LECCIONES DE ARITMÉTICA

LECCIONES

DE

ARITMÉTICA

POR

D. PRUDENCIO SOLÍS Y MIGUEL

Profesor, por oposición, de la Escuela Normal de Valencia

Prudencio Solís

QUINTA EDICIÓN

VALENCIA
Imprenta de F. Vives Mora
CALLE DE LAURIA, N.º 40
1892

LECCIÓN PRIMERA.

IDEAS GENERALES.

1. Llamamos *Matemáticas* á la ciencia que trata de la cantidad.

2. Las matemáticas se dividen en *puras* y *mixtas*. Las *puras* consideran la cantidad sólo como cantidad, y las *mixtas* relacionan la cantidad con las propiedades de la materia, como por ejemplo, la *gravedad*, la *inercia*, etc.

3. La cantidad puede expresarse de varias maneras, y de aquí las diferentes divisiones que se hacen de las matemáticas puras, á saber: *Aritmética*, *Algebra* y *Geometría*.

4. La Aritmética tiene por objeto la cantidad expresada por números.

5. El Álgebra tiene por objeto la cantidad expresada de una manera general, para lo cual se han adoptado todas las letras del alfabeto.

6. La Geometría tiene por objeto la extensión y nos enseña á medir las líneas, las superficies y los cuerpos.

7. Las verdades que se estudian en las matemáticas, se enuncian por medio de proposiciones que toman diferentes nombres, á saber: *axioma*, *teorema*, *lema* y *corolario*.

8. *Axioma* es una proposición evidente en sí misma, cuya verdad concebimos desde el momento en que se enuncia sin necesidad de razonamiento alguno. Los axiomas de más aplicación en matemáticas son los siguientes:

1.° *El todo es mayor que una de sus partes.*

2.° *El todo es igual al conjunto de sus partes.*

3.° *Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

4.° *Si á cantidades iguales se añaden ó quitan cantidades iguales, las sumas ó diferencias serán iguales.*

5.° *Si cantidades iguales se multiplican ó dividen por cantidades iguales, los productos ó los cocientes serán iguales.*

9. Son *teoremas* las proposiciones que, aunque encierren una verdad, ésta no se percibe por su simple enunciación, debiendo por lo tanto evidenciarse por medio de un razonamiento.

10. *Lema* es un teorema secundario que se antepone á otro principal para facilitar su comprensión.

11. *Corolario* es una proposición que se infiere inmediatamente de otra que se ha demostrado ya.

12. Entre las diferentes clases de proposiciones que acabamos de explicar, muchas tienen el carácter de *condicionales*, por cuanto la verdad de las mismas depende de alguna condición que debe concurrir. Por ejemplo: *Si un número es divisor de varios sumandos*, ES TAMBIÉN DIVISOR DE LA SUMA. La primera parte de esta proposición se llama *hipótesis*, y la segunda, *tesis*.

13. *Definición* es una proposición por medio de la cual explicamos lo que queremos dar á conocer. Las definiciones deben ser concisas, claras y no contener el definido.

14. *Demostración* es un razonamiento que tiene por objeto evidenciar la verdad de una proposición.

15. *Problema* es una proposición en la que se pide determinar el valor de alguna cantidad desconocida por medio de otras conocidas. La cantidad desconocida se llama *incógnita*, y las conocidas, *datos*.

16. *Cantidad* en general es todo lo que se puede medir, todo lo que puede aumentar ó disminuir, como el peso de los cuerpos, el dinero, el tiempo, etc.

17. *Unidad* es la cantidad que tomamos como tipo para medir otras cantidades de la misma especie. La unidad, tratándose de contar individuos, como árboles, caballos, etc., es el individuo mismo, como un árbol, un caballo, etc. En los demás casos, la unidad es arbitraria; pero su tamaño debe ser relativo al de la cantidad que se ha de medir. Así, por ejemplo, si queremos medir la longitud de una pieza de tela, tomaremos el metro; si la distancia entre dos pueblos, el kilómetro; si la distancia entre dos astros, el miriámetro, etc.

18. *Número* es el resultado de comparar la unidad con la cantidad. Si comparamos, por ejemplo, el metro con una línea, y aquél cabe en ésta cuarenta y cinco veces, diremos que tal línea tiene cuarenta cinco y metros, y hé aquí un número.

19. Mas como la unidad podrá estar contenida ó no exacta-

mente cierto número de veces en la cantidad, resulta de aquí que el número podrá ser *entero, quebrado* ó *mixto*. El número será *entero* si expresa cierto número de unidades, como cuarenta; será *quebrado* si expresa una ó más partes de la unidad, como *medio* ó *mitad*, y *mixto* si expresara ambas clases de números á la vez, como *cuarenta y medio*.

20. Los números se llaman *concretos* si expresan la especie de sus unidades, como *veinte años*, pero si hacemos abstracción de la especie y enunciamos solamente el número de unidades, se dice que es *abstracto*, como *veinte*.

21. La especie no altera la práctica de las operaciones de la Aritmética. Así, por ejemplo, lo mismo sumaremos nueve pesetas y siete pesetas, que nueve kilogramos y siete kilogramos, y lo propio puede decirse respecto de las restantes operaciones. Por esto, cuando se estudian simplemente las diferentes operaciones que se hacen con los números, se toman generalmente números abstractos (1).

22. Para la indicación de estas operaciones y de las relaciones que ligan á las cantidades, se han adoptado los signos que aparecen á continuación:

Signos.	Operaciones y relaciones que expresan.	Modo de leerlos.
$+$	Adición	Más
$-$	Sustracción	Menos
$\times$	Multiplicación	Multiplicado por
$:$	División	Dividido por
a^2	Elevación á potencias	a elevado á la 2.ª potencia
$\sqrt{}$	Extracción de raíces	Raiz de
$=$	Igualdad	Igual
$>$	Desigualdad	Mayor que
$<$	Desigualdad	Menor que

23. El paréntesis es también un signo necesario cuando se quiere manifestar que el resultado de varias operaciones indicadas se ha de someter á una nueva operación. Así, por ejemplo, si el resultado de sumar, restar, multiplicar ó dividir los núme-

(1) En la enseñanza que se dá á los niños se debe seguir un procedimiento inverso, partiendo siempre de lo concreto, á cuyo efecto se practican al principio intuitivamente las operaciones por medio del tablero contador ó con otros objetos.

ros 48 y 6 se ha de multiplicar por 4, escribiríamos de esta manera:

$$(48 + 6) \times 4 \quad (48 - 6) \times 4 \quad (48 \times 6) \times 4 \quad (48 : 6) \times 4$$

La falta de paréntesis cambiaría el sentido de estas operaciones, y daría también en tres de ellas diferentes resultados. En efecto:

$$(48 + 6) \times 4 = 216, \text{ y } 48 + 6 \times 4 = 72;$$
$$(48 - 6) \times 4 = 168, \text{ y } 48 - 6 \times 4 = 24;$$
$$(48 : 6) \times 4 = 32, \text{ y } 48 : 6 \times 4 = 2.$$

24. Cuando se quiere practicar alguna operación aritmética, deben omitirse en general los signos; mas no cuando en vez de buscar un resultado se desea solamente señalar las operaciones que habrían de hacerse para hallarlo; en cuyo caso las operaciones se llaman *indicadas*.

25. Fácilmente se concibe la importancia de la Aritmética, si se tiene en cuenta que su estudio sirve de base para el de las demás ramas que comprenden las matemáticas. Por otra parte, la Aritmética nos facilita la práctica del cálculo, tan frecuente y tan necesario en la vida doméstica y en la vida social; y finalmente, enseñándonos á discurrir con precisión y con exactitud y á conocer el valor de los principios que establece la economía, y que deben guiarnos en la administración de nuestros intereses, constituye un poderoso elemento, no solo de cultura intelectual, sino también de cultura social.

La Aritmética, como las demás ciencias, tiene dos aspectos: uno *teórico* y otro *práctico*.

La *teoría* explica el *por qué* de todas las operaciones que son objeto del estudio de la Aritmética; la *práctica* se limita á la exacta ejecución de las reglas establecidas por la teoría.

El estudio de la Aritmética abarca la formación y representación de los números, las propiedades de estos números, las operaciones que con ellos se practican y las aplicaciones de las mismas á la resolución de toda clase de problemas numéricos.

LECCIÓN II.

De la numeración.

26. La *numeración* tiene por objeto la formación de los números, nombrarlos y representarlos por medio de caracteres particulares.

27. Los números se forman agregando primero una unidad á la unidad, después otra unidad al número que resulte y continuando de la misma manera. De aquí se infiere que la sucesión de los números es ilimitada, pues por grande que sea un número siempre se le podrá añadir una unidad y formar otro número mayor.

28. La numeración puede ser *verbal* y *escrita*, según que los números se expresen por palabras ó por guarismos.

Debemos suponer que el lector sabe ya prácticamente la numeración verbal y que no hay necesidad de explicar minuciosamente la manera de contar, y por tanto nos limitaremos á exponer la admirable combinación de los elementos de la numeración verbal.

Fácilmente se comprende que si se hubiera de dar un nombre particular á cada número, nuestra mente se perdería en el inmenso cúmulo de palabras que resultaría, y el auxilio de la memoria más privilegiada no bastaría para saber contar los diez mil primeros números.

Para salvar esta dificultad, el hombre ha inventado un sistema tan sencillo como ingenioso, que le permite expresar todos los números mediante un reducido número de palabras, de la manera que vamos á explicar.

Los diez primeros números tienen los nombres particulares de

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Si se quiere contar mayor número de objetos, se ha convenido agruparlos de diez en diez, y á cada uno de estos grupos que se consideran como nuevas unidades, si bien de *segundo orden*, se ha dado el nombre de decenas, las cuales se cuentan con los nombres de los diez primeros números, diciendo: UNA *decena* ó *diez*, DOS *decenas* (veinte), etc.

Si el número de decenas excede de diez, se las reune de diez en diez, y estos nuevos grupos que se consideran también como unidades, pero de *tercer orden*, se llaman *centenas*, que se cuentan con los nombres de los diez primeros números, diciendo: UNA *centena* ó *ciento*, DOS *cientos*, TRES *cientos*, etc.

Si hay más de diez centenas, se agrupan de diez en diez, y resultan unidades de *cuarto orden*, llamadas *millares*, que se cuentan con los diez primeros números, diciendo: UN *millar* ó *mil*, DOS *mil*, TRES *mil*, etc.

Continuando de este modo se formarían nuevos grupos, cada uno de los cuales valdrá por diez del precedente y se nombrarían por su orden:

decena de millar
centena de millar
millón
decena de millón
centena de millón
millar de millón
decena de millar de millón
centena de millar de millón
billón
decena de billón
centena de billón
millar de billón
decena de millar de billón
centena de millar de billón
trillón

Según se desprende de tan sencillo mecanismo, con las palabras

uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ciento, mil y millón

podemos expresar el número de todas las cosas que ordinariamente ocurre contar, pues basta para esto decir cuántas unidades, decenas, centenas... de cosas hay.

El uso ha introducido, sin embargo, en esta nomenclatura algunas irregularidades, que indicamos á continuación:

En lugar de	se dice
diez y uno	once
diez y dos	doce
diez y tres	trece
diez y cuatro	catorce
diez y cinco	quince

dos dieces.	veinte
tres dieces.	treinta
. . . .	
. . . .	
nueve dieces.	noventa
cinco cientos.	quinientos
siete cientos.	setecientos
nueve cientos.	novecientos.

El sistema de numeración, cuyo mecanismo acabamos de exponer, toma el nombre de *decimal*, porque tiene por base el número diez; esto es, las unidades simples, las decenas, etc., se agrupan de diez en diez, representando las unidades de un orden cualquiera, diez de las unidades del orden precedente.

Si se agruparan de dos en dos, en cuyo caso cada unidad valdría por dos unidades del orden precedente, el sistema de numeración se llamaria *binario;* si se agruparan de tres en tres, *ternario;* si de doce en doce, *duodecimal*, etc.

LECCIÓN III.

Continuación de la numeración,

29. *Numeración escrita.* Por sencilla que sea en su estructura la numeración verbal, se haría difícil y penosa toda operación aritmética con los números representados por palabras, y por esto se ha recurrido á otros signos ó caracteres, con los cuales los números se pueden escribir y combinar de una manera más breve. Estos nuevos signos, llamados *cifras* ó *guarismos,* son los que aparecen á continuación, con los números á que corresponden:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	**dos**	**tres**	**cuatro**	**cinco**	**seis**	**siete**	**ocho**	**nueve**

Estas nueve cifras bastan para expresar todas las unidades, decenas, centenas, etc., que contienen los números, porque en estos números no puede haber nunca más que nueve unidades á lo sumo de un orden cualquiera, toda vez que si hubiera una unidad más de ese orden, resultarían diez unidades del mismo orden, las cuales formarían una unidad del orden inmediato superior, y se expresaría con la cifra *uno*.

Había necesidad, sin embargo, de indicar cuál es la cifra que representa las unidades, cuál las decenas, etc., y para esto se ha convenido en que las cifras se escriban unas á continuación de otras; que la primera, contando de derecha á izquierda, represente las unidades simples ó de primer orden; la segunda, las decenas ó unidades de segundo orden; la tercera, las centenas, y así sucesivamente.

Establecido este principio, es indudable que el número *quinientos setenta y dos mil ciento veintinueve*, compuesto de cinco centenas de millar, siete decenas de millar, dos millares, una centena, dos decenas y nueve unidades, deberá escribirse de esta manera:

572129

Pero como sucede continuamente que muchos números no contienen unidades de cierto orden, á fin de conservar á cada cifra el lugar que debe ocupar, se reemplazan las unidades de que carezca el número con otro signo semejante á la letra O y que se llama *cero*. Así, por ejemplo, si quisiéramos escribir el número *veinte*, como contiene dos decenas, pero carece de unidades, escribiremos en lugar de las primeras un dos, y en lugar de las segundas un cero, y resultará escrito 20.

Del mismo modo, si quisiéramos escribir *ochocientos seis*, observando que las centenas son ocho, que faltan las decenas y que las unidades son seis, escribiendo ocho para las primeras, cero para las segundas y seis para las terceras, resulta 806.

Esto sentado, fácilmente se resolverán las dos cuestiones siguientes:

1.ª *Escribir un número cualquiera*. Como es costumbre enunciar los números empezando por las unidades de orden superior, se escribirá de izquierda á derecha poniendo el guarismo que indique las unidades de cada orden que tiene el número, y ceros en lugar de las que falten, de cualquier orden que sean.

2.ª *Leer un número escrito*. Para facilitar la lectura de los números, conviene agrupar sus cifras de tres en tres, procediendo de derecha á izquierda. El primer grupo de la derecha, representa unidades; el segundo, millares; el tercero, millones; el cuarto, millares de millón, etc. Así, suponiendo el número

35.604.032.440, se leerá:

treinta y cinco mil seiscientos cuatro millones treinta y dos mil cuatrocientos diez.

Para leer los números, se podrían agrupar también sus cifras de seis en seis, en cuyo caso, el primer grupo de la derecha, representa unidades; el segundo, que se debe señalar con un 1 en la parte superior ó inferior de la derecha, representa millones; el tercero, que se señala con un 2, billones, etc.

Si queremos leer, por ejemplo, el número

687430105260472, lo dispondremos así:
$687^2430105^1260472$, ó así:
$687_2430105_1260472$, y leeremos

seiscientos ochenta y siete billones cuatrocientos treinta mil ciento cinco millones doscientos sesenta mil cuatrocientas setenta y dos unidades.

Siempre que un número conste de muchas cifras, conviene esta agrupación para leerlo con más facilidad y para evitar la ofuscación que produce en la vista una prolongada serie de guarismos.

30. Conocida ya la composición de los números, nada más fácil que descomponer en unidades simples el valor de sus diferentes órdenes de unidades.

Suponiendo, por ejemplo, el número 5746, y observando que la primera cifra de la izquierda representa 5 millares ó 5000 unidades simples; la siguiente, 7 centenas ó 700 unidades; la siguiente, 4 decenas ó 40 unidades, y la última 6 unidades, resulta

$$5746 = 5000 + 700 + 40 + 6.$$

Del mismo modo podría descomponerse otro número cualquiera.

31. Como puede notarse en los ejemplos anteriores, las cifras tienen dos valores, á saber: uno *absoluto,* que es el que representa la cifra en sí misma aisladamente considerada, y otro *relativo* que es el que expresa por el lugar que ocupa, ó sea con relación á las demás. Así, en el número 35, por ejemplo, la cifra 3 representa en absoluto tres, y por el lugar que ocupa, 30 unidades.

Añadiendo ceros á la izquierda de un número entero, todas sus cifras conservan el valor relativo que tenían, y por tanto dicho número no cambia de valor. Lo contrario sucedería si se añadieran ceros á la derecha: aumentaría el valor relativo de cada guarismo, y por tanto el valor del número.

32. *Numeración romana.* En la numeración romana los números se expresan por las letras que con sus valores respectivos se indican á continuación:

I.	1.	uno
V.	5.	cinco
X.	10.	diez
L.	50.	cincuenta
C.	100.	ciento
D.	500.	quinientos
M.	1000.	mil.

Los signos de la numeración romana carecen de valor relativo, y por tanto, cualquier número que se escriba con ellos representará la suma de los valores absolutos de todas las letras de que conste. Así, escribiendo todas las letras de la numeración romana de este modo: MDCLXVI, representará el número 1666.

Para escribir un número cualquiera con las expresadas letras, se deberán tener presentes las observaciones siguientes:

1.ª Las letras se escribirán unas á continuación de otras por el orden de sus valores del mayor al menor.

2.ª Una misma letra no se repetirá nunca en un mismo número más de tres veces.

3.ª Anteponiendo una letra á otra de más valor, ésta pierde tanto como vale aquélla.

Hé aquí algunos ejemplos:

4.	IV	68. . . .	LXVIII
6.	VI	90. . . .	XC
16.	XVI	400. . . .	CD
40.	XL	907. . . .	CMVII
60.	LX	1040. . . .	MXL

33. Si se comparan entre sí las diversas clases de numeración de que hemos tratado, se verá que nada hay tan breve como los guarismos para la representación de los números ni tan adecuado para las operaciones del cálculo. La numeración romana, que carece de aplicación en aritmética, se conserva, sin embargo, en uso para indicar las fechas de algunas inscripciones, los capítulos de un libro, las horas de los relojes, etc.

34. Ejercicios prácticos.

1.º Léanse los números siguientes:

80.107	LXI
231.004	XCVII
$1{}_{1}070.056$	CXLII
$200{}_{1}700.061$	DCCIV
$6.080{}_{1}004.962$	CDXLIV
$12{}_{2}900.701{}_{1}400.683$	CMXCVIII
$90.072{}_{2}050.100{}_{1}630.204$	MCCXXXV
$1.000{}_{2}062.000{}_{1}410.030$	MCDXLIV
$3.400{}_{2}560.020{}_{1}809.004$	MDCCLXXXVII

2.° Escríbanse con guarismos los números siguientes:
Ochenta mil uno.
Doscientos un mil cuarenta y tres.
Ochocientos mil siete.
Dos millones treinta mil cuarenta.
Quince millones setecientos mil sesenta y uno.
Doscientos tres millones noventa mil veintiocho.
Mil millones ochocientos mil nueve.
Dos billones quinientos millones sesenta mil cuatro.
3.° Escríbanse con cifras romanas los números siguientes:
Diez y nueve.
Cuarenta y cuatro.
Noventa y siete.
Doscientos cuarenta y cinco.
Cuatrocientos cuarenta y seis.
Setecientos noventa y ocho.
Novecientos noventa y nueve.
Mil cuatrocientos setenta y siete.

LECCIÓN IV.

Adición de números enteros.

35. La *adición es una operación que tiene por objeto hallar un número que exprese por sí solo el valor de varios números.* Los números que se suman se llaman *sumandos,* y el resultado *suma.*

36. La suma de varios números se compone de la suma de las unidades, de las decenas, de las centenas, etc., de estos números, y por tanto, para sumarlos, sumaremos sucesivamente unidades, decenas, centenas, etc.; lo cual se hará con más facilidad si los sumandos se escriben de manera que se correspondan en columnas verticales las cifras que expresen unidades del mismo orden.

Si quisiéramos sumar, por ejemplo, los números 235, 411 y 123, después de escribirlos en la disposición que se vé á continuación y trazar una recta horizontal por debajo del último sumando, diremos: 5 unidades, mas 1, mas 3, son 9 unidades, que se escriben debajo de las unidades; 3 decenas, mas 1, mas 2 son 6 decenas, que se escriben debajo de las decenas; 2 centenas, mas 4, mas 1, son 7 centenas, que se escriben debajo de las centenas, resultando como suma total 769 unidades.

$$\begin{array}{r} 235 \\ 411 \\ 123 \\ \hline 769 \end{array}$$

Siempre que, como sucede en este ejemplo, la suma de cada columna vertical no exceda de 9, será indiferente empezar la operación por la derecha, según lo hemos hecho, ó por la izquierda.

En los demás casos, la operación deberá ejecutarse procediendo de derecha á iquierda, á fin de unir á la suma de las unidades de un orden cualquiera, las que hayan resultado de este mismo orden en la suma de las del orden inmediato inferior.

Ejemplo: Supongamos que se hayan de sumar los números 683, 524 y 795. Ordenados los sumandos como aquí se vé, diremos: 3 unidades, mas 4, mas 5, son 12 unidades. Como 12 unidades componen 1 decena y 2 unidades, estas 2 unidades se escriben debajo de las unidades, y la decena se sumará con las decenas, diciendo: 1 decena, mas 8, mas 2, mas 9, son 20 decenas. Como 20 decenas componen 2 centenas y no queda ninguna decena, pondremos un cero debajo de las decenas, y continuaremos así: 2 centenas, mas 6, mas 5, mas 7, son 20 centenas, que componen 2 millares. Escribiremos cero debajo de las centenas y 2 en el lugar de los millares, y resultarán 2002 unidades, que expresa el valor de todos los sumandos, porque es la suma de todas las unidades, decenas, etc., que contienen dichos sumandos.

$$\begin{array}{r} 683 \\ 524 \\ 795 \\ \hline 2002 \end{array}$$

El mismo orden se seguirá en la adición de todos los números enteros.

37. Si se quiere indicar simplemente que varios números deben sumarse, se escriben estos números unos á continuación de otros, separándolos por el signo de esta operación en la forma siguiente:

$$405 + 38 + 1040 + 7$$

38. Como el valor de la suma se compone del de todos los sumandos, es indudable que si aumenta ó disminuye uno de estos sumandos, aumentará ó disminuirá la suma, y que si un sumando aumenta ó disminuye en tanto como disminuye ó aumenta otro sumando, la suma no sufrirá alteración alguna.

39. Se llama prueba de una operación, otra operación que se hace para conocer si la primera está bien ejecutada. La prueba ofrecerá ventajas verdaderas si se apoya en una operación más sencilla, y en la cual las equivocaciones sean menos probables que en la que se quiera probar. Ninguna de las pruebas que se aplican en la adición presenta semejante carácter, y por esto, para probar una suma, lo mejor será repetir la operación, si bien invirtiendo el orden, de modo que si la primera vez se ha sumado de arriba abajo, en la segunda se suma de abajo arriba, por cuyo medio se rectifican fácilmente los errores que puedan haberse cometido.

40. Entre todas las operaciones, la adición es la que todos aplicamos con más frecuencia. Continuamente se cuentan las monedas y toda clase de objetos, y es indudable que cuando contamos las cosas, sumamos.

41. La *sustracción* de números enteros *es una operación que tiene por objeto hallar la diferencia que hay entre dos números*. También se puede decir que *la sustracción tiene por objeto hallar uno de los dos sumandos de que se compone una suma, conociendo esta suma y el otro sumando*. La suma dada se llama *minuendo;* el sumando dado, *sustraendo;* y el desconocido, *resta* ó *diferencia*.

Claramente se ve por la segunda definición, y conviene tener presente:

1.° Que el término mayor de la sustracción es el minuendo.

2.° Que si se suman sustraendo y diferencia, resulta el minuendo.

42. Si se quiere restar un número de otro que no exceda de 20, la resta se hace de memoria sin necesidad de escribirlos, pues para esto, basta la práctica adquirida hasta por los que estén menos ejercitados en el cálculo. Así, empleando el lenguaje comunmente adoptado para la práctica de esta operación, fácilmente hallará cualquiera, que de 3 á 7 van 4; que de 5 á 13 van 8, etc.

43. Si los números que se han de restar tienen dos ó más cifras, convendrá escribirlos y proceder en el orden que vamos á explicar.

Supongamos que del número 8864 se haya de restar 2323. Escribiremos el minuendo y debajo el sustraendo, tirando una recta por la parte inferior de éste, según se vé á continuación. Como en este caso todas las cifras del minuendo representan más unidades que las cifras correspondientes del sustraendo, será indiferente hacer la resta de derecha á izquierda ó de izquierda á derecha. Empezando

$$\begin{array}{r} 8864 \\ \underline{2323} \\ 6541 \end{array}$$

por la derecha diremos: De 3 á 4 vá 1, que escribo debajo de las unidades; de 2 á 6 van 4, que se ponen debajo de las decenas; de 3 á 8 van cinco, que se escriben debajo de las centenas; y de 2 á 8 van 6, que se escriben debajo de los millares. Si empezáramos por la izquierda, restando: de 2 á 8, de 3 á 8, de 2 á 6 y de 3 á 4, obtendríamos el mismo resultado, ó sea 6541.

44. Si alguna cifra del sustraendo representara más unidades de un orden cualquiera que la correspondiente del minuendo, es conveniente empezar por la derecha, para evitar la incesante rectificación de cada resta parcial. Supongamos que del número 7436 se haya de restar 2568. Escribiendo como en el caso anterior minuendo y sustraendo, de modo que se correspondan las unidades de cada orden, empezaremos por las unidades simples; mas como 8 unidades no pueden restarse de 6, tomaremos una decena de las 3 del minuendo, la descompondremos en diez unidades, las agregaremos á las 6 unidades y resultarán 16, por lo que diremos: de 8 á 16 van 8, que se ponen debajo de las unidades.

$$\begin{array}{r} 7436 \\ 2568 \\ \hline 4868 \end{array}$$

Las 6 decenas del sustraendo, tampoco se pueden restar de las 2 que quedan en el minuendo, pero tomando una centena y descomponiéndola en 10 decenas, las agregaremos á las 2 decenas que quedaban en el minuendo, resultarán 12, y diremos: de 6 á 12 van 6, que se escriben debajo de las decenas.

Las 5 centenas del sustraendo no pueden restarse de las 3 que quedan en el minuendo, y por esto tomaremos un millar, lo descompondremos en 10 centenas, las agregaremos á las tres que quedaban, resultarán 13, y diremos: de 5 á 13 van 8, que se escriben debajo de las centenas.

Por último, restando los dos millares de los 6 que quedan en el minuendo, resultan 4, que se ponen debajo de los millares, y obtendremos 4868, resta verdadera, por ser la diferencia entre las unidades, las decenas, las centenas, etc., del minuendo y sustraendo.

Siempre que para restar unidades de un orden cualquiera se tome en el minuendo una unidad del orden inmediato superior, será lo mismo considerar de menos esta unidad en la cifra de donde se ha tomado, que añadirla á su correspondiente del sustraendo. Esto último es lo que más se acostumbra en la práctica; y así, en el ejemplo anterior restaríamos de esta manera:

De 8 á 16 van 8 y se lleva 1.
1 y 6 son 7: de 7 á 13 van 6 y llevo 1.
1 y 5 son 6: de 6 á 14 van 8 y llevo 1.
1 y 2 son 3: de 3 á 7 van 4.

Por lo dicho anteriormente se comprende que cuando alguna cifra del minuendo sea cero, para restar se debe considerar como 10.

45. Si el minuendo es la unidad seguida de ceros, la sustracción se ejecutará con más prontitud, restando de 10 la primera cifra significativa de la derecha del sustraendo, y todos los demás de 9.

Para restar, por ejemplo, 3486 de 10000, diríamos: de 6 á 10 van 4; de 8 á 9 va 1; de 4 á 9 van 5; de 3 á 9 van 6.

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 3486 \\ \hline 6514 \end{array}$$

Del mismo modo, para restar 57.600 de 100.000, como son ceros las dos primeras cifras de la derecha del sustraendo, se escriben debajo de éste dos ceros y restando de 10 la primera cifra significativa que es 6, y las demás de 9, diríamos: de 6 á 10 van 4; de 7 á 9 van 2, y de 5 á 9 van 4.

$$\begin{array}{r} 100000 \\ 57600 \\ \hline 42400 \end{array}$$

46. Se llama *complemento aritmético* de un número el resultado de restarlo de la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el número. En el ejemplo anterior, el complemento aritmético de 3486 es 6514. Para hallar el complemento aritmético de un número, restaremos de 10 el primer guarismo de la derecha de este número, y los demás de 9.

47. Para probar la sustracción se suma el sustraendo con la diferencia. Si el resultado es igual al minuendo, la operación estará bien ejecutada, y nó en el caso contrario (41, 2.°)

De la naturaleza de la sustracción se deduce claramente que si aumentáramos el minuendo en una cantidad cualquiera, la resta aumentaría en la misma cantidad, y si aumentáramos el sustraendo, disminuiría la resta. En consecuencia, si se aumentan y disminuyen minuendo y sustraendo, en una misma cantidad, la resta no se altera.

Del mismo modo, si disminuímos el minuendo en una cantidad cualquiera, la resta disminuirá, y si disminuímos el sustraendo, la resta aumentará. De consiguiente, si se disminuyen en una misma cantidad minuendo y sustraendo, la resta no sufre alteración alguna.

48. La resta tiene también frecuentes aplicaciones en el cálculo. Si debiendo, por ejemplo, una cantidad, se satisface parte de ella y se quiere saber cuánto se debe aún; ó si conociendo el importe de una obra y el dinero con que se cuenta, se desea saber cuánto dinero falta ó sobra, aplicaremos dicha operación, así como en todos los demás casos en que se busque la diferencia de dos números.

49. Ejercicios y problemas.

1.° Sumar los números 30.608 + 9.705 + 80 + 143 + 60 + 972.

2.° Idem 5.046 + 100 + 2.000 + 11.000 + 7 + 409 + 63.811 + 72.

3.° Restar de 12.006 el número 7834.

4.° Idem de 10.000 el número 3.826.

5.° Hallar el complemento aritmético de 52.

6.° Idem el de 45.807.

7.° *Se compran tres cajas de azúcar que pesan respectivamente 35 kg., 48 kg. y 52 kg. Suponiendo que la madera de las cajas pese 4 kg., 7 kg. y 8 kg., cuánto peso queda de azúcar? (116 kg.)* (1).

8.° *En un almacén había 50.000 tablas y se sacaron por una parte 15.308, por otra 6.430 y por otra 15.142. Cuántas tablas quedan? (15.120).*

9.° *Una persona que nació en el año 1819, qué edad tenía en el año 1878? (59 años).*

10. *Un ganadero compró por una parte 240 carneros y por otra 372, y vendió 408. Cuántos carneros le quedan? (264).*

11. *Para esterar una casa se necesitan 219 metros de estera, y se compran 3 rollos de estera de 83 metros uno, de 74 otro y de 52 otro. Cuántos metros faltan? (10).*

(1) El peso de las cajas, sacos, etc., en que se envuelven los géneros, se llama *tara*.

LECCIÓN V.

Multiplicación de números enteros.

50. La *multiplicación de dos números enteros tiene por objeto hacer uno de estos dos números tantas veces mayor como unidades tiene el otro.* Así, multiplicar 9 por 5 es hacer cinco veces mayor el número 9, ó tomarlo cinco veces por sumando.

Cualesquiera que sean los números que se multipliquen, el primero se llama *multiplicando;* el segundo *multiplicador;* los dos á la vez *factores,* y el resultado *producto.*

51. Como no se multiplican solamente los números enteros, sino también otras clases de números, deberá darse de esta operación una definición general que convenga á todos los casos, como sucede con la siguiente: *La multiplicación de dos números tiene por objeto hallar un tercer número* (el producto) *que sea respecto de uno de los números dados* (el multiplicando) *lo que el otro número* (el multiplicador) *es respecto de la unidad.*

Cualesquiera que sean los números que se multipliquen, infiérese de esta definición que la relación que hay entre el producto y el multiplicando es igual á la que hay entre el multiplicador y la unidad; de modo que si el multiplicador es duplo, triplo, mitad, tercio, etc., de la unidad, el producto será duplo, triplo, mitad, tercio, etc. del multiplicando.

52. El producto de un número por otro se podrá hallar siempre por medio de la adición, repitiendo uno de ellos tantas veces por sumando como unidades tenga el otro. Así, para multiplicar 7 por 3, tomaríamos tres veces el siete por sumando, y resultaría

$$7\times 3=7+7+7=21.$$

53. Pero el cálculo se haría de este modo penoso é interminable cuando el multiplicador constara de muchas unidades, y por esto se hace uso de la multiplicación, que nos da con más prontitud y sencillez el resultado.

Para la práctica de esta operación en las diversas cuestiones que comprende, conviene saber multiplicar de memoria dos cualesquiera de los nueve primeros números. La siguiente tabla, llamada de *Pitágoras*, encierra todos los productos que resultan de multiplicar uno por otro dos cualesquiera de dichos números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Trataremos ahora los casos que pueden ocurrir en la multiplicación de números enteros.

54. *Primer caso.*—El multiplicando tiene una sola cifra y el multiplicador otra. En este caso la multiplicación se resuelve de memoria por la tabla precedente, sin necesidad de escribir los factores.

55. *Segundo caso.*—El multiplicando tiene varias cifras y el multiplicador una sola. Supongamos que se haya de multiplicar 685 por 4.

Si escribiéramos el 685 cuatro veces en forma de adición, como aquí se ve, en lugar de decir: 5 y 5 son 10; 10 y 5 son 15; 15 y cinco son 20, diremos: 4 veces 5 son 20, y escribiendo cero en lugar de las unidades, retendremos en la memoria las dos decenas que han resultado. Pasando á la columna de las decenas, en vez de sumarlas 8 á 8, diremos: 4 veces 8 son 32, que

$$\begin{array}{r} 685 \\ 685 \\ 685 \\ 685 \\ \hline 2740 \end{array}$$

con las dos decenas retenidas, componen 34. Escribiremos 4 decenas en su lugar correspondiente y retendremos 3 centenas. Por último, pasando á las centenas, en vez de sumarlas 6 á 6, diremos: 4 veces 6 son 24, que con las tres retenidas componen 27, ó sea 7 centenas y 2 millares, que se escriben en sus lugares respectivos, resultando 2740.

Haciendo la operación de este modo, se vé que es inútil escribir cuatro veces el multiplicando. Escribiéndolo una sola vez, poniendo debajo el multiplicador, trazando una recta horizontal por la parte inferior de éste según aquí se vé, tomaremos las unidades, las decenas y las centenas tantas veces como indica el multiplicador, reteniendo en cada producto parcial las unidades que resulten del orden inmediato superior para agregarlas al producto siguiente.

$$\begin{array}{r} 685 \\ 4 \\ \hline 2740 \end{array}$$

56. *Tercer caso.*—El multiplicando es un número entero cualquiera y el multiplicador es la unidad seguida de ceros.

Si se añade un cero á la derecha de un número entero, sus unidades se convierten en decenas; sus decenas en centenas, etc.; y como de este modo cada una de las partes del número se hace 10 veces mayor, el número se hará 10 veces mayor, ó quedará multiplicado por 10.

Si en lugar de un cero añadimos dos, las unidades se convierten en centenas; las decenas en millares, etc.; y haciéndose 100 veces mayor cada parte del número, este número se hará 100 veces mayor, ó quedará multiplicado por 100.

De modo, que para multiplicar un número por 10, 100, 1.000, etcétera, ó sea por la unidad seguida de ceros, bastará añadir á la derecha de este número tantos ceros como acompañen á la unidad. Así:

$$8 \times 10 = 80;\ 75 \times 100 = 7.500;\ 36 \times 1000 = 36000.$$

57. *Cuarto caso.*—El multiplicando es cualquier número entero, y el multiplicador es una de las cifras 2, 3, 4......9, seguida de uno ó más ceros. Sea el multiplicando 18 y el multiplicador 20.

En esta multiplicación, en lugar de tomar el 18 veinte veces por sumando, podríamos formar 10 grupos de á 2 sumandos, y como cada grupo valdría 2 veces 18 ó 36, los 10 grupos valdrían 36×10 ó 360 (56).

Si se hubiera de multiplicar 536 por 700, discurriendo como en el caso anterior, en lugar de tomar el 536 setecientas veces por sumando, haríamos 100 grupos de 7 sumandos, y como cada grupo valdría 536×7 ó 3752, los 100 grupos valdrían $3752 \times 100 = 375200$.

De estos ejemplos se infiere que para multiplicar un número entero por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica dicho número por la cifra significativa, y á la derecha del producto se escriben los ceros del multiplicador. Hé aquí algunos ejemplos:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 20 \\ \hline 360 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 536 \\ 700 \\ \hline 375200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67 \\ 4000 \\ \hline 268000 \end{array}$$

58. *Quinto caso.*—El multiplicando tiene varias cifras y el multiplicador también.

Sean los números 3629 y 457.

En esta multiplicación debemos tomar 457 veces el número 3629; lo cual equivale á tomarlo primero 7 veces, después 50 veces, y por último 400 veces.

Descomponiendo de este modo la multiplicación y aplicando la regla anterior, haríamos las tres multiplicaciones siguientes:

$$\begin{array}{r} 3629 \\ 7 \text{ veces} \\ \hline 25403 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3629 \\ 50 \text{ veces} \\ \hline 181450 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3629 \\ 400 \text{ veces} \\ \hline 1451600 \end{array}$$

Sumando ahora los tres resultados

$$\begin{array}{r} 25403 \\ 181450 \\ 1451600 \\ \hline 1658453 \end{array}$$

sacaríamos como producto 1.658.453

Mas como los ceros que resultan á la derecha del segundo y tercer sumando son innecesarios, pueden omitirse, y en este caso la cuestión queda reducida á multiplicar todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, empezando por las unidades y cuidando de que la primera cifra de la derecha de cada producto parcial quede debajo de la cifra correspondiente del multiplicador; para lo cual dispondremos la multiplicación de esta manera:

$$\begin{array}{rl} 3629 & \text{Multiplicando} \\ 457 & \text{Multiplicador} \\ \hline 25403 & \\ 18145 & \left.\right\} \text{Productos parciales} \\ 14516 & \\ \hline 1658453 & \text{Producto total.} \\ \hline \end{array}$$

59. La multiplicación se prueba generalmente, y esto es quizá lo más seguro, repitiendo dos ó más veces la operación.

60. Las aplicaciones de la multiplicación pueden resumirse en las siguientes:

1.ª Conociendo el valor de una unidad hallar el valor de varias.

2.ª Reducir unidades de especie superior á inferior.

3.ª Hacer un número cierto número de veces mayor.

61. *Ejercicios.*—Ejecútense las multiplicaciones siguientes:

1.ª 75 × 6	5.ª 832 × 400
2.ª 38 × 10	6.ª 1086 × 6000
3.ª 125 × 100	7.ª 356 × 127
4.ª 2476 × 30	8.ª 1438 × 2392

62. *Problemas.*—Resuélvanse los siguientes:

1.° *Si un metro de alfombra vale 15 pesetas, cuánto valdrán 98 metros? (1470)*

2.° *Si en un día se gastan 16 litros de vino, cuántos se gastarán en 40 días? (640)*

3.° *Cuántos meses tienen 38 años? (456)*

4.° *Un comerciante compra 365 decalitros de arroz por 1840 pesetas y lo vendió á 6 pesetas el decalitro. Cuánto dinero ganó (350)*

5.° *Gana uno diariamente 7 pesetas y gasta anualmente 912 pesetas en alimentos, 208 en vestidos y 80 en otras necesidades. Cuánto dinero ahorra al año? (1355)*

6.° *15 jornaleros trabajaron por 15 días en una obra, ganando cada uno 2 pesetas diarias. Cuánto importan todos los jornales? (450)*

7.° *Un comerciante recibió 2.100 kilogramos de azúcar que valía á 5 reales el kilogramo y dió en cambio 187 libras de café que valía á 14 reales. Cuánto dinero debe abonar ó recibir este comercionte? (Debe abonar 7882)*

LECCIÓN VI.

Cantidades literales.—Igualdades.—Operaciones con las igualdades.—Propiedades de la multiplicación.

63. Se llama *cantidad literal* toda cantidad representada por una ó más letras. Las cantidades representadas por medio de letras pueden expresar un valor cualquiera. Con la letra *a*, por ejemplo, designamos cuatro, cincuenta y dos, seis y medio, ocho décimas, y en general la cantidad que se quiera. En las cantidades expresadas por guarismos podemos prescindir del valor específico y los números que la representan serán *abstractos,* pero en las cantidades que se representan por medio de letras no sólo podemos prescindir del valor específico, sino también del numérico. El número *b* puede expresar pesetas, años, etc., relativamente á la especie, y en cuanto al valor puede ser 5, 80, 7043, etcétera. Las cantidades literales son por tanto doblemente abstractas que las cantidades numéricas. Conviene designar las cantidades por medio de letras cuando reviste cierta generalidad el cálculo, siéndonos indiferentes en tal caso los valores específico y numérico de tales cantidades.

Con las cantidades literales se ejecutan las mismas operaciones que con las numéricas.

64. Se llama *igualdad* la separación de dos cantidades iguales por medio del signo *igual* (=). La cantidad escrita á la izquierda de dicho signo se llama *primer miembro* de la igualdad, y la de la derecha *segundo miembro.*

65. Con varias igualdades se pueden practicar también la adición, sustracción, multiplicación y división.

Para sumar varias igualdades se suman los primeros miembros, después los segundos y se pone entre las dos sumas el signo de igualdad.

Para restarlas se restan los primeros miembros, después los segundos y se pone entre las dos restas el signo de igualdad.

Para multiplicarlas ó dividirlas se multiplican ó dividen los primeros miembros, luego los segundos y entre los productos ó cociente se pone dicho signo.

Ejecutando las cuatro operaciones con las igualdades

$$a = b$$
$$c = d$$

resultarán estas cuatro igualdades

$$a + c = b + d$$
$$a - c = b - d$$
$$a \times c = b \times d$$
$$a : c = b : d$$

Fúndase esto en los axiomas 4.° y 5.° enunciados en el número 8.

66. El producto de una suma de varios números multiplicada por un número, es igual á la suma de los productos parciales de cada sumando multiplicado por el multiplicador. Así

$$(8 + 12 + 15) \times 6 = 8 \times 6 + 12 \times 6 + 15 \times 6$$

Como multiplicar $8 + 12 + 15$ por 6 es hacer 6 veces mayor la suma, esto se logrará indudablemente haciendo 6 veces mayor cada uno de los sumandos.

Una suma indicada se podrá multiplicar de dos maneras: se suman los sumandos y se multiplica la suma por el multiplicador; ó se multiplica cada sumando por el multiplicador y se suman los productos.

67. Si se quisiera multiplicar la diferencia entre dos números haríamos la resta de estos números y multiplicaríamos el resultado por el multiplicador; ó bien multiplicaríamos por éste el minuendo y el sustraendo y restaríamos los productos. Suponiendo que se haya de multiplicar la diferencia entre 17 y 9 por el número 5, multiplicaremos $(17 - 9) \times 5$; ó bien $17 \times 5 - 9 \times 5$.

El número que multiplica á otros números se llama *factor común*.

68. Separar el factor común es escribirlo una sola vez fuera del paréntesis en el cual se hallen encerrados los números que se hayan de multiplicar.

Así, las operaciones $4 \times 7 + 11 \times 7 + 28 \times 7$, separando el factor común se escribirían con más brevedad de este modo: $(4 + 11 + 28) \times 7$.

69. El producto indicado de varios factores quiere decir que el primero se multiplique por el segundo; el producto que resulte por el tercero, y así sucesivamente. De modo que en el producto $6 \times 8 \times 4 \times 2$, multiplicaremos 6×8; el producto 48 lo multiplicaremos por 4, y el producto 192 por 2.

70. Un producto de dos factores no se altera si se invierte el orden de estos factores.

Así: $2 \times 3 = 3 \times 2$.

En efecto, como $2 = 1 + 1$, si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por 3, resultará

$$2 \times 3 = 1 \times 3 + 1 \times 3; \text{ ó}$$
$$2 \times 3 = 3 + 3, \text{ ó por fin}$$
$$2 \times 3 = 3 \times 2.$$

El mismo razonamiento se haría tomando otros factores cualesquiera.

En virtud de este principio podemos simplificar la multiplicación tomando por multiplicando el factor que tenga menos guarismos, con lo cual resultarán menos productos parciales y se facilitará la suma de los mismos.

71. Un producto de varios factores no se altera cambiando el orden de estos factores. Sea el producto $5 \times 8 \times 7 \times 4$.

En virtud del principio anterior, podrán mudarse los dos primeros factores, y resultará

$$5 \times 8 \times 7 \times 4 = 8 \times 5 \times 7 \times 4$$

También podrán mudarse en el segundo miembro los factores 5 y 7, y resultará

$$8 \times 5 \times 7 \times 4 = 8 \times 7 \times 5 \times 4$$

Si se continúa cambiando la colocación de dos factores consecutivos, es indudable que cada factor llegará á ocupar el lugar que se quiera respecto de los demás, sin alterarse por esto el producto.

