ldots + a^{n-2} \\ x^{n-3} \ldots + a^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1. \end{array}$$

Ordenando los términos del resultado con respecto á las potencias de x, y reponiendo los coeficientes, vendrá el cuociente total á ser:

$$\begin{array}{r} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots + a^{n-1} \\ + Px^{n-2} + Pax^{n-3} \ldots + Pa^{n-2} \\ + Qx^{n-3} \ldots + Qa^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + T. \end{array}$$

181 No es necesario mas que atender á las reglas de la division para venir en conocimiento de que en habiendo divido por $x-a$ el primer miembro de la ecuacion $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+$ &c. $=0$, debe resultar un cuociente de esta forma: $x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+$ &c., designando por P', Q' &c. los coeficientes conocidos diferentes de los primitivos P, Q &c; y asi tendremos:

$$x^n+Px^{n-1}+\text{&c.}=(x-a)\,(x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{&c.});$$

y conforme á la observacion que hicimos (§. 116). podrá verificarse de dos modos la ecuacion propuesta; á saber: ó haciendo $x-a=0$, ó $x^{n-1}+P'x^{n-2}+$ &c. $=0$. Si ahora tuviere la ecuacion $x^{n-1}+P'x^{n-2}+$ &c. $=0$ una raiz b, será su primer miembro exactamente divisible por el binomio $x-b$; y efectuada que sea la division, tendremos:

$$x^{n-1}+P'x^{n-2}+\text{&c.}=(x-b)\,(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{&c.})$$

y de consiguiente

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\text{&c.}=(x-a)\,(x-b)\,(x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{&c.})$$

Podrá pues verificarse la ecuacion primitiva propuesta de tres distintas maneras; á saber; ó haciendo $x-a=0$, ó $x-b=0$, ó $x^{n-2}+P''x^{n-3}+$ &c. $=0$. Si la última de estas ecuaciones tuviere una raiz c, su primer miembro se descompondrá tambien en los dos factores $x-c$, $x^{n-3}+P'''x^{n-4}+$ &c., y tendremos $x^n+Px^{n-1}+$ &c. $=(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+$ &c.); donde se ve que la ecuacion propuesta se podrá verificar de cuatro distintas maneras, haciendo sucesivamente $x-a=0$; $x-b=0$; $x-c=0$; $x^{n-3}+P'''x^{n-4}+$ &c. $=0$. Y continuando el mismo razonamiento, iremos hallando los factores de los grados indicados por los exponentes $n-4$, $n-5$, $n-6$ &c.; y si igualando á cero cada factor de estos se descubre alguna raiz de la ecuacion que entonces resulta, vendremos á dar al primer miembro de la ecuacion primitiva la forma de un producto de varios factores binomios del primer grado $(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\ldots\ldots(x-l)$; es decir, el polinomio que formaba el primer miembro de la ecuacion, se habrá descompuesto en tantos factores binomios del primer grado como unidades haya en el exponente n que indicaba el grado de la ecuacion. Por manera que la ecuacion general $x^n+Px^{n-1}+$ &c. $=0$ podrá verificarse de n maneras, esto es, ó haciendo $x-a=0$, ó $x-b=0$, ó $x-c=0$, ó $x-d=0$, ó por último $x-l=0$; pero es necesario tener entendido que no se deben considerar como verdaderas á un mismo tiempo todas estas ecuaciones, sino sucesivamente; pues de lo contrario incurriríamos en manifiestas contradicciones. En efecto, si al mismo tiempo que supiéramos $x-a=0$, y de consiguiente $x=a$, supiéramos tambien $x-b=0$, y de consiguiente $x=b$, se inferiria que las dos cantidades desiguales representadas por a y b serian iguales entre sí.

182 En habiendo descompuesto el polinomio que se halla en el primer miembro de la ecuacion general propuesta $x^n+Px^{n-1}+$ &c.$=0$, en los n factores del primer grado $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d...x-l$, es absolutamente imposible hallar ningun otro factor del primer grado del mismo polinomio. En efecto, si este polinomio fuese ademas exactamente divisible por $x-\alpha$, por ejemplo, tendriamos precisamente: $x^n+Px^{n-1}+\&c.=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.)$, y por consiguiente $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)....(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.)$; y como suponiendo $x=a$, se reduce á cero el primer miembro de esta ecuacion, debe sucederle lo mismo al segundo, el cual en esta hipótesis se convierte en $(a-\alpha)(a^{n-1}+pa^{n-2}+\&c.)$ No pudiendo reducirse á cero el primer factor $a-\alpha$ por ser desiguales por suposicion a y α, es necesario que se reduzca á cero el otro factor $a^{n-1}+pa^{n-2}$ &c.; y asi la cantidad a será forzosamente raiz de la ecuacion $x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.=0$. De aqui se sigue que su primer miembro será exactamente divisible por $x-a$, y que

$$x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.=(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.);$$

de donde resulta que

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)....(x-l)$$
$$=(x-\alpha)(x-a)(x^{n-2}+p'^{n-3}+\&c.).$$

Dividiendo los dos miembros de esta ecuacion por $x-a$, tendremos estotra:

$(x-b)(x-c)(x-d)...(x-l)=(x-\alpha)=(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.)$, en la cual se puede demostrar por medio del razonamiento que acabamos de hacer, que el segundo factor $x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.$ del segundo miembro debe ser exactamente divisible por $x-b$; y efectuada esta division, y suprimido que sea de ambos miembros el factor comun $x-b$ se reducirá la ecuacion á estotra;

$(x-c)\,(x-d)\ldots(x-l)=(x-\alpha)\,(x^{n-3}+p''x^{n-4}+\&c.)$

Continuando del mismo modo, se llegarán á suprimir sucesivamente de ambos miembros $n-1$ factores: por manera que en el primero no habrá quedado mas factor que $x-l$, y en el segundo habrá solo $x-\alpha$; y de aqui será forzoso inferir que $x-l=x-\alpha$, ó que $l=\alpha$

De lo expuesto se sigue que en ninguna ecuacion, sea del grado que fuere el número de factores binomios del primer grado que tenga su primer miembro, jamas puede ser mayor *que el número de unidades del exponente del grado de la ecuacion, y de consiguiente no puede esta tener mayor número de raices* *.

183 Esto nos basta para que podamos considerar al primer miembro de cualquiera ecuacion como un producto de un número de factores $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ &c. igual al exponente de su grado; y para que á consecuencia lo podamos suponer formado lo mismo que el que hemos hallado (§. 135), con la única modificacion de ser los términos alternativamente positivos y negativos.

Limitándonos, por ejemplo, á cuatro factores, tendremos el siguiente producto:

$$
\begin{array}{lllll}
x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd=0; \\
 & -bx^3 & +acx^2 & -abdx & \\
 & -cx^3 & +adx^2 & -acdx & \\
 & -dx^3 & +bcx^2 & -bcdx & \\
 & & +bdx^2 & & \\
 & & +cdx^2 & &
\end{array}
$$

en el cual se deberán verificar las mismas propiedades que hemos ya observado (§. 135), y que generalmente hemos demostrado (§. 136); bien que por ser aqui las segundas partes de los binomios la raices de la ecuacion con signos contrarios, enunciaremos aquellas mismas propiedades del modo siguiente.

* Ahora falta demostrar que ni el número de factores binomios del primer miembro de cualquiera ecuacion, ni por consiguiente el número de raices de esta puede ser menor que el de las unidades del exponente de su grado. De esto se tratará en el *Complemento del Algebra.*

El coeficiente del segundo término, tomado con signo contrário al que tenga en la ecuacion, será la suma de todas las raices de ella.

El coeficiente del tercer término será la suma de todos los productos binarios de las raices.

El coeficiente del cuarto término, tomado con un signo contrario, será la suma de todos los productos ternarios de las raices; y asi sucesivamente, cuidando de cambiar los signos de los coeficientes de los términos que se hallen en lugar designado por número par.

El último término, que está sujeto, como todos los demas, á la misma ley, será el producto de todas las raices.

Igualando, por ejemplo, á cero el producto de los tres factores $x-5$, $x+4$, $x+3$, se formará la ecuacion $x^3+2x^2-23x-60=0$, cuyas raices serán $+5$, -4, -3. La suma de ellas será $5-4-3=-2$; la de sus productos binarios $5\times-4+5\times-3-4\times-3=-20-15+12=-23$; y últimamente el producto de las tres raices será $+5\times-4\times-3=60$.

De este modo pudieron haberse deducido los coeficientes 2; -23; -60, con solo cambiar el signo de los del segundo y del cuarto término.

Si igualamos á cero el producto de los tres factores $x-2$, $x-3$ y $x+5$, resultará la ecuacion $x^3-19x+30=0$, en la cual no se halla x^2, que es la potencia inmediatamente inferior á la del primer término; y por esta razon se dice que la ecuacion propuesta *carece de segundo término.* Esto proviene de que la suma de las raices, que tomada con signo contrario, debe generalmente ser el coeficiente de este término, es en este caso $2+3-5=0$; ó como suele decirse, de que la suma de las raices positivas es igual á la de las negativas *.

184 Hemos demostrado (§. 182) que considerando á una ecuacion como producto de muchos factores simples del primer grado, el número de estos factores no puede ser mayor que el indicado por el exponente n del grado de la ecuacion; pero si combinados estos factores simples de dos en dos, formaremos productos binarios ó de segundo grado, que serán tambien factores de las

* Véase la nota primera al fin del tomo.

ecuacion propuesta, y cuyo número estará indicado (§. 140) por $\frac{n(n-1)}{1.2}$

Por ejemplo, siendo el primer miembro de la ecuacion

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

el producto de $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)$, se puede descomponer en factores del segundo grado de los seis modos siguientes:

$$(x-a)(x-b)\times(x-c)(x-d);$$
$$(x-a)(x-c)\times(x-b)(x-d);$$
$$(x-a)(x-d)\times(x-b)(x-c);$$
$$(x-b)(x-c)\times(x-a)(x-d);$$
$$(x-b)(x-d)\times(x-a)(x-c);$$
$$(x-c)(x-d)\times(x-a)(x-b);$$

de donde resulta que una ecuacion de cuarto grado puede tener seis divisores del segundo.

Combinando de tres en tres los factores simples se formarán los divisores ternarios ó del tercer grado de la propuesta. El número de estos en una ecuacion del grado n estará indicado por

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

y asi sucesivamente.

De la eliminacion de las incógnitas que estan combinadas con otras en las ecuaciones de los grados superiores al primero.

185 Para eliminar una de dos incógnitas que se hallen combinadas en dos ecuaciones fundamentales de una misma cuestion, bastarán los métodos indicados (§§. 78 y 84) siempre que en alguna de las dos ecuaciones propuestas no pase del primer grado la incógnita que nos propongamos eliminar, sean cuales fueren el grado

de esta misma incógnita en la otra ecuacion, y el de la otra incógnita en ambas ecuaciones.

Si fuesen, por ejemplo, ecuaciones fundamentales de algun problema las dos siguientes:

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2;$$
$$x^2+xy=n^2;$$

observariamos que en la segunda no pasa del primer grado la y, y por consiguiente será facil deducir que $y=\frac{n^2-x^2}{x}$; y sustituyendo esta expresion del valor de y y su cuadrado en lugar de y y de y^2 en la primera ecuacion, resultará una nueva ecuacion, en la cual no habrá ya mas incógnita que la x. Esta ecuacion, que no tiene mas de una incógnita, se llama la *ecuacion final* del problema.

186 Si en las dos ecuaciones propuestas se hallaren los cuadrados de ambas incógnitas, será necesario para eliminar cualquiera de ellas por este método deducir una expresion de su valor, resolviendo una de las ecuaciones, que en tal caso habrá de ser de segundo grado.

Si, por ejemplo, se hubiesen deducido de la propuesta de algun problema estas dos ecuaciones:

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2;$$
$$x^2+y^2=n^2;$$

de la segunda deduciriamos $y=\pm\sqrt{n^2-x^2}$; y sustituyendo en la primera esta expresion del valor de la y y su cuadrado, resultaria:

$$ax^2\pm bx\sqrt{n^2-x^2}+c\,(n^2-x^2)=m^2;$$

con lo cual podrá parecer á primera vista que hemos conseguido el objeto que nos proponíamos, pues que la última ecuacion no contiene ya mas incógnita que la x; pero como no se puede resolver la ecuacion final sin estar previamente reducida á una forma racional, será necesario hacer que desaparezca el radical, bajo el cual se halla la incógnita, para dar á la ecuacion aquella forma.

Es facil ver que si el radical estuviese solo en un miembro, se le haria desaparecer elevando ambos miembros al cuadrado. Reuniremos pues, por medio de la trasposicion, en el primer miembro todos los términos racionales, y haremos que quede solo en el segundo el radical. Asi tendremos:

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2};$$

y elevando ambos miembros al cuadrado, resultará la ecuacion

$$\left.\begin{array}{l}a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4+2acx^2(n^2-x^2)\\ -2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2)\end{array}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2);$$

la cual no contiene ya radical alguno.

El método de que acabamos de valernos para que desapareciese el radical, es digno de ser notado, porque se ofrecen muy á menudo ocasiones de ejecutar esta operacion. Está, como hemos visto, reducido á *dejar solo en un miembro el radical que queramos hacer desaparecer; y á elevar despues los dos miembros de la ecuacion propuesta á la potencia indicada por el exponente del radical.*

187 Lo embarazoso que es este método en el caso de haber en la ecuacion muchos radicales, junto con la dificultad de resolver como es necesario una de las primitivas ecuaciones propuestas, dificultad que en el estado actual del Algebra es muchas veces insuperable; han hecho buscar otro medio de eliminar las incógnitas sin necesidad de hallar previamente expresion alguna del valor de la incógnita que intentemos eliminar. Por manera que de este modo la resolucion de las ecuaciones ha venido á ser el último paso que hay que dar para completar la solucion de cualquier problema.

Para facilitar los cálculos se ponen las ecuaciones de dos incógnitas bajo la forma de ecuaciones de una sola, dejando á la vista únicamente la que nos propongamos eliminar. Si tuviésemos, por ejemplo, una ecuacion de dos incógnitas

$$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e,$$

pasariamos todos los términos á un solo miembro; y ordenándolos con respecto á la x, resultaria:

$$x^2+(b+ay)x-(cy^2+dy+e)=0;$$

y haciendo para abreviar $b+ay=P$; $-cy^2-dy-e=Q$ quedaria trasformada la ecuacion propuesta en $x^2+Px+Q=0$.

La ecuacion general del grado m con dos incógnitas debe contener todas las potencias de x y de y que no pasen de este grado, igualmente que los productos en que la suma de los exponentes de x y de y no sea mayor que m. Podemos pues representar la ecuacion general del grado m con dos incógnitas del modo siguiente:

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}\ldots\ldots+(p+qy+ry^2\ldots+vy^{m-1})x+(p'+q'y+r'y^2\ldots+v'y^m)=0.$$

No hemos puesto en esta ecuacion coeficiente alguno á la mas alta potencia x^m, porque se puede siempre por medio de la division despejar de su multiplicador el término que se quiera en una ecuacion. Hagamos ahora

$$a+by=P;\ c+dy+ey^2=Q;\ f+gy+hy^2+ky^3=R;$$
$$p+qy\ldots+vy^{m-1}=T;\ p'+q'y\ldots+v'y^m=U;$$

y la ecuacion anterior tomará esta forma:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=0.$$

188 Bueno será observar que puede efectuarse la eliminacion de una incógnita x en dos ecuaciones completas de segundo grado, restando una ecuacion de otra. Sean, por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2+Px+Q=0;\ x^2+P'x+Q'=0;$$

y haciendo la sustraccion tendremos: $(P-P')x+Q-Q'=0$; de donde se deduce que $x=-\dfrac{Q-Q'}{P-P'}$. Sustituyendo ahora esta expresion del valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, en la primera, por ejemplo, la trasformaremos en estotra:

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0;$$

y haciendo que desaparezcan los denominadores, resultará:

$$(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0.$$

Desenvolviendo los dos últimos términos y reduciendo, tendremos:

$$(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0;$$

en la cual no falta otra cosa, para obtener la ecuacion final, sino reponer en lugar de P, Q, P' y Q' los binomios ó trinomios representados por estas letras, y efectuar las operaciones indicadas *.

189 Antes de pasar á eliminar una de las dos incógnitas que se hallen en dos ecuaciones de grados superiores al segundo, conviene ob-

* Véase la nota segunda al fin del tomo.

servar que procediendo, como se supone, de una misma cuestion las dos ecuaciones propuestas, en ambas representan las dos incógnitas unas mismas cantidades; y de consiguiente los mismos valores que sustituidos satisfagan á una de las ecuaciones, han de satisfacer tambien á la otra para que sean los que en la cuestion nos proponiamos determinar. Con el fin de poner en claro esta mútua conexion de las dos ecuaciones fundamentales de un mismo problema, nos propondremos un ejemplo particular. Asi fijaremos mejor las ideas y despues generalizaremos el razonamiento.

Supongamos que las ecuaciones fundamentales de alguna cuestion sean

$$x^3+3x^2y+3xy^2+98=0\ldots\ldots(1)$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0\ldots\ldots(2);$$

y que de antemano sepamos que en la cuestion propuesta debe ser $y=3$.

Para comprobar este valor de la y deberemos sustituirlo en las ecuaciones propuestas; con lo cual se trasformarán en estotras:

$$x^3+9x^2+27x-98=0\ldots\ldots(a)$$
$$x^2+12x-28=0\ldots\ldots(b);$$

y si el valor que hemos asignado á la y es verdadero, de las dos últimas ecuaciones ha de resultar un mismo valor para la x; de lo contrario seria falso el valor supuesto. Representemos por α el valor que para la x nos dan las dos últimas ecuaciones, ó lo que es lo mismo, el valor que sustituido en lugar de la x satisface á las dos ecuaciones (a) y (b); y de lo demostrado (§. 179) inferiremos que los primeros miembros de ambas ecuaciones serán exactamente divisibles por $x-\alpha$; tendrán pues un divisor comun, del cual debe por lo menos, ser parte el binomio $x-\alpha$. En efecto, los dos primeros miembros de las dos ecuaciones (a) y (b) tienen (§. 48) por comun divisor á $x-2$; y de consiguiente la combinacion de los dos valores $y=3$, $x=2$, satisface á las dos ecuaciones primitivas y á la cuestion propuesta.

Si aun quedase alguna duda sobre si el comun divisor de los primeros miembros de las ecuaciones (a) y (b) deba darnos á conocer el valor de la x, se desvanecerá luego que observemos que estas ecuaciones equivalen á estotras:

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0$$
$$(x+14)(x-2)=0;$$

en las cuales no es ya permitido dudar que si hacemos $x=2$, quedan ambas plenamente satisfechas.

190 El medio que acabamos de indicar para determinar el valor de una de las incógnitas luego que esté conocido el de la otra, puede tambien servirnos para eliminar cualquiera de ellas; y con este objeto haremos el siguiente razonamiento: una vez que en habiendo determinado, segun lo exija la propuesta de una cuestion, el valor de una de las incógnitas que se hallen combinadas en las ecuaciones fundamentales; y en habiendo sustituido en estas aquel valor que suponemos determinado, adquieren los primeros miembros de las dos ecuaciones un divisor comun que antes no parecian, es consiguiente que si despues de hecha aquella sustitucion practicamos con los primeros miembros de las dos ecuaciones la serie de operaciones necesarias para hallar el máximo divisor de dos cualesquiera cantidades (§. 48), el residuo final deberá reducirse á cero. Por la inversa, si antes de hallar el valor de la incógnita y, y sin hacer sustitucion alguna en las ecuaciones fundamentales de la cuestion, las ordenamos con respecto á la x, y efectuamos con los primeros miembros de ellas la misma serie de operaciones que practicariamos para hallar el máximo divisor comun de estos; en habiendo llegado á un residuo que no contenga la x, deberemos igualar á *cero* este residuo porque esta es la condicion sin la cual no puede existir divisor alguno comun de los primeros miembros de las ecuaciones propuestas ordenadas con respecto á la x: y sin la cual no puede por consiguiente existir combinacion alguna de valores de las dos incógnitas, que satisfaga á las ecuaciones fundamentales, ni menos á la cuestion que las haya originado. La ecuacion que formemos haciendo igual á cero aquel residuo, será pues *la ecuacion final* de la cuestion propuesta.

En la página adjunta se pueden ver efectuadas todas las operaciones que requiere este método, aplicado á las dos ecuaciones:

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0,$$

de las cuales hemos tratado en el párrafo anterior. En la segunda

x^3-

$-x^3$-

-

-egunda division.

Primer re 10 | $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

..... | $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

$x+38y^3+50y+98$

6)

$-98)$

Segundo) $(18y^4+110y^2+100)$

Efectuan(-8604

caciones

Dividiend*cero*, resultará la siguiente ecuacion final:

$02=0.$

Primera division.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3yx^2+3y^2x-98 & x^2+4yx-2y^2-10 \\ \cline{2-2} -x^3-4yx^2+2y^2x+10x & x-y \\ \cline{1-1} & \\ -yx^2+5y^2x+10x-98 & \\ +yx^2+4y^2x-2y^3-10y & \\ \end{array}$$

Primer residuo........ $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$

Segunda division.

$$\begin{array}{r|l} x^2+4yx-2y^2-10 & (9y^2+10)x-2y^3-10y-98 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6\,(9y^2+10)x^2+36y^3x-18y^4-110y^2-100 \text{.........................} & (9y^2+10)x-2y^3-10y-98 \\ \qquad\qquad\qquad +40yx & \\ \cline{2-2} -(9y^2+10)x^2+2y^3x+98x & x+38y^3+50y+98 \\ \qquad\qquad\qquad +10yx & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +38y^3x-18y^4-110y^2-100 \\ +50yx \\ +98x \end{array}$$

$$6\,(9y^2+10)(38y^3+50y+98)x-(9y^2+10)(18y^4+110y^2+100)$$
$$-(9y^2+10)(38y^3+50y+98)x+(2y^3+10y+98)(38y^3+50y+98)$$

Segundo residuo................ $(2y^3+10y+98)(38y^3+50y+98)-(9y^2+10)(18y^4+110y^2+100)$

Efectuando las multipli-caciones, y reduciendo.. } .... $-86y^6-690y^4+3920y^3-1500y^2+5880y+8604$

Dividiendo por 2 todos los términos; cambiando todos los signos, é igualando á *cero*, resultará la siguiente ecuacion final:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0.$$

division en la cual ha servido de divisor

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98.$$

ha resultado un residuo que no contiene la x; é igualado á *cero*, segun prescribe este método, hemos obtenido la ecuacion final:

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0;$$

la cual resuelta nos dará ademas del valor de $y=3$, indicado anteriormente, todos los demas valores de y que pueden satisfacer á las dos ecuaciones fundamentales propuestas.

191 Despues que hayamos resuelto la ecuacion final, y obtenido algun valor de y, es necesario para hallar el correspondiente de x, sustituir aquel en el último divisor, que debe ser el divisor comun de los primeros miembros de las dos ecuaciones propuestas. En sabiendo, por ejemplo, que $y=3$, se pondrá este número en el segundo divisor $(9y^2+10)x-2y^3-10y-98$: se igualará en seguida á cero; y resultará la ecuacion de primer grado $91x-182=0$: y de esta se deducirá que $x=2$.

Si aconteciere, como puede muy bien suceder, que la sustitucion del valor de y hiciese desaparecer enteramente el último divisor, será esto un indicio seguro de que aquella sustitucion deberá efectuarse en el divisor anterior, y de que este será en tal caso el divisor comun de los primeros miembros de las dos ecuaciones propuestas. En este mismo caso, despues de hecha la sustitucion é igualado á cero el penúltimo divisor, tendremos que resolver una ecuacion del segundo grado con una sola incógnita x, cuyos dos valores corresponderán al único valor que suponemos conocido de la y. Si la sustitucion del valor de y hiciese tambien desaparecer el penúltimo divisor, tendremos que hacerla en el antepenúltimo, que en tal caso será el divisor comun, y con el cual vendrá á formarse una ecuacion de tercer grado con una sola incógnita x; y entonces tendrá esta tres valores correspondientes al único que conocemos de la y; ó lo que es lo mismo, que combinados con este satisfacen á las dos ecuaciones propuestas. En general será necesario retroceder hasta encontrar un divisor que no se desvanezca cuando en él hagamos la sustitucion del valor de y.

Puede tambien suceder, que ó no resulte residuo alguno final, ó solo queden en él cantidades conocidas. En el primer caso deberemos inferir que los primeros miembros de las dos ecuaciones tienen un divisor comun independiente del valor de y; y de consiguiente las ecuaciones propuestas deben tener esta forma: $P \times D = 0$; $Q \times D = 0$; representando por D el comun divisor de los primeros miembros de ambas. En ecuaciones de esta forma se ve inmediatamente que se satisface á un mismo tiempo á las dos, haciendo $D = 0$; y esta ecuacion nos dará el valor de una de las incógnitas expresado por medio de la otra: cuando ambas esten combinadas en el factor D; pero cuando este factor no contenga mas de una sola incógnita, se podrá determinar el valor de esta; y el de la otra quedará enteramente indeterminado. Tambien se satisface á las dos ecuaciones propuestas suprimiendo el factor comun D, y haciendo $P = 0$, y $Q = 0$, por cuyo medio tendremos dos ecuaciones que podrán darnos soluciones determinadas de la cuestion propuesta.

Sean, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$(ax + by - c)(mx + ny - d) = 0;$$

$$(a'x + b'y - c')(mx + ny - d) = 0;$$

de las cuales, si suponemos igual á *cero* el segundo factor que es comun á los dos primeros miembros, deduciremos la siguiente ecuacion, en la cual se hallan combinadas ambas incógnitas:

$$mx + ny - d = 0;$$

y de consiguiente quedará indeterminada la cuestion; pero si suprimiendo este factor comun, igualamos á cero los otros factores restantes, tendremos las dos ecuaciones:

$$ax + by - c = 0; \quad a'x + b'y - c' = 0;$$

ó las equivalentes $ax + by = c$; $a'x + b'y = c'$ y bajo este supuesto será determinada la cuestion, puesto que tenemos tantas ecuaciones distintas é independientes como incógnitas.