72. Si se multiplica uno de los factores de un producto por un número, el producto queda multiplicado por el mismo número.

Suponiendo que en el producto $6 \times 8 \times 3$ multipliquemos por 5 el factor 8, resultará $6 \times 8 \times 5 \times 3$ pero (74)

$$6 \times 8 \times 5 \times 3 = 6 \times 8 \times 3 \times 5 = (6 \times 8 \times 3) \times 5$$

En consecuencia, para multiplicar un producto de varios factores por un número, basta multiplicar uno de dichos factores.

73. En la multiplicación de los números *concretos* debe entenderse que el multiplicador es siempre un número abstracto que indica las veces que ha de tomarse el multiplicando. Así, suponiendo que se quiera hallar el valor de 95 hectolitros de trigo á 23 pesetas, el número 95, verdadero multiplicador en el caso presente, indica simplemente que las 23 pesetas deben tomarse 95 veces.

LECCIÓN VII.

Multiplicaciones abreviadas de números enteros.

74. Suponiendo que se haya comprendido bien, así el método ordinario de la operación de multiplicar, como la numeración decimal, base fundamental de la Aritmética, interesa mucho el estudio de las multiplicaciones abreviadas, al menos en algunos de los muchos casos en que pueden hacerse, no sólo para economizar en la práctica tiempo y trabajo, y para facilitar el cálculo mental, de que nos vemos precisados á hacer uso continuamente

en la resolución de problemas comunes, sino también para consolidar más el conocimiento de la numeración y para familiarizarse con la composición, descomposición y manejo de los números en general.

75. Entre las muchas multiplicaciones que se pueden ya abreviar, ya cambiar de forma para hacerlas de memoria, solamente consideraremos los casos siguientes:

1.° *Multiplicar un número entero por otro que acaba en ceros.*

Sea el número 2346 multiplicado por 3500. Razonando como en el número 57 se observará que para hacer esta multiplicación basta multiplicar el 2346 por 35 y añadir dos ceros á la derecha del producto, y resulta 8.211.000, que es el producto verdadero.

$$\begin{array}{r} 2346 \\ 35 \\ \hline 11730 \\ 7038 \\ \hline 8211000 \end{array}$$

2.° *Multiplicar por un número entero cualquiera otro número acabado en ceros.*

Sea 4800 por 52.

Para hallar el producto podríamos tomar 52 veces por sumando el número 4800, y es indudable que la suma estaría terminada por dos ceros y que las cifras restantes formarían un número igual á 52 veces 48. Por lo tanto, bastará multiplicar 48 por 52 y añadir dos ceros á la derecha del producto, disponiendo la operación de esta manera:

$$\begin{array}{r} 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ 4800 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 52 \\ \hline 96 \\ 240 \\ \hline 249600 \end{array}$$

De este caso y del anterior puede deducirse como regla general que *si el multiplicando, ó el multiplicador, ó los dos á la vez, terminaran en ceros, deberán multiplicarse solo las cifras significativas, y añadir á la derecha del producto tantos ceros como tengan á la derecha los dos factores.*

3.° *Multiplicar un número entero por otro, entre cuyas cifras significativas haya uno ó más ceros.*

Sea el número 2524 multiplicado por 7005.

El multiplicando se ha de tomar por una parte 5 veces y por otra 7000 veces.

Para tomarlo 5 veces, lo multiplicamos por 5 y resultan 12620. Para tomarlo 7000 veces, lo multiplicaríamos por 7 y añadiríamos tres ceros á la derecha del producto 17668; pero como este producto se ha de sumar con el anterior y dichos tres ceros son innecesarios para la suma, los omitimos dejando en blanco los lugares que deberían ocupar. Haciendo por último la suma, resulta 17680620.

$$\begin{array}{r} 2524 \\ 7005 \\ \hline 12620 \\ 17668 \\ \hline 17680620 \end{array}$$

De modo que, en general, para resolver la multiplicación en el caso que consideramos, se prescinde de los ceros del multiplicador, cuidando de escribir la primera cifra de la derecha de cada producto parcial, debajo de la cifra correspondiente del multiplicador, como se vé en el ejemplo anterior.

4.° *Multiplicar un número por otro, cuyas cifras sean todas nueves.*

Se ha de multiplicar, por ejemplo, 253 por 99. En esta multiplicación entra cien veces menos una por sumando el número 253. Si lo tomáramos 100 veces, resultaría 25300, y si de aquí restamos ahora 253, la diferencia 25047 contendrá 99 veces á 253, ó será el producto de 253 por 99.

Si fuera 253 × 999, añadiendo á 253 tres ceros, el resultado 253000 contendría 1000 veces á 253; pero si de este resultado restamos 253, la diferencia 252747 contendrá solo 999 veces á 253, y será por tanto el producto de 253 × 999.

Claramente se deduce de lo expuesto que *para multiplicar un número entero por otro compuesto de nueves, se añaden á la derecha de dicho número tantos ceros como nueves tenga el multiplicador, y del número que resulte, se resta el multiplicando.*

5.° *Multiplicar un número por 11, 12, 13.....19.*

Se escribe el multiplicando; debajo de este, pero corriéndolo un lugar hacia la derecha, se escribe el producto del multiplicando por las unidades del multiplicador, y se suman por último ambos números.

Así, suponiendo que se hayan de hacer las multiplicaciones 45 × 12, 83 × 15, 246 × 19, dispondremos el cálculo de esta manera:

$$\begin{array}{r} 45 \\ 90 \\ \hline 540 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 83 \\ 415 \\ \hline 1245 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 246 \\ 2214 \\ \hline 4674 \end{array}$$

Los productos son respectivamente 540, 1245 y 4674.

En efecto, si se multiplica un número por 2, 3, 4... 9, se hace 2, 3, 4.... 9 veces mayor; y si al mismo tiempo se suma dicho número como decenas, se hace por otra parte 10 veces mayor;

de modo que resultará diez y dos, diez y tres, diez y cuatro.... diez y nueve veces mayor, ó quedará multiplicado por 12, 13, 14.... 19.

6.° *Multiplicar un número entero por 21, 31, 41.... 91.*

En este caso se escribe el multiplicando; debajo y corriéndolo un lugar hacia la izquierda, se escribe el producto del multiplicando por las decenas del multiplicador y se efectúa la suma.

Suponiendo las multiplicaciones 57 × 21, 272 × 31, 506 × 91, dispondremos el cálculo como sigue:

57	272	506
114	816	4554
1197	8432	46046

Los productos son respectivamente 1197, 8432, 46046.

Para comprender mejor lo que se ha hecho, fijémonos en el primer ejemplo. El número 1197 es la suma de dos sumandos. El segundo 114, como producto del 57 por 2 es duplo de 57, y considerado como decenas por el lugar que ocupa en la suma es á la vez décuplo de 57; y por tanto el 114 representa el producto de 57 por 20. Si sumamos ambos números, la suma 1197 contendrá veinte veces mas una vez á 57, y será en consecuencia el producto de 57 por 21.

El mismo razonamiento haríamos en los otros ejemplos.

7.° *Multiplicar un número por 5, 25, 125, etc.*

Para multiplicar un número por 5 se añade un cero á su derecha, con lo cual queda multiplicado por 10, y como el producto resulta duplo que el verdadero, se toma la mitad.

Para multiplicar por 25, se multiplica por 100, añadiendo dos ceros á la derecha, y como resulta un producto cuádruplo del verdadero, se toma la cuarta parte.

Para multiplicar por 125, se multiplica por 1000 y se toma la 8.ª parte del producto.

En general, como quiera que la multiplicación resulta más fácil si uno de los dos factores acaba en ceros, cuando queramos hacer de memoria una multiplicación de enteros, descompondremos el multiplicando ó el multiplicador en dos sumandos tales, que uno de ellos acabe en uno ó más ceros, lo cual siempre es posible, y resolveremos con menos trabajo la operación. Así, suponiendo que se quiera multiplicar 25 por 42, como 42 equivale á 40 + 2, multiplicaremos 25 por 40 y 25 por 2, y sumando los productos 1000 y 50, resultan 1050 (66).

Del mismo modo para multiplicar 64 por 204, podríamos multiplicar 64 por 200 y por 4, y sumando los productos 12800 y 256 saldrían 13056; etc.

76. *Ejercicios.*—Hállense abreviadamente, y cuando sea posible de memoria, los productos de las multiplicaciones siguientes:

1. . .	108 × 20	12. . .	708 × 999
2. . .	45 × 300	13. . .	1506 × 9999
3. . .	60 × 5	14. . .	148 × 15
4. . .	800 × 25	15. . .	207 × 19
5. . .	30 × 40	16. . .	343 × 31
6. . .	70 × 80	17. . .	508 × 61
7. . .	90 × 90	18. . .	1042 × 91
8. . .	400 × 500	19. . .	168 × 25
9. . .	1300 × 200	20. . .	43 × 125
10. . .	3005 × 2007	21. . .	7006 × 5
11. . .	617 × 99	22. . .	894 × 25

LECCIÓN VIII.

División de números enteros.

77. *La división de enteros tiene por objeto hallar las veces que un número contiene á otro.* El primero se llama *dividendo;* el segundo, *divisor;* ambos á la vez *términos* de la división, y el resultado de la operación, *cociente.* Si dividimos, por ejemplo, 40 por 5, el 40 contiene 8 veces al 5; 40 será el dividendo, 5 el divisor y 8 el cociente.

78. En términos más generales, *la división tiene por objeto hallar uno de los dos factores de que se compone un producto, conociendo este producto y el otro factor; definición aplicable, no sólo á los números enteros,* sino á toda clase de números. En este caso el dividendo será el producto dado; el divisor, el factor conocido, y el cociente, el factor desconocido. Por tanto, *el dividendo es igual al producto del divisor multiplicado por el cociente.*

79. La división de enteros, se dice que es *exacta* si el dividendo contiene un número justo de veces al divisor, y en caso contrario se llama inexacta. Así, 36 dividido por 9, es una división exacta; 45 dividido por 7 es una división inexacta.

Si la división es inexacta, se llama *cociente entero* el mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor, y *residuo,* la diferencia que hay entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero. Dividiendo 45 por 7, el cociente entero será 6 y el resíduo 3. *En la división inexacta el dividendo se compone del producto del divisor por el cociente entero mas el resíduo.*

La división de enteros comprende los tres casos que vamos á tratar.

80. *Primer caso.*—El dividendo consta de una ó dos cifras, el divisor de una y el cociente también de una. La división se resuelve en este caso de memoria sabiendo la tabla Pitagórica de la multiplicación, pues por medio de esta tabla, se hallará con facilidad el cociente, que deberá ser (78) un número que multiplicado por el divisor, dé el dividendo.

Si se quiere dividir, por ejemplo, 45 por 9, observaremos inmediatamente con el auxilio de dicha tabla, que el divisor 9 deberá multiplicarse por 5 para obtener el dividendo 45 y que por ello el cociente es 5. Del mismo modo hallaríamos que 56 entre 8 cabe á 7 ó que la octava parte de 56 son 7; que 67 entre 7 cabe á 9 y sobran 4 ó que la séptima parte de 67 son 9 y sobran 4, etc.

81. *Segundo caso.*—El dividendo y el cociente tienen varias cifras y el divisor una sola.

Supongamos que se haya de dividir el número 45628 por 7. Dividiremos estos números colocándolos al efecto en la disposición que aquí se ve, razonando al mismo tiempo la operación, para la cual podrá luego establecerse fácilmente una regla general.

Habiéndose de hacer 7 partes del número 45628 y constando este número de decenas de millar, millares, centenas, decenas y unidades, es indudable que sacando la séptima parte de estos diferentes órdenes de unidades, obtendremos el cociente.

```
45628 | 7
 36   |-----
  12  | 6518
   58
    2
```

Como las decenas de millar del número dado no llegan á 7, que son las partes en que deben dividirse, las consideraremos reducidas á millares y serán 40, que con los 5 millares que hay en el dividendo componen 45. Dividiendo 45 por 7, resultan 6 millares de cociente, los cuales se escriben debajo del divisor, y sobran 3 millares, que se escriben debajo de los millares del dividendo. Estos 3 millares componen 30 centenas, y añadiendo las 6 que contiene el dividendo, resultan 36 centenas. Partiendo estas 36 centenas por 7, salen 5 centenas de cociente, las cuales se escriben á continuación de los millares debajo del divisor, y sobra 1 centena, que se escribe debajo de las centenas del dividendo. Esta centena compone 10 decenas, que con las 2 decenas del dividendo hacen 12 decenas. Dividiéndolas por 7, resulta 1 decena de cociente, la cual se escribe en el mismo, á continuación de las centenas, y sobran 5 decenas. Estas 5 decenas equivalen á

50 unidades, que con las 8 del dividendo hacen 58. Partiendo 58 por 7, resultan 8 unidades de cociente, que se escriben á continuación de las decenas del mismo, y sobran 2 unidades que constituyen el residuo de esta división. El verdadero cociente será, pues, 6518.

Infiérese de lo expuesto que para dividir un número por otro que tenga una sola cifra, se escribe el dividendo; á la derecha, separado por medio de una línea vertical, el divisor, debajo del cual se trazará una línea horizontal para separarlo del cociente. Se toma la primera cifra de la izquierda del dividendo, si es mayor que la del divisor, ó las dos primeras si fuera menor, y se ejecuta la división como en el primer caso. Se escribe el cociente que resulte debajo del divisor y multiplicándolo por éste, se resta el producto de la primera ó dos primeras cifras del dividendo. A la derecha de la resta, se agrega la cifra siguiente del dividendo, y el número que resulte, se parte por el divisor. El cociente se escribe debajo del divisor, se multiplica por éste, y el producto se resta del anterior dividendo parcial. A la derecha de la resta se agrega la cifra siguiente del dividendo, y se continúa así hasta terminar la operación.

El cociente se calculará con más brevedad si en vez de escribir los residuos parciales se retienen en la memoria. Así, para ejecutar la división anterior, se escribirá solamente el dividendo con una recta por su parte inferior, como aquí se vé, y calcularemos de esta manera: la 7.ª parte de 45 son 6, que se escriben debajo de los millares, y sobran 3, que con el 6 siguiente componen 36. La 7.ª parte de 36 son 5, que se escriben debajo de las centenas, y sobra 1, que con el 2 siguiente compone 12. La 7.ª parte del 12 es 1, que se escribe debajo de las decenas, y sobran 5, que con el 8 siguiente compone 58. La 7.ª parte de 58 son 8, que se escriben debajo de las unidades, y quedan 2 de residuo.

$$\begin{array}{c} 45628 \\ \hline 6518 \end{array}$$

82. En la práctica de esta operación deberá tenerse presente:

1.° Que todo número dividido por sí mismo da de cociente 1.

2.° Que todo número dividido por la unidad da de cociente el mismo número.

3.° Que en ninguna división parcial puede ponerse más de 9 en el cociente, pues si un cociente parcial pudiera ser 10, la división parcial anterior estaría equivocada por haberse tomado alguna unidad de menos en el cociente.

4.° Que si después de bajar á la derecha de un resíduo parcial una cifra del dividendo resultara un número menor que el divisor, se debe escribir cero en el cociente, bajar la cifra siguiente del dividendo y continuar la división.

83. *Tercer caso.*—El dividendo y divisor tienen varias cifras. Podrá suceder que el cociente tenga una cifra ó más de una.

Suponiendo que se haya de dividir 47124 por 7235, se comprende á primera vista que el cociente es menor que 10, porque multiplicando el divisor por 10 resultan 72350, que es mayor que el dividendo; luego el cociente no puede tener mas que una cifra. Para hallar esta cifra del cociente, observamos que el producto de la misma por la del orden superior del divisor, que aquí es de 7 millares, nos dará un producto de este mismo orden, y por consiguiente, si tomamos los 47 millares del dividendo, en ellos estará contenido el producto de las dos cifras citadas, y además las unidades del mismo orden que hayan resultado de multiplicar la cifra del cociente por todas las demás del divisor. Luego si se dividen los 48 millares del dividendo por los 7 millares del divisor, hallaremos la cifra 6, que no podrá ser menor que la que se busca, si bien podrá ser mayor, lo cual se conocerá después de multiplicar el divisor por dicha cifra. Si el producto que resultare fuera mayor que el dividendo, la cifra obtenida sería mayor que la verdadera, en cuyo caso se disminuiría de unidad en unidad hasta llegar á una cifra que multiplicada por el divisor diera un producto igual ó menor que el dividendo.

Disponiendo la operación como se ve á continuación, diremos: 47 entre 7, á 6. Multiplicando ahora todo el divisor por 6 resulta 43410, número menor que el dividendo. Lo escribiremos debajo de éste, restaremos y resultarán de residuo 3714. La cifra 6 será el verdadero cociente. En vez de escribir el producto del divisor por el cociente, se deberá retener en la memoria el producto de cada cifra del divisor por el cociente y restar de la correspondiente del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 47124 & 7235 \\ \cline{2-2} 43410 & 6 \\ \cline{1-1} 3714 & \end{array}$$

Así, pues, para dividir dos números de varias cifras teniendo el cociente una, se dividirá la primera ó dos primeras del dividendo, según que tenga tantas cifras ó una más que el divisor, por la primera cifra del divisor; se multiplica éste por la cifra hallada, y si el producto es igual ó menor, la cifra será la verdadera; pero si el producto es mayor que el dividendo, se irán rebajando unidades hasta hallar un producto que se pueda restar, en cuyo caso habremos hallado el verdadero cociente.

Supongamos ahora que el cociente deba tener varias cifras. Sea el número 67235 partido por 524.

Multiplicando el divisor por 10 resultan 5240, número menor que el dividendo, y por tanto el cociente será más de 10. Multiplicando el divisor por 100 resultan 52400, número menor aún que el dividendo, por lo que el cociente será más de 100; pero si el divisor se multiplica por 1000, el producto 554000, es mayor que el dividendo, y en consecuencia el cociente, mayor que 100 y menor que 1000, constará de unidades, decenas y centenas. Para hallar las centenas, después de disponer los números como se ve, separaremos las 672 centenas del dividendo por medio de una coma, y partiendo por 524, sale una centena para el cociente, la cual se escribe debajo del divisor. Multiplicando el divisor por la cifra hallada para el cociente, y restando el producto de las tres cifras separadas de la izquierda del dividendo, resultan 148 centenas de diferencia. Estas 148 centenas hacen 1480 decenas, que con las tres decenas que se bajan del dividendo, componen 1483. Dividiendo este número por 524, resultan 2 decenas para el cociente, y multiplicando todo el divisor por esta nueva cifra del cociente, y restando del dividendo anterior el producto que resulta, sale de diferencia 435 decenas. Estas 435 decenas hacen 4350 unidades, que con las cinco que se bajan del dividendo componen 4355. Partiendo este número por el divisor, resultan 8, que serán las unidades del cociente, las cuales se escriben á continuación de las decenas.

67235	524
1483	128
4355	
163	

Multiplicando por último todo el divisor por la tercera cifra del cociente y restando el producto del dividendo anterior quedan 163.

De todo lo expuesto se deduce que, para dividir dos números enteros cualesquiera, teniendo el cociente varias cifras, después de separar por las correspondientes líneas dividendo, divisor y cociente, se toman de la izquierda del primero tantas cifras como hay en el segundo, ó una más si la primera de la izquierda del dividendo es menor que la primera del divisor. Se ejecuta la primera división parcial y el resultado será la cifra del orden superior del cociente. Se multiplica por esta cifra todo el divisor y el producto se resta de las cifras separadas á la izquierda del dividendo. Al lado del resto se baja la cifra siguiente y el número resultante se divide por el divisor, y saldrá la segunda cifra del cociente. Se multiplica por esta cifra todo el divisor, y el producto se resta del anterior dividendo parcial. Al lado del resto se baja la cifra siguiente del dividendo, se divide el número que resulta por el divisor, y se continúa como antes hasta que se haya bajado la última cifra del dividendo.

Ejercicios.—Hállese la mitad, tercia, quinta, octava y novena parte del número 765843.

Hállese el cociente de las divisiones siguientes: 60340 : 25; 94235 : 47; 83546 : 79; 564208 : 832.

LECCIÓN IX.

Propiedades de la división de enteros. Divisiones abreviadas. Relación entre las cuatro operaciones fundamentales.

84. Si uno de los factores de un producto se parte por un divisor de dicho factor, el producto quedará partido por el mismo divisor.

Así, para dividir por 3 el producto $6 \times 8 \times 9$, bastará dividir, por ej., el factor 6, y resultará $(6 \times 8 \times 9) : 3 = 2 \times 8 \times 9$. En efecto, sabiendo que para multiplicar un producto de varios factores por un número basta multiplicar uno de los factores por dicho número (75), el producto de $3 \times 2 \times 8 \times 9$ será igual al dividendo $6 \times 8 \times 9$.

85. En lugar de dividir un número por el producto de varios factores, puede dividirse sucesivamente por cada uno de dichos factores. Si se quiere dividir, por ejemplo, 462 por el producto $2 \times 3 \times 7$, dividiremos 462 por 2; el cociente 231, por 3, y el cociente 77, por 7, de dondé resultará 11, que será el cociente de la división propuesta.

En efecto, siendo

$462 = 231 \times 2$, y
$231 = 77 \times 3$, será
$462 = 77 \times 3 \times 2$; y como
$77 = 11 \times 7$, resulta
$462 = 11 \times 7 \times 3 \times 2$, ó por último
$462 = 11 \times (7 \times 3 \times 2)$.

86. Puesto que cuando dividimos un número lo hacemos partes iguales, es consiguiente que si se duplica, triplica, etc., este número, las partes tendrán doble, triplo, etc., valor cada una; y que si duplicamos, triplicamos, etc., el número de partes, el valor de cada una de éstas se hará la mitad, tercio, etc.; ó en términos más generales, si el dividendo se multiplica por un número entero, el cociente queda multiplicado por el mismo número entero; y si el divisor se multiplica por un número entero, el cociente queda dividido por el mismo número. En consecuencia, *si dividendo y divisor se multiplican por un mismo número entero, el cociente no varía.*

Al contrario, si el dividendo se parte por un entero, el cociente queda dividido por el entero, y si se parte el divisor, el cociente queda multiplicado. De consiguiente, *si dividendo y divisor se parten por un mismo número entero, el cociente no se altera.*

87. La división de enteros puede y debe abreviarse principalmente en los casos siguientes:

Primer caso.—El divisor es la unidad seguida de ceros y el dividendo acaba también en ceros.

Para ejecutar esta división bastará suprimir de la derecha del dividendo tantos ceros como tenga el divisor. Sea 75000 partido por 100. Suprimiendo dos ceros de la derecha del dividendo, resulta 750, que será el verdadero cociente, porque el valor relativo de las cifras 5 y 7 se ha hecho cien veces menor.

Segundo caso.—El dividendo y divisor son dos números cualesquiera acabados en ceros. La división en este caso se simplifica tachando igual número de ceros de la derecha del dividendo y del divisor, con lo cual el cociente no se altera (86). Así la división de 84000 por 2500 quedará reducida á dividir 840 por 25.

Tercer caso.—Para dividir un número por 5, se multiplica el dividendo por 2, y como en lugar de tomar la quinta parte del número lo hemos duplicado, el número se ha hecho $2 \times 5 = 10$ veces mayor. Dividiendo el producto por 10, resultará el cociente verdadero.

Del mismo modo, para dividir un número por 25 se multiplica por 4 y el producto se parte por 100; y para dividirlo por 125 se multiplica por 8, partiendo el producto por 1000.

Cuarto caso.—Cuando se hayan de dividir muchos números por un mismo número conviene, para calcular con más prontitud y seguridad, formar una tablita que contenga los productos del divisor por los nueve primeros números, únicos que pueden tomarse para cociente en las divisiones parciales.

Supongamos que se haya de dividir el número 2040096 por 269.

Si separamos las cuatro primeras cifras de la izquierda del dividendo, observaremos en la tablita que 2040 está comprendido entre 1883 y 2152, productos del divisor por 7 y por 8, y que la primera cifra del cociente será por tanto 7. Restaremos 1883 de 2040, bajaremos á la derecha de la resta la cifra siguiente del dividendo y se

2040096	769
1883	
1570	
1345	
2259	
2152	
1076	
1076	
0	

Productos de 269.

Por	1. . . .	269
»	2. . . .	538
»	3. . . .	807
»	4. . . .	1076
»	5. . . .	1345
»	6. . . .	1614
»	7. . . .	1883
»	8. . . .	2152
»	9. . . .	2421

continúa del mismo modo hallando las cifras restantes del cociente.

88. La multiplicación se prueba por medio de la división, pues partiendo el producto por uno de los factores, debe resultar de cociente el otro factor. La división se prueba por medio de la multiplicación, pues multiplicando el divisor por el cociente y añadiendo el residuo, si lo hay, debe resultar de producto el dividendo.

89. La división tiene en general las aplicaciones siguientes:

1.ª Repartir un número de cosas entre cierto número de personas.

2.ª Conociendo el valor de varias unidades hallar el de una sola.

3.ª Reducir unidades de especie inferior á especie superior.

90. En la división de los números concretos el divisor toma el carácter de abstracto, indicando simplemente las partes que deben hacerse del dividendo. Si en el supuesto de que 38 kilogramos de café cuestan 152 pesetas, queremos saber cuánto vale un kilogramo, el divisor 38 indica el número de porciones iguales que se han de hacer del dividendo, así como el cociente nos dará el valor de cada parte, que en este caso es de 4 pesetas. De lo expuesto se infiere que el dividendo y el cociente deberán ser siempre de la misma especie ú homogéneos, y que por tanto, sabiendo lo que se busca en la división de concretos se sabe también cuál debe ser el dividendo.

91. Las cuatro operaciones fundamentales tienen entre sí dos á dos relaciones dadas en que conviene fijar la atención.

Toda adición cuyos sumandos sean iguales puede resolverse por medio de la multiplicación, para lo cual deberá tomarse por multiplicando un sumando y por multiplicador un número igual al número de sumandos de que se componga la suma. Así en vez de sumar $57+57+57+57$, multiplicaríamos 57×4.

Recíprocamente, toda multiplicación puede resolverse por medio de una adición, en la que se tome uno de los factores tantas veces por sumando como unidades tenga el otro factor. Así, en lugar de la multiplicación 84×3, podríamos hacer la suma $84+84+84$.

Si quisiéramos saber cuántas veces puede restarse un número de otro, en vez de ejecutar varias restas sucesivas, se podría emplear la división tomando el número mayor por dividendo y el menor por divisor. Para saber, por ejemplo, cuántas veces puede restarse de 875 el número 208, dividimos 875 por 208, y el cociente 4 indica las restas que podrán hacerse.

Por último, toda división podrá resolverse por medio de la sustracción, pues restando todas las veces posibles el divisor del dividendo, el número de restas indicará el cociente. Para hallar el cociente de 83 partido por 24, restando primero 24 de 83, luego de la diferencia 59 y por último de la diferencia 35, el número de restas practicadas, que en este caso son 3, representará el cociente, y la última diferencia 11, menor que el divisor, será el resíduo.

Fácilmente ha podido observarse que la multiplicación y división son respectivamente la adición y la sustracción abreviadas.

LECCIÓN X.

Aplicación de las cuatro operaciones fundamentales de los números enteros á la resolución de problemas.— Método de REDUCCIÓN á la UNIDAD.— Problemas por resolver.

92. La Aritmética es un poderoso auxiliar para facilitar el cálculo, pero de nada serviría en la vida práctica el conocimiento de los guarismos y de las operaciones con los números abstractos, si no supiéramos aplicarlas á la resolución de cuestiones concretas. Muchos, desconociendo por completo los procedimientos de la Aritmética y hasta la figura de sus cifras, resuelven ingeniosamente con brevedad y exactitud las más arduas y complicadas cuestiones del cálculo, mientras otros, enterados del mecanismo de las operaciones, apenas aciertan á dar un paso en la resolución de problemas.

Una cosa es aprender á sumar, restar, multiplicar y dividir con el auxilio de los guarismos, y otra saber qué clase de operaciones deben emplearse en cada caso. Lo primero puede aprenderse con facilidad y practicarse rutinaria é inconscientemente; lo segundo exige atención, discernimiento y raciocinio. Las operaciones aisladamente consideradas, no son más que el instrumento, los elementos del cálculo, que deben elegirse y combinarse acertadamente para obtener el resultado que se busca.

La resolución de un problema exige, ya una sola operación, ya varias operaciones. En el primer caso, el problema se llama *simple;* en el segundo, *compuesto.*

Para resolver un problema simple, bastará tener presentes las observaciones que se han hecho al tratar de cada una de las operaciones fundamentales.

Ejemplos:

1.° *Se pregunta cuántas áreas de tierra componen tres heredades que tienen 17 áreas la menor, 38 la mediana y 45 la mayor.*

Como aquí se busca un número que exprese el valor de varios números homogéneos, resolveremos este problema por medio de la adición.

2.° *Un fabricante tenía en un almacén 7284 metros de paño y vendió 4915 metros. ¿Cuántos metros le quedan?*

Habiéndose de buscar la diferencia entre dos números homogéneos, el problema deberá resolverse por medio de la sustracción.

3.° *Cuánto dinero se necesita para comprar 172 hectolitros de trigo que vale á 23 pesetas el hectolitro?*

Se necesitarán 172 veces 23 pesetas, y si bien el resultado se podría hallar tomando las 23 pesetas 172 veces por sumando, ya se sabe que el problema se resolverá con más brevedad por medio de la multiplicación, tomando cualquiera de los dos números por multiplicando, que convendrá sea 172, por tener más cifras que 23.

4.° *570 metros de tela han costado 6070 pesetas. ¿Cuánto vale un metro?*

Dándose el valor de varias unidades y buscándose el valor de una, aplicaremos la división, tomando por dividendo el número de pesetas, que es la especie del cociente.

5.° *Reducir 35 onzas de oro á pesetas.* Multiplicando 35 por 16, que son los duros que tiene la onza, y el resultado por 5, que son las pesetas que tiene el duro, quedaría resuelto el problema; ó bien multiplicando 35 por 80 pesetas que tiene la onza de oro.

6.° *Reducir 5042 pulgadas á varas.* Partiendo 5042 por 12, que son las pulgadas que tiene el pié, y el resultado por 3, que son los pies que tiene la vara, estaría resuelto el problema; ó de otro modo, partiendo 5042 por 36 pulgadas que tiene la vara.

No pueden darse reglas fijas para la resolución de los problemas compuestos, ya porque á veces admiten dos ó más soluciones, ya porque las condiciones de estos problemas varían considerablemente, siendo necesario para resolverlos bien una adición y una sustracción, ó al contrario; bien una resta y una división, etcétera, etc.

Ejemplos:

1.° *Debía uno 5420 pesetas y en pago de esto dió por una parte 890 pesetas y por otra 195 metros de paño, cuyo precio era de 15 pesetas el metro. Cuánto queda debiendo?*

Solución. 195 metros á 15 pesetas valen $195 \times 15 = 2925$

pesetas, que con las 890 que pagó componen $2925 + 890 = 3815$. Restando esta suma de 5420, resulta por último 2605. En la resolución de este problema se han ejecutado una multiplicación, una suma y una resta.

2.° *205 carros deben transportar de un punto á otro 7000 hectolitros de trigo. Suponiendo que todos los carros hayan de hacer los mismos viajes, y que cada carro puede conducir 52 hectolitros en cada viaje, cuántos viajes tendrán que hacer?*

Primera solución. Si un carro lleva 52 hectolitros, 5 llevarán $52 \times 5 = 260$ hectolitros.

Si todos los carros llevan 260 en cada viaje, el número de viajes que tendrán que hacer será $7000 : 260 = 26$ viajes próximamente.

Segunda solución. Si transportara el trigo un carro solo tendría que hacer $7000 : 52 = 134$ viajes, y transportándolo los 5 á la vez, necesitarán la quinta parte de viajes, ó sea $134 : 5 = 26$.

93. Hay una clase de problemas cuyos términos son homogéneos dos á dos; problemas que dan lugar á la llamada *regla de tres* y que en casi todos los tratados de Aritmética se resuelven solamente por medio de proporciones; pero conviene anticipar el estudio de tales problemas, ya porque ocurren con mucha frecuencia en el cálculo ordinario, ya porque su resolución cabe desde luego, sin el auxilio de las proporciones, mediante la aplicación de un método tan sencillo y natural como el de *reducción á la unidad.*

Hé aquí algunos ejemplos:

1.° *Suponiendo que 40 kilogramos de azafrán costaron 2240 pesetas, cuántas pesetas se necesitan para comprar 64 kilogramos?*

Solución. Sabiendo que 40 kilogramos valen 2240 pesetas, fácilmente sabremos lo que vale 1 kilogramo, y del mismo modo, si se sabe lo que vale un kilogramo, sabremos también lo que valen 64. En efecto, si 40 kilogramos valen 2240, uno valdrá $2240 : 40 = 56$; y si uno vale 56, 64 valdrán $56 \times 64 = 3584$ pesetas.

2.° *Si trabajan 15 hombres en una obra se necesitan 24 días para terminarla; cuántos días se necesitarían si trabajaran 15 hombres?*

Solución. Como 15 hombres necesitan 24 días, un hombre solo necesitaría 15 veces más; esto es, $24 \times 15 = 360$. Si un hombre solo necesita 360 días, 18 hombres necesitarán 18 veces menos; esto es, $360 : 18 = 20$ días.

3.° *4 máquinas en 10 días gastan 20 quintales de combustible. Cuántos quintales necesitarán 6 máquinas en 12 días?*

Solución. Si 4 máquinas gastan 20, una gastará $20 : 4 = 5$.

Si una gasta 5 quintales, 6 gastarán $6 \times 5 = 30$.

Si en 10 días gastan 30, en uno gastarán $30 : 10 = 3$; y por último, si en un día gastan 3, en 12 gastarán $12 \times 3 = 36$ quintales.

Problemas por resolver (1):

1.° *Un comerciante compra 200 hectolitros de vino á 47 pesetas y lo vende á 59. Cuántas pesetas ha ganado? (5120).*

2.° *Una persona que gana anualmente 7140 pesetas y quiere ahorrar 400, cuánto podrá gastar cada día? (18).*

3.° *Un jornalero trabaja en una obra primero 12 días, después 18 y por último 25, y recibe en pago de su trabajo 585 reales. Cuánto ganaba diariamente? (11).*

4.° *Se han de pagar 8230 pesetas de modo que en oro haya triplo que en plata, y en billetes duplo que en oro. Cuántas pesetas se han de pagar en cada especie? (823 plata, 2469 oro, 4938 billetes).*

5.° *Se compran 520 carneros por 11440 pesetas y se venden por 13520. A cómo costó y á cómo se ha vendido cada carnero? (22, 26).*

6.° *Si en una casa se gastan diariamente 13 pesetas, cuántos duros se gastarán al año? (949).*

7.° *Un comerciante recibió 236 arrobas de azúcar que valía á 13 pesetas, y dió en cambio 57 arrobas de lana que valía á 23 pesetas. Cuántas pesetas debe abonar? (2214).*

8.° *Se gastan en una casa 7 bujías diariamente. Suponiendo que la docena de bujías cuesta 14 reales, cuánto importan las bujías en un año? (2982).*

9.° *Se compran 3600 huevos por 500 reales y se venden por docenas á 4 reales. ¿Cuánto dinero se ha ganado? (700).*

10. *En una tienda se compraron 16 metros de lienzo á 9 reales, 5 docenas de pañuelos á 3 reales cada uno y 4 manteles á 36 reales. Si se entrega para pagar un billete de 400 reales ¿cuánto dinero sobra ó falta? (Faltan 68 reales).*

LECCIÓN XI.

Divisibilidad de los números.

94. *Potencia* de un número, es el resultado de tomar este número dos ó más veces por factor. Si un número se toma dos veces por factor, el resultado se llama *segunda potencia;* si tres,

---

(1) Al final de cada problema ponemos entre paréntesis el resultado en enteros, ó sea sin aproximación.

tercera, etc. Multiplicando 3×3 resulta 9, que es la segunda potencia de 3; multiplicando $3 \times 3 \times 3$, resulta 27, que es la tercera potencia de 3, etc. Para indicar abreviadamente una potencia cualquiera de un número, se escribe á la derecha del mismo en la parte superior otro número que señale las veces que se ha de tomar por factor el número dado.

95. Se llama número *par* todo número divisible exactamente por 2; en caso contrario será *impar*. Las cifras 2, 4, 6 y 8, son pares; 1, 3, 5, 7 y 9 son impares.

96. *Múltiplo* de un número es otro número que contiene dos ó más veces exactamente al primero, y *submúltiplo, factor* ó *divisor* de un número es otro número por el cual puede dividirse el primero. 12, por ejemplo, es múltiplo de 4, y 4 es á su vez submúltiplo de 12.

97. Se llama número *primo* ó *simple* todo número divisible solamente por sí mismo y por la unidad; y *compuesto,* todo número que tenga algún divisor diferente del mismo número y de la unidad. Así, 13, divisible solo por 13 y por 1, es primo; 15, divisible por 3 y por 5, es compuesto. En la composición de un número pueden entrar dos ó más factores. Así, 15 se compone de 3×5; 30 se compone de $2 \times 3 \times 5$. Dos ó más números son *primos entre sí*, cuando no tienen ningún factor común, aunque aisladamente sean compuestos; como por ejemplo, 4, 9 y 25.

98. Por regla general no puede saberse si un número será ó no exactamente divisible por otro, hasta que se haya ejecutado la división; pero muchas veces, por los caracteres particulares de ciertos números, se conocen de antemano y á simple vista algunos de sus divisores. Entre los diferentes casos que son objeto de este estudio, consideraremos solamente los más sencillos y los que ofrecen más interés en la practica, estableciendo al efecto algunos principios generales que resuelven casi todas las cuestiones particulares relativas á la divisibilidad de los números enteros.

99. *Primer principio.—Todo número que divide á varios sumandos divide también á la suma.*

5, por ejemplo, que divide á 20 y á 30, dividirá á $20 + 30$. En efecto, siendo 5 divisor de 20 y de 30, estará contenido en cada uno de ellos un número justo de veces. El número 20 contiene al 5 cuatro veces, y el 30 lo contiene seis veces; luego la suma lo contendrá cuatro mas seis veces, ó sea diez veces exactamente.

100. *Segundo principio.—Todo número que divide á otro, divide á cualquier múltiplo de este otro.* Así, por ejemplo, 4, que divide á 12, dividirá á 12×2, á 12×3, etc.

En efecto, siendo

$$12 \times 2 = 12 + 12$$
$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

y dividiendo 4 á los segundos miembros de estas igualdades, según el principio anterior, dividirá á los primeros miembros, que son múltiplos de 12.

101. *Tercer principio.—Si un número divide á otros dos, divide también á la diferencia de éstos.* Así, 6, por ejemplo, que divide á 30 y á 18, dividirá á 30 — 18.

En efecto,

$$30 = 5 \times 6$$
$18 = 3 \times 6$, y de consiguiente
$$30 - 18 = 5 \times 6 - 3 \times 6; \text{ ó}$$
$30 - 18 = (5 - 3) \times 6$. De esta igualdad se deduce que en 30 — 18 el 6 está contenido 5 veces, menos 3 veces.

102. *Un número es divisible por la unidad seguida de ceros, si acaba en tantos ceros cuando menos como acompañen á la unidad;* porque dicho número queda dividido si se tachan de su derecha tantos ceros como tenga el divisor (87. *Primer caso*).

103. *Todo número que termina en cero ó en cifra par es divisible por 2.*

Si acaba en cero, será múltiplo de 10; y como 2 divide á 10, dividirá á dicho número (100). Si termina en cifra par, se podrá descomponer en dos sumandos, uno que acabe en cero y otro que sea una cifra par, y como ambos son divisibles por 2, la suma lo será también. Así, $68 = 60 + 8$, y como 2 divide á 60 y también á 8, dividirá á 68 (99).

104. *Todo número que acabe en dos ceros ó en dos guarismos que compongan un múltiplo de 4, es divisible por 4.* Sean, por ejemplo, 5900 y 5968.

$5900 = 59 \times 100$, y como 4 divide á 100, dividirá á 59×100, ó sea á 5900.

$5968 = 5900 + 68$, y como 4 divide á ambos sumandos, divide á la suma.

105. *Todo número que termine en cero ó en 5, es divisible por 5.* Si acaba en cero, será múltiplo de 10, y por tanto divisible por 5; y si en 5, constará de dos sumandos, uno acabado en cero y el otro que será 5, ambos divisibles por 5.

106. *Todo número que termine en tres ceros ó en tres cifras que compongan un múltiplo de 8, es divisible por 8.* En el primer caso

es múltiplo de 1000, divisible por 8; en el segundo, se compone de dos sumandos, uno acabado en tres ceros y el otro múltiplo de 8.

107. *Un número es divisible por 9 si la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9.* Para llegar á esta conclusión tenemos:

1.° Un número formado de *nueves* es un múltiplo de 9, pues todas sus partes son divisibles por 9. Si se le agrega una unidad, la suma será un múltiplo de 9 mas 1; pero como podrá notarse fácilmente, esta suma es la unidad seguida de tantos ceros como *nueves* tenga el número; luego *la unidad seguida de ceros es un múltiplo de 9 mas 1.*

2.° Una cifra cualquiera seguida de ceros es un múltiplo de 9 mas dicha cifra; y así 300 será un múltiplo de 9 mas 3.

En efecto,

$$\begin{array}{r} 100 = \text{múlt. de } 9 + 1 \\ 100 = \text{múlt. de } 9 + 1 \\ 100 = \text{múlt. de } 9 + 1 \\ \hline 300 = \text{múlt. de } 9 + 3 \end{array}$$

3.° Un número cualquiera es un múltiplo de 9 mas la suma de sus cifras. 3452 será múltiplo de $9 + 4 + 5 + 2$.

En efecto,

$$\begin{array}{r} 3000 = \text{múlt. de } 9 + 3 \\ 400 = \text{múlt. de } 9 + 4 \\ 50 = \text{múlt. de } 9 + 5 \end{array}$$

Luego $3452 = \text{múltiplo de } 9 + 3 + 4 + 5 + 2$.

Ahora bien; todo número se podrá descomponer en dos partes, una que sea múltiplo de 9 y otra la suma de sus cifras. Como la primera parte es divisible por 9, si la segunda lo es, el número será divisible por 9.

108. *Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3.*

En efecto, sabiendo que todo número consta de un múltiplo de 9 mas la suma de las cifras, como múltiplo de 9 es múltiplo de 3, es evidente que todo número se compondrá de un múltiplo de 3 mas la suma de sus cifras, y de consiguiente, si esta suma es divisible por 3, el número será también divisible por 3.

Ejercicios. Conocidos ya los caracteres de divisibilidad de un número por 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 100....., investíguese por cuáles de estos divisores podrán dividirse los siguientes números:

36.840 — 50.832 — 765.000 — 14.521 — 632.611 — 70.065 — 743.247 — 18.000 — 21.405 — 6.352.983 — 46.289.763.

LECCIÓN XII.

Máximo común divisor.—Factores simples y compuestos de los números.—Mínimo común múltiplo.

109. *Máximo común divisor* de dos ó más números es el mayor número que los divide (1). Así, por ejemplo, el máximo común divisor de los números 16, 24 y 40 es 8.

Para hallar el m. c. d. de dos números, el medio más natural consistiría en buscar todos los divisores de uno de dichos números y suprimir todos los que no dividieran al otro; en cuyo caso el mayor de los restantes divisores sería el m. c. d. de los dos números. Si fueran, por ejemplo, los números 24 y 36, dividiendo el 24 por 2, 3, 4, etc., resultarían como divisores suyos 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, y suprimiendo 8 y 24 que no dividen á 36, el mayor divisor que queda, que es 12, será el m. c. d. de 24 y 36.

Aunque este método pudiera abreviarse considerablemente, conduciría en general á cálculos demasiado laboriosos, siendo preferible el procedimiento siguiente:

Divídase el número mayor por el menor, y si no queda resíduo, el número menor será el m. c. d. Si queda resíduo, pártase el número menor por este resíduo, y si la división es exacta, dicho resíduo será el m. c. d. Si no es exacta, se divide el divisor anterior por el resíduo, y continúese así hasta llegar á un resíduo cero. El último divisor es el m. c. d.

Suponiendo que se haya de hallar el m. c. d. de 204 y 30, dispondremos el cálculo de esta manera:

204	30	24	6
24	6	1	4
	6	0	

Para demostrar que 6 es el m. c. d. de 204 y 30, convendrá tener presente: 1.° Que conforme al principio del número **101**, todo divisor del dividendo y divisor, es divisor del resíduo, porque el resíduo es la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente. 2.° Que según el principio del número

(1) Para abreviar, designaremos máximo común divisor con las iniciales m. c. d.

99, todo divisor del divisor y del resíduo, es divisor del dividendo, porque el dividendo es la suma del divisor por el cociente mas el resíduo.

Ahora bien, como 6 divide á 6 y á 24, que son divisor y resíduo, dividirá á 30 que es dividendo, y si divide á 24 y á 30 dividirá á 204. Así, 6 será un divisor común de los dos números dados. Probemos ahora que 6 es divisor máximo de dichos números.

Todo número que divide á 204 y á 30, divide á 24; dividiendo á 30 y á 24, divide á 6, y por tanto, el divisor máximo no podrá ser mayor que 6.

Por la serie de operaciones ejecutadas para hallar el m. c. d., se comprende que cualquiera que sea el número de estas operaciones, se llegará siempre á un resíduo cero.