En el caso en que sin desaparecer enteramente el residuo final de la última division contenga solo cantidades conocidas, inferiremos que las dos ecuaciones propuestas son contradictorias; porque aquel resultado nos da á conocer que los primeros miembros no pueden tener divisor alguno comun; y que de consiguiente á las ecuaciones les falta la indispensable condicion sin la cual no se pueden verificar ambas á un mismo tiempo. En efecto, para que tuviesen esta condicion seria necesario que fuese nula una cantidad cuya magnitud está determinada en la propuesta de la cuestion; y esto es un absurdo manifiesto. Tiene pues este caso mucha analogía con el del §. 68.

192 Todo lo que acabamos de decir se aplica fácilmente á dos ecuaciones cualesquiera:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots \ldots + Tx + U = 0,$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Qx^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots\ldots\ldots + Y'x + Z' = 0,$$

en las cuales suponemos que la segunda incógnita y esté envuelta en los coeficientes P, Q, P', Q' &c. Con los primeros miembros de estas dos ecuaciones efectuaremos la misma serie de operaciones que si buscásemos su máximo comun divisor; y en llegando á un residuo en el cual no se halle la x, lo igualaremos á *cero;* y así tendremos la ecuacion final, que solo tendrá la incógnita y; y en habiendo determinado algun valor de esta última incógnita, lo sustituiremos en el último ó en el penúltimo &c. divisor, el cual igualado á *cero*, nos dará el valor correspondiente de la otra incógnita x.

Aun nos resta que hacer sobre este método de eliminar las incógnitas una advertencia muy importante. Ya se sabe que en la investigacion del máximo divisor comun es necesario ejecutar ciertas multiplicaciones á fin de conseguir que el primer término del polinomio dividendo sea exactamente divisible por el primer término del divisor. Ahora bien, si no se tiene cuidado de que con estas multiplicaciones no se introduzcan factores comunes, saldrá mas complicado de lo que debiera el resultado final; bien que en procurando que sean los mas sencillos que puedan ser los multiplicadores que se empleen, no debe haber el menor rezelo de que la ecuacion final haya padecido alteracion alguna. Si acerca de esto quedare alguna duda, se pueden omitir, con solo el objeto de salir de ella, aquellas multiplicaciones *auxiliares* ó *subsidiarias;* de este modo los coeficientes de los términos del cuociente y del residuo serán fracciones; y reduciendo estas á un comun denominador, resultará por numerador el mismo residuo, y por consiguiente la misma ecuacion final que por el método general anteriormente prescrito hubiéramos hallado.

De lo expuesto se infiere que el *deducir de dos ecuaciones con dos incógnitas la ecuacion final* es un problema determinado, y que no admite mas de una solucion; pero no por eso se debe inferir que una ecuacion final no puede pertenecer á mas de una sola combinacion de ecuaciones con dos incógnitas; antes por el contrario debemos estar en la inteligencia de que una misma ecuacion final puede pertenecer á una infinidad de diferentes combinaciones de ecuaciones fundamentales. No se necesita mas que seguir un orden retrógrado al que seguimos en la indagacion del máximo divisor comun, para formar á nuestro arbitrio aquellas diferentes combinaciones de ecuaciones. Pero como esta cuestion sea de poquísimo uso en las Matemáticas elementales, no merece que nos detengamos á hacer todas las advertencias minuciosas á que podria dar motivo. Esta es una de aquellas cosas que se deben dejar á la sagacidad de los lectores inteligentes, los cuales sabrán seguramente hallarlas por sí mismos en caso que les ocurra alguna ocasion que les haga conocer la necesidad de ellas.

193 *Euler* en vez de buscar por el método ordinario el máximo divisor comun de los primeros miembros de las dos ecuaciones propuestas, se vale de un arbitrio mucho mas cómodo, que daremos á conocer proponiéndonos las ecuaciones siguientes:

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=0.$$

Si representamos por $x-\alpha$ el factor comun que adquieren los primeros miembros de estas ecuaciones luego que está determinado el valor de la y, podremos considerar al primer miembro de la primera ecuacion como un producto cuyos factores son $x-\alpha$, y otro factor de segundo grado x^2+px+q; y al primer miembro de la segunda como otro producto de $x-\alpha$ por el factor de tercer grado $x^3+p'x^2+q'x+r'$; siendo p y q, p', q' y r' coeficientes indeterminados. Tendremos pues:

$$x^3+Px^2+Qx+R=(x-\alpha)(x^2+px+q)$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=(x-\alpha)(x^3+p'x^2+q'x+r').$$

Eliminando de estas ecuaciones el binomio $x-\alpha$ como si fuera una incógnita del primer grado (§. 84), hallaremos

$$(x^3+Px^2+Qx+R)(x^3+p'x^2+q'x+r')=$$
$$(x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S')(x^2+px+q).$$

Siendo *idéntica* esta última ecuacion, y debiéndose por consiguiente verificar sin necesidad de asignar á x ningun valor particular, es absolutamente indispensable que en el primer miembro haya tantos términos y con las mismas potencias de x como en el segundo; y que ademas sean iguales los respectivos coeficientes que una misma potencia de x tenga en los dos miembros. Efectuaremos pues las dos multiplicaciones indicadas; ordenaremos los términos de los productos con respecto á las potencias de x; é igualando los coeficientes que una misma potencia tenga en los dos miembros, resultarán las siguientes ecuaciones:

$$P+p'=P'+p;\ Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'p+Q'q,$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q;\ Rq'+Qr'=S'p+R'q,$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q;\ Rr'=S'q.$$

No habiendo en estas seis ecuaciones mas de cinco cantidades indeterminadas, que son p, q, p', q', r'; y no pasando del primer grado ninguna de ellas, se podrán eliminar todas, y por último resultado tendremos una ecuacion que no contendrá mas cantidades que P, Q, R, P', Q', R', y S'; de consiguiente será esta la ecuacion final, puesto que en ella no habrá mas incógnita que la y.

El método que acabamos de exponer se reduce en suma á multiplicar cada uno de los primeros miembros de las ecuaciones por un factor, cuyos coeficientes sean indeterminados, para obtener dos productos de un mismo grado; á igualar en seguida uno con otro estos productos; á reunir en un solo miembro todos los términos de ambos, ordenados con respecto á las potencias de la incógnita; y por último á igualar á cero ó hacer que se desvanezca el coeficiente de cada una de estas potencias. De este modo lo ha presentado *Euler* en su *introduccion al analisis de los infinitos.* Designando por k el exponente del grado de los productos, el multiplicador del primer miembro de la ecuacion del grado m deberá ser del grado $k-m$, y el de la ecuacion del grado n habrá de ser del grado $k-n$. Como el primer término de cada uno de los multiplicadores tiene por coeficiente á la unidad, el primer multiplicador tendrá $k-m$ coeficientes indeterminados, y el segundo $k-n$; y de consigiente el número total de coeficientes indeterminados será $2k-m-n$. En la reunion de los dos productos debe haber un número k de términos en donde se halle alguna potencia de la x; pero no es necesario hacer que se desvanezcan mas de $k-1$ coeficientes, porque el de la potencia mas elevada de x se desvanece por sí mismo. De esto se sigue que el número total $2k - m - n$ de coeficientes indeterminados deberá ser igual á $k - 1$; y de consiguiente el exponente k de grado de los productos deberá ser igual á $m + n - 1$. Deberemos pues multiplicar por un factor del grado $n - 1$ al primer miembro de la ecuacion del grado m, y por otro factor del grado $m - 1$ al primer miembro de la ecuacion del grado n; y por último igualar entre sí los coeficientes que cada potencia de x tenga en los dos productos: lo cual es justamente lo que hemos practicado en el ejemplo propuesto.

Es digno de observarse que este primer método de Euler contiene el gérmen del que *Bezout* nos ha dado con tan prolija extension en su *teoría de las ecuaciones.*

194 Propongámonos eliminar la incógnita x de las ecuaciones

$$x^2 + Px + Q = 0;\ x^2 + P'x + Q' = 0;$$

en las cuales es facil ver que deben ser del primer grado los multiplicadores del factor comun $x - \alpha$; á saber, $x + p$; $x + p'$; tendremos pues: $R = 0$; $R' = 0$; $S' = 0$; $q = 0$; $q' = 0$; $r' = 0$; y resultará:

$$\left.\begin{array}{r} P + p' = P' + p \\ Q + Pp' = Q' + P'p \\ Qp' = Q'p \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{l} p - p' = P - P' \\ P'p - Pp' = Q - Q' \\ Q'p - Qp' = 0. \end{array}\right.$$

De las dos primeras ecuaciones se deducirá:

$$p = \frac{(P - P')\,P - (Q - Q')}{P - P'}$$

$$p' = \frac{(P - P')\,P' - (Q - Q')}{P - P'}$$

y sustituyendo en la tercera, resultará:

$$(P - P')\,Q'P - (Q - Q')\,Q' = (P - P')\,P'Q - (Q - Q')\,Q,$$

$$\text{ó } (P - P')\,(PQ' - QP') + (Q - Q')^2 = 0.$$

Ahora es necesario dividir la cantidad $x^2 + Px + Q$ por el factor supuesto $x + p$ para tener en el cuociente el factor $x - \alpha$ que debe ser comun á los primeros miembros de las dos ecuaciones propuestas, y que igualado á *cero* nos dará el valor de x representado por α. Cuando efectuemos esta division despreciaremos el residuo, que es cabalmente la ecuacion final; y siendo el cuociente $x + P - p$ lo igualaremos á *cero*, y deduciremos; $x = p - P$; y poniendo en lugar de p la expresion que antes hemos hallado de su valor, resultará: $x = -\frac{Q - Q'}{P - P'}$.

195 Con el objeto de que se ejerciten los principiantes, indicaremos la serie de operaciones que se deben efectuar para eliminar la x de las dos ecuaciones $x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$, y $x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0$, en cuyo caso tendremos $S' = 0$, $r' = 0$ (§. 193), y resultarán estas cinco ecuaciones:

$$P + p' = P' + p;$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q;$$
$$R + Qp' + Pq' = R' + Q'p + P'q;$$
$$Rp' + Qq' = R'p + Q'q;$$
$$Rq' = R'q;$$

á las cuales se las puede dar la forma siguiente:

$$p - p' = P - P'$$
$$P'p - Pp' + q - q' = Q - Q'$$
$$Q'p - Qp' + P'q - Pq' = R - R'$$
$$R'p - Rp' + Q'q - Qq' = 0$$
$$R'q - Rq' = 0.$$

Por medio de las reglas del §. 88 podriamos ciertamente deducir de cuatro cualesquiera de estas cinco ecuaciones los valores de las cuatro incógnitas p, p', q, q'; pero siendo tan sencillas, como son, la primera y la última ecuacion, nos será fácil obtener con mayor prontitud el resultado final. Hagamos, para abreviar,

$$P - P' = e;\ Q - Q' = e';\ R - R' = e'';$$

y de la primera y de la última ecuacion deduciremos:

$$p' = p - e;\ q' = \frac{R'q}{R}.$$

Sustituyamos estas expresiones en las otras tres ecuaciones; y haciendo desaparecer el denominador R, se trasformarán en estotras:

$$(P-P') Rp-(R-R') q=R (Pe-e') \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$(Q-Q') Rp-(P'R-PR') q=R (Qe-e'') \ldots\ldots (b)$$
$$(R-R') Rp-(Q'R-QR') q=R^2 e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Si ahora deducimos (§. 88) de las ecuaciones (a) y (b) los valores de p y de q, suprimiendo el factor R comun á los numeradores y al denominador, tendremos:

$$p=\frac{(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}$$
$$q=\frac{R(Q-Q')(Pe-e')-R(P-P')(Qe-e'')}{(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuacion (c), resultará una ecuacion final divisible por R; y efectuando esta division, quedará reducida á la siguiente:

$$\begin{gathered}(R-R')[(Pe-e')(P'R-PR')-(R-R')(Qe-e'')] \\ -(Q'R-QR')[(Pe-e')(Q-Q')-(P-P')(Qe-e'')]= \\ Re[(P-P')(P'R-PR')-(Q-Q')(R-R')];\end{gathered}$$

en la cual solo falta reponer en lugar de las letras e, e', e'' las expresiones á que equivalen.

196 Si se nos propusieren tres ecuaciones fundamentales de un mismo problema, designadas por (1), (2), (3), y en las cuales se hallen combinadas tres incógnitas x, y, z, podremos por medio de la regla precedente eliminar cualquiera de las incógnitas de dos cualesquiera de las ecuaciones, á la x, por ejemplo, de (1) y (2). Despues podemos eliminar la misma incógnita de otra combinacion de ecuaciones, como de (1) y (3), ó (2) y (3). El resultado de estas dos eliminaciones será una combinacion de ecuaciones en las cuales se hallarán solo las incógnitas y, z. Eliminando ahora de estas dos ecuaciones la incógnita y, por ejemplo, obtendremos la ecuacion final que solo contendrá la z. Pero es necesario observar que efectuando esta sucesiva eliminacion, no concurren del mismo modo las tres ecuaciones propuestas á formar la ecuacion final, porque una de ellas se emplea dos veces, y las otras dos no mas de una. De aqui proviene que la ecuacion final sale mas complicada de lo que debiera, por haberse introducido un factor extraño que nada tiene que ver

con la cuestion (§. 84). Bezout en su *teoría de las ecuaciones* se ha valido de un arbitrio que no está expuesto á este inconveniente; y ha hecho ver *que el exponente del grado de la ecuacion final que por la eliminacion debe resultar de cualquier número de ecuaciones completas de cualquier grado, y que contengan igual número de incógnitas, es igual al producto de los exponentes de los grados de estas ecuaciones. Poisson*, profesor en la escuela politécnica, ha dado de la misma proposicion una demostracion mas breve y mas directa que la de *Bezout*; pero como las nociones preliminares que exige no nos permiten ponerla aqui, la expondremos en el *Complemento.*

De la indagacion de las raices comensurables y de las raices iguales de las ecuaciones numéricas.

197 Despues de haber dado á conocer las principales propiedades de las ecuaciones algebráicas y el modo de eliminar las incógnitas cuando se hallen combinadas muchas en cada ecuacion, vamos á tratar de la resolucion numérica de las ecuaciones finales ó con una sola incógnita; es decir, del modo de averiguar sus raices cuando sus coeficientes estan expresados por números. *

Ante todas cosas conviene tener entendido que *en no teniendo el primer término de la ecuacion mas coeficiente que la unidad, y siendo números enteros todos los demas coeficientes, es decir, todas las cantidades conocidas que entran en la ecuacion, ninguna de sus raices reales podrá expresarse por una fraccion; sino que forzosamente habrán de ser números enteros ó cantidades incomensurables.*

Para demostrar esta proposicion supongamos que la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ se haya sustituido en la ecuacion general

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0;$$

* No tenemos hasta ahora resolucion alguna general de las ecuacionos de los grados superiores al cuarto; y si va á decir verdad, la única que podemos mirar como completa es la de las ecuaciones del segundo; porque las fórmulas que conocemos para hallar las raices de las ecuaciones de tercero y cuarto grado son muy complicadas, padecen excepciones, y no son tan cómodas para la práctica como los métodos que vamos á explicar. De cualquier modo se las puede ver en el *Complemento.*

y que por la sustitucion se reduzca á cero el primer miembro, como se requiere para que $\frac{a}{b}$ sea valor de la x, ó raiz de la ecuacon. Tendremos pues:

$$\frac{a^n}{b^n}+P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}\ldots\ldots\ldots+T\frac{a}{b}+U=0;$$

y multiplicando por b^n todos los términos, se trasformará la última ecuacion en estotra:

$$a^n+Pa^{n-1}b+Qa^{n-2}b^2\ldots\ldots+Tab^{n-1}+Ub^n=0;$$

la cual viene á ser:

$$a^n+b(Pa^{n-1}+Qa^{n-2}b\ldots\ldots+Tab^{n-2}+Ub^{n-1})=0.$$

El primer miembro de esta última ecuacion se compone de dos partes expresadas por números enteros: la segunda de ellas es exactamente divisible por b; y la primera no lo es (§. 98), pues que se supone reducida la fraccion $\frac{a}{b}$ á su mas simple expresion, ó que a y b no tienen ningun divisor comun. Es por consiguiente imposible que estas dos partes sean iguales, como es indispensable, para que la una pudiese destruir á la otra.

198 A consecuencia de esta observacion se ha echado de ver la utilidad de hacer que desaparezcan las fracciones de una ecuacion, ó de trasformarla en otra cuyos coeficientes sean todos números enteros, sin dejar de ser la unidad el coeficiente del primer término. Esta trasformacion se ejecuta haciendo la incógnita propuesta igual á otra nueva incógnita dividida por el producto de todos los denominadores de los quebrados, y despues se multiplican todos los términos por el mayor denominador que haya en la nueva ecuacion.

Propongámonos, por ejemplo, trasformar la ecuacion

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0$$

en otra que no tenga quebrados; y para ello haremos á $x=\frac{y}{mnp}$, y poniendo esta expresion de x en la ecuacion propuesta, resultará:

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=0;$$

y multiplicando por $m^3n^3p^3$ todos los términos de esta última ecuacion, resultará trasformada la primitiva en otra que no debe ya tener quebrado alguno, por razon de que en el multiplicador $m^3n^3p^3$ estan contenidos todos los factores de todos los denominadores:

$$y^3 + anpy^2 + bm^2np^2y + cm^3n^3p^2 = 0.$$

Cuando los primitivos denominadores m, n, p tengan factores comunes, bastará dividir la nueva incógnita y por el mínimo múltiplo comun de todos aquellos denominadores. Estas simplificaciones se ocurren inmediatamente á cualquiera que comprenda el objeto de esta trasformacion, y de consiguiente no hay necesidad de que nos detengamos á explicarlas: nos limitaremos solamente á hacer observar que si todos los denominadores fuesen iguales á m, bastaria hacer $x = \frac{y}{m}$.

La ecuacion propuesta, que seria entonces

$$x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = 0,$$

se trasformaria en

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = 0;$$

y multiplicando por m^3 todos los términos, tendriamos:

$$y^3 + ay^2 + bmy + cm^2 = 0.$$

En habiendo hallado los valores que de esta ecuacion resulten para la y, se les dividirá por m, y se tendrán los que de la ecuacion primitiva deben resultar para la x; puesto que $x = \frac{y}{m}$. Y como por consecuencia sea $y = mx$, los valores de y serán los de x multiplicados por m, y por esta razon se dice que esta trasformacion equivale á multiplicar por m las raices de la ecuacion propuesta.

199 Ahora, supuesto que en siendo a la raiz de la ecuacion $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Sx^2 + Tx + U = 0$, tenemos $U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots\ldots - Ta$ (§. 179), es consiguiente que a haya de ser uno de los divisores del número entero U; y asi cuando este número tenga pocos divisores será fácil sustituirlos sucesivamente en lugar de x en la ecuacion propuesta, y por este medio se reconocerá si tiene ó no alguna raiz comensurable.

Si se nos propone, por ejemplo, la ecuacion $x^3 - 6x^2 + 27x$

$-38=0$; atendiendo á que el número 38 no tiene mas divisores que los números 1, 2, 19, 38, iremos sucesivamente sustituyendo estos números, asi positiva como negativamente, y veremos que solo el número entero $+2$ satisface á la ecuacion propuesta, y de consiguiente $x=2$. Dividiremos despues por $x-2$ el primer miembro de la ecuacion propuesta, é igualando á cero el cuociente se formará la ecuacion $x^2-4x+19=0$, cuyas raices son imaginarias; y resolviéndola hallaremos que en la ecuacion

$$x^3-6x^2+27x-38=0$$

admite la x los tres valores siguientes;

$$x=2,\ x=2+\sqrt{-15};\ x=2-\sqrt{-15}.$$

200 El método que acabamos de indicar para descubrir el número entero que satisface á una ecuacion, viene á ser casi impracticable cuando el último término de esta ecuacion tiene muchos divisores; pero de la ecuacion

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\dots\dots-Ta$$

se deducen nuevas condiciones que abrevian mucho el cálculo. A fin de hacer mas perceptible el método lo aplicaremos á la ecuacion general de cuarto grado;

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0.$$

Representando como antes por a la raiz, tendremos:

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0;$$
$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4;$$

de donde se infiere que

$$\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3.$$

Esta última ecuacion nos hace ver que $\frac{S}{a}$ debe ser un número entero.

Trasladando despues R al primer miembro, resultará:

$$\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3;$$

haciendo para abreviar $\frac{S}{a}+R=R'$, y dividiendo por a los dos miembros de la ecuacion

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3,$$

tendremos:

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

de donde concluiremos que $\frac{R'}{a}$ debe ser un número entero.

Pasando Q al primer miembro; haciendo $\frac{R'}{a} + Q = Q'$; y dividiendo despues los dos miembros por a, obtendremos: $\frac{Q'}{a} = -P - a$; de donde concluiremos que $\frac{Q'}{a}$ debe ser un número entero.

Pasando por último P al primer miembro; haciendo $\frac{Q'}{a} + P = P'$; y dividiendo por a, tendremos: $\frac{P'}{a} = -1$. Reuniendo las condiciones que acabamos de enunciar, veremos que el número a no podrá ser raiz de la ecuacion propuesta como no satisfaga á las ecuaciones siguientes:

$$\frac{S}{a} + R = R'; \ \frac{R'}{a} + Q = Q'; \ \frac{Q'}{a} + P = P'; \ \frac{P'}{a} + 1 = 0,$$

de modo que R', Q' y P' sean números enteros.

De aqui se sigue que para cerciorarnos de si uno de los divisores a del último término S es ó no raiz de la ecuacion propuesta de cuarto grado, es necesario

1.° *Dividir el último término por el divisor* a, *y añadir al cuociente el coeficiente del penúltimo término, es decir, el de la primera potencia* x *de la incógnita:*

2.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al cuociente el coeficiente del término antepenúltimo, es decir, el del cuadrado* x^2 *de la incógnita:*

3.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al cuociente el coeficiente del cubo* x^3 *de la incógnita:*

4.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al cuociente la unidad, ó el coeficiente de la cuarta potencia* x^4 *de la incógnita; y si el resultado fuere igual á cero, será el divisor* a *raiz de la ecuacion; pero si alguno de los cuocientes no fuere número entero, ó no* *fuere cero el resultado de la última adicion, podremos estar ciertos de que* a *no es raiz de la ecuacion propuesta.*

Las mismas reglas pueden aplicarse á las ecuaciones de otros cualesquiera grados; pero es necesario tener entendido que asi en las divisiones como en las que hemos llamado adiciones, se debe atender á los signos. Por manera que las adiciones se convertirán en sustracciones siempre que el coeficiente y el cuociente que deban sumarse tengan signos contrarios. Asi sucederá en todas las ecuaciones cuando lleguemos á sumar el último cuociente con el coeficiente 1 del primer término; pues de lo contrario no podria el resultado reducirse á cero, como es indispensable para que el divisor a, que hayamos elegido, sea raiz de la ecuacion.*

201 Cuando se aplican estas reglas á ejemplos particulares, se puede disponer el cálculo de manera que se hagan á un mismo tiempo las sustituciones de todos los divisores del último término, y descubrir cuál de ellos sea raiz de la ecuacion propuesta.

Sea, por ejemplo, la ecuacion particular de cuarto grado $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$; y dispondremos el cálculo del modo siguiente:

$+15$,	$+5$,	$+3$,	$+1$,	-1,	-3,	-5,	-15,
$+1$,	$+3$,	$+5$,	$+15$,	-15,	-5,	-3,	-1,
-19,	-17,	-15,	-5,	-35,	-25,	-23,	-21,
		-5,	-5,	$+35$,			
		$+18$,	$+18$,	$+58$,			
		$+6$,	$+18$,	-58,			
		-3,	$+9$,	-67,			
		-1,	$+9$,	$+67$,			
		0.					

Todos los divisores del último término 15 estan colocados por orden

* No seria dificil demostrar por lo expuesto (§. 180) que las cantidades representadas por $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$ tomadas con signo contrario son los coeficientes del cuociente del polinomio $x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$ dividido por el binomio $x - a$. Por manera que el cuociente de esta division deberá ser:

$$x^3 - \frac{Q'}{a}x^2 - \frac{R'}{a}x - \frac{S}{a}.$$

de magnitud, tanto con el signo $+$ como con el signo $-$, en la primera línea, que llamaremos la línea de los divisores a.

La segunda línea contiene los cuocientes del número 15 dividido sucesivamente por todos sus divisores; y asi la llamaremos la línea de las cantidades $\frac{S}{a}$.

La tercera línea se ha formado añadiendo á cada una de las cantidades de la línea precedente el coeficiente -20 de la primera potencia de la incógnita x; y de consiguiente es la línea de las cantidades representadas por $R' = \frac{S}{a} + R$.

La cuarta línea contiene los cuocientes de cada número de la precedente dividido por el divisor que le corresponde, y esta es la línea de las cantidades $\frac{R'}{a}$; bien que se han omitido todos los cuocientes que no eran números enteros.

La quinta línea resulta de los números escritos en la anterior añadidos al número 23 que multiplica á x^2; y esta línea comprende las cantidades representadas por Q'.

La sexta línea contiene los cuocientes de cada número de la anterior dividido por el divisor que le corresponde; y contiene las cantidades representadas por $\frac{Q'}{a}$.

La séptima comprende las sumas de los números de la precedente y del coeficiente -9 que multiplica á x^3; y asi se hallan en ella las cantidades representadas por $\frac{Q'}{a} + P = P'$.

La octava en fin se obtiene dividiendo cada uno de los números de la anterior por el divisor correspondiente, y es la línea de $\frac{P'}{a}$ y no hallándose -1 mas que en la columna que á su cabeza tiene $+3$ en la línea de los divisores, inferiremos que la ecuacion propuesta no tiene mas de una raiz comensurable, la cual es $+3$; * de

* Formando el cuociente con arreglo á lo observado en la nota anterior, hallaremos que $\frac{x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15}{x - 3} = x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

manera que el primer miembro de la ecuacion será exactamente divisible por $x - 3$.