Si los números que se dan son primos entre sí, su m. c. d. será 1.

Para hallar el m. c. d. de tres ó más números, se halla primero el de dos de éstos; después el del número hallado y otro de los propuestos, continuando de este modo hasta que se hayan tomado todos los números. El último m. c. d. hallado, será el de los números propuestos.

Sean los números 1652, 1128 y 864. Principiando por los dos primeros resulta por m. c. d. el número 24, y hallando ahora el de 864 y 24, se obtiene el mismo 24, que será el m. c. d. de los tres.

110. Para descomponer un número, 180, por ejemplo, en sus factores primos, se procede de la manera siguiente:

Partiremos 180 por su menor divisor, primo, que es 2 (1), y resulta 90, por lo que

$$180 = 2 \times 90$$

El número 180 queda así descompuesto en dos factores, siendo simple el primero, y ahora deberán hallarse los de 90. Procediendo como antes, resulta $90 = 2 \times 45$; y por consiguiente

$$180 = 2 \times 2 \times 45.$$

El número 45 no es divisible por 2, pero lo es por 3, y resulta $45 = 3 \times 15$; luego

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 15.$$

Pero 15 se compone de 3×5, y de consiguiente

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

(1) Para facilitar esta descomposición ténganse presentes los principios establecidos en la lección XII sobre la divisibilidad de los números.

Como el último número 5 es primo, la operación está terminada.

Empleando los exponentes tendríamos por último

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

El cálculo se dispone ordinariamente escribiendo á la derecha del número que se ha de descomponer sus divisores simples, separados por una línea vertical, y debajo de dicho número, los cocientes que van resultando, en esta forma:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Conocidos los factores simples de un número, para hallar los factores compuestos se multiplican las potencias sucesivas que contenga el primer factor primo por las potencias sucesivas del segundo; los números que resulten se multiplican por las potencias sucesivas del tercero; los productos hallados, por las del cuarto, y se continúa así hasta haber multiplicado por las potencias del último.

Se piden, por ejemplo, todos los divisores, tanto simples como compuestos, del número 360. Descomponiéndolo primero en factores primos resulta $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Ahora se escriben en una línea horizontal la unidad, como divisor que es de todo número entero, y á continuación las potencias 1.ª, 2.ª y 3.ª del 2, y tendremos 1, 2, 4, 8.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por la parte inferior se tira una línea horizontal, y los números anteriores se multiplican por la primera potencia de 3, de donde resultan 3, 6, 12, 24; y después por la segunda, ó sea por 9, y resultan 9, 18, 36, 72. Se tira otra recta por debajo y todos los números comprendidos en las tres líneas anteriores se multiplican por 5, último factor, resultando otras tres líneas de números.

Hé aquí la disposición del cuadro de factores simples y compuesto de 360:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 4, & 8 \\ \hline 3 & 6 & 12 & 24 \\ 9 & 18 & 36 & 72 \\ \hline 5 & 10 & 20 & 40 \\ 15 & 30 & 60 & 120 \\ 45 & 90 & 180 & 360 \end{array}$$

111. Se llama *mínimum común múltiplo* de varios números, el menor número divisible por los primeros. El mínimum común múltiplo de 6, 8, 12 y 16, es 48, porque no hay ningún número menor que 48 divisible por los cuatro números propuestos.

Descompuestos varios números en factores primos, nada más fácil que hallar su mínimo común múltiplo, pues para esto bastará multiplicar unas por otras las mayores potencias de los diferentes factores primos que hayan resultado. Así, por ejemplo, suponiendo que se haya de hallar el mínimo común múltiplo de 245, 1400 y 14850, descompondremos estos tres números en sus factores primos y resulta

$$245 = 5 \times 7^2$$
$$1400 = 2^3 \times 5^2 \times 7$$
$$14850 = 2 \times 5^4 \times 11$$

Tomando ahora las mayores potencias de los factores primos 2, 5, 7 y 11, y multiplicando unas por otras, el mínimo común múltiplo de los tres números propuestos, será

$$2^3 \times 5^4 \times 7 \times 11 = 385000$$

La aplicación de esta regla se simplifica cuando entre los números dados hay algunos que son factores de los otros, pues en este caso se puede prescindir de los primeros y descomponer solo los segundos.

Si se quiere hallar, por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 3, 4, 8, 12, 24 y 36, prescindiremos de 3, 4, 8 y 12, que por ser factores de 24, lo serán de todo múltiplo de 24, y descomponiendo los restantes 24 y 36, resulta: $24 = 2^3 \times 3$; $36 = 2^2 \times 3^2$.

Si ahora se multiplican las mayores potencias de 2 y 3, resulta $2^3 \times 3^2 = 72$, que es el mínimo común múltiplo de los seis números propuestos.

Ejercicios. 1.° Hallar el máximo común divisor de 750, 1470 y 1740. Idem el de 1224, 1700 y 2448.

2.° Hallar los factores simples de 1200, 7560, 7350.

3.° Hallar todos los divisores de 400. Idem los de 5400.

4.° Hallar el mínimo común múltiplo de los números 4, 6 y 8. Idem de 8, 12 y 16. Idem de 9, 12 y 18. Idem de 5, 15 y 20. Idem de 3, 5, 6 y 15. Idem de 3, 4, 8, 16 y 24. Idem de 18, 24, 36 y 48. Idem de 15, 20, 25 y 30. Idem de 36, 48, 56, 72, 80.

LECCIÓN XIII.

Ideas generales acerca de los números fraccionarios.

112. Se llama número *fraccionario* ó *quebrado* todo número que expresa parte ó partes de la unidad.

Si dividimos la unidad en dos partes iguales, cada una de estas partes se llama *medio* ó *mitad;* si en tres, *tercio* ó tercera parte; si en cinco, *quinto;* si en diez, *décima.* De once en adelante, al número de partes que se hacen de la unidad, se agrega la palabra *avo* ó *avos;* y así, dividiendo la unidad en once partes iguales, cada una se denomina *onceavo;* dividiéndola en treinta y cinco, *treinta y cincoavo,* etc.

113. El quebrado se representa con dos números separados por una línea horizontal. Uno de estos números indica las partes en que se divide la unidad, y se llama *denominador;* el otro indica la partes que se toman de la unidad, y se llama *numerador.* Los dos á la vez toman el nombre de *términos* del quebrado. El numerador se escribe en la parte superior y se lee como un número entero; el denominador se escribe en la parte inferior, y se nombra *medios* si es un 2; *tercios,* si es un 3, etc., según se dijo anteriormente. Así, suponiendo que la unidad se divida en 7 partes y de ellas se tomen 5, escribiremos $\frac{5}{7}$ y leeremos cinco séptimos, ó cinco dividido por 7.

114. Toda división cuyo dividendo sea menor que el divisor se traduce en un quebrado. Suponiendo que se haya de dividir 3 por 5, no pudiéndose efectuar esta división, se pone bajo la forma de un quebrado que será $\frac{3}{5}$. El quebrado puede considerarse siempre como una división indicada, en la que el numerador hace veces de dividendo y el denominador de divisor.

115. Sin embargo, pueden escribirse bajo la forma de quebrado la unidad y números mayores que la unidad. Supongamos los quebrados

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{4}{4}, \quad \frac{5}{4}.$$

En los tres quebrados la unidad se considera dividida en 4 partes, de las cuales se toman: tres en el primero, que será por tanto menor que la unidad; cuatro, ó sean todas las partes de la unidad en el segundo, que será igual á la unidad, y cinco en el tercero que será mayor que la unidad. En rigor, solo el primero es un verdadero quebrado, mas no los dos restantes, que se llaman por esto quebrados impropios. El quebrado será, pues, *propio*, si tiene el numerador menor que el denominador, ó *impropio* si tiene el numerador igual ó mayor que el denominador.

116. El quebrado propio vale menos de una unidad y el impropio una unidad ó más de una unidad. Para hallar el valor de un quebrado impropio bastará dividir el numerador por el denominador. Si la división es exacta, el quebrado se convierte en un número entero, y si es inexacta, resultará un número mixto compuesto del cociente entero, mas un quebrado, que tendrá por numerador el residuo y por denominador el divisor. Así:

$$\frac{12}{4} = 3; \ \frac{28}{7} = 4; \ \frac{127}{24} = 5 + \frac{7}{24}$$

117. Todo número mixto se puede convertir en un quebrado impropio multiplicando el entero por el denominador del quebrado que lo acompaña, añadiendo al producto el numerador de dicho quebrado y poniendo por denominador el del mismo quebrado. Así:

$$5 + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}; \ 7 \ \frac{4}{9} = \frac{67}{9}$$

En efecto, si una unidad tiene 5 quintos, 5 unidades tendrán 5 veces 5, ó sea 25 quintos, que con los $\frac{3}{5}$ del quebrado componen $\frac{28}{5}$

118. Todo número entero se puede escribir en forma de quebrado, poniendo por numerador el entero y por denominador la unidad, porque todo número dividido por la unidad da de cociente el mismo número. Así, $8 = \frac{8}{1}$

También se puede convertir un entero en un quebrado que tenga un denominador cualquiera, para lo cual bastará multiplicar el entero por dicho denominador y poner el producto por numerador. Reduciendo, por ejemplo, el número 6 á novenos, resultará:

$$6 = \frac{6 \times 9}{9} = \frac{54}{9}$$

119. De dos quebrados que tengan igual denominador y diferente numerador, es mayor el que tenga mayor numerador.

Así, $\frac{7}{9} > \frac{5}{9}$ porque siendo en ambos de igual magnitud cada una de sus partes, en el primero hay dos partes más que en el segundo.

120. De dos quebrados que tengan igual numerador y diferente denominador, es mayor el que tenga menor denominador.

Así, $\frac{5}{7} > \frac{5}{9}$ porque tomándose en ambos igual número de partes, las del primero son mayores que las del segundo.

121. *Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por este número entero.* Sea el quebrado $\frac{3}{4}$. Duplicando, triplicando, etc., el numerador, resultará $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{4}$ etc.; y como estos quebrados tienen doble, triplo, etc., número de partes que el propuesto, serán 2, 3, etc., veces mayores que éste.

122. *Si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda dividido por este número entero.* Así, multiplicando por 2 el denominador del quebrado $\frac{3}{4}$ resulta $\frac{3}{8}$, que es la mitad de $\frac{3}{4}$, porque tomando en uno y otro igual número de partes, las de $\frac{3}{8}$ son la mitad de las de $\frac{3}{4}$.

123. De este principio y el anterior, se deduce que *un quebrado no cambia de valor cuando sus dos términos se multiplican por un mismo número entero;* pues si bien multiplicando el numerador se hace el quebrado cierto número de veces mayor, multiplicando el denominador, se hace el mismo número de veces menor, y por tanto el quebrado no se altera.

124. *Si el numerador de un quebrado se parte por un número entero, el quebrado queda dividido por el mismo número entero.* Partiendo por 3 el numerador del quebrado $\frac{6}{9}$, resulta $\frac{2}{9}$, que por tener un tercio de las partes del primero, será la tercera parte de éste.

125. *Si el denominador de un quebrado se parte por un número entero, el quebrado queda dividido por el mismo número entero.* Dividiendo por 5 el denominador del quebrado $\frac{7}{15}$, resulta $\frac{7}{3}$, que es el quíntuplo de $\frac{5}{15}$, porque cada parte de $\frac{7}{3}$ es cinco veces mayor que cada parte de $\frac{7}{15}$.

126. De los dos principios precedentes se deduce que *el valor de un quebrado no varía si sus dos términos se dividen por un mismo número entero;* pues si bien partiendo el numerador, el quebrado se hace cierto número de veces menor, partiendo el denominador, se hace el mismo número de veces mayor.

LECCIÓN XIV.

Reducción de quebrados á común denominador.—Simplificación de quebrados.

127. Reducir varios quebrados á común denominador es hallar otros quebrados equivalentes á los primeros, y cuyos denominadores sean entre sí iguales.

Reduciendo los quebrados á común denominador se hacen homogéneos, se pueden comparar mejor para saber cuál es entre varios el mayor, y por último, se facilita la adición y sustracción de esta clase de números.

Los quebrados se reducen á común denominador ya por el método ordinario, ya aplicando el mínimo común múltiplo de los denominadores.

128. *Primer método.—Dos quebrados se reducen á común denominador multiplicando los dos términos de cada uno por el denominador del otro;* y así

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{8} = \frac{24}{40}, \frac{35}{40}$$

En efecto, si se multiplican los dos términos del primer quebrado por 8, denominador del segundo, resulta $\frac{24}{40}$ que es igual á $\frac{3}{5}$ (123). Igualmente, si se multiplican los dos términos del segundo por 5, denominador del primero, resulta $\frac{35}{40}$ que es igual á $\frac{7}{8}$ (123).

En general, para reducir varios quebrados á común denominador, se pone por numerador de cada quebrado el producto del mismo numerador multiplicado por los denominadores de los demás, y por denominador el producto de todos los denominadores.

Sean los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.

Multiplicando el numerador del primero por 4×6, el numerador del segundo por 2×6, y el del tercero por 2×4, resultarán para numeradores de los números quebrados 24, 36 y 40, y para denominador común el producto de los denominadores $2 \times 4 \times 6$, ó sea 48. Así, pues,

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} = \frac{24}{48}, \frac{36}{48}, \frac{40}{48}$$

Cuando los quebrados tienen el mismo denominador bastará escribirlo una sola vez debajo de una recta que abarque todos los numeradores.

Hé aquí varios ejemplos:

1.° $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6} = \frac{108,\ 90,\ 27}{162}$

2.° $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5} = \frac{60,\ 40,\ 90,\ 48}{120}$

129. *Segundo método.*—Si los denominadores de los quebrados tienen algún factor común, se reducen á común denominador con más prontitud y menos trabajo de la manera siguiente: *Se halla el mínimo común múltiplo de todos los denominadores y será el denominador común de los nuevos quebrados; se divide dicho mínimo múltiplo por el denominador de cada quebrado y el cociente se multiplica por el numerador.* Sean los quebrados $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{9}{24}$.

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 24, que se escribe por denominador de los quebrados, y partiéndolo por los denominadores 8, 12 y 24, los cocientes respectivos 3, 2 y 1 se multiplican por los numeradores 3, 7 y 9, y resultarán 9, 14 y 9, que serán los numeradores de los nueve quebrados. Así

$$\frac{3}{8}, \frac{7}{12}, \frac{9}{24} = \frac{9,\ 14,\ 9,}{24}$$

En efecto, los dos términos del primer quebrado resultan multiplicados por 3; los del segundo por 2, y los del tercero por 1, y como los dos términos de cada quebrado se han multiplicado por un mismo número, los quebrados que resultan son iguales á los propuestos.

Véanse estos otros ejemplos:

1.° $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$. Prescindiendo de los denominadores 2 y 3, por ser respectivamente factores de los denominadores 4 y 6, hallaremos el mínimo común múltiplo de 4 y 6, que es 12, y efectuando las operaciones como en el caso anterior, resultará

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} = \frac{6,\ 8,\ 9,\ 10}{12}$$

2.° $\frac{7}{18}, \frac{5}{12}, \frac{4}{9}, \frac{1}{6}, = \frac{14,\ 15,\ 16,\ 6}{36}$

3.° $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{15}, \frac{19}{24} = \frac{30,\ 100,\ 105,\ 88,\ 95}{120}$

130. Los números mixtos pueden convertirse en quebrados de igual denominador, reduciéndolos primero á quebrados.

Sean los números $3\frac{5}{6}$, $2\frac{2}{5}$, $4\frac{1}{2}$. Reduciéndolos á quebrados, resultan $\frac{23}{6}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{2}$. Reduciéndolos á común denominador, quedarán los números propuestos convertidos en

$$\frac{115,\ 72,\ 135}{30}$$

131. Simplificar un quebrado es hallar otro del mismo valor cuyos términos sean más sencillos que los del primero.

Conviene simplificar los quebrados cuando sea posible, ya porque cuanto más sencillos sean los términos se conoce mejor el valor de un quebrado, ya porque las operaciones con los quebrados son más fáciles y más breves si éstos se hallan simplificados.

Para simplificar un quebrado basta dividir sus dos términos por todo factor que sea común á ambos, con lo cual no se altera el valor del quebrado (126).

Sea, por ejemplo, el quebrado $\frac{18}{24}$.

Partiendo sus dos términos por 2, resulta $\frac{9}{12}$; y si los dos términos de este nuevo quebrado se dividen por su factor común 3, resulta por último el quebrado $\frac{3}{4}$, equivalente á $\frac{18}{24}$, pero más sencillo que éste.

Si los dos términos del quebrado terminan en ceros, se puede suprimir de ambos igual número de ceros.

$$\text{Así } \frac{4500}{171000} = \frac{45}{1710};\ \frac{6000}{7000} = \frac{6}{7}$$

Finalmente, un quebrado cualquiera queda reducido á su más simple expresión, partiendo los dos términos por su máximo común divisor.

Sea el quebrado $\frac{48}{72}$. Dividiendo los dos términos 48 y 72 por su máximo común divisor 24, queda el quebrado propuesto reducido á $\frac{2}{3}$.

Si los términos del quebrado no tienen ningún factor común, por ser primos entre sí, el quebrado se dice que es *irreducible.*

132. Hay casos en que se obtiene como resultado de algún cálculo un quebrado cuyos términos se componen del producto de varios números, y entonces se economizan muchas operaciones por medio de la simplificación; esto es, suprimiendo todos los factores comunes á numerador y denominador.

Si se quiere simplificar, por ejemplo, el quebrado

$$\frac{30 \times 25 \times 36 \times 200 \times 7}{6000 \times 5 \times 7 \times 48 \times 60 \times 4}$$

procederemos de la manera siguiente:

1.° Se tachan los números que sean iguales en el numerador y denominador, y resultará $\frac{30 \times 25 \times 36 \times 200}{6000 \times 5 \times 48 \times 60 \times 4}$

2.° Se suprime igual número de ceros de los dos términos del quebrado, y resultará $\frac{3 \times 25 \times 36 \times 2}{6 \times 5 \times 48 \times 60 \times 4}$

3.° Se suprimen todos los factores comunes que quedan en numerador y denominador y que aquí son: 5 factor de 25 y de 5; 6 factor de 36 y de 6; 2 factor de 4 y de 2, y resultará

$$\frac{3 \times 5 \times 6}{48 \times 60 \times 2}$$

Si ahora se suprimen de este quebrado el 5, factor de 60 y de 5, y el 6, factor de 48 y de 6, quedará $\frac{3}{8 \times 12 \times 2}$, y quitando, por último, el 3, factor de 12 y de 3, resultará $8 \times 4 \times 2$.

De modo que

$$\frac{30 \times 25 \times 36 \times 200 \times 7}{6000 \times 5 \times 7 \times 48 \times 60 \times 4} = 8 \times 4 \times 2 = 64$$

Nota. En una pizarra se pueden borrar completamente los factores que deben desaparecer, y la simplificación se practica por esto con más facilidad.

Ejercicios. Redúzcanse á común denominador por el método ordinario:

$$1.^{\circ}\ \frac{2}{3}, \frac{5}{7};\quad 2.^{\circ}\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8};\quad 3.^{\circ}\ \frac{1}{6}, \frac{4}{7}, \frac{2}{9}$$

Redúzcanse á común denominador por el mínimo común múltiplo:

$$1.^{\circ}\ \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{18}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{7}{15}, \frac{9}{20}, \frac{7}{12}, \frac{11}{30}$$

$$3.^{\circ}\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$$

Redúzcanse á quebrados primero, y después á común denominador:

1.° $3\frac{2}{3}, 4\frac{3}{4}$

2.° $5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{6}, 7\frac{5}{12}$

3.° $4\frac{3}{5}, 5\frac{5}{6}, 7\frac{3}{10}$

Simplifíquense los quebrados

$$\frac{12}{18}, \frac{24}{30}, \frac{45}{80}, \frac{360}{400}, \frac{820}{1200}, \frac{7200}{9300}$$

Simplifíquense

1.° $$\frac{8 \times 12 \times 20 \times 35}{6 \times 3 \times 5 \times 40 \times 24 \times 8}$$

2.° $$\frac{3600 \times 72 \times 24 \times 9 \times 6}{870 \times 520 \times 12 \times 36 \times 18}$$

LECCIÓN XV.

Adición y sustracción de los números fraccionarios.

133. En la adición de quebrados pueden ocurrir tres casos: 1.° Que los quebrados tengan igual denominador. 2.° Que lo tengan diferente. 3.° que sean números mixtos.

Primer caso.—Si los quebrados tienen igual denominador se suman los numeradores y á la suma se le pone por denominador el denominador común.

Así, $\frac{5}{12} + \frac{7}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5 + 7 + 3}{12} = \frac{15}{12} = 1\frac{3}{12}$

En efecto, habiéndose de sumar cosas de un mismo nombre, que aquí se llaman *dozavos,* y expresándose el número de *dozavos* por los numeradores, es indudable que la suma de los numeradores nos dará el número de cosas que se suman, ó sea el número de *dozavos*.

134. *Segundo caso.—Si los quebrados tienen diferente denominador, se reducen á común denominador, y se ejecuta la suma como en el caso anterior.*

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\ \frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{63+35+30}{105}=\frac{128}{105}=1\,\frac{23}{105}$$

$$2.^{\circ}\ \frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{18+20+21}{24}=\frac{59}{24}=2\,\frac{11}{24}$$

135. *Tercer caso.—Si son números mixtos, se reducen á quebrados, y éstos á común denominador, sumándose como en los casos anteriores;* ó bien, sumando los enteros y aparte los quebrados, se suman los dos resultados.

Supongamos que se hayan de sumar $5\,\frac{1}{2}$, $1\,\frac{3}{4}$, $2\,\frac{5}{6}$.

Reduciéndolos á quebrados, resulta $\frac{11}{2}$, $+\frac{7}{4}$, $+\frac{17}{6}$, y si ahora se reducen á común denominador y se suman, tendremos por último $\frac{66+21+34}{12}=\frac{121}{12}=10\,\frac{1}{12}$.

De otro modo:

La suma de los números enteros $5+1+2=8$.

La suma de los quebrados es $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{6+9+10}{12}$ $=\frac{25}{12}=2\,\frac{1}{12}$. Sumando las dos partes, resulta por último $8+2\,\frac{1}{12}=10\,\frac{1}{12}$.

Nota. Si los enteros que acompañan á los quebrados constan de pocas unidades, como en el ejemplo anterior, es más breve reducir los números mixtos á quebrados; pero en caso contrario es preferible sumar separadamente los enteros y los quebrados, como sucedería con los números $138\,\frac{1}{2}+1528\,\frac{3}{4}+670\,\frac{5}{6}$, pues reduciéndolos á quebrados, resultarían operaciones más trabajosas.

136. La sustracción de quebrados comprende los mismos casos que la adición.

Primer caso.—Para restar quebrados de igual denominador, se restan los numeradores y á la diferencia se le pone por denominador el denominador común.

$$\text{Así}\ \frac{9}{13}-\frac{5}{13}=\frac{9-5}{13}=\frac{4}{13}$$

137. *Segundo caso.—Para restar quebrados de diferente deno-*

minador, se reducen primero á común denominador y después se resuelve la resta como en el caso anterior.

Ejemplos:

$$1.^{\circ}\quad \frac{5}{8} - \frac{3}{7} = \frac{35-24}{56} = \frac{11}{56}$$

$$2.^{\circ}\quad \frac{11}{12} - \frac{7}{8} = \frac{22-21}{24} = \frac{1}{24}$$

138. *Tercer caso.—Para restar números mixtos se reducen primero á quebrados, después á común denominador y se restan como en los dos casos anteriores; ó bien se restan primero los enteros y después los quebrados.*

Supongamos que de $7\frac{4}{5}$ se hayan de restar $5\frac{1}{3}$.

Reduciéndolos á quebrados, luego á común denominador y efectuando la resta, tendremos:

$$7\frac{4}{5} - 5\frac{1}{3} = \frac{39}{5} - \frac{16}{3} = \frac{117-80}{15} = \frac{37}{15} = 2\frac{7}{15}$$

De otro modo:

Restando los enteros resulta $7 - 5 = 2$.

Restando los quebrados resulta $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{12-5}{15} = \frac{7}{15}$

Si ahora se suman las dos diferencias resulta por último $2\frac{7}{15}$.

En la sustracción de los números mixtos conviene tener presente lo que se dijo sobre la suma en la nota del número **135.**

Puede suceder que la fracción que acompañe al entero del sustraendo sea mayor que la del minuendo, y en este caso para hacer por partes la resta es preciso tomar una unidad del minuendo, descomponerla en partes iguales á las del quebrado que lo acompaña y añadirlas á este quebrado.

Supongamos que de $9\frac{2}{3}$ se haya de restar $4\frac{7}{8}$. Como $\frac{7}{8}$ es mayor que $\frac{2}{3}$ y no se puede restar de este quebrado, tomaremos una unidad de las 9 que contiene el minuendo, las descompondremos en $\frac{3}{3}$ que unidos á los $\frac{2}{3}$ suman $\frac{5}{3}$ y en vez de la resta dada $9\frac{2}{3} - 4\frac{7}{8}$, tendremos su equivalente $8\frac{5}{3} - 4\frac{7}{8}$, que se resolverá de la manera explicada anteriormente.

139. Si el minuendo ó el sustraendo, ó los dos á la vez, se componen de alguna suma ó diferencia, deberán encerrarse separadamente dentro de un paréntesis, y en cuanto á lo demás se ejecutará la resta conforme á las reglas establecidas.

Supongamos que de la suma $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$ se haya de restar la diferencia $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$. La operación se indicaria de esta manera:

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)$$

Hallando el mínimo común múltiplo de todos los denominadores, que es 24, reduciendo á común denominador y restando resulta:

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right) = \frac{20+21}{24} - \frac{18-10}{24} =$$

$$\frac{41}{24} - \frac{8}{24} = \frac{33}{24} = 1\,\frac{9}{24} = 1\,\frac{3}{8}$$

Ejercicios. Resuélvanse las sumas y restas siguientes:

1.° $\frac{7}{15} + \frac{2}{15} + \frac{4}{15}$

2.° $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{6}$

3.° $\frac{4}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{3}$

4.° $5\,\frac{3}{4} + \frac{7}{9} + 6\,\frac{1}{3}$

5.° $1\,\frac{1}{2} + 2\,\frac{2}{3} + 3\,\frac{3}{4}$

6.° $95\,\frac{1}{6} + 804\,\frac{7}{8} + 56\,\frac{2}{5}$

7.° $\frac{57}{83} - \frac{38}{83}$

8.° $\frac{24}{32} - \frac{3}{8}$

9.° $5\,\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$

10.° $8\,\frac{2}{3} - 3\,\frac{2}{4}$

11.° $13\,\frac{1}{6} - 7\,\frac{7}{8}$

12.° $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$

LECCIÓN XVI.

Multiplicación y división de los números fraccionarios.

MULTIPLICACIÓN DE QUEBRADOS.

140. La multiplicación de los números fraccionarios puede reducirse á los tres casos siguientes: 1.° Multiplicar un quebrado por otro quebrado. 2.° Multiplicar un quebrado por un entero ó un entero por un quebrado. 3.° Multiplicar números mixtos.

141. *Primer caso.—Para multiplicar un quebrado por otro quebrado, se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador, y se parte el primer producto por el segundo.*

Antes de razonar esta operación, sentaremos el siguiente principio. Si se suprime el denominador de un quebrado, este quebrado queda multiplicado por dicho denominador.

En efecto, si tomamos, por ejemplo, el quebrado $\frac{4}{5}$, y suprimimos el denominador, resulta 4, que es 5 veces mayor que $\frac{4}{5}$, porque reduciendo el número á 4 quintos, resultará 4 veces 5 quintos ó $\frac{20}{5}$, que es 5 veces mayor que $\frac{4}{5}$.

Supongamos ahora que se haya de multiplicar $\frac{5}{6}$ por $\frac{7}{8}$. Decimos que el producto de $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{5 \times 7}{6 \times 8} = \frac{35}{48}$.

En efecto, si en lugar de multiplicar $\frac{5}{6}$ por $\frac{7}{8}$ multiplicamos $\frac{5}{6}$ por 7; como quiera que multiplicando el numerador por un entero, el quebrado queda multiplicado por este entero (121) resultará $\frac{5 \times 7}{6}$. Pero como 7 es 8 veces mayor que $\frac{7}{8}$, el producto obtenido será 8 veces mayor de lo que debe ser, y tendremos que partirlo por 8 para hallar el producto verdadero. Sabemos, por último, que si el denominador se multiplica por un entero, el quebrado queda dividido por este entero (122); luego $\frac{5 \times 7}{6 \times 8}$ será la octava parte de $\frac{5 \times 7}{6}$, y por tanto el producto de los quebrados propuestos.

Este caso fundamental de la multiplicación de números fraccionarios, podría razonarse de otra manera, partiendo del concepto general de la multiplicación.

En efecto, multiplicar $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ es hallar un producto que sea con respecto al multiplicando $\frac{5}{6}$, lo que el multiplicador $\frac{7}{8}$ es con respecto á la unidad. Según esto, como $\frac{7}{8}$ son 7 octavas partes de la unidad, el producto será también 7 octavas partes del multiplicando, esto es, $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{6}$,

$$\frac{1}{8} \text{ de } \frac{5}{6} = \frac{5}{6} : 8 = \frac{5}{6 \times 8};$$

$$\text{luego } \frac{7}{8} \text{ de } \frac{5}{6} = \frac{5}{6 \times 8} \times 7 = \frac{5 \times 7}{6 \times 8}$$

Observación. Conviene tener presente que como ha podido notarse en el ejemplo anterior, *multiplicar un número cualquiera por un quebrado equivale á tomar de dicho número las partes que indica este quebrado*, y que por consiguiente, en la multiplicación de un número cualquiera por un quebrado propio, el producto ha de ser siempre un número menor que el multiplicando. Así:

1.° $9 \times \frac{2}{3}$ equivale á dos terceras partes de 9, ó sea 6.

2.° $\frac{10}{13} \times \frac{3}{5}$ equivale á tres quintas partes de $\frac{10}{13}$; y como la quinta parte de $\frac{10}{13}$ son $\frac{2}{13}$, las tres quintas partes serán triplo de $\frac{2}{13}$ ó $\frac{6}{13}$.

142. *Segundo caso.—Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, dejando el mismo denominador* (121); *ó bien se divide el denominador por el entero, dejando el mismo numerador* (124).

Así

$$\frac{6}{9} \times 3 = \frac{6 \times 3}{9} = \frac{18}{9} = 2; \text{ ó bien}$$

$$\frac{6}{9} \times 3 = \frac{6}{9 : 3} = \frac{6}{3} = 2$$

Si el denominador no fuera divisible por el entero, se practica por el primer método la multiplicación.

143. *Tercer caso.—Para multiplicar dos números mixtos, se reducen á quebrados y se resuelve la multiplicación como en los casos anteriores; ó se multiplica cada una de las partes del multiplicando por cada una de las partes del multiplicador, sumando después los productos que resulten.*

Supongamos que se haya de multiplicar $3\,\frac{2}{3}$ por $4\,\frac{1}{2}$.

Reduciendo los dos factores á quebrados y efectuando la multiplicación, resulta

$$3\,\frac{2}{3} \times 4\,\frac{1}{2} = \frac{11}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{11 \times 9}{3 \times 2} = \frac{99}{6} = 16\,\frac{1}{2}$$

De otro modo; si practicamos por partes la operación deberán hacerse las cuatro multiplicaciones siguientes:

$$3 \times 4; \frac{2}{3} \times 4; 3 \times \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

Efectuando estas operaciones resulta

$$3 \times 4 = 12$$

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$$

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$$

Si ahora se suman estos productos, resultará por una parte 12 unidades y por otra $\frac{8}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{6} = \frac{16+9+2}{6} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$ y por último sumando $12 + 4\frac{1}{2}$, saldrán $16\frac{1}{2}$ (1).

NOTA. Como puede observarse, el primer método es más sencillo que el segundo.

144. Se llama *quebrado de quebrado* todo quebrado que exprese parte ó partes de otro quebrado. Así $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ significa que se han de tomar las cuatro quintas partes de $\frac{2}{3}$, y será un quebrado de quebrado.

Del mismo modo, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ significa que se han de tomar tres cuartas partes de $\frac{5}{6}$ y después la mitad de lo que haya resultado.

145. *Para hallar el valor de un quebrado de quebrado se multiplican por una parte los numeradores entre sí y por otra los denominadores y se divide el primer producto por el segundo.*

$$\text{Así } \frac{2}{5} \text{ de } \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{5 \times 7} = \frac{8}{35}$$

En efecto, hallemos primero una quinta parte de $\frac{4}{7}$ dividiéndolo por 5, para lo cual bastará multiplicar el denominador por 5, y resultará $\frac{4}{7 \times 5}$. Ahora bien, si una quinta parte de $\frac{4}{7}$ vale $\frac{4}{7 \times 5}$, las 2 quintas partes valdrán el duplo, ó sea $\frac{4}{7 \times 5} \times 2 = \frac{4 \times 2}{7 \times 5}$.

(1) Los resultados finales los damos en general simplificados.

Si se quiere hallar el valor de $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, calculando por partes tendremos:

$$1.^{\circ}\quad \frac{1}{3} \text{ de } \frac{5}{8} = \frac{5}{8 \times 3} \text{ y } \frac{2}{3} \text{ de } \frac{5}{8} = \frac{5 \times 2}{8 \times 3}$$

$$2.^{\circ}\quad \frac{1}{7} \text{ de } \frac{5 \times 2}{8 \times 3} = \frac{5 \times 2}{8 \times 3 \times 7}, \text{ y } \frac{4}{7} \text{ de } \frac{5 \times 2}{8 \times 3} =$$

$$\frac{5 \times 2 \times 4}{8 \times 3 \times 7} = \frac{40}{168} = \frac{5}{21}.$$

De modo que, cualquiera que sea el número de quebrados parciales de que conste el quebrado de quebrado, su valor será siempre igual al producto de los numeradores partido por el producto de los denominadores.

División de quebrados.

146. La división de números fraccionarios comprende cuatro casos: 1.° Dividir un quebrado por otro quebrado. 2.° Dividir un quebrado por un entero. 3.° Dividir un entero por un quebrado. 4.° Dividir números mixtos.

Primer caso.—Para dividir un quebrado por otro se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el numerador del divisor por el denominador del dividendo, partiendo el primer producto por el segundo.

$$\text{Así, } \frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 3} = \frac{20}{18} = 1\frac{1}{9}$$

En efecto, si en lugar de dividir $\frac{5}{6}$ por $\frac{3}{4}$, lo dividimos por 3, que es 4 veces mayor que $\frac{3}{4}$ (141), el cociente $\frac{5}{6 \times 3}$ será cuatro veces menor que el verdadero, y por tanto, multiplicándolo ahora por 4, para lo cual bastará multiplicar el numerador, resulta $\frac{5 \times 4}{6 \times 3}$ ó $\frac{20}{18}$, que será el cociente verdadero.

De otro modo: Si el cociente de $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ fuera C, es indudable que $C \times \frac{3}{4}$, ó $\frac{3}{4}$ de $c = \frac{5}{6}$ (78).

Siendo $\frac{3}{4}$ de $c = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{4}$ de C valdrá la tercera parte de $\frac{5}{6}$, ó $\frac{5}{6 \times 3}$, y por tanto las $\frac{4}{4}$ de C, ó sea el cociente, será $\frac{5}{6 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{6 \times 3}$

147. *Segundo caso.—Para dividir un quebrado por un entero, se divide el numerador por el entero, dejando el mismo denominador* (124); *ó bien se multiplica el denominador por el entero, dejando el mismo numerador* (122).

Así,

$$\frac{12}{15} : 3 = \frac{12 : 3}{15} = \frac{4}{15}, \text{ ó}$$

$$\frac{12}{15} : 3 = \frac{12}{15 \times 3} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

Si el numerador no se puede partir por el entero, se resuelve la división por el segundo método.

148. *Tercer caso.—Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado y el producto se parte por el numerador.*

Ejemplo:

$$8 : \frac{3}{4} = \frac{8 \times 4}{3}$$

En efecto, $8 = \frac{8}{1}$; luego

$$8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{1} : \frac{3}{4} = \frac{8 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8 \times 4}{3} \quad (146)$$

149. *Cuarto caso.—Para dividir números mixtos, se reducen á quebrados, y se resuelve la división como en los casos anteriores.*

Ejemplos:

$$1.^\circ \quad 4\frac{2}{5} : 3\frac{1}{3} = \frac{22}{5} : \frac{10}{3} = \frac{22 \times 3}{5 \times 10} = \frac{66}{50} = 1\frac{8}{25}$$

$$2.^\circ \quad 2\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{17}{6} : \frac{7}{8} = \frac{136}{42} = 3\frac{5}{21}$$

$$3.^\circ \quad \frac{7}{9} : 2\frac{1}{2} = \frac{7}{9} : \frac{5}{2} = \frac{14}{45}$$

Ejercicios. Resuélvanse las multiplicaciones siguientes:

$1.^a \ \frac{8}{11} \times \frac{3}{7}$; $2.^a \ \frac{25}{31} \times \frac{17}{46}$; $3.^a \ \frac{11}{12} \times 5$

$4.^a \ 6 \times \frac{3}{8}$; $5.^a \ 7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}$; $6.^a \ \frac{5}{8} \times 4\frac{2}{3}$

Resuélvanse las divisiones siguientes:

1.ª $\frac{3}{11} : \frac{5}{9}$; 2.ª $\frac{7}{8} : 6$; 3.ª $13 : \frac{2}{5}$

4.ª $\frac{7}{13} : 9$; 5.ª $\frac{9}{13} : 4\frac{2}{3}$; 6.ª $6\frac{3}{5} : 8\frac{1}{2}$

Hállese el valor de quebrados de quebrados en los ejemplos siguientes:

1.º $\frac{5}{9}$ de $\frac{7}{12}$; 2.º $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{11}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{9}$

Resuélvanse las operaciones siguientes:

1.ª $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\right) \times 3\frac{1}{2}$

2.ª $\left(\frac{8}{9} - \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right)$

3.ª $\left(\frac{5}{7} - \frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

4.ª $\left(2\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\right) : \left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}\right)$

LECCIÓN XVII.

Fracciones decimales.—Escritura y lectura de estas fracciones.—Propiedades de las mismas.

149. Si se divide una unidad en diez partes, cada una de estas partes se llama *décima;* si en ciento, *centésima;* si en mil, *milésima,* etc.; y toda fracción que exprese una de estas 10, 100, 1000.... partes se llama *fracción decimal.*

De las divisiones que se hacen de la unidad para la formación de estas fracciones, se deduce:

Que una unidad tiene 10 décimas, 100 centésimas, 1000 milésimas, etc.

Que una décima vale 10 centésimas, 100 milésimas, 1000 diezmilésimas, etc.

Que una centésima vale 10 milésimas, 100 diezmilésimas, 1000 cienmilésimas, etc.

150. La escritura de las fracciones decimales puede considerarse como continuación de la escritura de los números enteros, porque tanto en aquéllas como en éstos, cada cifra colocada á la derecha de otra representa valores diez veces menores que los de la inmediata de la izquierda, ó diez veces mayores que los de la inmediata de la derecha. En consecuencia, si se escribe alguna cifra á la derecha de las unidades simples, representará valores diez veces menores que los de dichas unidades, ó sea *décimas*; si á la derecha de las décimas se escribe otra cifra, representará valores diez veces menores que los de las décimas, ó sean *centésimas*, y las cifras que se vayan añadiendo á continuación, representarán sucesivamente *milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas* etcétera; mas para saber dónde acaban las unidades y dónde empiezan las décimas en un número compuesto de enteros y decimales, era preciso adoptar una señal, que indicase esta separación, habiéndose convenido en hacer uso de la coma, que podrá ponerse en la parte inferior ó superior derecha de las unidades.

Puesto que cada orden decimal tiene después de esta coma su lugar correspondiente, que es el primero para las décimas, el segundo para las centésimas, etc., la escritura de las fracciones decimales queda reducida á representar con una de las nueve cifras significativas las décimas, centésimas, etc., que contenga la fracción, poniendo un cero en el lugar del orden decimal de que carezca la misma.

Así, para escribir un número decimal, se escriben primero el número entero, si lo hay, y si no, un cero en su lugar; luego la coma, á continuación las décimas, y sucesivamente las centésimas, milésimas, etc.

Hé aquí algunos ejemplos:

	Números decimales.	Se escriben.
1.°	Siete unidades ocho décimas. . .	7,8; ó 7'8 (1)
2.°	Diez y nueve unidades cuarenta y tres centésimas.	19'43
3.°	Sesenta y cinco milésimas. . . .	0'065
4.°	Ciento veinticinco unidades seiscientas treinta y dos diezmilésimas.	125'0632
5.°	Veintiocho mil cuatrocientas siete millonésimas.	0'028407

(1) A fin de que la coma, empleada como signo de los números decimales, no pueda confundirse con la coma que sirve de signo ortográfico, la escribiremos en la parte superior.

Los números decimales que constan de un entero y una fracción decimal, se llaman *números mixtos decimales*. Su primera parte, ó sea lo que hay á la izquierda de la coma, se llama parte entera, y lo que hay á la derecha parte decimal.

151. Sabiendo cómo se escriben los números decimales, nada más fácil que leerlos. Primeramente se leen los enteros, si los hay, con el nombre de unidades, y después se lee la parte decimal con el nombre que corresponda al último guarismo de la derecha, que será *décimas*, si no hay más que un guarismo después de la coma; *centésimas*, si hay dos; *milésimas*, si hay tres, etc.

Ejemplos:

Números decimales.		Se leen.
1.°	3‘002	Tres unidades dos milésimas.
2.°	48‘00613	Cuarenta y ocho unidades seiscientas trece cienmilésimas.
3.°	0‘0000265	Doscientas sesenta y cinco diezmillonésimas.
4.°	9‘040836	Nueve unidades cuarenta mil ochocientas treinta y seis millonésimas.

152. Las fracciones decimales se diferencian de las fracciones comunes ú ordinarias en que éstas pueden tener por denominador un número cualquiera, y aquéllas tienen siempre por denominador la unidad seguida de ceros. Diferéncianse además en que la fracción común lleva siempre escrito el denominador, y en las fracciones decimales éste se calla ó suple, entendiéndose que es 10, si hay una cifra decimal; 100, si hay 2; 1000, si hay 3, etc.

153. Las fracciones decimales son más sencillas para el cálculo, ya porque se ajustan al sistema usual de numeración, ya porque, omitiéndose en ellas el denominador, se simplifican las operaciones, ejecutándose como con los números enteros, según veremos más adelante.

154. A la izquierda de una fracción decimal no pueden añadirse ceros sin alterar el valor de esta fracción, por cuanto cambiaría el valor relativo de sus guarismos, haciéndose diez veces menor si se añadiese un cero, ciento si dos, etc. Así 0‘045 es diez veces menor que 0,45.

Por el contrario, si los ceros se añaden á la derecha de la fracción decimal, ésta no cambia de valor, porque todas las cifras conservan el mismo valor relativo que tenían antes de añadir los ceros.

Así: 0‘83 = 0‘830 = 0‘8300, etc.

155. Como consecuencia de lo que acabamos de decir, si quisiéramos reducir á común denominador, ó á una denominación común varias fracciones decimales, se igualarían en cifras decimales, añadiendo para esto los ceros necesarios.

Así:

0'37 = 0'37000

0'0834 = 0'08340

0'6 = 0'60000

0'00412 = 0'00412

156. *Si en un número decimal se corre la coma un lugar, dos lugares, tres, etc., hacia la derecha, dicho número quedará multiplicado por 10, 100, 1000, etc.*

Sea el número 4'625. Si se corre la coma un lugar á la derecha, resulta 46'25, diez veces mayor que el propuesto, porque habiéndose convertido las unidades en decenas, las décimas en unidades, las centésimas en décimas y las milésimas en centésimas, cada parte del número se ha hecho diez veces mayor, y por consiguiente, quedará todo el número multiplicado por 10. Razonando del mismo modo, se probaría que si se corre la coma dos lugares á la derecha, cada parte del número se hace cien veces mayor y que el número queda multiplicado por 100.

157. *Corriendo la coma uno, dos, tres, etc., lugares hacia la izquierda en un número decimal, éste queda dividido por 10, 100, 1000, etc.*

Sea el número 16'914. Corriendo la coma un lugar á la izquierda, resulta 1'6914. Las decenas se han convertido en unidades; las unidades, en décimas, etc.; y haciéndose de este modo diez veces menores las partes del número, quedará divido por 10.

Ejercicios:

1.° Escríbanse los números siguientes:

—Diez y siete unidades cinco milésimas.

—Doscientas seis unidades treinta y ocho diezmilésimas.

—Cuarenta y tres cienmilésimas.

—Cinco unidades dos mil cuatrocientas nueve diez millonésimas.

—Seiscientas cuarenta unidades veinticinco mil ochocientas tres cienmillonésimas.

2.° Léanse los números siguientes:

6'4 — 0'32 — 81'0063 — 0'03428 — 0'12345 — 0'0094608 — 0'00381412.

LECCIÓN XVIII.

Operaciones con los números decimales.

ADICIÓN.

158. *Para sumar los números decimales se escriben unos debajo de otros, de manera que se correspondan las cifras del mismo orden, tanto de la parte entera como de la decimal, con cuyo objeto se procura que las comas estén en línea vertical, y se efectúa la operación como si fueran números enteros, poniendo en la suma la coma debajo de las de los sumandos.*

Fúndase esto en que representando cada cifra decimal valores diez veces mayores que los de la cifra inmediata de la derecha, es indudable que por cada diez unidades de un orden decimal cualquiera deberá llevarse *una* á la suma de las unidades del orden inmediato de la izquierda, que es lo mismo que se hace con la adición de números enteros.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r@{'}l} 5 & 67 \\ 0 & 084 \\ 39 & 9 \\ 184 & 0093 \\ \hline 226 & 6633 \end{array}$$

SUSTRACCIÓN.

159. *Para restar dos números decimales se escribe el minuendo debajo del sustraendo, de modo que se correspondan las comas, y se ejecuta la resta como si fueran números enteros.*

Si el minuendo tiene menos cifras decimales que el sustraendo, se añaden á la derecha del primero los ceros necesarios para igualarlo en cifras decimales con el sustraendo.

Suponiendo que de 43'0812 se hubiera de restar 28'7645, y de 124'32 el número 45'0725, dispondríamos las dos restas de esta manera:

43'0812	124'3200
28'7645	45'0725
14'3167	79'2475

MULTIPLICACIÓN.

160. En la multiplicación de números decimales pueden ocurrir tres casos: 1.° Multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros. 2.° Multiplicar un número decimal por un entero. 3.° Multiplicar un número decimal por otro decimal.

Primer caso.—Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares á la derecha como ceros acompañen á la unidad, añadiendo para esto ceros al multiplicando cuando tenga menos cifras decimales que lugares haya de correr la coma (156).

Ejemplos:

28'704 × 10 = 287'04
3'0065 × 100 = 300'65
81'6 × 1000 = 81600
0'003705 × 10000 = 37'05

161. *Segundo caso.—Para multiplicar un número decimal por un entero se multiplican como si fueran enteros los dos factores, y de la derecha del producto se separan por medio de la coma tantas cifras como guarismos decimales tenga el multiplicando.*

Supongamos que se haya de multiplicar 24'36 por 45.

Si corremos la coma á la derecha de la última cifra decimal del multiplicando, éste se hará 100 veces mayor en el ejemplo presente, y por tanto el producto 109620 que resulta será también 100 veces mayor que el verdadero; pero si separamos dos cifras de la derecha de este producto por medio de una coma, lo cual equivale á correrla dos lugares á la izquierda, el producto resultará dividido por 100, y será el verdadero.

```
  24'36
     45
-------
  12180
  9744
-------
1096'20
```

162. *Tercer caso.—Para multiplicar dos números decimales se multiplican como si fueran enteros, y de la derecha del producto se separan con la coma tantas cifras como decimales haya en los dos factores.*

Si se quiere multiplicar, por ejemplo, 61'7 por 2'38, suprimiendo la coma en ambos factores, el multiplicando se hace 10 veces mayor, el multiplicador 100 veces mayor y el producto que resulte será por tanto 10 × 100, ó sea 1000 veces mayor que el verdadero; pero si de la derecha de este producto separamos tres cifras con la coma, lo cual equivale á correrlo tres lugares de derecha á izquierda, quedará dividido por 1000, y será en consecuencia el producto verdadero.

61'7
2'38
4936
1851
1234
146'846

Hé aquí algunos otros ejemplos:

65'08	80'007	0'0094
0'007	0'35	0'0008
0'45556	400035	0'00000752
	240021	
	28'00245	

DIVISIÓN.

163. La división de los números decimales comprende cuatro casos: 1.° Dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros. 2.° Dividir un número decimal por un entero. 3.° Dividir un número entero por un decimal. 4.° Dividir dos números decimales.

Primer caso.—Para dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma en el dividendo tantos lugares hacia la izquierda, como ceros haya en el divisor (157).

Ejemplos:

1.° 52'6 : 10 = 5'26
2.° 3'4 : 10 = 0'34
3.° 6007'3 : 100 = 60'073
4.° 2'45 : 100 = 0'0245
5.° 0'09 : 100 = 0'0009
6.° 17603'4 : 1000 = 17'6034

164. *Segundo caso.—Para dividir un número decimal por un entero, se dividen como enteros, y de la derecha del cociente se separan con la coma tantas cifras como guarismos decimales tenga el dividendo.*

Se quiere dividir, por ejemplo, 85'657 por 36. Suprimiendo la coma del dividendo, éste se hace 1000 veces mayor, y por tanto el cociente obtenido 2379, será también 1000 veces mayor que el verdadero. Si ahora lo dividimos por 1000, separando tres cifras de su derecha, se hará 1000 veces menor, y quedará 2'379, que será el cociente verdadero.

85'657	36
136	2'379
285	
337	
13	

165. *Tercer caso.—Para dividir un entero por un decimal, se añaden á la derecha del entero tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, y se parten como enteros.*

Si se quiere partir, por ejemplo, 165 por 3'16, añadiendo dos ceros al dividendo, lo multiplicamos por 100, y suprimiendo la coma del divisor, éste se multiplica también por 100. De consiguiente, haciendo la división de 16500 por 316, el cociente que resulte será el verdadero.

166. *Cuarto caso.*—En la división de un número decimal por otro decimal, podrá suceder que dividendo y divisor tengan igual número de cifras decimales, ó que uno de ellos tenga más cifras decimales que el otro.

Si tienen igual número de cifras decimales, suprimiendo las comas en dividendo y divisor, ambos quedarán multiplicados por un mismo número, y de consiguiente, efectuando la división, el cociente que resulte será el verdadero, y la división se habrá reducido á una división de enteros.

Suponiendo que hubiera de dividirse 70'28 por 0'45, haríamos la división de 7028 por 45, y el cociente 156 será el verdadero cociente entero.

7028	45
252	156
278	
38	

Si uno de los términos de la división tiene más cifras decimales que el otro, á fin de evitar rectificaciones en el cociente, convendrá igualar en cifras decimales dividendo y divisor, añadiendo para esto los ceros necesarios á la derecha del que tenga menos, y suprimiendo después las comas, se resuelve la división como en el anterior ejemplo.

Así, en lugar de dividir:	Se dividirá:
127'4 : 6'352. . . .	127400 : 6352
51'812 : 8'24. . . .	51812 : 8240
5'36 : 0'0072. . . .	53600 : 72
0'086 : 0'00053. . .	8600 : 53

167. Conocidas ya las operaciones con los números decimales,

explicaremos ahora la aproximación de los cocientes, tanto de la división de enteros, como de los números decimales.

Supongamos que se haya de partir el número 450 por 8. Efectuando la división de estos números resulta 56 de cociente entero y 2 unidades de residuo. Si multiplicamos por 10 este residuo, añadiendo para ello un cero á su derecha, las 2 unidades se convierten en 20 décimas, y partiéndolas por 8, resultan de cociente 2 décimas, que se añadirán á continuación de las unidades del cociente, separadas por una coma, quedando 4 décimas de residuo. Si multiplicamos estas 4 décimas por 10, añadiendo un cero á la derecha resultan 40 centésimas, y partiéndolas por 8 se obtendrán 5 centésimas, que se ponen á la derecha de las décimas, con lo cual quedará completado el cociente 56,25. Si hubiera quedado algún residuo y se quisiera mayor aproximación, se continuaría la operación de la misma manera, hasta llegar á un cociente exacto ó tan aproximado como se quiera.

$$\begin{array}{r|l} 450 & 8 \\ \cline{2-2} 50 & 56‘25 \\ \cline{1-1} 20 & \\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Suponiendo que el dividendo, el divisor ó los dos sean decimales, la aproximación del cociente se obtiene como en el caso anterior, puesto que la división de decimales viene á reducirse siempre á una división de enteros.

Ejercicios. Resuélvanse las siguientes operaciones indicadas.

1.ª 7‘08 + 43‘0087 + 0‘8 + 0‘75 + 0‘0604
2.ª 45‘3 — 27‘65; 3.ª 118‘45 — 19‘00084
4.ª 25‘406 × 100 5.ª 0‘087 × 100
6.ª 0‘0032 × 1000; 7.ª 24‘068 × 16
8.ª 0‘093 × 0‘018; 9.ª 37‘21 : 10
10.ª 113‘4 : 100; 11.ª 18‘5 : 1000
12.ª 0‘06 : 100; 13.ª 54‘315 : 28
14.ª 315 : 92‘34; 15.ª 7 : 0‘0024
16.ª 18‘72 : 4‘34; 17.ª 25‘6 : 0‘065
18.ª 37‘424 : 2‘8; 19.ª 0‘0086 : 0‘00051

LECCIÓN XIX.

Transformación de las fracciones comunes en decimales equivalentes y viceversa.

168. El caso más general de la transformación de unas fracciones en otras consiste en convertir un quebrado común en otro equivalente que tenga por denominador un número cualquiera.

Supongamos que el quebrado $\frac{3}{5}$ se haya de convertir en otro de igual valor, pero que tenga 30 por denominador.

Sabiendo que el valor de un número no se altera multiplicándolo y dividiéndolo sucesivamente por otro número, si el número $\frac{3}{5}$ se multiplica primero por 30 y después se parte por el mismo número 30, resultará:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 30}{5} : 30 = \frac{90}{5} : 30 = \frac{18}{30},$$ que será el quebrado que se desea.

Luego para convertir un quebrado en otro equivalente que tenga un denominador dado, se multiplica el numerador de dicho quebrado por el denominador que se le quiere dar, se parte el producto por el denominador del quebrado propuesto, y al cociente se le pone por denominador el denominador dado.

Sea el quebrado $\frac{5}{8}$ al cual queremos darle 15 por denominador. Efectuando las operaciones que se acaba de decir, resulta:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 15}{8} : 15 = \frac{75}{8} : 15 = 9'375 : 15 = \frac{9'375}{15}$$

169. La transformación de los quebrados comunes en decimales, que tiene por objeto dar á los primeros por denominador 10, 100, 1000, etc., no es más que un caso particular del que se acaba de explicar.

Supongamos que se haya de reducir á centésimas el quebrado $\frac{5}{7}$. El quebrado que se pide deberá tener por denominador

100. Ejecutando las operaciones como antes se ha explicado resultará:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 100}{7} : 100 = \frac{500}{7} : 100 = \frac{71}{100} = 0'71$$

En la práctica se dispone esta operación de la manera siguiente:

Suponiendo que se haya de reducir á decimal el quebrado $\frac{7}{13}$, escribiremos el numerador por dividendo y el denominador por divisor, según aquí se ve, y como el primero es menor que el segundo, se pondrá por cociente cero y á la derecha una coma, debajo del divisor. Considerando como unidades el dividendo, y multiplicándolo por 10, para lo cual se añadirá un cero á su derecha, se convertirá en 70 décimas. Dividiéndolas por 13, resultan 5 décimas de cociente, que se ponen á continuación de la coma, y quedan 5 décimas de resíduo. Añadiendo un cero á la derecha de éste, las 5 décimas se convierten en 50 centésimas. Dividiéndolas por 13 resulta 3 centésimas para el cociente y quedan 11 centésimas de resíduo. Si se continúa añadiendo un cero á la derecha de cada resíduo y partiendo por el divisor, se obtendrán las milésimas, diezmilésimas, etc., del cociente.

70	13
50	0'538
110	
46	

170. Al practicar la anterior reducción, podrá suceder que en alguna de las divisiones parciales que se ejecutan, no quede resíduo ninguno; ó que, al contrario, por mucho que se prolonguen dichas divisiones, no se llegue nunca á un cociente exacto. En el primer caso, la fracción obtenida se llama *exacta;* en el segundo es irreducible, y se llama *periódica.*

Así, por ejemplo, si se reduce á fracción decimal el quebrado $\frac{3}{4}$, en la segunda división no queda ya resíduo alguno, y resulta 0'75, que será una fracción exactamente igual á $\frac{3}{4}$, y se denomina fracción decimal exacta.

Sea ahora la fracción $\frac{2}{3}$. Añadiendo un cero al numerador y partiendo por el denominador, resultan 6 décimas para el cociente, y quedan 2 de resíduo. Añadiendo un cero á este resíduo, resultan 20 centésimas, y partiendo por el denominador, salen 6 centésimas de cociente y quedan 2 de resíduo. Como este mismo resíduo se repetirá indefinidamente, es claro que serán iguales todos los cocientes sucesivos, sin poderse llegar nunca á un cociente exacto. La fracción obtenida, 0'6; ó 0'66; 0'666 será una fracción *periódica.*

Si en estas fracciones se repiten todas las cifras decimales, ó sea desde las décimas, la fracción será *periódica pura,* y si solo se repiten algunas, se llama *periódica mixta.*

Ejemplos:

0'25 es una fracción decimal exacta.
0'435435 es *periódica pura.*
0'73458458 es periódica mixta.

El conjunto de cifras que se repiten, constituye lo que se llama el *período*. En la segunda de las anteriores fracciones, el período es 435, y en la tercera 458.

Los quebrados $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{11}$ y $\frac{5}{6}$, dan origen á estas tres clases de fracciones, como puede verse en los ejemplos siguientes:

$$\begin{array}{l|l} 50 & 8 \\ \cline{2-2} 20 & 0'625 \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 90 & 11 \\ \cline{2-2} 20 & 0'8181... \\ 90 & \\ 20 & \\ ... & \\ ... & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 50 & 6 \\ \cline{2-2} 20 & 8'66... \\ 20 & \\ ... & \\ ... & \end{array}$$

La transformación de las fracciones ordinarias en fracciones decimales, ofrece grandes ventajas en la práctica de la Aritmética, por cuanto las operaciones con las segundas son más sencillas y más fáciles que con las primeras, según ha podido notarse en el estudio de unas y otras. No tiene tanta importancia bajo el expresado concepto la reducción contraria, ó sea la transformación de las fracciones decimales en fracciones comunes, que es lo que vamos á tratar ahora.

171. Tres casos pueden ocurrir en la reducción de fracciones decimales á fracciones comunes. 1.° Que la fracción decimal sea exacta. 2.° Que sea periódica pura. 3.° Que sea periódica mixta.

Primer caso.—Para reducir á fracción común una fracción decimal, se le pone á esta fracción por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga la fracción propuesta. Así:

$0'25 = \frac{25}{100}$. Simplificando este último quebrado, resulta:

$0'25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ que será la fracción *generatriz* de 0'25.

Segundo caso.—Para reducir á quebrado común una fracción periódica pura se escribe un quebrado que tenga por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

Así: $0'354354\ldots = \frac{354}{999}$

En efecto, corriendo la coma tres lugares á la derecha de la fracción propuesta, resulta 354'354, cantidad 1000 veces mayor que la fracción propuesta.

Ahora bien, si restamos una vez esta fracción del número 354'354 que la contiene 1000 veces, resultará

$$354'354 - 0'354 = 354,$$

que contendrá á la fracción propuesta una vez menos que la contenía, ó sea 999 veces, y será por tanto 999 veces mayor que ella. Pero partiendo 354 por 999, el quebrado resultante $\frac{354}{999}$ no será ya mayor ni menor, sino igual á la fracción propuesta.

Tercer caso.—Sea la fracción periódica mixta 0'35246246...

Esta fracción se puede descomponer en dos sumandos, á saber:

$$0'35 + 0'00246246....$$

El primer sumando es una fracción decimal exacta igual á $\frac{35}{100}$ (Primer caso).

El segundo sumando es una fracción periódica pura, equivalente á la centésima parte de 0'246246....; y como $0'246246... = \frac{246}{999}$ (Segundo caso); el segundo sumando será la centésima parte de esta fracción, ó sea $\frac{246}{999 \times 100}$

Luego la fracción propuesta

$$0'35246246... = \frac{35}{100} + \frac{246}{999 \times 100}$$

Para reducir estas dos fracciones á común denominador, en vez de multiplicar los dos términos de la primera por 999×100, que es el denominador común, bastará multiplicarlos sólo por 999, y resulta:

$$0'35246246... = \frac{35 \times 999 + 246}{999 \times 100}$$

Ahora, si en lugar de multiplicar el número 35 por 999 lo multiplicamos por 1000, resultará por numerador $35000 + 246$, ó 35246, que contendrá á 35 una vez más de las que debía contenerlo; pero restando 35, resultará por último:

$$0'35246246... = \frac{35246 - 35}{999 \times 100} = \frac{35246 - 35}{99900}$$

Esto indica que la fracción ordinaria equivalente á una fracción periódica mixta tiene por numerador la diferencia entre el número formado por la parte no periódica seguida del período, y el número que expresa la parte no periódica, y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejercicios.

1.° Reducir á fracciones decimales los quebrados

$$\frac{7}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{7}{11}, \frac{5}{12}, \frac{4}{7}$$

2.° Reducir á fracciones comunes las fracciones decimales:
1.ª 0'45; 2.ª 0'84; 3.ª 0'3232...; 4.ª 0'767...;
5.ª 0'5656...; 6.ª 0'234545...; 7.ª 0'67878...;
8.ª 0'435222...; 9.ª 0'734586586...; 10.ª 0'12574343...

LECCIÓN XX.

Idea general de las pesas y medidas y de los instrumentos que se emplean para pesar y medir.

172. Entendidas ya las operaciones con los números abstractos, así enteros como fraccionarios; su aplicación á cuestiones concretas del cálculo, objeto principal de la Aritmética, exige el conocimiento de las diferentes clases de medidas, pesas y monedas de que hacemos uso, y á las cuales han de referirse en la práctica los números y las operaciones que con ellos se ejecutan.

Medir una magnitud, es averiguar cuántas veces contiene á otra magnitud de la misma especie, la cual toma generalmente el nombre de *unidad*.

En rigor, la elección de la magnitud que debe servir de unidad, es completamente arbitraria; pero conviene que responda á ciertas condiciones, sin las cuales, ni podríamos formar fácilmente idea clara de ciertas cantidades, ni recordar los números que las expresaran. Tal sucedería, por ejemplo, si se tomara el segundo por unidad para dar á conocer la edad de las personas, ó si se expresaran por varas ó por metros distancias como la de Madrid á París, etc. La unidad que se adopte en cada caso, deberá ser proporcionada á la cantidad que haya de medirse.

173. Expuestas las observaciones que preceden, pasemos á ocuparnos de las medidas. Estas se dividen en *lineales, superficiales, cúbicas, de capacidad* y *ponderales.*

Las medidas *lineales* sirven para hallar la extensión de las líneas, ó sea para medir lo largo. La extensión de las líneas se llama *extensión de una sola dimensión.*

Las *superficiales* sirven para medir las superficies. La magnitud de una superficie no puede apreciarse solamente por lo que tenga de largo ó por lo ancho, sino tomando en cuenta las dos cosas á la vez; esto es, la longitud y la latitud. Por esto, la extensión de las superficies se llama *extensión de dos dimensiones.*

Las *cúbicas* sirven para hallar el volumen de los cuerpos; pero este volumen no depende solamente de lo que el cuerpo que se mida pueda tener de largo ó de ancho, sino también de su altura. Así, en la medición de los volúmenes, deberán considerarse á la vez la longitud, latitud y profundidad, y por esto, la extensión de los cuerpos se llama *extensión de tres dimensiones,* que es la única que existe en realidad, porque en la naturaleza no hay líneas, ni superficies, sino cuerpos, de los cuales separamos, sin embargo, las dos primeras por abstracción.

Las de *capacidad* sirven para medir los líquidos y los áridos.

Las *ponderales* sirven para apreciar el peso de los cuerpos, ó sea la fuerza descendente que estos tienen en virtud de la *gravedad.*

Las *monedas* y las unidades de *tiempo* son en rigor verdaderas medidas, aunque no se consideren comunmente como tales. Las primeras sirven para apreciar el valor de las cosas, y las segundas para apreciar la duración de estas cosas; y expresándose lo uno y lo otro por medio de números, dichas medidas figuran con frecuencia entre los datos que se dan para la resolución de la mayor parte de los problemas, debiendo por tanto ser objeto de estudio en la Aritmética.

Refiriendo á un objeto cualquiera, por ejemplo, á un tintero, las diferentes clases de medidas de que acabamos de tratar, si quisiéramos hallar lo que dicho tintero tiene de alto, aplicaríamos la medida lineal; si la superficie de su base, una medida superficial; si el volumen, la medida cúbica; si la tinta que puede contener, la medida de capacidad; si pesarlo, una unidad ponderal; si conocer cuánto dinero ha costado, una moneda; si su duración, una unidad de tiempo.

Aparte de las medidas que acabamos de exponer, y que son las que tienen más aplicaciones en la vida ordinaria, hay algunas más que se estudian en varias ciencias y que conviene conocer, porque entran á veces como datos en diferentes problemas que resuelve la Aritmética.

En Geometría, por ejemplo, para apreciar la magnitud de los arcos del círculo, se toma como unidad el *grado*, que es una de las 360 partes en que se divide la circunferencia. Este grado se divide en 60 minutos, y el minuto en 60 segundos, medidas todas que representan porciones de la circunferencia.

En Física, la unidad *grado* tiene diferentes significados, pues unas veces se aplica á la medición de la temperatura, otras á la de la presión atmosférica, etc.

En Mecánica para apreciar el efecto que produce una fuerza, se usan entre otras unidades el *kilográmetro*, que es la fuerza que se necesita para elevar un kilogramo de peso á un metro de altura en un segundo, y el *caballo de vapor* que equivale á 75 *kilográmetros* (1).

Para medir y pesar se emplean varios instrumentos que indicaremos someramente.

Para medir las longitudes se usa un reglón de madera ó metal de un metro, dividido en decímetros, centímetros y milímetros. También se usan rollos de cinta, cuerdas y cadenas.

Para medir las superficies y los volúmenes se ha de apreciar la extensión de cada una de sus dimensiones, y consistiendo éstas en líneas, servirá la misma medida lineal.

Para medir los líquidos y los áridos, se usan vasijas de diferentes substancias y de varias formas, generalmente redondas ó cilíndricas. Los líquidos se miden con exactitud, porque se adaptan á la forma de las vasijas que los contienen; mas no así los áridos, como el trigo, maíz, garbanzos, etc., que dejan entre sí espacios más ó menos grandes, según la figura ó volumen que aquéllos tengan y según otras circunstancias, de lo cual pueden resultar errores notables en la medida. Sería preferible pesar los áridos, si esta operación no exigiera generalmente más tiempo que la de medir.

Para pesar los cuerpos se usan las *pesas* de hierro ú otro metal, las *balanzas*, *básculas* y *romanas*.

Con los relojes, que pueden ser de muchas clases, se mide el tiempo por horas, minutos y segundos.

Para medir los grados de un arco de círculo, se usa el *semicírculo graduado*.

Para apreciar los grados de temperatura se usan los *termómetros*; para apreciar los grados de presión atmosférica, los *barómetros*; para medir la intensidad de las fuerzas, los *dinamómetros*, etc.

Por último, en las medidas de cada especie, se consideran: 1.° la unidad llamada *principal*, que es la que se usa con más

---

(1) En la práctica se admite que el trabajo de un caballo de vapor equivale al que hacen 7 caballos en un día, y el de un caballo, al de 7 hombres, resultando por tanto, que el trabajo de un caballo de vapor viene á ser próximamente como el de 50 hombres.

frecuencia entre todas las de su especie; 2.° los *múltiplos*, que son los que contienen cierto número de veces á la principal; 3.° los *submúltiplos*, medidas menores que la principal, en la que están contenidos cierto número de veces.

LECCIÓN XXI.

Sistema métrico.—Medidas lineales, de capacidad y de peso.—Escritura de los números métricos.—Reducción de unidades de especie superior á inferior y al contrario.

174. *Medidas lineales*.—La unidad lineal principal del nuevo sistema de medidas es el *metro* (1), que equivale á la *diezmillonésima* parte de la distancia del polo al ecuador, contada en el meridiano que pasa por París.

El metro es unidad *principal* entre las lineales por ser la que más se usa, y á la vez unidad *fundamental* eon relación al sistema, por servir de base para la formación de las demás.

La nomenclatura del sistema métrico es muy sencilla, por cuanto todas las medidas se expresan con un reducido número de palabras. En efecto, si al nombre de cada unidad principal se anteponen las palabras *deca, hecto, kilo, miria*, que significan respectivamente 10, 100, 1000 y 10000, se obtienen los nombres de los múltiplos; y si se anteponen las palabras *deci, centi, mili*, que significan décima parte, centésima y milésima, se obtienen los nombres de los submúltiplos.

El siguiente cuadro da á conocer la nomenclatura y valores relativos de las

Medidas lineales.

	METRO.	Unidad principal
Múltiplos. . .	*Decámetro*. . . . =	10 metros
	Hectómetro. . . .	100
	Kilómetro. . . .	1000
	Miriámetro. . . .	10000

(1) Metro viene de la voz griega *metrón*, que significa medida.

Submúltiplos. .	*Decímetro.*	. . .	10.ª parte del metro
	Centímetro.	. . .	100.ª parte
	Milímetro.	. . .	1000.ª parte

Medidas de capacidad. La unidad principal en esta clase de medidas es el *litro* (1). Aunque á las medidas de capacidad se les ha dado para mayor comodidad en su manejo la forma cilíndrica, la forma primitiva del litro es cúbica, teniendo interiormente las dimensiones de un decímetro de largo, otro de ancho y otro de alto. La capacidad del litro será, pues, igual al volumen de un decímetro cúbico.

	Litro.	. . . . .	Unidad principal
Múltiplos. . .	*Decalitro.* .	. . =	10 litros
	Hectolitro.	. . .	100
	Kilolitro. .	. . .	1000
Submúltiplos. .	*Decilitro.* .	. . .	10.ª parte del litro
	Centilitro.	. . .	100.ª parte
	Mililitro. .	. . .	1000.ª parte (2)

En las medidas de capacidad están admitidas las medidas *dobles* y *medias* de las que contiene el cuadro anterior, como son: *doble litro, medio litro, doble decilitro, medio decilitro, doble decalitro, medio decalitro,* etc.

Pesos. La unidad propia ó matemática de peso, es el *gramo* (3), pero como esta unidad no reune por su pequeñez relativa las condiciones de que ya hemos tratado (172), se ha adoptado como unidad usual el *kilogramo,* que es el peso de un litro de agua destilada á la temperatura de 4 grados del termómetro centigrado (4).

Este cambio de la unidad principal, impuesto por la conveniencia, ha producido una notable alteración en la nomenclatura de los pesos, puesto que las palabras destinadas en las medidas anteriores para designar múltiplos representan en las ponderales, bien la unidad misma kilogramo, bien divisores de éste, como el hectogramo y el decagramo.

---

(1) Litro, de *litrón,* medida griega que equivale próximamente al litro.

(2) En la nomenclatura del sistema métrico, ajustándonos al Diccionario de la Real Academia de la lengua, acentuamos los nombres de los múltiplos y submúltiplos del metro, mas no los del litro y gramo.

(3) De *gramma.*

(4) Como el peso de un mismo volumen de agua destilada varía según la temperatura de este líquido, se ha fijado la de cuatro grados, en la cual el agua alcanza el máximo de su peso.

	Kilogramo. . . .	Unidad principal
Múltiplos. . .	*Miriagramo.* . . =	10 kilogramos
	Quintal métrico. .	100
	Tonelada métrica. .	1000
Submúltiplos. .	*Hectogramo.* . .	10.ª parte del kilogramo.
	Decagramo. . . .	100.ª parte
	Gramo.	1000.ª parte
	Decigramo. . . .	10000.ª parte
	Gentigramo. . .	100000.ª parte
	Miligramo. . . .	1000000.ª parte

Los nombres de las medidas y pesas se escriben abreviadamente, designando las unidades principales con la primera letra de su nombre, y los múltiplos y submúltiplos con su propia inicial mayúscula seguida de la letra de la unidad principal como se ve á continuación:

Medidas lineales. Mm, Km, Hm, Dm, m, dm, cm, mm.
Medidas de capacidad. Kl, Hl, Dl, l, dl, cl, ml.
Pesos. Tm, Qm, Mg, Kg, Hg, Dg, g, dg, cg, mg.

175. Se llaman números métricos los números que expresan medidas del sistema métrico.

Como ha podido notarse en los cuadros que preceden, las medidas y pesas del sistema métrico conservan entre sí respecto de sus múltiplos y submúltiplos una relación constante, siendo cada medida diez veces mayor que su inmediata inferior, ó diez veces menor que su inmediata superior. Los submúltiplos de cada unidad principal son sucesivamente décimas, centésimas, etcétera, de dicha unidad; y así, el decímetro, el decilitro y el decigramo significan respectivamente la décima parte del metro, del litro y del gramo; el centímetro, el centilitro y el centigramo, la centésima parte, etc. Por consiguiente, los números métricos deberán escribirse como los decimales abstractos; esto es, escribiendo las unidades, si las hay, y si no, un cero en su lugar; después la coma; luego la parte decimal, y por último el nombre de la unidad principal á que se refiere el número.

Ejemplos:

1.º	28 metros 75 centímetros se escribe. . .	28'75 m.
2.º	54 centímetros.	0'54 m.
3.º	7 gramos 46 miligramos.	7'046 g.
4.º	124 litros 7 decilitros.	124'7 l.

176. Para reducir unidades de especie superior á inferior en el sistema métrico, basta correr la coma hacia la derecha uno,

dos ó más lugares, y al contrario si se quiere reducir unidades de especie inferior á superior.

Ejemplos:

Si el número	Se reduce á	Resulta
8356'247 m.	Km.	8'356247
	dm.	83562'47
	Hm.	83'56247
	mm.	8356247
	Dm.	835'6247
	Mm.	0'8356247
	cm..	835624'7

Ejercicios:

1.° Reducir el número 1256'7318 Kg. á g., Qm., cg., Tm., dg., Mg., mg., Hg.

2.° Reducir el número 4070'27 l. á ml., Hl., cl., Kl., dl., Dl.

3.° Reducir 7206'043 m. á Hm., dm., Km., cm., Dm., mm.,

LECCIÓN XXII.

Continuación del sistema métrico.—Medidas superficiales. Relación entre la unidad superficial y sus múltiplos y submúltiplos.—Orden decimal de los mismos.—Reducción de medidas superficiales de especie superior á inferior y al contrario.—Reducción de números incomplejos de unidades cuadradas á complejos y al contrario.

177. Medidas superficiales. Se llama unidad superficial un cuadrado que tiene de lado una medida cualquiera. Si el lado de este cuadrado es una vara, se denomina *vara cuadrada;* si un metro, *metro cuadrado,* etc.

Las medidas superficiales de mayor extensión se usan para expresar la superficie de una provincia, reino, etc., y toman el nombre de *topográficas;* las de menor extensión sirven para medir la superficie de los objetos que fabrican las artes, como la de un ladrillo, de una mesa, espejo, etc., y podrían denominarse medidas *comunes* por su frecuente y general aplicación; y por último, las de una magnitud intermedia se emplean para la medición de las tierras de cultivo, y se llaman *agrarias*.

El siguiente cuadro expresa los nombres y dimensiones de cada medida de esta clase (1).

Medidas topográficas..	*Kilómetro cuadrado..* . .	Es un cuadrado de un kilómetro de lado.
	Miriámetro cuadrado.. . .	Id. de un miriámetro.
Agrarias.	*Área..* . . .	Unidad que tiene diez m. de lado ó 100 m.^{2}
	Hectárea. . .	Múltiplo, que tiene 100 m. de lado ó 10.000 m.^{2}
	Centiárea. . .	Submúltiplo, que tiene un m. de lado, ó un m.^{2}
Comunes.	*Metro cuadrado.*	Es lo mismo que *centiárea.*
	Decímetro cuadrado.. . .	Es la 100.ª parte del m^2.
	Centímetro cuadrado.. . .	100.ª parte del dm^2.
	Milímetro cuadrado.. . .	100.ª parte del cm^2.

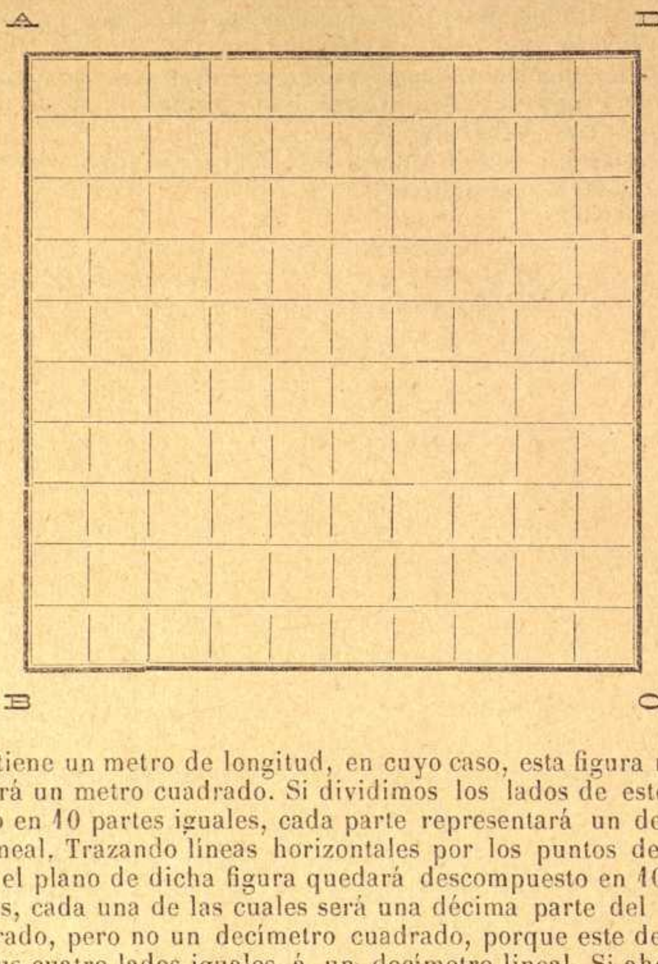
Como la relación que tienen con cualquier unidad cuadrada sus múltiplos y submúltiplos difiere de la que tienen los múltiplos y submúltiplos de las demás medidas con respecto á sus unidades correspondientes, convendrá hacer algunas aclaraciones sobre este punto.

El decímetro lineal es la *décima* parte del metro lineal; pero el decímetro cuadrado, en lugar de décima, es la *centésima* parte del metro cuadrado.

---

(1) Las medidas superficiales se escriben abreviadamente de esta manera: *Mm*^{2}, miriámetro cuadrado; *Km*^{2}, kilómetro cuadrado; *Ha*, hectárea; *a*, área; *m*^{2}, metro cuadrado; *dm*^{2}, *cm*^{2}, *mm*^{2}.

En efecto, supongamos que en el cuadrado A B C D, cada



lado tiene un metro de longitud, en cuyo caso, esta figura representará un metro cuadrado. Si dividimos los lados de este cuadrado en 10 partes iguales, cada parte representará un decímetro lineal. Trazando líneas horizontales por los puntos de división, el plano de dicha figura quedará descompuesto en 10 fajas ó tiras, cada una de las cuales será una décima parte del metro cuadrado, pero no un decímetro cuadrado, porque este debe tener sus cuatro lados iguales á un decímetro lineal. Si ahora se tiran también verticales por los puntos de división, cada una de las 10 fajas ó tiras quedará descompuesta en 10 cuadritos, que son decímetros cuadrados, y las 10 fajas ó toda la figura quedará descompuesta en 10×10, ó sea en 100 decímetros cuadrados.

Dividiendo los lados de uno de los 100 cuadritos en 10 partes iguales, cada una de las cuales sería un centímetro lineal, y trazando líneas verticales y horizontales como se ha hecho en la figura total, resultaría descompuesto en 100 cuadritos, que serían centímetros cuadrados, y por tanto el decímetro cuadrado no tiene 10 centímetros cuadrados, sino 100; y continuando de este modo, hallaríamos que el centímetro cuadrado tiene 100 milímetros cuadrados, etc.

Si en lugar de suponer que el cuadrado A B C D tiene un metro de lado, suponemos que tiene 10 metros, representará una *área*, la cual aparecería en tal caso descompuesta en 100 metros cuadrados ó centiáreas, etc.

178. Infiérese de lo expuesto:

1.° Que las décimas de metro cuadrado, son diez veces mayores que los decímetros cuadrados; las centésimas, 100 veces mayores que los centímetros, etc.

2.° Que los decímetros cuadrados, son centésimas del metro cuadrado; los centímetros, diezmilésimas, y los milímetros, millonésimas.

3.° Que los decámetros cuadrados ó áreas, son centenas de metros cuadrados; los hectómetros cuadrados ó hectáreas, decenas de millar de metros cuadrados.

4.° Que cada medida cuadrada es cien veces mayor que su inmediata inferior ó cien veces menor que su inmediata superior.

179. Para fijar más aún las ideas en cuanto se acaba de decir y para evitar errores que pueden cometerse en los cálculos de las medidas superficiales por mala interpretación de las mismas, advertiremos por último, que dado un número decimal en el que se tome por unidad el metro cuadrado, contando desde la coma hacia la derecha, los dos primeros guarismos representan decímetros cuadrados; los dos siguientes, centímetros cuadrados, etc.; y desde la coma hacia la izquierda, los dos primeros representan metros cuadrados ó centiáreas; los dos siguientes, decámetros cuadrados ó áreas; los dos siguientes hectómetros cuadrados ó hectáreas, etc.

180. De la relación que como hemos visto tienen con la unidad cuadrada sus múltiplos y submúltiplos, se deduce que para reducir unidades cuadradas de especie superior á inferior, se deberá correr la coma de dos en dos lugares hacia la derecha; y para reducir de especie inferior á superior, de dos en dos lugares hacia la izquierda.

Así por ejemplo,

Si el número	Se reduce á	Resulta
830705'06252 m.²	Ha. . . .	83'070506252
	cm.². . .	8307050625'2
	a. . . .	8307'0506252
	dm.² . .	83070506'252
	mm.² . .	830705062520

181. Para descomponer en sus diferentes órdenes de unidades un número decimal incomplejo de medidas cuadradas, bastará tener presente lo dicho en el número 177, y así, por ejemplo, el número 62005'069407 m.^{2} se podría descomponer en

6 Ha. + 20 a. + 5 m.^{2} + 6 dm.^{2} + 94 cm.^{2} + 7 mm.^{2}

Sirvan de nuevos ejemplos los números que descomponemos á continuación:

1.° 704'603 m.^{2} = 7 a. + 4 m.^{2} + 60 dm.^{2} + 30 cm.^{2}

2.° 35028'6 m.^{2} = 3 Ha. + 50 a. + 28 m.^{2} + 60 dm.^{2}

3.° 405'024382 m.^{2} = 4 a. + 5 m.^{2} + 2 dm.^{2} + 43 cm.^{2} + 82 mm.^{2}

4.° 60035'00047 m.^{2} = 6 Ha. + 35 m.^{2} + 4 cm.^{2} + 70 mm.^{2}

182. Al contrario, para reducir á unidades de una sola especie un número complejo de medidas cuadradas, bastará escribir un solo número dando á cada cifra el orden decimal que le corresponda (177), poniendo la coma á la derecha de las unidades á cuya especie quiera reducirse dicho número.

Así, por ejemplo, si quisiéramos reducir á decimal de metros cuadrados el número 4 Ha. + 5 a. + 6 dm^2 + 35 cm.^{2} + 9 mm.^{2} resultarían 405'063509 m.^{2}

Del mismo modo:

1.° 72 Ha. 6 m.^{2} 28 cm.^{2} reducido á metros cuadrados, resulta 720006'0028 m.^{2}

2.° Reduciendo á áreas el número 15 Ha. 7 a. 3 m.^{2} 9 dm.^{2} resulta 1507'0309 áreas.

3.° Reduciendo á decímetros cuadrados el número 4 a. 12 m.^{2} 5 dm.^{2} 72 cm.^{2} resulta 41205'72 dm.^{2}

Ejercicios:

1.° Redúzcase el número 15307'60284 m.^{2} sucesivamente á Ha., dm.^{2}, cm.^{2}, a., mm.^{2}

2.° Idem el número 1870'450032 m.^{2}

3.° Redúzcase sucesivamente á m.^{2}, cm.^{2}, Ha. y dm.^{2} el número 5072'0083 áreas.

4.° Descompóngase en sus diferentes órdenes de unidades el número 30705'430506 m.^{2}

5.° Idem el número 20006'40007 m.^{2}

6.° Idem el número 30200'06230 m.^{2}

7.° Redúzcase á un solo número decimal de metros cuadrados el número 4 Ha. + 2 a. + 23 m.^{2} + 7 dm.^{2}

8.° Idem á un número decimal de áreas el número 36 Ha. 7 a. 4 m.^{2} 53 dm.^{2}

9.° Idem á un número decimal de decímetros cuadrados el número 6 a. 4 m.^{2} 56 dm.^{2} 8 cm.^{2}

10. Idem á un número de hectáreas el número 43 Ha. 9 a. 6 m.^{2} 4 dm.^{2}

LECCIÓN XXIII.

Continuación del sistema métrico.—Medidas cúbicas.—Relación entre la unidad cúbica y sus múltiplos y submúltiplos.—Orden decimal de los mismos.—Reducción de unidades cúbicas de especie superior á inferior y al contrario.—Reducción de números incomplejos de unidades cúbicas á complejos y al contrario.—Monedas.—Unidades de tiempo.

183. Se llama *unidad cúbica,* un cubo; esto es, un cuerpo terminado por seis cuadrados iguales, y cuyas tres dimensiones, largo, ancho y grueso tienen la misma medida. Si cada una de dichas dimensiones es un metro, el cubo se llamará *metro cúbico;* si un pie, *pie cúbico,* etc.

Las medidas cúbicas, exceptuando los múltiplos, que no se usan, son las siguientes:

UNIDAD. *Metro cúbico,* que es un cubo de un metro de lado.

Submúltiplos.	*Decímetro cúbico.* . .	1.000.ª parte del m.^{3} (1).
	Centímetro cúbico. . .	1.000.000.ª parte.
	Milímetro cúbico. . .	1.000.000.000.ª parte.

184. Si bien el metro cúbico se puede dividir como toda unidad en diez décimas, cien centésimas, etc., no deben confundirse por analogía con las medidas lineales, la décima de metro cúbico con el decímetro cúbico, ni las centésimas con el centímetro cúbico, etc. El metro cúbico tiene, en efecto, como toda unidad, diez décimas, pero no diez decímetros cúbicos, sino 1000; tiene cien centésimas, pero no cien centímetros, sino 1.000.000, etc.

(1) Los nombres metro cúbico, decímetro cúbico, centímetro cúbico y milímetro cúbico, se escriben abreviadamente *m³*, *dm³*, *cm³*, *mm³*.

De aquí resulta:

185. 1.° Que las décimas de metro cúbico son 100 veces mayores que los decímetros cúbicos; las centésimas, 10.000 veces mayores que los centímetros, etc.

2.° Los decímetros cúbicos pertenecen al orden de las milésimas de metro cúbico; los centímetros, al de las millonésimas, etc.

3.° Cada unidad cúbica es mil veces mayor que su inmediata inferior, ó mil veces menor que su inmediata superior.

Ahora bien; si dado un número decimal en el que se tome por unidad el metro cúbico, contamos desde la coma hacia la derecha, los tres primeros guarismos representan decímetros cúbicos; los tres siguientes, centímetros cúbicos, etc.; y contando desde la coma hacia la izquierda, aunque todos se consideren metros cúbicos, por no usarse sus múltiplos, los tres primeros representan decámeros cúbicos; los tres siguientes, hectómetros cúbicos, etc.

186. Para reducir unidades cúbicas de especie superior á inferior bastará correr la coma de tres en tres lugares hacia la derecha, y para reducir unidades de especie inferior á superior, se correrá también de tres en tres lugares, pero hacia la izquierda.

Ejemplos:

El número	Reducido á	Resulta
75'04300827 m.³	dm.³.	75043'00827
	cm.³.	75043008'27
	mm.³.	75043008270

187. Para descomponer un número decimal de metros cúbicos en sus diferentes órdenes de unidades cúbicas se tomarán todas las cifras que preceden á la coma como metros cúbicos, las tres que siguen á la coma como decímetros, las tres siguientes como centímetros, etc.

Así 307'024068003 m.^{3} = 307 m.^{3} + 24 dm.^{3} + 68 cm.^{3} + 3 mm.^{3}

188. Al contrario, para reducir á número decimal incomplejo un número complejo de medidas cúbicas, se escriben en un solo número primero los metros cúbicos, después la coma y luego la parte decimal, colocando los diferentes órdenes de unidades decimales en el lugar que les corresponde.

Así

530 m.^{3} + 4 dm.^{3} + 28 cm.^{3} + 70 mm.^{3} = 530'004028070 m.^{3}

189. Monedas.—Las monedas son de tres clases: de *oro*, de *plata* y de *bronce*.

Como cada uno de estos metales no tiene por sí la dureza que las monedas necesitan para no desgastarse mucho con el uso, se combinan con el cobre las de oro y plata, y las de bronce se forman con el cobre, estaño y zinc, por cuyo medio adquieren mayor consistencia.

La cantidad que debe entrar de cada uno de dichos metales en esta liga, está determinada por una ley, y se llama ley de la moneda. Pero la ley no sólo ha fijado las proporciones de esta mezcla, sino también el valor de las monedas que deben acuñarse, su peso y hasta su diámetro. Para formar mejor idea sobre este punto, véase el cuadro siguiente:

MONEDA.