En la tabla que formemos para cualquiera otra ecuacion, podremos omitir los divisores $+1$ y -1; porque la sustitucion de estos se efectúa directamente en la ecuacion propuesta con suma prontitud y facilidad.

202 Sírvanos de nuevo ejemplo la ecuacion particular de tercer grado $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$. Despues de haber reconocido por la sustitucion directa que los números $+1$ y -1 no satisfacen á esta ecuacion, formaremos por las reglas precedentes la tabla que sigue, teniendo presente que por no hallarse en esta ecuacion la primera potencia de la incógnita x, debemos considerar al término en que correspondia estar esta potencia como si su coeficiente fuese *cero*. Es pues necesario omitir la tercera línea, y deducir inmediatamente de la segunda la cuarta.

+36,	+18,	+12.	+9,	+6,	+4,	+3,	+2,	−2,	−3,	−4.	−6,	−9,	−12,	−18,	−36,
+1,	+2,	+3,	+4,	+6,	+9,	+12,	+18,	−18,	−12,	−9,	−6,	−4,	−3,	−2,	−1,
				+1,		+4,	+9,	+9,	+4,		+1;				
				−6,		−3,	+2,	+2,	−3,		−6;				
				−1,		−1,	+1,	−1,	+1;		+1.				
				0		0		0							

En este ejemplo se ve que hay tres números que satisfacen á todas las condiciones, los cuales son: $+6$, $+3$ y -2; y asi se obtienen á un mismo tiempo las tres raices de que es susceptible la ecuacion propuesta, y se reconoce que el primer miembro de ella es el producto de los tres factores simples $x - 6$, $x - 3$ y $x + 2$.

203 Conviene observar que hay ecuaciones literales que se trasforman muy fácilmente en ecuaciones numéricas. Si tuviésemos, por ejemplo,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14^3p = 0.$$

haciendo $y = px$, resultaria:

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0;$$

y como todos los términos de esta ecuacion pueden dividirse por p^3, la reduciriamos á

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0;$$

y en habiendo averiguado que el binomio $x+7$ es el único divisor comensurable del primer miembro de esta última ecuacion, ó lo que es lo mismo, que $x=-7$; será facil inferir que en la ecuacion literal propuesta el único valor comensurable es $y=-7p$.

La ecuacion literal que hemos propuesto es de las que se llaman *ecuaciones homogéneas*, porque no haciendo cuenta de los coeficientes numéricos, contiene cada uno de sus términos igual número de factores.*

204 Suponiendo ya determinada una de las raices de una ecuacion, podemos mirar como incógnita la diferencia entre esta raiz y cualquiera de las otras; y por este medio obtendremos una ecuacion de un grado inferior al de la propuesta, y en la cual pueden observarse muchas propiedades notables.

Sea la ecuacion general.

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=0;$$

representemos por a, b, c, d &c. sus raices; y sustituyendo en ella $a+y$ en lugar de x, y desenvolviendo las potencias, tendremos:

$$\left.\begin{array}{llll}
a^m & +ma^{m-1}y & +\dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 & \ldots+y^m \\
+Pa^{m-1} & +(m-1)Pa^{m-2}y & +\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2 & +. \\
+Qa^{m-2} & +(m-2)Qa^{m-3}y & +\dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 & +. \\
+Ra^{m-3} & +(m-3)Ra^{m-4}y & +\dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 & +. \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
+Ta & +Ty & & \\
+U & & &
\end{array}\right\}=0.$$

En cuyo resultado la primera columna debe reducirse á *cero*, puesto que a es una de las raices de la ecuacion. Podemos pues suprimir

* Los lectores que quieran ver tratada con mas extension la averiguacion de los *divisores comensurables* de las ecuaciones numéricas y literales podrán acudir á la parte tercera de los Elementos de Algebra de *Clairaut*.

esta coluna; dividir despues por y todos los términos restantes; y tendremos entonces:

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y + \ldots\ldots + y^{m-1} \\ + (m-1)Pa^{m-2} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y + \ldots\ldots\ldots \\ + (m-2)Qa^{m-3} + \dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y + \ldots\ldots\ldots \\ + (m-3)Ra^{m-4} + \dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y + \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + T \end{array}\right\} = 0.$$

Puesto que las m raices de la ecuacion primitiva eran a, b, c &c.; las $m-1$ raices de la última ecuacion, que se llama *la trasformada*, serán $y = b - a$; $y = c - a$; $y = d - a$; .... &c.

Representemos la ecuacion *trasformada* por la expresion siguiente:

$$A + \frac{B}{2}y + \frac{C}{2.3}y^2 \ldots\ldots + y^{m-1} = 0 \ldots\ldots (d);$$

haciendo para abreviar

$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots\ldots + T = A$;
$m(m-1)a^{m-2} + (m-1)(m-2)Pa^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots = B$;
&c.

y designemos por V la expresion

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U.$$

205 Si la ecuacion propuesta tuviere dos raices iguales; si por ejemplo fuere $a = b$, habrá forzosamente de ser *cero* uno de los valores de y; á saber, $b - a$; y de consiguiente deberá verificarse la ecuacion (d) haciendo en ella $y = 0$. Esta suposicion hace por descontado que desaparezcan todos los términos que contienen la y, que son todos los de la ecuacion, excepto el enteramente conocido A; luego para que se verifique la ecuacion es necesario que este último sea nulo por sí mismo; luego si la ecuacion propuesta tuviere dos raices iguales á a, este valor deberá satisfacer á un mismo tiempo á las dos ecuaciones.

$$V = 0;\ A = 0.$$

Cuando la propuesta tenga tres raices iguales á a, de modo que sea $a=b=c$, se reducirán á *cero* dos de las raices de la ecuacion (d), que son $b-a$ y $c-a$; en cuyo caso será el primer miembro de la ecuacion (d) exactamente divisible dos veces consecutivas por $y-o$ (§. 179) ó por y. Y como no pueda esto verificarse sin que hayan desaparecido enteramente los coeficientes A y B, es necesario que el valor de a satisfaga á un mismo tiempo á las tres ecuaciones

$$V=o;\ A=o;\ B=o.$$

Continuando el mismo razonamiento se puede hacer ver que cuando la propuesta tenga cuatro raices iguales, la ecuacion (d) tendrá tres raices iguales á cero; su primer miembro será exactamente divisible tres veces consecutivas por y; y como esto no pueda verificarse sin que sean nulos á un mismo tiempo los coeficientes A, B y C, es consiguiente que el valor de a satisfaga á un mismo tiempo á las cuatro ecuaciones

$$V=o;\ A=o;\ B=o;\ C=o.$$

Por este medio no solo podremos reconocer si una raiz a ya conocida se halla repetida muchas veces entre las de la ecuacion propuesta, sino tambien nos será facil deducir un método general para averiguar, aun antes de conocer raiz alguna, si la ecuacion tiene ó no raices iguales ó repetidas.

Para esto es necesario observar que en el caso en que sea $A=o$, ó

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots+T=o,$$

podemos considerar á la cantidad a como raiz de la ecuacion

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=o,$$

indicando entonces x una incógnita cualquiera; y puesto que a es tambien raiz de la ecuacion $V=o$, ó $x^m+Px^{m-1}+$ &c. $=o$, es consiguiente (§. 189) que $x-a$ sea un factor comun de los primeros miembros de las dos ecuaciones anteriores.

Convirtiendo asimismo a en x en las cantidades B, C &c. vendrá á ser igualmente el binomio $x-a$ factor comun de los primeros miembros de las nuevas ecuaciones $B=o$, $C=o$ &c., siempre que la raiz a reduzca á cero las cantidades primitivas B, C &c.

Lo que acabamos de decir respecto de la raiz a convendrá igualmente á cualquiera otra raiz que se halle repetida muchas veces; y asi buscando por el método del máximo comun divisor los factores comunes de los primeros miembros de las ecuaciones

$$V=0;\ A=0;\ B=0;\ C=0;\ \&c.$$

estos factores comunes nos darán á conocer las raices iguales de la propuesta, en el orden siguiente:

Cada uno de los factores que sean comunes solo á los primeros miembros de las dos primeras ecuaciones, será dos veces factor del primer miembro de la propuesta; es decir, que si las cantidades representadas por V y por A tuvieren por comun divisor una expresion de la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, por ejemplo, la incógnita x tendrá dos valores iguales á α, y otros dos iguales á β: ó lo que es lo mismo, el primer miembro de la propuesta tendrá estos cuatro factores $(x-\alpha)$; $(x-\alpha)$; $(x-\beta)$; $(x-\beta)$.

Cada uno de los factores comunes de los primeros miembros de las tres primeras ecuaciones anteriores será tres veces factor de la propuesta; es decir, que si los primeros son de la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$ por ejemplo, los segundos serán de esta: $(x-\alpha)^3$, $(x-\beta)^3$. Del mismo modo se pueden continuar estas consideraciones hasta donde se quiera.

206 Es muy importante observar que la ecuacion $A=0$, que por la sustitucion de x en lugar de a viene á ser:

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots+T=0,$$

se deduce inmediatamente de la ecuacion $V=0$, ó de la propuesta

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots+Tx+U=0,$$

multiplicando cada término de esta última por el exponente de la potencia de x que se halle en él, y rebajando una unidad al mismo exponente: acerca de lo cual se debe advertir que siendo el término V equivalente á $V\times x^0$, no debe producir en esta operacion término alguno, porque uno de sus factores deberia ser *cero*, es decir, el exponente que en la ecuacion propuesta tiene la x. De la ecuacion $A=0$ se deduce la siguiente $B=0$, del mismo modo que $A=0$ se deduce de $V=0$; de $B=0$ se deduce $C=0$, lo mismo que de $A=0$ se dedujo $B=0$ y asi sucesivamente. *

* En la mayor parte de los libros elementales se demuestra, bien que de un modo muy incompleto, que el divisor comun de los primeros miembros de las ecuaciones $V=0$ y $A=0$ contiene los factores iguales del primer miembro de la propuesta elevados á una potencia cuyo ex-

297 Con el objeto de aclarar mas esta doctrina por medio de un ejemplo, propongámonos averiguar si hay ó no raices iguales en la ecuacion

$$x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108 = 0.$$

En este caso la ecuacion $A=0$ viene á ser:

$$5x^4 - 52x^3 + 201x^2 - 342x + 216 = 0;$$

el divisor comun de los primeros miembros de la propuesta y de esta última es $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$. Siendo del tercer grado este divisor, debe contener varios factores; es pues necesario indagar si alguno de ellos es tambien divisor exacto del primer miembro de la ecuacion $B=0$, la cual es en este caso:

$$20x^3 - 156x^2 + 402x - 342 = 0;$$

y hecha la investigacion, hallaremos que el binomio $x-3$ es factor comun de B y del divisor que antes hemos hallado. Esto equivale á decir que $x-3$ es el máximo divisor comun de V, de A y de B; y de aqui inferiremos que el primer miembro V de la ecuacion propuesta tiene por factor á $(x-3)^3$, ó que la ecuacion tiene tres raices iguales á 3. Dividiendo despues el primer divisor comun por $x-3$ cuantas veces consecutivas se pueda, es decir, dos veces, resulta por último cuociente $x-2$. Y como este binomio no sea factor comun mas que del primer miembro de la ecuacion propuesta y del de la ecuacion $A=0$, debemos inferir que $(x-2)^2$ es otro factor del primer miembro de la propuesta, y de consiguiente esta ecuacion es equivalente á $(x-3)^3(x-2)^2=0$.

208 Las raices de la ecuacion (d) serian las diferencias entre la raiz b y cada una de las otras, si en ella pusiéramos b en lugar de a; las diferencias entre la raiz c y cada una de las otras, si en ella pusiéramos c en lugar de a; y como sin embargo de ser tan diferentes estas sustituciones, conservan estas ecuaciones la misma forma y los mismos coeficientes, y se refieren todas á la misma ecuacion propuesta, se puede generalizar la misma ecuacion (d) de modo que sus raices sean las diferencias de todas las raices de la propuesta com-

ponente tiene una unidad menos que en la misma propuesta. Esto se puede inferir fácilmente de lo anteriormente expuesto; pero hemos creido mas conveniente dejar esta proposicion para el *Complemento*, donde se halla demostrada de un modo que nos parece sencillo y nuevo.

binadas de dos en dos. Para esto bastará eliminar la a de la ecuacion (d) y de estotra:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \dots + Ta + U = 0,$$

que debe verificarse para que la cantidad representada por a sea raiz de la ecuacion propuesta; porque no dependiendo el resultado mas que de los coeficientes, y no quedando en él vestigio alguno de la raiz representada por a, deberá convenir á todas igualmente.

El exponente del grado de la ecuacion final habrá de ser $m(m-1)$, porque el número de las raices de esta última ecuacion

$$a-b,\ a-c,\ a-d\ \&c.$$
$$b-a,\ b-c,\ b-d\ \&c.$$
$$c-a,\ c-b,\ c-d\ \&c.$$

será igual al número de las permutaciones que se pueden formar tomando de dos en dos las m letras a, b, c &c. atendiendo á sus diferentes situaciones. Ademas, supuesto que las cantidades $a-b$ y $b-a$, $a-c$ y $c-a$, $b-c$ y $c-b$ &c. solo se diferencian en el signo, prescindiendo de este serán iguales de dos en dos las raices de la misma ecuacion final; por manera que cuando hayamos descubierto, por ejemplo, que $y=\alpha$, podremos tener certeza de que será tambien $y=-\alpha$. De aqui se infiere que no debe esta ecuacion contener mas potencias de la incógnita que las de exponente par; porque su primer miembro debe ser el producto de cierto número de factores del segundo grado, tales como $y^2-\alpha^2=(y-\alpha)(y+\alpha)$ (§. 184). Asi que toda la ecuacion vendrá á tener esta forma:

$$y^{2n} + py^{2n-2} + qy^{2n-4} \dots + ty^2 + u = 0;$$

la cual, haciendo $y^2=z$, se convertirá en estotra: $z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \dots + tz + u = 0$; y equivaliendo la incógnita z al cuadrado de la y, las raices de la última ecuacion serán los cuadrados de las diferencias de las raices de propuesta.

Conviene observar que siendo precisamente reales las diferencias de las raices reales de la propuesta, serán positivos los cuadrados de aquellas diferencias, y que por consiguiente los valores de z serán todos positivos siempre que todas las raices de la ecuacion propuesta sean reales, ora sean positivas, ora negativas.

Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

y haciendo en ella $x=a+y$, se trasformará en estotra:

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2y+3ay^2+y^3 \\ -7a-7y \\ +7 \end{array}\right\}=0;$$

y suponiendo que a represente una de las raices de la ecuacion propuesta, será $a^3-7a+7=0$. Suprimiendo pues este trinomio en la trasformada; dividiendo por y los términos restantes, y ordenándolos con respecto á las potencias de a, tendremos $3a^2+3ay+y^3-7=0$. Eliminando la a de esta última ecuacion y de la anterior $a^3-7a+7=0$ procedente de la suposicion de que a es una de las raices de la propuesta, resultará la ecuacion final $y^6-42y^4+441y^2-49=0$, cuyas seis raices son las diferencias de las raices de la propuesta. Haciendo $z=y^2$, la última ecuacion se trasformará en estotra:

$$z^3-42z^2+441z-49=0;$$

cuyas raices serán los cuadrados de aquellas diferencias.

209 La sustitucion de $a+y$ en vez de x en cualquiera ecuacion propuesta:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}....+U=0 \text{ (§. 204)},$$

sirve tambien algunas veces para hacer que desaparezca uno de los términos de esta ecuacion. En tal caso se ordenan los términos de la *trasformada* con respecto á las potencias de la y; y se considera la cantidad a como una segunda incógnita, cuyo valor se determina igualando á *cero* el coeficiente del término que nos propongamos hacer desaparecer. Por manera que siendo la ecuacion general *trasformada*:

$$\left.\begin{array}{r} y^m+may^{m-1}+\dfrac{m(m-1)}{1.2}a^2y^{m-2}....+a^m \\ +Py^{m-1}+(m-1)Pay^{m-2}....+Pa^{m-1} \\ +Qy^{m-2}....+Qa^{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +U \end{array}\right\}=0,$$

si queremos que desaparezca el segundo término de esta, haremos $ma+P=0$; y deduciéndose que esta suposicion que $a=-\dfrac{P}{m}$, sustituiremos este valor en la *trasformada*, y asi no quedarán en ella mas términos que los que llevan las potencias y^m, y^{m-2}, y^{m-3} &c.

De esto se sigue que *para trasformar cualquiera ecuacion en otra que carezca de segundo término, se debe sustituir en lugar de la primitiva incógnita un binomio compuesto de otra nueva incógnita y de un quebrado cuyo numerador sea el coeficiente del segundo término, y cuyo denominador sea el exponente del primero, anteponiendo á este quebrado el signo contrario al que tenga el mismo segundo término de la ecuacion propuesta.*

Propongámonos, por ejemplo, trasformar la ecuacion $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$ en otra que carezca de segundo término; y conforme á la regla prescrita haremos $x = y - \frac{6}{3} = y - 2$. Sustituyendo este binomio en lugar de la x, y desenvolviendo las potencias, tendremos la siguiente ecuacion trasformada:

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ +6y^2 - 24y + 24 \\ -3y + 6 \\ +4 \end{array}\right\} = 0,$$

la cual se reduce á $y^3 - 15y + 26 = 0$;
donde no aparece ya el segundo término, es decir, el que deberia contener el cuadrado de la nueva incógnita y.

Si la trasformada hubiese de carecer de tercer término, esto es, del que contiene la potencia y^{m-2}, igualariamos á *cero* el conjunto de las cantidades que multiplican esta potencia; y para determinar el valor de a tendriamos que resolver esta ecuacion de segundo grado: $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 + (m-1)Pa + Q = 0$.

Del mismo modo, para conseguir que la trasformada careciese del cuarto término, tendriamos que resolver una ecuacion de tercer grado; y asi sucesivamente, hasta el último término, que no podrá desvanecerse sin determinar el valor de la a por medio de la ecuacion

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + U = 0$$

absolutamente semejante á la propuesta.

La razon de esta semejanza se descubre con facilidad. Igualar á cero el último término de la ecuacion trasformada, es suponer que uno de los valores de la incógnita y es igual á *cero*; porque en toda ecuacion que carece de término enteramente conocido es *cero* uno de los valores de la incógnita. Y como haciendo $y=0$ en la ecuacion $x=y+a$ resulta $x=a$, es claro que para hacer desaparecer el último término de la trasformada es necesario que la cantidad a sea uno de los valores de x, ó lo que es lo mismo, una de las raices de la primitiva ecuacion propuesta.

Las varias trasformaciones que hasta aqui hemos efectuado con las ecuaciones nos pueden haber dado idea de otras muchas por medio de las cuales podemos conseguir que las raices de la trasformada tengan con las de la propuesta la relacion que queramos.

210 Algunas veces es necesario descomponer el primer miembro de una ecuacion en factores de un grado superior al primero; y no siéndonos posible explicar aqui con alguna extension los diferentes medios que se pueden emplear para conseguir esta descomposicion, pondremos solo un ejemplo, para dar siquiera á conocer en qué consiste la dificultad de esta investigacion.

Propongámonos hallar los factores de tercer grado del primer miembro de la ecuacion

$$x^5-24x^3+12x^2-11x+7=0;$$

representemos uno de estos factores por

$$x^3+px^2+qx+r,$$

cuyos coeficientes p, q, r son indeterminados, y deben ser tales que el primer miembro de la ecuacion propuesta sea exactamente divisible por el factor

$$x^3+px^2+qx+r,$$

con independencia absoluta de los valores que pueda tener la x. Ahora bien, efectuando la division, resulta por residuo

$$\begin{aligned}&-(p^3-2pq-24p+r-12)x^2\\&-(p^2q-pr-q^2-24q+11)x\\&-(p^2r-qr-24r-7);\end{aligned}$$

expresion que no puede desvanecerse por sí misma y con independencia del valor de x, sin que las cantidades representadas por las letras p, q, r sean tales que se reduzcan á *cero* los tres polinomios en que se hallan combinadas en el residuo de la division. Exige pues la cuestion propuesta que se verifiquen estas tres ecuaciones:

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Estas tres ecuaciones se deben pues mirar como las expresiones algebráicas de las condiciones necesarias para determinar los valores de las incógnitas p, q y r; y á la resolucion de estas ecuaciones se reduce toda la dificultad de la cuestion propuesta.

Metodo para resolver por aproximacion las ecuaciones numéricas.

211 Luego que nos hayamos cerciorado de que ninguno de los divisores del último término de una ecuacion es valor de la incógnita, podemos tener seguridad de que la ecuacion no tiene raiz alguna comensurable; y ya entonces nos es forzoso recurrir á los métodos de aproximacion, los cuales estan todos fundados en este principio:

Siempre que hallemos dos cantidades que sustituidas en vez de la incógnita en el primer miembro de una ecuacion produzcan dos resultados con signo contrario, podemos tener certeza de que la ecuacion tiene una raiz real, comprendida entre las dos cantidades que hayamos sustituido.

Si, por ejemplo, en el primer miembro de la ecuacion $x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0$ sustituimos sucesivamente 2 y 20 en lugar de la x, en vez de reducirse á *cero* como la ecuacion requiere, resultará -31 de la primera sustitucion, y $+2939$ de la segunda; y de aqui debemos concluir que la ecuacion propuesta tiene una raiz real comprendida entre 2 y 20, es decir, mayor que 2 y menor que 20.

Como tendremos frecuentemente necesidad de expresar estas dos relaciones de desigualdad, haremos de aqui en adelante uso de los signos $>$ y $<$ de que se sirven los algebristas para indicarlas, colocando la cantidad mayor al lado de la abertura del signo; y asi escribiremos:

$x > 2$, para indicar que x es mayor que 2;

$x < 20$, para expresar que x es menor que 20.

Para demostrar la proposicion precedente podremos hacer el siguiente razonamiento: reuniendo por una parte los términos positivos de la ecuacion propuesta, y por otra los términos negativos, el primer miembro vendrá á ser:

$$x^3+7x-(13x^2+1).$$

Ahora bien, cuando hemos sustituido 2 en lugar de x, el resultado ha sido negativo, porque en esta hipótesis $x^3+7x<13x^2+1$; y salió positivo cuando se hizo $x=20$, porque entonces $x^3+7x>13x^2+1$. Vemos, pues, no solo que las dos cantidades representadas por x^3+7x y $13x^2+1$ deben aumentar cada una por su parte cuando se sustituyan en vez de x números mayores, sino tambien que la primera aumenta con mas rapidez que la segunda, puesto que de menor que era, ha venido á ser mayor que esta. Los valores que se sustituyan en vez de la x pueden tomarse tan próximos como se quiera unos á otros; y de consiguiente se puede hacer por este medio que las dos cantidades propuestas aumenten por grados tan pequeños como se juzgue conveniente. Si, pues, los grados de aumento de la primera cantidad son mayores que los de la segunda, de modo que no solo compensan el exceso que esta llevaba á aquella, sino tambien hacen que por el contrario la segunda venga á ser menor que la primera; es claro que debe existir un momento, por decirlo asi, en el cual se igualen ambas cantidades. »No de »otra manera, dice *Lagrange*, que dos móviles que habiendo par»tido de dos puntos distintos á un mismo tiempo, corren por un »mismo camino en un mismo sentido con desiguales velocidades, »y llegan á un mismo tiempo á otros dos puntos distintos; pero de »modo que el móvil que al principio iba detras, se haya puesto de»lante del otro; deben necesariamente haberse reunido en algun punto »del camino."

Es pues indudable que si dos cantidades sustituidas en lugar de la x producen resultados con signos contrarios, debe por precision existir alguna otra cantidad, de cuya sustitucion resulte

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

ó lo que es equivalente,

$$x^3+7x-(13x^2+1)=0,$$

$$x^3-13x^2+7x+1=0.$$

La cantidad, sea cual fuere, cuya sustitucion produzca este resultado es precisamente la *raiz* de la ecuacion propuesta.

Lo que acabamos de observar en la ecuacion particular $x^3-13x^2+7x-1=0$ se puede aplicar á cualquiera otra; y para que sea mas perceptible lo que sobre este particular nos proponemos decir, representemos por P la suma de todos los términos positivos del primer miembro de la ecuacion; por N la de los negativos; por a el valor de x, cuya sustitucion ha producido un resultado negativo; y por b el que ha producido un resultado positivo. Como no puedan verificarse estas dos circunstancias sin que en la primera sustitucion sea $P<N$, y en la segunda $P>N$, inferiremos que pues la cantidad que era menor ha venido á ser mayor que la otra, debe existir un valor de x mayor que a y menor que b, de cuya sustitucion resultará $P=N$, ó lo que es lo mismo, $P-N=0$.

En vista de este razonamiento podrá parecer necesario que los valores sustituidos en lugar de la x sean ambos positivos ó ambos negativos; porque cuando tienen signos diferentes, el valor negativo hace que varíen de signo los términos de la ecuacion que tengan potencias de exponente impar, y por consiguiente las cantidades representadas por P y N no estan compuestas de un mismo modo en ambas sustituciones. Pero desaparecerá cualquier duda que sobre esto pueda ocurrir con solo hacer $x=0$; pues de este modo la ecuacion propuesta se reduce á su último término, y este ha de tener forzosamente un signo contrario al del resultado de alguna de las dos sustituciones que anteriormente suponemos hechas. Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0;$$

y haciendo en ella $x=-1$ y $x=2$, se convierte su primer miembro respectivamente en $+12$ y -45. Si á pesar de tener signos contrarios estos resultados, se dudase de que debe existir una raiz de la ecuacion entre -1 y $+2$, supongamos $x=0$, y todo el primer miembro se reducirá á -3; luego las dos sustituciones $x=0$, $x=-1$ dan dos resultados con signos contrarios, y de consiguiente existirá entre *cero* y -1 una raiz de la ecuacion propuesta. Para mayor confirmacion de esto sustituyamos $-y$ en lugar de x; y se trasformará la ecuacion en estotra:

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=0,$$

en la cual será

$$P=y^4+2y^3+15y;\ N=3y^2+3.$$

Haciendo $y=0$, será $P<N$; cuando $y=1$ será $P>N$.