Clases de moneda.	Su valor en *Pesetas.*	Su peso en *Gramos.*	Ley en milésimas. *Puro.*	Ley en milésimas. *Mezcla.*
De oro.	100	32'258	900	100
	50	16'129		
	25	8'065		
	10	3'226		
	5	1'613		
De plata.	5	25	835	165
	2	10		
	1	5		
	0'50	2'50		
	0'25	1		
De bronce. . . .	0'10	10	950	cobre
	0'05	5	40	estaño
	0'02	2	10	zinc
	0'01	1		

190. *Unidades de tiempo.*—Para establecer la unidad principal se ha tomado como base el tiempo que la tierra tarda en correr su órbita; pero como en esta vuelta alrededor del sol el globo gasta 365 días, 5 horas, 48 minutos y 49 segundos, cuyo espacio de tiempo constituye el año *solar* ó *astronómico,* para evitar fracciones de tiempo en la duración del año, se ha convenido en asignar á éste 365 días, que es lo que constituye el año *común,* y con el tiempo restante del año astronómico se forma cada cuatro años un día que se agrega al mes de Febrero. El año de 366 días que resulta en este caso se llama año bisiesto.

Hé aquí ahora las actuales

Divisiones del tiempo.

Unidad. . . .	*Año*, que es próximamente el tiempo que invierte la tierra en dar una vuelta alrededor del sol.
Múltiplo. . . .	*Siglo* = 100 años.
Submúltiplos. .	*Mes* = 30 días (1).
	Día = 24 horas.
	Hora = 60 minutos.
	Minuto = 60 segundos (2).

Ejercicios:

1.° Redúzcase el número 140'30800425 m.^{3} á cm.^{3}, dm.^{3}, mm.^{3} sucesivamente.

2.° Idem el número 1572640'84 cm.^{3} á dm.^{3}, mm.^{3}

3.° Descompóngase en m.^{3}, dm.^{3}, cm.^{3} y mm.^{3} el número 7'08405607 m.^{3}

4.° Idem el número 35'008400007 m.^{3}

5.° Redúzcase á incomplejo decimal de m.^{3} el número 4 m.^{3}, 30 dm.^{3}, 2 cm.^{3}, 6 mm.^{3}

LECCIÓN XXIV.

Práctica de las operaciones fundamentales de la Aritmética con los números decimales concretos.

191. Ajustándose exactamente al sistema decimal de numeración las medidas, pesas y monedas del sistema métrico, según hemos visto anteriormente, y sabiendo ya cómo se ejecutan las cuatro operaciones fundamentales con los números decimales

(1) Aunque en Aritmética se consideran generalmente de 30 días todos los meses para el cálculo, sabido es que Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Octubre y Diciembre tienen 31, y Febrero 28 ó 29, según que el año sea común ó bisiesto.

(2) También se cuenta el tiempo por semanas, que tienen 7 días.

abstractos, se sabrán ejecutar también con los números decimales concretos. Sin embargo, esto se aclarará más todavía resolviendo algunos problemas á los cuales deben aplicarse dichas operaciones, y hé aquí lo único de que se tratará en la lección presente.

1.° *De una pieza de tela se vendieron por una parte 8'45 m., por otra 13'072 m. y por otra 0'9 m. Cuánta tela se ha vendido? Efectuando la suma resultan 22'422 m.*

8'45
13'072
0'9
22'422

2.° *En una tienda se compraron 7'5 kg. de garbanzos, en otra 456 g., en otra 3'6 Hg. y en otra 25'8 dg. Cuántos garbanzos se han comprado?*

Siendo heterogéneos los sumandos, se reducirán bien sea á kg., bien á gramos, etc., para hacerlos homogéneos y efectuando la suma resulta en kg. 8'574 y en g. 8574.

Los mismo se hará siempre que se nos den para sumar números heterogéneos.

Kilogramos.	Gramos.
7'5	7500
0'456	456
0'36	360
0'258	258
8'574	8574

3.° *Se compran tres prados que tienen: el 1.° 2 Ha. 25 a. 45 m.²; el 2.° 68 a. 9 m.², y el 3.° 7 Ha. 84 a. 93 m.² Cuánto suman los tres prados?*

Los sumandos se podrán poner en forma compleja ó incompleja decimal y sumarlos de una ú otra manera, como aquí se ve:

2 Ha.	25 a.	45 m.²	225'45 áreas
	68	9	68'09
7	84	93	784'93
10 Ha.	78 a.	47 m.²	1078'47

En el primer caso se han escrito los sumandos unos debajo de los otros, de modo que formen columna aparte los sumandos de cada especie, y empezando la suma por la derecha se han sumado sucesivamente como si fueran tres números enteros sin separación alguna de especies. Y esto debe ser así, porque al pasar de los m.^{2} á las áreas, cada diez decenas de aquéllos, que hacen 100 m.^{2}, componen una unidad de área, y al pasar de las áreas á las Ha., cada diez decenas de aquéllas forman también una unidad de éstas, *llevándose* por tanto *una* por cada 10 al pasar de unas columnas á otras, como sucede con los números enteros.

En el segundo caso, los sumandos, que podían reducirse á decimales incomplejos de cualquier especie, se han reducido á áreas, y se han sumado como decimales.

Una disposición análoga puede darse á los sumandos que expresen unidades cúbicas, como se verá por el ejemplo siguiente:

4.° *Por una parte se hacen 5 m.^{3} 38 dm.^{3} 28 cm.^{3} de obra; por otra 12 m.^{3} 968 dm.^{3} 7 cm.^{3}, y por otra 870 dm.^{3} 986 cm.^{3} A cuánto asciende el total de la obra hecha?*

Sumándolos en forma compleja, como si fueran enteros, resultan 18 m.^{3} 877 dm.^{3} 21 cm.^{3}

Sumándolos en forma decimal después de reducirlos á m.^{3}, se obtiene la suma, equivalente á la anterior, de 18'877021 m.^{3}

5 m.^{3}	38 dm.^{3}	28 cm.^{3}		5'038028 m.^{3}
12	968	7		12'968007
	870	986		0'870986
18 m.^{3}	877 dm.^{3}	21 cm.^{3}		18'877021 m.^{3}

5.° *De un depósito en que había 354 Hl. de vino se sacaron por una parte 1524'86 lit., por otra 16745'85 l., y por otra 294'6 l. Cuánto vino queda en el depósito?*

Sumando los litros sacados y restando la suma de los 35400 litros que tenía el depósito, quedan 16834'69 l.

1524'86	35400
16745'85	18565'31
294'6	16834'69
18565'31	

6.° *De una viña que tenía 5 Ha. se vendieron 2 Ha. 83 a. 5 m.^{2} Cuánto terreno queda?*

Efectuando la resta después de reducir el minuendo y el sustraendo á m.^{2} resulta 21695 m.^{2}, ó 2 Ha. 16 a. 95 m.^{2}

50.000
28.305
21.695

7.° *En un día se hacen 164'36 m. de obra. Cuántos metros se harán en 10 días? Corriendo la coma un lugar á la derecha en el multiplicando resultan 1643'6 metros.*

8.° *Se compran 165 Hl. de vino á 3'25 pesetas el Dl. y 6 Hl. á 1'5 pesetas el l. Cuánto vale todo el vino comprado?*

165 Hl. componen 1650 Dl., que á 3'25 pesetas valen 5362'50 pesetas. 6 Hl. componen 600 l., que á 1'5 pt. valen 900 pesetas, Sumando los dos valores resultan 6262'50 pesetas, importe de todo el vino.

$$\begin{array}{r} 1650 \\ 3'25 \\ \hline 825 \\ 330 \\ 495 \\ \hline 5362'50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1'5 \\ 600 \\ \hline 900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5362'50 \\ 900 \\ \hline 6262'50 \end{array}$$

9.° *Cuánto vale una losa de mármol de 2'384 m.² á razón de 2'75 pt. el dm.²?*

Reduciendo los 2'384 m.² á dm.² y multiplicando el resultado 238'4 por 2'75, salen 655'60 pt., valor de dicha losa.

$$\begin{array}{r} 238'4 \\ 2'75 \\ \hline 11920 \\ 16688 \\ 4768 \\ \hline 655'600 \end{array}$$

10.° *Si en una hora se hacen 472 dm.³ de obra, cuántos m.³ se harán en 20 horas?*

Multiplicando 472 por 20, resultan 9440 dm.³, ó lo que es lo mismo 9'440 m.³

$$\begin{array}{r} 472 \\ 20 \\ \hline 9440 \text{ dm.}^3 \\ 9'440 \text{ m.}^3 \end{array}$$

11.° *100 sacos de garbanzos pesaron 57'5 Qm. Cuántos Kg. pesaba cada saco?*

Reduciendo los Qm. á Kg., resultan 5750 y partiendo por 100 se obtendrá 57'50 Kg., peso de cada saco.

12.° *Por 67'54 Hl. de arroz se pagaron 5860'72 pesetas. Cuánto vale un litro?*

Partiendo 3860'72 pesetas por 6754, que son los litros que tienen los 67'54 Hl., resultan 0'57 pt., valor del litro.

$$\begin{array}{r|l} 3860'72 & 6754 \\ \cline{2-2} 48372 & 0'57 \\ 1094 & \end{array}$$

13.° *De un campo que tenía 2 Ha. 69 a. 84 m.², se vendió la mitad á 30'50 pesetas el área, y la otra mitad á 38 pesetas. Cuánto dinero se sacó de todo el campo?*

Reducido el campo á áreas resultan. . 269'84
La mitad de este número es. . . . . 134'92

Multiplicando ahora 134'92 por 30'50 y 134'92 por 38, resultan 9242'02 pt., valor de todo el campo.

134'92	134'92	4115'06
30'50	38	5126'96
67460	107936	9242'02
40476	40476	
4115'0600	5126'96	

LECCIÓN XXV.

Sistema antiguo de medidas, pesas y monedas.—Números complejos ó denominados.—Reducción de unidades de especie superior á inferior y al contrario.—Adición y sustracción de los números denominados.

192. Por más que el sistema métrico se halle ya establecido por la ley y sea obligatorio para todos su uso, no se debe desconocer el sistema antiguo, ya porque éste no se ha desterrado aún por completo en las transacciones del comercio, ya porque habituados á apreciar las cantidades con las antiguas medidas suelen entrar en los cálculos algunas veces.

En la imposibilidad de dar cabida en el texto á la gran variedad de pesas y medidas que se conocían en las diferentes provincias de España, lo cual nos desviaría por otra parte de nuestro objeto, nos limitaremos á exponer las de Castilla, por ser las que tenían un uso más general.

Medidas de longitud.

UNIDAD. La *vara* de Burgos tiene 3 pies.

Múltiplos. . . { Legua. . . . . $6666\frac{2}{3}$ varas.
Estadal.. . . . 4 varas.

Submúltiplos.	Pie.	12 pulgadas.
	Pulgada. . . .	12 líneas.
	Línea.	12 puntos.

Medidas de capacidad.

Para áridos. .	*Cahiz*.	12 fanegas.
	Fanega.	12 celemines.
	Celemín.. . . .	4 cuartillos.
Para líquidos.	*Moyo*.	16 cántaras.
	Cántara.. . . .	8 azumbres.
	Azumbre. . . .	4 cuartillos.
	Cuartillo. . . .	4 copas.

Medidas de peso.

UNIDAD. *Arroba*, que tiene 25 libras.

Múltiplos. . .	*Tonelada de peso*. .	20 quintales.
	Quintal.	4 arrobas.
Submúltiplos.	*Libra*.	16 onzas.
	Onza.	16 adarmes.
	Adarme.. . . .	3 tomines.
	Tomín.	4 granos.

Además de estos pesos se usaban:

Para pesar medicamentos.

Libra. . . .	12 onzas.
Onza. . . .	8 dracmas.
Dracma. . .	3 escrúpulos.
Escrúpulo. .	24 granos.

Para pesar el oro y la plata.

Marco.. . .	8 onzas.
Onza. . . .	8 ochavas.
Ochava. . .	6 tomines.
Tomín.. . .	12 granos.

Para pesar piedras preciosas.

El quilate, que se divide en medios, cuartos, octavos, dieciseis avos, treinta y dos avos y sesenta y cuatro avos.

Medidas superficiales.

Legua cuadrada. . .	Un cuadrado de una legua de lado.
Estadal cuadrado. . .	16 varas cuadradas.
Vara cuadrada. . . .	9 pies cuadrados.
Pie cuadrado. . . .	144 pulgadas cuadradas.
Pulgada cuadrada. . .	144 líneas cuadradas.
Fanega de tierra. . .	Un cuadrado de 96 varas de lado ó 9216 var. cuad. ó 12 celemines.
Celemín.	4 cuartillos.
Cuartillo..	192 varas cuadradas.

Medidas cúbicas.

Vara cúbica.. . . .	27 pies cúbicos.
Pie cúbico.	1728 pulgadas cúbicas.
Pulgada cúbica.. . .	1728 líneas cúbicas.

Monedas.

De oro. . .	*Onza.* . . .	16 duros.
	Media onza. .	8 duros.
	Doblón. . .	4 duros.
De plata. .	*Duro.* . . .	2 escudos ó 5 pesetas.
	Escudo. . .	10 reales.
	Peseta.. . .	4 reales.
	Real. . . .	34 maravedises.
De cobre. .	*Dos cuartos.*	
	Cuarto.	
	Ochavo.	

Medidas de la circunferencia.

La circunferencia. . .	Se divide en 360 grados.
El grado..	60 minutos.
El minuto.	60 segundos.
El cuadrante. . . .	90 grados.

193. Se llaman números *complejos* ó *denominados* los que expresan unidades de distinta especie pero de una misma clase, como el número 16 arrobas, 15 libras, 5 onzas. Si expresan unidades de una sola especie se llaman *incomplejos*.

Para reducir un número incomplejo á unidades de especie inferior se multiplica dicho número por las unidades que la especie que indica tenga de la especie á que se quiere reducir; ó bien se reduce primero á su especie inmediata inferior, después á la siguiente, y así continuando hasta llegar á la especie que se desee.

Supongamos que el número 18 quintales se haya de reducir á onzas.

Multiplicaremos 18 quintales por 1600 onzas que tiene el quintal, y resultarán 28800. De otro modo; los 18 quintales se reducen á arrobas, el resultado á libras y éstas á onzas.

Hé aquí las dos formas del cálculo:

1600	18
18	4
128	72
16	25
28800	360
	144
	1800
	16
	108
	18
	28800

194. Cuando sea complejo el número que se haya de reducir á unidades de especie inferior, conviene pasar de cada especie á la inmediata hasta llegar á la última.

Supongamos que se quiere reducir á pulgadas el número 35 varas, 2 pies, 9 pulgadas. Se reducirán primero las 35 varas á pies, añadiendo dos pies al resultado. Los pies que resulten se reducirán á pulgadas, añadiendo 9 pulgadas, y resultarán 1293 pulgadas.

35
3
105
2
107
12
214
1079
1293

195. La reducción de unidades de especie inferior á superior

se puede practicar por medio de una sola división ó por varias divisiones sucesivas.

Supongamos que se haya de reducir á arrobas el número 65837 adarmes. Dividiendo 65837 por 6400 adarmes que tiene la arroba, resultan 10 arrobas y 1837 adarmes.

De otro modo: Se divide 65837 por 16 y quedará reducido á onzas; éstas se dividen por 16 y resultarán libras; y dividiendo las libras que resulten por 25, saldrán 10 arrobas, 7 libras, 2 onzas, 13 adarmes, como se vé á continuación.

65837	6400	65837	16				
	10 arrob.	18	4114 onz.	16			
1837 onzas.		23	91	257 libras	25		
		77	114				
		13 adarmes			10 arrob.		

196. *Adición de los números complejos.*—Para sumar números complejos se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades de cada especie, se tira una recta por la parte inferior, se suman las unidades de la especie inferior, y si resulta alguna unidad del orden superior siguiente, se reserva para sumarla con las unidades de la especie inmediata, escribiendo solamente las restantes debajo de la primera columna, y se continúa de este modo la suma en las columnas sucesivas hasta terminar la operación.

Se quiere sumar, por ejemplo, los números 85 grados, 52 minutos, 37 segundos (1); 19° 24' 16''; 6° 30' 9'' y 24° 43' 56''.

Disponiendo los sumandos y efectuando la suma como acabamos de decir, resulta 136° 30' 58''.

85°	52'	37''
19	24	16
6	30	9
24	43	56
136 grados	30 minutos	58 segundos

En efecto, sumando los segundos resultan 118 que componen un minuto y quedan 58 segundos. Se escriben los 58 segundos debajo de los segundos, y sumando el minuto que ha resultado con los minutos, salen 150 minutos, los cuales componen 2 grados y quedan 30 minutos. Estos se escriben debajo de los minu-

(1) Para indicar los grados se escribe un cero en la parte superior derecha del número: para los minutos, un acento; para los segundos dos acentos. Así el número 85 grados 52 minutos 37 segundos se escribirá abreviadamente 85° 32' 37''.

tos, y sumando los 2 grados con los números de esta especie, resultan 136 grados.

197. *Sustracción de los números complejos.*—Para restar los números complejos se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que las unidades de cada especie se correspondan en columna, y tirando una recta por la parte inferior se empieza la resta por la derecha. Si algún número del minuendo es menor que su correspondiente del sustraendo, en cuyo caso no podrían restarse, se toma una unidad de la especie inmediata superior, se descompone en unidades de la especie de que se trata, agregándolas á las que había, y se efectúa la resta, teniendo cuidado de considerar de menos en el minuendo la unidad que se ha tomado.

Ejemplos:

1.° *Del número 53 años, 7 meses y 14 días, se ha de restar 29 años, 5 meses, 6 días.*

53 años	7 meses	14 días
29	5	6
24 años	2 meses	8 días

2.° *De 587 fanegas, 3 celemines, 1 cuartillo, se han de restar 298 fanegas, 7 celemines, 3 cuartillos.*

587 fanegas	3 celemines	1 cuartillo
298	7	3
288 fanegas	7 celemines	2 cuartillos

Podrá suceder también que el minuendo carezca de una ó varias especies de las que contiene el sustraendo. Supongamos que de 7 quintales se haya de restar 3 quintales, 2 arrobas, 19 libras, 7 onzas. En este caso, se tomará un quintal del minuendo, y se descompondrá en 3 arrobas, 24 libras y 16 onzas, de cuyos números, que convendrá escribir en sus lugares correspondientes del minuendo, se restarán los de la misma especie del sustraendo, teniendo cuidado de rebajar antes en el minuendo la unidad que se ha tomado para facilitar la operación. Así, el ejemplo propuesto quedaría en esta forma:

6 quintales	3 arrobas	24 libras	16 onzas
3	2	19	7
3 quintales	1 arroba	5 libras	9 onzas

Del mismo modo se procederá en todos los casos análogos al anterior para ahorrar trabajo y equivocaciones.

Ejercicios:

1.° Reducir á horas 75 años.

2.° Reducir á pulgadas cuadradas el número 32 varas cuadradas, 5 pies cuadrados, 70 pulgadas cuadradas.

3.° Reducir á cuartillos 16 cahices, 8 fanegas, 7 celemines.

4.° Reducir á varas 6.384.560 líneas.

5.° Reducir á complejo de fanegas, celemines y cuartillos, el número 2.654.320 varas cuadradas.

6.° Reducir á complejo de varas cúbicas, pies cúbicos y pulgadas cúbicas el número 6.302.112 pulgadas cúbicas.

7.° Sumar 15 varas cuadradas, 6 pies cuadrados, 84 pulgadas cuadradas + 145 v.^{2}, 7 piés^2, 116 pulg.^{2} + 18 v.^{2}, 4 pies^2, 90 pulg.^{2} + 45 v.^{2}, 8 pies^2, 130 pulg.^{2}

8.° Sumar 35 quintales, 2 arrobas, 20 libras, 9 onzas + 6 quintales, 3 arrobas, 18 libras, 10 onzas + 42 quintales, 1 arroba, 21 libras, 7 onzas.

9.° Del número 28 cahices, 5 fanegas, 2 celemines, restar 7 cahices, 10 fanegas, 3 celemines, 2 cuartillos.

10. De 52 varas cuadradas, restar 36 varas cuadradas, 5 pies cuadrados, 74 pulgadas cuadradas.

11. De 68°, restar 45° 17' 28" 52'".

LECCIÓN XXVI.

Valuación de quebrados.—Transformaciones de los números complejos en otros equivalentes incomplejos.

198. *Valuar* un quebrado es hallar su valor en unidades conocidas. Supongamos el quebrado $\frac{7}{9}$ de año. No siendo los *novenos* de año medidas usuales, porque no se mide ni se cuenta por *novenos*, con dificultad puede apreciarse, al menos á primera vista, la cantidad de tiempo que dicho quebrado representa; pero si lo reducimos á un número equivalente, de meses, días, etc., unidades que nadie desconoce, quedará valuado, y tendremos desde luego un concepto claro del tiempo que expresa.

Veamos ahora cómo se valúan los quebrados. Sea el quebrado $\frac{7}{9}$ de año.

Como el año tiene 12 meses, es evidente que $\frac{7}{9}$ de año será lo mismo que $\frac{7}{9}$ de doce meses. Para saber lo que valen $\frac{7}{9}$ de 12 meses, hallaremos primeramente lo que vale $\frac{1}{9}$ de 12 meses, y el resultado lo multiplicaremos por 7.

$\frac{1}{9}$ de 12 meses ó la 9.ª parte de 12 meses será 12 : 9, ó $\frac{12}{9}$ y 7 novenos valdrán por tanto $\frac{12}{9} \times 7 = \frac{12 \times 7}{9} = \frac{84}{3} = 9\,\frac{3}{9}$ $= 9\,\frac{1}{3}$ meses.

Valuada la fracción propuesta, resultan $9\,\frac{1}{3}$ meses. Pero este resultado contiene la fracción de mes $\frac{1}{3}$, y como el mes tiene 30 días (1), $\frac{1}{3}$ ó la tercera parte de mes, será diez días, y por tanto $\frac{7}{9}$ de año $=$ 9 meses y 10 días.

En la práctica se dispone la valuación de quebrados, de manera que todas las operaciones que hayan de hacerse, aparezcan las unas á continuación de las otras seguidamente. Al efecto, se multiplica el numerador del quebrado por las unidades que la especie á que se refiere tenga de la especie inmediata inferior, y se parte el producto por el denominador. Si queda resíduo, se multiplica por las unidades que la especie á que se refiere este resíduo tenga de la inmediata siguiente, y el producto se parte por el denominador, continuando la operación de este modo hasta llegar á un cociente exacto ó bien á una especie cuyo valor sea tan insignificante que pueda despreciarse. Hé aquí un ejemplo:

Supongamos que se quiera valuar en libras, onzas y adarmes el quebrado $\frac{5}{7}$ de arroba. Disponiendo la operación como se acaba de decir y se ve á continuación, se multiplica el numerador 5 por 25, que son las libras que tiene la arroba, se parte el producto 125 por el denominador 7, resultan 17 libras y quedan 6 de resíduo. Multiplicándolas por 16, que son las onzas que tiene la libra, resultan 96, se parten por 7 y resultan 13 onzas, quedando 5 de resíduo. Este resíduo se multiplica por 16, número de adarmes que tiene la onza y resultan 80, se parten por 7 y salen 11 adarmes, quedando de resíduo 3 que deben despreciarse.

(1) En lo sucesivo consideraremos siempre el mes de 30 días para dar mayor fijeza al cálculo.

25	
× 5	
125 libras	7
55	17 libras 13 onzas 11 adarmes
6	
× 16	
96 onzas	
26	
5	
× 16	
× 80 adarmes	
10	
3	

Así, pues, los $\frac{5}{7}$ de arroba equivalen á 17 libras, 13 onzas, 11 adarmes.

En el estudio de los números fraccionarios se vió ya que el valor de un quebrado de quebrado es igual al producto de todos los numeradores partido por el de todos los denominadores.

De consiguiente, si quisiéramos valuar un quebrado, como por ejemplo, $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$ de vara, lo reduciríamos primero á un solo quebrado, y se procedería después como se acaba de ver.

Así, $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{9}$ de vara $= \frac{3 \times 5}{8 \times 9} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$ de vara $= \frac{5}{24}$ de 36 pulgadas $= 7\frac{1}{2}$ pulgadas.

Del mismo modo, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de año $= \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \frac{15}{48}$ $= \frac{5}{16}$ de año $= 3\frac{3}{4}$ meses.

199. La diversidad de especies de que constan los números complejos, complica y dificulta las operaciones que con ellos hayan de hacerse, y particularmente la multiplicación y la división. Por esto conviene simplificar los números complejos, transformándolos en otros equivalentes incomplejos que, ya tengan la forma de números enteros, ya la de fraccionarios ó mixtos, se refieran á unidades de una sola especie.

200. Los números complejos pueden reducirse: 1.°, á enteros incomplejos; 2.°, á fracciones comunes ó números mixtos; 3.°, á números decimales.

Se reducen á enteros incomplejos reduciéndolos á unidades de la última especie, de la manera que se explicó en el número (**193**). Así el complejo 2 varas, 1 pie, 5 pulgadas se convierte en el entero incomplejo 89 pulgadas.

201. Los números complejos pueden reducirse á incomplejos en forma de quebrado común ó número mixto, reduciéndolos primero á unidades de su última especie, y poniendo al resultado por denominador el número de unidades que la especie á que se quiera reducir, tenga de la especie inferior.

Sea el número 2 varas, 1 pie, 5 pulgadas del ejemplo anterior.

Reduciéndolo á la última especie, resulta, según hemos visto, 89 pulgadas. Ahora bien, si se quiere reducir á fracción común de vara, se pondrá al número 89 por denominador el número 36, que son las pulgadas que tiene la vara, y resultarán $\frac{89}{36}$ varas; y si queremos reducirlo á fracción de pie, pondremos por denominador de 89 el número 12, y resultarán $\frac{89}{12}$ pies.

Como todos los quebrados obtenidos son impropios, se podrán convertir en números mixtos y resultará $\frac{89}{36}$ vara $= 2\frac{17}{36}$ varas, y $\frac{89}{12}$ pies $= 7\frac{5}{12}$ pies. De modo que el número 2 varas, 1 pie, 5 pulgadas, puede presentarse bajo cualquiera de las formas incomplejas siguientes:

$$89 \text{ pulg.}; \quad \frac{89}{36} \text{ varas}; \quad 2\frac{17}{36} \text{ varas}; \quad \frac{89}{12} \text{ pies}; \quad 7\frac{5}{12} \text{ pies}.$$

202. Los números complejos pueden reducirse á números decimales incomplejos.

Para esto bastará reducirlos primero á quebrados comunes y después éstos á decimales; pero se puede prescindir de la primera de dichas reducciones y obtener con más prontitud el resultado.

Supongamos el mismo número 2 varas, 1 pie, 5 pulgadas.

Antes de reducir este número á decimal, convendrá fijar la unidad á que deseamos referirlo. Si se quiere un número mixto decimal que exprese varas y fracción de varas, las dos varas constituirán la parte entera del número decimal que se busca, y bastará reducir á fracción decimal de vara 1 pie y 5 pulgadas. Al efecto reduciremos 1 pie y 5 pulgadas á pulgadas, y resultan 17 pulgadas. Partiendo este número por 36, que son las pulgadas que tiene la vara, resulta que 1 pie 5 pulgadas equivale á 0'475 varas, y añadiendo esta fracción á las 2 unidades, tendremos, por último, que 2 varas 1 pie 5 pulgadas = 2'475 varas.

170	36
260	0'475
180	

Si se quiere un número mixto decimal, cuya unidad sea el pie, reduciremos 2 varas 1 pie á pies, y resultarán 25 pies, que será la parte entera del número decimal que se busca. Para hallar la parte decimal equivalente á 5 pulgadas, dividiremos el número 5 por 12, que es el número de pulgadas que tiene el pie y resultan 0'416 pies. Si se añaden á las 25 unidades se tendrá por último que 2 varas, 1 pie, 5 pulgadas = 25'416 pies.

$$\begin{array}{l|l} 50 & 12 \\ \cline{2-2} \;\;20 & 0'416 \\ \;\;\;\;80 & \end{array}$$

203. Por lo que precede, se ha visto cuán variadas son las formas incomplejas que pueden darse á un número complejo. Hé aquí otro nuevo ejemplo:

Reducir 6 arrobas, 18 libras, 10 onzas, 11 adarmes á incomplejo. Reduciéndolo á unidades de la última especie, como se ve á continuación, resulta 43179 adarmes.

$$\begin{array}{rl}
25 & \\
\times\ 6 & \\
\hline
150 & \\
+\ 18 & \\
\hline
168 & \text{libras} \\
\times\ 16 & \\
\hline
1008 & \\
168 & \\
\hline
2688 & \\
+\ 10 & \\
\hline
2698 & \text{onzas} \\
\times\ 16 & \\
\hline
16188 & \\
2698 & \\
\hline
43168 & \\
+\ 11 & \\
\hline
43179 & \text{adarmes}
\end{array}$$

Si se quisiera reducir á quebrado el número propuesto, poniendo por denominador al resultado anterior ya 6400 adarmes que tiene la arroba, ya los 256 que tiene la libra, ya los 16 que tiene la onza, resultaría 6 arrobas, 18 libras, 10 onzas, 11 adarmes $= \frac{43179}{6400}$ arrobas $= 6\ \frac{4779}{6400}$ arrobas $= \frac{43179}{256}$ libras $= 168\ \frac{171}{256}$ libras $= \frac{43179}{16}$ onzas $= 2699\ \frac{15}{16}$ onzas.

Si se hubiera de reducir á decimal de arroba, reduciríamos primero las libras, onzas y adarmes á adarmes, partiríamos el resultado 4779 adarmes por 6400 que tiene la arroba, y saldrían

0'746 arrobas. Añadiéndolas á las 6 arrobas resultará por último 6 arrob., 18 lib., 10 onz., 11 adarm. = 6'746 arrob.

```
 18
 16
----
108
 18
----
288
 10
----
298
 16
----
1788
298
 11
-----------
47790   | 6400
 29900  |------
  43000 | 0'746
-----------
  4600
```

Para reducirlo á decimal de libra, añadiríamos á las 168 libras que contiene el número propuesto la fracción decimal 0'66 libras, que forman las 10 onzas y 11 adarmes, y resultarían 168'66 libras.

Por último, para reducirlo á decimal de onza, se añadirán á las 2699 onzas que tiene el número dado, las 0'68 onzas que componen los 11 adarmes, y resultarán 2699'68 adarmes.

De modo que el número 6 arrob., 18 lib., 10 onz., 11 ad., reducido á forma decimal, es igual á 6'746 arrob. = 168'66 lib. = 2699'68 adarmes.

204. De las diferentes formas que como se ha visto pueden obtenerse para un número complejo, debe darse la preferencia á la forma decimal, por ser la más sencilla para el cálculo, y por ella optaremos generalmente en las cuestiones que hayamos de resolver con los números complejos.

Ejercicios:

1.° Valuar en meses, días y horas, $\frac{7}{13}$ de año.

2.° Ídem en minutos y segundos $\frac{5}{9}$ de grado.

3.° Ídem en pies cúbicos, pulgadas cúbicas y líneas cúbicas $\frac{17}{23}$ de vara cúbica.

4.° Idem en fanegas, celemines y cuartillos $\frac{13}{19}$ de cahiz.

5.° Reducir á quebrado común el número 7 años, 5 meses, 18 días.

6.° Idem 3 varas cuadradas, 5 pies cuadrados, 18 pulgadas cuadradas.
7.° Reducir á fracción decimal de arroba el número 19 libras.
8.° Idem á decimal de año el número 7 meses, 19 días, 15 horas.
9.° Idem á decimal de arroba, 18 arrob., 20 lib., 6 onzas.
10.° Idem á decimal de vara cúbica, 17 pies cúbicos.
11.° Idem á decimal de cántara, 8 cántaros, 7 azumbres, 1 cuartillo.
12.° Idem á decimal de día, 17 horas 35 minutos.

LECCIÓN XXVII.

Multiplicación de números complejos.

205. Entre todas las operaciones que se hacen con números concretos, las más complicadas son indudablemente la multiplicación y división de los números complejos. Aunque una y otra podrían resolverse conservando á dichos números su forma compleja, para simplificar el cálculo conviene por regla general reducirlos á alguna de las tres formas particulares dadas á conocer en la lección anterior; de donde resultan tanto para la multiplicación como para la división tres métodos, que podrán denominarse *de reducción á la especie inferior; de reducción á quebrados comunes; de reducción á números decimales.*

206. Método de reducción á la especie inferior.—En la multiplicación podrá suceder que sean complejos los dos números que se han de multiplicar, ó que uno sea complejo y el otro incomplejo. Consideraremos el primer caso, cuya resolución hará innecesario que tratemos separadamente el segundo, y para concretar más las ideas, nos valdremos desde luego de un ejemplo.

Sabiendo que en un año se han gastado 38 arrobas, 18 libras, se pregunta cuántas arrobas se gastarían en 5 años y 7 meses.

Reduciendo los dos complejos á la última especie, resultan del primero 968 libras y del segundo 67 meses.

Si multiplicamos 968 por 67, el producto 64856 que resulta no es el número qne se busca conforme á la pregunta del problema.

```
  38     12       968
  25      5        67
 ----   ----     -----
 190     60      6776
 76       7     5808
  18    ----    ------
 ----    67     64856 | 25
 968            148    -------
                 235    2594'24 | 12
                  106    19      --------
                   60     74     216'18
                  100     22
                          104
```

En efecto, en vez de multiplicar un número de arrobas se ha multiplicado el número de libras que éstas tienen, y en vez de multiplicar por un número de años, se ha multiplicado por los meses que éstos componen, y de consiguiente, el producto 64856 es por una parte 25 veces mayor y por otra 12 veces mayor que el que se busca. Si ahora se parte sucesivamente por 25 y por 12, el cociente último 216'18 expresará las arrobas que se gastan en 5 años y 7 meses.

En lugar de partir el producto 64856 primeramente por 25 y después por 12, se podía haber dividido por el producto de 25 por 12 ó sea por 300.

Luego para multiplicar dos números complejos por el método de que tratamos, se reducen multiplicando y multiplicador á la última especie; se multiplican entre sí los números que resulten y el producto se parte primero por las unidades de especie inferior que tenga la unidad principal del multiplicando, y después por las que tenga de especie inferior la unidad principal del multiplicador ó por el producto de unas y otras.

En el caso presente, la unidad principal del multiplicando es la arroba, y la del multiplicador el año.

El método que acabamos de exponer, presenta el inconveniente de tenerse que rectificar por medio de una ó varias divisiones el producto de los dos números enteros incomplejos á que se reducen el multiplicando y el multiplicador, sin cuya rectificación se llegaría á conclusiones erróneas que no pueden satisfacer la pregunta del problema.

207. Método de reducción á quebrados.—Suponiendo que se haya de resolver por este método el mismo problema anterior, comenzaremos por reducir multiplicando y multiplicador á su última especie, y resultará, según hemos visto, 968 libras para multiplicando y 67 meses para multiplicador (1).

---

(1) Aunque se pueda tomar por multiplicando ó multiplicador cualquiera de los dos números, porque ya se sabe que esto no altera el producto, conviene tener presente que el multipli-

Escribiendo el primero en forma de fracción común de arroba y el segundo en forma de fracción común de año, la resolución del problema quedará reducida á la multiplicación de dos quebrados; esto es

$$\frac{968}{25} \times \frac{67}{12} = \frac{968 \times 67}{25 \times 12} = \frac{64856}{300} = 216\text{'}18 \text{ arrobas.}$$

De consiguiente, para multiplicar dos números complejos se reducen á quebrados y se efectúa la multiplicación de éstos.

Aunque en este método se repitan las mismos números y las mismas operaciones del método anterior, el planteamiento del problema es más sencillo é inteligible sabiendo reducir á quebrados los números complejos, de lo cual hemos tratado ya anteriormente (201).

208. Método de reducción á decimales.—Para poder apreciar mejor las diferencias y las analogías de los tres métodos, aplicaremos también el de reducción á decimales á la resolución del mismo problema resuelto anteriormente.

Comenzaremos por reducir á decimales los dos complejos de la manera que se explicó (202), teniendo en cuenta que la unidad principal á que se refiere el multiplicando es la arroba y la del multiplicador el año. De esta reducción resultan los números decimales 38'72 arrobas y 5'58 años, y multiplicando el uno por el otro, se obtiene 216'18 arrobas, que es lo que se gasta en 5 años y 7 meses.

```
180 | 25          70  | 12              5'5833
 50  -----       100  -------           38'72
      38'72        40   5'5833       ----------
                    40                  111666
                                       390831
                                      446664
                                     167499
                                    ----------
                                    216'185376
```

Este método es preferible al anterior, por cuanto como se ha dicho varias veces, las operaciones con los números decimales son más sencillas y fáciles que con los quebrados comunes.

Sirva de nuevo ejemplo para la aplicación del último método el problema siguiente:

---

cador, como tal multiplicador, carece de especie, siendo un número abstracto que indica simplemente las veces que debe tomarse el multiplicando, y que éste es de la especie correspondiente al número que se busca, por lo que en este caso deberá considerarse como verdadero multiplicando el número 968 libras.

Sabiendo que un pié cuadrado vale 2'45 pesetas, cuánto valdrán 5 varas cuadradas, 5 pies cuadrados, 116 pulgadas cuadradas?

En este problema, el multiplicando 2'45 pesetas es incomplejo decimal, y su unidad la peseta; el multiplicador es complejo, y su unidad principal el pie, por darse conocido el precio del mismo como base para el cálculo, y de consiguiente reduciremos el multiplicador á decimal que tenga por unidad el pie.

Hecha esta reducción resulta 50'8 pies y multiplicando este número por 2'45, se obtiene de producto 124'46, que serán las pesetas que valen las 5 varas cuadradas, 5 pies cuadrados, 116 pulgadas cuadradas.

$$\begin{array}{r|l} 1160 & 144 \\ \cline{2-2} 0008 & 50'8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50'8 \\ 2'45 \\ \hline 2540 \\ 2032 \\ 1016 \\ \hline 124'460 \end{array}$$

Partes alícuotas.

209. Se llama *parte alícuota* de un número todo factor de este número.

La multiplicación de los números complejos puede resolverse también por otro método diferente de los tres que hemos explicado, y al cual se ha dado el nombre de *método de las partes alícuotas.*

Consiste este método en calcular los números complejos, descomponiéndolos en porciones que constituyan partes alícuotas de la unidad reducida á otras unidades de especie inferior, ó que sean partes de otras porciones hechas anteriormente. Un ejemplo nos dará á conocer mejor la embarazosa dirección que sigue el cálculo por el expresado método.

Supongamos que habiéndose construido en una hora 90 varas y 30 pulgadas de obra, se quiere saber cuánto se construirá en 5 horas y 8 minutos.

Cálculo.—Si en una hora se hacen 90 varas y 30 pulgadas, en 5 horas se harán 5 veces 90 varas y 5 veces 30 pulgadas, ó 450 varas y 150 pulgadas. Si en 60 minutos que tiene la hora se hacen 90 varas y 30 pulgadas, en 6 minutos, que es la décima parte (parte alícuota) de la hora ó de 60 minutos, se hará la décima parte de 90 varas y la décima parte de 30 pulgadas, ó sea 9 varas y 3 pulgadas. Por último, falta calcular la obra de 2 minutos. Como 2 minutos es la tercera parte de 6 minutos (parte alícuota de otra parte alícuota), y en 6 minutos se hacen 9 varas y 3 pulgadas, en 2 se hará la tercera parte de 9 varas y la tercera parte de 3 pulgadas, ó sea 3 varas y una pulgada. Si ahora sumamos los tres resultados parciales, resultan 466 varas y 4 pulgadas.

Hé aquí ahora cómo se dispone el cálculo:

	90 varas	30 pulgadas.
	× 5	× 5
En 5 horas.	450 varas	150 pulgadas.
En 6 minutos. . . .	9 »	3 »
En 2 minutos. . . .	3 »	1 »
Producto total. .	466 varas	4 pulgadas.

Este método, tan natural para los que carecen de los recursos que suministra la Aritmética, y en el que se complica el cálculo de una manera extraordinaria á medida que aumentan las especies y cuando se tropieza con números de difícil descomposición, lo desecharán sin duda los que, estudiando Aritmética, hallan en ella medios tan expeditos como los que antes se han indicado, para resolver esta clase de cuestiones.

Problemas.—Resuélvanse por los métodos que preceden, y comprobando los resultados obtenidos, los problemas siguientes:

1.° *Una casa que produce anualmente 7840 pesetas de renta, cuánto producirá en 5 años, 10 meses y 18 días?*

2.° *Si un grado de la circunferencia tiene 6 varas, 2 pies, 5 pulgadas, cuántas varas tendrán 19 grados, 28 minutos, 40 segundos?*

3.° *Si una vara cúbica de piedra pesa 29 quintales, 3 arrobas y 20 libras, cuánto pesarán 12 varas cúbicas, 18 pies cúbicos y 640 pulgadas cúbicas de piedra de la misma clase?*

4.° *Si una fanega de trigo pesa 3 arrobas, 15 libras, 9 onzas, cuántas arrobas pesarán 160 fanegas, 9 celemines y 3 cuartillos?*

LECCIÓN XXVIII.

División de los números complejos.

210. En la división de números complejos puede suceder como en la multiplicación, que los dos números ó uno de ellos solamente sean complejos, y en ambos casos la división puede resolverse como la multiplicación por el método de reducción á la especie inferior, por reducción á quebrados comunes y por reducción á decimales.

La división de números complejos, quedará por tanto reducida, según el método que se aplique, á una división de enteros, á una división de fracciones ordinarias, ó á una división de números decimales, y en tal concepto nada nuevo tendría que explicarse respecto de esta operación. Sin embargo, para la mejor inteligencia de esta interesante parte de la Aritmética, resolveremos una división de complejos por los tres métodos indicados.

211. Método de reducción á la especie inferior.—Supongamos que 14 fanegas y 9 celemines de trigo han pesado 47 arrobas y 20 libras, y se quiere saber cuántas arrobas pesa la fanega. Ante todo convendrá recordar que en la división de números concretos, el divisor carece de especie como tal divisor, debiéndose considerar como un número abstracto que indica en general las partes que deben hacerse del dividendo, y la especie de éste será siempre idéntica á la de la incógnita. En el caso presente, se busca el peso de la fanega, y por consiguiente el complejo de la especie *peso* será el dividendo. Y en efecto, sabiéndose las arrobas que pesan cierto número de fanegas, partiendo el número de arrobas por el número de fanegas, resultará el peso de una fanega.

Reduciendo á la última especie los dos complejos del problema propuesto, resultará para dividendo 1195 libras y por divisor el número 177. Dividiendo 1195 por 177, el cociente 6'75 no es el número que se busca, porque en lugar de partir por el número de fanegas, se ha dividido por el número de celemines que éstas tienen; es decir, por un número 12 veces mayor que el verdadero divisor; el cociente será por lo tanto 12 veces menor que el verdadero, deberá multiplicarse por 12 y resultan 81. Pero como el dividendo se redujo á libras, este número expresará las libras que pesa la fanega, y para reducirlo á arrobas se deberá partir por 25, resultando por último 3'24 arrobas, peso de una fanega.

Hé aquí el cálculo:

47	14	1195	177
25	12	1330	6'75
235	28	910	× 12
94	14	25	1350
20	9		675
1195	177		81'00 | 25
			60 — 3'24
			100

En este método para llegar á un resultado que responda directamente á la pregunta del problema, ha sido preciso rectificar la división por una multiplicación y por otra división, lo cual produce una verdadera complicación en la disposición del cálculo, por lo que juzgamos poco ventajoso el método de reducción á la especie inferior.

212. Método de reducción á quebrados.—Sea el mismo problema. Reduciendo dividendo y divisor á quebrados comunes de arroba el primero y de fanega el segundo, por ser éstas las unidades principales á que se refieren respectivamente ambos términos, resulta

$$\frac{1195}{25} : \frac{177}{12} = \frac{1195 \times 12}{177 \times 25} = \frac{14340}{4425} = 3'24 \text{ arrobas.}$$

213. Método de reducción á decimales.—Reduciendo dividendo y divisor á decimal de arroba el primero y á decimal de fanega el segundo y efectuando la división resulta 3'24 arrobas.

200	25	90	12	4780	1475
	47'8	60	14'75	3550	3'24
				6000	
				100	

214. Cuando el dividendo sea complejo y el divisor incomplejo se puede efectuar la división sin alterar la forma del primero.

Supongamos que 12 hombres fabricaron en un dia 136 varas, 2 pies, 6 pulgadas de obra, y se pregunta cuánto fabricó cada uno.

Partiendo primero las 136 varas por 12, resulta que hizo cada uno 11 varas y quedan 4 de resíduo. Reducido éste á pies y añadiendo 2 más del dividendo, salen 14 que se parten por 12 y resulta 1 pie, quedando 2 de resíduo. Reducido éste á pulgadas y añadiendo 6 más del dividendo, suman 30, que se parten por 12 y resultan $2\frac{1}{2}$ pulgadas.

De modo que por cada hombre salen 11 varas, 1 pie, $2\frac{1}{2}$ pulgadas.

Hé aquí el cálculo:

136 varas, 2 pies 6 pulg. | 12
16 — 11 varas, 1 pie, $2\frac{1}{2}$ pulg.
4
× 3
———
12
+ 2
———
14
2
× 12
———
24
6
———
30

Problemas.—Resuélvanse por los diferentes métodos explicados los problemas siguientes:

1.° *En 4 años y 8 meses produce una finca 16836 pesetas; cuánto produce en un año?*

2.° *5 varas cúbicas, 16 pies cúbicos de material pesaron 60 arrobas, 19 libras; cuántas arrobas pesaba la vara cúbica?*

3.° *En un campo que tenia 8 fanegas, 7 celemines y 1 cuartillo de tierra se tiraron 18 fanegas, 10 celemines y 5 cuartillos de simiente. Cuántas fanegas de semilla resultaban por cada fanega de tierra?*

4.° *En 6 horas, 45 minutos se construyeron 175 varas cuadradas, 7 pies cuadrados, 92 pulgadas cuadradas. Cuántas varas cuadradas se hacian por hora?*

LECCIÓN XXIX.

Comparación de los sistemas antiguo y moderno de pesas y medidas.—Ventajas del sistema métrico.—Relación entre pesos, volúmenes y capacidades.—Peso específico de los cuerpos y su relación con el peso y el volumen de los mismos.—Aplicaciones.

215. Las pesas, las medidas y hasta las monedas variaban no há mucho en su valor y en su nombre de provincia á provincia y de pueblo á pueblo, produciéndose con esto, como era consiguiente, dificultades y perjuicios considerables en los cambios y transacciones comerciales. El sistema métrico ha venido á corregir el desorden que se notaba en este punto y á establecer una perfecta uniformidad de medida, no sólo entre las diferentes provincias de España, sino también con relación á las demás naciones, donde se ha planteado dicho sistema, resultando de aquí ventajas incalculables para la administración, el comercio, la industria, etc.

La unidad fundamental del sistema métrico no es una medida adoptada caprichosamente como lo era la vara de Burgos ó la de cualquier otra provincia; el metro está tomado, como hemos visto, de la misma naturaleza, no pertenece á ninguna nación en particular que haya querido imponerlo como invención propia á las demás, y puede ser en consecuencia aceptado por todas sin repugnancia alguna. Merced á esta favorable circunstancia, el sistema métrico podrá generalizarse más cada día y llegar á ser común á todos los pueblos civilizados.

La nomenclatura del sistema antiguo, ya se consideren todas las pesas y medidas que se usaban en España, ya solamente las de Castilla, ofrece un extenso cuadro de palabras que á la vez que carecen entre sí de toda analogía, llevan por su significado y por su material estructura el sello de los tiempos de atraso en que debieron ser adoptadas. Por el contrario, la nomenclatura del sistema métrico, sencilla en su composición y expresiva por la significación de las palabras que la constituyen, forma un conjunto homogéneo y científicamente sistematizado. Seis ó siete palabras antepuestas al nombre de cada unidad principal dan idea clara de todas las medidas usuales.

En el antiguo sistema los múltiplos y submúltiplos, no conservaban relación algúna metódica entre sí ni con la unidad de su especie. En los pesos, por ejemplo, partiendo de la arroba los múltiplos están representados por los números 4 y 20, los submúltiplos por los números 25, 16, etc., y un desorden parecido se observa en las demás especies de unidades. En el sistema métrico partiendo de una unidad cualquiera se sube y se baja en la escala de los múltiplos y submúltiplos de 10 en 10, de 100 en 100, etc., habiéndose conseguido de este modo armonizar completamente dicho sistema con el decimal de numeración.

Para la reducción de unidades de especie superior á inferior y al contrario, que tantas y tan prolongadas multiplicaciones y divisiones exigía el sistema antiguo, basta en el sistema métrico correr la coma uno ó varios lugares hacia la derecha ó hacia la izquierda. Era ya imposible llegar á un mecanismo más sencillo para la práctica de las operaciones.

La adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones comunes y de números complejos, tan frecuentes en el cálculo por el antiguo sistema de pesas y medidas, vienen á convertirse en el sistema métrico en simples operaciones con los números enteros.

En el sistema antiguo las medidas de una especie no tienen dependencia alguna de las otras. Ninguna relación hay, por ejemplo, entre la vara y la arroba, entre la libra y la azumbre, entre ésta y la fanega, etc. En el sistema métrico todos se enlazan ó encadenan como puede verse por el siguiente cuadro de las relaciones entre volúmenes, capacidades y pesos.

Volumen.	Capacidad.	Peso.
1 metro cúbico. .	Kilolitro.	Tonelada métrica.
100 dm. cúb. . . .	Hectolitro.	Quintal métrico.
10 dm. cúb. . . .	Decalitro.	Miriagramo.
1 dm. cúb. . . .	Litro.	Kilogramo.
100 cm. cúb. . . .	Decilitro.	Hectogramo.
10 cm. cúb. . . .	Centilitro.	Decagramo.
1 cm. cúb. . . .	Mililitro.	Gramo.
100 mm. cúb. . . .	»	Decigramo.
10 mm. cúb. . . .	»	Centigramo.
1 mm. cúb. . . .	»	Miligramo.

Entiéndese en el cuadro precedente, que un metro cúbico de líquido ó de grano, representa en capacidad un kilolitro, y que si el metro cúbico fuera de agua destilada á 4 grados, tendría de peso una tonelada métrica. De la misma manera deben entenderse todos los volúmenes que siguen con respecto á sus correspondientes capacidades y pesos.

Así, pues,

1.° Medida en litros, decalitros, etc., una cantidad de líquidos ó granos, conocemos su volumen.

2.° Medida en litros, decalitros, etc., una cantidad de agua, conocemos aproximadamente su volumen y su peso.

Si á las relaciones anteriores entre pesos, volúmenes y capacidades se agrega la relación que el peso y el volumen de los cuerpos tiene con la *densidad ó peso específico* de los mismos, se abre un campo más vasto todavía para la resolución de cuestiones tan curiosas como interesantes del cálculo. No será ocioso que nos detengamos un momento en este punto.

El *peso* puede ser *absoluto, relativo* y *específico.*

Peso absoluto de un cuerpo es el efecto que produce sobre este cuerpo la atracción de la tierra.

Peso relativo es la relación que hay entre el peso de un cuerpo y el de otro que se toma por unidad. Así, por ejemplo, el peso relativo de una manzana será de 120 gramos si colocada sobre un platillo de la balanza se necesita poner 120 gramos en el otro platillo para que la balanza esté en su fiel.

Se llama *densidad ó peso específico* de un cuerpo, la relación que hay entre el peso de un volumen cualquiera de este cuerpo á cero grados y un volumen igual de agua destilada, ó sea agua pura, á 4 grados. Así, cuando se dice que el peso del mercurio es 13'57, entendemos que un volumen cualquiera de este cuerpo á cero grados, pesa 13'57 veces más que igual volumen de agua destilada á 4 grados, y como un decímetro cúbico de agua de esta clase pesa un kilogramo, un decímetro cúbico de mercurio pesará 13'57 kilogramos, cuyo número representará en abstracto el peso específico del mercurio.

Ahora bien, sábese que el *peso* de un cuerpo es igual al *volumen* del mismo multiplicado por su *densidad;* que el volumen es igual al peso partido por la densidad, y la densidad igual al peso partido por el volumen. Por tanto, bastará conocer dos de estos tres elementos para hallar aproximadamente el valor del tercero. Ejemplos:

1.° *Cuánto pesa una pieza de mármol de 176 dm.^{3} de volumen y cuya densidad es 2'45?* (1)

Sabiendo que el peso es igual al volumen multiplicado por la densidad, resulta,

$$176 \times 2'45 = 431'20 \text{ kilogramos.}$$

(1) La densidad de las materias más usuales, está ya determinada y consta en tablas que se han formado y que deben consultarse cuando sea necesario. Al final del texto se hallará una tabla de esta clase.

Si en lugar de darse un volumen de decímetros cúbicos se hubiera dado de metros cúbicos, el resultado de la multiplicación anterior expresaría toneladas métricas; si de centímetros cúbicos, el resultado sería gramos, etc.

2.° *Qué volumen tiene una barra de hierro de 130 kilogramos y cuya densidad es 7'79?*

Sabiendo que el volumen es igual al peso partido por la densidad, resulta

$$130 : 7'79 = 16 \text{ dm.}^3 \text{ próximamente.}$$

Si en lugar de darse un número de kilogramos se hubiera dado un número de toneladas métricas, el cociente de la división expresaría metros cúbicos; si un número de gramos, centímetros cúbicos; si miligramos, milímetros cúbicos, etc.

3.° *Cuál será la densidad ó peso específico de un trozo de metal que tiene 14 dm.³ de volumen y 100 kilogramos de peso?*

Sabiendo que la densidad es igual al peso partido por el volumen, resulta:

$$100 : 14 = 7'142 \text{ densidad.}$$

LECCIÓN XXX.

Equivalencias de las unidades principales del sistema antiguo y del sistema métrico. Reducción de unidades de un sistema á otro.

216. Se llama *equivalencia* la relación que hay entre una medida antigua y otra moderna de la misma especie.

Como las medidas y pesas son tantas en ambos sistemas, y como cada pesa y cada medida tiene su equivalencia, se comprende que estas equivalencias deben ser numerosas, habiendo dado lugar á la formación de extensas tablas donde se fija la relación que hay de cada unidad antigua á cada unidad moderna y al contrario. Al final del texto damos también una de estas tablas, reducida todo lo posible, y con su auxilio podrán hacerse directamente todas las reducciones que se quiera; pero los que posean los conocimientos de Aritmética que preceden, sin necesidad de acudir á una equivalencia particular para cada reducción que haya de hacerse, tendrán suficiente para practicarlas todas con la tabla que aparece á continuación, y en la cual se establece únicamente la equivalencia de la unidad principal de cada clase de medidas y pesas.

CASTILLA

Vara lineal..	0‘836 mt.	Metro lineal. .	1‘196 varas.
Vara cuadrada.. . .	0‘70 m.^{2}	Metro cuad.. .	13 pies cuad.
Vara cúbica.	0‘584 m.^{3}	Metro cúb. . .	46 pies cúb.
Arroba..	11‘5 Kgr.	Kilogramo.. .	2‘17 libras.
Cántaro de vino. . .	16‘1 lt.	Lit. de vino. .	1‘98 cuartillos.
Arroba de aceite.. .	12‘6 lt.	Lit. de aceite..	2 libras.
Fanega de áridos. .	55‘5 lt.	Lit. de grano..	0‘86 cuartillos.
Fanega superficial..	64‘4 áreas.	Area..	146 var. cuad.

VALENCIA

Vara lineal.. . . .	0‘906 mt.	Metro lineal. .	1‘1 vara.
Vara cuad.	0‘821 m.^{2}	Kilogramo. . .	2‘8 libras.
Vara cúb..	0‘743 m.^{3}	Litro de vino..	1‘49 cuartillos.
Hanegada.	8‘31 áreas.	Litro aceite. .	0‘33 azumbre.
Cántaro de vino. .	10‘77 lt.	Litro de grano.	0‘96 cuartillo.
Varchilla..	16‘75 lt.	Met. cuad. . .	19 palmos cuad.
Arroba de aceite. .	11‘93 lt.	Met. cúb.. . . .	1 v. 22 palm. cúb.

217. *Por regla general, para reducir un número de unidades de un sistema á otro, basta multiplicar dicho número por la equivaleneia de la unidad de su especie.*

Así, por ejemplo, reduciendo

1.° 54 varas castellanas á metros, resulta

$$54 \times 0‘836 = 45‘144 \text{ metros.}$$

2.° 65 m. á varas castellanas, resulta

$$65 \times 1‘196 = 77‘74 \text{ varas.}$$

3.° 9 fanegas á litros, resulta

$$55‘5 \times 9 = 499‘5 \text{ litros.}$$

Si el número que se ha de reducir de un sistema á otro se dá en unidades diferentes de la principal, se reduce primero á unidades de esta especie, y después se multiplica por la equivalencia.

Ejemplos:

1.° Se han de reducir 47 quintales antiguos á Kgr.

Reduciendo primero los quintales á arrobas resultan 188 arrobas, y multiplicándolas por la equivalencia, tendremos

$$188 \times 11'5 = 2162 \text{ Kgr.}$$

2.° Reducir 7 Qm. á Kg.

Los 7 Qm. se reducen á Kg. y resultan 700 Kg., y multiplicándolos por 2'17 valdrá

$$2'17 \times 700 = 1519 \text{ libras.}$$

Del mismo modo, si hecha la reducción de un número de un sistema á otro se desean unidades de especie diferente de la obtenida, se practica una nueva reducción.

Ejemplo:

Se quieren reducir 5 toneladas métricas á quintales antiguos.

Suponiendo que no se conoce la equivalencia directa entre la tonelada y el quintal antiguo, reduciremos primero las 5 Tm. á Kg., y resultan 5000 Kg. Reduciendo ahora estos 5000 Kg. á libras, resulta $5000 \times 2'17 = 10850$ libras; y como lo que se pide es quintales, partiendo las 10850 libras por 100 que tiene el quintal, resultan por último $108 \frac{1}{2}$ quintales.

Si fuera un número complejo el que hubiera de reducirse de un sistema á otro, se reduce primero á incomplejo de la especie de unidad á que se refiera la equivalencia conocida, y después se multiplica por esta equivalencia.

Ejemplo:

1.° Reducir 2 quintales, 2 arrobas, 18 libras, á Kgr. Conocida la equivalencia entre la arroba y el Kg., reduciremos dicho número complejo á decimal de arroba y resulta 10'72 arrobas, y multiplicando por la equivalencia, tendremos

$$10'72 \times 11'5 = 123'28 \text{ Kgr.}$$

2.° Reducir 20 pies cúbicos, 960 pulgadas cúbicas á fracción de metro cúbico. Conocida la equivalencia de la vara cúbica al metro cúbico, reduciremos el complejo propuesto á decimal de vara cúbica, y resultan 0'76 varas cúbicas, y multiplicando ahora por la equivalencia se obtendrá por último

$$0'76 \times 0'584 = 0'44384 \text{ m.}^3$$

218. *Si en lugar de aplicar para la reducción de unidades antiguas á modernas una equivalencia, y para la reducción de unidades*

modernas á antiguas otra equivalencia, se quiere emplear solamente una para ambas reducciones, deberá multiplicarse para la primera reducción y dividirse para la segunda.

Ejemplos:

1.° *Reducir 35 fanegas á áreas.*

Multiplicando por la equivalencia de la fanega, resulta

$$35 \times 64'4 = 2254 \text{ áreas.}$$

2.° *Reducir 4038 áreas á fanegas.*

Dividiendo por la misma equivalencia, resulta

$$4038 : 64'4 = 62'67 \text{ fanegas.}$$

Conviene proceder así cuando solo se recuerda una equivalencia.

Cuando se hayan de reducir unidades cuadradas ó cúbicas de un sistema á otro y no se tenga presente ninguna de estas equivalencias, se obtendrán fácilmente por la equivalencia lineal, pues elevándola á la segunda potencia, resultará la equivalencia de la vara cuadrada, y elevándola á la tercera, saldrá la de la vara cúbica.

En efecto, teniendo la vara lineal 0'836 m., la vara cuadrada tendrá

$$0'836 \times 0'836 = 0'70 \text{ m.}^2, \text{ y la vara cúbica}$$

$$0'836 \times 0'836 \times 0'836 = 0'584 \text{ m.}^3$$

Teniendo presentes las observaciones que preceden y recordando las equivalencias de las unidades principales de cada grupo de medidas, se harán fácilmente con la suficiente aproximación todas las reducciones que ocurren en el cálculo sin recurrir á tablas tan prolijas como las que hemos indicado al principio de esta lección y que no siempre se tienen á la mano.

Ejercicios de reducciones:

1.° Reducir 8 Qm. á arrobas.
2.° Id. 120 varas cuadradas valencianas á metros cuadrados.
3.° Id. 165 Hectáreas á fanegas.
4.° Id. 640 libras á Kilogramos.
5.° Id. 1420 Decalitros á varchillas.
6.° Id. 32 arrobas de aceite á libras.
7.° Id. 64'7 metros cúbicos á varas cúbicas.
8.° Id. 83 Hectolitros á cántaros.
9.° Id. 68 arrobas, 18 libras, 9 onzas á Kilogramos.

10. Id. 48 varas cuadradas, 7 pies cuadrados, 65 pulgadas cuadradas á metros cuadrados.
11.° Id. 16 varas cúbicas 22 pies cúbicos á metros cúbicos.
12.° Id. 76 fanegas á Decalitros.
13.° Id. 16 cántaros, 5 azumbres, 3 cuartillos á Decalitros.
14.° Id. 124 áreas, 45 metros cuadrados á fanegas.
15.° Id. 1500 Hectolitros á varchillas.

LECCIÓN XXXI.

Extracción de la raiz cuadrada de los números enteros.

219. Se llama *cuadrado* ó *segunda potencia* de un número el resultado de multiplicarlo por sí mismo, ó de tomarlo dos veces por factor. Por ejemplo, 8×8 ó 64 es el cuadrado de 8. Si se quiere indicar que ha de elevarse al cuadrado el resultado de un cálculo no efectuado, este cálculo se escribe dentro de un paréntesis; y así, $(7 + 4)^2$ significa que debe sumarse 7 con 4 y elevarse la suma al cuadrado, de donde resultará 121. Omitiendo el paréntesis, seria $7 + 4^2 = 23$.

Los cuadrados de los diez primeros números son:

Números.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Cuadrados.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.

220. El cuadrado de un número terminado en un cero acaba en dos ceros: y asi $40 \times 40 = 1600$; ó en otros términos, el cuadrado de un número exacto de decenas, es un número exacto de centenas.

221. *Cuadrado de la suma de dos números.*—Supongamos que se haya de hallar el cuadrado de la suma de $7 + 4$. Podria efectuarse la adición y elevar la suma al cuadrado, multiplicándola por sí misma; mas para fijar la teoría de la raiz cuadrada convendrá calcular de otra manera dicho cuadrado.

Multiplicar $7 + 4$ por $7 + 4$ equivale á tomar el multiplicando 7 veces por una parte, 4 veces por otra y sumar los dos resultados. Para tomar 7 veces el multiplicando $7 + 4$, es necesario tomar 7 veces cada una de sus dos partes.

Tomándolas 7 veces, resulta

$$7 \times 7 + 4 \times 7;\ ó\ 7^2 + 4 \times 7$$

Tomándolas 4 veces, resulta

$$7 \times 4 + 4 \times 4;\ ó\ 7 \times 4 + 4^2$$

Sumando los dos resultados saldrá

$$7^2 + 4 \times 7 + 7 \times 4 + 4^2$$

y como 4×7 está tomado 2 veces, resultará por último

$$(7 + 4)^2 = 7^2 + 2\,(7 \times 4) + 4^2$$

De consiguiente, el cuadrado de la suma de dos números está formado por el cuadrado del primero, mas el doble producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo.

Si las dos partes de que consta el número son decenas y unidades, su cuadrado se compondrá:

1.° Del cuadrado de las decenas.
2.° Del duplo de las decenas por las unidades.
3.° Del cuadrado de las unidades.

Así, por ejemplo, $74^2 = (70 + 4)^2 = 70^2 + (70 \times 4) \times 2 + 4^2 = 4900 + 560 + 16 = 5476$

222. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos que se diferencien en una unidad, es igual al duplo del menor más 1.

Así, $14^2 - 13^2 = 2 \times 13 + 1$

En efecto, $(13 + 1)^2 = 13^2 + (13 + 1) \times 2 + 1^2$; y resolviendo el paréntesis, resulta

$$(13 + 1)^2\ ó\ 14^2 = 13^2 + 2 \times 13 + 1.$$

Restando de ambos miembros 13^2, resulta por fin

$$14^2 - 13^2 = 2 \times 13 + 1.$$

223. *Raiz cuadrada de un número entero.*—Se llama *raiz cuadrada* de un número, otro número que multiplicado por sí mismo ó elevado á la segunda potencia reproduce el primero. Así, la raiz cuadrada de 36 es 6, porque $6 \times 6 = 36$. La raiz cuadrada de un número se indica anteponiéndole el signo $\sqrt{\ }$, que se llama *radical*. Así, $\sqrt{25}$, se lee: raiz cuadrada de 25. Esta raiz es 5.

Un número entero no siempre tiene por raiz cuadrada otro número entero. No hay, por ejemplo, ningún número entero que elevado al cuadrado dé 39, porque $6^2 = 36$ y $7^2 = 49$. En este caso se dice que tal número no es cuadrado perfecto, y cada uno de los dos números entre cuyos cuadrados está comprendido el propuesto, puede considerarse como raiz cuadrada entera de este número con cerca de una unidad de aproximación por defecto ó por exceso.

Relativamente son muy pocos los números que constituyan cuadrado perfecto, porque entre los 100 primeros números, solo 10 tienen raiz cuadrada exacta; entre los 10000 primeros, solo 100; entre el primer millón, solo 1000, etc.

Pasemos ahora á extraer la raiz cuadrada de un número entero. Si este número es menor que 100, su raiz cuadrada se hallará por la tabla de los cuadrados de los diez primeros números; y así:

$$\sqrt{49} = 7; \quad \sqrt{81} = 9; \quad \sqrt{30} = 5$$

Supongamos ahora un número de más de dos cifras y que no pase de cuatro, como 4538.

El cálculo de su raiz cuadrada de que vamos á ocuparnos, se presenta en esta forma:

$$\begin{array}{r|l} 4538 & 67 \\ \cline{2-2} 938 & 127 \times 7 \\ 49 & \end{array}$$

Siendo mayor que 100 el número propuesto, su raiz cuadrada no puede llegar á 100, porque el cuadrado de 100 es 10000, mayor que el número dado; pero su raiz cuadrada será mayor que 10, porque el cuadrado de 10 es 100, menor que el número dado; y constará por tanto dicha raiz, de decenas y unidades. Extrayendo la raiz cuadrada de 45, saldrán las decenas de la raiz. En efecto, la raiz cuadrada de 45 es 6; y como el cuadrado de 6 está contenido en 45, el cuadrado de 60 estará contenido en 4500, y con más razón en el propuesto. El cuadrado de 7 es cuando menos 46, y el cuadrado de 70 será cuando menos 4600, número mayor que 4538; luego la raiz que se busca está entre 60 y 70; es decir, contiene 6 decenas.

Falta ahora hallar la cifra de las unidades de la raiz, caso de que las haya. Si la raiz contiene unidades, el número propuesto contendrá el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades, y por consiguiente, si se resta el cuadrado de las decenas que es 3600 ó 36 decenas, en el resto 938 estará contenido el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades.

El duplo de las decenas por las unidades, es un número exacto de decenas y debe estar en las 93 decenas del resto. Ahora bien, si 93 se compone del producto de dos factores, á saber: 1.° Duplo de decenas (factor conocido). 2.° Unidades (factor desconocido), es claro que partiendo 93 por el primer factor ó sea por duplo 6 ó 12, saldrá el segundo ó las unidades que son 7.

Para comprobar esta cifra, se escribe á la derecha del duplo de las decenas, y multiplicando el número que resulta ó 127 por el mismo 7, el producto, que se compondrá del cuadrado de las unidades mas el duplo de las decenas por las unidades, deberá poderse restar de 938, si la cifra hallada no es mayor que la verdadera. Hecha la resta, resultan 49 de resíduo, y 67 será la raiz cuadrada de 4538.

224. Si las decenas del resto fueran menos que el duplo de las decenas de la raiz, en ésta no habrá unidades, y se completará añadiendo un cero á la derecha de las decenas, como se vé en el ejemplo siguiente, en el cual las decenas del resto son 14, y el duplo de la raiz son 16

6543	80
143	16

225. El resíduo de la raiz cuadrada de un número ha de ser siempre menor que el duplo de la raiz hallada mas 1, porque si fuera igual al duplo de la raiz hallada mas 1, dicha raiz tendría una unidad más, según hemos visto (222).

En efecto, si se obtuvieran 17 por raiz cuadrada de un número y por resíduo $2 \times 17 + 1$, la raiz cuadrada de dicho número no sería 17, sino 18, según dicho principio.

226. Dadas las explicaciones que preceden, no será ya difícil extraer la raiz cuadrada de un número que no exceda de 6 cifras. Sea el número 453894.

El cálculo se dispondrá como en el ejemplo anterior, de esta manera:

453894	673
938	127×7
4994	1343×3
965	

Como este número es mayor que 100, su raiz cuadrada es mayor que 10. Si se extrae la raiz cuadrada de 4538 centenas, lo cual se sabe ya hacer por no constar este número más que de cuatro cifras, se obtendrán las decenas de la raiz del número propuesto como vamos á ver. La raiz de 4538 es 67, y como el cuadrado de 67 está contenido en 4538, el cuadrado de 670 estará contenido en 453800, y con más razón aún en el número propuesto. El cuadrado de 68 es cuando menos 4539, y el cuadrado de 680 será cuando menos 453900, número mayor que el número propuesto, y por consiguiente, la raiz buscada estará comprendida entre 670 y 680, y contendrá 67 decenas.

Si la raiz contiene además unidades, el número propuesto contendrá el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades. Restando el cuadrado de las decenas, el resto contendrá todavía las otras dos partes. Siendo el duplo de decenas por unidades un número exacto de decenas, se hallará en las decenas del resto, y dividiéndolas por el duplo de las decenas halladas, que es 134, el cociente 3 será la cifra de las unidades. Para comprobar esta cifra, se escribe á la derecha de 134, y multiplicando el número que resulta por el mismo 3, el producto se resta de 4394, resultando 673 de raiz cuadrada y 965 de residuo.

Regla general.—Para extraer la raiz cuadrada de un número compuesto de cualquier número de cifras, se divide en períodos de dos cifras comenzando por la derecha, siendo indiferente que el primero de la izquierda tenga una sola; se halla la raiz cuadrada de dicho período de la izquierda y resultará la primera cifra de la raiz, la cual se eleva al cuadrado y se resta del primer período de la izquierda.

A la derecha de la resta se agrega el siguiente período, se separa con una coma la primera cifra de la derecha, se divide lo que quede á la izquierda por el duplo de la raiz hallada, y el cociente entero que resulte, será la segunda cifra de la raiz. Para comprobar esta cifra, se escribe á la derecha del duplo de la raiz, y si el producto del número que resulte multiplicado por dicha cifra se puede restar del resto obtenido anteriormente seguido del segundo período, la cifra será la verdadera; pero si no se puede restar, será mayor de lo que corresponde, y se va disminuyendo de unidad en unidad hasta que dicho producto pueda restarse.

Al lado de la nueva resta, se baja el tercer período, y haciendo lo mismo que en el caso anterior, se hallará la tercera cifra de la raiz, y se continúa de este modo hasta hallar la última cifra de la raiz, que será exacta si el último resto es cero, é inexacta en el caso contrario.

Véanse á continuación indicados todos los cálculos para hallar la raiz cuadrada de 54632807.

$\sqrt{54,63,76,07}$	7391			
49	7	7	73	739
563	$\times 7$	$\times 2$	$\times 2$	$\times 2$
429	49	143	1469	14781
13476		$\times 3$	$\times 9$	
13221		429	13221	
25507				
14781				
10726				

La raiz cuadrada es 7391 y quedan 10.726 de resíduo.

LECCIÓN XXXII.

Cubo y raiz cúbica de los números enteros.

227. *Cubo* de un número es el resultado de tomarlo tres veces por factor. Así, el cubo de 6 será $6 \times 6 \times 6 = 216$. Para indicar el cubo de un cálculo no efectuado, se escribe este cálculo entre paréntesis. Así, $(8 + 6)^3$ significa que se sumen 8 y 6 y la suma se eleve al cubo.

Los cubos de los diez primeros números son:

Números.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Cubos.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

228. El cubo de un número terminado en un cero está terminado por tres ceros.

Ejemplo:

$$80 \times 80 \times 80 = 512.000;$$

ó en otros términos, el cubo de un número exacto de decenas es un número exacto de millares.

229. *Cubo de la suma de dos números.*—A fin de presentar el cálculo bajo la forma más sencilla posible, expresaremos ahora

estos números por medio de letras, las cuales pueden representar números cualesquiera; advirtiendo únicamente que si entre dos ó más letras seguidas no hay signo alguno, se entiende que deben multiplicarse unas por otras. Así, ab es lo mismo que $a \times b$.

Supongamos ahora que se haya de elevar al cuadrado la suma de los números a y b.

Sábese ya que $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) + (a + b)$; pero como el producto de los dos primeros factores $(a + b) \times (a + b)$ que equivale al cuadrado de $(a + b)$ hemos visto que es $a^2 + 2ab + b^2$, poniendo en lugar de $(a + b) \times (a + b)$, su igual $a^2 + 2ab + b^2$ resultará

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b).$$

Para hallar el producto de esta multiplicación será preciso multiplicar las tres partes del multiplicando por a, primera parte del multiplicador, y después por b, segunda parte del multiplicador, y resultará

$$(a^2 + 2ab + b^2) \times a = a^3 + 2a^2b + ab^2, \text{ y}$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) \times b = a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

Sumando ambos productos saldrá

$$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3.$$

Como

$$2a^2b + a^2b = 3a^2b \text{ y}$$

$$ab^2 + 2ab^2 \text{ es } 3ab^2, \text{ resultará por último}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

De aquí resulta que el cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, mas el triplo del cuadrado del primero por el segundo, mas el triplo del primero por el cuadrado del segundo, mas el cubo del segundo.

Si el primero de dichos números es decenas y el segundo unidades, el cubo de la suma de dichos números se compondrá:

1.° Del cubo de las decenas.
2.° Del triplo del cuadrado de las decenas por las unidades.
3.° Del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades.
4.° Del cubo de las unidades.

Así, $74^3 = (70 + 4)^3 = 70^3 + (70^2 \times 4)3 + (70 \times 4^2) \times 3 + 4^3$.

230. Raiz cúbica de un número, es otro número que multiplicado por sí mismo reproduce el primero, y así, 4 será la raiz cúbica de 64, porque $4^3 = 64$. La raiz cúbica de un número se indica con el signo *radical* y un 3 que se escribe entre las dos líneas que forman el signo radical. Así, $\sqrt[3]{125}$, se lee: raiz cúbica de 125.

Pocos son también relativamente los números que tienen raiz cúbica exacta, ó que sean cubos perfectos. Entre los mil primeros números solamente lo son los cubos de los diez primeros números.

231. *Extracción de la raiz cúbica.*—Si el número es menor que 1000 ó no tiene más que tres cifras, su raiz cúbica se obtiene por la tabla de los cubos de los diez primeros números, que se debe saber de memoria. Así, $\sqrt[3]{600} = 8$, con menos error de una unidad.

Sea ahora un número de más de tres cifras y menos de seis como 395432. Los cálculos de su raiz cúbica, de que vamos á tratar, se disponen de esta manera:

$$\begin{array}{r|l} 395432 & 73 \\ \underline{343000} & \overline{147} \\ 52432 & \end{array}$$

Siendo el número propuesto mayor que 1000, su raiz cúbica será mayor que 10. Extrayendo la raiz cúbica de los 395 millares, se obtendrán las decenas de la raiz. En efecto, la raiz de 395 es 7. Como el cubo de 7 está contenido en 395, el de 70 lo estará en 395000, y con más razón aún lo estará en el número propuesto. El cubo de 8 debe ser cuando menos 396, y el cubo de 80 deberá ser cuando menos 396000, número mayor que el propuesto; luego la raiz está comprendida entre 70 y 80, y constará por tanto de 7 decenas.

Para determinar la cifra de las unidades de la raiz, observaremos que si hay tales unidades, el número propuesto contiene: el cubo de las decenas, el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades y el cubo de las unidades. Si se resta el cubo de las decenas ó 343000, el resto 52432, contendrá las otras tres partes. Ahora bien, el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades es un número exacto de centenas, y deberá hallarse en las 524 centenas del resto. Si, pues, dividimos 524 centenas por el triplo del cuadrado de las decenas, que es $7^2 \times 3$ ó 147, el cociente 3 de esta división, será la cifra de las unidades de la raiz.

Para comprobar esta cifra, no puede procederse aquí como en la raiz cuadrada, pues escribiendo la cifra 3 á la derecha del 147, y multiplicando 1473 por 3, no se obtendrían las otras partes del cubo. La formación de estas tres partes, es bastante complicada en la práctica, y para comprobar la cifra 3 (lo mismo se haría para comprobar cualquier cifra de la raiz), lo más sencillo será elevar al cubo 73, esto es, la raiz hallada, y ver si este cubo puede restarse del número propuesto. El cubo de 73 es 389017, y restándolo del número propuesto, resulta por residuo de la raiz cúbica, 6415.

El razonamiento que acabamos de hacer podrá aplicarse fácilmente á la extracción de la raiz cúbica de un número cualquiera, y por tanto terminaremos estableciendo para esta operación una

Regla general.—Para extraer la raiz cúbica de un número entero, dividiremos este número en períodos de tres cifras empezando por la derecha, pudiendo el primer período de la izquierda tener una, dos ó tres cifras. Se extrae la raiz cúbica de este primer período, y se obtendrá la primera cifra de la raiz; se eleva al cubo y el resultado se resta de dicho primer período. A la derecha del resto se baja el período siguiente, se separan dos cifras de la derecha; lo que queda á la izquierda, se divide por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y el cociente será la segunda cifra de la raiz. El número que forman las dos cifras halladas para la raiz, se eleva al cubo, y el resultado se resta de los dos primeros períodos. A la derecha del resto se baja el período siguiente, se separan dos cifras de la derecha, se divide lo que quede á la izquierda por el triplo del cuadrado de las dos cifras de la raiz, y el cociente será la tercera cifra de la raiz. El número que forman las tres cifras de la raiz, se eleva al cubo, se resta el resultado de los tres períodos tomados, y se continúa hasta que no quede período ninguno que bajar.

Supongamos que se haya de extraer la raiz cúbica de 874670214. Dividiendo este número en períodos de tres cifras, se extrae la raiz cúbica de 874 que es el primero y resultan 9. Se eleva 9 al cubo y resultan 729, que se resta de 874, resultando de resto 145. Se agrega á la derecha el período siguiente y resulta 145670. Separando dos cifras de la derecha con una coma, el número 1456 que queda á la izquierda, se divide por 343, triplo del cuadrado de 9, y resulta de cociente 5, que será la segunda cifra de la raiz. La raiz hallada de 95, se eleva al cubo y el número que resulta 857375 se resta de los dos primeros períodos del número propuesto. A la derecha del resto 17295, se añade el último período, se separan con la coma dos cifras de la derecha, quedan á la izquierda 172952, que se parte por 27075, triplo del cuadrado de 95, resultando de cociente 6, que será la tercera y última cifra de la raiz. La raiz hallada 956, se eleva al cubo y resulta 873722816, que se resta del número propuesto, quedando un residuo de 847398.

874,670,214	956	
729	81	9025
1456,70	$\times 3$	$\times 3$
857375	243	27075
172952,14		
873722816		
847398		

Si elevada al cubo la raiz, cualquiera que sea el número de cifras que se hayan obtenido para la misma, resulta un número mayor que el que formen los periodos que se hayan tomado del número propuesto, deberá disminuirse dicha raiz en una ó más unidades.

232. Los cubos de dos números enteros consecutivos se diferencian en el triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor mas uno.

$$\text{Así, } 9^3 - 8^3 = 3 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1.$$

$$\text{En efecto } (8 + 1)^3 \text{ ó } 9^3 = 8^3 + 3 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1.$$

Si de los dos miembros de esta igualdad se quita 8^3, con lo cual no se altera la igualdad, resulta:

$$9^3 - 8^3 = 3 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1.$$

De aquí se deduce que el residuo de la raiz cúbica deberá ser siempre menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada, mas el triplo de la raiz, mas 1; porque si el residuo que resulte fuera igual ó mayor que la suma de dichas tres partes, se podría añadir cuando menos una unidad más á la raiz hallada.

Si se obtuviera, por ejemplo, 12 como raiz cúbica de un número y quedara de residuo $3 \times 12^2 + 3 \times 12 + 1$, añadiendo estas tres partes al cubo de 12, se obtendría el cubo de 13, y por tanto la raiz cúbica del número propuesto sería 13 y no 12.

LECCIÓN XXXIII.

Cuadrado y raiz cuadrada de los quebrados comunes y de los quebrados decimales.—Aproximación de la raiz cuadrada de los números fraccionarios y de los números enteros.

233. El cuadrado de un quebrado se forma elevando al cuadrado el numerador y el denominador.

$$\text{Así, } \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5^2}{8^2}$$

$$\text{En efecto, } \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 8} = \frac{5^2}{8^2}$$

El cuadrado de un número decimal se forma multiplicándolo por sí mismo como entero y separando de la derecha del producto con una coma doble número de cifras decimales de las que tenga el número propuesto. Así, $(1'2)^2 = 1'44$.

$$\begin{array}{r} 1'2 \\ 1'2 \\ \hline 2\,4 \\ 1\,2 \\ \hline 1'4\,4 \end{array}$$

234. Para hallar la raiz cuadrada de un quebrado, cuyos términos sean cuadrados perfectos, se extrae la raiz cuadrada de los dos términos.

En efecto,

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}; \text{ pues } \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

235. Si solo es cuadrado perfecto el denominador, se extrae la raiz cuadrada entera del numerador y se divide por la del denominador.

$$\text{Así, } \sqrt{\frac{11}{49}} = \frac{3}{7}, \text{ con menos error de } \frac{1}{7}$$

236. Como el denominador expresa la calidad ó la magnitud de las partes de los quebrados, cuando se haya de extraer la raiz cuadrada de éstos conviene que dicho denominador tenga la raiz cuadrada exacta, con preferencia al numerador, que solo da á conocer el número de partes.

Si el denominador no tiene raiz cuadrada exacta, se logrará que la tenga, multiplicando los dos términos del quebrado por algún número que haga del denominador un cuadrado perfecto, lo cual se podrá siempre conseguir si ambos términos se multiplican por el mismo denominador.

Supongamos el quebrado $\frac{5}{32}$. Si se duplican los dos términos resulta: $\frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

$$\text{Por tanto, } \sqrt{\frac{5}{32}} = \sqrt{\frac{10}{64}} = \frac{3}{8}.$$

Sea el quebrado $\frac{3}{13}$. Multiplicando los dos términos por el denominador 13, resulta

$$\frac{3}{13} = \frac{3 \times 13}{13 \times 13} = \frac{39}{13^2}, \text{ y por tanto}$$

$$\sqrt{\frac{3}{13}} = \sqrt{\frac{39}{132}} = \frac{6}{13}$$

237. Para hallar la raiz cuadrada de un número entero con menos error que una parte cualquiera de la unidad, bastará convertir el número propuesto en una fracción que tenga por denominador el cuadrado del denominador que expresa el grado de aproximación.

$$\text{Así, } \sqrt{8} = \sqrt{\frac{8 \times 7^2}{7^2}} \text{ con menos error de } \frac{1}{7}$$

$$\text{En efecto, } 8 = \frac{8 \times 7^2}{7^2}; \text{ luego}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{\frac{8 \times 7^2}{7^2}} = \sqrt{\frac{392}{7^2}} = \frac{19}{7}$$

238. Para hallar la raiz cuadrada de un quebrado con menos error que una parte cualquiera de la unidad, se multiplica el numerador del quebrado por el cuadrado del denominador que expresa la aproximación, se parte el producto por el denominador del quebrado propuesto, se extrae la raiz cuadrada del cociente, y se le pone por denominador el de la fracción que indica la aproximación.

Si se quiere hallar, por ejemplo, la raiz cuadrada de $\frac{5}{6}$ con menos error de $\frac{1}{40}$, tendremos

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 40^2}{6} : 40^2; \text{ luego}$$

$$\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5 \times 40^2}{6} : 40^2} = \sqrt{\frac{8000}{6} : 40^2} = \sqrt{\frac{1333}{40^2}} =$$

$\frac{36}{40}$ con menos error de $\frac{1}{40}$.

239. Para aproximar la raiz cuadrada de un número entero por decimales, se añaden á la derecha del resíduo dos ceros, se continúa la operación como si los ceros añadidos fueran un nuevo período bajado del número propuesto, y se obtendrán las *décimas* de la raiz. Si se quiere más aproximación, se añaden otros dos ceros al resíduo que resulte, se consideran como un nuevo período bajado, y se obtendrán las centésimas de la raiz, y se continúa de la misma manera.

Supongamos que se quiera aproximar hasta las centésimas la raiz cuadrada de 7.

Dispondremos el cálculo de este modo:

$$\begin{array}{r|ll}
\sqrt{7} & 2'64 & \\
\hline
4 & 46 & 524 \\
\overline{30,0} & \times 6 & \times 4 \\
276 & \overline{276} & \overline{2096} \\
\overline{2400} & & \\
2096 & & \\
\overline{354} & &
\end{array}$$

En vez de añadir dos ceros á cada resíduo, como aquí se ha hecho, se podrían añadir desde luego al número propuesto tantas veces dos ceros como cifras decimales se quieran en la raiz, se extraería la raiz cuadrada y se separarían de la derecha de esta raiz con una coma tantas cifras como pares de ceros se hubiesen añadido al número propuesto. Suponiendo el mismo número del ejemplo anterior, hé aquí el cálculo:

$$
\begin{array}{r|lr}
\sqrt{7,0\,0,0\,0} & 2'6\,4 & \\
\hline
4 & 4\,6 & 5\,2\,4 \\
3\,0\,0 & \times 6 & \times 4 \\
\cline{2-3}
2\,7\,6 & 2\,7\,6 & 2\,0\,9\,6 \\
\cline{1-1}
2\,4\,0,0 & & \\
2\,0\,9\,6 & & \\
\cline{1-1}
3\,5\,4 & & \\
\end{array}
$$

240. Para extraer la raiz cuadrada de un quebrado decimal con menos error de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., se multiplica dicho quebrado por 10^2, 100^2, 1000^2, etc., corriendo al efecto la coma 2, 4, 6, etc., lugares á la derecha, se extrae la raiz cuadrada del producto, y se separan de esta raiz con una coma, una, dos, tres, etcétera, cifras de la derecha.

Supongamos que se haya de extraer la raiz cuadrada de 0'0073 con menos error de $\frac{1}{1000}$

Cálculo:

$$
\begin{array}{r|c}
0'0073 \times 1000^2 = 7\,3\,0\,0 & 8\,5 \\
\cline{2-2}
6\,4 & 1\,6\,5 \\
\cline{1-1}
9\,0,0 & \times 5 \\
\cline{2-2}
8\,2\,5 & 8\,2\,5 \\
\cline{1-1}
7\,5 & \\
\end{array}
$$

Luego $\sqrt{0'0073} = 0'085$ con menos error de 0'001.

En efecto,

$$0'0073 = \frac{0'0073 \times 1000^2}{1000^2} = \frac{7300}{1000^2}\text{; luego}$$

$$\sqrt{0'0073} = \sqrt{\frac{7307}{1000^2}} = \frac{85}{1000} = 0'085.$$

LECCIÓN XXXIV.

Cubo y raiz cúbica de los quebrados comunes y de los quebrados decimales.—Aproximación de la raiz cúbica de los números enteros y de los números fraccionarios.

241. Todos los razonamientos hechos en la lección anterior para la extracción de la raiz cuadrada de los quebrados tienen aplicación á la extracción de la raiz cúbica, sin más diferencia que la que es consiguiente á dos grados distintos de la raiz.

El cubo de un quebrado se obtiene elevando al cubo el numerador y el denominador.

$$\text{Así, } \left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7^3}{9^3}$$

En efecto,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{7 \times 7 \times 7}{9 \times 9 \times 9} = \frac{7^3}{9^3}$$

242. Si los términos de un quebrado son cubos perfectos, se hallará la raiz cúbica de este quebrado, extrayendo la raiz cúbica del numerador y la del denominador.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{125}{343}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{5}{7}, \text{ pues } \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$$

243. Si sólo el denominador tiene raiz cúbica exacta, se extrae la raiz cúbica entera del numerador, y se divide por la del denominador.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{58}{256}} = \frac{3}{6}, \text{ con menos error de } \frac{1}{6}.$$

244. Si el denominador no tiene raiz cúbica exacta, se conseguirá que la tenga, como conviene, multiplicando los dos términos del quebrado por el cuadrado del denominador.

Ejemplo: Sea el quebrado $\frac{4}{9}$.

$$\frac{4}{9}=\frac{4\times 9^2}{9\times 9^2}=\frac{324}{9^3};\ \text{luego}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\frac{324}{9^3}}=\frac{6}{9}$$

245. Para hallar la raiz cúbica de un número entero con menos error que una parte cualquiera de la unidad, bastará convertir el número propuesto en una fracción que tenga por denominador el cubo del denominador del quebrado que exprese la aproximación.

Suponiendo que se haya de extraer la raiz cúbica de 2 con menos error de $\frac{1}{5}$, tendremos

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{\frac{2\times 5^3}{5^3}}$$

En efecto,

$$2=\frac{2\times 5^3}{5^3}=\frac{250}{5^3};\ \text{luego}$$

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{\frac{250}{5^3}}=\frac{6}{5}=1\,\frac{1}{5}\ \text{con menos error de}\ \frac{1}{5}$$

246. Si se quiere hallar la raiz cúbica de un quebrado con una diferencia menor que cualquier parte de la unidad, se multiplica el numerador por el cubo del denominador que indica el grado de aproximación, se parte el producto por el denominador del quebrado propuesto, y al cociente se le pone por denominador el de la fracción que expresa la aproximación.

Se ha de hallar, por ej., la raiz cúbica de $\frac{2}{3}$ con menos error de $\frac{1}{20}$.