Se puede, pues, en este caso discurrir del mismo modo que en el anterior, y concluir que la ecuacion trasformada tiene una raiz real comprendida entre o y $+2$; de donde se sigue que la ecuacion propuesta debe tambien tener una raiz real comprendida entre o y -1; y por consiguiente entre los valores $+2$ y -1, que primitivamente se sustituyeron, y que produjeron los resultados $+12$ y -45.

No pudiendo ocurrir mas casos que los que acabamos de examinar, podemos ya mirar como suficientemente probada la proposicion que intentabamos demostrar.

212 Antes de pasar adelante observaremos que, sean cuales fueren el grado y los coeficientes de una ecuacion, se pueden siempre asignar números que puestos en lugar de la incógnita hagan que el primer término valga mas que la suma de todos los demas. Bien fácil es convencerse de la verdad de esta asercion, en habiendo observado la rapidez con que crecen las diferentes potencias de cualquier número mayor que la unidad (§. 126). Entre estas potencias la mas elevada excede tanto mas á las que le son inferiores cuanto mas considerable es el número de que se trata; de manera que este puede ser tal, que el exceso de una de sus potencias sobre cada una de las otras inferiores llegue á ser mayor que cualquier cantidad dada por grande que sea. Veamos, pues, cómo podamos determinar algunos de los números que tengan la condicion enunciada.

Es claro que el caso menos favorable seria aquel en que todos los coeficientes de la ecuacion fuesen iguales al mayor de ellos; es decir, si en lugar de la ecuacion

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

tuviésemos

$$x^n + Sx^{n-1} + Sx^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Sx + S = 0,$$

ó lo que para el caso es lo mismo,

$$x^n - Sx^{n-1} - Sx^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots - Sx - S = 0,$$

representando por S el mayor de todos los coeficientes $P, Q \ldots. T, U$.

Puesto el primer miembro de esta última ecuacion bajo la forma

$$x^n - S\,(x^{n-1} + x^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1.$$

deberemos tener presente que

$$x^{n-1}+x^{n-2}\ldots\ldots\ldots\ldots+1=\frac{x^n-1}{x-1}\ (\S.\ 158);$$

y sustituyendo esta expresion fraccionaria en lugar del polinomio encerrado dentro del paréntesis, se convertirá el primer miembro de la ecuacion en $x^n-\frac{S(x^n-1)}{x-1}$, ó en $x^n-\frac{Sx^n}{x-1}+\frac{S}{x-1}$; y si ponemos M en lugar de x resultará:

$$M^n-\frac{SM^n}{M-1}+\frac{S}{M-1};$$

cantidad que será indudablemente positiva si hacemos $M^n=\frac{SM^n}{M-1}$. Si dividimos ahora los dos miembros de esta ecuacion por M^n, resultará:

$$1=\frac{S}{M-1};\ \text{ó}\ M=S+1.$$

Sustituyendo, pues, en lugar de x el mayor de los coeficientes de la ecuacion aumentado de una unidad, podemos tener entera seguridad de que el primer término será mayor que la suma de todos los demas.

El número M podrá ser menor que el que acabamos de asignar, siempre que habiendo en la ecuacion varios términos positivos y otros varios negativos, no fuere nuestro intento hacer que el primer término sea mayor que la suma de todos los demas, sino solo que la suma de los términos positivos sea mayor que la de los negativos; pues para esto bastará hacer que el primer término sea mayor que la suma de los términos negativos; y esto se conseguirá tomando M igual al mayor coeficiente negativo aumentado de una unidad.

Supuesto que en la ecuacion

$$x^n-Px^{n-1}-Qx^{n-2}\ldots\ldots\ldots-Tx-U=0,$$

si hacemos $x=0$, se reduce á $-U$ el primer miembro; y si hacemos $x=S+1$, debe ser positivo el resultado de la sustitucion, deberemos inferir que ningun número mayor que $S+1$ podrá ser raiz de la ecuacion propuesta, y que de consiguiente todas sus raices positivas han de estar precisamente comprendidas entre 0 y $S+1$.*

* A estos valores, entre los cuales estan comprendidas las raices de una ecuacion, se les suele llamar *límites* de ellas; sin que por esto deba

Por el mismo medio se puede tambien descubrir un límite de las raices negativas, y para esto sustituiremos $-y$ en lugar de x en la ecuacion propuesta; y cambiaremos todos los signos de la trasformada para hacer positivo el primer término si resultase negativo (§. 178). Por esta trasformacion se consigue que los valores positivos de y correspondan á los valores negativos de x, y recíprocamente; y de consiguiente si fuere R el mayor coeficiente negativo de la ecuacion trasformada, será $R+1$ un límite de los valores positivos de y, y por consiguiente $-R-1$ será el de los valores negativos de x.

Por último, si quisiéremos hallar un límite mas próximo que cero á la menor de las raices, sustituiremos $\frac{1}{y}$ en lugar de x en la ecuacion propuesta, y prepararemos la trasformada con arreglo á lo prescrito (§. 178). Siendo los valores de y inversos de los de x, corresponderá el mayor de los primeros al menor de los segundos, y recíprocamente. Luego si $S'+1$ indicase el límite superior de los valores de y, ó si tuviésemos $y<S'+1$, y de consiguiente $\frac{1}{x}<S'+1$, deduciremos de aqui que $1<(S'+1)x$; y últimamente que $\frac{1}{S'+1}<x$.

En efecto, se ve facilmente que sin alterar la relacion de desigualdad de dos cantidades separadas por los signos $<$ ó $>$, se las puede multiplicar ó dividir por una misma cantidad, ó se les puede sumar ó restar la misma cantidad; por manera que en las expresiones en que hacemos uso de los signos $<$ y $>$, se verifican en esta parte las mismas propiedades que si en ellas estuviese el signo de igualdad.

entenderse otra cosa sino que ninguna raiz puede llegar á ser igual á ninguno de aquellos valores. En el tratado *de la resolucion de las ecuaciones numéricas de Lagrange* se pueden ver fórmulas para hallar límites mas próximos de las raices que los que nosotros hemos indicado. Sin embargo, lo que hemos dicho basta para hacer ver que las proposiciones fundamentales de la resolucion de las ecuaciones son independientes de la idea del *infinito*.

213 De lo dicho se sigue que *toda ecuacion de grado impar tiene precisamente una raiz real con signo contrario al de su último término;* porque si se toma un número M tal que el signo de la cantidad

$$M^n + PM^{n-1} + QM^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + TM \pm U$$

no dependa mas que del de su primer término M^n; en siendo impar el exponente n, será positiva aquella cantidad si el número M es positivo, y negativa si lo fuese el número supuesto; porque en siendo impar el exponente n, será M^n del mismo signo que M. Sentado esto, si el último término V tiene el signo $+$ y se hace $x = -M$, saldrá un resultado con signo contrario al que da el supuesto de $x = 0$; por lo cual se ve que la propuesta tiene una raiz entre o y $-M$, es decir, negativa. Si el último término U tuviere el signo $-$, y se hace $x = +M$, se hallará un resultado con signo contrario al de la suposicion de $x = 0$; y por consiguiente en este caso estará comprendida la raiz entre o y $+M$, es decir, será positiva.

214 Cuando la ecuacion propuesta sea de un grado par, permanecerá positivo el primer término M^n, sea cual fuere el signo que se dé á M, y por tanto no podremos tener certeza alguna, por lo anteriormente expuesto, de la existencia de alguna raiz real, siempre que el último término tenga el signo $+$; puesto que, ora se haga $x = 0$, ora $x = \pm M$, se hallará en todos casos un resultado positivo; pero siendo negativo el término U, se hallan haciendo sucesivamente $x = +M$, $x = 0$, $x = -M$, tres resultados precedidos respectivamente de los signos $+$ $-$ y $+$; y por consiguiente la ecuacion propuesta ha de tener en este caso dos raices reales por lo menos; la una positiva comprendida entre M y o, y la otra negativa comprendida entre o y $-M$; luego *toda ecuacion de grado par, cuyo último término sea negativo, tendrá por lo menos dos raices reales, la una positiva y la otra negativa.*

215 Pasemos ya á resolver por aproximacion las ecuaciones numéricas; y para hacer mas comprensible lo que diremos sobre este particular, propongámonos desde luego, por ejemplo, resolver la ecuacion

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

Siendo -4 su mayor coeficiente negativo, debemos inferir (§. 212) que su mayor raiz positiva será menor que 5. Sustituyendo en ella

—y en lugar de x, se trasformará la propuesta en estotra:

$$y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0,$$

y teniendo la trasformada positivos todos sus términos, es manifiesto que el valor de y debe ser negativo, y por consiguiente el de x ha de ser precisamente positivo. Es, pues, visto que la ecuacion propuesta no podrá tener raiz alguna negativa, y que todas sus raices reales estan comprendidas entre 0 y $+5$.

El primer método que se nos ocurre para descubrir límites mas aproximados, se reduce á suponer sucesivamente $x=1$; $x=2$; $x=3$; $x=4$; y viendo que dos de estos números sustituidos en la ecuacion propuesta dan resultados con signos contrarios, tendremos en aquellos números otros nuevos límites de las raices. Ahora bien, haciendo en la ecuacion

$x=1$, se convierte su primer miembro en $+21$;
$x=2$ .... $+5$;
$x=3$ .... -9;
$x=4$ .... $+15$.

Vemos pues que esta ecuacion tiene dos raices reales, una de ellas comprendida entre 2 y 3, y la otra entre 3 y 4. Para aproximarnos mas á la primera tomaremos el medio $2,5$ entre los dos números 2 y 3, entre los cuales sabemos que está comprendida; y haciendo $x=2,5$, el resultado de esta sustitucion será:

$$+39,0625 - 62,5 - 7,5 + 27 = -3,9375;$$

y siendo como es negativo, nos hace ver que la raiz que buscamos se halla entre 2 y $2,5$. Tomando un medio entre estos dos números saldrá $2,25$, pero dejando por ahora las centésimas, y suponiendo que $2,3$ es el valor de x, podemos estar ciertos de que conocemos la raiz que buscábamos, con diferencia de menos de una décima de la unidad; y en caso que deseemos aproximarnos mas á la exactitud, nos podremos valer del método siguiente debido á *Newton*.

Haremos $x=2,3+y$; y al tiempo de sustituir este binomio en la ecuacion propuesta, tendremos presente que y representa una fraccion muy pequeña, y que de consiguiente su cuadrado y demas potencias superiores son despreciables. De este modo tendremos:

$$x^4 = (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y$$
$$-4x^3 = -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y$$
$$-3x = -3(2,3) - 3y$$
$$+27 = +27.$$

Por medio de estas sustituciones se convertirá la ecuacion propuesta en $-0,5839 - 17,812y = 0$;
de donde se deduce que

$$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

En esta primera operacion no pasaremos de las centésimas, y resultará:

$$y = -0,03 \,;\; x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Para obtener un nuevo valor de x mas aproximado á la exactitud que el precedente, supondremos $x = 2,27 + y'$; y sustituyendo este binomio en la ecuacion propuesta, sin hacer caso mas que de la primera potencia de y', el resultado de la sustitucion será

$$-0,04595359 - 18,046468y' = 0;$$

de donde se infiere que

$$y' = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025;$$

y por consiguiente $x = 2,2675$. Repitiendo estas operaciones podemos por este método aproximarnos cuanto queramos al verdadero valor de x.

Del mismo modo podemos hallar que el valor aproximado de la segunda raiz real comprendida entre 3 y 4 es $x = 3,6797$, llevando la aproximacion hasta las *diezmilésimas* de la unidad.

216 Podremos venir en conocimiento del grado de aproximacion que por este método conseguímos, buscando el límite de los valores de los términos que se desprecian en las sustituciones.

Si la ecuacion propuesta fuere

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

la sustitucion de $a + y$ en lugar de x dará por resultado el primero que hemos hallado (§. 204), sin haber lugar en él reduccion alguna; porque no siendo a en este caso raiz de la ecuacion, sino solo un valor aproximado de x, no se puede reducir á cero la expresion

$$a^m + Pa^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + Ta + U.$$

Representando esta última por V, la ecuacion que en el §. citado designamos por (d), se trasformará en la siguiente:

$$V+\frac{A}{1}y+\frac{B}{1\,.\,2}y^2+\frac{C}{1\,.\,2\,.\,3}y^3\ldots\ldots+y^m=0;$$

de la cual se deduce que

$$Ay=-V-\frac{B}{1\,.\,2}y^2-\frac{C}{1\,.\,2\,.\,3}y^3\ldots\ldots-y^m;$$

$$y=-\frac{V}{A}-\frac{By^2}{1\,.\,2A}-\frac{Cy^3}{1\,.\,2\,3\,.\,A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

Despreciando las potencias de y superiores á la primera, viene á quedar $y=-\frac{V}{A}$; y el error es

$$-\frac{By^2}{1\,.\,2A}-\frac{Cy^3}{1\,.\,2\,.\,3A}\ldots\ldots-\frac{y^m}{A}.$$

En caso que a no difiera del verdadero valor de x mas que en una cantidad menor que $\frac{1}{p}a$, el error será menor que el número que resultaria poniendo $\frac{1}{p}a$, en lugar de y; lo cual daria:

$$-\frac{B}{1\,.\,2\,.\,A}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{C}{1\,.\,2\,.\,3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3\ldots\ldots-\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Calculando pues esta cantidad en el supuesto de $y=-\frac{V}{A}$, nos cercioraremos de si es ó no despreciable en comparacion de $\frac{V}{A}$; y cuando sea tan considerable que no se la deba despreciar, será necesario buscar para a un número mas inmediato al verdadero valor de x.

Por conclusion, en habiendo determinado algunos valores de y, y', y'' &c. si advertimos que estos valores forman una serie decreciente, no nos debe quedar la menor duda de que nos vamos aproximando mas y mas á la exactitud.

217 El método que acabamos de exponer es conocido con el nombre de *método de las sustituciones sucesivas.* Lagrange lo ha perfeccionado considerablemente en las Memorias de la Academia de Berlin (años de 1767 y 1768). En primer lugar ha observado

que sustituyendo solo números enteros, podia muy bien suceder que pasásemos por encima de muchas raices sin echarlas de ver. Con efecto, si tuviésemos, por ejemplo, la ecuacion

$$(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-3)(x-4)=0;$$

y si en lugar de x sustituyésemos los números 0, 1, 2, 3 &c. pasariamos por encima de las raices $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ sin echar de ver su existencia; porque tendriamos:

$$(0-\tfrac{1}{3})(0-\tfrac{1}{2})(0-3)(0-4)=+\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times3\times4=+2$$
$$(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{2})(1-3)(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times2\times3=+2;$$

resultados que por ser ambos positivos no pueden indicarnos la existencia de raiz alguna, sin embargo de estar comprendidas dos entre los dos valores sustituidos. Fácil es ver que esto proviene de que la sustitucion de 1 en lugar de x hace variar al mismo tiempo los signos de los dos factores $x-\frac{1}{3}$, $x-\frac{1}{2}$; por manera que siendo ambos negativos cuando se ponia *cero* en lugar de x, vienen ambos á ser positivos cuando se hace $x=1$; pero si en lugar de x hubiéramos puesto un número comprendido entre un $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$, solo el factor $x-\frac{1}{3}$ hubiera mudado de signo, y se hubiera obtenido un resultado negativo.

Asi sucederia precisamente si hubiésemos sustituido en lugar de x números cuya diferencia fuese menor que la de las raices $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Si hubiésemos, por ejemplo, sustituido $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ &c. hubieran resultado dos variaciones de signos.

Se podria acaso objetar contra lo que acabámos de decir, que en haciendo desaparecer los coeficientes fraccionarios de una ecuacion todas sus raices reales han de ser números enteros ó cantidades irracionales y de ningun modo fracciones (§. 197); pero se ve con facilidad que aun las cantidades irracionales, asi como las fracciones, pueden ser tales que se diferencien en menos de una unidad.

En general, aunque una ecuacion tenga muchas raices reales, no aparecerán variaciones de signos que nos las indiquen, siempre que las sustituciones hagan cambiar los signos de un número par de factores. Para evitar este inconveniente es necesario que cada dos números de los que vayamos sucesivamente sustituyendo, desde el menor límite hasta el mayor, tengan una diferencia menor que la mínima de las diferencias que pueda haber entre dos raices de la ecuacion propuesta. Por este medio los números que sustituyamos estarán precisamente comprendidos entre las raices consecutivas; y las sustituciones no harán variar de signo á mas de un factor. Esta operacion no exige que conozcamos con exactitud la mínima diferencia de las raices; basta que tengamos conocido un límite al cual no pueda ser inferior.

Para determinar este límite podremos formar la ecuacion cuyas raices son los cuadrados de las diferencias de las raices de la propuesta (§. 208).

Sea esta ecuacion

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \dots + tz + u = 0 \dots (D);$$

y para obtener el límite menor de sus raices, haremos (§. 212) $z = \frac{1}{v}$; y la ecuacion (D) se trasformará en estotra:

$$\frac{1}{v^n} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \dots\dots + t\frac{1}{v} + u = 0;$$

y multiplicando por v^n todos los términos, tendremos la siguiente:

$$1 + pv + qv^2 \dots\dots + tv^{n-1} + uv^n = 0.$$

Despejando su coeficiente á v^n, será

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \dots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

y si representamos por $\frac{r}{u}$ al mayor coeficiente negativo de esta ecuacion, tendremos: $\frac{1}{\frac{r}{u}+1} < z$. No debemos considerar aqui mas que el límite positivo, porque es el único que se refiere á las raices reales de la ecuacion propuesta.

En conociendo por este medio el límite $\frac{1}{\frac{r}{u}+1}$ $\frac{u}{r+u}$, menor que el cuadrado de la mínima diferencia de las raices de la propuesta, extraeremos de él la raiz cuadrada, ó al menos tomaremos el número inmediatamente menor que aquella raiz; y este número, que designaremos por k, nos indicará la diferencia que deberá haber entre cada dos números de los que se han de sustituir. Asi que, formaremos las dos series $0, +k, +2k, +3k, +\&c. -k, -2k, -3k, -\&c.$, de las cuales no tomarémos mas términos que los comprendidos entre los límites, asi de las raices positivas como de las negativas de la ecuacion propuesta; y las variaciones de signos que nos presente la serie de los resultados obtenidos por la sucesiva sustitucion de estos números en lugar de x en la ecuacion propuesta, nos indicarán sus diferentes raices reales, tanto positivas como negativas.

218 Sea por ejemplo la ecuacion

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

la cual (§. 208) nos ha conducido á la ecuacion

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

Haciendo en esta $z = \frac{1}{v}$, y ordenando con respecto á las potencias de la v los términos de la trasformada, tendremos:

$$v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0;$$

y como el mayor coeficiente negativo es 9, podremos tener certeza de que $v < 10$, y por consiguiente $z > \frac{1}{10}$; será pues necesario tomar $k = 6 < \frac{1}{\sqrt{10}}$; y esto se conseguiria haciendo $k = \frac{1}{4}$; pero basta suponer $k = \frac{1}{3}$: porque si en la última ecuacion trasformada sustituimos 9 en lugar de v, resulta ya de esta sustitucion una cantidad positiva, y asi venimos en conocimiento de que v ha de ser menor que 9, y por consiguiente $z > \frac{1}{9}$; y por k podrá ser $= \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.

El límite mayor de las raices positivas de la ecuacion propuesta $x^3 - 7x + 7 = 0$ es 8; y -8 es el de las raices negativas; deberemos pues sustituir sucesivamente en lugar de x los números que se hallan en las dos series siguientes:

$$0, \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{3}, \quad \frac{4}{3} \ldots\ldots \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{3}, \quad -\frac{4}{3} \ldots\ldots -\frac{24}{3}.$$

Podria evitarse el tener que hacer uso de las fracciones haciendo $x=\frac{x'}{3}$, porque entonces las diferencias de los valores de x' serian triples de las de los valores de x; y si estas deben todas ser mayores que $\frac{1}{3}$, aquellas deberán todas ser mayores que la unidad; y de consiguiente si en la ecuacion primitiva debiamos sustituir sucesivamente las fracciones anteriormente indicadas, deberemos sustituir sucesivamente los números enteros

$$\begin{array}{llll} 0, & 1, & 2, & 3 \ldots\ldots\ldots\ldots 24 \\ - & 1, -2, & -3 \ldots\ldots\ldots\ldots & -24 \end{array}$$

en la ecuacion trasformada $x'^3-63x'+189=0$. Los signos de los resultados de las sustituciones variarán de $+4$ á $+5$; de $+5$ á $+6$; y de -9 á -10: por manera que habrá dos valores positivos y uno negativo:

$$\left.\begin{array}{l} x'>4 \text{ y } <5 \\ x'>5 \text{ y } <6 \end{array}\right\} \text{ y por consiguiente } \left\{\begin{array}{l} x>\frac{4}{3} \text{ y } <\frac{5}{3}; \\ x>\frac{5}{3} \text{ y } <\frac{6}{3}; \end{array}\right.$$

y puesto que el valor negativo de x' se halla entre -9 y -10, se hallará el de x entre $-\frac{9}{3}$ y $-\frac{10}{3}$

Ahora que ya conocemos las diferentes raices de la ecuacion propuesta con diferencia de menos de $\frac{1}{3}$ de la unidad, podremos aproximarnos mas al verdadero valor de ellas por el método prescrito (§. 215).

219 Lo que hemos practicado en los ejemplos que nos hemos propuesto, se podrá igualmente ejecutar con una ecuacion de cualquier grado, y por este medio vendremos en conocimiento de los valores aproximados de todas sus raices reales. Es verdad que en siendo algo elevado el grado de la ecuacion, es por lo comun muy largo y penoso el cálculo *; pero ademas de que en algunos casos no será necesario recurrir á la ecuacion (D), en otros podremos valer-

* En el tratado de la *resolucion numérica de las ecuaciones* se podrá ver tambien un método dado por *Lagrange* para evitar el uso de la ecuacion (D).

nos, en vez de ella, de algunos otros medios que el estudio de los ramos ulteriores del analisis nos dará á conocer.

Por otra parte haremos notar que las sustituciones sucesivas de los números enteros 0, 1, 2, 3 &c. en lugar de x ofrecen en muchas ocasiones indicios suficientes para hacer sospechar que existen algunas raices cuya diferencia es menor que la unidad. En el último ejemplo los resultados de aquellas sustituciones serian $+7$, $+1$, $+1$, $+13$ &c., y viendo que primeramente van disminuyendo y despues aumentando, tenemos fundamento para creer que entre los dos números sustituidos $+1$ y $+2$ podrá haber dos raices iguales ó casi iguales. Para salir de esta duda es muy buen medio sustituir en lugar de la incógnita primitiva otra cuyos valores sean múltiplos de los de aquella. Haciendo por ejemplo $x=\frac{y}{10}$, se trasforma la ecuacion propuesta en estotra:

$$y^3-700y+7000=0;$$

la cual no es dificil ver que tiene dos raices positivas; una entre 13 y 14, y otra entre 16 y 17. Y no se crea que para descubrir la existencia de estas raices ha sido necesario hacer muchas sustituciones; porque si en la ecuacion propuesta sospechábamos que las raices existian entre 1 y 2, en la trasformada deberán existir, en caso que las haya, entre 10 y 20; y en habiendo determinado, segun lo hemos hecho, que uno de los valores de y se halla entre 13 y 14, y el otro entre 16 y 17, sabremos que uno de los valores de x se halla entre 1,3 y 1,4 y otro entre 1,6 y 1,7; es decir, conoceremos ya las dos raices positivas de la ecuacion propuesta con diferencia de menos de una décima de la unidad.

220 Cuando los coeficientes de una ecuacion que nos propongamos resolver sean números muy considerables, será muy conveniente trasformarla en otra cuyos coeficientes sean mucho mas pequeños; y esto se consigue sustituyendo en lugar de la incógnita primitiva otra que sea parte alicuota de ella. Si tuviésemos, por ejemplo,

$$x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0,$$

hariamos $x=10z$, y resultaria:

$$z^4-8z^3+19{,}98z^2-14{,}937z+0{,}5=0:$$

y si en vez de esta ecuacion tomamos estotra

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0,5 = 0$$

que apenas se diferencia de la anterior; viendo, como no es dificil ver, que z tiene dos valores reales comprendidos entre 0 y 1, y entre 1 y 2; podremos seguramente inferir que la primitiva incógnita x tiene otros dos valores reales comprendidos entre 0 y 10, y entre 10 y 20.

221 *Lagrange* ha dado á este método de las sustituciones sucesivas una forma que tiene la ventaja de darnos á conocer inmediatamente despues de cada operacion, cuánto nos hemos aproximado al verdadero valor de la raiz, y por otra parte no exige que conozcamos previamente el valor aproximado con diferencia de menos de una décima.

Representemos por a el número entero próximamente menor que la raiz buscada; y como lo que en tal caso nos falta para determinarla con exactitud, deba ser una fraccion, hagamos $x = a + \frac{1}{y}$; y sustituyamos este binomio en la propuesta. De este modo la ecuacion trasformada deberá tener precisamente alguna raiz mayor que la unidad; llamando b al número entero próximamente menor que esta raiz de la trasformada, resultará por segunda aproximacion $x = a + \frac{1}{b}$; Pero siendo b con respecto á y lo que a era con respecto á x, se podrá en la ecuacion trasformada hacer $y = b + \frac{1}{y'}$; y la nueva ecuacion trasformada tendrá forzosamente una raiz mayor que la unidad. Llamando b' al número entero próximamente menor que esta raiz, tendremos:

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'}.$$

Poniendo este valor en la expresion del de x, resultará:

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1};$$

y este será el tercer valor aproximado de x. Del mismo modo podremos hallar el cuarto haciendo $y' = b' + \frac{1}{y''}$; y representando por b'' el número entero próximamente menor que y'', tendremos

$$y'=b'+\frac{1}{b''}=\frac{b'b''+1}{b''};$$

de donde se infiere que

$$y=b+\frac{b''}{b'b''+1}=\frac{bb'b''+b''+b}{b'b''+1},$$

y por último

$$x=a+\frac{b'b''+1}{bb'b''+b''+b};$$

y asi sucesivamente.