Es evidente que

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 20^3}{3}:20^3=\frac{16000}{3}:20^3=\frac{5333}{20^3};\ \text{luego}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5333}{20^3}}=\frac{16}{20}$$

247. Para aproximar por decimales la raiz cúbica de un entero se añaden á la derecha del resíduo tres ceros, se prosigue la operación como si los tres ceros añadidos procedieran de un nuevo período que se hubiera bajado del número entero y se obtendrán las décimas de la raiz; y añadiendo tres ceros á cada resíduo que vaya resultando, y continuando en todo lo demás la operación como si se tratara sólo de un número entero, se obtendrán sucesivamente las centésimas, milésimas, etc., de la raiz.

Se quiere aproximar hasta las centésimas, por ejemplo, la raiz cúbica de 12.

Sacando la raiz cúbica de 12, resultan 2.

El cubo de 2, que es 8, se resta de 12 y quedan 4 de resíduo. Añadiendo tres ceros á su derecha, separando dos y partiendo 40 por el triplo del cuadrado de 2 ó por 12, resultan 2 de cociente, que serán las décimas de la raiz. Se considera toda la raiz hallada como entero, se eleva al cubo 22 y el resultado 10648 se resta de 12 aumentando en tres ceros ó sea de 12000 y quedan 1352 de resíduo. A la derecha de éste se añaden otros tres ceros, se separan los dos primeros, y partiendo 13520 por el triplo del cuadrado de 22, resultan de cociente 8, que serán las centésimas de la raiz. Para comprobar esta cifra se considera toda la raiz, ó sea 228, como un número entero, se eleva al cubo y se resta de 12 aumentando en seis ceros, ó sea de 12.000.000, y si se quisiera mayor aproximación se añadirian al resíduo que resulte otros tres ceros, y se continuaria de la misma manera. Hé aquí el cálculo:

$\sqrt[3]{12}$	2'28
8	
40,00	12, triplo del cuadrado de 2
10648	2
13520,00	1425, triplo del cuadrado de 22
	8

En vez de añadir tres ceros á cada resíduo se podian haber añadido 6 ceros al número 12, y extrayendo la raiz cuadrada de 12.000.000, habíamos separado de la derecha de dicha raiz dos cifras por medio de la coma.

248. Para extraer la raiz cúbica de un quebrado decimal con menos error de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., se multiplica dicha fracción por 10^3, 100^3, 1000^3, etc., corriendo al efecto la coma 3, 6, 9, etcétera lugares á la derecha en la fracción propuesta: se extrae la raiz cúbica del producto, y se separan de la derecha de la raiz que resulta por medio de la coma 2, 4, 6, etc., cifras.

Supongamos que se haya de extraer la raiz cúbica de 0'00742 con menos error de $\frac{1}{100}$. Multiplicando esta fracción por 100^3, resulta 7420. Si ahora se extrae la raiz cúbica de este número, obtenemos 19, se separan dos cifras de la derecha, y resulta 0'19, que será la raiz pedida.

Cálculo:

$$
\begin{array}{l|l}
0'00742 \times 100^3 = 7'4\;2\;0 & 1\;9 \\
\underline{1} & \overline{3} \\
6\;4{,}2\;0 & \\
\underline{6\;8\;5\;9} & \\
5\;6\;1 &
\end{array}
$$

Luego $\sqrt[3]{0'00742} = 0'19$ con menos error de $\frac{1}{100}$

LECCIÓN XXXV.

Razones y proporciones.—Razón y proporción aritmética.—Propiedades más importantes de estas proporciones.

249. *Razón* en general es el resultado de la comparación de dos números cualesquiera que representen cantidades de la misma especie, ya para saber en cuánto excede el mayor al menor, ya cuántas veces uno de ellos está contenido en el otro. En el primer caso, la razón se llama *aritmética* ó *por diferencia,* y en el segundo *geométrica* ó *por cociente.*

Razón aritmética será, pues, la diferencia entre dos números que toman el nombre de *términos de la razón.* Uno de ellos se llama *antecedente,* y representa el minuendo; el otro *consecuente* y representa el sustraendo. De aquí se deduce que el antecedente es igual al consecuente mas la razón.

La razón aritmética se escribe separando el antecedente y el consecuente por medio de un punto ó por el signo de sustracción. Así, 15 . 11; ó 15 — 11 es una razón aritmética y se lee:

15 es á 11; ó 15 menos 11.

250. Se llama *proporción* en general, la igualdad de dos razones. Si las dos razones que la forman son aritméticas, la proporción se llama *aritmética* ó *equi-diferencia*. La proporción constará como es consiguiente de cuatro términos. El primero y cuarto se denominan *extremos* y el segundo y tercero *medios*. Las dos razones de la proporción se separan por medio de dos puntos ó por el signo de igualdad. Así,

$$12 . 7 : 9 . 4, \text{ ó}$$
$$12 - 7 = 9 - 4$$

es una proporción aritmética y se lee:

12 es á 7 como 9 es á 4; ó
12 menos 7 es igual á 9 menos 4.

251. Entre las diferentes propiedades de la proporción aritmética, la más importante, la fundamental, es la siguiente:

La suma de los términos medios es igual á la suma de los términos extremos.

Así, en la proporción

$$18 . 11 : 10 . 3, \text{ será}$$
$$18 + 3 = 11 + 10$$

En efecto, añadiendo al término medio 11 la razón 7, y al extremo 10, la misma razón, en vez de 11 resultarán 18 y en vez de 3 saldrán 10, y la proporción anterior se transforma en esta otra:

$$18 . 18 : 10 . 10$$

Habiendo añadido 7 unidades á la suma de los medios y otras 7 á la de los extremos, resulta evidentemente suma de medios igual á la suma de extremos, luego, antes de añadir nada, estas dos sumas serían también iguales.

252. De la anterior propiedad se deduce fácilmente que *en la proporción aritmética un extremo desconocido es igual á la suma de los medios menos el extremo conocido; y un medio desconocido es igual á la suma de los extremos menos el medio conocido.*

En efecto, suponiendo las proporciones

$$45 . 34 : 37 . x$$
$$52 . x : 40 . 18$$

En la primera tenemos $x + 45 = 34 + 37$, y restando 45 de ambos miembros de la igualdad, resulta

$$x = 34 + 37 - 45 = 26$$

En la segunda será $x + 40 = 52 + 18$, y restando 40 de ambos miembros, resulta

$$x = 52 + 18 - 40 = 30$$

253. La proporción se llama continua cuando los dos términos medios son iguales, como por ejemplo, la siguiente:

$$56 . 45 : 45 . 34$$

En la proporción continua, un término medio es igual á la mitad de la suma de los extremos. Sea la proporción

$$120 . x : x . 86$$

Sabemos que $x + x = 120 + 86$; luego

$$2x = 120 + 86, \text{ y}$$

$$x = \frac{120 + 86}{2} = 103$$

Un extremo de la proporción contínua es igual al duplo de un medio menos el otro extremo.

Sea la proporción

$$240 . 128 : 128 . x$$

Sabemos que $x + 240 = 128 + 128$; ó

$$x + 240 = 128 \times 2; \text{ luego}$$

$$x = 128 \times 2 - 240$$

254. Las proporciones aritméticas admiten gran número de transformaciones que no alteran la proporción siempre que se conserve la relación de igualdad entre suma de medios y suma de extremos.

Así, suponiendo la proporción

$$18 . 14 : 13 . 9$$

Si se permutan los medios, resulta

$$18 . 13 : 14 . 9$$

Poniendo los medios por extremos y éstos por medios, tendremos

$$14 . 18 : 9 . 13$$

También se podrían invertir todos los términos de la proporción, aumentar ó disminuir los antecedentes ó los consecuentes en una misma cantidad, etc.

LECCIÓN XXXVI.

Proporciones geométricas.—Propiedades de estas proporciones.

255. La *razón geométrica* es una división cuyos términos se llaman *antecedente* y *consecuente*. El antecedente hace veces de dividendo, y el consecuente de divisor; de donde se deduce que el antecedente es igual al consecuente multiplicado por la razón. En la razón geométrica, los términos se separan por dos puntos ó por una recta horizontal.

Así, $12 : 3$, ó $\frac{12}{3}$ es una razón geométrica y se lee: 12 es á 3 ó 12 dividido por 3.

256. Dos razones geométricas iguales forman una proporción geométrica ó *equi-cociente*. Consta la proporción geométrica de cuatro términos que, como en la proporción aritmética, se llaman extremos el 1.° y 4.°, y medios el 2.° y 3.° Las dos razones de la proporción se separan por medio de cuatro puntos ó por el signo de igualdad.

Así, $28 : 4 :: 42 : 6$, ó

$$\frac{28}{4} = \frac{42}{6}$$

es una proporción geométrica y se lee:

28 es á 4 como 42 es á 6, ó

28 partido por 4 es igual á 42 partido por 6.

257. *En toda proporción geométrica, el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.*

Para demostrar esta importante propiedad de la proporción geométrica, supongamos la siguiente

$$a : b :: c : d$$

Si escribimos en forma de quebrados las dos razones, la proporción propuesta equivaldrá á esta otra:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Reduciendo á común denominador ambos quebrados, resulta:

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$$

Siendo iguales los dos quebrados y teniendo iguales los denominadores, también serán iguales los numeradores, y por tanto

$$a \times d = c \times b$$

Como el primer producto representa los extremos de la proporción propuesta, y el segundo representa los medios, resulta producto de extremos igual á producto de medios.

258. De esta propiedad se deduce fácilmente que en toda proporción geométrica *un medio es igual al producto de los extremos partido por el medio conocido; y un extremo, igual al producto de los medios partido por el extremo conocido.*

En efecto, sean las proporciones

$$24 : 8 :: 30 : x, \text{ y}$$
$$56 : 7 :: x : 5$$

Sabemos que en la primera

$$x \times 24 = 8 \times 30$$

Partiendo ambos miembros por 24, resulta

$$x = \frac{8 \times 30}{24}$$

Sabemos que en la segunda

$$x \times 7 = 5 \times 56$$

Partiendo ambos miembros por 7, resulta

$$x = \frac{5 \times 56}{7}$$

259. *Si la proporción geométrica es continua, un medio será igual á la raiz cuadrada del producto de los extremos, y un extremo igual al cuadrado de un medio partido por el otro extremo.*

En efecto, sean las proporciones

$$40 : x : : x : 5$$
$$x : 36 : : 36 : 4$$

Se sabe ya que en la primera

$$x \times x = 40 \times 5; \text{ ó}$$
$$x^2 = 40 \times 5; \text{ luego}$$
$$x = \sqrt{40 \times 5}$$

Se sabe igualmente que en la segunda

$$x \times 4 = 36 \times 36;$$
$$x \times 4 = 36^2$$

Partiendo ambos términos por 4 resulta

$$x = \frac{36^2}{4}$$

260. En las proporciones geométricas caben también todas aquellas transformaciones que no alteren la relación de igualdad entre producto de extremos y producto de medios, condición suficiente para que la proporción subsista.

Así, pues, se podrán cambiar los medios; poner los medios por extremos y éstos por medios; invertir los términos de la proporción; multiplicar ó dividir los dos antecedentes ó los dos consecuentes por un mismo número, etc.

261. Si se multiplican ordenadamente varias proporciones, los productos forman proporción.

Sean, por ejemplo, las proporciones

$$12 : 4 : : 6 : 2$$
$$15 : 3 : : 25 : 5$$

Escribiendo las razones en forma de quebrados, tendremos

$$\frac{12}{4} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{15}{3} = \frac{25}{5}$$

Multiplicando estas dos igualdades resulta

$$\frac{12}{4} \times \frac{15}{3} = \frac{6}{2} \times \frac{25}{5}; \text{ luego}$$

$$\frac{12 \times 15}{4 \times 3} = \frac{6 \times 25}{2 \times 5}; \text{ ó}$$

$$12 \times 15 : 4 \times 3 :: 6 \times 25 : 2 \times 5$$

Como consecuencia de la propiedad precedente, los cuadrados, los cubos y en general las potencias del mismo grado de los cuatro términos de una proporción, forman proporción.

LECCIÓN XXXVII.

Regla de tres.

262. La *regla de tres tiene por objeto hallar el cuarto término de una proporción.* También podría decirse que la regla de tres tiene por objeto la resolución de las cuestiones de cálculo que dan lugar á una ó más proporciones. Si la cuestión se resuelve con una sola proporción, la regla de tres se llama *simple,* y si con dos ó más, *compuesta.*

La regla de tres simple constará por tanto de cuatro términos, los cuales han de ser *homogéneos* dos á dos, tres de ellos conocidos, que se representan por medio de guarismos, y uno desconocido, que se llama *incógnita,* y se representa por una de las últimas letras del alfabeto.

Para fijar mejor las ideas sobre lo que se acaba de exponer y sobre lo que resta decir acerca de este particular nos serviremos de un ejemplo.

Suponiendo que 64 metros de tela valen 1920 pesetas, se pregunta cuánto valdrán 86 metros de tela de la misma clase.

Los números 64 y 86 son homogéneos, puesto que ambos representan unidades de la misma especie, metros; los números 1920 y el desconocido también son entre sí homogéneos, porque ambos representan pesetas. Sin esta condición no habría regla de tres, porque no podría establecerse proporción entre los cuatro números.

El problema propuesto consta, como todos los de regla de tres, de dos partes que se distinguen fácilmente, pero que para mayor claridad deben escribirse en un renglón cada una.

La primera parte, donde se supone ó se da por sabido lo que valen cierto número de unidades, se llama *supuesto*, y la segunda, donde se pide el valor de otro número de unidades de igual especie, *pregunta*.

Hé aquí la forma en que debe presentarse toda cuestión de esta clase para facilitar el cálculo:

Supuesto. 64 metros valen. . . 1920 pesetas.
Pregunta. 86. x

Entre las pesetas y los metros hay verdadera correspondencia, así en el supuesto como en la pregunta, y por esto se dice que estas cantidades son entre sí *correspondientes*. En efecto, á 64 metros corresponden 1920 pesetas, ó recíprocamente, á 1920 pesetas corresponden 64 metros, y del mismo modo, á 86 metros corresponden x pesetas, y al contrario.

Entre cada cantidad y su correspondiente puede haber dos clases de relaciones:

1.ª Que aumentando ó disminuyendo una de dichas cantidades, su correspondiente aumente ó disminuya.

2.ª Que aumentando ó disminuyendo una de las cantidades, su correspondiente disminuya ó aumente.

En el primer caso, estas cantidades se dice que están en *razón directa*, y en el segundo, en *razón inversa*. Hé aquí un ejemplo de cada especie:

1.° { 64 metros valen. . . . 1920 pesetas.
{ 86 metros. x

2.° { 10 hombres necesitan.. . 40 días para una obra.
{ 12 hombres.. x

En el primer ejemplo se observa que si se duplican, triplican, etc., los metros, se duplicarán, triplicarán, etc., las pesetas, y si se toma la mitad, tercio, etc., de metros, valdrán la mitad, tercio, etc., de pesetas; y en general, que multiplicando una cantidad ó dividiéndola, su *correspondiente* queda multiplicada ó dividida, y por consiguiente los metros y las pesetas están en *razón directa*.

En el segundo ejemplo, al contrario, si trabajara doble, triplo, etc., número de hombres, se reduciría á la mitad, tercio, etc., el número de días, y si trabajaran la mitad, tercio, etc., de hombres, se emplearía doble, triplo, etc., número de días, y en general, que multiplicando ó dividiendo una cantidad, su correspondiente queda dividida ó multiplicada, y por tanto el número de hombres y el de días están en *razón inversa*.

Aunque en estas denominaciones no haya toda la propiedad que algunos desearan, por una parte se comprende bastante bien la diversa relación que liga á las cantidades según que sean directa ó inversamente proporcionales, y por otra, todos aplican é interpretan del mismo modo su sentido, no habiendo por tanto razón para desecharlas ó cambiarlas.

263. Puesto que las cuestiones de regla de tres se resuelven por medio de proporciones, falta ahora fijar en qué orden deben colocarse los términos en la proporción que se forme para obtener el verdadero resultado.

La formación de dicha proporción varía según que los términos sean directa ó inversamente proporcionales.

Si están en razón directa, deberán escribirse en el orden siguiente: *Primer término es á su homogéneo, como el correspondiente al primero es al correspondiente al segundo.*

En efecto, si suponemos el primero de los problemas antes propuestos, es indudable que si 64 metros valen 1920 pesetas, duplo, triplo, etc., número de metros, valdrán duplo, triplo, etc., número de pesetas, y por consiguiente, los dos números de metros están en la misma razón que sus valores las pesetas, y habrá entre ellos la proporción siguiente:

$$\frac{64}{86} = \frac{1920}{x}\text{; ó}$$

$$64 : 86 : : 1920 : x.$$

Como puede tomarse por primer término cualquiera de los cuatro del problema, según empecemos por 86, por 1920 ó por x, la proporción podrá escribirse también en el orden que indican las siguientes:

$$86 : 64 : : x : 1920$$

$$1920 : x : : 64 : 86$$

$$x : 1920 : : 86 : 64\ .$$

Formada la proporción, la cuestión queda reducida á hallar el término desconocido, sea extremo ó medio (**258**). En el caso presente tendremos

$$x = \frac{86 \times 1920}{64} = 2580\text{, valor de los 86 metros.}$$

264. Si los términos están en razón inversa, la proporción se formará en el orden siguiente: *Primer término es á su homogéneo, como el correspondiente al segundo es al correspondiente al primero.*

En efecto, si 10 hombres han necesitado 12 días para hacer una obra; doble, triplo, etc., número de hombres, necesitarán la mitad, tercio, etc., de días; y de consiguiente, tantas veces como esté contenido el primer número de hombres 10 en el segundo 12 estarán los días necesarios al segundo número de hombres contenidos en los días necesarios al primer número de hombres; luego

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{40}; \text{ ó } 10 : 12 :: x : 40$$

De donde

$$x = \frac{40 \times 100}{12} = \frac{400}{12} = 33'33,$$

que son los días que necesitarían los 12 hombres.

Pudiéndose tomar como primero cualquiera de los cuatro términos, la proporción admite también el orden que indica cualquiera de las siguientes:

$$12 : 10 :: 40 : x$$
$$40 : x :: 12 : 10$$
$$x : 40 :: 10 : 12$$

265. Las cuestiones de regla de tres pueden resolverse también por el método de *reducción á la unidad*, del cual dimos una idea en el número 93. Completaremos esta importante parte de la Aritmética aplicando dicho método y el de las proporciones á la resolución de algunos problemas.

1.° Si en 24 días se gastan 260 litros, cuántos se gastarán en 30 días?

Resolución.—Siendo directamente proporcionales los datos de este problema, resulta la proporción

$$24 : 30 :: 260 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{260 \times 30}{24} = 325 \text{ litros.}$$

Por reducción á la unidad haríamos el siguiente cálculo:

Si en 24 días se gastan 260 litros, en un día se gastarían $\frac{260}{24}$, y en 30 días se gastarían $\frac{260}{24} \times 30 = \frac{260 \times 30}{24} = 325$ litros.

2.° Para alfombrar una sala se han empleado 65 varas de alfombra de 3 palmos de ancho; si la alfombra tuviera 5 palmos de ancho, cuántas varas de alfombra se necesitarían?

Resolución.—Como el número de varas y el ancho de la alfombra están en razón inversa, tendremos la proporción

$$3 : 5 : : x : 65; \text{ de donde}$$

$$x = \frac{65 \times 3}{5} = \frac{195}{5} = 39 \text{ varas}$$

Por reducción á la unidad, diríamos:

Siendo el ancho de la alfombra 3 palmos, se necesitan 65 varas; si el ancho fuera 1 palmo, se necesitarían 3 veces 165 varas, ó 165 $\times$ 3, y siendo el ancho 5 palmos, se necesitarán la quinta parte de 165 $\times$ 3 ó

$$\frac{166 \times 3}{5} = 39$$

266. Si los datos de esta clase de problemas estuvieran representados por números fraccionarios ó por números complejos, antes de aplicar á su resolución cualquiera de los métodos precedentes, convendría simplificar el cálculo reduciendo dichos datos á números incomplejos decimales.

Ejemplo:

Si en 5 años y 10 meses se gastaron 340 arrobas, 18 libras, cuánto se gastará en 8 años?

Reducidos los 10 meses á decimal de año resultan 5'83 años.

Reducidas las 18 libras á decimal de arroba, resultan 340'75 arrobas.

Estando en razón directa los años y las arrobas, tendremos la proporción

$$5'83 : 8 : : 340'75 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{340'75 \times 8}{5'83} = 467'58 \text{ arrobas.}$$

Problemas. Resuélvanse los siguientes:

1.° *En 15 días se fabricaron 460 metros de tela; cuántos días se necesitan para fabricar 8720? (284)*

2.° *Si el metro de paño tiene 0'84 metros ancho, vale 30'25 pesetas el metro, cuánto valdría un metro de paño de la misma clase si tuviera 1'5 metros de ancho? (16'81)*

3.° *Si el ancho de la alfombra es 0' 95 metros, se necesitan 52'4 metros para alfombrar una sala. Si la alfombra tuviera 0'72 metros de ancho, cuántos metros se necesitarían? (69'27)*

4.ª *60'4 Hl. de trigo costaron 1080 pesetas. Cuánto dinero se necesita para comprar 235 Hl.? (4230)*

5.° *En 5 años 7 meses produjo de renta una finca 82460'45 pesetas. Cuánto produciría la misma finca en 5 años y 9 meses? (132445)*

6.° *Si el ancho de una plancha metálica es $\frac{3}{4}$ de vara, se necesitan para una obra 5 $\frac{1}{2}$ varas. Si el ancho fuera de $\frac{2}{3}$, cuántas varas se necesitarían? (6'24)*

7.° *Sabiendo que 9 Hectáreas equivalen á 14 fanegas, cuántas fanegas tendrán 25 Hectáreas? (38'88)*

8.° *Sabiendo que 9 Hectáreas equivalen á 14 fanegas, cuántas Hectáreas tendrán 52 fanegas? (33'42)*

9.° *Dada la equivalencia 46 quintales métricos = 100 quintales antiguos, reducir:*

1.° *146'28 Qm. á quintales antiguos (317)*

2.° *3640 quintales antiguos á Qm. (1674'4)*

10. *Dada la equivalencia 7 m.^{3} = 12 varas^3, reducir:*

1.° *18 varas cúbicas 20 pies cúbicos á mt. cúb. (10'93)*

2.° *Reducir 67'4 m.^{3} á var.^{3} (115'5)*

LECCIÓN XXXVIII.

Continuación de la regla de tres.

267. Ya hemos visto en la lección anterior, que la regla de tres se llama *compuesta* cuando consta de dos ó más proporciones.

Ejemplo:

Suponiendo que 18 hombres en 24 días, trabajando 8 horas diarias hacen 470 metros de obra, se pregunta cuántos días necesitarían 25 hombres, trabajando 9 horas al día, para construir 1260 metros.

Para facilitar la comparación que debe hacerse de los términos del problema, convendrá separar el *supuesto* de la *pregunta* en esta forma:

18 hombres	24 días	8 horas diarias	470 metros
25 »	x	9	1260

Este problema podrá descomponerse en los tres problemas simples siguientes, á cuyas incógnitas llamaremos respectivamente x, y, z:

1.º $\begin{cases} \text{Si 18 hombres emplean 24 días en una obra} \\ \quad \text{25 emplearán. . . } x \end{cases}$

2.º $\begin{cases} \text{Si con 8 horas diarias emplean } x \text{ días} \\ \quad \text{con 9. . . . . } y \end{cases}$

3.º $\begin{cases} \text{Si para 470 metros tardan } y \text{ días} \\ \quad \text{para 1260. . . . . . } z \end{cases}$

Estando en razón inversa los términos del primero y segundo, y en razón directa los del tercero, resultarán de los tres problemas estas proporciones:

$$25 : 18 :: 24 : x$$
$$9 : 8 :: x : y$$
$$470 : 1260 :: y : z$$

Si se quisieran resolver sucesivamente estas tres proporciones, hallaríamos primero el valor de x en la primera, y lo pondríamos en lugar de x en la segunda; calcularíamos después en ésta el valor de y y lo pondríamos en lugar de y en la tercera, y por último se hallaría en ésta el valor de z, con lo cual quedaría resuelto el problema; pero procediendo de esta manera, se practicarían más operaciones de las necesarias, y el cálculo se haría más largo y más penoso, siendo por tanto preferible multiplicar entre si ordenadamente las tres proporciones, las cuales quedarán con esto reducidas á una sola, que es la siguiente:

$$25 \times 9 \times 470 : 18 \times 8 \times 1260 :: 24 \times x \times y : x \times y \times z$$

Como una proporción no se altera si se parten un extremo y un medio por un mismo número, partiendo los dos últimos términos por $x \times y$, para la cual bastará suprimir ambos factores, resulta por último

$$25 \times 9 \times 470 : 18 \times 8 \times 1250 :: 24 : z; \text{ y}$$

$$z = \frac{18 \times 8 \times 1260 \times 24}{25 \times 9 \times 470}$$

Para hallar el valor de este quebrado, convendrá aplicar las reglas dadas sobre la simplificación de las fracciones comunes, y se obtendrá por resultado 41'17 días, que es el tiempo que necesitarían los 30 hombres para hacer los 1260 metros de obra.

Si aplicáramos á la resolución de este problema el método de *reducción á la unidad*, practicaríamos el cálculo de esta manera:

1.° Si 18 hombres emplean 24 días en una obra, un hombre solo emplearía 18×24 días, y 25 hombres emplearían $\frac{18 \times 24}{25}$ días.

2.° Si trabajando 8 diarias se tardan $\frac{18 \times 24}{25}$ días en hacer una obra, trabajando una hora solamente al día, se tardaría 8 veces más; esto es, $\frac{18 \times 24}{25} \times 8$; ó $\frac{18 \times 24 \times 8}{25}$, y si en lugar de una hora se trabajara 9 horas al día, se tardaría 9 veces menos; esto es, $\frac{18 \times 24 \times 8}{25} : 9$; ó $\frac{18 \times 24 \times 8}{25 \times 9}$ días.

3.° Si para hacer 470 metros de obra se necesitan $\frac{18 \times 24 \times 8}{25 \times 9}$ días, para hacer un metro solamente se necesitaría 470 veces menos, ó sea $\frac{18 \times 24 \times 8}{25 \times 9} : 470$; ó $\frac{18 \times 24 \times 8}{25 \times 9 \times 470}$, y para hacer 1260 metros se necesitarán 1260 veces más; esto es, $\frac{18 \times 24 \times 8}{25 \times 9 \times 470} \times 1260$ ó por fin $\frac{18 \times 24 \times 8 \times 1260}{25 \times 9 \times 470}$ días.

268. De cualquier modo que se resuelva la regla de tres compuesta vemos que como resultado del cálculo se obtiene un quebrado en cuyos términos figuran como factores todos los términos conocidos del problema.

Ahora bien, observando á cuál de los términos de dicho quebrado corresponde cada uno de los términos del problema, podríamos prescindir de las proporciones y de calcular parte por parte como se hace en el método de reducción á la unidad, estableciendo en cambio para la *práctica* una regla general que nos ahorre tiempo y trabajo.

Al efecto, examinando el resultado

$$z = \frac{18 \times 8 \times 1260 \times 24}{25 \times 9 \times 470}$$

observaremos:

1.° Que la *homogénea* de la incógnita es factor del numerador y esto sucede constantemente, ya se halle dicho término en razón directa ó inversa con la especie de la incógnita, como puede notarse en los diferentes problemas de regla de tres simple resueltos en la lección anterior.

2.° Que tomando de dos en dos los términos homogéneos, si están en razón inversa con la especie de la incógnita, el término del *supuesto* es factor del numerador, y el de la *pregunta*, del denominador, como sucede en este caso con 18 hombres y 25 hombres y con 8 horas y 9 horas; y si están en razón directa, el término del supuesto es factor del denominador, y el de la pregunta, del numerador, como sucede con 470 metros y 1260 metros.

Por consiguiente, para hallar el valor de la incógnita en un problema de regla de tres, bastará formar un quebrado, cuyos términos contengan en el orden expresado como factores del numerador y del denominador los términos conocidos del problema.

Hé aquí otro ejemplo:

12 máquinas de 6 caballos cada una elevan en 8 días 1200 Qm. de carbón de piedra del fondo de una mina. Trabajando en las mismas condiciones, cuántas máquinas de 10 caballos se necesitarían para elevar en 18 días 24600 Qm.?

Distribuyendo este problema en sus dos partes, supuesto y pregunta, tendremos

12 máq.	6 cab.	8 días	1200 Qm.
x	10	18	24600

El valor de la incógnita equivaldrá á un quebrado que tendrá:

Por numerador: 12 que es la homogénea de la incógnita; los números 6 y 8 del supuesto, que representan respectivamente caballos y días y están en razón inversa del número de máquinas; y finalmente 24600 de la pregunta, por cuanto este número representa Qm. que están en razón directa del número de máquinas.

Por denominador: los términos 10 y 18 de la pregunta y 1200 del supuesto.

Así, pues, si llamamos x á la incógnita del problema, resulta

$$x = \frac{12 \times 6 \times 8 \times 24600}{10 \times 18 \times 1200}$$

Tachando igual número de ceros y suprimiendo factores comunes en el numerador y denominador, obtendremos por último

$$x = \frac{4 \times 82}{5} = 65.$$

Problemas.—Resuélvanse los siguientes:

1.° *28 varas de alfombra, cuyo ancho es 5 palmos, han costado 320 pesetas. Cuánto costarían 40 varas cuyo ancho fuere 7 palmos? (640)*

2.° *Un capital de 12620 pesetas ha producido en 5 años una ganancia de 7240. Cuánto producirían 20000 pesetas en 10 años al mismo interés? (22947)*

3.° *45'6 metros de alfombra cuyo ancho es 0'84 metros costaron 1080 pesetas. Cuánto costarían 70 metros de alfombra de la misma clase cuyo ancho fuese de 1'5 metros?*

LECCIÓN XXXIX.

Regla de interés.

269. *Se da el nombre de interés á la ganancia que produce el préstamo de una cantidad de dinero.* Esta ganancia es proporcionada á la cantidad que se presta y al tiempo por que se presta, y para determinarla se ha fijado como tipo una cierta cantidad de tiempo y otra cantidad de dinero. La cantidad de tiempo es generalmente el año; y la de dinero cien unidades; de modo que se calcula el interés ó los réditos del dinero que se presta, conviniendo en que se pagará al año 3, 4, 5, etc., por cada 100 unidades prestadas, y á esto se llama *tanto por ciento*. El tipo no es, sin embargo, invariable, pues podría estipularse el interés de un tanto por 20, por 40, etc., al mes, al trimestre, etc.

Aunque el tanto p. °/₀ (1) es convencional entre el que presta y el que recibe el dinero, pudiendo variar según las circunstancias, la costumbre tiene establecido un límite, y cuando se presta á mucho más interés del generalmente admitido, se incurre en lo que se llama *usura*.

La regla de *interés* y algunas otras de que trataremos más adelante, no son más que aplicaciones de la regla de *tres*, de la cual sólo se diferencian en los nombres que toman, según las cuestiones particulares sobre que versan.

El interés se divide en *simple* y *compuesto*. Se llama simple cuando sólo el capital produce réditos ó ganancias, y compuesto cuando además del interés del capital, se obtiene el interés del interés.

El préstamo puede hacerse por tiempo de un año, ó por tiempo diferente de un año. En el primer caso, la regla de interés comprende cuatro términos, tres conocidos y uno desconocido, homogéneos dos á dos, á saber: *capital* ó cantidad que se presta; *tanto por ciento*, interés de cada 100 unidades; *réditos*, ganancia total, y *ciento*, cantidad invariable por la cual se regula el tanto.

Veamos ahora cómo se calculan los réditos, que es lo que comunmente ocurre averiguar en la regla de interés.

---

(1) En lo sucesivo escribiremos p. °/₀ en vez de *por 100*.

Se desea saber, por ejemplo, cuánto producirán en un año 9480 pesetas prestadas al 7 p. °/₀. Planteando esta cuestión en la forma que se acostumbra dar á la regla de tres, la enunciaríamos de esta manera:

Si 100 pesetas producen 7
9480.. x

Siendo directamente proporcionales capital y rédito, tendremos $100 : 9480 :: 7 : x$. De donde resulta $x = \frac{9480 \times 7}{100} = 663'60$ pesetas.

Pero como hay casos en que no son los réditos, sino alguno de los otros términos lo que debe calcularse, consideraremos la regla de interés de una manera más general. Si llamamos c al capital, i al interés ó tanto p. °/₀ y r á los réditos, podremos establecer, según acaba de verse, la siguiente proporción:

$$100 : c :: i : r$$

De esta proporción podrá deducirse el valor de la incógnita, ya sea ésta el capital c, ya el tanto p. °/₀ i, ya el rédito r.

En efecto,

$$r = \frac{c \times i}{100}; \quad i = \frac{r \times 100}{c}; \quad c = \frac{r \times 100}{i}$$

De estas tres fórmulas resulta que el *rédito* es igual al producto del capital por el interés partido por 100;

El *interés* igual al producto de los réditos multiplicados por 100 y dividido por el capital;

El *capital* igual al producto de los réditos por 100 partido por el interés.

Ejemplos:

1.° ¿Qué réditos producirán 1940 pesetas prestadas por un año á 6'5 p. °/₀? $\quad r = \frac{1940 \times 6'5}{100} = 126'10$

2.° ¿Qué tanto p. °/₀ corresponde á un capital de 8660 pesetas que en un año ha producido 700 pesetas? . . . . $\quad i = \frac{700 \times 100}{8660} = 8'08$ p. °/₀

3.° ¿Cuánto dinero debe prestarse por un año á 6'25 p. °/₀ para obtener de réditos 1240 pesetas? $\quad c = \frac{1240 \times 100}{6'25} = 19808$

Si el tiempo fuese menos de un año, puede calcularse primero los réditos de un año, y después los correspondientes al tiempo dado por medio de una proporción.

Ejemplo: Habiéndose prestado 6480 pesetas á 5'60 p. °/₀ por tiempo de un año, el deudor devuelve el capital á los 7 meses. Qué rédito debe pagar?

El rédito de un año es $r = \frac{6480 \times 5'60}{100} = 362'88$ pesetas.

Para hallar el de 7 meses formaremos la proporción

$$12 \text{ meses} : 7 \text{ meses} :: 362'88 : x$$

$$x = \frac{362'88 \times 7}{12} = 211'68, \text{ réditos de los 7 meses.}$$

Hasta aquí hemos supuesto que la duración del préstamo es la unidad de tiempo; esto es, el año; pero el tiempo puede ser más de un año, y en este caso al capital, tanto p. °/₀ y réditos, hay que agregar como nuevo dato el tiempo.

Ejemplo: Cuánto producirán en 4 años 10560 pesetas prestadas al 5 p. °/₀ anual?

Resolución.—Si 100 unidades producen 5 de interés en un año, en 4 años producirán 4×5. La cuestión podrá reducirse ahora á la siguiente regla de tres:

Si 100 producen 4×5
10560 producirán x

De donde resulta la siguiente proporción:

$$100 : 10560 :: 4 \times 5 : x$$

Según esta proporción: *ciento es al capital, como el tanto por ciento multiplicado por el tiempo es á los réditos.*

Hallando por último el valor de x, resulta

$$x = \frac{10560 \times 4 \times 5}{100} = 2112 \text{ pesetas,}$$

réditos de los cuatro años; cuyo resultado indica que *el rédito es igual al producto del capital multiplicado por el tiempo y por el interés partido por* 100.

Generalizando ahora el cálculo, y llamando para esto c al capital, i al tanto p. °/₀, r al rédito y t al tiempo, tendremos, como acabamos de ver, la proporción:

$$100 : c :: t \times i : x$$

De cuya proporción resulta

$$r = \frac{c \times t \times i}{100}$$

$$i = \frac{100 \times r}{c \times t}$$

$$t = \frac{100 \times r}{c \times i}$$

$$c = \frac{100 \times r}{t \times i}$$

Ejemplos:

1.° Cuánto produce en 3 años un capital de 4670 pesetas prestadas al 6 p. %? $r = \frac{4670 \times 3 \times 6}{100} = 840'60$ pt.

2.° Un capital de 8500 pesetas prestado por 4 años ha producido 2500 pesetas. Qué tanto p. % producía este capital? $i = \frac{100 \times 2500}{8500 \times 4} = 7'35$ p. %

3.° Por cuánto tiempo deben prestarse 9000 pesetas al 6 p. % para obtener 2860 pesetas de rédito? $t = \frac{100 \times 2860}{9000 \times 6} = 5'48$ años.

4.° Qué capital debe prestarse al 8 p. % para obtener en 5 años 6400 pesetas de rédito? $c = \frac{100 \times 6400}{5 \times 8} = 16000$ pts.

Si alguno de los datos estuviera expresado por fracciones comunes ó por números complejos, á fin de evitar complicación en el cálculo, convendrá reducirlos previamente á incomplejos decimales.

Problemas.—Resuélvanse los siguientes:

1.° *Qué réditos producirán en un año 11500 pesetas á 9'75 p. %? (1121'25)*

2.° *Qué capital debe imponerse á 8'45 p. % para obtener 2246 pesetas de réditos? (26578)*

3.° *Cuánto producen 9780 pesetas al 6 p. % en 5 años? (1760'40)*

4.° *Un capital impuesto á 9 p. % anual ha producido en 4 años 12600 pesetas. A cuánto asciende este capital? (35000)*

5.° *En cuántos años producirá 14500 pesetas un capital de 20000 pesetas prestadas á 6'50 p. °/₀? (11 años, 1 mes y 25 días)*

6.° *Cuánto producen en 8 meses y 20 días 10000 pesetas á 5 p. °/₀ (360)*

7.° *A qué tanto p. °/₀ deberá imponerse un capital de 25640 pesetas para obtener en un año 4035 de rédito? (15'73)*

LECCIÓN XL.

Continuación de la regla de interés.

270. *La regla de interés compuesto tiene por objeto principal averiguar cuánto suman al cabo de cierto tiempo el capital prestado y los réditos que producen tanto este capital como los réditos sucesivos acumulados al mismo.*

Suponiendo que la unidad de tiempo sea el año, el capital aumentado con los réditos es cada año mayor que el del año precedente. En efecto, al terminar el primer año, el capital para el segundo se compone de la suma del capital primitivo mas los réditos que ha producido; al finalizar el segundo año, el capital para el tercero se compone del capital que había para el segundo, mas lo que en el mismo ha producido, y así sucesivamente. En consecuencia, al finalizar el último año, el capital, los réditos de este capital y los réditos de los réditos constituyen una sola cantidad. Cuando los réditos se van agregando año por año al capital del año anterior, se dice que estos réditos están *capitalizados.*

Dedúcese de lo expuesto, que por varias reglas de interés simple podremos hallar en cuánto se convierte al cabo de cierto número de años un capital prestado á interés compuesto.

Ejemplo.—Se pregunta á cuánto asciende en tres años un capital de 7500 pesetas prestadas á 6 p. °/₀ de interés compuesto.

Resolución.—Si llamamos x al rédito de cada año, aplicando el cálculo del interés simple, obtendremos para el primer año $x=\frac{7500 \times 6}{100}=\frac{45000}{100}=450$ pesetas, que con el capital 7500 suman 7950, capital para el segundo año.

En el segundo año, será

$x=\frac{7950 \times 6}{100}=\frac{47700}{100}=477$ pesetas, que con el capital 7950 del segundo año suman 8427 pesetas.

En el tercer año resulta

$x = \frac{8427 \times 6}{100} = \frac{50562}{100} = 505‘62$ pesetas, que con 8427, capital del tercer año, suman 8932‘62 pesetas, suma de capital y réditos en los tres años.

271. Por el método de reducción á la unidad se podía generalizar más el cálculo.

Veamos cómo se resuelve por dicho método el anterior problema, y después plantearemos la cuestión en términos generales.

Puesto que 100 pesetas producen 6 al año, 1 peseta producirá $\frac{6}{100} = 0‘06$; siendo indudable por tanto que 1 peseta se convertirá al fin del primer año en 1‘06, y las 7500 pesetas prestadas se convertirán en

$$7500 \times (1‘06), \text{ capital para el segundo año.}$$

En el segundo año, 1 peseta se convertirá también en 1‘06, y las $7500 \times (1‘06)$ se convertirán en

$$7500 \times (1‘06) \times (1‘06); \text{ ó bien}$$

$$7500 \times (1‘06)^2, \text{ capital para el tercer año.}$$

Por último, en el tercer año 1 peseta se convertirá, como en los años anteriores, en 1‘06, y las $7500 \times (1‘06)^2$ se convertirán en

$$7500 \times (1‘06)^2 \times (1‘06) \text{ ó}$$

$$7500 \times (1‘06)^3, \text{ capital y réditos al finalizar los tres años.}$$

Efectuando las operaciones, resulta 8932‘62, como se vé á continuación:

$$\begin{array}{r}
1‘06 \\
1‘06 \\
\hline
636 \\
106 \\
\hline
1‘1236 \\
1‘06 \\
\hline
67416 \\
11236 \\
\hline
1‘191016 \\
7500 \\
\hline
5955080 \\
8337112 \\
\hline
8932‘620000
\end{array}$$

De los cálculos que dejamos *indicados*, se deduce que la suma de capital y réditos á interés compuesto, es igual al producto del capital multiplicado por la suma de la unidad y su interés elevado á una potencia cuyo exponente sea el número de años del préstamo.

272. Si llamamos c al capital prestado, i al interés anual de la unidad, a al número de años y C á la suma de capital y réditos, resultará de una manera general

$$C = c \times (1 + i)^a$$

Para hallar el valor de c, capital prestado, conociendo la suma de capital y réditos, el interés de la unidad y el tiempo, bastaría dividir por $(1 + i)^a$ los dos miembros de la anterior igualdad y resultaría

$$c = \frac{C}{(1 + i)^a}$$

Si los años no exceden de 2 ó 3, sabiendo extraer la raiz cuadrada y la raiz cúbica, únicas de que trata la Aritmética, también se podría hallar el valor de $(1 + i)$ y de consiguiente, el valor de i, que multiplicado por 100 nos daría el *tanto por ciento*.

Para esto partiríamos los dos miembros de la primera igualdad por c y resultaría

$$\frac{C}{c} = (1 + i)^a$$

Extrayendo la raiz a (sea cuadrada ó cúbica) de ambos miembros, tendremos

$$\sqrt[a]{\frac{C}{c}} = 1 + i. \text{ De donde}$$

$$\sqrt[a]{\frac{C}{c}} - 1 = i, \text{ interés de la unidad.}$$

Por consiguiente, el *tanto por ciento* será igual á $i \times 100$.

Problemas.—Resuélvanse los siguientes:

1.° *Cuánto dinero deberá prestarse á 6 $\frac{3}{4}$ p. °/₀ para obtener en un año 1550 pesetas de ganancia? (22666)*

2.° *Una finca que vale 65400 pesetas, ha dado de renta en un año 4350 pesetas. Qué tanto p. °/₀ anual produce (6'65)*

3.° *Por cuánto tiempo deberán prestarse 18265 pesetas á 7 p. °/₀ de interés simple para obtener una ganancia igual al capital?* (*14 años*)

4.° *Se quiere fijar el alquiler anual de una casa cuyo valor es 9460 duros, de modo que resulte un 6 $\frac{1}{2}$ p. °/₀ de ganancia para el dueño de la finca. Qué alquiler deberá pagarse anualmente por ésta?* (*614'90*)

5.° *Cuánto producirán 6430'40 pesetas prestadas por 4 años y tres meses á 5'5 p. °/₀ de interés simple?* (*1503'10*)

6.° *A cuánto asciende un capital que impuesto por 5 años al 6 p. °/₀ de interés simple ha producido 10000 pesetas?* (*33333*)

7.° *A qué tanto p. °/₀ habrá estado impuesto un capital de 11500 pesetas, que en 3 años ha producido 6800 pesetas á interés simple?* (*19'41*)

8.° *Cuánto suma con sus réditos un capital de 30900 pesetas prestadas por 4 años á 7'50 p. °/₀ de interés compuesto?* (*41265'82*)

LECCIÓN XLI.

Regla de Descuento.

273. *Entiéndese por descuento la cantidad que se rebaja del valor que representa una letra, pagaré ú otro documento de crédito por cobrarlo antes de la época de su vencimiento.*

Se llama *letra de cambio* un documento escrito con ciertas formalidades en el que una persona manda á otra domiciliada en distinto lugar que pague la cantidad que dicho documento expresa. En las letras intervienen comunmente tres personas: el *librador*, que es el que gira la letra; el *tomador* ó persona á cuyo favor se expide, y el *pagador*, que es el que debe satisfacerla.

Las letras de cambio se giran, ó bien á pagar *á la vista*, esto es, en el acto de presentarlas, ó *á plazo*, que puede ser de días, meses y aun años. La fecha en que se ha de pagar la letra se llama *vencimiento* de la misma.

Las letras giradas á plazo, únicas de que aquí debemos tratar, tienen dos valores: uno venidero, que es la cantidad que representa aquel documento, y que se llama *valor nominal*, y otro denominado *valor actual*, que es el que tiene en un tiempo cualquiera anterior al vencimiento, y menor que el nominal. La diferencia entre estos dos valores es lo que constituye el *descuento*.

Para hallar este descuento pueden adoptarse dos métodos distintos, que darán también resultados diferentes; pero uno y otro están basados, como la regla de interés, en la regla de tres.

Las cuestiones relativas al descuento, cualquiera que sea el método que se aplique, tienen dos soluciones: 1.ª, hallar la cantidad que debe descontarse; 2.ª, hallar el valor actual de la letra. En efecto, hallado el descuento, se tendrá también hallado el valor actual, pues para esto bastará restar el descuento del valor nominal. Del mismo modo, si se halla el valor actual, se obtendrá el descuento restando dicho valor actual del valor nominal. Para evitar complicaciones innecesarias en el cálculo, nos ocuparemos sólo de la primera solución; esto es, del cálculo del descuento.

Primer método.

274. En el método más comúnmente usado, el descuento se hace del valor nominal de la letra.

Ejemplo: Suponiendo que se haya de descontar al 5 por 100 una letra de 10480 pesetas, pagadera dentro de un año, cuánto importa el descuento?

El valor nominal de la letra y el tanto p. °/₀ de descuento se consideran en este método como el capital y el tanto p. °/₀ de la regla de interés, y en este concepto la cuestión se resolverá de la misma manera que si se tratara de dicha regla de interés por la proporción: *100 es al valor nominal de la letra como el tanto por 100 del descuento es al descuento total;* esto es

$$100 : 10480 :: 5 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{10480 \times 5}{100} = \frac{52400}{100} = 524, \text{ importe del descuento.}$$

Si del valor nominal 10480 restamos el descuento 524, la diferencia 9956 pesetas será el valor actual de dicha letra, ó sea la cantidad que deberá percibir el poseedor de la letra.

Otro ejemplo.—Una letra de 12000 pesetas, pagadera dentro de 15 días, se descuenta á 0'75 p. °/₀. Cuánto importa el descuento y cuánto su valor actual?

De la proporción

$$100 : 12000 :: 0'75 : x$$

$$\text{resulta } x = \frac{12000 \times 0'75}{100} = 90 \text{ pesetas.}$$

El valor actual será 12000 — 90 = 11910 pesetas.

En los dos ejemplos anteriores hemos hecho el descuento solo con relación á la unidad de tiempo. Si éste fuera diferente de la unidad, debería multiplicarse el tanto p. °/₀ de descuento por el tiempo, como en la regla de interés.

Ejemplo.—Cuánto importa el descuento de una letra de 7000 pesetas que vence dentro de 5 meses y se descuenta á 0'80 por 100 mensual?

Cálculo.—Si en un mes se descuentan 0'80 pesetas, en 5 meses se descontarán 0'80 × 5.

El problema quedará ahora resuelto por la proporción: 100 *es al valor nominal de la letra, como el tanto p. °/₀ de descuento multiplicado por las unidades de tiempo es al descuento total;* esto es

$$100 : 7000 :: 0'80 \times 5 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{7000 \times 0'80 \times 5}{100} = 280 \text{ pesetas, descuento de la letra.}$$

Segundo método.

En el método anterior, la cuestión del descuento se considera como una cuestión de *interés,* figurando el valor nominal de la letra como capital que el que la adquiere ó compra anticipa al que la posee, y el descuento como un rédito que debe producir dicho capital. Esto, sin embargo, no es exacto, como se comprenderá fácilmente.

Supongamos que se cede una letra de 100 pesetas con descuento de un 7 p. °/₀

Descontando esta letra por el método precedente, resultan 7 de descuento y quedan como valor actual 93 pesetas. El que toma la letra se queda en consecuencia, con un 7 p. °/₀ del valor nominal de la letra, mas no con 7 p. °/₀ del dinero que anticipa ó entrega, como exigiría la regla de interés, sino con un 7 por 93.

El cálculo, por más que así se haga generalmente, es vicioso sin ningún género de duda, y para rectificar el error que se comete y establecer una verdadera regla de descuento, en lugar de descontar del valor nominal, deberá tomarse como base del descuento el valor actual, ó sea la cantidad que anticipa el que toma la letra, como se verá por el siguiente

Ejemplo: Supongamos que se cede una letra de 107 ó de 100 + 7 pesetas con descuento de 7 p. °/₀ En este caso, es indudable que el que toma la letra quedándose con 7 pesetas y abonando 100 cobra un 7 por 100 del dinero que anticipa.

Considerando ahora una letra de un valor cualquiera, para calcular su descuento conforme al cálculo que precede, estableceremos la siguiente regla de tres:

Si por ciento mas el tanto por ciento de descuento se descuenta este tanto por ciento, por el valor nominal de la letra ¿cuánto deberá descontarse?

Si fuera, por ejemplo, una letra de 54300 pesetas que se hubiera de descontar al 7 p. °/₀, llamando x al descuento total, tendremos

$$100 + 7 : 7 : : 54300 : x; \text{ por tanto}$$

$$x = \frac{54300 \times 7}{100 + 7} = \frac{380100}{107} = 3552'33.$$

La misma letra, descontada por el primer método, daría

$$100 : 7 : : 54300 : x$$

$$x = \frac{54300 \times 7}{100} = \frac{380100}{100} = 3801.$$

Descontándose en el primer método del valor nominal y en el segundo del valor actual, y siendo aquel valor mayor que éste es claro que por el primer método debía resultar como resulta, mayor descuento que por el segundo.

La diferencia de los descuentos por ambos métodos, es igual al interés que produciría el importe del descuento que resulta por el segundo método si se impusiera á un interés igual al tanto p. °/₀ de descuento. En el caso presente, el descuento por el segundo método es 3552'33, cuya cantidad, impuesta á interés de 7 p. °/₀, produciría 248'66, diferencia entre los descuentos 3801 y 3552'33 resultantes de ambos métodos.

Si el tiempo fuera diferente de la unidad, en el segundo método deberá multiplicarse el tanto p. °/₀ de descuento por el tiempo como en el primer método.

Ejemplo.—Supongamos que se haya de descontar al 5 por 100 anual una letra de 9000 pesetas cuyo pago vence dentro de 3 años.

Tendremos la proporción

$$100 + 5 \times 3 : 5 \times 3 : : 9000 : x. \text{ De donde}$$

$$x = \frac{5 \times 3 \times 9000}{100 + 5 \times 3} = 1173'91.$$

Aunque lo expuesto basta para resolver por ambos métodos las diferentes cuestiones que pueden ocurrir en la regla de descuento, generalizaremos ahora el cálculo, estableciendo además las proporciones á que puede dar lugar dicha regla, ya se emplee uno ú otro método; ya sea el tiempo la unidad ó diferente de la unidad; ya, en fin, se pida el descuento ó el valor actual.

Designando por n el valor nominal, por i el tanto p. % de descuento, por t las unidades de tiempo, por x el descuento y por v el valor actual, se podrán establecer las siguientes proporciones:

Primer método.

$100 : i :: n : x \qquad x = \dfrac{i \times n}{100}$

$100 : 100 - i :: n : v \qquad v = \dfrac{100 - i \times n}{100}$

$100 : i \times t :: n : x \qquad x = \dfrac{i \times t \times n}{100}$

$100 : 100 - i \times t :: n : v \qquad v = \dfrac{100 - i \times t \times n}{100}$

Segundo método.

$100 + i : i :: n : x \qquad x = \dfrac{i \times n}{100 + i}$

$100 + i : 100 :: n : v \qquad v = \dfrac{100 \times n}{100 + i}$

$100 + i \times t : i \times t :: n : x \qquad x = \dfrac{i \times t \times n}{100 \times i \times t}$

$100 + i \times t : 100 :: n : v \qquad v = \dfrac{100 \times n}{100 + i \times t}$

Problemas.—Resuélvanse los siguientes:

1.° *Hallar el descuento de una letra de 14.200 pesetas pagadera á los 20 días, suponiendo que se descuenta á 0'60 por 100 mensual.* *(85'20), (84'69)* (1)

2.° *Cuánto vale actualmente una letra de 7560 pesetas pagadera á 7 meses, descontándola á $\frac{1}{4}$ p. % mensual? (7427'70), (7439'80)*

(1) Estos resultados corresponden al 1.° y 2.° método respectivamente.

3.° *Descontar á 7 $\frac{1}{2}$ p. °/₀ anual un pagaré de 15.000 pesetas que vence á los 5 años. (5625), (4090'90)*

4.° *Descontar á 1'05 p. °/₀ mensual una letra de 20.540 pesetas pagadera á cien días. (711'90), (687'82)*

LECCIÓN XLII.

División de un número en partes proporcionales á varios números dados.—Regla de Compañía.

275. Supongamos que se hayan de dividir 48 duros entre tres personas proporcionalmente á los números 2, 3 y 7; esto es, de manera que las relaciones de las tres partes con los números 2, 3 y 7 sean iguales.

Como 2, 3 y 7 suman 12, si dividimos 48 en 12 partes iguales y damos 2 de estas partes á la primera, tres á la segunda y 7 á la tercera, habremos obtenido las tres partes que se buscan, que son respectivamente

$$\frac{48}{12} \times 2; \frac{48}{12} \times 3 \text{ y } \frac{48}{12} \times 7,$$

ó sea 8 duros, 12 duros y 28 duros.

Si las partes hubieran de ser proporcionales á números fraccionarios, tales como $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{9}{11}$ reduciéndolos á común denominador resulta

$$\frac{154}{231}, \frac{165}{231}, \frac{189}{231},$$

y en este caso, como los denominadores son iguales, las relaciones de las partes que se buscan con los quebrados propuestos, serán iguales á las relaciones de dichas partes con los numeradores 154, 165 y 189, y en consecuencia venimos á parar al primer caso. Así, pues, si se divide 7537 en partes proporcionales á los quebrados propuestos, observando que $154 + 165 + 189 = 508$, resultará

$$\frac{7537}{508} \times 154; \frac{7537}{508} \times 165; \frac{7537}{508} \times 189.$$

De los ejemplos precedentes se deduce que para dividir un número en partes proporcionales á otros números dados, se parte dicho número por la suma de aquellos á que deben ser proporcionales las partes, y el cociente se multiplica por cada uno de estos números.

Hé aquí otro ejemplo:

Se han de pagar 72420 pesetas en calderilla, plata, oro y billetes, de modo que en plata haya triplo número de pesetas que en calderilla; en oro, duplo que en plata; y en billetes, cuatro veces más que en oro. Cuántas pesetas se pagarán en cada especie de monedas?

Si suponemos que en calderilla deba haber 1 peseta, en plata habrá 3, en oro 6 y en billetes 24. Siendo la suma de estos números 34, si dividimos 72420 en partes proporcionales á los números 1, 3, 6 y 24, resultará que debe pagarse

$$\text{En calderilla}\quad \frac{72420}{34} = 2130$$

$$\text{En plata}\quad \frac{72420}{34} \times 3 = 6390$$

$$\text{En oro}\quad \frac{72420}{34} \times 6 = 12780$$

$$\text{En billetes}\quad \frac{72420}{34} \times 24 = 51120$$

Suman las cuatro partes 72420,

cuya suma sirve de comprobación á las operaciones practicadas.

276. *Regla de compañía*.—Esta regla tiene por objeto hallar la ganancia ó pérdida que corresponde á cada uno de varios socios, conociendo el capital de cada uno, el tiempo que lo han tenido impuesto y la ganancia ó pérdida correspondiente al capital de todos, llamado *capital social*.

La regla de compañía no es mas que una de las muchas aplicaciones que se hacen de la división de un número en partes proporcionales á otros números dados. La ganancia ó pérdida social es el número que se ha de dividir en partes proporcionales á los capitales de los socios, si estos capitales están impuestos el mismo tiempo; y en partes proporcionales á los capitales multiplicados por los tiempos, si están impuestos tiempo diferente.

Así, suponiendo que cuatro personas hayan impuesto por el mismo tiempo:

La primera	8340 pesetas.
La segunda	11860
La tercera	9784
La cuarta	15625,

y que deban repartirse una ganancia de 6482 pesetas, dividiendo esta cantidad en partes proporcionales á los cuatro números que preceden, corresponderán:

A la primera $\frac{6482}{45609} \times 8340$ pesetas de ganancia.

A la segunda $\frac{6482}{45609} \times 11860$

A la tercera $\frac{6482}{45609} \times 9784$

A la cuarta $\frac{6482}{45609} \times 15625$

Sean ahora los tiempos diferentes.

Supongamos que tres personas han impuesto respectivamente los capitales 85, 90, 120, la primera por 8 meses, la segunda por 9 y la tercera por 11, y que han ganado 60. Multiplicando cada capital por su tiempo correspondiente, resultan 680, 810 y 1320, que representarán los capitales respectivos de los socios, con lo cual volvemos al primer caso; y por tanto corresponderán:

A la primera $\frac{60}{2810} \times 680$

A la segunda $\frac{60}{2810} \times 810$

A la tercera $\frac{60}{2810} \times 1320$

Si se presentara el cálculo bajo la forma de proporción, ésta sería:

Para el primer caso.—*Suma de capitales es á la ganancia ó pérdida social, como el capital de cada socio es á su ganancia ó pérdida respectiva.*

Para el segundo.—*Suma de capitales multiplicados por los tiem-*

pos es á la ganancia ó pérdida social, como el capital multiplicado por el tiempo que lo tiene impuesto cada socio es á su ganancia ó pérdida respectiva.

Así, las proporciones de los dos problemas precedentes, serán:

Para el primero

$$45609 : 6482 :: 8340 : x$$
$$45609 : 6482 :: 11860 : y$$
$$45609 : 6482 :: 9784 : u$$
$$45609 : 6482 :: 15625 : z$$

Para el segundo

$$2810 : 60 :: 680 : x$$
$$2810 : 60 :: 810 : y$$
$$2810 : 60 :: 1320 : z$$

La división de un número en partes proporcionales á varios números puede simplificarse cuando estos números tengan algún factor común, pues en este caso, dividiendo dichos números por su máximo común divisor, se reducen á números menores, entre los cuales habrá la misma relación que entre los números dados.

Así, por ejemplo, si se hubieran de dividir 60000 pesetas en partes proporcionales á los números 6000, 4000 y 2000, partiendo por 1000 estos tres números resultarían 6, 4 y 2, y la cuestión quedaría reducida á dividir 60000 en partes proporcionales á los números 6, 4 y 2.

Problemas:

1.° *Dividir el número 860 en partes proporcionales á $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. (396'90) (264'60) (198'45)*

2.° *Tres ganaderos, que poseen respectivamente el primero 500 carneros, el segundo 400 y el tercero 300, arriendan una dehesa por 6000 pesetas. Cuánto debe pagar de arrendamiento cada ganadero? (2500, 2000 y 1500)*

3.° *Trabajan en una obra cuatro artesanos; el primero 25 días, el segundo 15, el tercero 12 y el cuarto 8. Suponiendo que todos ganan lo mismo cada día, y que deban repartirse 6580 reales en proporción al tiempo que han trabajado, cuánto se dará á cada uno? (2741'50, 1644'90, 1315'92, 877'28)*

LECCIÓN XLIII.

Regla de Aligación.

277. La regla de *aligación* tiene por objeto determinar, bien el precio ó valor medio de la unidad de una mezcla, dados los precios de las especies que la componen; bien el número de unidades que deben mezclarse de cada especie para que la unidad de mezcla tenga un precio dado.

Primer caso.

Supongamos que un cosechero tiene vino de dos clases, una de 4'75 pt. el Dl. y otra de 8'25 el Dl., y para facilitar la venta quiere formar una mezcla de mejor calidad que el vino inferior y no tan buena como el superior, reuniendo al efecto 30 Dl. del de 4'75 con 24 Dl. del de 8'25. A qué precio deberá vender la mezcla?

Tanto en el primer caso de que ahora tratamos, como en el segundo de que trataremos después, se supone que la unidad que se mezcla de cada precio, al mezclarse no pierde ni gana nada en sí misma de su valor primitivo.

Sentado esto, hé aquí ahora el cálculo:

30 Dl. á 4'75 pt., valen. . . .	142'50
24 Dl. á 8'25 valen.	198
Los 54 Dl. valen.	340'50

De consiguiente, un Dl. valdrá

$$\frac{340'50}{54} = 6'30 \text{ pesetas.}$$

Cualquiera que sea el número de precios que entren en la mezcla, para hallar el precio de ésta, se multiplica el número de unidades que se toman de cada clase por su precio respectivo, se suman los productos y el resultado se divide por el número de unidades mezcladas.

Ejemplo.—Habiéndose hecho una mezcla de 60 Hl. de trigo de 26 pesetas el Hl.; 80 de 24, 120 de 18 y 200 de 15, se pregunta cuánto vale 1 Hl. de mezcla.

Si llamamos x al precio del Hl., será

$$x = \frac{60 \times 26 + 80 \times 24 + 120 \times 18 + 200 \times 15}{60 + 80 + 120 + 200} = 18{'}78$$

precio del Hl. de mezcla.

Otro ejemplo.—Se quieren fundir en una sola barra, tres barras de plata, una de 6 Kg. cuya ley es de 820 milésimas; otra de 2 Kg., de 840 milésimas y otra de 5 Kg. de 925 milésimas. Se pregunta qué *ley* tendrá la mezcla resultante.

Antes de resolver la cuestión, advertiremos que se llama *ley* del oro ó de la plata, la cantidad de oro puro ó plata pura que se halla contenida en un peso dado de mezcla de alguno de estos metales con algún otro metal. Así, se dice que la ley de una barra de plata es de 810 milésimas, por ejemplo, cuando en 1 Kg. de peso de dicha barra hay 810 milésimas ó gramos de plata pura.

Entendido esto, se comprenderá fácilmente que la cuestión propuesta deberá resolverse de la misma manera que las anteriores, como se ve á continuación:

	Milésimas.
6 Kg. de ley de 820 milésimas tendrán 820 × 6.. . . .	4920 de plata
2 Kg. de 840, tendrán 840 × 2.	1680
5 Kg. de 925, tendrán 925 × 5.	4625
Los 13 Kg. tendrán.	11225

$$1 \text{ Kg. tendrá } \frac{11225}{13} = 863 \text{ milésimas.}$$

Un cálculo análogo á los que preceden se hace también siempre que, hallando resultados diferentes en la medición de una cantidad, se quiere obtener un resultado, que neutralizando los errores que se cometen por exceso y por defecto, pueda tomarse por resultado verdadero.

Ejemplo.—Se ha medido por tres veces un campo. En la primera operación resultaron 28 áreas y 15 centiáreas; en la segunda 27 áreas

94 centiáreas, y en la tercera 28 áreas y 6 centiáreas. En cuántas áreas debe apreciarse la superficie de dicho campo?

Reduciendo á metros cuadrados los resultados de las tres medidas practicadas, salen

De la 1.ª	2815
De la 2.ª	2794
De la 3.ª	2806
De las 3 salen	8415

Dividiendo este resultado por 3, que es el número de medidas ejecutadas, resultan

$$\frac{8415}{3} = 2805 \text{ metros cuadrados,}$$

ó sean 28 áreas y 5 centiáreas.

Segundo caso.

Hallar las unidades que deben tomarse de cada precio, conociendo el que tienen las clases que se mezclan y la unidad de la mezcla.

Ejemplo.—Con café de 17 reales Kg. y de 32 reales se ha de formar una mezcla que valga á 22 reales. Cuántos Kgs. deberán tomarse de cada clase?

Supongamos que de 17 reales se toman x Kgs. y de 32, z kilogramos.

En cada Kg. de 17 que se vende á 22 se ganarán 22 — 17 reales y en x Kgs. se ganarán $(22 - 17) \times x$.

En cada Kg. de 32 que se vende á 22 se perderán 32 — 22, y en z Kgs. se perderán $(32 - 22) \times z$.

Como no se ha de ganar ni perder nada en la mezcla, lo que se gane en los Kgs. que se tomen de 17 ha de ser igual á lo que se pierda en los Kgs. que se toman de 32; y por tanto

$$(22 - 17) \times x = (32 - 22) \times z.$$

Si consideramos ahora los factores del primer miembro de esta igualdad como términos extremos de una proporción, y como medios los del segundo, tendremos:

$$x : z : : 32 - 22 : 22 - 17.$$

Esto es: número de Kgs. que han de tomarse de la clase inferior, es á los que han de tomarse de la superior, como la diferencia entre el precio superior y el medio, es á la diferencia entre el precio inferior y el medio.

De donde se infiere que las cantidades que han tomarse de ambas clases están en razón inversa de las diferencias entre los precios y el precio medio; y por tanto, de la clase inferior se tomará un número de unidades igual á la diferencia que hay entre el precio superior y el medio; y de la superior, un número de unidades igual á la diferencia que hay entre el precio inferior y el medio; ó sea 10 Kgs. del 17 y 5 del de 32.

En la práctica se dispone el cálculo de esta manera:

Precio medio.	Precios dados.	Unidades que se han de tomar de cada clase
22	17	10
	32	5

Multiplicando el total de las unidades mezcladas por el precio de la mezcla, deberá resultar lo mismo que si se multiplican las unidades que se toman de cada clase por sus precios primitivos y se suman los productos.

Así,

$$(10 + 5) \times 22 = 10 \times 17 + 5 \times 32$$

Si los precios fueran más de dos, se restan de dos en dos del precio medio, teniendo cuidado de que aquéllos sean uno mayor y otro menor que éste. Suponiendo, por ejemplo, que los precios fueran 38, 32, 25 y 20, y el precio medio 30, descompondríamos la cuestión de esta manera:

$$30 \begin{cases} 38. \; . \; . \; 10 \\ 20. \; . \; . \; 8 \end{cases}$$

$$30 \begin{cases} 32. \; . \; . \; 5 \\ 25. \; . \; . \; 2 \end{cases}$$

y resultarían 10 de 38; 8 de 20; 5 de 32 y 2 de 25.

Si fuera impar el número de precios, el precio que resulte suelto se combina con uno de los otros.

Sean, por ejemplo, los precios 12, 17, 21, 29 y 37, y el precio medio 20. En este caso se podrían formar los tres grupos siguientes:

$$20 \begin{cases} 12. \; . \; . \; 1 \\ 21. \; . \; . \; 8 \end{cases}$$

$$20\left\{\begin{array}{l}12.\ .\ .\ 17\\37.\ .\ .\ \ 8\end{array}\right.$$

$$20\left\{\begin{array}{l}17.\ .\ .\ \ 9\\29.\ .\ .\ \ 3\end{array}\right.$$

y resultarían $1 + 17 = 18$ de 12; 8 de 21; 8 de 37; 9 de 17 y 3 de 29.

Como pueden aparearse indistintamente dos precios cualesquiera, con la única condición de que uno sea mayor y otro menor que el medio, es claro que estos problemas admiten varias soluciones, según se agrupen de dos en dos los precios dados.

Por otra parte, duplicando, triplicando, etc., los resultados obtenidos, los productos satisfacen también las condiciones del problema, y en consecuencia, las soluciones de éste aumentan indefinidamente.

Así, en el primer ejemplo, en lugar de

	Podrían tomarse
10 Kgs. de 17 reales. . .	10×2; 10×3; 10×4, etc.
y 32 de 5.	32×2; 32×3; 32×4, etc.

Si se quisiera un número determinado de unidades de mezcla, después de resolver la cuestión de la manera que hemos visto, podría dividirse el número de unidades que se deseen en partes proporcionales al número de unidades que hayan resultado de cada precio.

Ejemplo.—Supongamos que con canela de 36 reales Kg., de 40, de 52 y 55 se hayan de formar 400 Kgs. de mezcla que valga á 50 reales el Kg. Cuántos Kgs. se tomarán de cada clase?

Disponiendo el cálculo como anteriormente

$$50\left\{\begin{array}{l}36.\ .\ .\ \ 2\\52.\ .\ .\ 14\end{array}\right.$$

$$50\left\{\begin{array}{l}40.\ .\ .\ \ 5\\55.\ .\ .\ 10\end{array}\right.$$

resultan 2 Kgs. de 36; 14 de 52; 5 de 40 y 10 de 55.

Dividiendo ahora 400 en partes proporcionales á 2, 14, 5 y 10, resultarán

De 36 reales $\frac{400 \times 2}{31} = 25$ Kgs. próximamente.

De 52 $\frac{400 \times 14}{31} = 180$

De 40 $\frac{400 \times 5}{31} = 64$

De 55 $\frac{400 \times 10}{31} = 129$

LECCIÓN XLIV.

Regla conjunta.

278. La *regla conjunta* tiene por objeto hallar la relación que hay entre dos cantidades por la que entre sí tienen otras intermedias. Si la regla conjunta se aplica á la reducción de monedas de un país á las de otro diferente, se denomina regla de *cambio.*

La resolución de la regla conjunta está fundada en el siguiente principio: Multiplicando varias equivalencias, en las que la especie del primer miembro de cada una sea la misma que la del segundo miembro de la anterior, los productos son equivalentes; y además el primer producto es de la primera especie, y el segundo de la última.

Supongamos que siendo las especies $a,\ b,\ c,\ d,$ se dan las equivalencias siguientes:

$$5a = 3b$$
$$2b = 4c$$
$$6c = 7d$$

Decimos que

$$5 \times 2 \times 6a = 3 \times 4 \times 7d; \text{ ó bien}$$
$$60a = 84d.$$

En efecto; si multiplicamos los miembros de la primera por el número abstracto 2, y los de la segunda por el número abstracto 3, resulta

$$10a = 6b$$
$$6b = 12c$$

Como aquí hay dos cantidades iguales á una tercera, y por tanto iguales entre sí, las dos primeras equivalencias quedan reducidas á la siguiente:

$$10a = 12c,$$

Y siendo la tercera $6c = 7d;$

si multiplicamos los dos miembros de la primera de estas dos últimas equivalencias por el número abstracto 6, y los de la segunda por 12, resultará

$$60a = 72c$$
$$72c = 84d$$

De donde sacaremos por último

$$60a = 84d$$

Lo mismo sucedería si hubiera más equivalencias.

Sabido esto, y suponiendo que se hayan de reducir monedas de un país á las de otro, para plantear y resolver el problema mediante la regla conjunta, llamaremos x, por ejemplo, al número de monedas que se busca, formando con él y con la cantidad á que se compara, la primera equivalencia; se establecerán después con las relaciones conocidas otras equivalencias, cada una de las cuales comience por la especie con que concluye la anterior, hasta llegar á una equivalencia cuyo segundo miembro sea de la misma especie que el primero de la primera; se multiplican entre sí las equivalencias formadas, y se halla el valor de la incógnita, que será igual al segundo miembro dividido por el producto de los factores que la acompañan.

Ejemplo.—Sabiendo que un dollar vale 5'34 francos, se pregunta cuántos duros españoles tienen 180 dollars.

Designando por x los duros españoles equivalentes á 180 dollars, tendremos como primera equivalencia: x duros $=$ 180 dollars.

Conocida ahora la relación del dollar con una moneda francesa y la de una moneda francesa con la de una moneda española, se podrán formar todas las equivalencias que después de la primera aparecen á continuación:

x duros = 180 dollars
1 dollar = 5'34 francos
5 francos = 19 reales
20 reales = 1 duro

Como la especie duros del segundo miembro de la última equivalencia es ya igual á la del primer miembro de la primera, tendremos suficientes equivalencias, y multiplicándolas ahora entre sí, resultará según el principio general establecido

$$x \times 1 \times 5 \times 20 \text{ duros} = 180 \times 5'34 \times 19 \times 1 \text{ duros},$$

y por consiguiente

$$x = \frac{180 \times 5'34 \times 19}{5 \times 20} = 182'70 \text{ duros.}$$

279. La reducción de monedas de un país á las de otro se hace directamente por medio de una proporción cuando se conoce el *cambio* entre ambos países; entendiéndose por cambio el número de monedas extranjeras que se dan por una moneda nacional. Los cambios de nuestra nación se ajustan al peso fuerte, por el cual se dan, aunque con notables variaciones según las circunstancias, las cantidades que expresa el siguiente cuadro, en el que solo constan algunas de las monedas más usuales en Europa:

En Francia. .	5'26 francos
Bélgica. .	5'26 francos
Portugal. .	852 reis
Inglaterra .	44 peniques
Italia. . .	5'40 liras
Hamburgo.	42 schelines
Amsterdan.	2'40 florines
Rusia. . .	125 copeks

Ejemplos:

1.° *Reducir 5000 reales á francos.*

Sabiendo que 20 reales valen 5'26 francos, tendremos la proporción

$$20 : 5'26 :: 5000 : x; \text{ y}$$

$$x = \frac{5000 \times 526}{20} = 1315 \text{ francos.}$$

2.° *Reducir 8540 francos á reales.*

Como 5'26 francos valen 20 reales, formaremos la proporción

$$5'26 : 20 : : 8540 : x;$$

$$x = \frac{8540 \times 20}{5'26} = 32490 \text{ rs.}$$

LECCIÓN XLV.

Fondos públicos.

280. Los Gobiernos se ven precisados muchas veces á pedir dinero á los particulares para atender á las necesidades públicas, y en otras ocasiones, por falta de recursos, tienen que demorar el pago de servicios personales prestados á la nación, contrayendo así verdaderas deudas, que se designan con el nombre de *deuda pública.* Los acreedores, bajo uno ú otro concepto, han recibido por lo que se les debe, documentos de crédito que se llaman *títulos,* los cuales constituyen los *fondos públicos.*

Estos títulos tienen dos valores: uno *nominal,* que es la cantidad que representan, y otro *real,* que es la cantidad efectiva por que se compran y venden.

Si el Estado no satisface estas deudas, paga por el capital que representan, ya un 3, 4 ó 5 p. °/₀, y de aquí los nombres de *títulos del 3 p. °/₀*, etc., según el interés que producen.

Hay diferentes clases de deuda pública, á saber: con interés, sin interés, flotante, consolidada ó perpétua, del personal y del material.

La deuda *con interés* produce anualmente al acreedor un tanto p. °/₀ del valor nominal; y la deuda *sin interés* da derecho solamente al capital y no produce interés.

La *flotante* procede de anticipos hechos á plazo al Gobierno.

La *consolidada* ó *perpétua* procede de anticipos hechos á renta perpétua y cuya devolución no puede exigirse, si bien el Gobierno tiene el derecho de devolverlos.

La del *personal* procede de sueldos que no se han pagado á funcionarios públicos, y la del *material,* de objetos de toda especie suministrados al Estado y cuyo valor no se ha satisfecho.

La compra y venta de rentas públicas se hace generalmente en un establecimiento que se llama la *Bolsa*, por medio de *agentes de cambio*, los cuales reciben por su comisión un tanto del comprador y del vendedor.

El *tanto* á que está el papel del Estado se fija por el valor que tienen en metálico cada 100 unidades del valor nominal. Así, se dice que tal papel está á 41 p. °/₀ cuando por cada 100 unidades de su valor nominal se pagan 41. La valuación del papel se llama cotización. El papel puede estar *al par*, *sobre el par* ó *bajo la par*, según que cada 100 unidades del valor nominal tengan de valor real 100, más de 100 ó menos de 100. Se dice que hay *alza* ó *baja* en el papel, según que aumente ó disminuya su valor real.

El tráfico que se hace con el papel en la Bolsa se llama *juego* ú *operaciones de la Bolsa*, y también *agiotaje*; y los que compran papel á un precio para venderlo á otro mayor se llaman *agiotistas*.

Las operaciones de la Bolsa dan lugar á algunos cálculos numéricos que se resuelven generalmente por medio de una proporción.

Hé aquí algunos ejemplos:

1.° *Se quiere emplear 15760 pesetas en papel que está á 40'25 p. °/₀. Se pregunta á cuánto asciende el valor nominal del papel que puede adquirirse con dicha cantidad.*

La cuestión que se ha de resolver se podrá plantear de esta manera:

Si con 40'25 pesetas en dinero se compran 100 en papel, con 15760 cuánto papel se puede comprar? De donde resulta la proporción

$$40'25 : 15.760 :: 100 : x; \text{ y}$$

$$x = \frac{15.760 \times 100}{40'25} = 39155$$

2.° *Se vende una cantidad de papel del Estado, cuyo valor nominal asciende á 60.000 pesetas. Suponiendo que este papel se cotiza á 19'12 p. °/₀, cuánto dinero efectivo debe percibirse por él?*

En este caso, contrario del anterior, por cada 100 unidades de valor nominal se reciben 19'12, y se quiere saber cuánto se recibirá por 60.000. La proporción será:

$$100 : 19'12 :: 60.000 : x; \text{ y}$$

$$x = \frac{60.000 \times 19'12}{100} = 11.472.$$

3.° *Si se compran títulos del 3 p. °/o á 52 $\frac{1}{2}$, qué interés anual produce el capital empleado?*

Aquí sucede que por cada 52 $\frac{1}{2}$ unidades del dinero que se emplea, se obtiene 3 de interés, y se pregunta cuánto producirán 100 de valor nominal; cuestión que quedará resuelta por la proporción

$$52'5 : 3 : : 100 : x$$

$$x = \frac{3 \times 100}{52'5} = 5'71 \text{ p. } °/o$$

4.° *Suponiendo que el papel del 3 p. °/o estuviera á 38'60, cuánto dinero deberá emplearse en papel de esta clase para obtener un título que produzca 3.400 pesetas anuales?*

Como puede observarse, para obtener una renta de 3, se necesitarán 38'60 en dinero, y se pregunta cuánto dinero se necesitará para obtener una renta de 3400.

Hé aquí la proporción:

$$3 : 38'60 : : 3400 : x$$

$$x = \frac{38'60 \times 3400}{3} = 43746$$

CORRESPONDENCIA

entre las medidas y pesas antiguas y las del sistema métrico.

En el cuadro de equivalencias que damos á continuación no incluimos más que la de la unidad principal de cada grupo, porque con ella sabrán obtener fácilmente las de los múltiplos y submúltiplos los que tengan alguna práctica en la Aritmética.

No incluímos tampoco la de la unidad cuadrada, ni la de la cúbica, porque ambas podrán deducirse de la equivalencia lineal.

En vez de la doble equivalencia de la unidad antigua con relación á la moderna y la de la moderna con relación á la antigua, damos solo la primera, porque esto es también suficiente, como se ha visto en el texto, para hacer todo clase de reducciones.

No hemos tomado mas que tres cifras decimales para las equivalencias, porque en los cálculos ordinarios, las aproximaciones rara vez exceden de las milésimas.

Las equivalencias de medidas usadas en algunas provincias con nombres diferentes de los que tienen en Castilla, están al final del cuadro.

Las equivalencias señaladas con comillas, debe entenderse que son iguales á las correspondientes de Castilla.

	Equivalencia de la					
	Unidad lineal Vara en Metros	Unidad agraria. Fanega en Areas.	Unidad de capacidad para líquidos. Cántara ó arroba en Litros.	Unidad de capacidad para áridos. Fanega en Litros.	Unidad de capacidad para aceite. Arroba en Litros.	Unidad de peso. Libra en Kilogr.
Castilla. . .	0'836	64'396	16'133	55'501	12'563	0'460
Alava. . . .	»	25'108	16'365	55'62	»	»
Albacete. . .	»	70'056	12'730	56'65	»	0'458
Almería. . .	0'836	»	16'36	55'062	»	»
Avila.. . . .	»	39'303	15'92	6'54	»	»
Badajoz. . .	»	»	16'42	55'84	12'42	»
Burgos. . . .	»	»	14'1	54'41	»	»
Cáceres.. . .	»	»	13'84	»	»	»
Cádiz.. . . .	»	»	15'844	54'544	12'52	»

Equivalencia de la

	Unidad lineal VARA en Metros.	Unidad agraria. FANEGA en Áreas.	Unidad de capacidad para líquidos. CÁNTARA ó ARROBA en Litros.	Unidad de capacidad para áridos. FANEGA en Litros.	Unidad de capacidad para aceite. ARROBA en Litros.	Unidad de peso. LIBRA en Kilogr.
Canarias. . .	0'842	52'482	10'016	62'66	»	»
Castellón.. .	0'906	8'31	11'270		12'14	0'358
Ciudad-Real.	0'839	»	16	54'58	12'44	»
Córdoba. . .	»	61'212	16'31	55'2	16'31	»
Coruña.. . .	0'843		15'58		12'43	0'575
Cuenca.. . .	»	»	15'76	54'2	15'76	»
Granada. . .	»	»	16'42	54'7	16'42	»
Guadalajara.	»	31'054	16'42	54'8	12'7	»
Guipúzcoa. .	0'837	34'327	20'16	55'3	15'78	0'492
Huelva.. . .	»	36'893	15'78	55'062	15'78	»
Huesca.. . .	0'772	7'151	9'98	22'46		0'351
Jaén.	0'839	62'627	16'04	54'74	»	»
León.. . . .	»	9'394	15'84			»
Logroño. . .	0'837	19'019	16'04	54'94	16'04	»
Madrid.. . .	0'843	34'821	16'3	55'34	16'3	»
Málaga.. . .	»	60'37	16'66	53'94	16'6	»
Murcia.. . .	»	67'078	15'6	31'94	15'6	»
Orense.. . .	»		15'96			0'574
Oviedo.. . .	»	12'577	18'41	74'014	36'84	»
Palencia. . .	»	53'831	15'76	»	12'24	»
Pamplona. .	0'785		11'77			0'372
Salamanca. .	»	»	15'98	54'58	15'98	»
Santander. .	»	»	15'8	54'84	15'8	»
Segovia.. . .	0'837	39'303	16	54'6	16	»
Sevilla.. . .	»	59'447	15'66	54'7	15'66	»
Soria.. . . .	»	22'359	15'8	55'14	15'8	»
Teruel. . . .	0'772	11'179	11'34	42'77	21'92	0'367
Toledo. . . .	0'837	46'97	16'24		12'5	»
Valencia. . .	0'906	8'31	10'77		11'93	0'355
Valladolid. .	»	46'582	15'64	54'78	15'64	»
Vizcaya. . .	»			56'92	13'48	0'488
Zamora.. . .	»	33'539	15'96	55'28	15'96	»
Zaragoza.. .	0'772		9'91	22'42	13'93	0'350

Alicante. *Vara* 0'912 mt.; la *libra* 0'533 kgr.; el *cántaro* 11'55 litros; la *varchilla* de grano 20'775 litros; el *jornal* de tierra 48'041 áreas.

Baleares. *Cana* 1'564 metros; *libra* 0'407 kgr.; *cuartera* de áridos 70'34; *mesura* para aceite 16'58 litros; *cuarterada superficial* 71'031 áreas.

Barcelona. *Cana* 1'555 mt.; *mujada superficial* 48'965 áreas; *libra* 0'400 kgr.; *cuartón de aceite* 4'15 litros; *media cuartera* de áridos 34'759 litros.

Castellón. La *varchilla* 16'60 litros.

Coruña. *Ferrado superficial* 6'395 áreas; *ferrado de grano* 16'15 litros.

Gerona. *Cana* 1'559 mt.; *mallal* de vino 15'48 litros; *cuartón para áridos* 18'08 litros; *vesana de tierra* 21'874 áreas.

León. La *emina* para áridos 18'11 litros.

Lugo. *Vara* 0'855 mt.; *libra* 0'573 kgr.; *ferrado para áridos* 13'13 litros; *ferrado superficial* 4'367 áreas.

Lérida. *Media cana* 0'778 mt.; *libra* 0'401 kgr.; *cántaro* 11'38 litros; *tres cuartones para áridos* 18'34 litros; *jornal superficial* 43'580 áreas.

Orense. *Ferrado para grano* 13'88 litros; *ferrado superficial* 6'288 áreas.

Pamplona. El *robo para áridos* 28'13 litros; *robada superficial* 8'984 áreas.

Pontevedra. *Medio cañado para líquidos* 16'35 litros; *ferrado para granos* 15'58 litros; *ferrado de tierra* 6'288 áreas.

Tarragona. *Media cana* 0'780 mt.; *armiña* para vino 34'66 litros; *sinquena* para aceite 20'65 litros; *media cuartera para áridos* 35'40 litros; *cana superficial* de rey 60'84 áreas.

Vizcaya. *Pernada superficial* 3'804 áreas.

Zaragoza. *Cuartal superficial* 2'383 áreas.

Sistema antiguo de pesas y medidas de Valencia.

Medidas lineales.

La *Cuerda* tiene.	20	brazas
Braza.	9	palmos
Vara.	4	palmos
Palmo.	12	dedos
Dedo.	12	líneas

Medidas superficiales.

La *Jovada* ó chovada. . . .	6	cahizadas
Cahizada.	6	hanegadas
Hanegada.	20	brazas cuadradas
Braza cuadrada.	81	palmos cuadrados

Medidas cúbicas.

Vara cúbica.	64	palmos cúbicos
Palmo cúbico..	1728	dedos cúbicos
Dedo cúbico.	1728	líneas cúbicas

Medidas ponderales.

Quintal..	4	arrobas
Arroba..	36	libras
Libra.	12	onzas
Onza.	16	adarmes
Adarme.	36	granos

Medidas de capacidad para áridos.

Cahiz.	12	varchillas
Varchilla.	4	almudes
Almud.	4	cuarterones

Medidas de capacidad para líquidos.

Cántara.	8	medias
Media.	2	michetas
Micheta..	2	cuartillos

Correspondencia entre las antiguas pesas y medidas valencianas y las métricas.

Vara.	0'906 metros
Vara cuadrada.	0'82 met. cuad.
Vara cúbica.	0'733 met. cúb.
Cahiz.	2'014 hectolitros
Varchilla.	16'75 litros
Almud.	4'19 litros
Cántaro..	10'77 litros
Micheta..	0'67 litros
Arroba de aceite.	11'93 litros
Libra de aceite..	0'39 litros
Arroba.	12'78 kilogramos
Libra de 16 onzas. . . .	0'473 kilogramos

Medidas, pesas y monedas extranjeras.

Medidas y pesas inglesas.

Pie.	0'305	metros
Yarda.	0'914	metros
Milla marina.	1852	metros
Legua marina.	5556	metros
Toesa.	1'949	metros
Braza marina.	1'624	metros
Acre..	40'467	áreas
Gallón.	4'543	litros
Cuartera.	2'90	hectolitros
Libratroi.	373'24	gramos.

Medidas y pesas prusianas.

Pie del Rhin	0'314	metros
Toesa.	1'883	metros
Milla.	7532	metros
Viertel.	1'148	litros
Libra.	467	gramos
Quintal.	46'76	kilogramos

Medidas y pesas austriacas.

Pie.	0'316	metros
Toesa.	0'896	metros
Milla.	7586	metros
Viertel.	14'15	litros
Libra.	560	gramos

Medidas y pesas portuguesas.

Pie.	0'328	metros
Fanega.	54'08	litros
Almud.	16'74	litros
Libra.	459	gramos

Monedas extranjeras.

	Valor aproximado en pesetas.
Franco, de Francia, Suiza y Bélgica.. .	0'96
Libra esterlina de Inglaterra.	24'24
Florin de Austria.	2'38
Dollar de los Estados-Unidos.	5'14
Rigs de Dinamarca.	2'72
Thaler de Prusia.	3'56
Rublo de Rusia.	3'90
Piastra de Turquía.	0'85
Peso de Méjico..	5'23
Pieza de 500 *reis* de Portugal.	2'45

Tabla de pesos específicos.

Platino.	22'069	Madera de granado. .	1'354
Oro forjado.. . . .	19'362	Carbón de piedra.. .	1'300
Mercurio.	13'598	Encina.	1'170
Plomo.	11'352	Agua del mar. . . .	1'026
Plata.	10'474	Agua destilada á 4°. .	1'000
Cobre fundido.. . .	8'788	Agua destilada á 0°. .	0'999
Acero.	7'816	Cera..	0'968
Hierro.	7'788	Hielo.	0'930
Estaño.	7'291	Aceite de olivas. . .	0'915
Hierro fundido. . .	7'207	Boj.	0'912
Cristal.	2'892	Haya.	0'852
Pizarra.	2'853	Naranjo..	0'705
Mármol.	2'837	Olmo.	0'671
Arena.	2'753	Pino..	0'657
Vidrio.	2'603	Alamo blanco. . . .	0'528
Marfil.	1'917	Corcho.	0'240

ÍNDICE

Esta obra, dedicada particularmente á los aspirantes al Magisterio y adoptada de texto en varias Escuelas Normales de Maestros y Maestras, cuesta 3'50 pesetas, en toda España, y se hallará de venta en la librería de Ortega, Bajada de San Francisco, en la de Villalba (Bolsería), en la de la Campana (Lonja), Valls y compañía (Correjería), y en casa del autor, Pascual y Genís, 6.

OBRAS DEL MISMO AUTOR.

La Aurora del Pensamiento, libro primero, lectura educativa é instructiva para niños y niñas. Esta obrita, aprobada de texto, y de la que van tiradas 16 ediciones, consta de un volumen, de excelente impresión, de letra grande y tipos variados, escrita bajo un plan nuevo. Acompañan al texto más de quinientas preguntas sobre el contenido de la obra. Cuesta á peseta el ejemplar encuadernado, y á 10 pesetas docena.

El libro segundo, cuya primera edición acaba de publicarse, está escrito bajo el mismo plan y cuesta lo mismo que el primero.

Nociones prácticas de Geometría, Dibujo Lineal y Agrimensura, para los aspirantes al Magisterio. Aprobada de texto. Acompaña á la obra una colección de láminas encuadernadas aparte, con 280 dibujos gráficos y á pulso. Texto y láminas 4 pesetas encuadernados en rústica.

Nociones de Geometría y Dibujo aplicado á las labores, para las aspirantes al Magisterio. 3 pesetas ejemplar.

Nociones de Algebra, para los aspirantes al Magisterio. 2'50 pesetas.

SOLÍS

ARITMETICA