222 Apliquemos este método á la ecuacion $x^3-7x+7=0$. Ya hemos visto (§. 218) que la menor de las raices positivas de esta ecuacion está comprendida entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$, es decir, entre 1 y 2; hagamos pues $x=1+\frac{1}{y}$; y tendremos:

$$y^3-4y^2+3y+1=0.$$

El límite de las raices positivas de esta última ecuacion es 5; y sustituyendo sucesivamente 0, 1, 2, 3, 4 en lugar de y, se echará pronto de ver que tiene dos raices mayores que la unidad; de las cuales la una se halla entre 1 y 2, y la otra entre 2 y 3. De aqui resultará pues $x=1+\frac{1}{1}$; $x=1+\frac{1}{2}$; es decir, $x=2$, y $x=\frac{3}{2}$.

Estos dos valores corresponden á los que antes hemos ya hallado entre $\frac{6}{3}$ y $\frac{5}{3}$, entre $\frac{5}{3}$ y $\frac{4}{3}$, y cuya diferencia no llega á una unidad.

Para aproximarnos mas al verdadero valor de la primera raiz que corresponde á $b=1$, haremos $y=1+\frac{1}{y'}$, y tendremos:

$$y'^3-2y'^2-y'+1=0.$$

Como la única raiz que esta ecuacion tiene mayor que la unidad está comprendida entre 2 y 3, vendrá á ser $y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; y de consiguiente $x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$. Suponiendo despues $y'=2+\frac{1}{y''}$.

resultará,

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0.$$

La única raiz que esta ecuacion tiene mayor que la unidad se halla entre 4 y 5; tomando pues el límite menor 4, resultará:

$$y' = 2 + \frac{1}{4}; y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}; x = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}$$

Ya no puede ocultarse cuán fácil seria continuar por el mismo método la aproximacion haciendo $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, y asi sucesivamente.

Volvamos ahora al segundo valor de x, que por la primera aproximacion sabemos ser $\frac{3}{2}$, y que corresponde á $b = 2$; hagamos $y = 2 + \frac{1}{y'}$; sustituyámoslo en la primera ecuacion trasformada, y tendremos despues de haber mudado los signos para hacer positivo el primer término:

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Esta ecuacion no tiene, asi como su correspondiente en la operacion anterior, mas de una raiz mayor que la unidad, la cual se halla entre 1 y 2. Haciendo $b' = 1$, resultará $y = 3$; $x = \frac{4}{3}$. Haciendo del mismo modo $y' = 1 + \frac{1}{y''}$, y sustituyendo en la segunda trasformada, tendremos:

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

cuya ecuacion tiene una sola raiz entre 4 y 5; y de consiguiente $y' = \frac{5}{4}$; $y = \frac{14}{5}$; $x = \frac{19}{14}$. Si quisiéremos continuar la aproximacion, haremos $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, y asi sucesivamente.

La ecuacion $x^3 - 7x + 7 = 0$ tiene ademas una raiz negativa comprendida entre -3 y -4. Para aproximarnos mas á su verdero valor, haremos $x = -3 - \frac{1}{y}$; lo cual dará:

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0; y > 20 \text{ y } < 21;$$

de lo cual resultará:

$$x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}.$$

Para pasar mas adelante supondremos $y = 20 + \frac{1}{y'}$ &c. y obtendremos sucesivamente valores cada vez mas aproximados á la exactitud.

Las diferentes ecuaciones trasformadas, cuyas respectivas incógnitas son y, y', y'' &c., no tendrán jamas mas de una raiz mayor que la unidad, mientras la propuesta no tenga mas de una raiz comprendida entre los límites a y $a+1$; pero si la ecuacion primitiva tuviere dos ó mas raices comprendidas entre estos mismos límites, como ha sucedido en el ejemplo anterior, algunas de las ecuaciones trasformadas tendrán dos ó mas raices mayores que la unidad, las cuales darán origen á diferentes series de nuevas ecuaciones trasformadas, por cuyo medio nos iremos aproximando mas y mas al verdadero valor de cada una de las varias raices que la propuesta tenga comprendidas entre los límites a y $a+1$.

Para ejercicio de nuestros lectores les propondremos la ecuacion

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

la cual tiene una raiz real comprendida entre 2 y 3. Y puesto que los valores enteros de y, y' &c. serán 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12 &c. los correspondientes valores aproximados de x vendrán á ser:

$$\frac{2}{1};\ \frac{21}{10};\ \frac{23}{11};\ \frac{44}{21};\ \frac{111}{53};\ \frac{155}{74};\ \frac{576}{275};\ \frac{731}{349};\ \frac{1307}{624};\ \frac{16415}{7837}.$$

Despues de haber expuesto los métodos para hallar las raices reales comensurables é incomensurables de las ecuaciones numéricas, parecia natural que indicásemos cómo se hallan las imaginarias; pero como esta indagacion requiere algunos otros conocimientos previos, hemos creido conveniente dejarla para el *Complemento*.

De las proporciones y progresiones.

223 Hemos visto en la Aritmética la definicion y las propiedades fundamentales de la *proporcion* y de la *equidiferencia*, es decir, de las combinaciones de cantidades que hasta ahora se conocian con los nombres de *proporcion geométrica y proporcion aritmérica.* Ahora aplicaremos el Algebra á aquellas primeras nociones, y por este medio deduciremos de ellas algunos resultados que son de un uso frecuente en la Geometria.

Observaremos en primer lugar que tanto la equidiferencia como la proporcion se pueden representar por medio de ecuaciones. Sean, por ejemplo, A, B, C, D los cuatro términos de la primera, y a, b, c, d los de la segunda; y con arreglo á lo expuesto (*Aritm.* §§. 151 y 123) deberemos tener $B-A=D-C$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; de cuyas ecuaciones, equivalentes á las expresiones

$$A.B:C.D;\ a:b::c:d;$$

se deducen fácilmente estotras dos:

$$A+D=B+C;\ ad=bc;$$

las cuales nos manifiestan que *en la equidiferencia la suma de los términos extremos es igual á la de los términos medios; y que en la proporcion el producto de los términos extremos es igual al de los términos medios,* como lo hicimos ver en la Aritmética (§§. 151 y 113) por razonamientos enunciados en idioma vulgar, y que en las ecuaciones acabamos de traducir al lenguage algebráico.

Las proposiciones inversas de las precedentes se demuestran con suma facilidad; porque de las ecuaciones $A+D=B+C$; $ad=bc$; se deduce inmediatamente $D-C=B-A$; $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; y por consiguiente *siempre que tengamos cuatro cantidades tales que dos de ellas* *den la misma suma ó el mismo producto que las otras dos, las primeras serán los medios, y las segundas los extremos, ó al contrario, de una equidiferencia ó de una proporcion.*

Cuando es $B=C$ se llama *continua* la equidiferencia, y lo mismo se dice de la proporcion cuando $b=c$; y tenemos entonces $A+D=2B$; $ad=b^2$; es decir, que *en una equidiferencia continua la suma de los extremos es igual al duplo del término medio*; *y que en una proporcion continua el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio.* De esto se infiere que $B=\frac{A+D}{2}$; y $b=\sqrt{ad}$; la cantidad B es el *medio* ó la media proporcional aritmética entre A y D; y la cantidad b es la media proporcional (*geométrica*) entre a y d.

Las ecuaciones fundamentales

$$B-A=D-C;\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

nos conducen tambien á las siguientes

$$C-A=D-B;\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b};$$

lo cual manifiesta que en las expresiones $A.B:C.D$, y $a:b::c:d$ pueden cambiar de lugar los medios, y asi resultarán $A.C:B.D$, $a:c::b:d$. En general se podrán con los cuatro términos hacer todas las trasposiciones, en las cuales se conserven las ecuaciones $A+D=B+C$, y $ad=bc$ (*Aritm.* §. 114).

Dejando ya la equidiferencia continuemos exponiendo las propiedades de la proporcion.

224 A los dos miembros de la ecuacion $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

se les puede añadir ó quitar una misma cantidad m, de manera que tengamos $\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m$. Reduciendo á fracciones los dos miembros, la ecuacion vendrá á ser $\frac{b \pm ma}{a} = \frac{d \pm mc}{c}$; de la cual se deduce estotra $\frac{c}{a} = \frac{d \pm mc}{b \pm ma}$; y esta se puede desenvolver y trasformar en la siguiente proporcion: $b \pm ma : d \pm mc :: a : c$; y siendo $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ tendremos igualmente: $\frac{d \pm mc}{b \pm ma} = \frac{d}{b}$, ó $b \pm ma : d \pm mc ::$ $b : d$.

Las dos últimas proporciones que hemos deducido de la primitiva, se pueden enunciar de esta manera: *El primer consecuente mas ó menos cierto número de veces su antecedente es al segundo consecuente mas ó menos el mismo número de veces su antecedente, como el primer término es al tercero, ó como el segundo es al cuarto.*

Comparando separadamente las sumas entre sí, y las diferencias tambien entre sí, tendremos $\frac{d + mc}{b + ma} = \frac{c}{a}$; $\frac{d - mc}{b - ma} = \frac{c}{a}$, de donde se concluirá $\frac{d + mc}{b + ma} = \frac{d - mc}{b - ma}$, es decir, $b + ma : d + mc :: b - ma : d - mc$; ó mudando de lugar los medios, $b + ma : b - ma :: d + mc : d - mc$; y si hacemos $m = 1$, tendremos solamente $b + a : b - a ::$ $d + c : d - c$, lo cual se enuncia de esta manera:

La suma de los dos primeros términos es á su diferencia como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

225 Pudiendo la proporcion $a : b :: c : d$ escribirse

de esta manera $a:c::b:d$, resultará $\frac{c}{a}\pm m=\frac{d}{b}\pm m$; de donde $\frac{c\pm ma}{a}=\frac{d\pm mb}{b}$; y en fin $c\pm ma:d\pm mb::a:b$; ó $::c:d$, de donde resulta que *el segundo antecedente mas ó menos un cierto número de veces el primero es al segundo consecuente mas ó menos el mismo número de veces el primero, como cualquiera de los antecedentes es á su consecuente.*

Esta proposicion se puede tambien deducir inmediatamente de la del párrafo anterior; porque mudando de lugar los medios de la proporcion primitiva $a:b::c:d$, y aplicándole despues la proposicion citada, tenemos sucesivamente $a:c::b:d$; $c\pm ma:d\pm mb::a:b$ ó $::c:d$, y dando en esta última á las letras a, b, c, d las denominaciones que tienen en la proporcion primitiva, resulta la misma consecuencia que antes.

Haciendo $m=1$ se sacarán las proporciones particulares $c\pm a:d\pm b::a:b::c:d$; $c+a:c-a::d+b:d-b$; lo cual quiere decir que *la suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó á la diferencia de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente*; y que *la suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los consecuentes es á su diferencia.*

En general, si tenemos $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\frac{h}{g}$ &c., y hacemos $\frac{b}{a}=q$, resultará $\frac{d}{c}=q$, $\frac{f}{e}=q$, $\frac{h}{g}=q$ &c.; lo cual dará $b=aq$; $d=cq$; $f=eq$; $h=gq$ &c., y sumando por una parte los primeros miembros de estas ecuaciones, y por otra los segundos, tendremos $b+d+f+h=aq+cq+eq+gq$; ó $b+d+f+h=q\,(a+c+e+g)$;

de donde se sigue $\frac{b+d+f+h}{a+c+e+g}=q=\frac{b}{a}$.

Este resultado se enuncia diciendo que *en una serie de razones iguales ó de cantidades proporcionales* $a:b::c:d::e:f::g:h$ &c. *la suma de un número qualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

226 Cuando hay dos ecuaciones $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ y $\frac{f}{e}=\frac{h}{g}$ se pueden multiplicar entre sí los primeros miembros, y lo mismo los segundos, y resulta otra nueva ecuacion $\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg}$, equivalente á esta proporcion $ae:bf::cg:dh$, la cual hubiera resultado igualmente multiplicando cada término de la primera proporcion.......... $a:b::c:d$, por el que le corresponde en la segunda $e:f::g:h$.

Cuando se multiplican los términos de una proporcion, cada uno por su correspondiente de otra, se dice que las dos proporciones estan *multiplicadas ordenadamente*; los productos que resultan estan, como se ve, en proporcion; y las nuevas razones son las razones *compuestas* de las razones primitivas (*Aritm.* §. 166.)

Tambien es facil demostrar que de dos proporciones se puede deducir otra nueva dividiendo *ordenadamente* los términos de una de las primitivas por los de la otra.

227 Como de la ecuacion $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$ se infiere esta otra $\frac{b^m}{a^m}=\frac{d^m}{c^m}$, la cual equivale á esta proporcion $a^m:b^m:c^m:d^m$, podremos establecer por principio ge-

neral que los *cuadrados, los cubos y en general las potencias de un mismo grado de cuatro cantidades proporcionales estan tambien en proporcion.*

De la misma ecuacion $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ se deduce $\sqrt[m]{\frac{b}{a}}=\sqrt[m]{\frac{d}{c}}$; y como esta es equivalente á $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}}$, tendremos esta proporcion $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d}$, la cual nos viene á decir *que las raices de un mismo grado de cuatro cantidades proporcionales permanecen tambien en proporcion.*

Tales son las principales propiedades de las proporciones, cuya teoría no ha tenido otro objeto que el de descubrir unas cantidades por medio de su comparacion con otras. En el dia se hace ya poco caso de ciertas denominaciones latinas que se habian impuesto á las diferentes variaciones ó trasformaciones que puede experimentar una proporcion; y aun llegaria á inutilizarse enteramente todo el aparato de la doctrina de las proporciones si en su lugar se pusiesen las ecuaciones correspondientes; lo cual daria en mi sentir mas uniformidad á los métodos y mas claridad á las ideas.

228 De las proporciones es muy fácil pasar á las progresiones; porque habiéndonos ya imaginado en la equidiferencia continua tres cantidades tales, que la tercera exceda á la segunda tanto como esta á la primera, se nos ocurre inmediatamente considerar un número indefinido de cantidades a, b, c, d &c. tales que cada una de ellas lleve á la que la precede el mismo exceso δ; de manera que sea $b=a+\delta$; $c=b+\delta$; $d=c+\delta$;

$c = d + \delta$ &c. para indicar que estas cantidades tienen esta particularidad se las escribe asi $\div a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$ &c.; y la combinacion de todas ellas se llama *progresion aritmética*; pero he creido deber mudar este nombre en el *de progresion por diferencias.* (Véase *Aritm. nota* del §. 175.)

Siendo $c = b + \delta$; si en esta expresion sustituimos en lugar de b la expresion equivalente $a + \delta$, vendrá á ser $c = a + 2\delta$; y puesto que $d = c + \delta$, si sustituimos $a + 2\delta$ en lugar de c, será $d = a + 3\delta$; del mismo modo hallaremos que $e = a + 4\delta$, y asi sucesivamente; de lo cual se infiere que representando por n al número que designe el lugar que en la progresion ocupe un término cualquiera, que llamaremos l, será $l = a + (n - 1)\delta$; con cuya fórmula se podrá calcular un término cualquiera de la progresion, sin necesidad de tener conocidos los términos intermedios.

Sea; por ejemplo, la progresion

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, \&c.;$$

en la cual el primer término $a = 3$; la diferencia comun $\delta = 2$; y si queremos determinar el octavo término será $3 + (8 - 1)2 = 17$, es decir el mismo que hemos hallado, calculando sucesivamente todos los que le preceden.

La progresion que nos hemos propuesto, por ejemplo, se llama *creciente*, porque van creciendo sus términos; pero vendrá á ser *decreciente* con solo escribirla en orden inverso, como aqui se ve:

$$\div 17 \,.\, 15 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \cdot 5 \cdot 3 \,.\, 1 \,.\, -3 \ \&c.$$

Tambien es facil hallar en esta cualquier término por medio de la fórmula $a+(n-1)\delta$, en teniendo presente que en este caso es sustractiva ó negativa la diferencia comun δ; porque aqui se debe restar de cada término la diferencia para hallar el término siguiente.

Con igual facilidad se puede conocer la suma de cualquier número de términos de cualquiera progresion por diferencias. Representando esta progresion por

$$\div a.b.c \ldots\ldots\ldots\ldots i.k.l,$$

y designando por S la suma de todos sus términos, tendremos;

$$S=a+b+c\ldots\ldots\ldots\ldots+i+k+l.$$

Escribiendo los términos del segundo miembro de esta ecuacion en un orden inverso del anterior tendremos tambien

$$S=l+k+i\ldots\ldots\ldots\ldots+c+b+a:$$

sumando estas dos ecuaciones y reuniendo los términos que se corresponden, resultará:

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Ahora bien, por la naturaleza de la progresion tenemos, procediendo desde el primer término hasta el último:

$$a+\delta=b;\ b+\delta=c;\ldots\ldots i+\delta=k;\ k+\delta=l,$$

y por la inversa, procediendo desde el último al primero:

$$l-\delta=k;\ k-\delta=i\ldots\ldots c-\delta=b;\ b-\delta=a;$$

y sumando estas últimas ecuaciones con las anteriores, veremos que $a+l=b+k=c+i$ &c; es decir, *que en cualquiera progresion por diferencias la suma de los términos extremos es igual á la suma de otros dos cualesquiera términos equidistantes de los extremos*, y de consiguiente

$$2S=n\,(a+l);$$

de donde se deduce que

$$S=\frac{n(a+l)}{2}.$$

Aplicando esta fórmula á la progresion $\div 3.5.7.9.$ &c. hallaremos que la suma de los ocho primeros términos es $=\frac{(3+17)8}{2}=80$.

230 Las dos ecuaciones $l=a+(n-1)\,\delta$; y $S=\frac{(a+l)n}{2}$, combinadas nos presentan el medio de hallar dos de las cinco cantidades a, δ, n, l y S, en estando conocidas las otras tres; pero como son demasiado fáciles estas aplicaciones, nos parece inútil que nos detengamos á tratar de cada uno de los diferentes casos particulares que pueden ocurrir.

231 Asi como la *equidiferencia continua* dió motivo para imaginar la progresion por diferencias, la proporcion continua dió orígen á la progresion por cuocientes ó sea la progresion *geométrica;* la cual viene á ser una combinacion ó serie de términos tales, que el cuociente, de cualquiera de ellos dividido por el que le precede, es siempre uno mismo, sea cual fuere el lugar de la serie donde se tomen los dos términos que hayan de ser dividendo y divisor. Asi que las dos series

$$\div\div\; 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{\&c.}$$

$$\div\div\; 45 : 15 : 5 : \frac{5}{3} : \frac{5}{9} : \text{\&c.}$$

son progresiones geométricas ó por cuocientes; porque si dividimos cualquier término de la primera por el que le preceda, el cuociente es 3; y en la segunda es $\frac{1}{3}$; la primera es *creciente*, y la segunda *decreciente*. Cada una de estas progresiones forma una serie de razones iguales, y por eso se las escribe como se ha visto.

Sean $a, b, c, d \ldots\ldots\ldots\ldots k, l,$
los términos de una progresion por cuocientes: haciendo $\frac{b}{a} = q$, tendremos por la naturaleza de esta progresion

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots\ldots = \frac{l}{k};$$

y de consiguiente

$$b = aq;\ c = bq;\ d = cq;\ e = dq; \ldots\ldots l = kq.$$

Poniendo sucesivamente el valor de b en el de c, este en el de d, y asi sucesivamente, resultarán las siguientes expresiones:

$$b = aq;\ c = aq^2;\ d = aq^3;\ e = aq^4; \ldots\ldots l = aq^{n-1},$$

representando por n el número que designa el lugar que en la serie ocupa el término l; ó el número de los términos que se consideran en la progresion propuesta.

Por medio de la fórmula $l = aq^{n-1}$ se puede calcular cualquier término sin necesidad de conocer los términos intermedios. Por ejemplo, el décimo término de la progresion $\div\!\div\ 2 : 6 : 18 :$ &c. es igual á $2 \times 3^9 = 39366$.

232 Tambien se puede obtener la suma de todos los términos que se quieran de la progresion.

$$\div\!\div\ a : b : c : d : \&c.$$

sumando ordenadamente las ecuaciones

$$b = aq;\ c = bq;\ d = cq;\ e = dq; \ldots\ldots l = kq;$$

porque resultará:

$$b+c+d+e......+l=(a+b+c+d......+k)\,q;$$

y representando por S la suma cuyo valor buscamos, tendremos:

$$b+c+d+e......+l=S-a;$$
$$a+b+c+d......+k=S-l;$$

de donde concluiremos $S-a=q\,(S-l)$, y por consiguiente $S=\frac{ql-a}{q-1}$.

Si por ejemplo quisiéremos hallar la suma de los diez primeros términos de la progresion

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : \&c.,$$

la fórmula anterior nos dará:

$$\frac{2\times 3^{10}-2}{2}=3^{10}-1=59048.$$

233 Las dos ecuaciones

$$l=aq^{n-1};\ S=\frac{ql-a}{q-1};$$

contienen las relaciones que entre sí tienen las cinco cantidades a, q, n, l, S de cualquiera progresion por cocientes, y nos darán á conocer dos cualesquiera de estas cantidades en estando conocidas las otras tres.

234 Si en la expresion que hemos hallado de S, se sustituye aq^{n-1} en lugar de l, resultará:

$$S=\frac{a\,(q^n-1)}{q-1}.$$

Siempre que sea creciente la progresion, y de consiguiente sea $q>1$, será la cantidad q^n tanto mayor cuanto mas considerable sea el número n; y podrá S ser mayor que cualquiera cantidad por grande que sea, con tal que se dé á n un valor conveniente; es decir, con tal que se tome un número suficiente de términos de la progresion propuesta. Pero si la progresion fuere decreciente, ó lo que es lo mismo, si q fuere una fraccion, representada por $\frac{1}{m}$, tendremos:

$$S=\frac{a\left(\frac{1}{m^n}-1\right)}{\frac{1}{m}-1}=\frac{am\left(1-\frac{1}{m^n}\right)}{m-1}=\frac{am-\frac{a}{m^{n-1}}}{m-1};$$

y es evidente que cuanto mayor vaya siendo el número n tanto menor se hará el término $\frac{a}{m^{n-1}}$; y por consiguiente tanto mas se aproximará el valor de S á la cantidad $\frac{am}{m-1}$, de la cual solo se diferencia en.......... $\frac{a}{(m-1)m^{n-1}}$: luego cuantos mas términos se tomen de la progresion, tanto mas se acercará su suma á $\frac{am}{m-1}$; y aunque jamas podrá ser exactamente igual á esta cantidad, podrá aproximarse á ella de modo que la diferencia sea menor que cualquiera cantidad por pequeña que sea.

Es pues la cantidad $\frac{am}{m-1}$, que representaremos por L, no la suma, sino el límite de la suma de la progresion decreciente; porque las diferentes sumas parciales que hemos representado por S, se aproximan mas y mas á aquella cantidad sin poder jamas igualarse con ella.

Aplicando estas consideraciones á la progresion $\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} :$ &c. tendremos $a=1$; $q=$

$\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$; de donde $m=2$; $L=\frac{am}{m-1}=2$; lo cual nos viene á decir que cuantos mas términos se tomen de la anterior progresion, tanto mas se acercará su suma á ser igual á 2. Hallamos con efecto

$$1 \ldots\ldots = 1 = 2-1$$

$$1+\frac{1}{2} \ldots\ldots = \frac{3}{2} = 2-\frac{1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \ldots\ldots = \frac{7}{4} = 2-\frac{1}{4}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \ldots\ldots = \frac{15}{8} = 2-\frac{1}{8}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \ldots = \frac{31}{16} = 2-\frac{1}{16}$$

&c.

La cantidad L se suele mirar como la suma de la progresion decreciente por cuocientes, continuada al *infinito;* pero no podemos formarnos una idea bien clara del significado de esta expresion, como no entendamos por ella lo que designamos con la voz *límite* (*Aritm.* §. 121).

235 De la expresion $S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ se pueden sacar todos los términos que componen la progresion cuya suma representa; porque si se efectúa la division de q^n-1 por $q-1$ (§. 158) hallaremos:

$\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4 \ldots\ldots +q^{n-1}$; lo cual da $S=a+aq+aq^2+aq^3 \ldots\ldots +aq^{n-1}$.

La expresion del valor de L produce el mismo resultado efectuando la division de m por $m-1$ del modo siguiente:

$$
\begin{array}{l|l}
\qquad\qquad m & m-1 \\
\hline
-m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\&c. \\
\\
\quad -1+\frac{1}{m} & \\
\\
\qquad -\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2} & \\
\\
\qquad\qquad -\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3} & \\
\qquad\qquad \&c. &
\end{array}
$$

Se divide primeramente m por el primer término del divisor, segun se hace comunmente, y sale 1 de cuociente; se multiplica este cuociente por el divisor, y se resta el producto del dividendo; se divide despues el residuo 1 por el primer término del divisor; y sale por cuociente $\frac{1}{m}$, que se multiplica por el divisor, y resulta el residuo $\frac{1}{m}$; con el cual se ejecuta igual operacion que con el anterior. Continuando de esta manera se echa de ver al instante la ley que siguen todos los cuocientes parciales, y se ve que la expresion $\frac{m}{m-1}$ es equivalente á la serie $1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\&c.$, continuada al infinito; y si en cada uno de los términos sustituimos q en lugar de $\frac{1}{m}$, y los multiplicamos todos por a, se vuelve á hallar $a+aq+aq^2+aq^3+\&c.$, es decir, la progresion cuyo límite hemos designado por L.

236 Una vez que efectuando la division que está

indicada en la expresion fraccionaria $\frac{m}{m-1}$, resulta por cuociente la serie interminable

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\&c.\,;$$

es claro que ningun número de estos términos, por grande que sea, podrá jamas equivaler exactamente á la fraccion $\frac{m}{m-1}$, sea cual fuere el valor de m ó de $\frac{1}{m}$; pero tambien es facil ver que en siendo $m>1$ y de consiguiente $\frac{1}{m}<1$, cada uno de los términos de la serie será tanto menor cuanto mas diste del primero; la suma de un cierto número de ellos se aproximará tanto mas á equivaler exactamente á $\frac{m}{m-1}$, cuanto mayor sea el número de términos que se hayan sumado; y la aproximacion será tanto mas rápida cuanto menor que la unidad sea $\frac{1}{m}$. En tal caso se llama *convergente* la serie.

Con efecto, si en la division precedente nos limitásemos á tomar el primero ó los dos primeros ó los tres primeros &c. términos del cuociente, y al mismo tiempo tenemos presentes los residuos, vendrán á ser

Cuocientes.	Residuos.
1	1
$1+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
&c.	

Ahora bien, los cuocientes parciales que acabamos de indicar no pueden aproximarse al verdadero valor de $\frac{m}{m-1}$, sino á proporcion que sean despreciables los residuos que les correspondan; y como esta circunstancia se verifica solo cuando m es mayor que la unidad, solo en este caso será convergente la serie. En todos los demas casos los residuos van creciendo mas y mas; de consiguiente cada vez van siendo menos despreciables; cuantos mas términos tomemos de la serie, mas nos alejamos del verdadero valor de $\frac{m}{m-1}$, y por esta razon se llama *divergente* la serie.

Para aclarar mas esto hagamos sucesivamente $m=2$; $m=1$; $m=\frac{1}{2}$. El primer supuesto da

$$\frac{m}{m-1}=2=1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\&c.$$

y ya hemos visto (§. 234) que con efecto la serie que se halla en el segundo miembro se aproxima tanto mas á ser 2 cuantos mas términos se toman de ella; será pues convergente.

Del segundo supuesto se infiere que

$$\frac{m}{m-1}=\frac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+\&c.$$

Este resultado $1+1+1+1+1+1$ &c. continuado, como dicen, al infinito, vendrá á ser una cantidad infinita, como lo exige la naturaleza de la expresion $\frac{1}{0}$; pero si no haciendo caso de los residuos supusiésemos que un cierto número de términos de la serie era igual á $\frac{1}{0}$, vendriamos á dar en un manifiesto absurdo; porque debiendo el divisor multiplicado por el cuociente reproducir el dividendo, es necesario que

$$1=(1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots\ldots)0;$$

y como el segundo miembro de esta ecuacion se reduce á *cero*, vendriamos á deducir que $1=0$.

El tercer supuesto nos conduce á consecuencias no menos absurdas siempre que despreciemos los residuos, y miremos á la serie que resulta por cuociente como una expresion exacta del valor de la fraccion de donde se deriva. En efecto, haciendo $m=\frac{1}{2}$, hallaremos:

$$\frac{m}{m-1}=-1=1+2+4+8+16+\&c.;$$

lo cual es evidentemente falso.

Estas contradicciones desaparecerán luego que observemos que en el segundo caso los residuos

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \&c.$$

son todos iguales á 1; y pues que jamas disminuyen, no se les debe despreciar por mas que se continúe la division; por manera que al producto del divisor por el cuociente parcial que tomemos, deberemos añadir el residuo 1, y asi tendremos la ecuacion exacta

$$1=(1+1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots)0+1.$$

En el tercer caso los residuos

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3}\ \&c.$$

forman la progresion creciente 1, 2, 4, 8, 16 &c.; y de consiguiente son menos despreciables que en el caso anterior; por manera que solo añadiendo á cada cuociente parcial el residuo que le corresponda, se podrán obtener las siguientes expresiones equivalentes á $\frac{m}{m-1}$;

$$1+\frac{1}{m-1}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)}$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2(m-1)}$$

&c.

las cuales son todas iguales á -1 cuando $m=\frac{1}{2}$.

Si hacemos $m=-n$ se convertirá la fraccion $\frac{m}{m-1}$ en $\frac{n}{n+1}$; y la serie que representa el cuociente de la division que en aquella expresion está indicada, se convertirá en

$$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\&c.$$

y haciendo $n=1$, tendremos:

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\&c.;$$

Si despreciando los residuos tomáremos un número par de términos de la última serie, la última ecuacion vendrá á ser $\frac{1}{2}=0$, y si fuere impar el número de términos de la serie, la ecuacion será $\frac{1}{2}=1$; y de consiguiente en todos casos es falsa la ecuacion supuesta; en unos por defecto, y en otros por exceso. Esto nos hace ver que, sea cual fuere el número que tomemos de esta serie, jamas deberémos despreciar el residuo.

Si en la serie precedente suponemos $n=2$, tendremos $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\&c.$; en cuya expresion se ve que las sumas parciales 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ &c. son alternativamente mayores y menores que el verdadero valor de $\frac{n}{n+1}$, que en este caso es $\frac{2}{3}$; pero al mismo tiempo se ve que aquellas sumas se van aproximando mas y mas á $\frac{2}{3}$; de consiguiente es *convergente* la serie propuesta, y el residuo de la division será tanto mas despreciable cuantos mas términos tomemos del cuociente.

Aunque las series cuyos términos van aumentando se alejan cada vez mas del verdadero valor de la expresion de donde dimanan, y por esta razon se llaman divergentes; consideradas sin embargo como unas meras trasformaciones de estas expresiones, pueden sernos muy útiles para darnos á conocer todas las propiedades que no tengan conexion con la suma de tales cantidades.

237 Si continuásemos cualquiera division algebráica, en la cual el dividendo no sea múltiplo del divisor, como lo hemos hecho (§. 235) en la division de m por $m-1$, resultaria siempre expresado el cuociente por una serie interminable de *monomios*. Las extracciones de las raices incomensurables ó de potencias imperfectas, continuadas del mismo modo conducirán tambien á series interminables ó infinitas; pero todas estas series se obtendrán con mas facilidad por medio de la fórmula del *binomio*, como lo manifestaremos en el *complemento*, donde trataremos de las series mas conocidas.

De las cantidades exponenciales y de los logaritmos.

238 En ninguna de las cuestiones resueltas hasta aqui ha sido exponente la incógnita, como lo seria si

nos propusiésemos determinar el número de los términos de una progresion por cuocientes, cuyo primer término, el último y la razon ó cuociente comun estuviesen dados. Con efecto, para resolver esta cuestion tendriamos (§. 231) la ecuacion $l=aq^{n-1}$, en la cual seria n la incógnita; y haciendo por abreviar $n-1=x$, resultaria $l=aq^x$. Los métodos directos expuestos anteriormente no son suficientes para resolver esta ecuacion, ni los signos que hasta ahora hemos adoptado lo son para indicar la serie de operaciones que se deben ejecutar con las cantidades conocidas, para que resulte el valor de una incógnita que sea exponente. Para poner todo esto mas en claro hagamos notar, segun lo ha ejecutado Euler, la conexion que tienen entre sí las diferentes operaciones del Algebra, y cómo de cada una de ellas se origina una nuevo especie de cantidades.

239 Si representamos por a y b dos cantidades cualesquiera que nos propongamos sumar, podremos designar por c el resultado de la operacion, y tendremos la ecuacion siguiente $a+b=c$; y si de esta ecuacion, que nos da á conocer la relacion de las cantidades que entran en ella, quisiéremos deducir el valor de a ó el de b hallaremos $a=c-b$; $b=c-a$; y he aqui la sustraccion originada de la adicion; y en caso que el minuendo sea menor que el sustraendo, y de consiguiente no pueda efectuarse la sustraccion en el orden en que está indicada, viene á ser negativo el resultado. La repetida adicion de una misma cantidad da origen á la multiplicacion; y si llamamos a al multiplicador, b al multiplicando y c al producto, tendremos $ab=c$, de donde se deduce $a=\frac{c}{b}$; $b=\frac{c}{a}$; y de aqui proceden la divi-

sion y las fracciones, que son consecuencia de ella en todos los casos en que no es posible efectuarla exactamente y sin residuo final. La repetida multiplicacion de una cantidad por sí misma produce las potencias de esta cantidad, por manera que designando por b el número de veces que a es factor en la potencia c que se considere, tendremos $a^b=c$. Esta ecuacion se diferencia esencialmente de las anteriores en que las cantidades a y b no entran ambas en ella de un mismo modo; y de aqui procede que la operacion, cuyo resultado nos da á conocer el valor de la una, no es suficiente para determinar el de la otra. Si estando conocidas c y b queremos hallar el valor de a, nos basta efectuar una simple extraccion de raiz; y esta operacion da origen á una nueva especie de cantidades, que son las irracionales; pero si conociendo a y c nos propusiéremos hallar el valor de b, tendremos que recurrir á métodos particulares, que daremos á conocer despues de haber manifestado las principales propiedades de la ecuacion $a^b=c$.

240 Bien se deja conocer que si conservando á la letra a un cierto valor invariable, que supondremos mayor que la unidad, hacemos variar, segun queramos el de b, podremos obtener para c todos los números imaginables. Con efecto, haciendo $b=0$, resulta $c=1$; y despues á proporcion que vaya creciendo b irán los valores de c siendo cada vez mayores que la unidad, y podrán llegar á ser tan grandes como se quiere. Si fuese negativo el valor de b, la ecuacion que hemos supuesto $a^b=c$ se convertiria en $a^{-b}=c$, ó en $\frac{1}{a^b}=c$; y los valores de c irian siendo tanto menores cuanto mayor fuese el valor negativo de b; por manera que podrian

llegar á ser tan pequeños como se quisiera. Con solo pues variar el exponente b de una misma cantidad a se pueden deducir de la misma ecuacion supuesta, para c todos los números positivos posibles enteros ó fraccionarios en el caso que a sea mayor que la unidad. Lo mismo sucederia aun cuando fuese $a<1$, sin otra diferencia que la de que las variaciones de c procederian en sentido contrario al del caso precedente: es decir, que los valores de c aumentarian cuando los de b fuesen negativos; y disminuirian aquellos cuando estos fuesen positivos. Pero si supusiéramos $a=1$, resultaria siempre $c=1$, cualquiera que fuese el valor de b; y por esta razon miraremos la a en todo este tratado como que representa una cantidad mayor ó menor que la unidad.

Para indicar que mientras conservamos á la cantidad designada por a un mismo valor, consideramos á las cantidades b y c como susceptibles de cuantos valores puedan imaginarse, ó segun se dice, como cantidades *variables*, representaremos á estas últimas con las letras x é y, con lo cual la ecuacion primitiva se trasformará en estotra $a^x=y$. Ya se deja entender que en esta ecuacion a cada valor particular de x corresponde otro valor particular de y, y al contrario; por manera que en estando determinado el valor de una de estas cantidades, no puede ser arbitrario el de la otra.

241 Esta mutua dependencia ó relacion entre las cantidades x é y, es decir, entre cualquiera potencia y de una cantidad a, y el exponente x de su grado merece mucha atencion, porque puede sernos muy útil, no solo para los cálculos algebráicos, sino tambien para los aritméticos. En efecto, si consideramos otra potencia y' de la misma cantidad a, y designamos por x' el exponente

que corresponde á esta nueva potencia, tendremos $a^{x'}=y'$; y por consiguiente si multiplicamos esta última ecuacion por la anterior, tendremos $yy'=a^x\times a^{x'}=a^{x+x'}$. Si dividimos una por otra, resultará

$$\frac{y'}{y}=\frac{a^{x'}}{a^x}=a^{x'-x}.$$

Ultimamente, si en cualquiera de las dos ecuaciones supuestas elevamos ambos miembros á una potencia indicada por el exponente m, ó extraemos de ellos la raiz cuyo exponente sea n, tendremos estos otros resultados:

$$y^m=(a^x)^m=a^{mx};$$
$$y^{\frac{1}{n}}=(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}.$$

Los dos primeros resultados nos hacen ver que en conociendo los exponentes x y x' respectivos á las potencias y é y', tendremos en la suma de ellos el exponente que corresponde al producto yy' de las dos potencias; y en la diferencia de los exponentes x y x' tendremos el que corresponde al cuociente $\frac{y'}{y}$ de las dos potencias. Las dos últimas ecuaciones manifiestan que el exponente respectivo á una potencia cualquiera de y se obtiene por medio de una simple multiplicacion; y por medio de una simple division el que corresponde á una raiz cualquiera de y. De aqui es facil inferir que si tuviésemos una tabla, en la cual se hallasen al lado de cada uno de los números y los valores correspondientes de x, de manera que dado y se pudiese tener x, y recíprocamente, en este caso *quedaria reducida á una simple adicion la multiplicacion de dos números cualesquiera;* porque en lugar de efectuar la operacion con estos números que hemos representado por y,y', sumaríamos los valores de x,x' que les correspondiesen; y buscando despues en la misma tabla el número respectivo á esta suma, aquel número deberia ser el producto que buscábamos. Asimismo si tratásemos de efectuar una division, buscaríamos en la tabla los valores de x,x', que correspondiesen al dividendo y al divisor; restaríamos del correspondiente al dividendo el respectivo al divisor, y el número que correspondiese á la diferencia de los valores de x,x' seria el cuociente que nos proponiamos hallar. De este modo *la division se ejecutaria por medio de la sustraccion.*

Estos dos ejemplos pueden ser suficientes para dar á conocer la utilidad que debe resultar de tener ya formadas semejantes tablas. Asi es que se ha adoptado generalmente el uso de ellas desde que *Neper* las inventó. En ellas á cada uno de los tres números que entran en la ecuacion fundamental $a^x=y$ se le ha atribuido cierta denominacion. Los diferentes valores de y conservan el nombre general de *números*. Los diferentes valores del exponente x estan designados con la denominacion de *logaritmos* de los números á que corresponden. El número invariable representado por a se llama la *base de la tabla ó del sistema de logaritmos.* Asi que *los logaritmos son los exponentes de las potencias á que se debe elevar un número invariable, para que se vaya sucesivamente igualando á todos los números imaginables.*

En lo sucesivo representaremos el logaritmo de y por $\mathrm{l}y$, de modo que será $x=\mathrm{l}y$; y por ser $y=a^x$ vendrá á ser $y=a^{\mathrm{l}y}$.

242 Las propiedades que hemos demostrado de los logaritmos son independientes del valor particular

del número a, ó de la base; y de ahí es que se pueden formar una infinidad de tablas ó sistemas diferentes, eligiendo para base de cada tabla ó sistema el número que queramos ó mas nos acomode, con tal que no sea la unidad. Tomando, por ejemplo, $a=10$, la ecuacion fundamental de este sistema particular será $y=(10)^{ly}$, y de ella se deducirá inmediatamente que los números 1; 10; 100; 1000; 10000; 100000 &c., que son todos potencias perfectas de la base 10, tienen por logaritmos en esta hipótesi los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c. En esta serie de logaritmos se pueden ya observar las propiedades generales que hemos demostrado en el párrafo anterior. En efecto, sumando los logaritmos de 10 y de 1000, que son 1 y 3, se ve que su suma 4 corresponde á 10000, que es el producto de los números 10 y 1000.

243 En el supuesto de haber elegido á 10 por base, los logaritmos de los números intermedios entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000 &c. no se pueden obtener sino solo por aproximacion. Si se tratase, por ejemplo, de hallar el logaritmo que en este sistema corresponde á 2, seria necesario resolver la ecuacion $(10)^x=2$. Para esto podremos hacer uso del método que hemos dado ya á conocer (§. 221); es decir, se hallaria primeramente el número entero que mas se aproximase al valor de x; y por lo que á esto respecta, se ve inmediatamente que la x correspondiente al número 2 está entre 0 y 1, puesto que $(10)^0=1$; y $(10)^1=10$; haremos pues $x=\frac{1}{z}$, y tendremos $(10)^{\frac{1}{z}}=2$, ó $10=2^{z}$; y como para que se veri-

fique, como debe, está última ecuacion, ha de estar z entre 3 y 4, supondremos $z=3+\frac{1}{z'}$, y resultará:

$$10=2^{3+\frac{1}{z'}}=2^3\times 2^{\frac{1}{z'}}=8\times 2^{\frac{1}{z'}};$$

ó $$2^{\frac{1}{z}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4};$$

ó últimamente $$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{z'}$$

Para que se verifique la última ecuacion debe estar el valor de z' entre 3 y 4; y de consiguiente supondremos $z'=3+\frac{1}{z''}$, y tendremos:

$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z''}}=\left(\frac{5}{4}\right)^3\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}};$$

de donde sacaremos:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}=2\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{128}{125};\ ó\ \left(\frac{128}{125}\right)^{z''}=\frac{5}{4};$$

y despues de un corto número de tanteos hallaremos que z'' está entre 9 y 10. Del mismo modo podremos continuar cuanto queramos la aproximacion; pero como nuestro intento en indicar este método ha sido solo manifestar la posibilidad de hallar los logaritmos de todos los números, nos limitaremos á suponer $z''=9$, y retrocediendo hallaremos $z'=\frac{28}{9}$; $z=\frac{93}{28}$; $x=\frac{28}{93}$. Reduciendo á decimales este valor de x, se ve que hasta la cuarta cifra está conforme con el verdadero; porque da $x=0,30107$; y por cálculos llevados á mayor grado de aproximacion se ha averiguado que aproximado hasta 7 decimales, resulta $x=0,3010300$. Puesto que todo logaritmo debe considerarse como exponente de la base, para interpretar este valor de x como el de un exponente, es necesario imaginarse que si se eleva el número 10 á la potencia indicada por el número 3010300; y si del resultado se extrae una raiz del grado designado por 10000000, resultará un número muy próximo á 2; esto es, que $(10)^{\frac{3010300}{10000000}}=2$ con corta diferencia; en cuya ecuacion el primer miembro es algo mayor que 2; pero el número $10^{\frac{3010299}{10000000}}$ será algo menor.*

244 Multiplicando sucesivamente por 2, 3, 4 &c. el logaritmo de 2, se obtienen los de los números 4, 8, 16 &c., que son la segunda, tercera, cuarta &c. potencias de 2. Añadiendo al logaritmo de 2 los logaritmos de 10, de 100, de 1000 &c. se deducen los de 20, de 200, de 2000 &c.; y generalmente en conociendo los logaritmos de los números *primos*, es muy fácil hallar los logaritmos de todos los números compuestos, pues que estos no pueden menos de ser potencias ó productos de los números *primos*. Siendo, por ejemplo, el número 210 igual á $2\times3\times5\times7$, será

$$l210=l.2+l3+l5+l7;$$

y por ser $5=\frac{10}{2}$, tendremos:

$$l5=l10-l2.$$

245 Como los logaritmos estan por lo comun expresados en decimales, se les puede considerar como compuestos de dos partes; á saber, de las unidades enteras que se hallan situadas á la izquierda de la coma,

* Véase la nota última que se halla al fin de este tomo.

y de las cifras decimales que estan á la derecha de ella. A la primera parte del logaritmo se la ha dado el nombre de *característica*, porque en los logaritmos del sistema de que vamos hablando, que resultan de la suposicion de $a=10$, y que se llaman *logaritmos comunes*, da esta parte á conocer cuál es el orden mas elevado de unidades que se halla en el número cuyo logaritmo suponemos conocido. En efecto, hallándose entre 0 y 1 todos los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10, tienen precisamente 0 por característica; todos los de los números comprendidos entre 10 y 100 tienen 1; todos los de los números comprendidos entre 100 y 1000 tienen 2; y en general, la característica de un logaritmo tiene una unidad menos que cifras de enteros haya en la combinacion con que esté representado el número.

A la segunda parte de cualquier logaritmo, es decir, á la fraccion decimal que en él se halla, le suelen algùnos dar el nombre de *mantisa*.

246 Tambien es muy digno de notarse que en el mismo sistema, siempre que un número sea 10 ó 100 ó 1000 &c. veces mayor ó menor que otro, sus logaritmos tienen la misma fraccion decimal, ó sea la misma *mantisa*, y solo se diferencian en las *características*.

Asi es que á los

Números corresponden los	*Logaritmos*.
543600	5,7352794
54360	4,7352794
5436	3,7352794
543,6	2,7352794
54,36	1,7352794
5,436	0,7352794

porque siendo cada uno de estos números el producto del inmediato siguiente multiplicado por 10, cada logaritmo deberá ser (§. 241) la suma del siguiente y del de 10; y como este logaritmo es la unidad, su adicion no puede alterar la fraccion decimal del otro, sino solo su *característica.*

247 Con arreglo á lo expuesto (§. 240) deberán ser negativos en el mismo sistema los logaritmos de todos los quebrados propios; porque representando todo quebrado al cuociente de la division del numerador por el denominador, el logaritmo de cualquier quebrado deberá hallarse (§. 241) restando del logaritmo del numerador el del denominador; y de consiguiente cuando el numerador sea menor que el denominador, el logaritmo *sustraendo* será mayor que el *minuendo*; la sustraccion no podrá efectuarse en el orden que la regla prescribe, sino en el inverso, y por tanto será negativo el residuo.

Para hallar, por ejemplo, el logaritmo de la fraccion $\frac{1}{2}$, deberemos restar de *cero*, que es el logaritmo de 1, el logaritmo 0,3010300 del denominador; y asi resultará

$$l\tfrac{1}{2} = -0{,}3010300.$$

Restando de *cero* el número mixto 1,3010300, que es el logaritmo de 20, tendremos:

$$l\frac{1}{20} = -1{,}3010300.$$

Siendo 0,3010300 el logaritmo de 2; y 0,4771213 el de 3, será $l\frac{2}{3} = 0{,}3010300 - 0{,}4771213 = -0{,}1760913$.

Si para que sean posibles estas sustracciones, que en realidad no lo son, añadiésemos al logaritmo minuendo las unidades que sean necesarias ó que nos parezcan convenientes, el residuo vendrá á ser positivo; pero como estas adiciones equivalen á multiplicar por 10 ó por 100 ó por 1000 &c. el quebrado propuesto, el residuo será el logaritmo de un número 10 ó 100 ó 1000 &c. veces mayor, ó lo que viene á ser lo mismo, será el de tantas unidades como *décimas* ó *centésimas* ó *milésimas* &c. equivalgan al mismo quebrado.

En efecto, si tratando de hallar el logaritmo de $\frac{1}{2}$ añadimos una unidad al logaritmo del numerador para que pueda restarse el logaritmo del denominador, el residuo positivo 0,6989700 será el logaritmo no de $\frac{1}{2}$ sino de 5 unidades, que es una cantidad 10 veces mayor que $\frac{1}{2}$, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como décimas equivalen á $\frac{1}{2}$.

Si tratando de hallar el logaritmo de $\frac{1}{20}$ añadimos 2 unidades al logaritmo del numerador para que pueda efectuarse la sustraccion de 1,3010300, el residuo positivo 0,6989700 será el logaritmo de una cantidad 100 veces mayor que el quebrado propuesto, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como centésimas equivalen á $\frac{1}{20}$.

Si proponiéndonos hallar el logaritmo de $\frac{2}{3}$ nos pareciere conveniente añadir al logaritmo del numerador 4 unidades, es decir, el logaritmo de 10000; en habiendo sustraido de esta suma el logaritmo del denominador, el residuo positivo 3,8239087 será el logaritmo de un número 10000 veces mayor que $\frac{2}{3}$, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como *diez milésimas* equivalen á $\frac{2}{3}$.

Aunque los logaritmos que de este modo hallamos no sean los verdaderos que buscábamos de los quebrados, son sin embargo los que mas se usan á fin de evitar los logaritmos negativos; y para dar mas uniformidad á los cálculos se añaden por lo comun 10 unidades al logaritmo del numerador. Por manera que tratando de hallar el logaritmo de $\frac{2}{3}$ restaremos de 10,3010300 el logaritmo 0,4771213 del denominador, y el residuo 9,8239087, que es el logaritmo de un número *diez mil millones* de veces mayor que $\frac{2}{3}$, será el que habremos de emplear en lugar del verdadero logaritmo del quebrado propuesto.

Es verdad que de este modo empleamos un logaritmo con 10 unidades de mas; pero será muy facil suprimirlas, luego que agregándose este logaritmo á algun otro, haya en la suma unidades bastantes para efectuar aquella supresion indispensable para rectificar el resultado. En efecto, si hubiéramos de hallar con el auxilio de los logaritmos el producto de $\frac{2}{3}$ multiplicados por 18, sumariamos el logaritmo 1,2552725 del multiplicador con el logaritmo 9,8239087; y suprimiendo de la suma las 10 unidades que este segundo lleva de mas, será 1,0791812 el verdadero logaritmo del producto que buscábamos.

248 Si, por la inversa, se nos propusiere un logaritmo negativo, y se nos preguntare qué número le corresponde, ya podemos tener certeza de que deberá ser un quebrado propio; y suponiendo, como siempre nos es permitido, que su numerador sea la unidad, su denominador habrá de ser el número que corresponderia al logaritmo propuesto si fuese positivo. En efecto, $-0,1760913$, que como ya sabemos es el logaritmo de $\frac{2}{3}$, lo es por consiguiente de $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ y el logaritmo de $\frac{3}{2}$ es justamente $0,1760913$.

No es muy cómodo para la práctica este método de hallar el número correspondiente á un logaritmo negativo; porque despues de haber determinado el número que corresponda al mismo logaritmo positivo, tenemos ademas que dividir por este número la unidad. Por esta razon lo que mas comunmente se practica es restar de una, dos ó tres &c. unidades: es decir, del logaritmo de uno de los números 10, 100, 1000 &c. el logaritmo propuesto, prescindiendo de su signo; se busca despues el número que corresponde al residuo; y cuantas unidades tenga este número, otras tantas décimas ó centésimas ó milésimas &c. equivaldrán al quebrado que buscábamos, segun que hayamos elegido para minuendo el logaritmo de 10 ó el de 100 ó el de 1000 &c.

Si nos propusiéramos, por ejemplo, hallar el quebrado correspondiente al logaritmo $-0,3010300$, restariamos de una unidad ó de $1,0000000$, que es el logaritmo de 10, el logaritmo $0,3010300$, que es el del denominador de la fraccion que buscamos. El residuo $0,6989700$ será (§. 241) el logaritmo de un cuociente ó quebrado diez veces mayor, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como décimas equivalen al quebrado que deseamos conocer. Viendo pues en las tablas que el logaritmo 0,6989700 corresponde á 5 unidades, inferiremos que el logaritmo propuesto $-$0,3010300 corresponde á 0,5.

Si nos propusiéramos hallar el quebrado correspondiente al logaritmo $-$0,0280287, y restásemos de 4 unidades ó de 4,0000000, que es el logaritmo de 10000, el logaritmo positivo 0,0280287, el residuo 3,9719713 seria el logaritmo de un cuociente ó quebrado 10000 veces mayor que el que buscamos, ó lo que es lo mismo, el de tantas unidades como *diez milésimas* equivalen á este último quebrado. En viendo pues en las tablas que al logaritmo 3,9719713 corresponde el número 9375, inferiremos que el logaritmo propuesto $-$0,0270287 corresponde á la fraccion 0,9375.

Por lo comun se elige para minuendo á 10 unidades, ó lo que viene á ser lo mismo, al logaritmo de 10000000000; y de consiguiente el residuo vendrá á ser el logaritmo de un cuociente ó quebrado 10000000000 de veces mayor que el que buscamos. Si, por ejemplo, nos propusiéramos hallar el quebrado que corresponde al logaritmo $-$0,1072100, restariamos de 10 unidades el logarītmo positivo 0,1072100; y el residuo 9,8927900, que en las tablas corresponde al número 7812500000 será ėl logaritmo de un nomero 10000000000 veces mayor que la fraccion que buscamos. Será pues esta 0,7812500000, ó lo que es lo mismo, 0,78125.

Si de la sustraccion hubiera resultado 8,8927900, el número correspondiente seria 781250000, y la fraccion seria 0,078125. Si hubiese resultado 7,8927900, la fraccion seria 0,0078125; y en general siempre que nos propongamos determinar la fraccion correspondiente á un logaritmo que tenga 10 unidades de mas, la misma combinacion de cifras con que esté representado el número entero que en las tablas corresponde al logaritmo propuesto, representará la fraccion decimal que se busca; pero con la advertencia de que si la característica fuere 9, no habrá *cero* alguno á la derecha de la coma; si la característica fuere 8, habrá un cero á la derecha de la coma; si 7, dos; y en general habrá á la derecha de la coma tantos ceros como unidades falten á la característica para llegar á *nueve*.

249 Es fácil ver que si tratando de quitar 4 unidades, por ejemplo, de otro número cualquiera, que representaremos por N; en lugar de efectuar la sustraccion añadimos á N las 6 unidades que faltan al sustraendo para llegar á 10, la suma tendrá 10 unidades mas que el residuo que buscábamos; y de consiguiente para obtener este residuo habrá que quitar de aquella suma 10 unidades. En efecto, $N+6=N+10-4$; y es claro que en suprimiendo 10 de esta última expresion, resulta $N-4$; es decir, el verdadero residuo que nos proponiamos hallar.

A consecuencia de esta observacion se ha ocurrido convertir en adiciones todas las sustracciones que tengamos que efectuar con los logaritmos, sustituyendo en vez de cada sustraendo la cantidad que á este falte para llegar á 10 unidades, y suprimiendo de la suma estas 10 unidades.

Lo que falta á cualquier número para llegar á 10 ó 100 ó 1000 &c. unidades; y en general lo que falta á cualquier número para componer una unidad del orden inmediato superior á las mas elevadas que en él haya, se llama su *complemento aritmético.* Asi que, el complemento aritmético de 7 es 3; el de 84 es 16; el de 687 es 313, y asi de los demas. Se puede fácilmente hallar el *complemento aritmético* de un número representado por una combinacion de muchas cifras, restando de 9 el valor de cada una, á excepcion de la primera de la derecha, cuyo valor se restará de 10.

El complemento aritmético del logaritmo de un número toma el nombre de *complemento logarítmico* del mismo número; y haciendo uso de esta expresion, diremos que en vez de restar el logaritmo de un número podremos sumar el complemento logarítmico de este mismo número, con tal que de la suma suprimamos 10 unidades. En caso que se hayan de restar muchos logaritmos, se sumarán sus respectivos complementos, y de la suma se suprimirán tantas decenas de unidades como complementos se hayan sumado. Algunas veces no es posible efectuar la supresion de todas estas decenas; y entonces el resultado, que tendrá 10 unidades de mas, será el complemento logarítmico de un quebrado propio, y corresponderá en las tablas á un número entero representado por la misma combinacion de cifras que la fraccion decimal equivalente al quebrado (§. 248.)

La exposicion que acabamos de hacer del sistema de logaritmos cuya base $a=10$, contiene los principios generales necesarios para la inteligencia de las tablas; y como á casi todas ellas las precede una instruccion relativa á su particular disposicion y al modo de usarlas, creemos superfluo detenernos mas sobre este asunto.*

250 Cuando despues de haber elegido una base particular hayamos determinado el logaritmo de un número, nos será sumamente fácil hallar el logaritmo que corresponde al mismo número en otro sistema cualquiera; porque si representamos por a, A las bases de los dos sistemas, y por x, X los logaritmos que en ellos corresponden al número y, tendremos estas dos ecuaciones $a^x=y$; $A^X=y$;
de las cuales se deduce estotra $a^x=A^X$; y tomando en un mismo sistema los logaritmos de los dos miembros de la última, tendremos estotra:

$$\mathrm{l}a^x=\mathrm{l}A^X,$$

ó su equivalente

$$x\mathrm{l}a=X\mathrm{l}A.$$

Ahora bien, si suponemos tomados en el sistema de la base a los dos logaritmos que entran en la última ecuacion, será $\mathrm{l}a=1$; y de consiguiente toda la ecuacion se trasformará en la siguiente:

$$x=X\mathrm{l}A;$$

de la cual se deduce

$$X=\frac{x}{\mathrm{l}A}.$$

Si asi como hemos anteriormente (§. 241) puesto $\mathrm{l}y$ en lugar de x, ponemos ahora Ly en lugar de X, la última fórmula podrá escribirse de este modo:

$$Ly=\frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{l}A}.$$

la cual nos da á entender que *en dividiendo el logarit-*

* Las tablas de Callet (edicion estereotipa) y las de Bordá son bastante extensas y cómodas.

mo que en un sistema corresponde á un número cualquiera, por el logaritmo que á una nueva base corresponde en el mismo sistema, el cuociente es el logaritmo que corresponde al mismo número en el sistema de la nueva base.

De la última fórmula se deduce tambien que $\frac{ly}{Ly}=lA$; lo cual nos hace ver que, sea cual fuere el número representado por y, existe entre los logaritmos que le corresponden en dos sistemas diferentes una razon invariable representada por lA.

251 En cuantos sistemas son imaginables el logaritmo de la *unidad* es necesariamente *cero*; porque, sea cual fuere el valor particular de a, no puede menos de verificarse la ecuacion $a^0=1$. Los logaritmos de los números mayores que 1 van creciendo sin límite, ó como se dice, al *infinito*, asi como los mismos números; y por lo que respecta á los números menores que la unidad ó fraccionarios, la ecuacion $y=\frac{1}{a}=a^{-x}$ nos hace ver que cuanto menor sea el número y, tanto mayor debe ser el valor negativo de x; pero como por grande que sea este valor de x, jamas se podrá verificar que a^{-x} ó $\frac{1}{a^x}$ sea *cero*, bien que se pueda aproximar á cero cuanto queramos; es consiguiente que no pueda asignarse ningun logaritmo negativo, por grande que lo supongamos, que pueda ser logaritmo de *cero*; y en este sentido debe entenderse la expresion *el logaritmo de cero es el infinito negativo*, de la cual se hace uso en muchas tablas. El logaritmo correspondiente á una cantidad negativa es imaginario.

252 Pasemos ya á manifestar con algunos ejemplos la aplicacion que puede hacerse de los logaritmos al cálculo numérico de las fórmulas algebráicas. De lo expuesto (§. 241) se sigue que

$$\mathrm{l}(abcd\ \&c.) = \mathrm{l}a + \mathrm{l}b + \mathrm{l}c + \mathrm{l}d + \&c.$$

$$\mathrm{l}\left(\frac{abc\ \&c.}{def\ \&c.}\right) = \mathrm{l}a + \mathrm{l}b + \mathrm{l}c + \&c. - \mathrm{l}d - \mathrm{l}e - \mathrm{l}f - \&c;$$

y si representamos por d', e', f' &c. los complementos logarítmicos de los factores del denominador, será

$$\mathrm{l}\left(\frac{abc}{def}\right) = \mathrm{l}a + \mathrm{l}b + \mathrm{l}c + d' + e' + f' - 3 \times 10;$$

porque suponemos tomados tres complementos. Siendo $\mathrm{l}(a^m) = m\,\mathrm{l}a$; $\mathrm{l}a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\mathrm{l}a$; $\mathrm{l}a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\mathrm{l}a$; si se nos propusiese la fórmula $\frac{a^2\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt[5]{d^3ef}}$ para calcular con el auxilio de los logaritmos el resultado final de todas las operaciones que estan en ella indicadas, diriamos:

$$\mathrm{l}(a^2\sqrt{b^2-c^2}) = \mathrm{l}(a^2\sqrt{(b+c)(b-c)}) =$$

$$\mathrm{l}[a^2(b+c)^{\frac{1}{2}}(b-c)^{\frac{1}{2}}]$$

$$= 2\,\mathrm{l}a + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b+c) + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b-c);$$

$$\mathrm{l}(c\sqrt[5]{d^3ef}) = \mathrm{l}(cd^{\frac{3}{5}}e^{\frac{1}{5}}f^{\frac{1}{5}}) = \mathrm{l}c + \tfrac{3}{5}\mathrm{l}d + \tfrac{1}{5}\mathrm{l}e + \tfrac{1}{5}\mathrm{l}f;$$

y de consiguiente

$$\mathrm{l}\left(\frac{a^2\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt[5]{d^3ef}}\right) =$$

$$2\,\mathrm{l}a + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b+c) + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b-c) - \mathrm{l}c - \tfrac{3}{5}\mathrm{l}d - \tfrac{1}{5}\mathrm{l}e - \tfrac{1}{5}\mathrm{l}f$$

$$= 2\,\mathrm{l}a + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b+c) + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(b-c) + c' + d' + e' + f' - 4 \times 10,$$

representando por c', d', e', f' los complementos de los cuatro sustraendos. En habiendo hallado el logaritmo de la fórmula propuesta, las tablas nos darán á conocer el número que le corresponde, y ese será el valor del resultado de todas las operaciones que en la formula estaban indicadas.

253 A consecuencia de los mismos principios se determina fácilmente por medio de los logaritmos el cuarto término de cualquiera proporcion en estando conocidos los otros tres; porque si de la proporcion $a:b::c:d$ se deduce $d=\frac{bc}{a}$, se deducirá tambien (§. 241)

$$\mathrm{l}d=\mathrm{l}b+\mathrm{l}c-\mathrm{l}a=\mathrm{l}b+\mathrm{l}c+a'-10;$$

es decir, que *el logaritmo del cuarto término desconocido es igual á la suma de los logaritmos de los medios menos el logaritmo del extremo conocido;* ó lo que es lo mismo, *á la suma de los logaritmos de los medios y del complemento logarítmico del extremo conocido, menos 10 unidades.*

254 Puesto que toda proporcion $a:b::c:d$ envuelve esencialmente esta ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; tomando los logaritmos de estos dos miembros, tendremos $\mathrm{l}a-\mathrm{l}b=\mathrm{l}c-\mathrm{l}d$, lo cual nos hace ver que los cuatro logaritmos de los términos de toda proporcion $\mathrm{l}a.\mathrm{l}b:\mathrm{l}c.\mathrm{l}d$ forman una combinacion de términos equidiferentes (§. 223).

La serie de ecuaciones

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}=\&c. \text{ (§. 231)}$$

conduce igualmente á estotras:

$$\mathrm{l}b-\mathrm{l}a=\mathrm{l}c-\mathrm{l}b=\mathrm{l}d-\mathrm{l}c=\mathrm{l}e-\mathrm{l}d=\&c.;$$

y de aqui es fácil inferir que á toda progresion por cuocientes $\div a:b:c:d:e:$ &c. corresponde la progresion por diferencias $\div$ la . lb . lc . ld . le &c.; y que por consiguiente los logaritmos de los números en progresion por cuocientes forman una progresion por diferencias.

255 Si tuviésemos la ecuacion $b^z = c$, en la cual b y c representan cantidades conocidas, determinariamos el valor de la incógnita z por medio de los logaritmos; porque siendo $\mathrm{l}b^z = z\mathrm{l}b$, tendremos: $z\mathrm{l}b = \mathrm{l}c$, y por consiguiente $z = \frac{\mathrm{l}c}{\mathrm{l}b}$. Del mismo medio nos valdriamos para determinar el valor de z en la ecuacion $b^{c^z} = d$; pues haciendo primeramente $c^z = u$, resultará:

$$b^u = d;\ u\mathrm{l}b = \mathrm{l}d;\ u = \frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b};\ \text{ó}\ c^z = \frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b};$$

y tomando nuevamente los logaritmos de los dos miembros de esta última ecuacion, tendremos:

$$z\mathrm{l}c = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{l}d}{\mathrm{l}b}\right) = \mathrm{l}\ \mathrm{l}d - \mathrm{l}\ \mathrm{l}b;\ \text{y}\ z = \frac{\mathrm{l}\ \mathrm{l}d - \mathrm{l}\ \mathrm{l}b}{\mathrm{l}c}$$

En esta última expresion $\mathrm{l}\ \mathrm{l}b$ indica el logaritmo del logaritmo de b, y se obtiene considerando al logaritmo de b como un número. Las expresiones b^z y b^{c^z}, y todas las que se parecen á estas, se llaman ***cantidades exponenciales***.

Cuestiones relativas á los intereses ó réditos del dinero.

Varias especulaciones que en el comercio ocurren relativas á los intereses ó réditos del dinero vienen á ser uno de los objetos importantes á que se puede aplicar la teoría de las progresiones. Para inteligencia de lo que nos proponemos decir acerca de esto, es necesario saber que las utilidades que saca de una cantidad de dinero el que la emplea en negociaciones mercantiles, en manufacturas ó en cualquiera otra especie de labores productivas, son tanto mayores cuanto mas se multiplican estas negociaciones ó labores. De aqui es que el que toma prestada una cantidad de dinero para emplearla, debe no solo restituirla al cabo de cierto tiempo, sino tambien agregar á ella alguna retribucion ó premio para indemnizar al que se la prestó, por razon de las ventajas que este pudiera haber sacado empleándola por sí mismo. Tal es la idea que debemos formarnos de los intereses ó réditos del dinero. Para determinar los que corresponden á cada una de las cantidades que se presten, se refieren todas ellas como á unidad á 100 monedas de la misma especie que la suma prestada; en la suposicion de que en el contrato se debe haber estipulado cuánto deben ganar ó redituar estas 100 monedas al cabo de algun tiempo dado, por ejemplo, de un año. No es este lugar oportuno para exponer todas las circunstancias que en cada género de especulaciones pueden contribuir á que suba ó baje el interes del dinero: este es asunto para tratado en unos elementos de aritmética política y comercial despues del cálculo de las probabilidades. Nuestro objeto por ahora se reduce tan solo á manifestar la importancia de algunos problemas respectivos á las progresiones por cuocientes.

Supondremos en general que se haya pactado que al cabo de un año se ha de pagar por cada una de las monedas de la suma prestada un premio, rédito ó interes designado por r, el cual deberá ser una fraccion. A consecuencia de esta suposicion los réditos devengados en el mismo tiempo por 100 monedas, será $100r$; y los de una cantidad cualquiera a estarán representados por ar; y si designamos estos réditos por α, tendremos $\alpha = ar$.

Por medio de esta sencillísima fórmula se hallarán fácilmente los réditos anuales de cualquiera cantidad, en sabiendo los que devengan cada 100 monedas ó cualquiera otra suma en un tiempo conocido. Esta viene á ser la cuestion fundamental del cálculo del interes simple (*Aritm.* §. 188).

257 Pero si el acreedor en lugar de percibir los réditos devengados en el primer año, los deja juntamente con el capital primitivo en poder del deudor para que tambien produzcan réditos en el año siguiente, el capital respectivo á este segundo año vendrá á ser el primitivo a mas los réditos ar que en el primero devengó. Por manera que si representamos por a' el capital respectivo al segundo

año tendremos: $a' = a + ar = a(1+r)$.

Siendo $a'r$ los réditos devengados por la cantidad a' en un año, será $ar(1+r)$ los de la suma $a(1+r)$ en el segundo año. Supongamos que el acreedor los deje tambien en poder del deudor; y asi como la suma del capital primitivo a y de los intereses que devengó en el primer año vino á ser capital para el segundo, este capital a' mas sus réditos $a'r$ vendrán á ser capital para el tercer año. De modo que si designamos por a'' este último capital, será

$$a'' = a' + a'r = a'(1+r) = a(1+r)^2.$$

Los réditos que en un año devengue el capital a'' estarán bien representados por $a''r$; y suponiendo que tambien queden en poder del deudor, tendremos que al fin del tercer año, y para que sirva de capital para el cuarto, será

$$a''' = a'' + a''r = a''(1+r) = a(1+r)^3.$$

Se ve con facilidad que al cabo del cuarto año será

$$a^{\text{IV}} = a''' + a'''r = a'''(1+r) = a(1+r)^4;$$

y asi sucesivamente. Por consiguiente el capital primitivo y las cantidades que el deudor satisfaria al cabo del primer año, ó del segundo ó del tercero &c. si cualquiera de estos fuese el plazo final de la obligacion, forman esta progresion por cuocientes:

$$\div a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \&c.$$

en la cual el cuociente es $1+r$, y el término general $a(1+r)^n = A$, representando por n el número de los años que hayan pasado desde que se hizo el empréstito.

Si fuese 5 por 100 el *tanto anual* estipulado, será $100r = 5$; ó $r = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; $1 + r = \frac{21}{20}$; y en este caso por una cantidad a prestada á interes compuesto y por espacio de 25 años se habria de pagar $a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$. El valor de la 25.ª potencia de $\frac{21}{20}$ se determina con suma prontitud por medio de los logaritmos; pues segun hemos demostrado (§. 241)

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\, l\frac{21}{20} = 25\,(l21 - l20) = 0{,}5297322;$$

y como este logaritmo corresponde próximamente á 3,386, será

$\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3{,}386$; y de consiguiente $A = 3{,}386a$. Por manera que 1000 pesos prestados con estas condiciones valdrian 3386 pesos al cabo de los 25 años, comprendiendo en la suma los intereses no solo del capital sino tambien de los intereses.

Si fuesen 100 los años de la duracion del empréstito, tendriamos $A = a\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 131a$ con muy corta diferencia; y asi 1000 pesos producirán al cabo de este tiempo una cantidad de cerca de 131000 pesos. Estos ejemplos manifiestan con cuanta velocidad se aumentan los fondos con la acumulacion de los intereses compuestos.

258 Como en la ecuacion fundamental $A = a(1 + r)^n$ del interes compuesto entran cuatro cantidades, se puede hacer uso de ella para resolver cuatro cuestiones. La primera es: *conociendo las cantidades* a, r *y* n *hallar* A; á esta se refieren los ejemplos que hemos propuesto en el párrafo anterior, en los cuales se suponian conocidos el capital primitivo, el tanto por ciento y el número de años, y nos proponiamos determinar á cuanto ascendia al cabo de este tiempo la suma de capital y réditos.

La segunda: *conociendo* A, a *y* n *hallar* r, es decir, el tanto por ciento que en el contrato se estipuló. Para resolver esta cuestion deduciremos de la ecuacion fundamental

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

La tercera: *conociendo* A, r *y* n *hallar* a; para lo cual deduciremos de la misma écuacion la fórmula

$$a = \frac{A}{(1 + r)^n};$$

que nos da á conocer el capital que es necesario emplear para tener derecho á percibir despues de un número n de años una suma A.

La cuarta: *conocidas* A, a *y* r *hallar* n; no se puede resolver sino con el auxilio de los logaritmos (§§. 238 y 252). En efecto tomando el de cada miembro de la ecuacion fundamental, tendremos:

$$\mathrm{l}A = \mathrm{l}a + n\mathrm{l}(1 + r)$$

de donde se deduce:

$$n = \frac{lA - la}{l(1+r)}.$$

Por esta última fórmula se averigua cuántos años deben pasar para que el capital a, juntamente con los réditos, llegue á componer una cantidad A.

Para dar un ejemplo de esta última cuestion supongamos que se quiera saber cuánto tiempo será necesario para que se doble el capital primitivo, siendo como antes 5 el tanto por ciento. En este supuesto será $A = 2a$, y $lA = la + l2$; sustituyendo pues estos valores particulares en la fórmula general $n = \frac{lA - la}{l(1+r)}$, tendremos:

$$n = \frac{l2}{l\frac{21}{20}} = \frac{l2}{l21 - l20} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}21$$

con corta diferencia.

259 La cuestion siguiente es una de las mas complicadas que se suelen proponer sobre este asunto. Supongamos que el acreedor lejos de percibir por espacio de algunos años cantidad alguna, entregue en cada uno al deudor una nueva cantidad, y que habiendo ejecutado estas nuevas agregaciones durante un número $n - 1$ de años, se nos pregunta *cuál es al cabo de* n *años el importe total de capitales y réditos á interes compuesto*. Sean a, b, c, d.......... k el capital primitivo y las cantidades agregadas al fin del primero, segundo, tercero, cuarto &c. año; y como la cantidad a permanece en poder del deudor por espacio de un número n de años, ascenderá al cabo de este tiempo á $a(1+r)^n$. La cantidad b que está en poder del mismo deudor $n - 1$ años, se convertirá al cabo de ellos en $b(1+r)^{n-1}$. La cantidad c, que solo estará durante $n - 2$ años se convertirá en $c(1+r)^{n-2}$, y asi sucesivamente; en fin la última cantidad k, que solo ha estado en poder del deudor un año, no dará mas que $k(1+r)$. Tendremos pues:

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + k(1+r);$$

y calculando separadamente cada término del segundo miembro de esta ecuacion, tendremos el valor de A.

Este cálculo se simplifica mucho cuando la cantidad primitiva y las agregadas son todas iguales, por manera que sea $a = b = c = d \ldots = k$; porque en este caso la ecuacion anterior se trasforma en estotra:

$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots\ldots + a(1+r)$; en la cual es facil ver que los términos del segundo miembro forman una progresion por cuocientes, cuyo menor término es $a(1+r)$, el mayor $a(1+r)^n$, y el cuociente $1+r$; y por consiguiente la suma de todos los términos será (§. 232):

$$\frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r};$$

tendremos pues en tal caso:

$$A = a(1+r)\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$$

Esta ecuacion puede tambien servir para resolver cuatro cuestiones correspondientes á las que indicamos respectivas á la ecuacion

$$A = a(1+r)^n.$$

260 Si suponemos que se haya impuesto ó prestado á interes compuesto una cantidad A con la condicion de que el acreedor haya de percibir por espacio de n años una renta anual a hasta extinguir por este medio toda la deuda de capital y réditos, tendremos una cuestion inversa de la anterior; porque en esta va el deudor descargándose del capital é intereses por medio de diferentes pagas iguales que se han de efectuar á plazos *equidistantes*. Cada una de estas pagas se puede considerar como una anticipacion hecha al acreedor por el deudor, con la cual disminuye este la cantidad $A(1+r)^n$ que tendria que aprontar si en todo el espacio de n años no hubiera satisfecho cantidad alguna; pero es necesario tener presente que el valor de cada una de las anticipaciones se ha de calcular refiriéndolas todas á la misma época en que el deudor tendria que aprontar la suma $A(1+r)^n$ si no las hubiera hecho. Asi que, designando por a cada una de las pagas, la que satisface al fin del primer año distará $n-1$ años de aquella época final; y referida á esta época vendrá á valer $a(1+r)^{n-1}$; igual cantidad a satisfecha al fin del segundo año dista de la época final $n-2$ años; y su valor será $a(1+r)^{n-2}$; el valor de la tercera $a(1+r)^{n-3}$; y asi de las demas hasta la última, cuyo valor será la misma cantidad a. Por manera que si de este modo ha de haber percibido el acreedor todo el capital con sus réditos, debe haber ecuacion entre la cantidad $A(1+r)^n$ y la suma de las anticipaciones referidas á la misma

época final. Tendremos pues:

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots + a.$$

Los términos del segundo miembro de esta ecuacion forman una progresion por cuocientes, cuyo menor término es a; el mayor es $a(1+r)^{n-1}$; y el cuociente es $1+r$. Será pues la suma de todos los términos

$$\frac{a(1+r)^n - a}{r};$$

y la ecuacion anterior se trasformará en estotra:

$$A(1+r)^n = a\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right).$$

Esta última ecuacion, asi como los que hemos hallado en los párrafos anteriores, puede servir para resolver cuatro cuestiones; porque sucesivamente puede ser incógnita cada una de las cuatro cantidades indeterminadas que entran en ella; es decir, ó la A que llamaremos el *precio actual* de la renta, ó la misma renta, ó el *tanto por* 100, ó el número n de años que la renta debe durar. Para hallar este último es absolutamente necesario recurrir á los logaritmos. En efecto, despejando primeramente $(1+r)^n$, resultará:

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar};$$

y tomando los logaritmos de ambos miembros, tendremos:

$$n\mathrm{l}(1+r) = \mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar);$$

de donde se deduce que

$$n = \frac{\mathrm{l}a - \mathrm{l}(a - Ar)}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

261 Para manifestar el uso que puede hacerse de las fórmulas anteriores, nos propondremos resolver la cuestion siguiente:

Hallar qué cantidad se ha de satisfacer anualmente para extinguir ó amortizar en 12 años una deuda de 1000 reales con los réditos devengados en este tiempo á interes compuesto, siendo 5 por 100 el tanto anual.

En este caso se conocen las cantidades

$$A = 1000;\ n = 12;\ r = \frac{1}{20};$$

y se pide la renta anual ó sea la anualidad a. Despojando pues esta incógnita en la ecuacion

$$A(1+r)^n = \frac{a((1+r)^n - 1)}{r},$$

resultará:

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Sustituyendo en esta fórmula los valores particulares de las cantidades conocidas A, r y n; y efectuando las operaciones que la misma fórmula prescribe, el resultado final será el valor que deseamos conocer de la renta anual a. Para efectuar estos cálculos será muy conveniente que determinemos por medio de los logaritmos el valor de $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}$; y así sabremos que $\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = 1{,}79586$; y de consiguiente

$$a = \frac{100ↁ.\frac{1}{20}.1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5ↁ.1{,}79586}{0{,}79586};$$

y efectuando con el auxilio de los logaritmos las operaciones indicadas en la última expresion, hallaremos $a = 11282{,}6$ reales.

Será pues necesario satisfacer esta *anualidad* para extinguir en 12 años la suma de un capital de 100ↁ reales, y de sus réditos calculados á interes compuesto y á razon de 5 por 100 al año.

262 Otras muchas cuestiones se pueden proponer sobre esta materia; pero los límites á que nos hemos propuesto ceñir esta obra no nos permiten detenernos á exponer el modo de resolverlas. Observaremos tan solo que para comparar los valores de dos ó mas cantidades pagaderas á diferentes plazos, se deben todas referir á una misma época. Supongamos, para aclarar esto, que un banquero esté obligado á pagar una cantidad a al fin de n años contados desde este momento; y que ahora mismo entrega al acreedor en descuento un libramiento de un valor representado por b, y pagadero al cabo de p años; y se nos pregunte *cuánto debe ó se le debe*. Para contestar á esta pregunta deberemos referir los valores de las dos cantidades a y b á la época presente, en la cual el valor de la primera se reduce á $\frac{a}{(1+r)^n}$; porque este es el valor de un capital que ascenderia á la cantidad a al cabo de n años. Por la misma razon el valor de la

cantidad b se reduce á $\frac{b}{(1+r)^p}$; y segun que este segundo valor sea menor ó mayor que el primero, la diferencia de los dos indicará lo que le reste satisfacer ó tenga que percibir. Demos por supuesto que $\frac{a}{(1+r)^n} > \frac{b}{(1+r)^p}$; y representemos por c la diferencia de estas dos cantidades, de modo que sea

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p} = c;$$

supongamos ademas que el banquero no pueda satisfacer este resto hasta pasados q años. En tal caso la cantidad que en este momento deberia ser c, vendrá á ser en aquella época $c(1+r)^q$. Asi que despues de haber entregado el libramiento del valor b, tendrá el banquero que satisfacer al fin de q años la cantidad representada por $c(1+r)^q$, ó lo que viene á ser lo mismo,

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q;\ ó\ a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}$$

sustituyendo en lugar de c la expresion equivalente $\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$, y suponiendo que el número q sea mayor que n y p.

Las cantidades $a, b, c \ldots k$, de que hemos hablado (§. 259), se valuaron refiriéndolas todas á la época final en que se debia efectuar el pago de la suma A; y en el §. 260 el capital A y todas las *anualidades* se refirieron á la época en que estas debian terminarse.

NOTAS.

1.ª Se podrá acaso creer que para descubrir las raices de cualquiera ecuacion del cuarto grado, por ejemplo,

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

bastará compararla con el producto hallado (§. 183), igualando las cantidades que asi en la ecuacion como en el producto sean coeficientes de las mismas potencias de la incógnita x; y sin duda por esta razon la mayor parte de los autores elementales creen que este cotejo basta para demostrar que una *ecuacion de cualquier grado es el producto de tantos factores binomios lineales como unidades hay en el exponente de su grado;* pero ya haremos ver que no tiene solidez alguna este modo de discurrir. Nosotros hemos adoptado (§. 182) esta proposicion solo condicionalmente; porque para afirmarla absolutamente y de positivo seria necesario demostrar que toda ecuacion, de cualquier grado que sea, ha de tener forzosamente alguna raiz real ó imaginaria; y esto no es facil demostrarlo en los elementos del Algebra. Por fortuna no necesitamos por ahora de tal demostracion, y por otra parte se pueden ver en el *Complemento* las reflexiones que sobre este asunto se nos han ocurrido. Si cotejásemos la ecuacion propuesta con el producto de los cuatro factores binomios, resultarian estas cuatro ecuaciones:

$$-a-b-c-d=p;$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q;$$
$$-abc-abd-acd-bcd=r;$$
$$abcd=s.$$

Para deducir ahora de estas ecuaciones el valor de cada una de las letras a, b, c, d, que representan á las raices desconocidas de la ecuacion propuesta, tendriamos que empeñarnos en un cálculo muy complicado, si para eliminar, como es necesario, tres de las cuatro incógnitas a, b, c, d hiciésemos uso del método expuesto (§. 78); pero si multiplicamos por a^3 la primera de las cuatro ecuaciones; la segunda por a^2, y la tercera por a; si despues sumamos estos tres productos con la cuarta ecuacion, reduciendo términos semejantes, resultará esta nueva ecuacion: $-a^4=pa^3+qa^2+ra+s$; de la cu l se han eliminado las tres incógnitas b, c, d, y que por medio de una simple trasposicion se trasforma en estotra: $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = 0$. Esta ecuacion que contiene las mismas potencias de la cantidad incógnita y las mismas cantidades conocidas que la primitiva propuesta, nos hace ver que despues del cálculo á que ha dado motivo la comparacion de la ecuacion propuesta con el producto de los cuatro factores binomios, encontramos tanta dificultad para determinar el valor de la raiz a, como al principio encontrábamos para determinar alguno de los valores de x.

Con razon pues ha dicho Castillon (*Mem. de Berlin, año de* 1789): »En todos los *Elementos de Algebra* se demuestra que »multiplicando muchos binomios del primer grado se puede formar »una ecuacion del grado que se quiera; pero no se ha hecho ver que »dada una ecuacion que tenga cualesquiera coeficientes conocidos, se »pueden en todos casos determinar los factores binomios lineales que »multiplicados entre sí la produzcan.”

Si en vez de multiplicar respectivamente por a^3, a^2 y a las tres primeras ecuaciones que dedujimos de la comparacion de la primitiva con el producto, las multiplicásemos respectivamente por b^3, b^2 y b, ó por c^3, c^2 y c, ó por d^3, d^2 y d, y sumásemos tambien los productos con la cuarta, tendriamos en el primer caso: $-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s$; en el segundo $-c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s$; en el tercero $-d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s$; y asi es visto que sea cual fuere la raiz que intentemos determinar de la ecuacion primitiva, venimos siempre á parar á otra ecuacion que en realidad no se diferencia de ella, y cuya resolucion ofrece por consiguiente la misma dificultad. La identidad de todas estas últimas ecuaciones es efecto de que las cuatro cantidades incógnitas a, b, c, d estan todas combinadas de un mismo modo en las cuatro ecuaciones fundamentales; y de ahí es que cualquiera de las incógnitas se debe determinar por medio de la misma serie de operaciones. En general, siempre que en la investigacion de muchas cantidades incógnitas hayamos de emplear para cada una el mismo razonamiento, las mismas operaciones y las mismas cantidades conocidas, todas aquellas cantidades serán necesariamente raices de una misma ecuacion.

2.ª Para eliminar una de dos incógnitas que se hallan en dos ecuaciones de grados superiores, suelen algunos prescribir un método, del cual vamos á dar alguna idea aplicándolo á las ecuaciones siguientes,

$$Nx^3+Px^2+Qx+R=0,$$
$$N'x^3+P'x^2+Q'x+R'=0.$$

Multiplicando la primera por N', y la segunda por N; y restando el segundo producto del primero, como en el §. 84, resultará
$(N'P-NP')x^2+(N'Q-NQ')x+N'R-NR'=0$ (a).
Multiplicando asimismo la primera de las ecuaciones propuestas por R', y la segunda por R, y restando el segundo producto del primero, tendremos:
$(R'N-RN')x^3+(R'P-RP')x^2+(R'Q-RQ')x=0$;
y dividiendo por x todos los términos de esta ecuacion, quedará reducida á
$(R'N-RN')x^2+(R'P-RP')x+(R'Q-RQ')=0$ (b)
tendremos pues en lugar de las ecuaciones propuestas las dos ecuaciones (*a*) y (*b*) del segundo grado con respecto á x. Si las representamos por

$$nx^2+px+q=0,$$
$$n'x+p'x+q'=0;$$

y efectuamos con estas lo que con las dos primitivas, se deducirán, de ellas fácilmente dos ecuaciones del primer grado con respecto á x. Por último, deduciendo de cada una de estas una expresion del valor de x, é igualando las dos expresiones, tendremos la ecuacion final. Baste esta ligera idea de un método sumamente imperfecto, que no da luz alguna sobre la mutua conexion que entre sí tienen las varias ecuaciones fundamentales de un mismo problema, ni sobre el modo de determinar la incógnita eliminada luego que esté conocido el valor de la otra.

3.ª Como por el método indicado (§. 243) sea muy penosa la determinacion del valor de x en la ecuacion $10^x=y$, en la cual suponemos conocido el de y; podemos por el contrario suponer conocidos diferentes valores de x, y determinar los correspondientes de y, á fin de que estos nos sirvan para resolver la cuestion inversa, segun vamos á hacer ver.

Demos á x varios valores desde 0,1 hasta 0,9 y fácilmente se ve que en habiendo determinado la y que corresponde á $x=0,1$;

ó lo que es lo mismo, en habiendo hallado el valor de $10^{\frac{1}{10}}$, todos los demas valores de *y* se determinan sin dificultad alguna; porque $10^{\frac{2}{10}}$; $10^{\frac{3}{10}}$ &c. son respectivamente la segunda, la tercera &c. potencia de $10^{\frac{1}{10}}$.

Ahora bien, por medio de la extraccion de la raiz cuadrada se sabe que

$$10^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{5}{10}} = 3,162277660;$$

y extrayendo de este último resultado la raiz quinta, sabremos que

$$10^{\frac{1}{10}} = 1,258925412.$$

Del mismo modo extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de la última ecuacion, resulta

$$10^{\frac{1}{20}} = 10^{\frac{5}{100}} = 1,122018454;$$

y extrayendo de los miembros de esta la raiz quinta, tendremos que

$$10^{\frac{1}{100}} = 1,023292992;$$

y elevando á la segunda, á la tercera &c. potencias los miembros de la última ecuacion, obtendremos los valores de *y* correspondientes á los de *x* desde 0,01 hasta 0,09.

Ya se deja ver cómo podremos determinar los valores de *y* correspondientes á los de *x* desde 0,001 hasta 0,009; desde 0,0001 hasta 0,0009, y asi sucesivamente. De este modo formaremos la tabla adjunta.

TABLA.

Logaritmos.	Números.	Logaritmos.	Números.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

Por medio de la tabla precedente se puede hallar el logaritmo de cualquier número, dividiendo primeramente este número por la mayor potencia de 10 que en él esté contenida, y efectuando la serie de operaciones que indicaremos en el ejemplo siguiente:

Propongámonos *determinar el logaritmo que corresponde al número 2549.*

Dividamos este número por 1000, que es la mayor potencia de 10 que en él está contenida, y tendremos

$$2549 = 10^3 \times 2{,}549:$$

busquemos en la tabla el número próximamente menor que 2,549. y veremos en ella que

$$10^{0,4} = 2{,}511886432;$$

dividamos por este número á 2,549, y resultará que

$$2{,}549 = 10^{0,4} \times 1{,}014775177;$$

busquemos en la tabla el número próximamente menor que............ 1,014775177, y en ella veremos que

$$10^{0,006} = 1{,}013911386:$$

dividamos por este número á 1,014775177; y resultará que

$$1{,}014775177 = 10^{0,006} \times 1{,}000851742:$$

continuemos del mismo modo efectuando divisiones hasta hallar un cuociente que se diferencie de la unidad solo en partes decimales del orden que nos hayamos propuesto despreciar.

Si, por ejemplo, nos hubiésemos propuesto aproximar hasta las milésimas el logaritmo que buscábamos de 2549, no continuariamos mas las divisiones; porque las partes decimales que el último cuociente 1,000851742 tiene ademas de la unidad son de órdenes mas elevados que las milésimas. Diriamos pues:

$$2549 = 10^3 \times 10^{0,4} \times 10^{0,006} = (10)^{3,406};$$

y de consiguiente el logaritmo que buscábamos aproximado hasta las milésimas es 3,406; y si continuásemos las divisiones hasta siete, hallariamos que el logaritmo de 2549 aproximado hasta las diezmillonésimas es 3,406369.

Con mayor facilidad se determina por medio de la misma tabla el número que corresponde á un logaritmo dado. Sea este, por ejemplo, 2,547; y debiendo en esta suposicion ser el número que buscamos

$$(10)^{2,547}=(10)^2\times(10)^{0,5}\times(10)^{0,04}\times(10)^{0,007},$$

será por consiguiente el producto de estos cuatro factores. Ahora bien

$$(10)^2=100,$$
$$(10)^{0,5}=3,162277660,$$
$$(10)^{0,04}=1,096478096,$$
$$(10)^{0,007}=1,016248694;$$

segun puede verse en la tabla. Será Pues 352,357 el número corrrespondiente al logaritmo propuesto 2,547.

Con este mismo objeto de hallar los números correspondientes á los logaritmos que puedan dársenos, publicó el ingles *Dodson* una tabla semejante, bien que mucho mas extensa, á la cual tituló *Antilogarithmic-canon*.

En el *Complemento del Algebra* daremos varias fórmulas para resolver con suma prontitud y facilidad los mismos dos problemas generales; á saber: 1.° *Dado un número, hallar el logaritmo que le corresponde en un sistema cualquiera.* 2.° *Dado el logaritmo que en un sistema determinado corresponde á un número desconocido, hallar este número.*

$(10)^{[illegible]}=(10)^{[illegible]}\times(10)^{[illegible]}\times(10)^{[illegible]}\times(10)^{[illegible]}$,

será por consiguiente el producto de estos cuatro factores. Ahora bien

$(10)^1=10$,

$(10)^{[illegible]}=3{,}16227660$,

$(10)^{[illegible]}=1{,}00579096$,

$(10)^{[illegible]}=1{,}0162[illegible]$

segun puede verse en la tabla. Será Pues 95,9557 el número correspondiente al logaritmo propuesto 1,9[illegible].

Con este mismo objeto de hallar los números correspondientes á los logaritmos que puedan dársenos, publicó el ingles Dodson una tabla semejante, bien que mucho mas extensa, á la cual tituló *Antilogarithmic-canon*.

En el *Complemento del Algebra* daremos varias fórmulas para resolver con suma prontitud y facilidad los mencionados problemas generales; á saber: 1.º *Dado un número, hallar el logaritmo que le corresponde en un sistema cualquiera.* 2.º *Dado el logaritmo que en un sistema determinado corresponde á un número desconocido, hallar este número.*

NOTA DEL TRADUCTOR.

Nos ha parecido conveniente añadir al fin del tratado de Algebra las pequeñas variaciones que ha hecho el autor en su última edicion; las cuales son tres en tres artículos, y una bajo el nombre de adicion al fin del tomo.

ART. 14. El autor pone el siguiente ejemplo, resuelto ya en la aritmética, con el objeto de manifestar la mayor facilidad que ofrece la escritura algebráica sobre la del desenvolvimiento de los enunciados.

Supongamos dos fuentes, de las cuales la primera corriendo sola sea capaz en $2^h \frac{1}{2}$ *de llenar un estanque, y que la segunda le llene sola en* $3^h \frac{3}{4}$*; se pregunta cuánto tiempo deben correr juntas para que llenen el mismo estanque.*

Si este tiempo fuese dado, se le verificaria calculando las cantidades de agua vertidas por cada fuente, y reuniendo los resultados, nos aseguraríamos si ellos componian la totalidad del agua que podia contener el estanque.

Por lo tanto, para formar la ecuacion designaremos por x el tiempo incógnito, y se indicará sobre x las operaciones enunciadas anteriormente; pero con el fin de hacer la solucion independiente de los números dados, y aun de abreviar la expresion de los del enunciado, que son fraccionarios, las representaremos tambien por letras; se podrá pues escribir a en vez de $2^h \frac{1}{2}$, y b en lugar de $3^h \frac{3}{4}$.

Esto supuesto, tomando como en aritmética la capacidad del estanque por unidad, se verá que

La primera fuente que le llena sola en un número a de horas, vierte en él en una hora la cantidad de agua representada por la fraccion $\frac{1}{a}$, y por lo mismo en un número de horas representado por x dará la cantidad $x \times \frac{1}{a}$ ó $\frac{x}{a}$.

La segunda fuente, que llena el mismo estanque en b horas, vierte en él en una hora la fraccion $\frac{1}{b}$, y por lo tanto en un número x de horas dará la cantidad $x \times \frac{1}{b}$ ó $\frac{x}{b}$

La cantidad total de agua dada por las dos fuentes será pues $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}$; y como esta cantidad debe ser igual á la que contenga el depósito, y que se ha representado por la unidad, se deberá tener la ecuacion

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1.$$

Esta ecuacion, tratada por las reglas anteriores, conduce á $bx+ax=ab$, ó $x=\frac{ab}{a+b}$.

La última fórmula da, para resolver todos los casos de la cuestion propuesta, esta regla muy simple.

Divídase el producto de los números que denotan el tiempo que emplea cada fuente en particular en llenar el estanque por la suma de estos números; el cuociente denotará el tiempo que necesitan correr juntas las dos fuentes para llenarle.

Aplicando esta regla á los números del enunciado se sacará

$$2\frac{1}{2}\times 3\frac{3}{4}=\frac{5}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{75}{8}$$

$$2\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+\frac{15}{4}=\frac{20}{8}+\frac{30}{8}=\frac{50}{8},$$

de donde sale $x=\frac{75}{50}=\frac{3}{2}$.

Esto es, que las fuentes corriendo juntas necesitan $1^h\frac{1}{2}$ para llenar el estanque.

Núm. 182. El autor introduce en vez de la demostracion del texto una de lo que en él se consigna, la cual la ha tomado de los *Anales de Matemáticas* publicados por Mr. Gergonne (tomo 4.°, pág. 209 á 210, nota), y dice asi;

Habiendo descompuesto el primer miembro de la ecuacion

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\&c.=0$$

en los n factores del primer grado

$$x-a,\ x-b,\ x-c,\ x-d.........x-l,$$

no se le podrá dividir por ninguna otra expresion de este grado.

En efecto, si fuese posible la division por un binomio $x-\alpha$, diferente de los primeros, se tendria

$$x^n + Px^{n-1} + \&c. = (x - \alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \&c.)$$

y por lo mismo se sacaría

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l) = (x-\alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \&c.);$$

pero si cambiamos x en α, tendremos

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots\ldots(\alpha-l) = (\alpha-\alpha)(\alpha^n + p\alpha^{n-1} + \&c.);$$

y como el segundo miembro se desvanece á causa del factor nulo $\alpha - \alpha$, lo cual no sucede al primero, que es el producto de factores diferentes de cero por ser α diferente de a, b, $c\ldots\ldots\ldots l$, resulta que el supuesto es un absurdo, y por lo tanto *una ecuacion de un grado cualquiera no puede admitir mas divisores binomios del primer grado que las unidades del exponente de su grado, y por lo mismo no puede tener mas raices.*

Núm. 211. El autor pone al número 211 una nota interesante, que es la siguiente.

A los razonamientos anteriores, tomados comunmente por evidentes, los ha dado Mr. Encontre aclaraciones útiles que vamos á exponer.

1.° He aqui como nos podemos asegurar de la posibilidad de hacer que los polinomios P y N adquieran incrementos tan pequeños como se quiera. Sea $P = \alpha x^m + \beta x^n \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta x^q$, suponiendo que m sea el mayor exponente de x; si en el polinomio anterior se pone por x, $a+y$, tomará la forma

$$A + By + Cy^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + Ty^m,$$

en la cual los coeficientes A, B, $C\ldots\ldots\ldots\ldots T$ son en número finito y de valor finito; el primer término A será el valor que tome el polinomio P cuando $x=a$, lo demas

$$By + Cy^2 \ldots\ldots\ldots + Ty^m = y(B + Cy \ldots\ldots\ldots + Ty^{m-1})$$

será el incremento de dicho polinomio P cuando se aumente de y el valor $x=a$. Esto supuesto, si S designa el mayor de los coeficientes B, $C\ldots\ldots\ldots T$, se tendrá

$$B + Cy \ldots\ldots + Ty^{m-1} < S(1 + y \ldots\ldots + y^{m-1});$$

pero

$$1 + y \ldots\ldots + y^{m-1} = \frac{1 - y^m}{1 - y} \ (158),$$

luego deberá tenerse

$$y(B + Cy \ldots\ldots + Ty^{m-1}) < Sy\,\frac{(1 - y^m)}{1 - y},$$

y por lo tanto el incremento del polinomio P será menor que cualquier cantidad, si es que se hace $\frac{Sy(1 - y^m)}{1 - y}$ menor que dicha cantidad, pero se llegará á lograrlo cuando se haga $\frac{Sy}{1 - y} = c$, pues entonces $y = \frac{c}{S + c}$ siendo < 1, la cantidad $\frac{Sy(1 - y^m)}{1 - y} = \frac{Sy}{1 - y} - \frac{Sy^{m+1}}{1 - y}$ será precisamente menor que c, cuya pequeñez no puede limitarse.

2.° Si se designa por h el incremento del polinomio P, por k el del polinomio N, la mudanza que resultará en el valor de su diferencia será $h - k$, y podrá hacerse menor que cualquier cantidad dada, con solo hacer menor que dicha cantidad el incremento que sea mayor de los dos; de donde se concluirá que la diferencia de los polinomios P y N se la podrá hacer variar en magnitudes tan pequeñas como se desee en el intervalo de $x = a$ á $x = b$; y puesto que dicha diferencia pasa de negativa á ser positiva en este intervalo, se aproximará necesariamente á cero tanto cuanto se quiera. (*Véase los Anales de Matemáticas puras y aplicadas*, publicadas por Mr. Gergonne, tomo 4.° página 210.)

Adicion á los números 66 y 75. Dice el autor. En los números 66 y 75 he interpretado las soluciones negativas por el exámen de la ecuacion que ellas verifican inmediatamente, así como lo habia hecho siempre; y este medio me ha parecido exacto, porque solo se trata de manifestar que estas soluciones tienen un sentido razonable, puesto que resuelven cuestiones análogas á la propuesta; pero hay comunmente muchos modos de formar estas cuestiones; y la siguiente que me ha comunicado el difunto Mr. Francais, geómetra distinguido, profesor en la escuela de artillería de Maguncia, me ha parecido mas simple que la que se halla en los números citados.
»Mr. Francais piensa que se debia separar del enunciado de la cues-»tion del número 65 la idea del punto de partida de los correos »para suponerlos en camino desde un tiempo indefinido, y que por

»lo mismo debia enunciarse asi: *dos correos siguen el mismo camino en el mismo sentido C′ABC;*

C′ R′ A B R C

despues que ellos han corrido cada uno un tiempo cualquiera, el uno se hallaba en A *en el momento en que el otro estaba en* B; *se conoce su velocidad y la distancia* AB: *se pregunta ¿en qué punto del camino se encontrarán?*

„Este enunciado conduce á la misma ecuacion que la del número 65; pero luego que se establece la continuidad del movimiento, la solucion negativa se explica, sin que sea necesario cambiar la direccion de uno de los correos. En efecto, ya que el movimiento no ha empezado en los puntos A y B, y sí que ambos antes del momento en que se les supone llegados á estos puntos se habian movido del mismo modo durante un tiempo cualquiera, yendo desde C' á B, es fácil concebir que el correo que está mas adelante, ó llega á B cuando el otro está en A, el cual va menos veloz, ha debido en cierta época hallarse detras de este, y encontrarle antes de la llegada de este á A. El signo — indica en tal caso (como en la aplicacion del Algebra á la Geometría) que es necesario tomar la distancia AR' en el sentido opuesto á la distancia AR que se ha mirado como positiva. La mudanza que debe hacerse en el resultado para que la solucion negativa resulte positiva, se reduce á establecer que los correos han debido encontrarse antes de llegar al punto A en vez de hacerlo despues."

En efecto, cuando se coloca el punto R' entre A y C', en vez de ponerle entre A y B, se halla $AB = BR' - AR'$; de donde resulta la ecuacion $y - x = a$, en vez de la $x - y = a$ que se habia obtenido desde luego; no es pues necesario cambiar el signo de c; la segunda ecuacion quedaria $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

Mr. Francais aplica con no menos éxito estas consideraciones al caso del número 75, reemplazando los correos por móviles sujetos á un movimiento continuo y empezado desde un tiempo indefinido. Enuncia el problema de este modo. »*Dos móviles se mueven uniformemente sobre la recta* CB

C R A B

»*el uno en la direccion* BC, *el otro en la direccion* CB *con velocida-*
»*des dadas; el que se mueve en el primer sentido, se halla en* B *un*
»*número conocido de horas antes que el otro haya llegado á* A: *se*
»*pide ¿en qué punto de la recta indefinida* BC *se hace el encuentro?*

»La solucion $x = -8$ quiere decir que los dos móviles se han »encontrado en el punto R antes que el que viene desde C hácia B »hubiese llegado al punto A, y que el segundo que va desde B há- »cia C estuviese en C, donde se halla cuando el otro está en A."

La posicion asignada al punto R se verifica observando que el dicho punto R resulta de tenerse $AC = BC - AB = cd - a$ en vez de $a + cd$ que se habia obtenido antes, y por lo mismo resultará la ecuacion $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$, ecuacion que da $x = 8$.

De este modo no hay necesidad de invertir el sentido del movimiento: á la verdad las circunstancias materiales del problema han cambiado, y como lo he dicho antes, esto prueba que existen muchas cuestiones físicas correspondientes á las mismas relaciones matemáticas; pero los enunciados anteriores tienen la ventaja de no alterar la ley de continuidad, aproximándose de este modo á la consideracion de las líneas que pinta del modo mas simple y mas general las circunstancias de la mudanza de signo de las magnitudes. (Véase el *Tratado elemental de Trigonometría y de aplicacion del Algebra á la Geometría.*)

446
22
111

2 2 3
1 2

2

2
3
12